INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

RENATO ELIAS DOS SANTOS D’AVILA JÚNIOR

JOGAR CONTRA A BANCA, UM RISCO OU UMA OPORTUNIDADE?

Uma sequência didática para ensino de probabilidade

CANOAS

2024

RENATO ELIAS DOS SANTOS D'AVILA JÚNIOR

JOGAR CONTRA A BANCA, UM RISCO OU UMA OPORTUNIDADE?
Uma sequência didática para ensino de probabilidade

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto Federal do Rio Grande do Sul/Campus Canoas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Juliana Sanches
Coorientador: Prof. Dr. Bruno Brogni Uggioni

Canoas

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

D259 D'Avila Júnior, Renato Elias dos Santos

Jogar contra a banca, um risco ou uma oportunidade? : uma sequência didática para o ensino de probabilidade / Renato Elias dos Santos D'Avila Júnior. -- Canoas. - 2024.

112 f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul - Campus Canoas - RS, 2024.

Orientadora: Profª Drª. Juliana Sanches; Coorientador: Prof. Dr. Bruno Brogni Uggioni.

1. Probabilidade 2. Jogos 3. Sequência didática I. Sanches, Juliana, orientadora II. Uggioni, Bruno Brogni, coorientador. III. Título.

CDU 37:51

Catalogado por: Sabrina Clavé Eufrásio CRB-10/1670

RENATO ELIAS DOS SANTOS D'AVILA JÚNIOR

JOGAR CONTRA A BANCA, UM RISCO OU UMA OPORTUNIDADE?
Uma sequência didática para ensino de probabilidade

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto Federal do Rio Grande do Sul/Campus Canoas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Canoas, 27 de março de 2024.

Resultado: Aprovado.

Banca examinadora

____
Profa. Dra. Juliana Sanches
Instituto Federal do Rio Grande do Sul

____
Prof. Dr. Bruno Brogni Uggioni
Instituto Federal do Rio Grande do Sul

____
Profa. Dra. Simone Maffini Cerezer
Instituto Federal do Rio Grande do Sul

____
Profa. Dra. Simone Francisco Ruiz
Universidade Federal do Paraná

Canoas
2024

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela inspiração e orientação que permearam cada fase deste trabalho. Agradeço sinceramente a todos os bons espíritos que guiaram meus passos ao longo desta jornada de pesquisa.

À minha esposa, Mariana, que foi minha fonte constante de apoio, compreensão e amor incondicional. Sua presença foi fundamental para minha perseverança e motivação ao longo deste caminho.

Ao meu pai, Renato, e à minha mãe, Evelise, cujo amor e encorajamento moldaram meu caráter e me deram as bases necessárias para enfrentar os desafios acadêmicos. Aos meus irmãos e cunhados, pela constante troca de experiências e apoio mútuo.

Aos meus sogros, pelas palavras de incentivo, carinho e pelas vibrações positivas.

Aos meus avós, que sempre acreditaram em mim e me transmitiram valores inestimáveis que levarei para toda a vida.

Aos meus afilhados, cuja inocência e alegria foram uma fonte constante de inspiração, recordando-me da importância do meu trabalho para as gerações futuras.

Aos amigos e familiares que estiveram ao meu lado, compartilhando risos, desafios e conquistas. Suas palavras de incentivo foram essenciais nos momentos difíceis.

Aos colegas, com quem pude conviver e aprender nos últimos dois anos. Obrigado pelos momentos de estudos, pelas conversas, pelas viagens, pizzas e churrascos Vocês foram fundamentais para minha permanência no curso.

Aos professores, que contribuíram com suas experiências e conhecimentos, enriquecendo meu aprendizado e ampliando minha visão acadêmica. Em especial ao Professor Claudiomir, pelo auxílio na confecção dos jogos de tabuleiro aplicados na sequência didática.

À minha prima, Gabrielle, por auxiliar na formatação do trabalho.

À minha orientadora, Juliana, e ao meu coorientador, Bruno, pela paciência, orientação precisa e pela confiança depositada em mim ao longo deste processo. Seus conselhos e direcionamentos foram cruciais para o desenvolvimento desta pesquisa.

Expresso minha gratidão a todos que, de alguma forma, contribuíram para o sucesso desta dissertação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos uma sequência didática para o ensino de Probabilidade, fundamentada na origem da Teoria da Probabilidade, que remonta aos jogos de azar. Historicamente, jogadores e matemáticos dedicaram-se a análises, comparações, estratégias e cálculos relacionados às frequências das ocorrências nos jogos de apostas. A compreensão desse contexto histórico sugere que o uso de jogos pode ser um recurso propício para o ensino de Probabilidade, oferecendo uma abordagem dinâmica e envolvente. A sequência didática elaborada consiste em quatro encontros, nos quais são propostos jogos que visam transmitir conceitos fundamentais de Probabilidade. O objetivo é criar uma experiência educativa que permita aos estudantes não apenas compreender teoricamente, mas também vivenciar na prática os conceitos de Probabilidade, apostas e pagamentos de apostas contra a banca. Essa abordagem visa estimular a reflexão dos estudantes sobre conceitos matemáticos, proporcionando uma compreensão mais profunda e significativa dos conceitos probabilísticos e, ao mesmo tempo, envolvê-los em situações práticas e desafiadoras, incentivando a aplicação dos conhecimentos matemáticos em contextos do cotidiano, como os jogos de azar. Assim, a sequência didática representa não apenas um conjunto de atividades, mas um produto concreto desta dissertação, refletindo a inovação e a busca por estratégias pedagógicas eficazes no ensino de Probabilidade.

Palavras-chave: Probabilidade. Jogos. Sequência didática.

ABSTRACT

In this work, we present a didactic sequence for the teaching of probability, grounded in the origin of Probability Theory, dating back to games of chance. Historically, players and mathematicians engaged in analyses, comparisons, strategies, and calculations related to the frequencies of occurrences in gambling games. Understanding this historical context suggests that the use of games can be a suitable resource for Probability teaching, providing a dynamic and engaging approach. The elaborated didactic sequence comprises four sessions, proposing games aimed at conveying fundamental probability concepts. The objective is to create an educational experience that allows students not only to comprehend theoretically but also to experience in practice the concepts of probability, bets, and payouts against the house. This approach aims to encourage students' reflection on mathematical concepts, providing a deeper and more meaningful understanding of probabilistic concepts while involving them in practical and challenging situations. It encourages the application of mathematical knowledge in everyday contexts, such as gambling. Thus, the didactic sequence represents not just a set of activities but a tangible outcome of this Master's thesis, reflecting innovation and the pursuit of effective pedagogical strategies in Probability teaching.

Keywords: Probability. Games. Didactic sequence.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A origem dos estudos sobre probabilidade está associada à busca de compreender a matemática por trás de jogos de azar: “o interesse pelos jogos de azar é intrínseco à história da humanidade, supondo uma aposta e a ideia de jogo equilibrado” (Coutinho, 2007, p.56). De acordo com Borovcnik *et al.* (1991, p. 27), “traços de probabilidade podem ser encontrados nas antigas culturas dos Indianos, Babilônios e Egípcios. O primeiro objeto conhecido usado para jogos de azar, por volta de 3.500 a.C., foi o astrágalo, um osso no calcanhar de uma ovelha”[1], mas, conforme Viali (2008, p. 145), “uma abordagem matemática do acaso e do risco só teve início efetivamente a aproximadamente 500 anos”.

Figura 1 – Tálus (astrágalos) de animal, usados como dados primitivos

Fonte: Imagem obtida do site: https://www.bbc.com/portuguese/vert-fut-56485382

Os jogos de apostas no Brasil ainda estão sendo discutidos. Já legalizados no Brasil temos os jogos de loterias, controlados pelo governo e, desde 2018, a modalidade de apostas de quota fixa, chamadas de apostas esportivas. Apesar de ainda ser ilegal a presença de cassinos no Brasil, há discussões nas maiores esferas

[1] No original: “Traces of probability can be found in the ancient cultures of Indians, Babylonians, and Egyptians. The earliest known object used for games of chance around 3500 B.C., was the astragalus, a bone in the heel of a sheep” (Borovcnik *et al.*, 1991, p. 27 – tradução nossa).

públicas para a liberação ou não deles, e, também, é uma prática relativamente comum aos brasileiros a de participar de apostas. Assim, refletir sobre a matemática presente nelas é importante, não só para conhecê-las e entendê-las, mas para participar delas de maneira consciente, para compreender os riscos e divertir-se com equilíbrio.

Essa reflexão pode ser iniciada ainda no Ensino Fundamental, com os conceitos e habilidades sobre probabilidade previstos na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que podem auxiliar na percepção dos alunos sobre os riscos de jogos de apostas.

Nesse sentido, o objetivo geral deste trabalho é apresentar e analisar uma sequência didática para o Ensino de Probabilidade para o nono ano do Ensino Fundamental. O resultado prático que buscamos com essa aplicação é: oferecer aos professores de matemática uma alternativa de abordagem dos conceitos elementares de probabilidades; e levar os alunos a refletirem sobre os riscos do mercado de apostas esportivas e cassinos *on-line* a partir do conhecimento de conceitos básicos de probabilidade.

Percebe-se um número crescente de pessoas experimentando os cassinos *on-line*, ainda não legalizados no Brasil, e as apostas esportivas, muitas vezes sem ponderar sobre suas reais possibilidades de ganho e perda. Inspirando-nos nisso, surgiram as seguintes questões: Refletir sobre os conceitos básicos de probabilidade pode auxiliar na percepção dos riscos envolvidos nesses modelos de jogos? Como a consciência probabilística do estudante interfere na sua relação com jogos de apostas?

Espera-se que, com o aumento das vivências e reflexões sobre as probabilidades envolvidas em jogos de apostas contra a banca, o indivíduo possa tomar suas decisões de maneira consciente, reconhecendo os riscos envolvidos nesse modelo de jogo. Esse entendimento aprimorado das probabilidades e a integração dos conceitos matemáticos na formação dos alunos reforçam a importância de uma abordagem educacional que promova a conscientização e o desenvolvimento crítico diante dos desafios apresentados por jogos de apostas e situações probabilísticas.

Observando as competências específicas de matemática para o Ensino Fundamental que fazem parte da BNCC, podemos destacar a segunda: “desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo” (Brasil, 2018, p. 267) como uma justificativa para o estudo dos conceitos de probabilidade. Nesse documento, podemos observar que a Unidade Temática “Probabilidade e Estatística” está presente em todos os anos do Ensino Fundamental.

Apresentamos agora um panorama dos objetos de conhecimento a serem estudados e as habilidades a serem adquiridas pelos estudantes referentes à probabilidade matemática no decorrer do Ensino Fundamental. Nos anos iniciais aparecem a construção da noção de acaso e classificação de eventos, tais como “acontecerá com certeza”, “talvez aconteça” e “é impossível acontecer”, em situações do cotidiano. São indicadas para esta etapa a análise de espaço amostral e a identificação, em eventos familiares aleatórios, de todos os resultados possíveis, estimando os que têm maiores ou menores chances de ocorrência. Por sua vez, o 5° ano conta com as habilidades de apresentar e determinar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, estimando se esses resultados são igualmente prováveis ou não.

No 6º ano, o objeto do conhecimento é o cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável e o cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista), em que a habilidade a ser desenvolvida é a EF06MA30 - Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos. Para o 7° ano, o objeto do conhecimento passa a ser os experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências. A habilidade a ser desenvolvida é a EF07MA34 - Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.

Nos últimos dois anos do Ensino Fundamental temos como objeto do conhecimento do 8° ano o princípio multiplicativo da contagem e soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral, em que a habilidade é EF08MA22 - Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1. Finalmente, para o 9º ano, temos como objeto do conhecimento a análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes e a habilidade é a EF09MA20 - Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

Com o intuito de oportunizar a aprendizagem desses conhecimentos e habilidades, foi elaborada a sequência didática da proposta. A sequência é composta por 4 encontros. No primeiro, os estudantes respondem a um questionário inicial e tem contato com o primeiro jogo (Corrida de Cavalos I), em que são introduzidos os primeiros conceitos de probabilidade. No segundo encontro, os estudantes participam do segundo jogo (Corrida de Cavalos II) e refletem sobre conceitos mais sofisticados de probabilidade. No terceiro encontro, é proposto o jogo de apostas Roleta, para introdução de jogos contra a banca. No encontro final, são propostas atividades relacionadas a apostas esportivas e os estudantes respondem a um questionário final. Experimentar um conjunto de jogos e refletir a respeito das probabilidades envolvidas pode auxiliar na tomada de decisões a respeito da temática: cassinos *online* e casas de apostas esportivas.

Conforme Póvoa *et al*. (2023, p. 6),

> o mercado de apostas esportivas é dinâmico e essencialmente diferente do mercado tradicional de apostas, com alcance muito superior e atração de um público cada vez mais jovem. O acesso ao mercado foi facilitado pelas tecnologias de informação e comunicação existentes, o que eliminou os chamados decision points (obstáculos que ajudam a refletir sobre o que se quer fazer e o que se deve fazer), propiciando comportamentos economicamente irracionais.

Ainda conforme os autores, o mercado brasileiro de apostas esportivas *online* ganhou impulso com a criação da modalidade de apostas de quota fixa em 2018. As divulgações feitas em programas esportivos, por clubes e celebridades levam a mensagem de possibilidades de ganhos a milhares de pessoas, mas será que elas percebem o risco envolvido nesses mercados de apostas? É possível que a vivência e análise probabilística sobre alguns jogos, possa auxiliar na dinâmica e na compreensão dos riscos envolvidos nessas atividades.

1 PROBABILIDADE E COTIDIANO

O Ensino de Probabilidade na educação básica desempenha um papel importante no desenvolvimento do raciocínio lógico das crianças, capacitando-as a compreender e analisar situações que envolvem incerteza e tomada de decisões. Segundo Skovsmose (2008, p. 208), o conhecimento matemático torna-se uma ferramenta para tornar o cidadão mais crítico, desafiando a tradição da matemática escolar que muitas vezes limita os estudantes a executar comandos predefinidos.

A probabilidade está intrinsecamente ligada a diversos aspectos da vida diária, permeando atividades como jogos, eventos esportivos e previsões meteorológicas. Conforme Bernardes (1987, p. 13), o ensino de Matemática deve se concentrar mais em uma forma de pensar do que na mera execução de fórmulas, e a teoria das probabilidades se revela fundamental nesse contexto.

A compreensão dos conceitos probabilísticos desde cedo auxilia os alunos a lidarem com a incerteza, preparando-os para uma tomada de decisões mais consciente. Além disso, a probabilidade serve como base para o estudo estatístico, preparando os alunos para outras disciplinas. Como destacado por Bernardes (1987), se o ensino de Matemática deve priorizar uma forma de pensar, a teoria das probabilidades desempenha um papel central nessa abordagem.

O entendimento da probabilidade capacita os alunos a tomar decisões conscientes, considerando as chances de diferentes resultados. Essa habilidade é fundamental no desenvolvimento de competências de pensamento crítico, conforme preconizado na Constituição Brasileira de 1988, que estabelece a formação cidadã como um dos objetivos centrais da educação no país (Brasil, 1988, Art. 205).

Embora a Constituição Federal Brasileira de 1988 não faça referências específicas ao Ensino de Probabilidade, a abordagem desses conceitos alinha-se aos princípios gerais da educação, como o desenvolvimento do pensamento crítico e a formação integral do indivíduo. A capacidade de compreender e lidar com situações de incerteza contribui significativamente para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

O Ensino de Probabilidade no Ensino Fundamental serve como uma base essencial para outras disciplinas, incluindo matemática financeira, estatística e disciplinas científicas. A visão expressa na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Brasil reflete essa abordagem progressiva, introduzindo a probabilidade de forma gradual ao longo dos anos de estudo.

Tanto a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) quanto os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Brasil reconhecem a importância do Ensino de Probabilidade. A BNCC, por exemplo, estabelece objetivos de aprendizagem específicos para cada ano do Ensino Fundamental, abordando progressivamente conceitos probabilísticos. Os PCN também fornecem diretrizes, enfatizando a aplicação prática da probabilidade em situações do cotidiano.

O uso de jogos no Ensino de Probabilidade é respaldado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, que reconhecem os jogos como uma forma interessante de propor problemas. Além de promover o engajamento e a motivação dos alunos, os jogos facilitam a aplicação prática de conceitos probabilísticos em contextos reais, contribuindo para uma aprendizagem ativa.

É notória a importância do Ensino de Probabilidade na formação do cidadão, evidenciando sua relevância no desenvolvimento do pensamento crítico, na tomada de decisões conscientes e como base para outras disciplinas. A reflexão nos documentos nacionais, como a BNCC e os PCN, reforça a pertinência da probabilidade na educação brasileira, destacando a progressividade no ensino desses conceitos ao longo dos anos. As próximas etapas deste trabalho aprofundarão a análise de conceitos de probabilidade, examinando estratégias didáticas específicas e explorando uma possibilidade de sequência didática no contexto educacional brasileiro.

1.1 UM POUCO DE HISTÓRIA DA PROBABILIDADE

A probabilidade é uma teoria que desempenha um papel fundamental na análise e compreensão de fenômenos incertos que permeiam nossa vida cotidiana. Desde a antiguidade até os dias atuais, a busca por entender a aleatoriedade e prever resultados incertos tem fascinado matemáticos, filósofos e cientistas. Nesta seção, abordaremos um pouco da história da probabilidade, explorando seus marcos fundamentais, desde os primórdios dos jogos de azar até as sofisticadas teorias estatísticas contemporâneas.

Ao longo dos séculos, a probabilidade evoluiu de uma mera curiosidade matemática para uma ferramenta essencial em diversas áreas do conhecimento.

Desde as cartas lançadas nas mesas de jogos na Roma Antiga até os complexos modelos estatísticos utilizados em pesquisa científica moderna, a história da probabilidade é marcada por contribuições de grandes pensadores e a incessante busca por compreender a natureza aleatória dos eventos.

É possível explorar as origens, os avanços e as aplicações práticas da probabilidade, destacando os alguns momentos que moldaram essa disciplina ao longo do tempo. A compreensão do passado não apenas enriquece nosso conhecimento, mas também lança luz sobre as bases que sustentam as teorias probabilísticas contemporâneas, proporcionando um contexto valioso para a aplicação desses princípios em diversas áreas do saber.

Assim podemos citar alguns autores que participaram ativamente do desenvolvimento dessa teoria ao longo do tempo, como, por exemplo:

- Girolamo Cardano (1501-1576): Cardano escreveu “Liber de ludo aleae”, um manual do jogador em que abordou algumas questões interessantes de probabilidade. Este documento foi divulgado após um século e é reconhecido como o primeiro a tratar do termo probabilidade, sendo publicado apenas em 1623.
- Blaise Pascal (1623-1662): Embora seja mais conhecido por suas contribuições para a filosofia, Pascal também fez importantes avanços no campo da probabilidade. Suas correspondências com Pierre de Fermat sobre o Problema dos Pontos são notáveis.
- Pierre de Fermat (1601-1665): As obras de Fermat contêm muitas de suas contribuições para a teoria da probabilidade, incluindo seus trabalhos sobre o Problema dos Pontos e o método das diferenças finitas.
- Christian Huygens (1629-1695): Em "De Ratiociniis in Ludo Aleae", Huygens fez contribuições significativas para a teoria matemática da probabilidade, discutindo métodos para calcular chances em jogos de azar.
- Jakob Bernoulli (1654-1705): A "Ars Conjectandi", obra póstuma de Jakob Bernoulli, é considerada um marco na teoria da probabilidade e introduz conceitos fundamentais, como a Lei dos Grandes Números.
- Abraham de Moivre (1667-1754): De Moivre foi um dos primeiros a aplicar a probabilidade à teoria das probabilidades. Sua obra é especialmente conhecida pela fórmula que leva seu nome, a Fórmula de De Moivre.

- Pierre-Simon Laplace (1749-1827): Laplace fez contribuições significativas para a teoria da probabilidade, formalizando muitos dos conceitos que usamos hoje. "Théorie analytique des probabilités" é uma referência importante.
- Andrey Kolmogorov (1903-1987): Kolmogorov é conhecido por seus fundamentais trabalhos em teoria da probabilidade, e sua obra foi essencial para a formalização matemática moderna dessa teoria.
- Richard von Mises (1883-1953): Von Mises contribuiu para a teoria da probabilidade, principalmente com suas ideias sobre a frequência relativa como fundamento para a probabilidade.

Cada autor mencionado deixou uma marca única, contribuindo para a história da probabilidade, que continuará a evoluir e influenciar nosso entendimento do mundo incerto. A Teoria da Probabilidade origina-se nos jogos de azar, nos quais jogadores/matemáticos faziam análises, comparações, estratégias e cálculos sobre as frequências das ocorrências que aconteciam nas apostas dos jogos. Portanto, pode ser propício utilizar jogos como recurso para o ensino de Probabilidade.

2 CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADE

Neste capítulo, introduziremos os fundamentos teóricos que servirão como base matemática para a elaboração da sequência didática proposta e para a compreensão da dinâmica de alguns jogos. As demonstrações detalhadas não serão apresentadas nesta etapa; para uma análise mais aprofundada, recomenda-se a consulta aos trabalhos de Correa (2003), Costa Neto (2006), Morgado *et al.* (2006), Ross (2010), James (2011), Vasconcelos e Rocha (2019) e Rifo (2020).

2.1 TEORIA DOS CONJUNTOS

Com o objetivo de facilitar a leitura e a compreensão deste trabalho, serão apresentados, nesta seção, conceitos fundamentais da teoria dos conjuntos, bem como algumas notações que serão empregadas ao longo desta dissertação. De acordo com a abordagem de Morgado *et al.* (2006), examinaremos a seguir algumas dessas notações.

- Conjuntos serão representados por letras maiúsculas do nosso alfabeto, por exemplo: A, B, C e assim por diante.
- O Conjunto Universo é representado pela letra grega Ω (Ômega).
- Os elementos dos conjuntos são representados por letras minúsculas a, b, c e assim por diante.
- O conjunto vazio é representado por $\emptyset$.
- A relação de um determinado elemento pertencer ou não pertencer a um conjunto é representada por $\in$ e $\notin$, respectivamente.
- A notação $n(A)$ representa o número de elementos ou a cardinalidade do conjunto A.
- Para indicar se um conjunto é subconjunto (está contido) em outro conjunto, utilizamos o símbolo $\subset$.

  Para representar a união de dois conjuntos A e B (conjunto dos elementos que pertencem a A ou B) indicamos $A \cup B$. Simbolicamente,

  $$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \; ou \; x \in B\}.$$

  A união de n conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ é definida analogamente e é representada por $\cup_{i=1}^{n} A_i$.

