UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

O Uso de Demonstrações Matemáticas no Ensino Fundamental

por

Eli Marcus Fernando da Silva

2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

O Uso de Demonstrações Matemáticas no Ensino Fundamental

por

Eli Marcus Fernando da Silva

sob a orientação da

Prof(a). Dr(a). Miriam Da Silva Pereira

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/CCEN/UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Fevereiro/ 2024
João Pessoa - PB

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586u Silva, Eli Marcus Fernando da.
O Uso de demonstrações matemáticas no Ensino Fundamental / Eli Marcus Fernando da Silva. - João Pessoa, 2024.
92 f. : il.

Orientação: Miriam da Silva Pereira.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática - Ensino Fundamental - Demonstrações. 2. Matemática - Aprendizagem. 3. Fórmulas matemáticas. I. Pereira, Miriam da Silva. II. Título.

UFPB/BC CDU 51:37(043)

Elaborado por ANNA REGINA DA SILVA RIBEIRO - CRB-15/24

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
Fone/Ramal: (83) 3216-7563 http://www.ufpb.br/pos/profmat

PROFMAT

ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL REALIZADA NO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DO CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

No dia vinte e sete de fevereiro de dois mil e vinte e quatro (27/02/2024), às 10:00 horas, no Auditório do Departamento de Matemática/CCEN da Universidade Federal da Paraíba, em sessão pública, teve início a defesa de trabalho de conclusão de curso intitulado ***"O Uso de Demonstrações Matemáticas no Ensino Fundamental"***, do aluno **ELI MARCUS FERNANDO DA SILVA**, que havia cumprido, anteriormente, todos os requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, sob a orientação da professora Miriam da Silva Pereira. A Banca Examinadora, aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, foi composta pelos professores Miriam da Silva Pereira (presidenta), Flank David Morais Bezerra (membro interno) e Sylvia Ferreira da Silva (membro externo/UFRPE). A professora Miriam da Silva Pereira, em virtude da sua condição de presidenta, iniciou os trabalhos e depois das formalidades de apresentação, convidou o aluno a discorrer sobre o conteúdo do seu trabalho de conclusão. Concluída a explanação, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que em seguida, sem a presença do aluno, finalizando os trabalhos, reuniu-se para deliberar, tendo concedido a menção: **APROVADO**. Face à aprovação, declarou a presidenta achar-se o avaliado legalmente habilitado a receber o Grau de **Mestre** em Matemática, cabendo à Universidade Federal da Paraíba, providências como, de direito, a expedição do Diploma a que o mesmo fez jus. Nada mais havendo a tratar, foi lavrada a presente ata que será assinada pelos membros da Banca Examinadora.

João Pessoa, 27 de fevereiro de 2024.

Banca Examinadora

Miriam da Silva Pereira Miriam Silva Pereira

Flank David Morais Bezerra Flank David Morais Bezerra

Sylvia Ferreira da Silva Sylvia Ferreira da Silva

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por Ele está sempre guiando os meus passos dando sabedoria para superar as dificuldades mostrando o caminho que devo seguir.

Agradeço a todos os familiares pelo incentivo e especialmente a minha mãe Ozea Maria da Silva e meu pai Fernando José da Silva que através das suas orações me fortaleceram em dias difíceis.

Agradeço as minhas irmãs Lis Fernanda e Liliane Sheyla que acreditaram e deram forças durantes os momentos difíceis.

Agradeço aos professores, pelas aulas ministradas durante o curso, que contribuíram para o meu crescimento acadêmico.

Agradeço à Professora Dra. Miriam da Silva Pereira, que teve um papel muito importante na produção deste trabalho através das suas correções e orientações que foram fundamentais para sua conclusão.

Agradeço ao Professor Dr. Flank David Morais Bezerra e a Professora Dr(a). Sylvia Ferreira Da Silva por aceitarem o convite e pelas sugestões de melhoria deste trabalho.

Agradeço à Coordenação e secretaria do PROFMAT-UFPB, sempre atentas às necessidades dos mestrandos.

Agradeço aos amigos que confiaram e torceram por mim, em especial Fábio Ferreira, que mesmo antes do mestrado já estudávamos para chegarmos a esse momento, a Antonio Ferreira que sempre se colocou a disposição para tirar dúvidas e dar suas orientações.

Agradeço aos colegas do PROFMAT, que inúmeras vezes nos reunimos para estudar e mesmo em meio a distâncias e compromissos diários sempre se colocaram a disposição para tirar dúvidas, Edson Marinho, Gabriel Costa, José Rodolfo, Leonardo Vieira, Rammon Rodrigues e em especial Henrique José Cavaltante, que contribuiu significativamente com suas orientações para a conclusão deste trabalho.

Dedicatória

A todos os que se alegram com o nosso sucesso!

Resumo

O presente trabalho trata da importância das demonstrações matemáticas no Ensino Fundamental e de como seu uso pode contribuir no ensino da Matemática. Apresentamos alguns resultados acerca áreas dos polígonos regulares, Teorema de Pitágoras e relações métricas no triângulo retângulo. Inicialmente introduzimos alguns conceitos preliminares necessários para compreender o processo de demonstração, destacando a importância de compreender os conceitos matemáticos que estão por trás de uma fórmula, desmistificando a ideia que o ensino da Matemática é apenas decorar e aplicar fórmulas para resolução de problemas.

Palavras-chaves: Demonstração; Ensino Fundamental; Aprendizagem; Fórmulas Matemáticas.

Abstract

This work deals with the importance of mathematical demonstrations in teaching and how its use can contribute to the teaching of Mathematics. We present some results about areas of regular polygons, Pythagorean Theorem and metric relationships in the right triangle. Initially, we introduce some concepts necessary to understand the demonstration process, highlighting the importance of understanding the mathematical concepts behind a formula, demystifying the idea that the teaching of Mathematics is only memorizing and applying formulas for troubleshooting.

Key-words: Demonstration; Elementary School; Apprenticeship; Mathematical Formulas.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

O ensino da Matemática é uma jornada crucial na formação dos estudantes, oferecendo não apenas habilidades numéricas, mas também as ferramentas essenciais para o desenvolvimento do raciocínio lógico, capacidade de argumentação e resolução de problemas. Em meio a diferentes reformas educacionais ao longo dos anos, o uso de demonstrações matemáticas desempenham um papel fundamental no ensino e aprendizado, ajudando a fornecer uma base sólida para a compreensão de conceitos e o desenvolvimento de habilidades analíticas.

Este trabalho tem o objetivo de fornecer subsídios e materiais de apoio que auxiliem professores e estudantes no entendimento e aplicação das demonstrações matemáticas. A justificativa para este trabalho reside na necessidade de disponibilizar recursos que ampliem a compreensão e aprofundem o conhecimento em matemática, enriquecendo a experiência educacional e promovendo o desenvolvimento intelectual tanto de professores quanto de alunos.

Os objetivos desta dissertação incluem o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, aprimoramento da argumentação matemática, justificação das fórmulas utilizadas no Ensino Fundamental e o estímulo à criticidade dos estudantes. A importância do uso das demonstrações vai além de preparar os alunos para novos desafios matemáticos, contribui também na formação intelectual do indivíduo uma vez que ao aprender os fundamentos do raciocínio, os jovens estarão mais bem preparados para usar seu poder de crítica e discernimento de maneira eficaz (Ver [18]).

No primeiro capítulo desta dissertação, exploramos o ensino da matemática no Brasil, contextualizando-o dentro das várias mudanças ao longo dos anos, incluindo as reformas das décadas de 1930 e 1940, bem como a influência da reforma conhecida como Matemática Moderna. Este capítulo servirá como base histórica e conceitual para compreender as dinâmicas do ensino da Matemática em nosso país.

No segundo capítulo, abordamos as noções fundamentais de lógica, utilizando como referências os livros Iniciação à Lógica Matemática [6] e Conjuntos e Funções [13]. Essa base teórica é essencial para a compreensão das demonstrações matemáticas, fornecendo os fundamentos necessários para a análise e construção de argumentos sólidos no contexto matemático.

No terceiro capítulo exploramos os métodos de demonstrações matemáticas, como demonstração direta, princípio de indução finita e método de força bruta, embasados por importantes referências, tais como os livros Um Convite à Matemática [7] e Iniciação à Matemática: Um Curso com Problemas e Soluções [24].

Por fim, no quarto capítulo, discutimos resultados matemáticos que podem ser abordados no Ensino Fundamental, tais como a resolução de uma equação do 2º grau, diferentes formas de calcular a área do triângulo e aplicações do teorema de Pitágoras, embasados por obras como Meu Professor de Matemática [16] e Geometria [22].

Ao fornecer um embasamento teórico sólido e exemplos práticos, esta dissertação pretende contribuir para a melhoria do ensino e aprendizado da matemática no Ensino Fundamental, capacitando educadores e estudantes a explorar o potencial da matemática como ferramenta para compreender e transformar o mundo ao seu redor.