- Para representar a intersecção entre dois conjuntos A e B (conjunto dos elementos que pertencem a A e B simultaneamente) indicamos $A \cap B$, ou seja
$$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A\ e\ x \in B\}$$
A intersecção de n conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$é definida analogamente e é representada por $\cap_{i=1}^{n} A_i$.
- Dois conjuntos A e B são denominados disjuntos se $A \cap B = \emptyset$. Quando temos mais de dois conjuntos, dizemos que eles são disjuntos quando são disjuntos tomados dois a dois.
- Chamamos o conjunto complementar de A, o conjunto dos elementos de Ω que não pertencem ao conjunto A. Representaremos da seguinte forma
$$A^c = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}.$$
- Chamamos de conjunto diferença de A e B, representado por $A - B$, o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B, onde:
$$A - B = A \cap B^c = \{x \in \Omega \mid x \in A\ e\ x \notin B\}.$$

Exemplos: Sejam os conjuntos $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{1, 2, 3, 4,5, 7\}$, temos

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
b) $A \cap B = \emptyset$
c) $B \cap C = \{2, 4\}$
d) $C^c = \{6, 8\}$
e) $C - A = \{2, 4\}$

As principais propriedades que relacionam os conceitos definidos são apresentadas pelo teorema a seguir:

Teorema 1: Sejam $A, B\ e\ C$ conjuntos

1) Para todo conjunto $A \subset \Omega$, $A \cup \emptyset = A$ e $A \cap \emptyset = \emptyset$;
2) $A \subset B$ se, e somente se, $A \cup B = B$;
3) $A \subset B$ se, e somente se, $A \cap B = A$;
4) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
5) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
7) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

8) $A \cup A^c = \Omega$, $A \cap A^c = \emptyset$, $\emptyset^c = \Omega$, $\Omega^c = \emptyset$;

9) $(A^c)^c = A$, $A \subset B \leftrightarrow B^c \subset A^c$;

10) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;

11) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;

Definição: Seja A um conjunto não-vazio. Uma partição de A é uma família de conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$, todos não vazios, tais que:

i) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = A$;

ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$, se $i \neq j$.

Portanto, os conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ são disjuntos dois a dois e sua união é o conjunto A. Dizemos também que A foi particionado pelos conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$.

Exemplo: O conjunto de números naturais até 6, ou seja, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sejam $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{3, 4\}$ e $A_3 = \{5,6\}$. Neste caso, cada número pertence a exatamente um dos conjuntos A_1, A_2 ou A_3, e os conjuntos formam uma partição do conjunto original, visto que, cada conjunto da partição é não vazio e a união de todos os conjuntos da partição é igual ao conjunto original.

2.2 ANÁLISE COMBINATÓRIA

A análise combinatória é fundamental para a probabilidade porque fornece ferramentas e técnicas para contar e organizar o número de resultados possíveis em experimentos aleatórios. A probabilidade lida com a quantificação da incerteza e a avaliação de chances em eventos aleatórios. A análise combinatória oferece métodos sistemáticos para contar os resultados favoráveis e totais em situações em que há uma multiplicidade de possíveis ocorrências. Nesta seção, veremos algumas técnicas e resultados de contagem.

PRINCÍPIO BÁSICO DA CONTAGEM OU PRINCÍPIO DA ADIÇÃO

Se A e B são conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM/ PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

Se uma decisão d_1 pode ser tomada de m maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de n maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é mn.

Um exemplo clássico em que podemos utilizar o Princípio Fundamental da Contagem é arranjo de roupas. Suponha que você tenha 3 camisetas diferentes (A, B, C) e 2 pares de calças diferentes (X, Y). Se você deseja escolher uma camiseta e uma calça para compor seu conjunto de roupas, para saber de quantos modos você pode fazer tal escolha pode usar o princípio multiplicativo.

A primeira decisão será escolher uma das três camisetas, a segunda decisão será escolher uma entre as duas opções de calças. Agora, para calcular o número total de combinações de camisetas e calças, basta multiplicar o número de escolhas para cada etapa.

$$Total\ de\ combinações\ =\ Número\ de\ camisetas\ \times\ Número\ de\ Calças\ =\ 3 \times 2 = 6.$$

Assim, há 6 maneiras diferentes de escolher uma camiseta e uma calça. Esse exemplo ilustra uma aplicação do princípio multiplicativo, mostrando como as escolhas em etapas independentes se combinam para formar o total de possibilidades.

PERMUTAÇÃO SIMPLES

Vamos considerar um exemplo de permutação simples envolvendo a organização de objetos. Suponha que temos 3 livros (A, B, C) e queremos organizar esses livros em uma prateleira. Usaremos o princípio multiplicativo para calcular o número total de maneiras de organizar os livros.

Para a primeira escolha temos 3 opções para escolher o livro que irá à primeira posição. Digamos que escolhemos o livro A. Para a segunda escolha agora, restam 2 livros para a segunda posição (B, C). Escolhemos um deles; suponhamos que seja o livro B. Para a terceira escolha, finalmente, para a última posição, resta apenas 1 livro (C). Colocamos o livro C na terceira posição. Usando o princípio multiplicativo, multiplicamos o número de escolhas em cada etapa:

$$Número\ total\ de\ organizações\ =\ Opções\ da\ 1ª\ \times\ Opções\ da\ 2ª \times\ Opções\ da\ 3ª\ .$$

Portanto, existem 6 maneiras diferentes de organizar os livros A, B e C em uma prateleira. Esse exemplo ilustra o uso do princípio multiplicativo para calcular permutações simples.

Dados n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o número de modos que podemos ordená-los é:

$$n.(n-1).(n-2).\dots.1 = n!\text{, onde}$$
$$n! = \prod_{k=1}^{n} \quad k, \forall\, n \ \in IN.$$

Como consequência dessa definição, temos que:

(i) $1! \ = 1$

(ii) $(n+1)! = \ (n+1)n!$

(iii) por convenção, $0! = 1$

Cada ordenação dos n objetos é chamada uma permutação simples de n objetos e o número de permutações simples de n objetos distintos é representado por P_n. Assim, $P_n = n!$ (Já que $0! = 1$, defini-se $P_0 = 1$).

PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

Para calcular a quantidade de permutações possíveis de um conjunto que possui repetições, ou seja, para calcular o número de permutações com repetição de um conjunto que possui n elementos, sendo que um elemento se repete k_1 vezes, outro elemento se repete k_2 vezes e assim sucessivamente, utilizamos a fórmula:

$$P_n^{k_1,k_2,\dots,k_n} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\dots.\,k_n!}$$

Exemplo: Suponha que queremos encontrar todas as permutações possíveis da palavra "ABA". Como temos duas letras "A" e uma letra "B", teremos algumas repetições. Ao listar todas as permutações distintas, encontramos três possibilidades.

1.ABA 2. AAB 3. BAA

Assim, $P_3^2 = \frac{3!}{2!}3$.

PERMUTAÇÕES CIRCULARES

O número de permutações circulares de n objetos distintos é indicado por $(PC)_n$, valendo a igualdade:

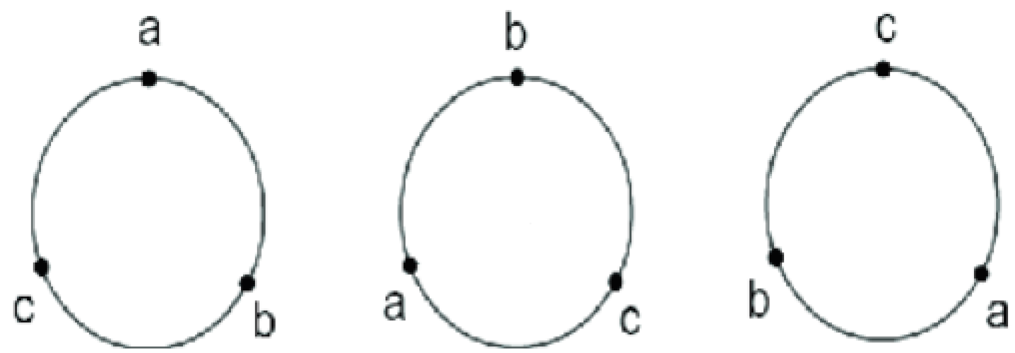
$$(PC)_n = (n-1)!$$

Uma permutação circular é uma disposição de objetos em uma ordem específica em que a ordem é importante, mas a rotação dos objetos é considerada equivalente. Em outras palavras, uma permutação circular ocorre quando os elementos são organizados em um círculo, e as diferentes disposições são consideradas iguais se puderem ser obtidas uma da outra por rotação.

Vamos considerar um exemplo simples para esclarecer a ideia. Suponha que temos três elementos, A, B e C, e queremos organizá-los em uma permutação circular. Observe as seguintes disposições: A - B - C; B - C - A e C - A - B.

A rotação é permitida, então as três disposições acima são diferentes, mas equivalentes, em uma permutação circular. Se você girar a sequência A-B-C para a direita, obtém a sequência C-A-B, e assim por diante.

Figura 2 – Permutações equivalentes



Fonte: Elaborado pelo autor.

COMBINAÇÃO SIMPLES

Uma combinação é uma seleção de elementos na qual a ordem não importa. Em outras palavras, em uma combinação, a disposição dos elementos não é considerada, apenas a escolha dos elementos em si. A notação comum para uma combinação de k elementos escolhidos a partir de um conjunto de n elementos é $C_{n,k}$.

A fórmula para calcular o número de combinações é dada por:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Essa fórmula expressa o número de combinações possíveis, considerando-se a escolha de k elementos de um conjunto de n elementos, sem considerar a ordem em que são escolhidos.

Um exemplo do uso de combinação é escolher cores em um conjunto de três cores: vermelho, azul e verde. Se queremos escolher duas cores para pintar uma parede, sem nos preocuparmos com a ordem em que as cores são escolhidas. O conjunto de cores é {vermelho, azul, verde}, e queremos saber de quantos modos podemos escolher 2 cores a partir desse conjunto.

Aplicando na fórmula, o número de combinações é:

$$C_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!\,2!} = \frac{3.2.1}{1.2.1!} = 3.$$

Portanto, existem 3 combinações possíveis de duas cores escolhidas a partir do conjunto {vermelho, azul, verde}. São elas (i) vermelho e azul, (ii) vermelho e verde e (iii) azul e verde. Nesse contexto, a ordem das cores escolhidas não importa, apenas a seleção das duas cores.

2.3 DEFINIÇÕES DE PROBABILIDADE

Para compreender o conceito de probabilidade clássica, é essencial estabelecer algumas definições preliminares. Primeiramente, consideramos experimentos aleatórios, os quais, quando repetidos sob as mesmas condições, não geram necessariamente o mesmo resultado. Exemplo: o lançamento de uma moeda. Em contraste, experimentos determinísticos, ao serem repetidos sob as mesmas condições, sempre conduzem ao mesmo resultado. Exemplo: o ponto de ebulição da água nas condições normais de temperatura e pressão.

Adicionalmente, associamos o termo espaço amostral a um experimento, representando o conjunto de todos os resultados possíveis. O evento é então definido como qualquer resultado individual ou subconjunto de resultados derivados de um experimento, ou seja, subconjunto do espaço amostral.

Em um experimento aleatório com espaço amostral finito em que todos os eventos elementares têm a mesma chance de ocorrer, dizemos que o espaço amostral é equiprovável. Na *Probabilidade Clássica,* em um espaço amostral equiprovável Ω , a probabilidade de ocorrer um evento A é indicada por $p(A)$ e definida como:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)},$$

em que $n(A)$ significa o número de elementos do evento A e $n(\Omega)$ significa o número de elementos do espaço amostral Ω. Assim, o número $p(A)$ mede a chance de ocorrer o evento A. Em geral, o conjunto Ω é dito conjunto dos resultados possíveis ou dos casos possíveis e o conjunto A é dito conjunto dos resultados favoráveis ou dos casos favoráveis. Assim, podemos redefinir a probabilidade de ocorrer o evento A como:

$$p(A) = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}.$$

A abordagem *Frequentista de Probabilidade* fundamenta-se na interpretação de probabilidade como uma medida de frequência relativa em experimentos repetidos. De acordo com essa perspectiva, a probabilidade de um evento é definida pela frequência com que esse evento ocorre em uma série de repetições idênticas de um experimento aleatório. Em outras palavras, a probabilidade é vista como a proporção de vezes que um evento específico ocorre em relação ao número total de experimentos realizados.

A probabilidade frequentista oferece uma interpretação objetiva e observacional, ancorada na ideia de que a probabilidade é uma característica inerente aos experimentos repetíveis. No entanto, ela pode enfrentar desafios em contextos em que a repetição do experimento não é viável ou não reflete a natureza do fenômeno em análise, por exemplo um meteorito atingindo um local específico da Terra. Suponha que queremos calcular a probabilidade de um evento como esse ocorrer em um determinado ano em uma região específica. Não podemos repetir esse evento várias vezes para observar sua frequência relativa, tornando difícil aplicar a abordagem frequentista.

Para definição *Axiomática de Probabilidade,* seja ε um experimento e Ω o espaço amostral associado ao mesmo. A cada evento A desse espaço amostral associamos uma medida $p(A)$, denominada probabilidade de A, que satisfaz:

(i) $0 \leq p(A) \leq 1$;

(ii) $p(\Omega) = 1$;

(iii) se $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Omega$, forem disjuntos dois a dois, então $p(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$.

Independente da definição de probabilidade utilizada, temos válidas as seguintes propriedades:

(i) Se $A = \emptyset$, então $p(A) = 0$.

(ii) Se $A = \Omega$, então $p(A) = 1$.

(iii) Se A e B são eventos tais que $A \cap B = \emptyset$, então $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

(iv) Se A e B são eventos quaisquer, então $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

(v) Seja A^c o evento complementar de A. Temos que $p(A^c) = 1 - p(A)$.

2.3.1 Probabilidade condicional

A *Probabilidade Condicional* é uma medida de probabilidade que expressa a chance de ocorrer um evento A, dado que outro evento B já ocorreu. É representada por $p(A|B)$ lido como "a probabilidade de A dado B". A fórmula da probabilidade condicional é dada por:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

Isso significa que a probabilidade de A ocorrer, dado que B ocorreu, é igual à probabilidade de ocorrência simultânea de A e B dividida pela probabilidade de ocorrência de B. (Note-se que essa definição não se aplica quando $p(B) = 0$).

Um evento A é considerado independente de um outro evento B se a probabilidade de A é igual à probabilidade condicional de A dado B. Isto é, se $p(A) = p(A|B)$.

É evidente que, se A é independente de B, B é independente de A, ou seja, $p(B) = p(B|A)$. Se A e B são independentes, então temos que:

$$p(A \cap B) = p(A).p(B)$$

2.3.2 Lei dos grandes números

Um princípio fundamental que descreve o comportamento das médias de amostras à medida que o tamanho da amostra aumenta é a *Lei dos Grandes Números*. Em sua essência, a lei sugere que, à medida que realizamos mais experimentos ou observações, a média dos resultados converge para o valor esperado ou média populacional.

Um elemento essencial para a aplicação desta lei é a independência das observações. A condição de independência assegura que o resultado de um evento não influencie o resultado de outro, sendo essencial para garantir que a média das amostras proporcione uma estimativa confiável da média populacional.

Além disso, é fundamental considerar o aumento do tamanho da amostra como o segundo componente desta lei. Quanto maior a amostra analisada, mais a média das observações se aproxima da média verdadeira da população. Este princípio destaca que, com amostras suficientemente grandes, podemos confiar cada vez mais na média amostral como uma estimativa precisa da média populacional.

A Lei dos Grandes Números desempenha um papel crucial em diversos cenários práticos que envolvem probabilidade, tais como estudos estatísticos, pesquisas de mercado e experimentos científicos. Ao oferecer uma base teórica robusta para a inferência estatística, ela proporciona uma compreensão fundamental de como as médias amostrais se comportam em relação às médias populacionais, especialmente à medida que mais dados são coletados.

2.3.3 Variável aleatória

Uma variável aleatória é um conceito fundamental na teoria da probabilidade e estatística. Ela representa uma quantidade numérica que resulta de um experimento aleatório. A atribuição de valores a uma variável aleatória é determinada pelo resultado específico desse experimento aleatório, ou seja, qualquer função observável que faz corresponder um número a cada resultado do experimento aleatório é chamada uma variável aleatória.

Para cada resultado em Ω, o número associado pela função é chamado o valor da variável aleatória para esse resultado. Denotaremos as variáveis aleatórias por letras maiúsculas e seus valores, pela respectivamente letra minúscula: por exemplo $X, Y, N\ X(\omega) = x$, etc.

Existem dois tipos principais de variáveis aleatórias: discretas e contínuas.

- Variável Aleatória Discreta: Assume um conjunto finito ou enumerável de valores. Os valores geralmente correspondem a contagens ou a resultados específicos. Exemplos: O número de caras ao lançar uma moeda, o número de alunos em uma sala de aula etc.
- Variável Aleatória Contínua: Pode assumir qualquer valor dentro de um intervalo específico. Geralmente está associada a medidas e é representada por uma função de densidade de probabilidade. Exemplos: a altura de uma pessoa, tempo de espera em uma fila, etc.

A ideia de variáveis aleatórias é essencial para modelar fenômenos incertos e realizar análises estatísticas. Elas fornecem uma maneira de quantificar e entender a aleatoriedade inerente a muitos processos do mundo real.

2.3.4 Distribuição de probabilidade

A distribuição de probabilidades, no contexto da teoria da probabilidade, é uma função matemática que descreve a probabilidade de ocorrência de cada resultado possível em um conjunto de eventos. Essa função atribui probabilidades a diferentes valores que uma variável aleatória pode assumir, representando assim a variabilidade associada a um fenômeno aleatório.

Dada uma variável aleatória X, usaremos a notação $p(X = a)$ para indicar a probabilidade de que X seja igual a a em uma realização do experimento. Analogamente para $p(X \leq a)$ ou qualquer outro subconjunto real.

Existem diferentes tipos de distribuições de probabilidades, cada uma aplicável a situações específicas. A distribuição discreta de probabilidades é associada a variáveis aleatórias discretas, como contagens inteiras, enquanto a distribuição contínua de probabilidades é usada para variáveis aleatórias contínuas, como medidas que podem assumir qualquer valor dentro de um intervalo.

A função de distribuição de probabilidades é fundamental para a análise estatística e inferência, pois fornece uma estrutura formal para entender as probabilidades associadas aos resultados de um experimento ou processo aleatório. A soma das probabilidades em uma distribuição deve ser igual a 1, refletindo a certeza de que um dos resultados possíveis ocorrerá. Conhecer a distribuição de probabilidades é necessário para calcular estatísticas descritivas, realizar inferências estatísticas e tomar decisões conscientes em uma variedade de contextos, desde finanças até ciências naturais e sociais.

2.3.5 Esperança

Na teoria da probabilidade, a esperança (ou valor esperado) de uma variável aleatória é uma medida probabilística que representa o "centro de massa" ou o valor médio que se espera dessa variável em um grande número de repetições de um experimento aleatório. A esperança, ou o valor esperado ou média, de uma variável aleatória discreta X é o número, denotado por $E(X)$, e é obtido da seguinte maneira: multiplicando o valor de X associado a cada resultado do experimento aleatório pela probabilidade do resultado, e somando tais produtos:

$$E(X) = \sum_v \quad vp(X = v),$$

em que a soma é feita sobre todos os valores v possíveis de X.

Exemplo: Vamos considerar o conceito de esperança no contexto de probabilidade com um exemplo simples. Suponha que você está jogando um dado padrão de seis lados. Se designarmos X como a variável aleatória que representa o resultado do lançamento do dado, então a esperança, denotada por $E(X)$, seria calculada multiplicando cada possível resultado pelo seu respectivo valor e somando esses produtos.

Para um dado justo, cada face tem probabilidade $\frac{1}{6}$ de aparecer. Assim, a esperança seria:

$$E(X) \ = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = 3{,}5.$$

PREÇO JUSTO

O conceito de preço justo em probabilidade refere-se ao valor esperado que se pretende pagar ou receber em uma aposta ou transação, levando em consideração as probabilidades associadas aos diferentes resultados. Vejamos o exemplo de Rifo (2020, p. 70):

> Suponha que você pode participar do seguinte jogo.
> Selecione, sem reposição, duas bolas da urna (2☻,3O).
> Você ganha 100 reais por cada bola preta obtida.
> Até quanto você pagaria para entrar neste jogo?
> No jogo descrito, você pode ganhar 0 reais, 100 reais ou 200 reais, com as probabilidades descritas na distribuição de X, para 0, 1 ou 2, respectivamente.
> Observe a de distribuição:
>
> $$p(PP) \ = \frac{2}{5} . \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$
> $$p(PB) \ = \frac{2}{5} . \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$
> $$p(BP) \ = \frac{3}{5} . \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$
> $$p(BB) \ = \frac{3}{5} . \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$
>
> Você pagaria 10 reais para entrar nesse jogo? A maioria de nós, sim: perder 10 reais não é tão grave, considerando a chance de 70% de ganhar 100 ou até 200 reais. Mas ninguém pagaria mais de 200 reais, porque o jogo não cobre esse valor.
> Perceba que há um valor, R$10, que você pagaria, e um valor R$200, que você não pagaria. Portanto, deve haver um valor intermediário que você consideraria justo: você pegaria menos, mas não aceitaria pagar mais que esse valor limitante, e a casa aceitaria mais, mas não menos.

Esse limitante poderia ser R$150? Neste caso, você poderia lucrar 200-150=50 reais com 10% de chance, ou perder (50 ou 150) com 90% de chance. Não parece conveniente.
E R$100? Aqui, você poderia ficar na mesma com 60% de chance, ou lucrar 200-100 = 100 reais com 10% de chance, ou perder 100 reais com 30% de chance. É melhor que o anterior, mas ainda não parece conveniente.
Qual é o preço justo? Adivinhou: é o valor esperado. Vamos ver por quê. Se você pagar 80 reais, você pode:

a) ganhar 120 reais probabilidade de 0,1;
b) ganhar 20 reais com probabilidade de 0,6;
c) ou perder 80 reais com probabilidade de 0,3.

Na média, o seu lucro esperado é:

$$lucro\ esperado = 120 \times 0.1 + 20 \times 0.6 - 80 \times 0.3 = 0$$

É isso o que define um preço justo: não há um viés no lucro esperado favorecendo nenhum dos dois jogadores. De fato, veja que quem está oferecendo o jogo perde exatamente o que você ganha, respectivamente:

a) perde 120 reais com probabilidade 0,1 (recebe 80 reais seus e paga 200);
b) perde 20 reais com probabilidade de 0,6 (recebe 80 reais seus e paga 100);
c) ou ganha seus 80 reais com probabilidade de 0,3, tendo, portanto, um lucro esperado de
$-120 \times 0.1 - 20 \times 0.6 + 80 \times 0.3 = 0$

Em resumo, a média de uma variável representa o preço justo para entrar em um jogo no qual você recebe os valores da variável com suas respectivas possibilidades (Rifo, 2020, p. 70).

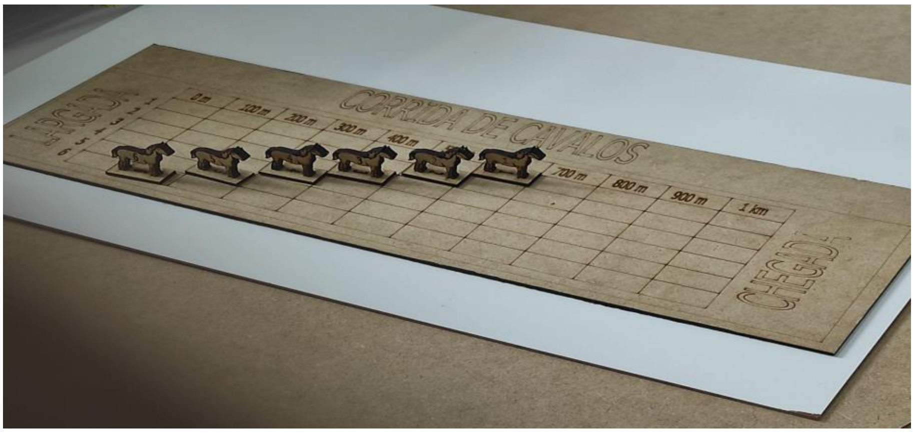
Inspirados no conceito de preço justo, propomos o conceito de *aposta justa*. Será considerada uma *aposta justa* aquela aposta que não favorece o apostador, nem a casa onde o lucro esperado é igual a zero.

3 PROBABILIDADE NOS JOGOS

Neste capítulo, vamos fazer uma análise das probabilidades intrínsecas aos jogos que serão empregados na sequência didática. Vamos olhar para as possibilidades e o que podemos esperar acontecer em diferentes situações nos jogos Corrida de Cavalos I, Corrida de Cavalos II, Roleta e Apostas Esportivas. Ao entender melhor essas chances nos jogos, queremos fornecer uma base sólida para lidar com as probabilidades de forma mais ampla.

3.1 CORRIDA DE CAVALOS I

Figura 3 – Jogo Corrida de Cavalos I



Fonte: Registro feito pelo autor.

O jogo é composto por seis cavalos, numerados de um a seis e dispostos inicialmente no ponto de partida do tabuleiro. Para avançar no tabuleiro, é lançado um dado numerado de um a seis, avança uma casa no tabuleiro o cavalo com o número obtido na face superior do dado. Vence a corrida o cavalo que chegar primeiro à linha de chegada.

Observe que a probabilidade de cada cavalo avançar, em uma determinada rodada, é a mesma e pode ser descrita como:

$$p = \frac{1}{6} \ .$$

Agora, considere um tabuleiro composto de 10 espaços, qual a probabilidade de um cavalo ganhar a corrida após 10 lançamentos?

Considerando o espaço amostral equiprovável, a probabilidade de um cavalo avançar 10 casas em 10 lançamentos é igual a de se repetir o resultado do primeiro lançamento 9 vezes no dado. Neste caso,

$$p = \left(\frac{1}{6}\right)^9.$$

Note que o número máximo de rodadas até termos um vencedor é de 55 rodadas, pois se nenhum cavalo tivesse avançado 10 casas até o 54º lançamento, todos já teriam avançado 9 casas, encerrando a corrida no próximo lançamento.

Para dimensionar a dificuldade de ganhar a corrida em apenas dez lançamentos, podemos comparar a chance do cavalo número 2 ganhar a corrida em 10 lançamentos e a chance de ganharmos na Mega-Sena com um bilhete simples de 6 dezenas.

Seja $p(A)$ a probabilidade do cavalo 2 vencer a corrida em 10 lançamentos, temos:

$$p(A) = \left(\frac{1}{6}\right)^{10} = \frac{1}{60\,466\,176}.$$

Pois, para cada lançamento, a probabilidade de sair o número 2 é igual a $\frac{1}{6}$.

Seja $p(B)$ a probabilidade de vencer na Mega-Sena com um bilhete simples, temos:

$$p(B) = \frac{1}{C_{60,6}} = \frac{1}{50\,063\,860}.$$

Logo, temos que $p(B) > p(A)$. Ou seja, é mais provável ganhar na Mega-Sena do que um cavalo ganhar a corrida sem nenhum avanço dos demais.

3.2 CORRIDA DE CAVALOS II

O jogo é composto por doze cavalos, numerados de um a doze e dispostos inicialmente no ponto de partida do tabuleiro. Para avançar no tabuleiro, são lançados dois dados numerados de um a seis, avança uma casa no tabuleiro o cavalo com a soma obtida dos pontos na face superior de cada dado. Vence a corrida o cavalo que chegar primeiro à linha de chegada.

Apesar de ter uma estrutura semelhante ao Jogo de Cavalos I, como nosso universo amostral é composto pela soma dos pontos obtidos nos lançamentos dos dados, os eventos possíveis não são equiprováveis. Seja a variável aleatória X, que representa a soma do lançamento de dois dados. Analisando os resultados possíveis para cada lançamento temos:

SOMA 1: Note que se trata de um evento impossível, pois quaisquer que sejam os pontos obtidos nos dados a soma nunca será igual a 1.

SOMA 2: Para que a soma seja igual a 2, a única possibilidade de resultado é ter obtido um nos dois dados.

SOMA 3: Para que a soma seja igual a 3, podemos obter um no primeiro dado e dois no segundo, ou dois no primeiro dado e um no segundo.

SOMA 4: Para que a soma seja igual a 4, podemos ter nos dados: um e três, dois e dois ou três e um.

SOMA 5: Para obter a soma 5, podemos obter nos dados: um e quatro, dois e três, três e dois ou quatro e um.

SOMA 6: Para a soma ser igual a 6, podemos ter: um e cinco, dois e quatro, três e três, quatro e dois ou cinco e um.

SOMA 7: Para a soma ser igual a 7, temos as seguintes possibilidades: um e seis, dois e cinco, três e quatro, quatro e três, cinco e dois ou ainda seis e um.

SOMA 8: Para a soma ser igual a 8, podemos ter: dois e seis, três e cinco, quatro e quatro, cinco e três ou seis e dois.

SOMA 9: Para obter a soma 9, podemos obter nos dados: três e seis, quatro e cinco, cinco e quatro ou seis e três.

SOMA 10: Para que a soma seja igual a 10, podemos ter nos dados: quatro e seis, cinco e cinco ou seis e quatro.

SOMA 11: Para que a soma seja igual a 11, podemos obter cinco no primeiro dado e seis no segundo, ou seis no primeiro dado e cinco no segundo.

SOMA 12: Para que a soma seja igual a 12 só existe a possibilidade de sair seis nos dois dados.

Note que somas iguais ou maiores que treze também são eventos impossíveis.

No lançamento de dois dados existem 36 combinações de resultados possíveis, assim a probabilidade de cada soma pode ser observada no quadro:

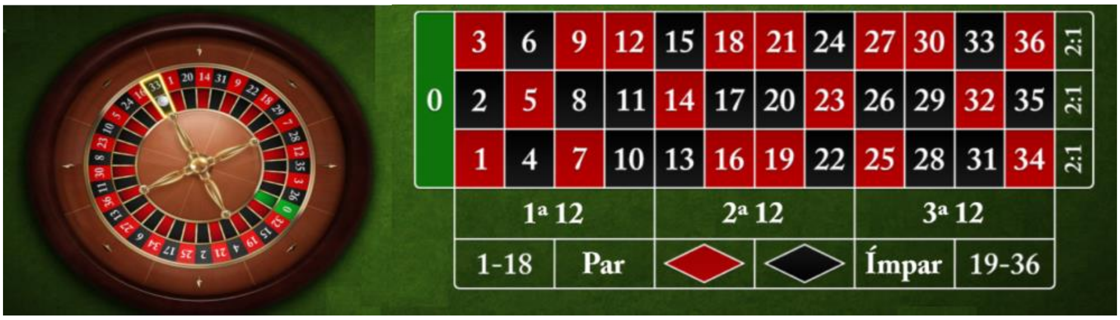
$X = x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(X = x_i)$	$\frac{0}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Observe que a chance do cavalo 7 ser sorteado em cada lançamento de dois dados é maior que as demais, tornando-o o cavalo favorito a vencer a corrida.

3.3 ROLETA

Existem várias versões de jogos de roleta, as mais conhecidas são a Roleta Europeia e a Roleta Americana. Nas duas, a roleta consiste em uma roda, onde são gravados números de 0 a 36, no modelo Europeu. Na Americana há ainda o duplo zero “00”. A roda é dividida em canaletas numeradas, e quando a grande roda é posta a girar, uma pequena esfera é inserida na roda. O número da canaleta em que a esfera parar quando a roleta parar de girar é o número vencedor.

Figura 4 – Montagem de roleta e mesa europeia



Fonte: Elaborado pelo autor a partir da imagem obtida no site: https://blog.betano.pt/tutorial-roleta-online/

Com o avanço da tecnologia, as apostas em roletas foram se modificando conforme as modalidades criadas digitalmente, entretanto ainda há algumas apostas tradicionais em vigência. Elas são divididas entre apostas internas e externas, e são realizadas a partir da colocação das fichas, por parte do jogador, nas posições da mesa de apostas.

- APOSTAS INTERNAS:

Aposta em um número $(1n)$**:** quando o apostador escolhe apenas um número para colocar a sua ficha. Sua probabilidade de acerto difere nas duas opções de roleta, pois a europeia é repartida em 37 setores enquanto a americana em 38, assim temos a probabilidade de ganhar com $1n$:

$$p(1n_e) = \frac{1}{37} \qquad\qquad p(1n_a) = \frac{1}{38}.$$

Em caso de vitória nesse tipo de aposta, o vencedor recebe 36 vezes o valor apostado (35:1).

Aposta em dois números $(2n)$**:** quando o apostador escolhe dois números vizinhos para colocar a sua ficha, ele aposta na mesa, sobre a linha divisória entre os números. Assim, a probabilidade de ganhar com $2n$:

$$p(2n_e) = \frac{2}{37} \qquad p(2n_a) = \frac{2}{38}.$$

Em caso de vitória nesse tipo de aposta, o vencedor recebe 18 vezes o valor apostado (17:1).

Aposta em três números $(3n)$**:** quando o apostador escolhe uma linha horizontal para colocar a sua ficha. Assim, a probabilidade de ganhar com $3n$:

$$p(3n_e) = \frac{3}{37} \qquad p(3n_a) = \frac{3}{38}.$$

Em caso de vitória nesse tipo de aposta, o vencedor recebe 12 vezes o valor apostado (11:1).

Aposta em quatro números ou corner $(4n)$**:** quando o apostador escolhe apostar sua ficha em quatro números. Desta forma, como na aposta de dois números, os quatro precisam ser vizinhos, para colocar a ficha no ponto de intersecção dos números. Assim, a probabilidade de ganhar com $4n$:

$$p(4n_e) = \frac{4}{37} \qquad p(4n_a) = \frac{4}{38}.$$

Em caso de vitória nesse tipo de aposta, o vencedor recebe 9 vezes o valor apostado (8:1).

Aposta em basket (B)**:** quando o apostador escolhe apostar sua ficha nos números do final da mesa 0, 1, 2 ou 3 na roleta europeia ou 0, 00, 1, 2 ou 3 na roleta americana. Assim, a probabilidade de ganhar com B:

$$p(B_e) = \frac{4}{37} \qquad p(B_a) = \frac{5}{38}.$$

Como a probabilidade de vitória na roleta americana para esse tipo de aposta é maior do que na roleta europeia, seu pagamento é menor. Desta forma, em caso de vitória na roleta americana o apostador recebe 7 vezes o valor da aposta (6:1) e na roleta europeia o vencedor recebe 9 vezes o valor apostado (8:1).

- APOSTAS EXTERNAS

Aposta em vermelho ou preto, par ou ímpar, 1-18 ou 19-36 $(18n)$**:** quando o jogador escolhe 18 resultados possíveis para colocar sua ficha. Assim, as probabilidades de ganhar com $18n$ são:

$$p(18n_e) = \frac{18}{37} \qquad p(18n_a) = \frac{18}{38}.$$

Em caso de vitória nesse tipo de aposta, o vencedor recebe o dobro do valor apostado (1:1).

Aposta em coluna ou dúzia $(12n)$**:** quando o jogador escolhe 12 resultados possíveis para colocar sua ficha. Nas colunas pode escolher múltiplos de 3 menos 1, múltiplos de 3 ou múltiplos de 3 mais 1, em que o "0" e o "00" não pertencem a nenhum dos conjuntos. E nas dúzias de 1-12, 13-24 ou 25-36. Assim, temos a probabilidade de ganhar com $12n$:

$$p(12n_e) = \frac{12}{37} \qquad p(12n_a) = \frac{12}{38}.$$

Em caso de vitória nesse tipo de aposta, o vencedor recebe o triplo do valor apostado (2:1).

Observe que zero (0) e o duplo zero (00) não pertencem a nenhum dos conjuntos de apostas externas, ou seja, ao sair zero (0) ou duplo zero (00), todas as apostas externas serão perdedoras. Para vencer com o zero (0) ou com o duplo zero (00) só é possível a partir de apostas internas.

Ao examinarmos os pagamentos e as probabilidades de acerto ao fazer uma aposta em uma roleta, torna-se evidente a existência de uma relação direta entre esses dois aspectos. Essa conexão entre os pagamentos oferecidos e as probabilidades de sucesso é essencial para os jogadores, pois influencia diretamente as decisões de apostas. Compreender essa relação é fundamental para uma abordagem informada ao jogo, permitindo que os participantes avaliem cuidadosamente as opções disponíveis e façam escolhas estratégicas com base não apenas nos ganhos e perdas potenciais, mas também nas chances associadas a cada resultado. Essa análise contribui para uma experiência de jogo mais consciente, alinhando-se com princípios probabilísticos fundamentais.

3.3.1 Jogos contra a banca

A roleta é um exemplo de jogo de apostas contra a banca (casa). Em jogos contra a casa a probabilidade de vitória da casa é superior a probabilidade de vitória do jogador. No caso da roleta, qualquer aposta diferente de $1n, 2n, 3n$,$4n$ ou basket perdem para o resultado zero (seja ele 0 ou 00). E as probabilidades de sair um 0 ou um 00 são de:

$$p(Z_e) = \frac{1}{37} \qquad\qquad p(Z_a) = \frac{2}{38}.$$

Além disso, considerando o conceito de preço justo (seção 2.7.1), a casa sempre leva vantagem na relação probabilidade versus premiação, pois para apostas na roleta europeia, em que a probabilidade de acerto de $1n$ é de 1:37, o valor pago de premiação é de 36 vezes (35:1), e na roleta americana, em que a probabilidade é de 1:38, o pagamento é o mesmo. Portanto, temos que a distribuição de probabilidade é de:

ROLETA EUROPEIA		ROLETA AMERICANA	
X_e	$p(X_e = x_i)$	X_a	$p(X_a = x_i)$
$35x$	$\frac{1}{37}$	$35x$	$\frac{1}{38}$
$-x$	$\frac{36}{37}$	$-x$	$\frac{36}{38}$

Assim, temos:

$$Lucro\ esperado\ =\ Lucro.p(Lucro)\ +\ Prejuízo.p(prejuízo)$$
$$Lucro\ esperado_e = 35x\ .\frac{1}{37} - x.\frac{36}{37} = -\frac{x}{37}.$$
$$Lucro\ esperado_a = 35x\ .\frac{1}{38} - x.\frac{37}{38} = -\frac{2x}{38}.$$

Ou seja, é esperado um prejuízo de 2,7 % na roleta europeia e de 5,26% na roleta americana.

3.4 APOSTAS ESPORTIVAS

Nesta seção iremos abordar conceitos básicos sobre apostas esportivas como *odds* e tipos de apostas. Inicialmente, é importante observar que não iremos abordar todas as possibilidades de apostas e modalidades esportivas, pois este não é o objetivo do trabalho. Por isso, vamos tratar sobre as regras e sobre algumas formas de apostas *on-line*, para que o leitor possa refletir sobre as possibilidades de apostas, analisando-as sobre a ótica das probabilidades. Para realizar esta pesquisa, observamos as regras gerais dos jogos *on-line* e as regras específicas do futebol nos sites: www.pokerstars.com/pt-BR/sports; www.kto.com/pt/esportes/; https://apostagolos.com/ e https://mestredobet.com.br/.

O que são *odds*? Em apostas esportivas, o termo *odds*, de origem inglesa, tem o mesmo significado que probabilidades. No entanto, em apostas *on-line*, *odds* representam as cotações aplicadas a cada elemento que será apostado. Geralmente expressas na forma de decimais, as *odds* indicam tanto a probabilidade percebida pelos apostadores quanto o potencial retorno financeiro em caso de acerto da aposta. *Odds* mais baixas sugerem uma probabilidade percebida maior, mas oferecem menos retorno financeiro, enquanto *odds* mais altas indicam uma probabilidade menor percebida, mas prometem ganhos mais significativos em caso de acerto da aposta. Compreender as *odds* é primordial para os apostadores tomarem decisões conscientes e avaliarem o risco versus a recompensa em suas escolhas de apostas esportivas.

Consideremos um exemplo de aposta com odds decimais. Suponha que você faça uma aposta de R$ 100 em odds de 2,30 e a aposta seja vencedora. Nesse caso, você receberá um total de R$ 230 (R$ 100 da aposta inicial mais R$ 130 de lucro). Se a aposta não for bem-sucedida, você perderá os R$ 100 investidos. É importante observar que existem outras formas de representação de odds, como as fracionárias e americanas, mas essas não serão abordadas no contexto deste trabalho.

Existem muitas modalidades de apostas para cada evento esportivo, para ilustrar essas possibilidades, vejamos alguns tipos:

3Way: existem três resultados possíveis e você deve escolher o caminho certo. A aposta de futebol comum - vencer, empatar ou perder - é uma aposta 3Way clássica. Por exemplo, Bayern de Munique joga contra o Manchester United - 1(VITÓRIA DO MANDANTE), X (EMPATE), 2 (VITÓRIA DO VISITANTE). As apostas 3Way geralmente se referem ao resultado no final do tempo de jogo regular;

2Way: existem dois resultados possíveis e você deve prever o correto. Essas apostas são comuns para todos os tipos de esportes que não permitem empate (basquete, tênis, etc.). Há também muitas apostas especiais que funcionam de acordo com o mesmo princípio.

Aposta Simples: Uma aposta simples é feita em apenas uma seleção ou evento. Se a sua seleção vencer, você ganha a sua aposta.

Aposta Dupla: Uma aposta dupla consiste em duas seleções diferentes, e as odds de ambas as seleções são multiplicadas entre si. Para vencer a aposta, ambas as seleções devem ser bem-sucedidas.

Aposta Tripla: Uma aposta tripla envolve três seleções diferentes. As *odds* das três seleções são multiplicadas entre si, e você só vence a sua aposta se todas as três seleções forem bem-sucedidas.

Aposta Acumulada/Múltipla/Combo: Uma aposta acumulada, também conhecida como aposta combo ou parlay, envolve combinar múltiplas seleções em uma única aposta. Os ganhos potenciais aumentam conforme cada seleção é adicionada, mas todas as seleções devem vencer para a aposta ser bem-sucedida.

System: Assim que você tiver escolhido três ou mais seleções (até oito) em seu cartão de apostas, você pode fazer uma aposta system. O número de possíveis apostas system depende do número de resultados previstos. As apostas system possíveis com as suas seleções serão exibidas automaticamente. Cada possibilidade é acompanhada por um botão de informação em que você pode clicar para mais informações sobre o princípio subjacente a aposta system. A diferença entre apostas acumuladas e system é que você pode vencer uma aposta system mesmo que nem todas as suas seleções sejam vencedoras. Por exemplo, no caso de uma aposta system 2/3 você ganha mesmo que somente duas de suas seleções sejam vencedoras;

Aposta com Handicap: Uma aposta com handicap é usada quando há uma diferença significativa de habilidade entre duas equipes ou jogadores. Envolve dar a uma equipe ou jogador uma vantagem ou desvantagem virtual para nivelar o campo de jogo e tornar a aposta mais equilibrada.

Aposta em Resultado Correto: Uma aposta em resultado correto envolve prever o placar exato final de um jogo ou partida. Pode ser um tipo de aposta desafiadora, mas oferece pagamentos potenciais mais altos.

Analisando as apostas esportivas mais comuns para o futebol temos:

1X2: Você tem que prever o resultado de toda a partida. Existem 3 resultados possíveis: 1 (o time da casa ganha), X (os times vão empatar), 2 (o time visitante ganha).

Dupla chance: Você tem que prever o resultado de toda a partida. Existem 3 resultados possíveis: 1X (no final do jogo o time da casa vence ou empata), X2 (no final do jogo o time visitante vence ou empata), 12 (no final do jogo o time da casa vence ou o time visitante vence).

Total (mais/menos): Você deve prever se o número total de gols marcados durante toda a partida será acima ou abaixo da linha indicada.

Ambos marcam (GG/NG): existem dois resultados possíveis: GG (ambas as equipes marcam pelo menos um gol cada durante todo o jogo), NG (uma ou ambas as equipes não marcam nenhum gol durante todo o jogo).

Empate anula aposta (DNB): este mercado de apostas consiste no seguinte: para definir uma aposta como vencedora, deve necessariamente haver uma equipe vencedora, o que significa que, se a partida terminar empatada, a aposta em dinheiro deve ser reembolsada. Por exemplo, se uma pontuação final resultar em empate, a aposta será considerada nula.

Resultado Correto: prever o resultado exato de uma partida, ou seja, ao final dos 90 minutos do tempo regulamentar, por exemplo: (1-0, 3-0, 2-3…).

Existem muitas outras possibilidades de mercados de apostas para o futebol, como mercado de 1° tempo, mercado de 2° tempo, mercado de escanteios, mercado de cartões até mesmo se vai ou não interferência do árbitro de vídeo (VAR) durante a partida.

Ilustramos algumas das diferentes modalidades de apostas, proporcionando uma visão abrangente sobre as diversas opções disponíveis no universo das apostas esportivas, desde as mais simples até as mais complexas.

3.4.1 A probabilidade de um evento a partir de sua odd

Uma vez que as *odds* de uma aposta são definidas exclusivamente pela casa de apostas, é importante analisar as possibilidades reais de ganho ao realizar uma aposta e a relação de pagamento da aposta com a probabilidade de ocorrência do evento. Para determinar a probabilidade de um evento A a partir da sua *odd* decimal de pagamento, podemos observar o conceito de preço justo, no qual o lucro esperado é igual a zero, assim, temos:

$$Lucro\ Esperado = \ Lucro\ do\ Acerto. p(A) - \ Prejuízo\ do\ erro. p(A^c)$$

Inspirados no conceito de preço justo de Rifo (2020, p. 70), em uma aposta justa, teremos

$$Lucro\ Esperado = 0,$$

ou seja, nenhum jogador tem vantagem, nem o apostador e nem a casa.

$$Lucro\ Esperado = \ Lucro\ do\ Acerto. p(A) - \ Prejuízo\ do\ erro. p(A^c) = 0$$

Definimos

$$Lucro\ do\ Acerto := \ Valor\ da\ aposta. (ODD(A) - 1),$$

temos:

$$Lucro\ Esperado = 0$$
$$Valor\ da\ aposta.(ODD(A) - 1).p(A) - Valor\ da\ aposta.p(A^c) = 0,$$
$$Valor\ da\ aposta.(ODD(A) - 1).p(A) - Valor\ da\ aposta.(1 - p(A)) = 0,$$
$$Valor\ da\ aposta.(ODD(A) - 1).p(A) - Valor\ da\ aposta + Valor\ da\ aposta.p(A) = 0,$$
$$Valor\ da\ aposta.((ODD(A) - 1).p(A) - 1 + p(A)) = 0,$$

Como para existir aposta, o valor da aposta é diferente de zero, temos:

$$(ODD(A) - 1).p(A) - 1 + p(A) = 0,$$
$$ODD(A).p(A) - p(A) - 1 + p(A) = 0,$$
$$ODD(A).p(A) = 1,$$
$$p(A) = \frac{1}{ODD(A)}.$$

Concluímos que, quando o lucro esperado de um certo evento é zero, então a *odd* de pagamento é o inverso da probabilidade de acerto, tanto no evento quanto em seu complementar. No entanto, no caso das *odds* oferecidas pelas casas de apostas, sempre é colocado um valor percentual sobre a aposta para que a casa tenha lucro. Vejamos um exemplo disso.