Capítulo 1

Fundamentação Teórica

Neste capítulo discutimos algumas mudanças que aconteceram no ensino de matemática no país com o passar dos anos, mostrando a importância das demonstrações e suas contribuições na vida do estudante.

As principais referências usadas neste capítulo são os livros A Experiência Matemática [5], Introdução às técnicas de demonstração na matemática [10], C.Q.D.: explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria [11], Matemática e Ensino [18], documentos oficiais: A Base Nacional Curricular Comum [1] Os Parâmetros Curriculares Nacionais[19] e Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática [20] além de artigos científicos: Resoluções Visuais de Alguns Problemas de Matemática da Educação Básica [2], Para uma Compreensão dos Diferentes Papéis da Demonstração em Geometria Dinâmica [8] Os diferentes tipos de demonstrações: Uma reflexão para os cursos de licenciatura em matemática [21] e Ensino de matemática no século XX – da Reforma Francisco Campos à Matemática Moderna [26].

1.1 Ensino da Matemática no Brasil

Diferente de outras ciências, a Matemática não é uma ciência experimental, sua essência está em suas demonstrações, na argumentação e sua justificativa lógica. Em sua estrutura, uma afirmação para ao qual não existe prova é chamada de conjectura, este termo é usado quando se suspeita que a afirmação seja verdadeira. Caso uma conjectura seja demonstrada, ela passa a ser um teorema. Sobre o que é necessário em uma demonstração, Davis e Hersh destaca que

> "Abstração, formalização, axiomatização, dedução — eis os ingredientes de uma demonstração. E as demonstrações da matemática moderna, embora possam lidar com uma matéria-prima diferente ou estarem situadas em um nível mais profundo, dão exatamente a mesma sensação ao estudante ou ao pesquisador, ..."[5, p.181].

No entanto, a presença das demonstrações no Ensino Básico se alterou no decorrer dos anos. De fato, o ensino da Matemática no Brasil passou por várias mudanças ao longo dos anos. Uma delas está relacionada à presença das demonstrações nos livros didáticos.

Durante o século XX, podemos destacar as seguintes: A reforma de Francisco Campos, a reforma Gustavo Capanema e o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. Estas reformas modificaram profundamente o ensino da matemática no Brasil.

> ... em particular, as reformas das décadas de 30 e 40 e, mais tarde, a reforma conhecida como Matemática Moderna, nas décadas de 60 e 70, modificaram a disciplina de forma tão profunda que ainda hoje sentimos os efeitos dessas mudanças. Um deles se refere à própria constituição da disciplina matemática pela fusão da trigonometria, da álgebra, da aritmética e da geometria. Outro diz respeito à presença ou à ausência de determinados conteúdos no currículo como, por exemplo, o cálculo diferencial e integral". [26, p.7].

A reforma de Francisco Campos teve como objetivo modernizar o ensino, incluindo o ensino de matemática, que por sua vez tinha por objetivo unificar os diferentes ramos da matemática, como aritmética, álgebra e geometria. Além disso, introduziu noções de cálculo diferencial e integral para todos os alunos do ensino secundário. Na reforma Gustavo Capanema, houve uma reorganização do currículo, integrando os conteúdos de álgebra, geometria e aritmética no currículo escolar, além de enfatizar a importância da história e cultura no ensino de matemática. O Movimento da Matemática Moderna trouxe mudanças significativas no ensino de Matemática, incluindo uma abordagem mais abstrata, ênfase na linguagem de conjuntos e integração de diferentes áreas da matemática.

No entanto, essa reforma também gerou críticas, conteúdos como limites, derivadas e regras de derivação, foram reduzidos ou excluídos em certos contextos. Hoje tais assuntos são abordados apenas no ensino superior.

Atualmente a educação básica no Brasil é composta por três etapas: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. A Educação Infantil é a primeira etapa da Educação Básica e é destinada a crianças de até 5 anos, o Ensino Fundamental tem duração de nove anos e está dividido em outras duas etapas, Ensino Fundamental I do 1° ao 5° ano e Ensino Fundamental II do 6° ao 9° ano e o Ensino Médio tem duração de três anos. De acordo com Elon Lages Lima,

> Durante os quatro anos iniciais o aluno precisa ganhar familiaridade com os números, sua escrita, sua nomenclatura, as operações entre eles, as noções de fração e números decimal e as aplicações mais simples desses conceitos a problemas cotidianos. Deve também aprender a trabalhar com as figuras geométricas mais simples (planas ou espaciais) e a estabelecer conexões entre números e figuras, medindo comprimento, ângulos, áreas e volumes. Deve ganhar experiência com as diversas unidades de medidas que compõem o sistema métrico. [18, p.165].

É necessário que os conceitos e definições matemáticas fiquem bem apresentados para os estudantes nos primeiros anos para que eles cheguem ao Ensino Fundamental II, tendo base para argumentar e justificar de modo lógico e convincente alguns fatos matemáticos utilizados nas demonstrações. Embora no Ensino Fundamental I seja trabalhado uma pré-álgebra, é no Ensino Fundamental II que podemos iniciar o processo de demonstrações matemáticas. Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's)

> Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver uma pré-álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que os trabalhos algébricos serão ampliados; trabalhando com situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da álgebra (como modelizar, resolver problemas aritmeticamente insolúveis, demonstrar), representando problemas por meio de equações (identificando parâmetros, variáveis e relações e tomando contato com fórmulas, equações, variáveis e incógnitas) e conhecendo a "sintaxe" (regras para resolução) de uma equação.[19, p.39].

Nesta perspectiva, os PCN's também destacam que no terceiro ciclo, (6° e 7° anos) é interessante que o estudante trabalhe para desenvolver a argumentação buscando sempre justificar suas respostas de modo a construir caminhos que levem a compreender as provas de alguns teoremas.

> Assim, é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas. [20, p.71].

No Ensino Básico, é comum serem apresentadas para os estudantes fórmulas e teoremas para resolver problemas matemáticos. Entretanto, a apresentação das demonstrações nas escolas está mais escassa. O ensino vem priorizando a menorização de fórmulas e pouca reflexão sobre elas.

No primeiro momento é comum que os estudantes não questionem a veracidade das fórmulas apresentadas fazendo o uso delas em suas atividades. No entanto, questionamentos a este respeito podem surgir naturalmente e sabemos que a veracidade de um teorema é estabelecida através de uma demonstração. Logo, é necessário que o estudante tenha conhecimento das técnicas de demonstrações para melhor entendimento nesse processo. John Fossa destaca que ter domínio destas técnicas contribui para desenvolver a criatividade nos estudantes.

> Notamos também que o mero domínio das técnicas de demonstrações a serem estudadas no que se segue não é garantia de que o aluno se tornará um "fera"em demonstrações. Demonstrar não é um ato mecânico, mas sim um ato criativo. Logo, as várias técnicas e estratégias são nada mais do que instrumentos que podemos usar em uma demonstração."[10, p. 48].

A apresentação das demonstrações para alunos no Ensino Básico prepara os alunos para novos desafios matemáticos além de contribuir na formação intelectual do indivíduo, ajudando no desenvolvimento da sociedade. Elon Lages Lima afirma que:

> Tal prática não só o prepara para estudos posteriores de Matemática como é de considerável importância para sua formação intelectual e até mesmo para o desenvolvimento de sua cidadania. com efeito, aprendendo os elementos básicos do raciocínio, o jovem saberá melhor empregar seu poder de crítica e discernimento. [18, p.169].

Nesse sentido, a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) apresenta as competências e habilidades referentes a matemática ligadas a: raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente. Tais habilidades devem estar presentes durante todo Ensino Fundamental. No entanto, quando falamos de Ensino Básico, nem sempre é fácil apresentar uma demostração de um teorema. De acordo com PCN's "Os resultados matemáticos distinguem-se pela sua precisão e os raciocínios desenvolvem-se num alto grau de minuciosidade, que os torna incontestáveis e convincentes." [19, p.23]. A respeito, Blacheff relata que devemos considerar o desenvolvimento cognitivo dos estudantes e diferentes tipos de provas.

> O desenvolvimento cognitivo dos estudantes deve ser levado em conta tal que a prova seja apresentada em formas que sejam para eles potencialmente significativas. Isto requer que os educadores e os matemáticos repensem a natureza da prova matemática e considerem o uso de diferentes tipos de prova conforme o desenvolvimento cognitivo do indivíduo. [3] apud [21].

Mesmo sem todo rigor matemático, é importante iniciar o processo de demonstração para que o estudante seja estimulado a desenvolver a argumentação e possa defender seu ponto de vista sobre determinada situação, trazendo grandes contribuições para a sua formação, tais como a estruturação do pensamento, desenvolvimento do raciocínio lógico, argumentação, criatividade, elaboração de estratégias, justificativas, pensamento crítico e construtivo, como está descrito nos PCN's [19, p.26].