Exemplo: No dia 1/11/2023 estava marcada a partida pelo campeonato brasileiro de futebol entre as equipes Corinthians e Athletico-PR, com as seguintes *odds* pelo site da KTO:

Vitória do Corinthians: 2,62	Empate ou Vitória do Athletico-PR:1,46

Valores retirados do site: kto.com

Calculando as probabilidades de vitória, considerando um evento justo teríamos:

Vitória do Corinthians: 2,62	Empate ou Vitória do Athletico-PR:1,46
$p(A) = \frac{1}{2,62} \approx 0,38168 = 38,168\ \%$	$p(A^c) = \frac{1}{1,46} \approx 0,68493 = 68,493\ \%$

Perceba que a soma das probabilidades dos dois eventos é de 106,661%. Isso se deve ao fato de a casa de apostas pagar um valor abaixo do preço justo em caso de acerto. Podemos recalcular as *odds* de maneira a estimar o seu preço justo, fazendo uma regra de três sobre as probabilidades:

Probabilidades da casa	Probabilidades de um jogo justo
106,661%	100%
$38,168\ \%$	x

Ou seja, a probabilidade justa para vitória do Corinthians seria de aproximadamente 35,7844%, com uma *odd* justa de 2,79 por unidade de aposta, uma diferença de 0,17 por unidade de aposta em relação a oferecida pela casa.

4 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Para desenvolver esta sequência didática, inspirada na abordagem da pesquisa-ação, é importante considerar a perspectiva de Silva, Oliveira e Ataídes (2015, p. 4), que destacam a pesquisa-ação como uma opção metodológica valiosa para compreender dinâmicas sociais de forma qualitativa. Nesse contexto, a pesquisa-ação se revela como uma ferramenta capaz de explorar a dinâmica de problemas e processos, levando em conta a realidade concreta e os diversos elementos envolvidos. Esse enfoque envolve práticas, situações reais e interpretações, proporcionando a base para novas ideias e intervenções.

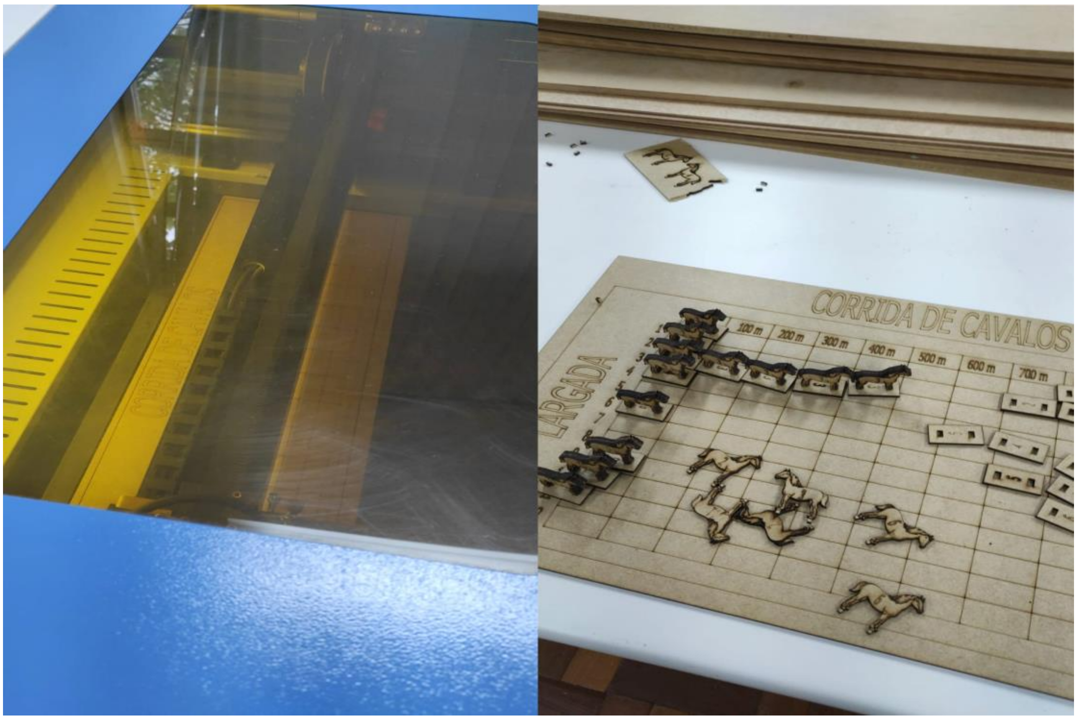
Em cada encontro desta sequência didática, foram apresentados jogos e reflexões sobre probabilidade, com o intuito de estabelecer conexões entre os conceitos matemáticos e atividades comuns realizadas fora da sala de aula, como jogos de apostas. A proposta é mostrar como a probabilidade pode ser uma aliada para aqueles que apreciam jogos, evidenciando como o jogo, por sua vez, pode ser um recurso colaborativo ao gerar exemplos práticos para os estudos de probabilidade.

Por tratar-se de uma pesquisa que envolve seres humanos, o projeto foi encaminhado para o Comitê de Ética do IFRS-Canoas em 23 de outubro de 2023. Após a análise, o mesmo foi aprovado sob número CAAE: 74300223.2.0000.8024.

Antes do início da pesquisa, os termos foram entregues a todos os estudantes para que coletassem a assinatura de seus pais. Contudo, nem todos os estudantes trouxeram o termo assinado, pois ou eles mesmos optaram por não participar ou seus pais não permitiram. Em respeito à ética e ao consentimento, no caso dos alunos que optaram por não participar da pesquisa, eles formaram um grupo separado, e os dados desse grupo não participante não foram coletados, assegurando a integridade e a privacidade dos envolvidos.

A sequência didática abordou dois jogos de tabuleiros, Corrida de Cavalos I e Corrida de Cavalos II, que foram confeccionados no Laboratório Maker do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul - Canoas. O material foi fornecido pelo IFRS e sob orientação do professor Claudiomir Feustler Rodrigues de Siqueira foi possível projetar os jogos e programar a cortadora a laser para criação das peças e tabuleiros.

Figura 5 – Cortadora a laser e tabuleiro com peças dos jogos



Fonte: Montagem a partir dos registros feitos pelo autor.

Foram realizados dois questionários, nos quais o pesquisador coletou dados iniciais e finais relevantes para a investigação. O questionário desempenha um papel crucial como elo entre o entrevistador e o entrevistado, transformando a entrevista em uma conversa envolvente, longe de se assemelhar a um interrogatório. Na elaboração dos questionários, foram seguidas as diretrizes de Gil (1999): a) as perguntas devem ser formuladas de maneira clara, concreta e precisa; b) é fundamental levar em consideração o nível de informação do interrogado; c) cada pergunta deve possibilitar uma única interpretação; d) as perguntas não devem sugerir respostas; e) é importante que cada pergunta se refira a uma única ideia por vez.

Quanto à ordem das perguntas, embora não existam regras estritas, foram adotados alguns cuidados. Seguindo a recomendação de Mattar (1994), iniciou-se o questionário com uma pergunta aberta e interessante para deixar o respondente à vontade, incentivando-o a ser mais espontâneo e sincero nas respostas subsequentes. Perguntas sobre a opinião do respondente foram priorizadas no início, contribuindo para que se sentisse prestigiado e mais disposto a colaborar. Reconhecendo a importância do primeiro contato do respondente com o questionário, foi estabelecida uma sequência lógica, evitando transições abruptas e idas e vindas entre tópicos. As perguntas mais invasivas ou relacionadas a temas delicados foram estrategicamente posicionadas posteriormente, permitindo um fechamento gradual do foco ao longo do questionário.

A seguir apresentamos os questionários aplicados, bem como os jogos propostos em cada encontro, formando a sequência didática.

4.1 QUESTIONÁRIO INICIAL

PÚBLICO-ALVO

Alunos do nono ano do Ensino Fundamental.

DURAÇÃO

Para conclusão da atividade será necessária 0,5 hora/aula.

Probabilidade

O que você acha que é Probabilidade?

O que você acredita ser um evento aleatório?

Você já estudou sobre Probabilidade?

Você acha que Probabilidade está relacionada com Matemática?

Você acredita que saber sobre Probabilidade pode influenciar sobre suas decisões em alguma situação?

Apostas

Você já fez alguma aposta com seus amigos?

Você já fez ou conhece alguém que fez alguma aposta na internet?

Você acredita que exista alguma relação entre Probabilidade e jogos de apostas?

Se existe alguma relação, como você acha que funciona?

Você já viu alguma propaganda de casas de apostas ou de cassinos *on-line*?

Rede Social e Mídias

Você participa de alguma rede social? Qual?

Você segue algum influencer que faz propaganda de casas de apostas ou de cassinos *on-line*?

Você assiste televisão? Se sim, você já viu alguma propaganda na televisão de casas de apostas ou de cassinos *on-line*?

Você escuta rádio? Se sim, você já ouviu alguma propaganda na rádio de casas de apostas ou de cassinos *on-line*?

4.2 JOGO: CORRIDA DE CAVALOS I

Sugerimos introduzir o conceito de Probabilidade utilizando o jogo “Corrida de Cavalos I”.

O intuito do jogo é que os estudantes reflitam sobre as possibilidades que os cavalos têm de avançar na corrida, ou seja, se um deles é favorito ou se no jogo todos os cavalos têm a mesma chance.

Esse jogo utiliza um dado e um tabuleiro representando uma pista de corrida de cavalos (numerados de 1 a 6). Os estudantes devem apostar em um cavalo, que acham que vai vencer a corrida. Para jogar, os estudantes lançam um dado, sendo que o resultado do lançamento corresponde ao cavalo que avança uma casa. Pode ser jogado em duplas ou no máximo até 6 pessoas.

Figura 6 – Tabuleiro da Corrida de Cavalos I

Fonte: Registro feito pelo autor.

Instruções do jogo:

- Os números do tabuleiro correspondem aos cavalos.
- Cada jogador deve apostar em um cavalo;
- A aposta deve ser registrada com o nome do jogador sob o número do cavalo escolhido.
- O cavalo avança quando sorteado o número na face voltada para cima, extraído no lançamento do dado. Desse modo, se a face voltada para cima após o lançamento do dado for 5, o cavalo que se movimenta é o de número 5.

- O lançamento é marcado com o avanço de uma casa no tabuleiro do “cavalo sorteado”.
- Vence o cavalo que primeiro alcançar na linha de chegada.

PÚBLICO-ALVO

Alunos do nono ano do Ensino Fundamental.

DURAÇÃO

Para conclusão da atividade será necessária 1,5 hora/aula.

PRÉ-REQUISITOS

Frações

Decimais

Porcentagem

Contagem

CONTEÚDOS

Definição clássica de Probabilidade.

OBJETIVOS

Reconhecer o universo amostral de um evento;

Reconhecer eventos equiprováveis;

Comparar eventos mais ou menos prováveis;

Calcular a probabilidade de ocorrência de um determinado evento e representá-lo por meio de fração, número decimal ou porcentagem;

OBJETOS DO CONHECIMENTO PREVISTOS NA BNCC

Noção de acaso

Análise da ideia de aleatório em situações do cotidiano

Análise da ideia de acaso em situações do cotidiano: espaço amostral

Análise de chances de eventos aleatórios.

Espaço amostral: análise de chances de eventos aleatórios

HABILIDADES PREVISTAS NA BNCC

(EF01MA20) Classificar eventos envolvendo o acaso, tais como “acontecerá com certeza”, “talvez aconteça” e “é impossível acontecer”, em situações do cotidiano.

(EF02MA21) Classificar resultados de eventos cotidianos aleatórios como “pouco prováveis”, “muito prováveis”, “improváveis” e “impossíveis”.

(EF03MA25) Identificar, em eventos familiares aleatórios, todos os resultados possíveis, estimando os que têm maiores ou menores chances de ocorrência.

(EF04MA26) Identificar, entre eventos aleatórios cotidianos, aqueles que têm maior chance de ocorrência, reconhecendo características de resultados mais prováveis, sem utilizar frações.

(EF05MA23) Determinar a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos aleatórios, quando todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer (equiprováveis).

METODOLOGIA

Atividade 1:

Separar a turma em grupos de até seis alunos.

Explicar a regra do jogo "Corrida de Cavalos I" e definir o número de partidas que irão jogar (sugiro 3 partidas).

Atividade 2:

Jogar. Sugerimos jogar 3 partidas.

Atividade 3:

Utilizar o questionário abaixo para refletir sobre os conceitos matemáticos de probabilidade existentes na proposta:

1) É possível prever o cavalo que será sorteado na 1ª rodada?
2) É possível prever o cavalo que será sorteado na 6ª rodada?
3) Sabendo que na 1ª rodada saiu 1 no dado, na 2ª rodada saiu 2, na 3ª rodada saiu 3, na 4ª rodada saiu 4 e na 5ª saiu 5, é possível prever o resultado da 6ª rodada?
4) Existe um cavalo favorito antes do jogo começar?
5) Ao jogar o dado, qual a chance de sair o número 5?
6) Ao jogar o dado, qual a chance de sair o número 7?
7) Podemos garantir que o resultado no dado será sempre menor ou igual a 6?
8) Em um lançamento, é mais provável sair um número maior ou menor que três?

Atividade 4

Após a discussão sobre as questões, definir os conceitos matemáticos de:

Acaso

<u>Definição</u>: Experimentos que ao serem repetidos nas mesmas condições não produzem o mesmo resultado são denominados experimentos aleatórios.

Exemplo: Ao lançar uma moeda, não é possível prever a face que cairá voltada para cima, é um fenômeno aleatório, ou seja, não é previsível.

Definição: Os experimentos que ao serem repetidos nas mesmas condições conduzem ao mesmo resultado são denominados determinísticos.

Exemplo: Sabemos que a água (sob pressão de 1 atm), quando aquecida até 100° C, entra em ebulição. Então, este evento é um evento determinístico.

Universo Amostral

Definição: Denominaremos espaço amostral associado a um experimento o conjunto de seus resultados possíveis.

Evento

Definição: Denominaremos de evento qualquer subconjunto do espaço amostral.

Exemplo: Considere o evento A dado por sair um número ímpar no lançamento de um dado.

Sabemos que o espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, então o subconjunto do espaço formado apenas pelos números ímpares é o evento A: $A = \{1, 3, 5\}$.

Observação: Quando em um experimento aleatório com espaço amostral finito todos os eventos elementares têm a mesma chance de ocorrer, dizemos que o espaço amostral é equiprovável.

Definição Clássica de Probabilidade

Em um espaço amostral equiprovável Ω, a probabilidade de ocorrer um evento A é indicada por $p(A)$ e definida como:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}.$$

MATERIAIS

Quadro, pincel, dados, tabuleiros, cavalos, caneta e caderno.

4.3 JOGO: CORRIDA DE CAVALOS II

Para aprofundar os conceitos trabalhados no jogo “Corrida de Cavalos I”, sugerimos o jogo “Corrida de Cavalos II”.

O intuito do jogo, é que os estudantes reflitam sobre as possibilidades que os cavalos têm de vencer a corrida, ou seja, se um deles é favorito ou se todos têm a mesma chance a cada lançamento.

Esse jogo utiliza dois dados e um tabuleiro, representando uma pista de corrida de cavalos (numerados de 1 a 12). Os estudantes devem apostar em um cavalo que acham que vai vencer a corrida. Para jogar, os estudantes lançam dois dados, sendo que o resultado da soma do lançamento dos dados corresponde ao cavalo que avança uma casa. Pode ser jogado em duplas ou no máximo até 12 pessoas.

Figura 7 – Tabuleiro da Corrida de Cavalos II

Fonte: Registro feito pelo autor.

Instruções do jogo:

- Os números do tabuleiro correspondem aos cavalos.
- Cada jogador deve apostar em um cavalo;
- A aposta deve ser registrada com o nome do jogador sob o número do cavalo escolhido.
- O cavalo avança quando a soma dos números das faces voltadas para cima extraídos no lançamento do dado é igual ao número do cavalo. Desse modo, se as faces voltadas para cima após o lançamento dos dados forem 2 e 6, o cavalo que se movimenta é o de número 8 (2+6).
- O lançamento é marcado com o avanço de uma casa no tabuleiro do “cavalo com a soma sorteada”.
- Vence o cavalo que primeiro alcançar na linha de chegada.

PÚBLICO-ALVO

Alunos do nono ano do Ensino Fundamental.

DURAÇÃO

Para conclusão da atividade será necessária 1 hora/aula.

PRÉ-REQUISITOS

Frações

Decimais

Porcentagem

Contagem

Princípio Multiplicativo

CONTEÚDOS

Eventos não equiprováveis

Definição de Probabilidade Condicional.

Definição de Probabilidade Frequentista.

OBJETIVOS

Reconhecer o universo amostral de um evento;

Reconhecer eventos equiprováveis e não-equiprováveis;

Comparar eventos mais ou menos prováveis;

Calcular a probabilidade de ocorrência de um determinado evento e representá-lo por meio de fração, número decimal ou porcentagem;

OBJETOS DO CONHECIMENTO PREVISTOS NA BNCC

Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável

Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista)

Experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências

Princípio multiplicativo da contagem. Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral.

Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes.

HABILIDADES PREVISTAS NA BNCC

(EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.

(EF07MA34) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.

(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

(EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

METODOLOGIA

Atividade 1:

Separar a turma em grupos de até doze alunos.

Explicar a regra do jogo “Corrida de Cavalos II”, e definir o números de partidas que irão jogar, é importante tabular o resultado final de cada corrida, pois iremos observar a frequência dos resultados das somas.

Atividade 2:

Jogar. Sugerimos jogar três partidas.

Atividade 3:

Utilizar o questionário abaixo para refletir sobre os conceitos matemáticos sobre probabilidade existentes na proposta.

Observando coletivamente os vencedores das corridas, questionar:

1) É possível prever o cavalo que será sorteado na 1ª rodada?
2) É possível prever o cavalo que será sorteado na 6ª rodada?
3) Sabendo que na 2ª rodada saiu a soma 2, na 3ª rodada saiu a soma 3, na 4ª rodada saiu soma 4 e na 5ª saiu a soma 5, é possível prever o resultado da 6ª rodada?
4) Todos os cavalos têm chance de serem sorteados na primeira rodada?
5) Em cada rodada, a chance de os cavalos serem sorteados é a mesma?
6) Qual a probabilidade de cada cavalo ser sorteado na primeira rodada?
7) Qual a probabilidade de sair a soma 8?
8) Se sair 5 no primeiro dado, qual a probabilidade de sair a soma 8?
9) Qual o valor da soma das probabilidades de todos os cavalos?
10) Existe um cavalo favorito para vencer a corrida?
11) Monte a tabela de frequência que cada cavalo foi sorteado?
12) Compare o resultado esperado na probabilidade clássica e o resultado obtido na tabela.

Atividade 4

Após a discussão sobre as questões, definir os conceitos matemáticos de:

Princípio Fundamental da Contagem

Se uma decisão d_1 pode ser tomada de m maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de n maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é mn.

Evento não-equiprovável

Quando, em um experimento aleatório com espaço amostral finito, todos os eventos elementares não têm a mesma chance de ocorrer, dizemos que o espaço amostral é não-equiprovável.

Definição frequentista de probabilidade

Define-se probabilidade, pela definição frequencista, como um acontecimento A e representa-se por $p(A)$, como sendo o valor obtido para a frequência relativa com que se observou A, num grande número de realizações da experiência aleatória.

Probabilidade Condicional

A *Probabilidade Condicional* é uma medida de probabilidade que expressa a chance de ocorrer um evento A, dado que outro evento B já ocorreu. É representada por $p(A|B)$ lido como "a probabilidade de A dado B". A fórmula da probabilidade condicional é dada por:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

Isso significa que a probabilidade de A ocorrer, dado que B ocorreu, é igual à probabilidade de ocorrência simultânea de A e B dividida pela probabilidade de ocorrência de B. (Note-se que essa definição não se aplica quando $p(B) = 0$).

MATERIAIS

Quadro, pincel, dados, tabuleiros, cavalos, caneta e caderno.

4.4 JOGO: ROLETA

Existem várias versões de jogos de roleta, as mais conhecidas são a Roleta Europeia e a Roleta Americana. Nas duas, a roleta consiste em uma roda, onde são gravados números de 0 a 36, no modelo europeu, na Americana há ainda o duplo zero “00”.

O intuito deste jogo é introduzir o conceito de jogos contra a banca, em que ela define o valor pago a uma aposta a partir da probabilidade de acerto e para apresentação do conceito de aposta justa.

No jogo de roleta, a roda é dividida em canaletas numeradas, e quando a grande roda é posta a girar, uma pequena esfera é inserida na roda. Todos os jogadores devem efetuar suas apostas na mesa antes da pequena esfera ser inserida na roda. O número da canaleta em que a esfera parar quando a roleta parar de girar é o número vencedor.

Figura 8 – Roleta

Fonte: https://www.oskaras.com/img/2021/02/roleta_cassino_macetes-scaled.jpg

PÚBLICO-ALVO

Alunos do nono ano do Ensino Fundamental.

DURAÇÃO

Para conclusão da atividade serão necessárias duas horas/aula.

PRÉ-REQUISITOS

Frações

Decimais

Porcentagem

Contagem

Conceito de acaso

Probabilidade Clássica

Probabilidade Condicional

CONTEÚDOS

Probabilidade de eventos independentes.

OBJETIVOS

Reconhecer eventos independentes.

Reconhecer apostas contra a Banca.

Determinar se uma aposta é justa.

OBJETOS DO CONHECIMENTO PREVISTOS NA BNCC

Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável

Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista)

Experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências

Princípio multiplicativo da contagem. Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral.

Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes.

HABILIDADES PREVISTAS NA BNCC

(EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.

(EF07MA34) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.

(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

(EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

METODOLOGIA

Atividade 1:

Separar a turma em quatro grupos. Serão explicadas as regras de apostas em jogos de roleta e suas respectivas remunerações.

Cada grupo receberá 20 fichas de uma cor, referente ao grupo. Serão realizadas 20 rodadas de apostas em uma roleta americana, com o grupo podendo escolher a modalidade de aposta, quantidade de fichas e se irá apostar em cada rodada.

Atividade 2:

Jogar. Sugerimos jogar por 40 minutos.

Atividade 3:

Utilizar o questionário abaixo para refletir sobre os conceitos matemáticos de probabilidade existentes na proposta:

Observando o resultado final, questionar cada grupo:

1) O resultado final do grupo, foi positivo?
2) Qual foi a estratégia de apostas utilizada pelo grupo?
3) O resultado de uma rodada interfere no resultado da próxima?
4) Ao escolher um número específico, qual a probabilidade de acerto?
5) Ao escolher um número específico, qual a remuneração paga pela banca?
6) Conhecendo as probabilidades de cada aposta e remuneração oferecida pela banca, podemos dizer que o jogo favorece a banca ou ao jogador?
7) Monte uma tabela onde aparece o valor pago pela banca para cada tipo de aposta e a probabilidade de ocorrência do evento.
8) Quem decide o valor pago a cada tipo de aposta?
9) Você acredita que pode ser lucrativo ao jogar esse jogo?

Atividade 3

Após a discussão sobre as questões, definir os conceitos de:

Probabilidade de Eventos Independentes

Um evento A é considerado independente de um outro evento B se a probabilidade de A é igual à probabilidade condicional de A dado B.

Isto é, se $p(A) = p(A|B)$.

É evidente que, se A é independente de B, B é independente de A, ou seja, $p(B) = p(B|A)$.

Se A e B são independentes, então temos que:

$$p(A \cap B) = p(A).p(B).$$

Aposta contra a banca

Vamos chamar de apostas contra a banca, os jogos de apostas que tem sua forma de pagamento determinada pela casa de apostas. Nessa modalidade de jogos, as remunerações são calculadas sobre as probabilidades de modo a favorecer a casa de apostas.

Aposta Justa

Vamos definir a aposta justa no qual o lucro esperado de uma aposta não favorece nenhum dos jogadores. Em uma aposta justa, o jogador e a casa jogam em equilíbrio. É possível distribuir uma aposta de forma que o retorno esperado seja o mesmo do valor investido.

Exemplo de aposta justa em um evento equiprovável: Vamos apostar no jogo de cara e coroa, para que a aposta seja justa, a banca deve pagar o dobro do valor investido em cada uma das opções. Se apostar uma unidade em cara, recebe duas unidades. Se apostar uma unidade em coroa, recebe duas unidades. Assim, se apostar uma unidade em cada, terá apostado duas unidades, mas terá como retorno duas unidades, independente do resultado.

Exemplo de aposta justa em um evento não equiprovável: Vamos supor uma luta de boxe em que um pugilista é favorito, com 80% de chance de vitória, contra 20% de seu adversário. Assim, um fator de pagamento justo para a aposta seria de 1,25 para o favorito e 5 para o adversário. Dessa forma, distribuindo 4 unidades de aposta no favorito e 1 no adversário, seu retorno seria sempre de 5 unidades de aposta.

MATERIAIS

Quadro, pincel, caneta, caderno, fichas coloridas, simulacro de mesa de apostas de roleta, roleta e esfera.

4.5 JOGO: APOSTAS ESPORTIVAS

Os jogos de apostas no Brasil ainda estão sendo discutidos. Já legalizados no Brasil temos os jogos de loterias, controlados pelo governo e, desde 2018, a modalidade de apostas de quota fixa, chamadas de apostas esportivas. Apesar de ainda ser ilegal a presença de cassinos no Brasil, há discussões nas maiores esferas públicas para a liberação ou não deles, e também, é uma prática relativamente comum aos brasileiros a de participar de apostas. Assim, refletir sobre a matemática presente nelas é importante, não só para conhecê-las e entendê-las, mas para participar delas de maneira consciente, compreender os riscos e divertir-se com equilíbrio.

Propomos essa reflexão ainda no Ensino Fundamental, com os conceitos e habilidades sobre probabilidade previstos na Base Nacional Comum Curricular, que podem auxiliar na percepção dos alunos sobre os riscos de jogos de apostas.

Existem diversas modalidades de apostas, vamos observar a modalidade *2Way* onde existem dois resultados possíveis e você deve prever o correto. Essas apostas são comuns para todos os tipos de esportes que não permitem empate (basquete, tênis etc.) e também muitas apostas especiais que funcionam de acordo com o mesmo princípio, como vitória do time A ou Empate/Vitória do time B. Podemos calcular o retorno do valor apostado multiplicando o valor da aposta pelo fator de pagamento.

PÚBLICO-ALVO

Alunos do nono ano do Ensino Fundamental.

DURAÇÃO

Para conclusão da atividade será necessária 1,25 hora/aula.

PRÉ-REQUISITOS

Frações

Decimais

Porcentagem

Contagem

Probabilidade Clássica

Regra de Três

CONTEÚDOS

Definição clássica de Probabilidade.

OBJETIVOS

Determinar o que são *odds*

Calcular a probabilidade de um evento a partir de sua *odd*

OBJETOS DO CONHECIMENTO PREVISTOS NA BNCC

Experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências.

Princípio multiplicativo da contagem. Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral.

Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes.

HABILIDADES PREVISTAS NA BNCC

(EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.

(EF07MA34) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.

(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

(EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

METODOLOGIA

Atividade 1:

Definir: *ODDS*

Um termo muito comum em apostas esportivas é *odds*, de origem inglesa, *odds*, na prática, tem o mesmo significado de probabilidades, porém o termo *odds* em apostas *on-line* significa a representação das cotações que serão aplicadas a cada elemento que será apostado. *Odds* são números que representam a probabilidade percebida de um determinado resultado em um evento esportivo. Elas são utilizadas para calcular seus possíveis ganhos em uma aposta. Para essa atividade utilizaremos as *odds* decimais.

ODDS DECIMAIS: é o fator de pagamento de uma aposta, ou seja, para determinar o possível valor de retorno de sua aposta, basta multiplicar o valor apostado pela *odd decimal.*

<u>Exemplo:</u> Se você apostar R$ 100 em *odds* de 2,30 e sua aposta for bem-sucedida, você receberá R$ 230 no total (R$ 100 da aposta original mais R$ 130 de lucro). *Odds* decimais mais baixas geralmente estão associadas a resultados considerados mais prováveis, enquanto *odds* mais altas refletem resultados menos prováveis.

Atividade 2:

Utilizar um projetor para apresentar um site de apostas esportivas e as modalidades de apostas presentes. Solicitar que os alunos procurem distribuir uma aposta em um evento na busca de ter como retorno o valor investido inicialmente. Problema proposto: Distribuir 10 reais em apostas complementares de modo a obter 10 reais de retorno.

Atividade 3:

Inicialmente vamos retomar o conceito de aposta justa proposto no encontro anterior. Em seguida, apresentar a probabilidade de um evento a partir de sua *odd* de pagamento, $p(A) = \frac{1}{odd(A)}$, e observar as probabilidades encontradas, percebendo sua soma, o percentual de retorno da casa e comparar com a probabilidade de pagamento em uma aposta justa fazendo o uso da regra de três.

Exemplo: Suponha uma partida de basquete em que o time A tem *odd* de 1,52 para vitória e o time B tem odd de 2,30. Supondo uma aposta justa, podemos estimar a probabilidade de vitória de cada time: $p(A) = \frac{1}{odd(A)}$ e $p(B) = \frac{1}{odd(B)}$, assim temos $p(A) = \frac{1}{1,52} \simeq 65{,}789\%$ e $p(B) = \frac{1}{2,30} \simeq 43{,}478\%$. Note que ao somar $p(A) + p(B) > 1$, isto ocorre pelo fato de a banca superestimar as probabilidades, pagando um *odd* inferior ao preço justo. Podemos calcular a *odd* justa para o evento, fazendo uma regra de 3.

Vitória de A	
Probabilidades oferecidas	Probabilidades na aposta justa
109,276	100
65,789	x

Assim, a probabilidade na aposta justa da vitória de A é de 60,204%, com uma *odd* de 1,66.

Vitória de B	
Probabilidades oferecidas	Probabilidades na aposta justa
109,276	100
43,478	x

E a probabilidade na aposta justa da vitória de B é de 39,787%, com uma *odd* de 2,51.

MATERIAIS

Quadro, pincel, dados, caneta, caderno e um computador com acesso a internet com tela de projeção.

4.6 QUESTIONÁRIO FINAL

PÚBLICO-ALVO

Alunos do nono ano do Ensino Fundamental.

DURAÇÃO

Para conclusão da atividade será necessária 0,75 hora/aula.

METODOLOGIA

Individualmente os alunos irão responder ao seguinte questionário:

Probabilidade

O que você acha que é um evento aleatório?

O que você entende como espaço amostral?

O que você entende como probabilidade de um evento?

Qual a diferença de eventos equiprováveis e não-equiprováveis?

O que você entende como probabilidade condicional?

O que é e como se calcula a probabilidade clássica?

O que é probabilidade frequentista?

Você acha que probabilidade está relacionada com Matemática?

Você acredita que saber sobre probabilidade pode influenciar sobre suas decisões em alguma situação?

Apostas

Você acredita que exista alguma relação entre probabilidade e jogos de apostas?

Se existe alguma relação, como você explicaria essa relação?

Você acredita que poderia viver de apostas?

Quais motivos levam alguém a apostar?

Após essas aulas, conversando um pouco mais sobre probabilidade, você se sente mais ou menos confiante em apostar *on-line*?

Rede Social

Você faria propaganda para uma casa de apostas ou para um cassino *on-line*? Justifique sua resposta.

5 ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Esta pesquisa foi realizada em uma escola pública pertencente à Secretaria Municipal de Educação de Porto Alegre, localizada na zona sul do município, capital do Rio Grande do Sul. As modalidades de ensino ofertadas pela instituição vão desde a Educação Infantil até o 9° ano do Ensino Fundamental, funcionando em turno integral. A escolha dessa instituição de ensino deu-se, principalmente, por ser o local de trabalho do pesquisador responsável pela pesquisa e porque oferece uma população adequada para a realização do estudo. A população escolhida para esse estudo foram os estudantes do 9° ano Ensino Fundamental do local de realização da pesquisa. A amostra compreende estudantes de uma turma de 9º ano, sendo 18 adolescentes, possuindo faixa etária entre 14 e 18 anos. A escolha justifica-se por ser esse o público com o qual o pesquisador responsável trabalha e por representar uma amostra que está em consonância com a proposta de pesquisa.

5.1 RELATO DO PRIMEIRO ENCONTRO

A primeira atividade consistiu na aplicação de um questionário inicial, respondido individualmente pelos alunos. Todos receberam o questionário, e o pesquisador leu cada pergunta para a turma. O tempo estimado para a resolução foi de 30 minutos, embora alguns alunos tenham demandado cerca de 40 minutos para completar todas as questões. Em seguida, a turma foi dividida em cinco grupos: quatro para aplicação da sequência didática e um para alunos cujos pais não autorizaram a participação. Cada grupo recebeu o tabuleiro do jogo "Corrida de Cavalos 1", as peças do jogo e um dado.

Enquanto aguardavam as instruções, um grupo começou a jogar com uma regra própria, escolhendo cavalos e avançando-os conforme o dado. Após a explicação do professor, todos iniciaram a atividade conforme planejado, com 20 minutos destinados ao jogo, tempo considerado suficiente para realizar três rodadas. Alguns grupos conseguiram realizar mais rodadas do que as três previstas, enquanto um grupo fez apenas duas.

Como reflexão sobre o jogo, cada grupo recebeu um questionário sobre as probabilidades envolvidas, para isso os alunos tiveram 25 minutos. Mesmo sem uma discussão teórica prévia, os alunos conseguiram relacionar a probabilidade de um evento com a razão entre as possibilidades do evento e o total de possibilidades. Um aluno chegou a propor lançar o dado 50 vezes e montar a probabilidade de cada número a partir das frequências observadas nos lançamentos.

Em um grupo, os alunos calcularam a probabilidade de um cavalo avançar no próximo lançamento, chegando a 16,66%, mas enfrentaram dificuldades para explicar o significado desse número em termos de probabilidade. O questionário de reflexão levou os alunos a considerar outras probabilidades, como acertar a fruta do lanche.

O tempo para as reflexões finais, apresentação dos conceitos e formalização das definições de probabilidade, aproximadamente 20 minutos, foi considerado adequado. Os estudantes perceberam que foram realizadas 13 partidas no total e que o cavalo 5 foi o que mais venceu partidas, mas isso não afetou a percepção dos alunos sobre as possibilidades e probabilidades envolvidas.

Ao final, o professor percebeu que os alunos estavam motivados e apreciaram a proposta. Contudo, a ausência de registros formais pelos alunos pode dificultar a compreensão a longo prazo. Para mitigar essa dificuldade, foi entregue, num momento posterior à pesquisa, aos alunos uma apresentação dos conceitos teóricos desenvolvidos durante a aula.

5.2 RELATO DO SEGUNDO ENCONTRO

No segundo encontro, a atividade ocorreu após o recreio. Os alunos estavam mais dispersos e demoraram mais para se organizar. Para começar os trabalhos, a turma foi dividida em três grupos, dois para a coleta de dados e um dos não participantes.

Após a reorganização do espaço da sala de aula, o pesquisador apresentou o jogo Corrida de Cavalos II. Foi solicitado aos grupos que eles registrassem ao final de cada corrida, o número de vezes que cada cavalo havia sido sorteado.

Os alunos rapidamente identificaram a impossibilidade do Cavalo 1 avançar com a regra proposta. Inicialmente, supuseram que todos os demais teriam a mesma possibilidade de vencer a corrida. Com o decorrer das rodadas, observaram que o Cavalo 7 estava frequentemente entre os primeiros, mas não conseguiam explicar o motivo. A discussão sobre os resultados e os conceitos de probabilidade foi conduzida de maneira coletiva, mediada pelo pesquisador, sem a necessidade de registro individual dos estudantes.

Após as reflexões, foram apresentados os conceitos de Princípio Multiplicativo e sua aplicação para compreender o universo amostral do jogo, incluindo a exploração do conceito de árvore de possibilidades. Os resultados obtidos nos lançamentos dos dados foram utilizados para discutir o conceito de Probabilidade Frequentista, ressaltando que quanto maior o número de lançamentos, mais a probabilidade frequentista se aproximava do resultado esperado pela probabilidade clássica.

Por fim, houve a diferenciação entre eventos equiprováveis e não-equiprováveis, seguida por um exemplo de Probabilidade Condicional, considerando conhecido o resultado de um dos dados.

5.3 RELATO DO TERCEIRO ENCONTRO

No terceiro encontro, inicialmente foram abordadas as regras e modelos de apostas do jogo de roleta, buscando proporcionar uma experiência prática com conceitos probabilísticos. A turma foi subdividida em cinco grupos, quatro para coleta de dados e um com os estudantes que não tinham a autorização para participar da pesquisa. Para cada grupo participante, inicialmente foram fornecidas 20 fichas para apostas. Para a realização do jogo, foram utilizadas uma roleta e uma única mesa de apostas, para todos os grupos. Durante a exposição das regras do jogo e das respectivas remunerações para diferentes tipos de aposta, os grupos foram encorajados a discutir e decidir estratégias coletivamente.

Foi possível observar alguns grupos optando por apostas em frações específicas, como apostar no vermelho e no preto ou no par e no ímpar, sem plena consciência de que tais apostas nunca seriam lucrativas, tendo prejuízo caso o zero fosse sorteado. A diversidade de abordagens entre os grupos foi evidente, desde apostas ousadas em números específicos até a preferência por apostar em segmentos maiores, como os números 1-18 e 19-36.

A dinâmica do jogo se desenrolou ao longo de aproximadamente 50 minutos, e ao sinalizar que as rodadas finais estavam próximas, alguns grupos decidiram aumentar o risco de suas apostas. O desfecho variou entre os grupos, com apenas um deles zerando todas as fichas e um conseguindo encerrar a atividade com um saldo positivo.

Dada a limitação do tamanho do tabuleiro em relação ao número de alunos, a estratégia de ter apenas um representante por grupo por rodada foi adotada. Contudo, à medida que o jogo progredia, mais alunos se aproximavam do tabuleiro, dificultando o acesso para alguns e impactando o nível de envolvimento na atividade.

Os participantes mais engajados e ativos durante o jogo demonstraram um entendimento mais profundo das regras, refletido nas respostas ao questionário subsequente. Por outro lado, aqueles que apostaram e ficaram sem fichas rapidamente perderam o interesse na proposta.

Após as reflexões dos grupos, foram abordados os conceitos de probabilidade em eventos independentes, apostas contra a banca e aposta justa. Durante as explicações sobre o conceito de aposta justa, alguns alunos conseguiram estabelecer a relação entre a probabilidade e o pagamento, compreendendo que este é inversamente proporcional à probabilidade do evento em um jogo justo.

Ao término do encontro, surgiram questionamentos relacionados às probabilidades em outros jogos, como o do bicho e a Mega-Sena, evidenciando um interesse persistente na exploração de conceitos probabilísticos mais amplos. Essa curiosidade adicional pode abrir portas para futuras investigações e explorações no âmbito da probabilidade e estatística.

5.4 RELATO DO QUARTO ENCONTRO

No quarto e último encontro, iniciamos abordando as apostas esportivas, introduzindo conceitos dos sites de apostas como "*odds*" e explorando diferentes modelos de possibilidades de apostas. A parte expositiva e a resolução dos problemas associados a essa apresentação demandaram aproximadamente 45 minutos, deixando outros 45 minutos para que os alunos respondessem ao questionário final.

Durante a resolução do problema, que envolvia descobrir o valor a ser apostado, em apostas complementares, para obter um retorno de R$10, foi observado que alguns grupos recorreram ao método da tentativa e erro, em vez de aplicar a divisão direta de R$10 pela *odd* oferecida pela casa de apostas. Alguns estudantes rapidamente conseguiram relacionar uma *odd* maior a uma menor probabilidade de acontecimento do evento. Alguns ainda conseguiram identificar a noção de aposta justa, relacionando-a à ordem de pagamento, que se dá de forma inversamente proporcional à probabilidade de acerto.

Durante a discussão proposta, foi possível perceber que alguns estudantes compreenderam a taxa cobrada pelas casas de apostas em apostas esportivas como pagamentos abaixo do preço justo, para determinada probabilidade de um acontecimento. Porém, poucos conseguiram através da regra de três, determinar a *odd* justa para o evento analisado.

Para finalizar a sequência didática, cada participante recebeu um questionário final, e o pesquisador fez a leitura de cada pergunta para a turma. No momento de responder os questionários, muitos alunos demonstraram preocupação em fornecer respostas que se alinhassem às expectativas do pesquisador, questionando-o durante a atividade. A fim de preservar a integridade do estudo, o pesquisador enfatizou a importância de os estudantes ponderarem sobre as atividades propostas durante os encontros e fornecerem respostas ao questionário da melhor maneira possível.

A falta de consulta aos registros das reflexões realizadas durante as atividades parece ter provocado uma maior insegurança na hora de responder ao questionário, a ponto de um aluno que esteve ativamente envolvido em todos os encontros recusar-se a preencher o questionário final.

6 ANÁLISE DOS QUESTIONÁRIOS

Indivíduos e grupos sociais interagem entre si, gerando conhecimento a partir dessa interação. Conforme destacam Souza e Santos (2020, p. 3197), a pesquisa qualitativa, campo fértil das ciências humanas e sociais, tem seu foco na linguagem, e tudo que é dito, é dito para alguém em algum lugar, de algum lugar ou para algum lugar. O desafio está na obtenção de interpretações plausíveis no universo de narrativas. Ao abordar o dinamismo de um determinado problema social, diversas técnicas de análise podem ser empregadas, sendo a técnica de Análise de Conteúdo de Laurence Bardin uma delas, utilizaremos essa abordagem ao longo do presente trabalho.

A pesquisa é definida como um procedimento racional e sistemático, cujo objetivo é proporcionar respostas aos problemas que são propostos (Gil, 2007). A análise de conteúdo temática é uma abordagem que visa identificar, analisar e interpretar os temas presentes em um conjunto de dados, seja ele textual, visual ou multimídia. Ela busca extrair significados relevantes a partir do conteúdo, organizando-o em categorias ou temas específicos. No contexto da pesquisa qualitativa apresentada, a análise de conteúdo temática de Bardin foi empregada para examinar os questionários iniciais e finais, expondo percepções dos alunos acerca de probabilidade, jogos de apostas e sua interligação com a matemática. A análise do material coletado segue as fases da análise de conteúdo definidas por Bardin (2011), como: Pré-análise; Exploração do material e Tratamento dos resultados.

A Pré-análise é realizada em quatro etapas, a saber: leitura flutuante; escolha dos documentos; reformulações de objetivos e hipóteses e a formulação de indicadores (Bardin, 2004). Dessa forma, a partir da leitura flutuante escolhemos como documentos para análise: a) o questionário inicial realizado com alunos; e b) o questionário final preenchidos pelos estudantes ao final do último encontro.

Devido ao fato de serem estudantes do nono ano que experimentaram a pandemia ao longo de dois anos de seu Ensino Fundamental, é plausível que a maioria deles não tenha recebido uma instrução formal em probabilidade. Isso aponta para a necessidade de uma introdução formal a esse tema específico.

Além disso, a avaliação desses questionários é essencial para compreender o impacto da sequência didática no processo de aprendizagem dos estudantes. A análise desses materiais possibilitou identificar uma estrutura de ideias dentro do contexto de nossa investigação. Abaixo, apresentam-se algumas considerações categorizadas por temas.

Para a *definição de probabilidade*, no questionário inicial, nota-se uma variedade de definições, com destaque para a associação com porcentagem e a ideia de algo que pode ou não acontecer.

> "Uma porcentagem de acontecer algo".
> "A probabilidade é parecida com porcentagem, ela diz algo que pode ou não acontecer. Esses cálculos são feitos com base em padrões".

Enquanto no questionário final, as respostas apresentam uma maior clareza conceitual, enfatizando a probabilidade como a chance de um evento ocorrer.

> "A probabilidade de um evento é a chance de algo acontecer".
> "As chances que têm do evento acontecer".

Analisando o conceito de *evento aleatório*, no questionário inicial predomina a associação com algo inesperado e sem probabilidade previsível.

> "Um evento que tinha pouca ou nenhuma probabilidade de acontecer".
> "É uma coisa que é do nada".

À medida que examinamos as respostas no questionário final, observamos uma compreensão mais aprimorada, evidenciando a imprevisibilidade e a natureza inesperada dos eventos aleatórios.

> "Um evento aleatório é um evento que não pode ser previsto".
> "Evento que não pode ser previsto".

No questionário inicial, a maioria dos estudantes afirma que não teve *experiência prévia formal com probabilidade*, mas o questionário final sugere que a sequência didática proporcionou uma introdução ao tema, evidenciado pelo aumento na compreensão dos participantes.