Desta forma, fazer demonstrações vai além de provar uma fórmula e validar conjecturas, proporciona um maior significado para o ensino da matemática. Ao fazer uma demostração de um teorema cabe ao professor escolher a forma mais apropriada para fazê-la, observando sempre o desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

Vamos tomar o seguinte exemplo, queremos provar a validez, para todo número natural n, da igualdade

$$P(n) : 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

É natural pensar em fazer essa demonstração por indução sobre n. Apresentamos mais detalhes sobre este método no terceiro capítulo.

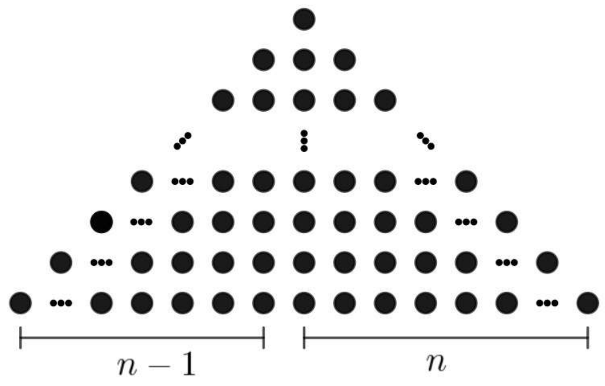
Por mais simples que pareça essa demonstração para os professores, fazer essa prova usando o método do princípio de indução finita para os alunos do 6° ano talvez não seja tão trivial assim. Embora eles percebam, por meio de exemplos, que a soma dos n primeiros números naturais ímpares seja igual à quantidade de números elevado ao quadrado, isso não caracteriza uma demonstração. Os estudantes teriam apenas uma conjectura, pois temos infinitos números naturais e em algum momento isso poderia ser falso para algum n. Logo, para tomar como verdade é preciso demonstrar sua veracidade. Será que teríamos alguma maneira de introduzir o pensamento lógico-dedutivo neste exemplo para os alunos do 6° ano?

Construímos uma figura triangular Figura (1.1) formada da seguinte forma: na primeira linha com um ponto, na segunda linha três pontos, na terceira linha cinco pontos e assim por diante.

Podemos dividir a Figura 1.1 em duas partes: do lado direito n pontos, do lado esquerdo $n - 1$ pontos. Vamos deixar em destaque como mostra a Figura 1.2.

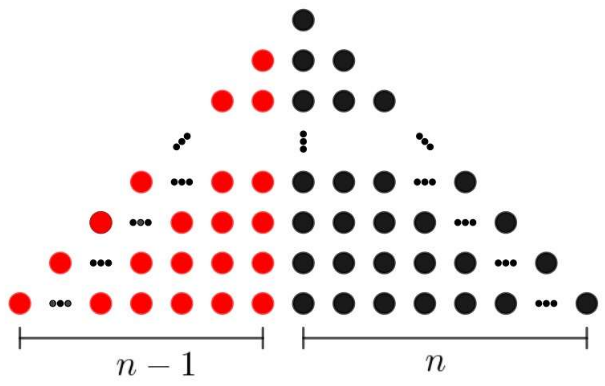
Percebemos que ao rotacionar os pontos em vermelho no sentido horário obtemos um quadrado de lado n como mostra a Figura 1.3, onde a quantidade de pontos é dada

Figura 1.1: Figura triangular de pontos



Fonte: Autor (2023)

Figura 1.2: Figura triangular de ponto pretos e vermelhos

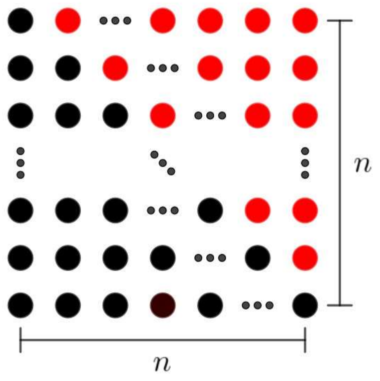


Fonte: Autor (2023)

pelo produto n por n, ou seja, n^2.

Observamos que não é uma tarefa simples iniciar o processo de demonstração matemática no Ensino Fundamental, pois é preciso levar consideração o desenvolvimento cognitivo dos estudantes. Porém, é interessante fazer as demonstrações sempre que possível, pois exercem um papel muito importante no aprendizado da matemática. De acordo com De Villiers, além da verificação, as demonstrações matemáticas desempenham as seguintes funcionalidades:

Figura 1.3: Representação $n \times n$ pontos



Fonte: Autor (2023)

- Explicação (proporcionar compreensão sobre porque é que é verdade)
- Descoberta (a descoberta ou a invenção de novos resultados)
- Comunicação (a negociação do significado)
- Desafio intelectual (a realização/satisfação pessoal por se ter construído uma demonstração)
- Sistematização (a organização de vários resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas)[8, p.3]

As demonstrações mostram que o ensino da matemática vai além de fazer operações conduzidas por fórmula, elas contribuem significativamente na vida dos estudante, levando-os a desenvolver habilidades que o ajudarão em toda a sua trajetória. Os PCN's destacam que: "A atividade matemática escolar não é "olhar para coisas prontas e definitivas", mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade."[19, p.19].

Além disso, desperta a curiosidade, trabalha o raciocínio lógico e o poder da argumentação, como destaca a segunda competência específica de Matemática para o Ensino Fundamental "Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo"[1, p.267].

Um dos objetivos de uma demostração matemática é compreender os passos que levam a validação de uma conjectura, provar determinada afirmação matemática levando a construção e apropriação dos conhecimentos matemáticos. Os argumentos utilizados nas demonstrações ajudam a compreender os resultados, trazendo um maior significado que está diretamente ligado a aprendizagem. Como destaca os PCN's

> A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. [19, p.19].

Quando compreendemos o significado de um objeto matemático, conseguimos tornar o processo de aprendizagem mais construtivo, conhecer suas propriedades, mostrar as possibilidades de conexões, implicando uma compreensão mais abrangente.

Capítulo 2

Noções de Lógica

Neste capítulo abordamos algumas noções de lógica. Embora esse conteúdo não tenha uma parte específica dentro do currículo da Educação Básica, podemos observar sua estrutura sendo desenvolvida de forma indireta dentro das unidades temáticas (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística). Tais noções de lógica são importantes na hora de fundamentar argumentos matemáticos e exprimir o raciocínio lógico nas demonstrações. Utilizamos como referências os livros Iniciação à Lógica Matemática [6] e Conjuntos e Funções [13].

2.1 Proposição

Uma proposição ou sentença é toda oração declarativa que pode ser classificada em verdadeira ou em falsa. Toda proposição apresenta três características em sua estrutura:

(1) Sendo oração, tem sujeito e predicado;

(2) É declarativa (não é interrogativa, nem exclamativa);

(3) Princípio da não contradição, tem um, e somente um, dos dois valores lógicos: ou é verdadeiro (V) ou é falsa (F).

Como vimos acima, o princípio da não contradição, tem um, e somente um, dos dois valores lógicos. Entretanto se faz necessário observar o tempo que está sendo aplicado, pois num tempo a proposição p pode ser verdadeira, num outro tempo pode ser falsa. Por exemplo, considere a proposição

p: Marcus não possui celular.

A proposição p deixa de ser verdadeira no dia em que Marcus possuir um celular.

Exemplo 2.1 *São proposições:*

(a) *Trinta é diferente de cinco.* (V)

(b) *Todo losango é quadrado.* (F)

(c) *Sete é um número inteiro.* (V)

(d) *Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos seus catetos.* (V)

Exemplo 2.2 *As frases a seguir não são proposições, elas deixam de cumprir ao menos com um dos pontos citados acima.*

(a) *Três vezes cinco mais um. (A frase não possui predicado)*

(b) *A raiz quadrada de dois é número racional? (A frase é interrogativa e a frase)*

(c) *O triplo de um número menos um é igual a onze. (A frase não pode ser classificada em verdadeira ou falsa)*

Dada uma proposição p qualquer, sempre podemos construir outra, denominada negação de p e indicada com o símbolo $\sim p$, ela sempre terá o seu valor lógico oposto, se p for verdadeira $\sim p$ é falsa e vice-versa.

Podemos escrever as possibilidades tabela-verdade da proposição $\sim p$.

p	$\sim p$
V	F
F	V

Tabela 2.1: Tabela-verdade da proposição $\sim p$

Exemplo 2.3 *Consideramos as seguintes proposições:*

(a) *p: Treze é diferente de quatro.*

$\sim p$: *Treze é igual a quatro.*

(b) *p: Vinte e um é maior que dezenove.*

$\sim p$:*Vinte e um é menor ou igual que dezenove.*

(c) *p: Cinco é divisor de onze.*

$\sim p$: *Cinco não é divisor de onze.*

(d) *p: Duzentos e três é um número inteiro.*

$\sim p$: *Duzentos e três não é um número inteiro.*

É importante observar que a veracidade da proposição $\sim p$ depende da veracidade ou não da proposição p, dos exemplos listados acima $\sim p$ é verdadeira no item (c) e é falsa em (a), (b) e (d).

2.2 Proposição composta

A partir de proposições dadas podemos construir novas proposições mediante o emprego de dois símbolos lógicos chamados conectivos.