> O que é e como se calcula a probabilidade clássica?
> "Se divide o número de possibilidades do evento pelo total de possibilidades".
> O que é probabilidade frequentista?
> "Quando a gente calcula a probabilidade com o número de repetições".
> Qual a diferença de eventos equiprováveis e não-equiprováveis?
> "Equiprováveis: Quando todos têm a mesma chance de acontecer. Não-equiprováveis: quando nem todos têm a mesma chance de acontecer".

A *relação entre probabilidade e matemática* é percebida, destacando a importância dos cálculos na compreensão das probabilidades nos dois questionários.

> Você acha que probabilidade está relacionada com Matemática?
> “Sim, pois existem as probabilidades matemáticas, que precisam de cálculos”.
> “Sim, pois precisamos de cálculos para calcular a probabilidade de algo”.

Sobre o tema *influência da probabilidade nas decisões*, nos dois questionários a maioria reconhece que a probabilidade pode influenciar decisões, indicando uma compreensão mais aprofundada do papel desse conceito em situações práticas.

> Você acredita que saber sobre Probabilidade pode influenciar sobre suas decisões em alguma situação?
> “Talvez sim, sabendo probabilidade podemos fazer a escolha mais favorável para o momento”.
> “Sim, sabendo as probabilidades eu posso ter mais controle sobre minhas escolhas”.

Com relação a *experiências com jogos de apostas*, o questionário inicial apresenta uma diversidade de experiências, incluindo perdas financeiras e apostas entre amigos.

> Você já fez alguma aposta com seus amigos?
> “Sim, apostas de acontecimentos e em jogos”.
> “Sim, perdi 30,00 no jogo que o Flamengo perdeu para o Grêmio de 2x1”

Enquanto no questionário final, alguns participantes revelam uma mudança na confiança após as aulas, enquanto outros expressam preocupações éticas e financeiras.

> “Sim, minha mente abriu sobre a banca sempre sair no lucro”.
> “Me sinto menos confiante, pois aprendi sobre as apostas injustas e que a banca sempre tem vantagem”.

A maioria reconhece a *relação entre probabilidade e jogos de apostas*, indicando uma compreensão mais aprofundada sobre como as probabilidades influenciam esses jogos.

> “Quanto maior a probabilidade menor a *odd*, quanto menor a probabilidade maior a *odd”*.
> “Jogos de apostas são feitos à base de probabilidade”.

A exposição significativa às propagandas *on-line* é destacada, ressaltando a influência cultural dessas campanhas. A grande maioria dos estudantes no questionário inicial apontam que sim, já viram alguma propaganda de casas de apostas ou cassinos.

> Você já viu alguma propaganda de casas de apostas ou de cassinos *on-line*?
> “Sim, nos anúncios de youtube e jogos”.

Com relação à evolução nas definições após as aulas, no questionário final, algumas respostas indicam uma melhora na compreensão conceitual, apontando para os efeitos positivos das aulas.

Sobre a percepção de viver de apostas esportivas, o *questionário final,* aponta que a maioria dos participantes expressa descrença na viabilidade de viver de apostas, associando essa prática a preocupações financeiras.

> Você acredita que poderia viver de apostas?
> “Não, pois vai ficar sem dinheiro”

As respostas sobre *motivações para apostar* são diversas, incluindo vícios, diversão, necessidade e dinheiro.

> “Às vezes diversão, dívida ou vício”.

Em relação à *confiança em participar de apostas on-line após as aulas*, as respostas no questionário final apresentam variações, apontando distintos níveis de confiança após o entendimento sobre probabilidade e jogos de apostas.

> Após essas aulas, conversando um pouco mais sobre probabilidade, você se sente mais ou menos confiante em apostar *on-line*?
> “Me sinto menos confiante, pois aprendi sobre as apostas injustas e que a banca sempre tem vantagem”.
> “Não me sinto nem mais nem menos confiante, não gosto de apostas e tenho medo”.
> “Mais, agora eu tenho mais de noção das chances e do valor da minha aposta”.

Sobre *fazer publicidade para casas de apostas*, no questionário final há uma diversidade de opiniões sobre a ética da publicidade, destacando preocupações com confiança e com a reputação.

> “Sim, eu faria pra ganhar dinheiro”.
> “Não, pois se a pessoa apostar e perder ela iria pensar que a desonesta seria eu e iria manchar a minha imagem”.
> “Não, pois pode prejudicar muitas pessoas.”

As evidências coletadas apontam para contribuições positivas das aulas sobre probabilidade. Os estudantes demonstraram uma melhora na compreensão dos conceitos e definições relacionados ao tema, sugerindo que a abordagem pedagógica empregada foi eficaz em proporcionar um aprendizado significativo. Pudemos perceber isso por meio da análise dos questionários finais, nos quais os estudantes apresentaram maior domínios dos conceitos de probabilidade.

As experiências pessoais dos participantes nos jogos de apostas podem exercer uma influência direta em suas atitudes e percepções acerca da probabilidade. A diversidade de vivências, desde apostas entre amigos até perdas financeiras significativas, destaca a necessidade de considerar o contexto individual ao abordar conceitos de probabilidade em situações práticas. Por isso a sequência didática teve impacto na vida dos estudantes, visto que proporcionou uma abordagem mais contextualizada, permitindo a reflexão sobre suas próprias experiências e contribuindo para uma compreensão mais profunda dos princípios probabilísticos no contexto das atividades de jogo.

A análise das respostas dos questionários revela uma exposição significativa às propagandas *on-line* de casas de apostas, destacando o impacto cultural dessas campanhas. A presença recorrente dessas propagandas parece contribuir para a familiaridade dos participantes com o tema, sugerindo a necessidade de abordar a influência cultural ao tratar de questões relacionadas à probabilidade e jogos de apostas. Neste ponto, pode ser explorado o desenvolvimento de estratégias educacionais que promovam uma compreensão crítica dessas influências culturais, visando fortalecer a capacidade dos indivíduos em tomar decisões informadas e conscientes em relação a atividades de apostas.

Os resultados da pesquisa evidenciam a complexidade e a diversidade das percepções dos participantes acerca de probabilidade e jogos de apostas. Seja por motivo religioso ou apenas medo, alguns estudantes relatam receio em realizar apostas, já outros convivem com familiares e amigos para os quais apostar é uma prática recorrente. Essa variedade de perspectivas destaca a necessidade de abordagens educacionais que levem em consideração a pluralidade de experiências e pontos de vista, visando uma compreensão mais abrangente e contextualizada desses temas.

Acreditamos que essas considerações gerais oferecem informações valiosas para orientar abordagens pedagógicas futuras e pesquisas sobre probabilidade nas experiências individuais dos estudantes.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A formação do cidadão contemporâneo ultrapassa os limites tradicionais da educação, exigindo uma abordagem que englobe não apenas conhecimentos acadêmicos, mas também habilidades essenciais para a vida. Nesse contexto, a compreensão da probabilidade e sua aplicação em jogos emergem como componentes cruciais na construção de cidadãos críticos e conscientes.

A sequência didática proposta buscou oferecer uma oportunidade para desenvolver o raciocínio lógico e a capacidade de análise dos estudantes. Ao explorar conceitos de probabilidade, os alunos não apenas aprimoram suas habilidades matemáticas, mas também cultivam um pensamento crítico que é fundamental para a tomada de decisões na vida cotidiana.

Ao utilizar jogos no ensino de probabilidade, buscamos uma estratégia pedagógica que fosse eficaz. Os jogos proporcionam um ambiente envolvente e prático, nos quais os alunos podem aplicar conceitos probabilísticos de maneira concreta. Essa abordagem não apenas torna o aprendizado mais atraente, mas também facilita a internalização dos princípios da probabilidade, pois os alunos experimentam diretamente os conceitos em ação. Além disso, a probabilidade está presente nas diretrizes curriculares, tornando o estudo desses conceitos essencial para atender aos padrões educacionais estabelecidos.

Contudo, é importante ressaltar os riscos associados aos jogos de apostas ao introduzir esses temas na educação. As propagandas de jogos de apostas desempenham um papel significativo na atração e participação do público nesse setor. Empresas de jogos de apostas frequentemente utilizam estratégias de marketing agressivas para atrair a atenção do público, incluindo campanhas publicitárias em diversos canais, como televisão, rádio, redes sociais e parcerias com celebridades.

Com o advento da tecnologia, as apostas *on-line* se tornaram amplamente acessíveis, e as propagandas destacam a facilidade de participação, enfatizando a conveniência de poder apostar a qualquer momento e de qualquer lugar. Muitas propagandas também destacam bônus de inscrição, promoções especiais e probabilidades aumentadas para incentivar novos jogadores a participar, criando um apelo financeiro e uma sensação de oportunidade única.

Os jogos de azar, muitas vezes permeados por probabilidades complexas, podem levar a decisões financeiras arriscadas. A conscientização sobre esses riscos é importante para equipar os alunos com as ferramentas necessárias para avaliar criticamente situações que envolvem apostas.

Ao abordar a probabilidade e os jogos de apostas na formação do cidadão, é possível promover uma compreensão mais profunda não apenas da matemática, mas também das implicações sociais e éticas envolvidas. Ao perceber o conhecimento matemático como produção humana para auxiliar na compreensão do mundo, muitos preconceitos são minimizados, tornando o objeto de conhecimento algo relevante e interessante. Os cidadãos informados sobre probabilidade estão mais preparados para interagir em um mundo cada vez mais complexo, tomando decisões fundamentadas e contribuindo para uma sociedade mais consciente e responsável.

Diante do exposto, vislumbra-se que a continuidade dos estudos se concentre em aprimorar ainda mais as estratégias pedagógicas que integram a probabilidade e os jogos na formação do cidadão. Propõe-se o desenvolvimento de atividades práticas e interativas que proporcionem aos alunos experiências significativas, promovendo a aplicação dos conceitos probabilísticos em situações do cotidiano.

Além disso, é fundamental explorar abordagens que enfatizem não apenas o aspecto matemático, mas também as implicações sociais, éticas e financeiras associadas aos jogos de apostas. Incorporar discussões sobre os riscos e consequências de decisões financeiras arriscadas, bem como abordar a influência das propagandas de jogos de apostas, pode contribuir para uma compreensão mais abrangente e crítica por parte dos estudantes.

A introdução de atividades práticas de educação financeira, com foco na tomada de decisões responsáveis em relação a apostas, pode ser uma extensão valiosa do programa educacional. Dessa forma, os alunos podem desenvolver habilidades de avaliação de riscos, gestão financeira e consciência sobre as estratégias de marketing empregadas pela indústria de jogos de apostas.

Além disso, considerando o contexto tecnológico atual, a exploração de recursos digitais e simulações interativas pode enriquecer ainda mais a abordagem, proporcionando aos alunos uma experiência mais imersiva e prática. Isso pode envolver o uso de aplicativos educativos, jogos *on-line* educativos e simulações que permitam aos alunos explorar diferentes cenários probabilísticos e compreender as nuances associadas aos jogos de apostas.

Por fim, incentiva-se a colaboração entre educadores, pesquisadores e profissionais da área para desenvolver estratégias educacionais inovadoras que atendam às demandas contemporâneas, preparando os alunos não apenas para compreender a probabilidade, mas também para tomar decisões conscientes e éticas em relação aos jogos de apostas e situações afins na vida real.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 2004.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011.

BERNARDES, O. Para uma abordagem do conceito de probabilidade. **Educação & Matemática**, Lisboa, n. 3, 1987.

BOROVCNIK, M.; BENTZ, H. J.; KAPADIA, R. A Probabilistic Perspective. In: KAPADIA, R.; BOROVCNIK, M. (Eds.). **Chance Encounters**: Probability in Education. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991. pp. 27-71.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988**. Brasília: Presidente da República. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Constituicao/Constituicao.htm
Acesso: 02 fev. 2024.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Ministério da Educação e do Desporto: Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, 1997.

CORREA, S. M. B. B. **Probabilidade e estatística**. 2 ed. Belo Horizonte: PUC Minas Virtual, 2003.

COSTA NETO, P. L. O.; CYMBALISTA, M. **Probabilidades**. 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

COUTINHO, C. Q. S. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? **Revemat**, Florianópolis, v. 2, n. 1, p. 50-67, 2007. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12991/12092
Acesso em: 17 set. 2023.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

JAMES, B. R. **Probabilidade**: um curso em nível intermediário. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

MATTAR, F. N. **Pesquisa de marketing**: metodologia, planejamento, execução e análise, 2. ed. São Paulo: Atlas, 1994.

MORGADO, A. C.; PITOMBEIRA, J. C.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

PÓVOA, L.; MELO, G. P. F.; ESHER, H. B.; SIMÕES, R. A. **O Mercado de Apostas Esportivas On-line: impactos, desafios para a definição de regras de funcionamento e limites**. Brasília: Núcleo de Estudos e Pesquisas/CONLEG/Senado, Março 2023 (Texto para Discussão nº 315). Disponível em: <www.senado.leg.br/estudos>. Acesso em: 16 mar. 2023

RIFO, L. **Probabilidade e Estatística**: aspectos de tomada de decisão e incerteza para o Ensino Fundamental e Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2020. 238 p.

ROSS, S. **Probabilidade**: Um curso moderno com aplicações. 8. ed. Porto Alegre: Bookman Companhia Editora Ltda, 2010. 606 p.

SILVA, A. A. F.; ATAÍDES, F. B.; OLIVEIRA, O. S. **Pesquisa-ação: Princípios e Fundamentos.** Revista Prisma, V. 2, P 2-15, 2021.

SKOVSMOSE, O. Educação matemática crítica. In: SKOVSMOSE, O. **Desafios da Reflexão em educação matemática crítica**. Campinas: Papirus, 2008.

SOUSA, J. R.; SANTOS, S. C. M. Análise de conteúdo em pesquisa qualitativa: modo de pensar e de fazer. **Pesquisa e Debate em Educação**, Juiz de Fora: UFJF, v. 10, n. 2, p. 1396-1416, jul./dez. 2020. DOI: https://doi.org/10.34019/2237-9444.2020.v10.31559.

VASCONCELOS, C. B.; ROCHA, M. A. **Matemática Análise Combinatória e Probabilidade**. 3. ed. São Paulo: Editora Vozes. 2019.

VIALI, L. Algumas considerações sobre a origem da teoria da probabilidade. **Revista Brasileira de História da Matemática**, *[S. l.]*, v. 8, n. 16, p. 143–153, 2008. DOI: 10.47976/RBHM2008v8n16143-153. Disponível em: https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/177. Acesso em: 8 set. 2023.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIOS

Nos quadros abaixo, apresentamos todas as respostas apresentadas pelos estudantes nos questionários inicial e final.

QUESTIONÁRIO INICIAL:
Probabilidade
O que você acha que é Probabilidade? "A probabilidade é parecida com porcentagem, ela diz algo que pode ou não acontecer. Esses cálculos são feitos com base em padrões". "Uma porcentagem de acontecer algo". "É uma coisa que é difícil e fácil". "Probabilidade é a chance provável de algo acontecer". "As chances de algo acontecer". "Probabilidade é uma chance". (2) "É uma coisa que pode ou não acontecer". "Probabilidade é uma chance de algo acontecer". "Não sei dizer realmente". "É a chance de você ganhar ou acontecer algo". "Não sei o que é". "É uma coisa que é difícil e fácil". "É a chance de algo acontecer em determinado momento, como ganhar na loteria, alguma coisa acontecer com você durante algum momento do dia a dia".
O que você acredita ser um evento aleatório? "Algo que em circunstâncias "normais" não aconteceria". "Um evento que tinha pouca ou nenhuma probabilidade de acontecer". "É uma coisa que é do nada". "Um evento aleatório é um evento que não podemos prever". "Um evento que tinha pouca probabilidade de acontecer", "Um evento que não tinha nenhuma probabilidade". "Algo inesperado". "Algo que não esperamos acontecer e acontece".

"Algo aleatório" "Alguma coisa que ninguém sabe" "Uma coisa imprevista" "É uma palavra que me define" "Uma coisa muito legal" "Um evento cujo surgiu sem quase ninguém saber, que tenha uma".
Você já estudou sobre Probabilidade? Sim (3) Não (10) Não lembro (2)
Você acha que Probabilidade está relacionada com Matemática? Sim (7) "Eu acho que não" "Sim, pois existem as probabilidades matemáticas, que precisam de cálculos". "Depende" "Parece que sim, mas não sei ao certo" "Se estamos estudando, acho que sim".(2) "Acho que sim" (2)
Você acredita que saber sobre Probabilidade pode influenciar sobre suas decisões em alguma situação? "Depende da ocasião" Sim (8) "Eu acho que não" "Acho que sim" "Talvez sim, sabendo probabilidade podemos fazer a escolha mais favorável para o momento". "Talvez" (2) "Talvez sim".
Apostas
Você já fez alguma aposta com seus amigos?

“Sim, zerar o jogo Terraria modo difícil”. “Sim, apostei que meu time de futebol iria ganhar o jogo”. Sim Não (3) “Sim, aposta sobre quem iria chegar primeiro em tal lugar, se tal evento iria acontecer”. “Sim, perdi 30,00 no jogo que o Flamengo perdeu para o Grêmio de 2x1” “Sim, e tive a burrice de perder 10 reais”. “Sim, e já perdi dinheiro com isso”. “Sim, já fiz no cassino do jogo do Tigrinho”. “Sim, apostas de acontecimentos e em jogos”. “Sim, apostei no jogo de sinuca” “Sim, uma vez”. “Sim, sobre basquete”
Você já fez ou conhece alguém que fez alguma aposta na internet? “Sim, vários”. “Sim, meu Pai aposta na Bet (aposta de futebol)” “Eu já fiz” “Acho que não” “Sim, eu mesma, perdi 60 reais no Tigrinho” “Sim, ele estava apostando no Tigrinho” “Sim, uma parente que ficou louca” “Sim, minha mãe” “Sim, conheço” “Sim, meu tio. Ele faz jogo de aposta” “Sim, apostas esportivas e cassino” “Sim, só não lembro o nome” “Sim, minha irmã” “Fiz uma aposta no celular” “Não”
Você acredita que exista alguma relação entre Probabilidade e jogos de apostas?

“Sim, como no jogo Campo Minado do google play, as bombas são espalhadas aleatoriamente”. “Sim” (8) “Acho que não”. “Deve ter” “Talvez” “Não sei” (2) “Depende do jogo”.
Se existe alguma relação, como você acha que funciona? “Acredito que sim”. “Existem 50% de probabilidade de vencer ou 50% de probabilidade de perder, dependendo do jogo”. “Não”. “Estudando probabilidade podemos escolher o mais provável de vencer”. “Eles calculam a probabilidade das jogadas”. “Provavelmente como um gráfico mostrando a probabilidade de vencer”. “A banca deixa bem claro sobre suas chances de acerto, normalmente são de 70% a 20% de acerto”. “Não sei” (3) “Sim” “Nos jogos de apostas”
Você já viu alguma propaganda de casas de apostas ou de cassinos *on-line*? “Sim, a Blaze”. “Sim, Bet e mais alguns”. “Sim”. (9) “Já”. “Sim, nos anúncios de youtube e jogos”. “Não”. “Sim, Cassino Eurobola”
Rede Social e Mídias
Você participa de alguma rede social? Qual?

“Sim, TikTok e Instagram”. (3) “Instagram, TikTok e Whatsapp” “Sim, youtube, TikTok e Whatsapp”. “Sim, Instagram, TikTok e Twitter” “Sim, Instagram”. (4) “Sim, Instagram, Whatsapp e Facebook” “Sim, Instagram e Whats”. (2) “Sim, Facebook e youtube” “Sim, Whatsapp”.
Você segue algum influencer que faz propaganda de casas de apostas ou de cassinos *on-line*? “Sim, Você Sabia” “Não (5)” “Momento, não” “Sim” (3) “Sigo”. “Não que eu lembre”. “Sim, tem se tornado bem frequente”. “Não, mas sempre aparece algumas propagandas” “Rabits da Invasão”
Você assiste televisão? Se sim, você já viu alguma propaganda na televisão de casas de apostas ou de cassinos *on-line*? “Sim e não”. “Sim, mas nunca vi” “Sim” (4) “Não” (4) “Sim, inclusive o Fantástico já falou sobre esses cassinos *on-line*”. “Assisto, mas nunca vi propaganda de apostas”. (2) “Sim, já vi aposta de jogos de futebol.” “Não assisto TV.”

Você escuta rádio? Se sim, você já ouviu alguma propaganda na rádio de casas de apostas ou de cassinos *on-line*? “Não” (12) “Não escuto”. “Sim” (2)

QUESTIONÁRIO FINAL
Probabilidade
O que você acha que é um evento aleatório? “É um evento que tinha pouca ou nenhuma chance possibilidade de ocorrer”. “Um evento que tinha pouca ou nenhuma chance possibilidade de ocorrer”. “Um evento aleatório é um evento que não pode ser previsto”. (2) “Um evento inesperado, que não pode ser previsto”. “Quando eu abrir uma caixa pode acontecer algo ou não” “É algo que possa acontecer”. “Uma coisa inesperada que pode acontecer”. “Algo cuja probabilidade é indefinida”. “Não sei o que vai acontecer” “Evento que não pode ser previsto”.
O que você entende como espaço amostral? “É um universo em que tem todas as possibilidades de acontecimento”. “Espaço amostral é o total de possibilidades”. (3) “Espaço amostral é o total de possibilidades” “Todas as possibilidades daquele evento”. “Quando tem todas as probabilidades de acontecer”. “São todos os resultados possíveis”. “São todas as possíveis coisas a acontecer, tipo ganhar ou perder”. “São todas as probabilidades de algo acontecer”. “Não sei”.
O que você entende como probabilidade de um evento?

“É a porcentagem de chances de um evento acontecer”. “A probabilidade de um evento é a possibilidade de algo acontecer”. “Nada”. “As chances de algo acontecer em uma determinada situação”. “A probabilidade de um evento é a chance de algo acontecer”. “As chances que têm do evento acontecer”. “Que a probabilidade vai sempre favorecer a banca”. “Que a probabilidade é sempre a favor da banca”. “As chances de algo acontecer em determinada situação”. “Não sei”. “A probabilidade de algo acontecer”.
Qual a diferença de eventos equiprováveis e não-equiprováveis? “Eventos equiprováveis são que todos tem a mesma porcentagem, enquanto não-equiprováveis tem porcentagem diferentes.” “Equiprováveis tem a mesma” “Um quando não tem as mesma chance que o outro. (Não-equi)”. “Evento equiprováveis tem a mesma probabilidade de acontecer e os não-equiprováveis é o contrário”. “Equiprováveis: Quando todos têm a mesma chance de acontecer. Não-equiprováveis: quando nem todos têm a mesma chance de acontecer”. “Eventos equiprováveis são que todos tem a mesma chance, já o não-equiprováveis nem todos tem a mesma chance”. “Equiprováveis é quando tem as mesmas chances, o não-equiprováveis é quando não tem todos as mesmas chances”. “Os equiprováveis são os que possuem probabilidades iguais, já os não-equiprováveis são diferentes”. “É que todos os cavalos podem ganhar” “Equiprováveis tem a mesma probabilidade”
O que você entende como probabilidade condicional? “Probabilidade condicional é quando uma parte já aconteceu e estamos esperando pela outra parte”. “É quando uma parte já aconteceu e estamos esperando pela outra”.