Dadas duas sentenças p e q podemos construir uma nova sentença "p e q" denotada por $p \wedge q$. A proposição p e q é denominada conjunção das sentenças p e q.

Para obter o valor lógico de uma conjunção a partir dos valores lógicos das proposições p e q é necessário analisar o conectivo $\wedge$, a conjunção só será verdadeira se, e somente se, as proposições p e q foram verdadeiras, caso contrário a conjunção será falsa.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabela 2.2: Tabela-verdade de $p \wedge q$

Dadas duas proposições p e q outra forma de construir uma proposição composta é a disjunção de sentenças dada por "p ou q". Esta por sua vez, é denotada por $p \vee q$. Para obter o valor lógico de uma disjunção a partir dos valores lógicos das proposições p e q é necessário analisar o conectivo $\vee$. A disjunção $p \vee q$ é verdadeira se ao menos uma das proposições p ou q for verdadeira.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabela 2.3: Tabela-verdade de $p \vee q$

É importante destacar que há diferença no significado quando usamos a palavra ou como conectivo lógico e na linguagem coloquial. Na língua portuguesa o "ou" tem um significado de exclusão, por exemplo, João vai à praia ou à igreja. Já o uso do "ou" como conectivo lógico é diferente uma vez que a disjunção $p \vee q$ é verdadeira, não exclui que ambas as possibilidades sejam verdadeiras por definição.

2.3 Sentenças Condicionais

Ainda a partir de proposições dadas podemos construir novas proposições mediante o emprego de outros dois conectivos lógicos chamados, condicional: "Se ... então ..." e o bicondicional "... se, e somente se, ...".

Inicialmente, temos que dadas duas proposições p e q, podemos obter uma nova sentença "Se p, então q" denotada $p \to q$. Neste caso, podemos dizer que "p é condição suficiente para q" ou que "q é condição necessária para p". No condicional $p \to q$, a proposição p é chamada antecedente e q é chamada consequente. As condicionais são muito utilizados nas demonstrações de vários teoremas.

Baseado nos valores lógicos de p e q, podemos construir a tabela verdade de $p \to q$, sendo o condicional $p \to q$ falso somente quando p é verdadeiro e q é falsa. Caso contrário, $p \to q$ é verdadeiro.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabela 2.4: Tabela-verdade do condicional $p \to q$

A seguir veremos um exemplo onde podemos perceber o que ocorre em cada uma das quatro situações possíveis mostrada na tabela do Condicional $p \to q$.

Exemplo 2.4 *$p \to q$: Se sou Pernambucano, então sou brasileiro.*

p: Sou Pernambucano	q: Sou Brasileiro	$p \to q$
V	V	Com certeza
V	F	Impossível
F	V	Possível
F	F	Possível

Tabela 2.5: Exemplo das possibilidades do condicional $p \to q$

Podemos utilizar o bicondicional $\leftrightarrow$ entre duas proposições p e q, para obter uma nova proposição, $p \leftrightarrow q$ que se lê : "p se, e somente se, q", "p é condição necessária e suficiente para q" , " q é condição necessária e suficiente para p" ou "se p, então q e reciprocamente".

O bicondicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeiro somente quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas; se isso não acontecer, o bicondicional $p \leftrightarrow q$ é falso.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabela 2.6: Tabela-verdade do O bicondicional $p \leftrightarrow q$

Nos exemplos abaixo podemos perceber o que ocorre em cada uma das quatro situações possíveis mostrada na tabela do bicondicional.

Exemplo 2.5 *p: O Brasil fica na América do Sul.* (V)

q: A neve é branca. (V)

$p \leftrightarrow q$: O Brasil fica na América do Sul se, e somente se, a neve é branca. (V)

Exemplo 2.6 *p: Recife é a capital de Pernambuco.* (V)

q: Seis ao quadrado é igual a doze. (F)

$p \leftrightarrow q$: Recife é a capital de Pernambuco se, e somente se, seis ao quadrado é igual a doze. (F)

Exemplo 2.7 *p: A terra é Plana.* (F)

q: $\sqrt{3}$ é um número Irracional. (V)

$p \leftrightarrow q$: A terra é Plana se, e somente se, $\sqrt{3}$ é um número Irracional. (F)

Exemplo 2.8 *p: $\sqrt{2}$ é um número racional.* (F)

q: Quatro é menor que dois. (F)

$p \leftrightarrow q$: $\sqrt{2}$ é um número racional se, e somente se, quatro é menor que dois. (V)

2.4 Sentenças Abertas, quantificadores

Algumas sentenças não conseguimos determinar se são verdadeiras ou falsas sem que seja atribuído um valor a sua variável. Orações que contêm variáveis são chamadas funções proporcionais abertas ou sentenças abertas. Tais orações não são proposições, pois seu valor lógico é discutível, depende do valor dado às variáveis.

Exemplo 2.9 *São sentenças abertas:*

(a) $x + 1 = 18$

(b) $y > 33$

(c) $k^6 = 2k^5$

Mas, ao atribuir um valor a variável, transformamos a sentença aberta em uma proposição. De fato, no exemplo anterior, no item (a), para $x = 17$ a sentença é verdadeira e falsa para qualquer outro valor dado a x; No item (b), para $y = 13$ é falsa; No item (c), para $K = 0$ ou $K = 2$ é verdadeira, e falsa para qualquer outro valor atribuído a k.

Outra forma de transformar sentenças abertas em proposições é a utilização dos quantificadores, como por exemplo, o quantificador universal indicado pelo símbolo $\forall$, que se lê: "qualquer que seja", "para todo", "para cada" ou o quantificador existencial indicado pelo símbolo $\exists$, que se lê: " existe", "existe pelo menos um" ou "existe um".

No exemplo anterior, no item (a), podemos escrever $(\forall x)(x + 1 = 18)$ utilizando o quantificador universal ou $(\exists x)(x + 1 = 18)$ utilizando o quantificador existencial. Para o item (b), podemos escrever $(\forall y)(y > 33)$ utilizando o quantificador universal ou $(\exists y)(y > 33)$ utilizando o quantificador existencial. Finalmente, no item (c), podemos escrever $(\forall k)(k^6 = 2k^5)$ quantificador universal ou $(\exists k)(k^6 = 2k^5)$ utilizando o quantificador existencial.

2.5 Como negar proposições

No início dessa seção vimos como negar uma proposição simples. A seguir, apresentaremos como negar proposições compostas e condicionais. Para negar uma proposição composta que está ligada pelo conectivo "e", basta negar ambas as proposições simples e trocarmos o conectivo "e" pelo conectivo "ou". Logo podemos estabelecer que a negação de $p \wedge q$ é a proposição $\sim p \vee \sim q$.

Exemplo 2.10 *Seja p: $a \neq 0$ e q: $b \neq 0$. Então, $\sim (p \wedge q)$: $a = 0$ ou $b = 0$.*

Para negar uma proposição composta que está ligada pelo conectivo "ou", basta negar ambas as proposições simples e trocar o conectivo "ou" pelo conectivo "e". Logo podemos estabelecer que a negação de $p \vee q$ é a proposição $\sim p \wedge \sim q$.

Exemplo 2.11 *Seja p: o triângulo ABC é isósceles e q: o triângulo ABC é equilátero. Então, $\sim (p \vee q)$: o triângulo ABC não é isósceles e não é equilátero.*

No caso da condicional temos que $\sim (p \rightarrow q)$ é equivalente a $p \wedge \sim q$.

No caso da bicondicional como $p \leftrightarrow q \iff (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ temos que $p \leftrightarrow q \iff (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$ e, portanto:

$$\sim (p \leftrightarrow q) \iff \sim (\sim p \vee q) \ \vee \ \sim (\sim q \vee p)$$

ou seja,

$$\sim (p \leftrightarrow q) \iff (p \ \wedge \sim q) \ \vee \ (\ q \ \wedge \sim p)$$

Exemplo 2.12 *Consideremos p: Lais não é prima de Davi se, e somente se, Maria é prima de Lucas.*

$\sim p$: Lais não é prima de Davi e Maria não é prima de Lucas ou Maria é prima de Lucas e Lais é prima de Davi.

No caso das sentenças quantificadas trocamos os quantificadores, no caso do quantificador universal trocaremos pelo quantificador existencial e no caso do quantificador existencial pelo quantificador universal, e negamos a proposição.

Exemplo 2.13 *Seja p: Todas as rosas são brancas, então $\sim p$: Existe pelo menos uma rosa que não é branca.*

Exemplo 2.14 *Seja p: Existe um losango que não é quadrado, então $\sim p$: Todo losango é um quadrado.*

As demonstrações são ferramentas usadas para nos convencer que uma afirmação é de fato, verdadeira. Para realizá-las é preciso aplicar métodos de demonstrações matemáticas que auxiliam na argumentação. Por essa razão, abordamos alguns métodos de demonstrações matemáticas no próximo capítulo.

Capítulo 3

Métodos de demonstração

Nesse capítulo, abordamos diferentes métodos de demonstrações matemáticas que nos ajudaram a validar conjecturas, provar proposições e demonstrar teoremas. Utilizamos como referências os livros Um convite à Matemática[7], C.Q.D.: explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria [11], Aritmética [12], Indução Matemática [23], e Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções [24].

3.1 Demostração direta

Uma das técnicas mais comuns de demonstração é a demonstração direta. Ela é usada para provar que uma proposição implica outra, seguindo uma sequência lógica de passos. De fato, supomos que a hipótese p seja válida e, usando o processo lógico-dedutivo, devemos deduzir diretamente a tese q. Na sequência apresentamos algumas demonstrações feitas usando esta técnica.

Teorema 3.1 *A soma de dois números inteiros de mesma paridade é par.*

Demonstração: Suponhamos, inicialmente, que a e b sejam pares. Dessa forma, $a + b = 2k + 2t = 2(k + t)$ com k, t números naturais. Como, $k + t$ é um número natural segue que $a + b$ é um número par.

Suponhamos agora que a e b sejam ímpares. Logo, existem números naturais k e t tais que $a = 2k + 1$ e $b = 2t + 1$ com k, t números naturais. Assim,

$a + b = (2k + 1) + (2t + 1) = 2k + 2t + 2 = 2(k + t + 1)$. Uma vez que $k + t + 1$ é um número natural; segue que $a + b$ é um número par. ■

Teorema 3.2 *Seja n um número ímpar. Então, n^2 também é um número ímpar.*

Demonstração: Seja n um número natural ímpar, então existe um número natural k tal que $n = 2k + 1$. Consequentemente, $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, o que implica que n^2 é um número ímpar. ■

Vale ressaltar que se um teorema é contraposto a outro, logo são equivalentes, por exemplo, para provar o teorema:"o quadrado de um número par também é par", basta observar que ele é contraposto ao teorema anterior provado, logo, são equivalentes.

3.2 Demonstração por absurdo

A demonstração por absurdo é bastante utilizada na Matemática, é uma ferramenta poderosa que também é conhecido como método de terceiro excluído devido ao mesmo estar baseado na lei do terceiro excluído. Sobre a demonstração por absurdo, Polya em A Arte de Resolver Problemas descreve:

> A demonstração por absurdo mostra a falsidade de uma suposição derivando dela um absurdo flagrante. É um procedimento matemático, mas se assemelha à ironia, que é um procedimento predileto do satirista. A ironia adota, com todas as aparências, uma determinada opinião, que é exagerada e repetida até conduzir a um manifesto absurdo. [25, p.52].

Portanto, na demonstração por absurdo assumimos a validade da hipótese e supomos que a tese é falsa. Daí, utilizando as duas informações anteriores obtemos, mediante argumentos válidos, uma afirmação falsa; como fato não poderá ocorrer, então nossa tese deverá ser verdadeira.

Veremos a seguir alguns resultados desse método.

Proposição 3.1 *Se x um número positivo, então $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.*

Demonstração: Temos por hipótese que x é um número positivo e nossa tese que $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Seja x um número positivo e suponhamos que a tese é falsa, isto é, $x + \frac{1}{x} < 2$. Usando que $x > 0$ e multiplicando por este a desigualdade anterior, obtemos que $x^2 + 1 < 2x$.

Daí segue que $x^2 - 2x + 1 < 0$ é equivalente a $(x-1)^2 < 0$ o que é um absurdo. Portanto, $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$. ■

Uma demonstração bastante comum apresentando nos livros didáticos é provar que $\sqrt{2}$ não é um número racional. Apresentamos essa demonstração utilizando o método por absurdo.

Teorema 3.3 *A raiz quadrada do número 2 não é racional.*

Demonstração: Suponha que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, logo, por hipótese, existem $m, n \in \mathbb{Z}$ com $n \neq 0$ tal que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Sem perda de generalidade, consideremos m e n primos entre si. Dessa forma temos:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow 2n^2 = m^2,$$

ou seja, m^2 é par então m é par. Assim, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = 2k$, dessa forma

$$(2k)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2,$$

ou seja, n^2 é par então n é par.

Logo, $2 \mid m$ e $2 \mid n$, absurdo, pois contradiz a hipótese de m e n são primos entre si. ■

3.3 Demonstração usando a contrapositiva

Este método é baseado no fato de que a veracidade de forma positiva de uma proposição é equivalente à veracidade de sua forma contrapositiva, podendo ser esta última mais simples de provar. Dada uma proposição condicional do tipo $p \to q$, a proposição $\sim q \to \sim p$ é denominada contrapositiva da proposição $p \to q$.

Exemplo 3.1 *"Se sou pernambucano, então sou brasileiro" é equivalente à afirmação "Se não sou brasileiro, então não sou pernambucano"*

Proposição 3.2 *Se* $2x^2 + x - 1 = 0$*, então* $x < 1$.

Demonstração: A contrapositiva da proposição que queremos provar é: Se $x \geq 1$, então $2x^2 + x - 1 \neq 0$. De fato, se $x \geq 1$, temos $x - 1 \geq 0$ e $2x^2 > 0$. Então, $2x^2 + x - 1 > 0$. Portanto $2x^2 + x - 1 \neq 0$. ■

3.4 O Princípio de Indução Finita

Vamos observar a seguinte propriedade: seja $P(n)$ a soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2, para todo $n \in \mathbb{N}$. Muitas vezes nos confrontamos com problemas desse tipo que envolvem os números naturais e a pergunta que fazemos é, será que a propriedade é verdadeira para todos os naturais? De fato, a propriedade $P(n)$ é válida para todos os naturais, mas não é fazendo alguns exemplos que vamos conseguir provar. O Princípio de Indução é um eficiente método para a demonstração de fatos referentes aos números naturais. [1]

Para verificar se uma propriedade $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, utilizando o método da indução finita, consiste em verificar dois passos:

(I) $P(n_0)$ é verdadeira, ou seja, a proposição é válida para $n = n_0$;

(II) Suponha que a proposição seja verdadeira para algum n natural, é possível deduzir a validade para $n + 1$.

O (I) passo é conhecido como caso base e o (II) passo é conhecido como passo indutivo, nele usamos a hipótese de indução. Portanto, a validez desses dois passos mostra que $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.2 *Queremos provar que, para todo número natural* n*, temos*

$$P(n) : 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2. \tag{3.1}$$

De fato, para $n = 1$, $P(1)$ é verdadeiro. Suponhamos, que $P(n)$ verdadeiro para um certo valor de n, somamos $2n + 1$ a ambos os membros em 3.1, obtemos

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1,$$

[1] A prova do Princípio de Indução Finita pode ser encontrado em [24, p.204].

ou seja,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + [2(n+1) - 1] = (n+1)^2 .$$

Mas esta última igualdade é $P(n+1)$. Logo $P(n)$ implica $P(n+1)$. Assim, $P(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como podemos perceber, a indução matemática é uma ferramenta poderosa para resolver problemas referentes a números naturais e podemos utilizar-la para resolver alguns problemas no mundo material, como por exemplo bem conhecida, torre de Hanói. Este jogo é formado por n discos de diâmetros distintos com um furo no seu centro e uma base, onde estão fincadas três hastes. Em uma delas estão colocados os discos, de modo que nenhum disco esteja sobre outro de diâmetro menor.

Figura 3.1: Torre de Hanói

Fonte: Autor (2023)

O jogo consiste em transferir a pilha de discos para outra haste, deslocando um disco de cada vez, de modo que, a cada passo, a regra acima seja observada.

As perguntas naturais que surgem são as seguintes:

1. O jogo tem solução para $n \in \mathbb{N}$?

2. Em caso afirmativo, qual é o número mínimo j_n de movimentos para resolver o problema com n discos?

Usando indução matemática, é possível mostrar que a resposta à primeira pergunta é afirmativa, independentemente do valor de n. Em seguida, deduzimos uma fórmula que nos fornecerá o número j_n.

Consideremos a sentença aberta $P(n)$ dada por "O jogo com n discos tem solução."

Obviamente, $P(1)$ é verdadeira. Suponhamos que $P(n)$ seja verdadeira, para algum n. Isto é, para o jogo com n discos existe solução com um número mínimo de movimentos. Vamos provar que o jogo com $n+1$ discos tem solução.

Para ver isso, resolva inicialmente o problema para os n discos superiores da pilha, transferindo-os para uma das hastes livre, por hipótese estamos admitindo que podemos transferir n discos fazendo uma quantidade mínima de movimentos.

Figura 3.2: Torre de Hanói $n-1$ discos transferido para outra haste

Fonte: Autor (2023)

Em seguida, transfira o disco que restou na pilha original (o maior dos discos) para a haste vazia:

Feito isto, resolva novamente o problema para os n discos que estão juntos, transferindo-os para a haste que contém o maior dos discos.

Isso mostra que o problema com $n+1$ disco também possui solução e, portanto, por indução Matemática, que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora, vamos determinar uma fórmula para calcular a quantidade mínima de movimentos, denotaremos j_n como sendo essa quantidade.