"Não entendo". "Probabilidade condicional é quando já temos um resultado e esperamos o outro". "Quando já sabe uma parte do evento (já aconteceu)". "Quando não se olha mais para o universo amostral, e só para um dos dados". "Nada" "Não sei". "É quando uma parte já aconteceu e esperamos a outra parte".
O que é e como se calcula a probabilidade clássica? "Se divide o número de possibilidades do evento pelo total de possibilidades". (2) "Não sei explicar" "O número de chances em baixo e o número que eu quero em cima. Ex: $\frac{1}{6}$". "A chance do evento com o resto das possibilidades" "Número de chances, com o total de possibilidades". (2) "Calculando as chances com o total de possibilidades". "Não sei".
O que é probabilidade frequentista? "Probabilidade frequentista é quando jogamos várias vezes e depois vemos qual foi o resultado mais frequente". "É quando jogamos várias vezes e depois vemos os resultados, por exemplo os Jogos dos Cavalos". (2) "Quando conseguimos calcular o universo das amostras". "Probabilidade frequentista é quando jogamos várias vezes e depois vemos qual foi o resultado, por exemplo o Jogo do Cavalo". "Noção da probabilidade" "Quando a gente calcula a probabilidade com o número de repetições". "Uma probabilidade que acontece frequentemente". "Não sei".
Você acha que probabilidade está relacionada com Matemática? "Sim, pois precisamos de cálculos para calcular a probabilidade de algo". (3) "Sim". (6) "Sim, dá pra calcular, mas é inesperado o resultado".

Você acredita que saber sobre probabilidade pode influenciar sobre suas decisões em alguma situação? “Sim, sabendo as probabilidades eu posso ter mais controle sobre minhas escolhas”. “Sim”. (7) “Sim, em sorteios por exemplo”. “Sim, pode jogar e tomar cuidado, sabendo das probabilidades e não perder tanto dinheiro”.
Apostas
Você acredita que exista alguma relação entre probabilidade e jogos de apostas? “Sim” (10)
Se existe alguma relação, como você explicaria essa relação? “Jogos de apostas são feitos a base de probabilidade”. “Com a probabilidade”. “Quanto maior as chances de acerto menor você vai receber”. “Com a probabilidade entendemos algumas coisas sobre os jogos (na questão de apostar)”. “Quanto menor a aposta a remuneração diminui, quanto maior ela aumenta”. “Quando maior a probabilidade menor a *odd*, quanto menor a probabilidade maior a *odd”*. Se a probabilidade for muito alta menor a recompensa e se a probabilidade for baixa, maior a recompensa”. “Não sei”. (2) “Com a probabilidade entendemos algumas coisas sobre os jogos apostas”
Você acredita que poderia viver de apostas? “Não”. (9) “Não, pois vai ficar sem dinheiro”
Quais motivos levam alguém a apostar? “Vícios, dívidas, entre outros”. “Dinheiro”.

“Necessidade”. “Às vezes diversão, dívida ou vício”. “Por diversão” (2) “Vícios, manipulada ou lazer”. “Ganhar”. “Depende, tem pessoa que aposta por dinheiro ou diversão”. “Por diversão, vício”
Após essas aulas, conversando um pouco mais sobre probabilidade, você se sente mais ou menos confiante em apostar *on-line*? “Não me sinto nem mais nem menos confiante, não gosto de apostas e tenho medo”. “Sim, mas não gosto de perder dinheiro”. (2) “Não me sinto mais confiante”. “Não, pois sou muito mão de vaca”. “Mais, agora eu tenho mais de noção das chances e do valor da minha aposta”. “Sim, minha mente abriu sobre a banca sempre sair no lucro”. “Me sinto menos confiante, pois aprendi sobre as apostas injustas e que a banca sempre tem vantagem”. “Nem tanto, pois teria chance de ganhar ou perder”. “Sim, porque agora eu tenho certeza de que os jogos podem ser falso”. “Não, porque se eu não gosto não faria”.
Rede Social e Mídias
Você faria propaganda para uma casa de apostas ou para um cassino *on-line*? Justifique sua resposta. “Não, pois não gosto de ser exposta”. “Sim, eu faria pra ganhar dinheiro”. “Não faria”. “Não, infelizmente não confio”. “Não, pois se a pessoa apostar e perder ela iria pensar que a desonesta seria eu e iria manchar a minha imagem”. “Se eu ganhasse dinheiro em cima, sim”. “Não, pois pode prejudicar muitas pessoas.”

“Não, pois eu não saberia se a probabilidade de eles me pagarem por isso seria alta”.
“Não, porque eu não gosto de jogo de apostas”.

APÊNDICE B – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

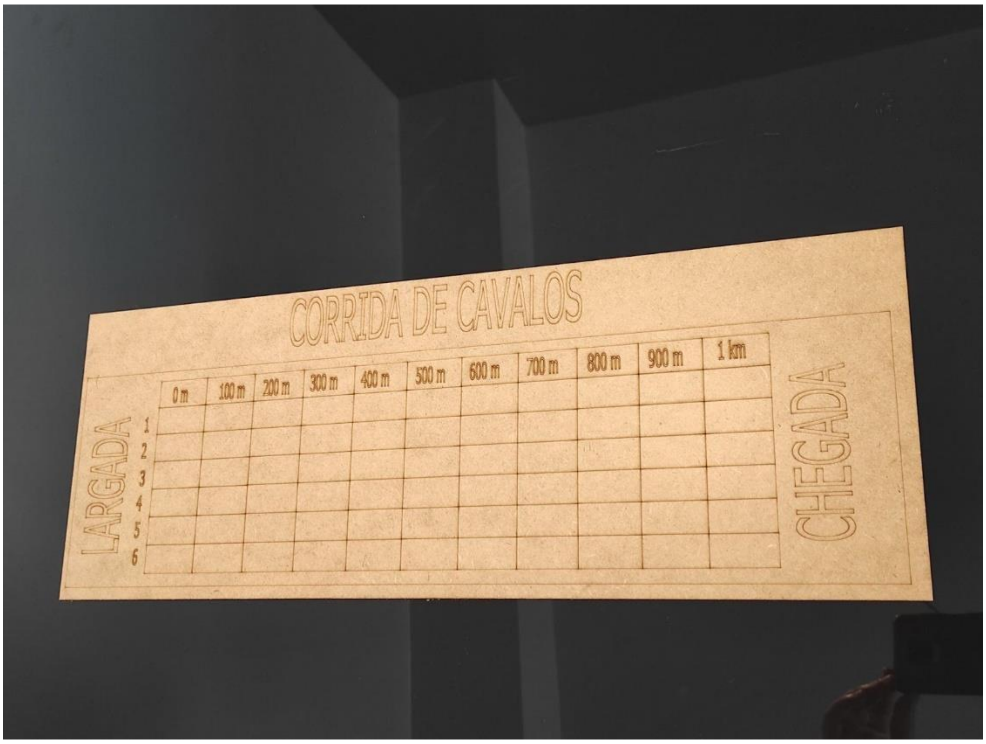
1° Encontro - JOGO: CORRIDA DE CAVALOS I

Sugerimos introduzir o conceito de Probabilidade utilizando o jogo "Corrida de Cavalos I".

O intuito do jogo é que os estudantes reflitam sobre as possibilidades que os cavalos têm de avançar na corrida, ou seja, se um deles é favorito ou se no jogo todos os cavalos têm a mesma chance.

Esse jogo utiliza um dado e um tabuleiro representando uma pista de corrida de cavalos (numerados de 1 a 6). Os estudantes devem apostar em um cavalo, que acham que vai vencer a corrida. Para jogar, os estudantes lançam um dado, sendo que o resultado do lançamento corresponde ao cavalo que avança uma casa. Pode ser jogado em duplas ou no máximo até 6 pessoas.

Figura – Tabuleiro da Corrida de Cavalos I



Fonte: Registro feito pelo autor.

Instruções do jogo:

- Os números do tabuleiro correspondem aos cavalos.
- Cada jogador deve apostar em um cavalo;
- A aposta deve ser registrada com o nome do jogador sob o número do cavalo escolhido.
- O cavalo avança quando sorteado o número na face voltada para cima, extraído no lançamento do dado. Desse modo, se a face voltada para cima após o lançamento do dado for 5, o cavalo que se movimenta é o de número 5.
- O lançamento é marcado com o avanço de uma casa no tabuleiro do “cavalo sorteado”.
- Vence o cavalo que primeiro alcançar na linha de chegada.

PÚBLICO-ALVO

Alunos do nono ano do Ensino Fundamental.

DURAÇÃO

Para conclusão da atividade será necessária 1,5 hora/aula.

PRÉ-REQUISITOS

Frações

Decimais

Porcentagem

Contagem

CONTEÚDOS

Definição clássica de Probabilidade.

OBJETIVOS

Reconhecer o universo amostral de um evento;

Reconhecer eventos equiprováveis;

Comparar eventos mais ou menos prováveis;

Calcular a probabilidade de ocorrência de um determinado evento e representá-lo por meio de fração, número decimal ou porcentagem;

OBJETOS DO CONHECIMENTO PREVISTOS NA BNCC

Noção de acaso

Análise da ideia de aleatório em situações do cotidiano

Análise da ideia de acaso em situações do cotidiano: espaço amostral

Análise de chances de eventos aleatórios.

Espaço amostral: análise de chances de eventos aleatórios

HABILIDADES PREVISTAS NA BNCC

(EF01MA20) Classificar eventos envolvendo o acaso, tais como “acontecerá com certeza”, “talvez aconteça” e “é impossível acontecer”, em situações do cotidiano.

(EF02MA21) Classificar resultados de eventos cotidianos aleatórios como “pouco prováveis”, “muito prováveis”, “improváveis” e “impossíveis”.

(EF03MA25) Identificar, em eventos familiares aleatórios, todos os resultados possíveis, estimando os que têm maiores ou menores chances de ocorrência.

(EF04MA26) Identificar, entre eventos aleatórios cotidianos, aqueles que têm maior chance de ocorrência, reconhecendo características de resultados mais prováveis, sem utilizar frações.

(EF05MA23) Determinar a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos aleatórios, quando todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer (equiprováveis).

METODOLOGIA

Atividade 1:

Separar a turma em grupos de até seis alunos.

Explicar a regra do jogo “Corrida de Cavalos I” e definir o número de partidas que irão jogar (sugiro 3 partidas).

Atividade 2:

Jogar. Sugerimos jogar 3 partidas.

Atividade 3:

Utilizar o questionário abaixo para refletir sobre os conceitos matemáticos de probabilidade existentes na proposta:

1. É possível prever o cavalo que será sorteado na 1ª rodada?
2. É possível prever o cavalo que será sorteado na 6ª rodada?
3. Sabendo que na 1ª rodada saiu 1 no dado, na 2ª rodada saiu 2, na 3ª rodada saiu 3, na 4ª rodada saiu 4 e na 5ª saiu 5, é possível prever o resultado da 6ª rodada?
4. Existe um cavalo favorito antes do jogo começar?
5. Ao jogar o dado, qual a chance de sair o número 5?
6. Ao jogar o dado, qual a chance de sair o número 7?
7. Podemos garantir que o resultado no dado será sempre menor ou igual a 6?
8. Em um lançamento, é mais provável sair um número maior ou menor que três?

Atividade 4

Após a discussão sobre as questões, definir os conceitos matemáticos de:

Acaso

Definição: Experimentos que ao serem repetidos nas mesmas condições não produzem o mesmo resultado são denominados experimentos aleatórios.

Exemplo: Ao lançar uma moeda, não é possível prever a face que cairá voltada para cima, é um fenômeno aleatório, ou seja, não é previsível.

Definição: Os experimentos que ao serem repetidos nas mesmas condições conduzem ao mesmo resultado são denominados determinísticos.

Exemplo: Sabemos que a água (sob pressão de 1 atm), quando aquecida até 100° C, entra em ebulição. Então, este evento é um evento determinístico.

Universo Amostral

Definição: Denominaremos espaço amostral associado a um experimento o conjunto de seus resultados possíveis.

Evento

Definição: Denominaremos de evento qualquer subconjunto do espaço amostral.

Exemplo: Considere o evento A dado por sair um número ímpar no lançamento de um dado.

Sabemos que o espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, então o subconjunto do espaço formado apenas pelos números ímpares é o evento A: $A = \{1, 3, 5\}$.

Observação: Quando em um experimento aleatório com espaço amostral finito todos os eventos elementares têm a mesma chance de ocorrer, dizemos que o espaço amostral é equiprovável.

Definição Clássica de Probabilidade

Em um espaço amostral equiprovável Ω, a probabilidade de ocorrer um evento A é indicada por $p(\mathrm{A})$ e definida como:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}.$$

MATERIAIS

Quadro, pincel, dados, tabuleiros, cavalos, caneta e caderno.

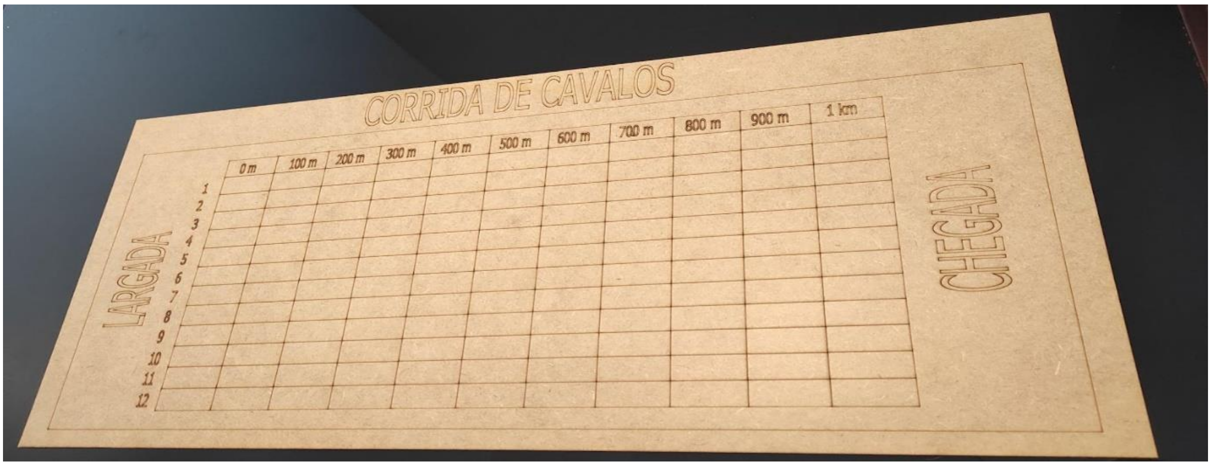
2° Encontro - JOGO: CORRIDA DE CAVALOS II

Para aprofundar os conceitos trabalhados no jogo "Corrida de Cavalos I", sugerimos o jogo "Corrida de Cavalos II".

O intuito do jogo, é que os estudantes reflitam sobre as possibilidades que os cavalos têm de vencer a corrida, ou seja, se um deles é favorito ou se todos têm a mesma chance a cada lançamento.

Esse jogo utiliza dois dados e um tabuleiro, representando uma pista de corrida de cavalos (numerados de 1 a 12). Os estudantes devem apostar em um cavalo que acham que vai vencer a corrida. Para jogar, os estudantes lançam dois dados, sendo que o resultado da soma do lançamento dos dados corresponde ao cavalo que avança uma casa. Pode ser jogado em duplas ou no máximo até 12 pessoas.

Figura – Tabuleiro da Corrida de Cavalos II



Fonte: Registro feito pelo autor.

Instruções do jogo:

- Os números do tabuleiro correspondem aos cavalos.
- Cada jogador deve apostar em um cavalo;
- A aposta deve ser registrada com o nome do jogador sob o número do cavalo escolhido.
- O cavalo avança quando a soma dos números das faces voltadas para cima extraídos no lançamento do dado é igual ao número do cavalo. Desse modo, se as faces voltadas para cima após o lançamento dos dados forem 2 e 6, o cavalo que se movimenta é o de número 8 (2+6).

- O lançamento é marcado com o avanço de uma casa no tabuleiro do “cavalo com a soma sorteada”.
- Vence o cavalo que primeiro alcançar na linha de chegada.

PÚBLICO-ALVO

Alunos do nono ano do Ensino Fundamental.

DURAÇÃO

Para conclusão da atividade será necessária 1 hora/aula.

PRÉ-REQUISITOS

Frações

Decimais

Porcentagem

Contagem

Princípio Multiplicativo

CONTEÚDOS

Eventos não equiprováveis

Definição de Probabilidade Condicional.

Definição de Probabilidade Frequentista.

OBJETIVOS

Reconhecer o universo amostral de um evento;

Reconhecer eventos equiprováveis e não-equiprováveis;

Comparar eventos mais ou menos prováveis;

Calcular a probabilidade de ocorrência de um determinado evento e representá-lo por meio de fração, número decimal ou porcentagem;

OBJETOS DO CONHECIMENTO PREVISTOS NA BNCC

Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável

Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista)

Experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências

Princípio multiplicativo da contagem. Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral.

Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes.

HABILIDADES PREVISTAS NA BNCC

(EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.

(EF07MA34) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.

(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

(EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

METODOLOGIA

Atividade 1:

Separar a turma em grupos de até doze alunos.

Explicar a regra do jogo “Corrida de Cavalos II”, e definir o números de partidas que irão jogar, é importante tabular o resultado final de cada corrida, pois iremos observar a frequência dos resultados das somas.

Atividade 2:

Jogar. Sugerimos jogar três partidas.

Atividade 3:

Utilizar o questionário abaixo para refletir sobre os conceitos matemáticos sobre probabilidade existentes na proposta.

Observando coletivamente os vencedores das corridas, questionar:

1. É possível prever o cavalo que será sorteado na 1ª rodada?
2. É possível prever o cavalo que será sorteado na 6ª rodada?
3. Sabendo que na 2ª rodada saiu a soma 2, na 3ª rodada saiu a soma 3, na 4ª rodada saiu soma 4 e na 5ª saiu a soma 5, é possível prever o resultado da 6ª rodada?
4. Todos os cavalos têm chance de serem sorteados na primeira rodada?
5. Em cada rodada, a chance de os cavalos serem sorteados é a mesma?
6. Qual a probabilidade de cada cavalo ser sorteado na primeira rodada?
7. Qual a probabilidade de sair a soma 8?
8. Se sair 5 no primeiro dado, qual a probabilidade de sair a soma 8?
9. Qual o valor da soma das probabilidades de todos os cavalos?
10. Existe um cavalo favorito para vencer a corrida?
11. Monte a tabela de frequência que cada cavalo foi sorteado?

12. Compare o resultado esperado na probabilidade clássica e o resultado obtido na tabela.

Atividade 4

Após a discussão sobre as questões, definir os conceitos matemáticos de:

Princípio Fundamental da Contagem

Se uma decisão d_1 pode ser tomada de m maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de n maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é mn.

Evento não-equiprovável

Quando, em um experimento aleatório com espaço amostral finito, todos os eventos elementares não têm a mesma chance de ocorrer, dizemos que o espaço amostral é não-equiprovável.

Definição frequentista de probabilidade

Define-se probabilidade, pela definição frequentista, como um acontecimento A e representa-se por $p(A)$, como sendo o valor obtido para a frequência relativa com que se observou A, num grande número de realizações da experiência aleatória.

Probabilidade Condicional

A *Probabilidade Condicional* é uma medida de probabilidade que expressa a chance de ocorrer um evento A, dado que outro evento B já ocorreu. É representada por $\mathrm{p(A|B)}$ lido como "a probabilidade de A dado B". A fórmula da probabilidade condicional é dada por:

$$p(A|B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}.$$

Isso significa que a probabilidade de A ocorrer, dado que B ocorreu, é igual à probabilidade de ocorrência simultânea de A e B dividida pela probabilidade de ocorrência de B. (Note-se que essa definição não se aplica quando $p(B) = 0$).

MATERIAIS

Quadro, pincel, dados, tabuleiros, cavalos, caneta e caderno.

3° Encontro - JOGO: ROLETA

Existem várias versões de jogos de roleta, as mais conhecidas são a Roleta Europeia e a Roleta Americana. Nas duas, a roleta consiste em uma roda, onde são gravados números de 0 a 36, no modelo europeu, na Americana há ainda o duplo zero “00”.

O intuito deste jogo é introduzir o conceito de jogos contra a banca, onde ela define o valor pago a uma aposta a partir da probabilidade de acerto e para apresentação do conceito de aposta justa.

No jogo de roleta, a roda é dividida em canaletas numeradas, e quando a grande roda é posta a girar, uma pequena esfera é inserida na roda. Todos os jogadores devem efetuar suas apostas na mesa antes da pequena esfera ser inserida na roda. O número da canaleta em que a esfera parar quando a roleta parar de girar é o número vencedor.

Figura – Roleta

Fonte: https://www.oskaras.com/img/2021/02/roleta_cassino_macetes-scaled.jpg

PÚBLICO-ALVO

Alunos do nono ano do Ensino Fundamental.

DURAÇÃO

Para conclusão da atividade serão necessárias duas horas/aula.

PRÉ-REQUISITOS

Frações

Decimais

Porcentagem

Contagem

Conceito de acaso

Probabilidade Clássica

Probabilidade Condicional

CONTEÚDOS

Probabilidade de eventos independentes.

OBJETIVOS

Reconhecer eventos independentes.

Reconhecer apostas contra a Banca.

Determinar se uma aposta é justa.

OBJETOS DO CONHECIMENTO PREVISTOS NA BNCC

Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável

Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista)

Experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências

Princípio multiplicativo da contagem. Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral.

Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes.

HABILIDADES PREVISTAS NA BNCC

(EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.

(EF07MA34) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.

(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

(EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

METODOLOGIA

Atividade 1:

Separar a turma em quatro grupos. Serão explicadas as regras de apostas em jogos de roleta e suas respectivas remunerações.

Cada grupo receberá 20 fichas de uma cor, referente ao grupo. Serão realizadas 20 rodadas de apostas em uma roleta americana, com o grupo podendo escolher a modalidade de aposta, quantidade de fichas e se irá apostar em cada rodada.

Atividade 2:

Jogar. Sugerimos jogar por 40 minutos.

Atividade 3:

Utilizar o questionário abaixo para refletir sobre os conceitos matemáticos de probabilidade existentes na proposta:

Observando o resultado final, questionar cada grupo:

1. O resultado final do grupo, foi positivo?
2. Qual foi a estratégia de apostas utilizada pelo grupo?
3. O resultado de uma rodada interfere no resultado da próxima?
4. Ao escolher um número específico, qual a probabilidade de acerto?
5. Ao escolher um número específico, qual a remuneração paga pela banca?
6. Conhecendo as probabilidades de cada aposta e remuneração oferecida pela banca, podemos dizer que o jogo favorece a banca ou ao jogador?
7. Monte uma tabela onde aparece o valor pago pela banca para cada tipo de aposta e a probabilidade de ocorrência do evento.
8. Quem decide o valor pago a cada tipo de aposta?
9. Você acredita que pode ser lucrativo ao jogar esse jogo?