Observando a Tabela 3.1 podemos conjecturar que a quantidade mínima pode ser expressa pela fórmula $j_n = 2^n - 1$.

Figura 3.3: Torre de Hanói- transferido o enésimo disco para haste livre

Fonte: Autor (2023)

Quantidades de discos (n)	Número mínimo de movimentos (j_n)
1	$1 = 2^1 - 1$
2	$3 = 2^2 - 1$
3	$7 = 2^3 - 1$
4	$15 = 2^4 - 1$
5	$31 = 2^5 - 1$
6	$63 = 2^6 - 1$

Tabela 3.1: Tabela da quantidade mínima de movimentos da Torre de Hanói

Para mostrar que isso é verdade, nesse caso usaremos o Princípio de Indução Finita. De fato, a firmação é verdadeira para 1 disco, pois $j_1 = 2^1 - 1 = 1$.

Suponhamos que a quantidade mínima de movimentos, em função do número de discos, seja dada por $j_{n+1} = 2^{n+1} - 1$. Notamos que podemos resolver esse problema usando uma ideia recursiva. Vimos que a quantidade mínima para mover três discos de uma haste para outra são sete movimentos, ao invés de mover um disco por vez vamos fazer da seguinte maneira, vamos mover dois discos de uma haste para outra, temos a quantidade mínima de três movimentos depois mais um movimentos movendo disco base de uma haste para outra, novamente para mover os dois discos para a haste que está o

Figura 3.4: Torre de Hanói- todos os discos transferido com movimentos mínimos

Fonte: Autor (2023)

disco da base. Portanto, $j_3 = 2j_2 + 1$. Da mesma forma, para mover quatro disco de uma haste para outra, movemos três disco de uma haste para outra, são sete movimentos mínimos, mais um para mover o disco da base para outra haste, mais sete movimentos para mover para a haste da base, ou seja, $j_4 = 2j_3 + 1$. Generalizando essa ideia, o número de movimentos mínimos necessários para mover j_{n+1} é $2j_n + 1$. Logo,

$$\begin{aligned} j_{n+1} &= 2j_n + 1 \\ &= 2(2^n - 1) + 1 \\ &= 2^{n+1} - 2 + 1 \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

Assim, o número mínimo de movimentos que fazemos para mover todos os discos de uma haste para outra é dado pela expressão $j_n = 2^n - 1$.

3.5 Método de Força Bruta

Esse método, também é conhecido como prova por casos, indução perfeita ou prova por exaustão, e é um método de demonstração no qual são testadas todos os casos possíveis de uma hipótese.

Exemplo 3.3 *Mostre que lançando simultaneamente dois dados temos* 9 *possibilidades de obter um número primo em cada dado.*

Uma solução possível para esse problema, seria aplicar o princípio fundamental da contagem. No lançamento de um dado temos as seguintes possibilidades $1, 2, 3, 4, 5$ ou 6, entretanto, apenas os números $2, 3$ e 5 são números primos. Aplicando o princípio fundamental da contagem temos três possibilidades para o primeiro dado e três possibilidades para o segundo dado. Logo, temos $3 \cdot 3$ possibilidades, ou seja, nove possibilidades.

Pelo Método de Força Bruta, mostramos por meio de uma tabela todas as possibilidades possíveis no laçamento de dois dados.

$$
\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)
\end{array}
$$

As possibilidades são: $(2, 2); (2, 3); (2, 5); (3, 2); (3, 3); (3, 5); (5, 2); (5, 3)$ e $(5, 5)$.

Portanto, é possível verificar, pelo método de força bruta, que existem nove possibilidades de ter um número primo em cada dado.

3.6 Demonstração por contraexemplo

Relembramos que uma conjectura matemática é uma afirmação para a qual ainda não temos uma demonstração que comprove a sua validade. Nem sempre é possível mostrar que a conjectura é verdadeira, pois muitas vezes estamos num espaço infinito de casos e por vez não possuímos ferramenta para verificar tal afirmação. Entretanto, através um contraexemplo, um exemplo que nega a afirmação, é possível mostrar que a afirmação não é verdadeira.

Vamos analisar a seguinte proposição:

Proposição 3.3 *Todo número da forma* $n^2 + n + 41$*, para* n *natural, é um número primo.*

Observamos na tabela a seguir que para os sete primeiros números naturais o resultado é um número primo.

Número	**Resultado**	**Número Primo**
1	43	sim
2	47	sim
3	53	sim
4	61	sim
5	71	sim
6	83	sim
7	97	sim

Tabela 3.2: Verificação dos números primos quando substituímos n natural na expressão $n^2 + n + 41$

Baseados nos primeiros resultados, poderíamos pensar que o valor obtido seria um número primo para todo natural. Não para um matemático, é o que afirma Gilberto G. Garbi "Um matemático jamais se atreve a fazer afirmações categóricas com base apenas em experiências porque elas podem conduzir a conjecturas falsas."[11, p.24].

De fato é isso que ocorre nessa proposição, a afirmação é falsa para n igual a 40, pois $40^2 + 40 + 41 = 1.681 = 41^2$ que é um número composto.

Portanto, mediante um contraexemplo, podemos verificar que a proposição é falsa.

3.7 Demonstração construtiva

Esse método consiste que dada uma solução particular podemos estabelecer um algoritmo para construir infinitas soluções para o determinado problema.

Teorema 3.4 *Existem infinitas triplas pitagóricas* (x, y, z) *de números inteiros tais que* $x^2 + y^2 = z^2$.

Demonstração: Sabemos que a tripla pitagórica $(3, 4, 5)$ satisfaz a igualdade $x^2 + y^2 = z^2$. Agora, vamos considerar as triplas da forma $(3k, 4k, 5k)$, com k pertencente aos inteiros positivos. Logo,

$$(3k)^2 + (4k)^2 = 3^2k^2 + 4^2k^2 = (3^2 + 4^2)k^2 = (5^2)k^2 = (5k)^2$$

Portanto, todas as triplas da forma $(3k, 4k, 5k)$ têm a propriedade desejada.

■

Até agora foram estudados alguns métodos de demonstrações. Eles serão usados no capítulo seguinte para provar resultados que podem ser abordados no Ensino Fundamental.

Capítulo 4

Resultados que podem ser abordados no Ensino Fundamental

Neste capítulo, apresentamos demonstrações de alguns resultados abordados durante o Ensino Fundamental. Inicialmente, deduzimos a fórmula de resolução de uma equação do 2° grau, trazendo a compreensão dos processos de fatoração e manipulação de expressões algébricas que é de grande importância para entender as etapas até chegar na fórmula de resolução. Aplicamos o método de indução matemática para demonstrar a fórmula de juros compostos, mostramos algumas formas diferentes de demonstrar o Teorema de Pitágoras e suas aplicações, seguindo com o estudo das áreas de polígonos regulares, entre eles estão: Paralelogramos, Triângulo, Trapézio e Losango. Para isso admitimos os quatro postulados necessário para construção e dedução das expressões matemáticas que serão usadas para calcular áreas. Apresentamos também algumas leis e teoremas que nos dão subsídios para calcular outras formas da área de um triângulo.

Para melhor compreensão na leitura desse capítulo denotamos (ABC) como sendo a área do triângulo ABC, $(ABCD)$ como sendo a área do quadrilátero $ABCD$, $\overline{AB}$ indicando comprimento de A até B, o perímetro será indicado por $2p$, o semiperímetro por p, indicaremos por $\widehat{A}$ o ângulo interno de polígono no vértice A, $\widehat{AB}$ o menor arco compreendido entre A e B.

As principais referências utilizadas neste capítulo foram Matemática Discreta [4], Fundamentos de Matemática Elementar volume 9[9], Temas e Problemas Elementares

[15], Meu Professor de Matemática [16], Números e Funções Reais[17] e Geometria[22].

4.1 A fórmula de resolução de uma equação do 2° grau

Sobre o que se deve demonstrar no Ensino Fundamental e Médio, durante uma mesa de perguntas e respostas no Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM) - Janeiro de 2008, o Professor Paulo Cezar Pinto Carvalho destaca a fórmula de resolução de equações do segundo grau,

> "... quando é ensinada na 8° série em geral não se apresenta uma demonstração porque pode ser um pouco difícil para o aluno, e quando chega no ensino médio não é apresentada para o aluno porque já deveria conhecer do ensino fundamental..."[14].

Esse impasse é ruim para o aluno e tais prejuízos se tornam incalculáveis. A BNCC não traz como habilidade demonstrar a fórmula de uma equação do 2° grau, porém destaca que no 9° do Ensino Fundamental na habilidade nove que os estudantes devem

> "(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2° grau". [1, p.317].

Desse modo, é de grande importância que o aluno compreenda as etapas que conduzem à fórmula de resolução de uma equação do 2° grau. Apresentamos a seguir a demonstração da fórmula de resolução de uma equação do 2° grau.

Teorema 4.1 *Dada uma equação polinomial $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, então a solução da equação é obtida por*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Demonstração: Como $a \neq 0$ podemos dividir a equação por a. Logo,

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right].$$

Notamos que $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = x^2+\dfrac{bx}{a}+\dfrac{b^2}{4a^2}$, Completando quadrados, podemos escrever $ax^2+bx+c = \left[x^2+2\dfrac{b}{2a}x+\dfrac{b^2}{4a^2}-\dfrac{b^2}{4a^2}+\dfrac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$ esta é a forma canônica do trinômio.

A forma canônica do trinômio conduz imediatamente à fórmula que dá as raízes da equação $ax^2+bx+c=0$. Com efeito, sendo $a \neq 0$, temos as seguintes equivalências

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=0 \tag{4.1}$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \tag{4.2}$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{4.3}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{4.4}$$

A equivalência entre as equações (4.3) e (4.4) só tem sentido quando o discriminante $\Delta = b^2-4ac$ é maior ou igual a zero. Quando temos $\Delta < 0$, a equivalência entre as equações (4.2) e (4.3) significa que a equação dada não possui solução real, pois o quadrado de $x+\dfrac{b}{2a}$ não pode ser negativo. ■

4.2 Juros compostos

No Ensino Fundamental o estudo de porcentagem seguindo de juros simples e compostos é iniciado como destaca a BNCC "(EF09MA05) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira." [1, p.317]. Tais conteúdos têm aplicações diretas no cotidiano das pessoas. Augusto césar Morgado e Paulo Cezar Pinto Carvalho (2015) definem a operação básica da matemática financeira sendo a operação de empréstimo da seguinte maneira,

> Alguém que dispões de um capital C (chamado de principal), empresta-o a outrem por um certo período de tempo. Após esse período, ele recebe o seu capital C de volta, acrescido de uma remuneração J pelo empréstimo. Essa remuneração é chamada de juro. A soma $c + j$ é chamada de montante e será representada por M. A razão $i = J/C$, que é a taxa de crescimento do capital, será sempre referida ao período da operação e chamada de taxa de juros. [4, p.86].

Apresentamos a seguir a demonstração da expressão do cálculo de juros compostos utilizando o método de indução matemática.

Teorema 4.2 *No regime de juros compostos de taxa i, um principal C_0 transforma-se, em n períodos de tempo, em um montante igual a $C_n = C_0\,(1+i)^n$, onde C_n é o montante no período n, C_0 o capital inicial e i a taxa de juros por período.*

Demonstração: Primeiramente notamos que C_1 é verdadeira, pois $C_1 = C_0\,(1+i)^1 = C_0 + C_0 i$. Suponhamos agora que C_k seja verdadeira, para algum $k \in \mathbb{N}$. Isto significa que $C_k = C_0(1+i)^k$. Provemos que é válido para C_{k+1}. De fato,

$$\begin{aligned} C_{k+1} &= C_0(1+i)^{k+1} \\ &= C_0(1+i)(1+i)^k \\ &= (C_0 + C_0 i)(1+i)^k \\ &= C_0(1+i)^k + C_0 i(1+j)^k \\ &= C_k + C_k i. \end{aligned}$$

Assim, a princípio da indução finita permite concluir que C_k é verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}$.

■

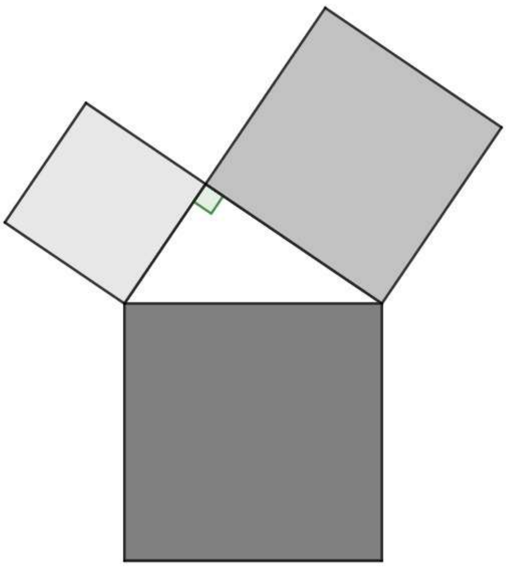
4.3 O Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras sem dúvida é um dos teoremas mais conhecidos da matemática. Mesmo aqueles que não simpatizam com a disciplina, ao menos uma vez em sua vida já ouviu falar desse teorema. Suas aplicações vão além do campo da matemática, estão presente na topografia, na arquitetura, nas construções civis e em diversas aplicações na física.

Pitágoras (c.569 - c.480 a.C) nasceu na ilha de Samos, perto de Mileto onde 50 anos antes tinha nascido Tales. Pitágoras fundou uma escola em crotona, hoje sudeste da Itália e tinha como principais pilares o estudo da Filosofia e da Matemática. Sobre esse famoso teorema não sabemos se foi o próprio Pitágoras que provou, pois naquela época era comum dar todo crédito de uma descoberta ao mestre e por isso não sabemos se foi o próprio Pitágoras que demonstrou o teorema nem tão pouco qual seria a demonstração. Segundo alguns historiadores a prova original deve ter seguido de argumentos usando áreas.

O Teorema de Pitágoras afirma que em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos, ou seja, se a e b são as medidas dos catetos e c é a medida da hipotenusa, então $a^2 + b^2 = c^2$.

Figura 4.1: Teorema de Pitágoras



Fonte: Autor (2023)

Documentos históricos mostram que o teorema já era conhecido por outros povos, é o caso de um manuscrito chinês, registrado com mais de mil anos antes de Cristo, que contém a seguinte afirmação: "Tome o quadrado do primeiro lado e o quadrado do segundo e os some; a raiz quadrada dessa soma é a hipotenusa". Documentos ainda mais antigos mostram que na Índia, já sabiam que triângulos cujos lados $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$ e $(12, 35, 37)$ eram triângulos retângulos. O que não se tem registrado por nenhum desses povos é a demonstração desse teorema.

Hoje há várias demonstrações do teorema de Pitágoras. O matemático americano E.S. Loomis no ano de 1940, publicou 370 demonstrações. Mas, qual seria o método mais adequado para fazer a demonstração desse teorema?

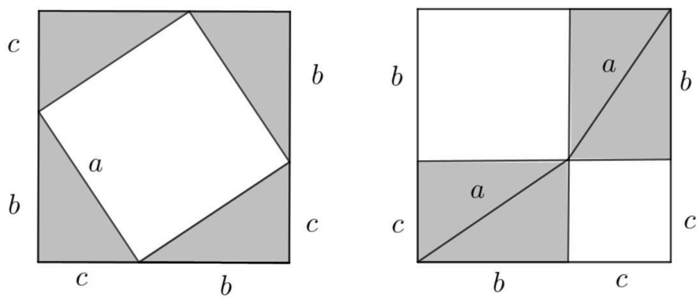
Daniel Cordeiro de Morais Filho, a respeito sobre um método de demonstração adequado para provar determinado resultado, diz que:

> Um método de demonstração adequado para provar determinado resultado depende do resultado em si, da existência de uma teoria eficaz para atacar o problema em questão, muitas vezes, de uma escolha possível e pessoal do tipo de argumentação que poderá ser usada naquela demonstração [7, p.156].

Apresentamos nessa seção algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras. Iniciamos com a demonstração conhecida como a mais bela prova.

Em um quadrado de lado $(b+c)$ consideramos duas configurações conforme descrito na Figura (4.2).

Figura 4.2: Teorema de Pitágoras quadrado de lado $(b + c)$

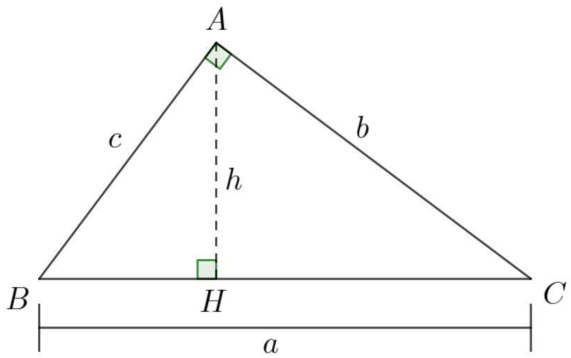


Fonte: Autor (2023)

Se do quadrado da esquerda retiraremos os quatro triângulos de lados b e c, ficaremos com o quadrado de lado a. Da mesma forma, agora na figura da direita, retiramos os quatro triângulos de lados b e c, ficaremos com dois quadrados de lados b e c. Portanto, a área do quadrado a é a soma das áreas dos quadrados cujos lados medem b e c, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$.

Outra demonstração bastante comum desse teorema é a prova que usa semelhança de triângulos. A partir de um triângulo ABC, retângulo em $\widehat{A}$, traçamos a altura AH e verificamos que os triângulos AHB e AHC são semelhantes ao triângulo ABC.