Atividade 3

Após a discussão sobre as questões, definir os conceitos de:

Probabilidade de Eventos Independentes

Um evento A é considerado independente de um outro evento B se a probabilidade de A é igual à probabilidade condicional de A dado B.

Isto é, se $p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{A}|\mathrm{B})$.

É evidente que, se A é independente de B, B é independente de A, ou seja, $p(B) = p(B|A)$.

Se A e B são independentes, então temos que:

$$p(A \cap B) = p(A).p(B).$$

Aposta contra a banca

Vamos chamar de apostas contra a banca, os jogos de apostas que tem sua forma de pagamento determinada pela casa de apostas. Nessa modalidade de jogos, as remunerações são calculadas sobre as probabilidades de modo a favorecer a casa de apostas.

Aposta Justa

Vamos definir a aposta justa no qual o lucro esperado de uma aposta não favorece nenhum dos jogadores. Em uma aposta justa, o jogador e a casa jogam em equilíbrio. É possível distribuir uma aposta de forma que o retorno esperado seja o mesmo do valor investido.

Exemplo de aposta justa em um evento equiprovável: Vamos apostar no jogo de cara e coroa, para que a aposta seja justa, a banca deve pagar o dobro do valor investido em cada uma das opções. Se apostar uma unidade em cara, recebe duas unidades. Se apostar uma unidade em coroa, recebe duas unidades. Assim, se apostar uma unidade em cada, terá apostado duas unidades, mas terá como retorno duas unidades, independente do resultado.

Exemplo de aposta justa em um evento não equiprovável: Vamos supor uma luta de boxe onde um pugilista é favorito, com 80% de chance de vitória, contra 20% de seu adversário. Assim, um fator de pagamento justo para a aposta seria de 1,25 para o favorito e 5 para o adversário. Dessa forma, distribuindo 4 unidades de aposta no favorito e 1 no adversário, seu retorno seria sempre de 5 unidades de aposta.

MATERIAIS

Quadro, pincel, caneta, caderno, fichas coloridas, simulacro de mesa de apostas de roleta, roleta e esfera.

4° Encontro - JOGO: APOSTAS ESPORTIVAS

Os jogos de apostas no Brasil ainda estão sendo discutidos. Já legalizados no Brasil temos os jogos de loterias, controlados pelo governo e, desde 2018, a modalidade de apostas de quota fixa, chamadas de apostas esportivas. Apesar de ainda ser ilegal a presença de cassinos no Brasil, há discussões nas maiores esferas públicas para a liberação ou não deles, e também, é uma prática relativamente comum aos brasileiros a de participar de apostas. Assim, refletir sobre a matemática presente nelas é importante, não só para conhecê-las e entendê-las, mas para participar delas de maneira consciente, compreender os riscos e divertir-se com equilíbrio.

Propomos essa reflexão ainda no Ensino Fundamental, com os conceitos e habilidades sobre probabilidade previstos na Base Nacional Comum Curricular, que podem auxiliar na percepção dos alunos sobre os riscos de jogos de apostas.

Existem diversas modalidades de apostas, vamos observar a modalidade *2Way:* onde existem dois resultados possíveis e você deve prever o correto. Essas apostas são comuns para todos os tipos de esportes que não permitem empate (basquete, tênis etc.) e também muitas apostas especiais que funcionam de acordo com o mesmo princípio, como vitória do time A ou Empate/Vitória do time B. Podemos calcular o retorno do valor apostado multiplicando o valor da aposta pelo fator de pagamento.

PÚBLICO-ALVO

Alunos do nono ano do Ensino Fundamental.

DURAÇÃO

Para conclusão da atividade será necessária 1,25 hora/aula.

PRÉ-REQUISITOS

Frações

Decimais

Porcentagem

Contagem

Probabilidade Clássica

Regra de Três

CONTEÚDOS

Definição clássica de Probabilidade.

OBJETIVOS

Determinar o que são *odds*

Calcular a probabilidade de um evento a partir de sua *odd*

OBJETOS DO CONHECIMENTO PREVISTOS NA BNCC

Experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências.

Princípio multiplicativo da contagem. Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral.

Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes.

HABILIDADES PREVISTAS NA BNCC

(EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.

(EF07MA34) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.

(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

(EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

METODOLOGIA

Atividade 1:

Definir: *ODDS*

Um termo muito comum em apostas esportivas é *odds*, de origem inglesa, *odds*, na prática, tem o mesmo significado de probabilidades, porém o termo *odds* em apostas *on-line* significa a representação das cotações que serão aplicadas a cada elemento que será apostado. *Odds* são números que representam a probabilidade percebida de um determinado resultado em um evento esportivo. Elas são utilizadas para calcular seus possíveis ganhos em uma aposta. Para essa atividade utilizaremos as *odds* decimais.

ODDS DECIMAIS: é o fator de pagamento de uma aposta, ou seja, para determinar o possível valor de retorno de sua aposta, basta multiplicar o valor apostado pela *odd decimal.*

Exemplo: Se você apostar R$ 100 em *odds* de 2,30 e sua aposta for bem-sucedida, você receberá R$ 230 no total (R$ 100 da aposta original mais R$ 130 de lucro). *Odds* decimais mais baixas geralmente estão associadas a resultados considerados mais prováveis, enquanto *odds* mais altas refletem resultados menos prováveis.

Atividade 2:

Utilizar um projetor para apresentar um site de apostas esportivas e as modalidades de apostas presentes. Solicitar que os alunos procurem distribuir uma aposta em um evento na busca de ter como retorno o valor investido inicialmente. Problema proposto: Distribuir 10 reais em apostas complementares de modo a obter 10 reais de retorno.

Atividade 3:

Inicialmente vamos retomar o conceito de aposta justa proposto no encontro anterior. Em seguida, apresentar a probabilidade de um evento a partir de sua *odd* de pagamento, $p(A) = \frac{1}{odd(A)}$, e observar as probabilidades encontradas, percebendo sua soma, o percentual de retorno da casa e comparar com a probabilidade de pagamento em uma aposta justa fazendo o uso da regra de três.

Exemplo: Suponha uma partida de basquete onde o time A tem *odd* de 1,52 para vitória e o time B tem odd de 2,30. Supondo uma aposta justa, podemos estimar a probabilidade de vitória de cada time: $p(A) = \frac{1}{odd(A)}$ e $p(B) = \frac{1}{odd(B)}$, assim temos $p(A) = \frac{1}{1,52} \simeq 65,789\%$ e $p(B) = \frac{1}{2,30} \simeq 43,478\%$. Note que ao somar $p(A) + p(B) > 1$, isto ocorre pelo fato de a banca superestimar as probabilidades, pagando um *odd* inferior ao preço justo. Podemos calcular a *odd* justa para o evento, fazendo uma regra de 3.

Vitória de A	
Probabilidades oferecidas	Probabilidades na aposta justa
109,276	100
65,789	x

Assim, a probabilidade na aposta justa da vitória de A é de 60,204%, com uma *odd* de 1,66.

Vitória de B	
Probabilidades oferecidas	Probabilidades na aposta justa
109,276	100
43,478	x

E a probabilidade na aposta justa da vitória de B é de 39,787%, com uma *odd* de 2,51.

MATERIAIS

Quadro, pincel, dados, caneta, caderno e um computador com acesso a internet com tela de projeção.

APÊNDICE C – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - MENOR DE IDADE

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO SUL – IFRS

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO – PROPPI COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA – CEP

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado para participar do projeto de pesquisa intitulado: “Jogar contra a banca, um risco ou uma oportunidade? Uma sequência didática para o ensino de probabilidade”. Seus pais/responsáveis permitiram que você participe. Este projeto está vinculado à dissertação de mesmo título, de autoria de Renato Elias dos Santos D'Avila Júnior, sob a orientação da professora Juliana Sanches e coorientação do professor Bruno Brogni Uggioni. Nessa pesquisa pretendemos desenvolver uma sequência de aulas capaz de fazer com que os alunos experimentem os conceitos de probabilidade, levando-os a refletir sobre conceitos matemáticos fora do contexto escolar, como em jogos envolvendo apostas.

Essa pesquisa será feita no/a na sua escola, através de dois questionários escritos e entrevista, que poderá ser gravada e/ou filmada, apenas após sua autorização. Para a coleta de dados será utilizado/a questionários impressos onde os estudantes irão redigir suas respostas e também os registros que os pesquisadores terão a partir das falas dos estudantes.

Me disseram que este estudo apresenta risco mínimo para mim, isto é, apesar de todos os cuidados que já estão sendo tomados, existem pequenos riscos de origem emocional e psicológica, dentre os quais podemos citar: possibilidade de constrangimento ao se expressar oralmente, desconforto, medo, vergonha, estresse, quebra de sigilo, cansaço ao participar da atividade e quebra de anonimato. Caso isso ocorra, serei encaminhado(a) para Assistência Estudantil do Campus Canoas (tel. (51) 3415.8200)), para receber o atendimento necessário. Além disso, se eu tiver alguma dúvida, poderei realizar o contato a qualquer hora com um dos pesquisadores responsáveis pelo estudo e ele poderá resolver minhas dúvidas.

Também me disseram que a minha participação no estudo é muito importante, uma vez que se espera que a partir dessas aulas propostas, possa compreender sobre conceitos matemáticos para além do contexto escolar, mais especificamente em apostas esportivas. Essas reflexões podem auxiliar em decisões futuras, analisando as probabilidades, percebendo os riscos e as oportunidades, antes de tomar decisões.

Os pesquisadores me informaram e me garantiram os seguintes direitos:

- que minha participação é voluntária e que a qualquer momento posso deixar de participar do estudo, sem que isso me traga qualquer tipo de dano;

- que eu não serei identificado (a) nem pelo meu nome, nem pelo uso de dados ou materiais que possam identificar minha participação no estudo; além disso, será mantido caráter confidencial das informações relacionadas à minha privacidade;

- de que posso pedir acesso às informações em todas as etapas do estudo, bem como aos resultados, ainda que isso possa afetar meu interesse em continuar participando da pesquisa; - de que não haverá nenhum tipo de custo na minha participação na pesquisa;

- de que tenho direito a compensação material relativas às minhas despesas e de meu acompanhante com relação à transporte e alimentação, caso esses gastos sejam demandados durante a minha participação no estudo;

- de que posso me recusar a responder qualquer pergunta que achar constrangedora ou inadequada.

- de que serão mantidos todos os preceitos ético-legais durante e após o término da pesquisa, de acordo com a Resoluções 466/2012 e 510/2016 do Conselho Nacional de Saúde;

==
==

Eu ___________________________________, portador do documento de identidade ou CPF _______________, aceito participar da pesquisa intitulada: “Jogar contra a banca, um risco ou uma oportunidade?”. Fui informado(a) dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada, bem como sobre a metodologia que será adotada e sobre os riscos e benefícios envolvidos. Recebi a informação de que a qualquer momento poderei desistir de participar do estudo, e o meu responsável poderá modificar a decisão de permitir minha participação, se assim o desejar. Recebi uma via assinada e rubricada deste termo de assentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Local, ____de _________de __________.

_______________________________ _________________________________

Assinatura do(a) participante Assinatura do(a) pesquisador(a)

===

Autorização para uso de imagem/voz

Autorizo o uso de minha imagem e/ou voz para fins específicos de divulgação dos resultados da pesquisa, sendo seu uso restrito a obtenção de dados para análise da pesquisa e para ilustrar situações ocorridas durante a realização das atividades. Fui informado que serão tomadas todas as medidas possíveis para preservar o anonimato e a minha privacidade.

Local, ____de _________de __________.

____________________________ ________________________________

Assinatura do(a) participante Assinatura do (a) pesquisador(a)

===

Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar:

CEP/IFRS
E-mail: cepesquisa@ifrs.edu.br
Endereço: Rua General Osório, 348, Centro, Bento Gonçalves, RS, CEP: 95.700-000 **Telefone:** (54) 3449-3340

Pesquisador(a) principal: Renato Elias dos Santos D'Avila Júnior
Documento de Identidade: 5089275928
Telefone para contato: (51) 999655515
E-mail para contato: rejunior@gmail.com

Demais pesquisadores:
Nome: Juliana Sanches
Telefone para contato: (51)983165865
E-mail para contato: juliana.sanches@canoas.ifrs.edu.br

Nome: Bruno Brogni Uggioni
Telefone para contato: (51) 982199763
E-mail para contato: bruno.uggioni@canoas.ifrs.edu.br

APÊNDICE D – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - PAIS E/OU RESPONSÁVEIS

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO SUL – IFRS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO –
PROPPI COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA – CEP

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
(para pais e/ou responsáveis)

Prezado (a) Senhor (a):

Seu(ua) representado(a) está sendo respeitosamente convidado (a) a participar do projeto de pesquisa intitulado: "Jogar contra a banca, um risco ou uma oportunidade? Uma sequência didática para o ensino de probabilidade". Este projeto está vinculado à dissertação de mesmo título, de autoria de Renato Elias dos Santos D'Avila Júnior, sob a orientação da professora Juliana Sanches e coorientação do professor Bruno Brogni Uggioni. Nessa pesquisa pretendemos desenvolver uma sequência de aulas capaz de fazer com que os alunos experimentem os conceitos de probabilidade, levando-os a refletir sobre conceitos matemáticos fora do contexto escolar, como em jogos envolvendo apostas.

A pesquisa será feita na EMEF Professor Gilberto Jorge Gonçalves da Silva, através de dois questionários escritos e entrevista, que poderá ser gravada e/ou filmada, apenas após sua autorização. Para a coleta de dados será utilizado/a questionários impressos onde os estudantes irão redigir suas respostas e também os registros que os pesquisadores terão a partir das falas dos estudantes.

==

Fui alertado (a) que este estudo apresenta risco mínimo para meu representado (a), isto é apesar de todos os cuidados que já estão sendo tomados, existem pequenos riscos de origem emocional e psicológica, dentre os quais podemos citar: possibilidade de constrangimento ao se expressar oralmente, desconforto, medo, vergonha, estresse, quebra de sigilo, cansaço ao participar da atividade e quebra de anonimato. Caso isso ocorra, seu(ua) representado(a) será encaminhado(a) para Assistência Estudantil do Campus Canoas (tel. (51) 3415.8200)), a fim de receber o acompanhamento necessário. Além disso, diante de qualquer tipo de questionamento ou dúvida poderei realizar o contato imediato com um dos pesquisadores responsáveis pelo estudo que fornecerá os esclarecimentos necessários.

Foi destacado que a participação do meu(minha) representado(a) no estudo é de extrema importância, uma vez que se espera que a partir dessas aulas propostas, ele(a) possa compreender sobre conceitos matemáticos para além do contexto escolar, mais especificamente em apostas esportivas. Essas reflexões podem auxiliá-lo(a) em decisões futuras, analisando as probabilidades, percebendo os riscos e as oportunidades, antes de tomar decisões.

Estou ciente e me foram assegurados os seguintes direitos:

- da liberdade de retirar o consentimento, a qualquer momento, e que meu representado(a) poderá deixar de participar do estudo, sem que isso lhe traga prejuízo de qualquer ordem; - da segurança de que meu representado não será identificado (a) e que será mantido caráter confidencial das informações relacionadas à sua privacidade;

- do compromisso de ter acesso às informações em todas as etapas do estudo, bem como aos resultados, ainda que isso possa afetar meu interesse em que meu representado(a) continue participando da pesquisa;

- de que não haverá nenhum tipo de despesa ou ônus financeiro relacionados com a participação nesse estudo;

- de que meu representado terá direito a compensação material relacionadas às despesas relativas à transporte e alimentação, caso esses gastos sejam demandados durante a participação de meu representado no estudo;

- de que não está previsto nenhum tipo de procedimento invasivo ou coleta de material biológico;

- de que meu representado não responda qualquer pergunta que julgar constrangedora ou inadequada.

- de que serão mantidos todos os preceitos ético-legais durante e após o término da pesquisa, de acordo com a Resoluções 466/2012 e 510/2016 do Conselho Nacional de Saúde;

==

Eu ____________________________________, portador do documento de identidade ou CFF _____________, aceito que meu(minha) representado(a) ____________________ participe da pesquisa intitulada: “Jogar contra a banca, um risco ou uma oportunidade?”. Fui informado (a) dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada, bem como sobre a metodologia que será adotada, sobre os riscos e benefícios envolvidos. Recebi uma via assinada e rubricada deste termo de consentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas. Local, ____de _________de __________.

___________________________ ___________________________

Assinatura do(a) representante legal Assinatura do (a) pesquisador(a)

==

Autorização para uso de imagem/voz

Autorizo o uso da imagem e/ou voz de meu representado para fins específicos de divulgação dos resultados da pesquisa, sendo seu uso restrito a obtenção de dados para análise da pesquisa e para ilustrar situações ocorridas durante a realização das atividades. Fui informado que serão tomadas todas as medidas possíveis para preservar o anonimato e a privacidade de meu representado.

Local, ____de _________de __________.

___________________________ ___________________________

Assinatura do(a) representante legal Assinatura do (a) pesquisador(a)

===

== Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, poderei consultar:

CEP/IFRS

E-mail: cepesquisa@ifrs.edu.br

Endereço: Rua General Osório, 348, Centro, Bento Gonçalves, RS, CEP: 95.700-000 **Telefone:** (54) 3449-3340

Pesquisador(a) principal: Renato Elias dos Santos D'Avila Júnior

Telefone para contato: (51) 999655515

E-mail para contato: rejunior@gmail.com

Demais pesquisadores:

Nome: Juliana Sanches

Telefone para contato: (51)983165865

E-mail para contato: juliana.sanches@canoas.ifrs.edu.br

Nome: Bruno Brogni Uggioni

Telefone para contato: (51) 982199763

E-mail para contato: bruno.uggioni@canoas.ifrs.edu.br

APÊNDICE E – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - MAIOR DE IDADE

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO SUL – IFRS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO – PROPPI
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA – CEP

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado (a) Senhor (a):

Você está sendo convidado para participar do projeto de pesquisa intitulado: “Jogar contra a banca, um risco ou uma oportunidade? Uma sequência didática para o ensino de probabilidade”. Este projeto está vinculado à dissertação de mesmo título, de autoria de Renato Elias dos Santos D'Avila Júnior, sob a orientação da professora Juliana Sanches e coorientação do professor Bruno Brogni Uggioni. Nessa pesquisa pretendemos desenvolver uma sequência de aulas capaz de fazer com que os alunos experimentem os conceitos de probabilidade, levando-os a refletir sobre conceitos matemáticos fora do contexto escolar, como em jogos envolvendo apostas.

Essa pesquisa será feita no/a na sua escola, através de dois questionários escritos e entrevista, que poderá ser gravada e/ou filmada, apenas após sua autorização. Para a coleta de dados será utilizado/a questionários impressos onde os estudantes irão redigir suas respostas e também os registros que os pesquisadores terão a partir das falas dos estudantes.

Me disseram que este estudo apresenta risco mínimo para mim, isto é, apesar de todos os cuidados que já estão sendo tomados, existem pequenos riscos de origem emocional e psicológica, dentre os quais podemos citar: possibilidade de constrangimento ao se expressar oralmente, desconforto, medo, vergonha, estresse, quebra de sigilo, cansaço ao participar da atividade e quebra de anonimato. Caso isso ocorra, serei encaminhado(a) para Assistência Estudantil do Campus Canoas (tel. (51) 3415.8200)), para receber o atendimento necessário. Além disso, se eu tiver alguma dúvida, poderei realizar o contato a qualquer hora com um dos pesquisadores responsáveis pelo estudo e ele poderá resolver minhas dúvidas.

Também me disseram que a minha participação no estudo é muito importante, uma vez que se espera que a partir dessas aulas propostas, possa compreender sobre conceitos matemáticos para além do contexto escolar, mais especificamente em apostas esportivas. Essas reflexões podem auxiliar em decisões futuras, analisando as probabilidades, percebendo os riscos e as oportunidades, antes de tomar decisões.

Os pesquisadores me informaram e me garantiram os seguintes direitos:

- que minha participação é voluntária e que a qualquer momento posso deixar de participar do estudo, sem que isso me traga qualquer tipo de dano;

- que eu não serei identificado (a) nem pelo meu nome, nem pelo uso de dados ou materiais que possam identificar minha participação no estudo; além disso, será mantido caráter confidencial das informações relacionadas à minha privacidade;

- de que posso pedir acesso às informações em todas as etapas do estudo, bem como aos resultados, ainda que isso possa afetar meu interesse em continuar participando da pesquisa;

- de que não haverá nenhum tipo de custo na minha participação na pesquisa;

- de que tenho direito a compensação material relativas às minhas despesas e de meu acompanhante com relação à transporte e alimentação, caso esses gastos sejam demandados durante a minha participação no estudo;

- de que posso me recusar a responder qualquer pergunta que achar constrangedora ou inadequada.

- de que serão mantidos todos os preceitos ético-legais durante e após o término da pesquisa, de acordo com a Resoluções 466/2012 e 510/2016 do Conselho Nacional de Saúde;

==

Eu ____________________________________, portador do documento de identidade ou CPF ________________, aceito participar da pesquisa intitulada: “Jogar contra a banca, um risco ou uma oportunidade?”. Fui informado(a) dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada, bem como sobre a metodologia que será adotada e sobre os riscos e benefícios envolvidos. Recebi a informação de que a qualquer momento poderei desistir de participar do estudo, e o meu responsável poderá modificar a decisão de permitir minha participação, se assim o desejar. Recebi uma via assinada e rubricada deste termo de assentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Local, ____de _________de __________.

_________________________________ ________________________

Assinatura do(a) participante Assinatura do(a) pesquisador(a)

==

Autorização para uso de imagem/voz Autorizo o uso de minha imagem e/ou voz para fins específicos de divulgação dos resultados da pesquisa, sendo seu uso restrito a obtenção de dados para análise da pesquisa e para ilustrar situações ocorridas durante a realização das atividades. Fui informado que serão tomadas todas as medidas possíveis para preservar o anonimato e a minha privacidade.

Local, ____de _________de __________.

_____________________________________ _________________________________

Assinatura do(a) participante Assinatura do (a) pesquisador(a)

===

Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar:

CEP/IFRS
E-mail: cepesquisa@ifrs.edu.br
Endereço: Rua General Osório, 348, Centro, Bento Gonçalves, RS, CEP: 95.700-000
Telefone: (54) 3449-3340

Pesquisador(a) principal: Renato Elias dos Santos D'Avila Júnior
Documento de Identidade:____
Telefone para contato: (51) 999655515
E-mail para contato: rejunior@gmail.com

Demais pesquisadores:
Nome: Juliana Sanches
Telefone para contato: (51)983165865
E-mail para contato: juliana.sanches@canoas.ifrs.edu.br

Nome: Bruno Brogni Uggioni
Telefone para contato: (51) 982199763
E-mail para contato: bruno.uggioni@canoas.ifrs.edu.br