Figura 4.3: Teorema de Pitágoras



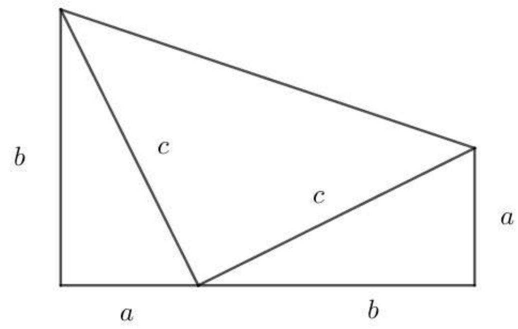
Fonte: Autor (2023)

Da semelhança dos triângulos AHC e ABC temos $b^2 = am$ e, da semelhança dos triângulos AHB e ABC, temos $c^2 = an$. Somando essas duas relações, membro a membro, encontramos:

$$b^2 + c^2 = am + an = a\,(m + n) = a.a = a^2$$

Outra demonstração do Teorema de Pitágoras foi apresentada por James Abram Garfield, ele foi advogado, professor e político norte-americano, chegou a ser presidente dos Estados Unidos durante 4 meses, pois foi assassinado em 1881. James Abram apresentou uma demonstração sobre o Teorema de Pitágoras baseada num trapézio retângulo cujas bases tem medidas a e b e altura $(a + b)$ e no seu interior um triângulo isósceles conforme mostra a Figura 4.4.

Figura 4.4: A demonstração do Presidente



Fonte: Autor (2023)

A área do trapézio é igual a soma das bases vezes altura dividido por dois. Por outro lado, podemos obter a área do trapézio somando as áreas de três triângulos retângulos [1]. Então,

$$
\begin{aligned}
\frac{(a+b)(a+b)}{2} &= \frac{ab+ab+c^2}{2}\\
\frac{a^2+ab+ab+b^2}{2} &= \frac{2ab+c^2}{2}\\
\frac{a^2+2ab+b^2}{2} &= \frac{2ab+c^2}{2}\\
a^2+2ab+b^2 &= 2ab+c^2\\
a^2+b^2 &= c^2.
\end{aligned}
$$

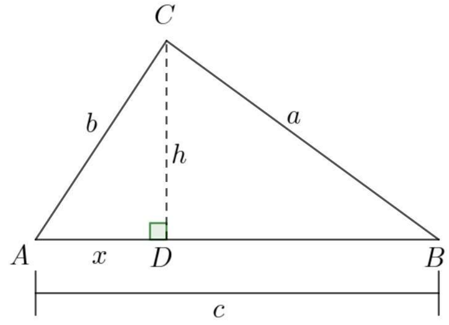
Outra forma de demonstrar Teorema de Pitágoras é usando a recíproca do Teorema. Sabemos que dado um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$, então o que temos que mostrar é que: se a, b e c são reais positivos com $a^2 = b^2 + c^2$ o triângulo de lados a,b e c é retângulo.

Dado um triângulo ABC com $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{CA} = b$, vamos analisar dois casos: quando o triângulo for acutângulo e quando o triângulo for obtusângulo.

Para o triângulo acutângulo vamos considerar que $b \leq c$. Assim, o ponto D, projeção de C sobre $\overline{AB}$, está no interior do lado $\overline{AB}$. Sejam $\overline{AD} = x$ e $\overline{CD} = h$.

[1]As demonstrações das áreas do trapézio e do triângulo podem ser vistas no capítulo 4 dessa dissertação nos teoremas (4.15) e (4.14) respectivamente.

Figura 4.5: Recíproca do teorema de Pitágoras triângulo acutângulo



Fonte: Autor (2023)

Os triângulos ADC e BDC são triângulos retângulos, aplicando o Teorema de Pitágoras obtemos:

$$b^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - x^2 \tag{4.5}$$

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2 \tag{4.6}$$

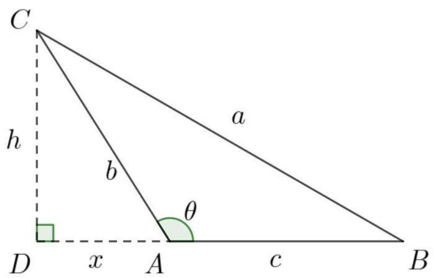
Substituindo (4.5) em (4.6) temos:

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (c - x)^2 \\ &= b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2cx \end{aligned}$$

ou seja, $a^2 < b^2 + c^2$, o que contradiz a condição inicial.

Para o triângulo obtusângulo temos que o ponto D está fora do lado $\overline{AB}$.

Figura 4.6: Recíproca do teorema de Pitágoras triângulo obtusângulo



Fonte: Autor (2023)

Os triângulos ADC e BDC são triângulos retângulos, aplicando o Teorema de Pitágoras obtemos:

$$b^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - x^2 \tag{4.7}$$

$$a^2 = h^2 + (c + x)^2 \tag{4.8}$$

Substituindo (4.7) em (4.8) temos:

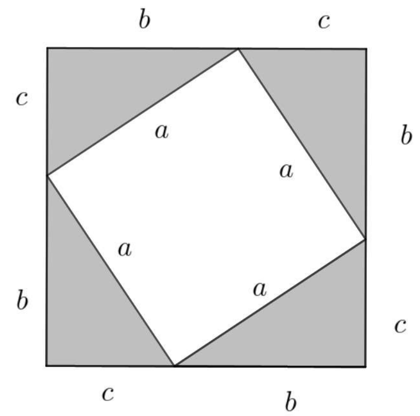
$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (c + x)^2 \\ &= b^2 - x^2 + c^2 + 2cx + x^2 \\ &= b^2 + c^2 + 2cx \end{aligned}$$

ou seja, $a^2 > b^2 + c^2$, o que contradiz a condição inicial.

Portanto, a condição $a^2 = b^2 + c^2$ implica necessariamente que $\widehat{A} = 90°$.

Outra clássica demonstração do Teorema de Pitágoras é usar o fato que com quatro triângulos retângulos de catetos b e c é possível construir um quadrado de lado $(b + c)$ como indicado na Figura 4.7.

Figura 4.7: Quadrado de lado $(b + c)$



Fonte: Autor (2023)

A área do quadrado de lado $(b+c)$ pode ser obtida pela soma das áreas dos quatro triângulos retângulos de lado b e c com a área do quadrado inscrito de lado a. Por outro lado, a área do quadrado $(b + c)$ é $(b + c)^2 = b^2 + 2bc + c^2$, igualando as duas equações obtemos

$$\begin{aligned} 4\frac{bc}{2} + a^2 &= (b+c)^2 \\ 2bc + a^2 &= b^2 + 2bc + c^2 \\ a^2 &= b^2 + c^2 \end{aligned}$$

Podemos obter ternos de números inteiros cujos termos são as medidas lados de um triângulo retângulo. Cada terno desta forma é chamado terno pitagórico.

Definição 4.1 *Sendo a,b e c inteiros positivos com $c > a$ e $c > b$ dizemos que (a, b, c) é um terno pitagórico se $a^2 + b^2 = c^2$.*

O próximo resultado paresenta condições para que um terno (a, b, c) seja pitagórico.

Teorema 4.3 *(a, b, c) é um terno pitagórico se existem inteiros positivos u e v com $u > v$, tais que $(a, b, c) = (2uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2)$.*

Demonstração: Supanhamos que (a, b, c) seja um terno pitagórico. Por definição $a^2 + b^2 = c^2$, então $a^2 = c^2 - b^2$. Assim, $a^2 = (c - b)(c + b)$, então $\dfrac{a}{c-b} = \dfrac{c+b}{a}$. Temos aqui uma relação entre dois inteiros, u e v, com $u > v$, pois $c + b > a$. Portanto, podemos escrever $\dfrac{a}{c-b} = \dfrac{u}{v}$ e $\dfrac{c+b}{a} = \dfrac{u}{v}$ ou ainda

$$\frac{c-b}{a} = \frac{c}{a} - \frac{b}{a} = \frac{v}{u} \tag{4.9}$$

e

$$\frac{c+b}{a} = \frac{c}{a} + \frac{b}{a} = \frac{u}{v} \tag{4.10}$$

De (4.9) e (4.10) obtemos

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{u} + \frac{u}{v}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{u^2+v^2}{uv}\right) = \frac{u^2+v^2}{2uv}$$

e

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{u}{v} - \frac{v}{u}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{u^2-v^2}{uv}\right) = \frac{u^2-v^2}{2uv}$$

Logo,

$$\frac{c}{u^2+v^2} = \frac{a}{2uv} \qquad \text{e} \qquad \frac{b}{u^2-v^2} = \frac{a}{2uv}.$$

Assim,

$$\frac{a}{2uv} = \frac{b}{u^2-v^2} = \frac{c}{u^2+v^2} = k,$$

onde k é constante, ou seja,

$$a = k(2uv), \;\; b = k(u^2-v^2) \quad e \quad c = k(u^2+v^2).$$

Em particular, para obter ternos primitivos devemos ter $k = 1$, u e v primos entre si e u e v devem ter paridades distintas, caso contrário a, b e c seriam divisíveis por dois.

Desta forma temos que os ternos pitagóricos primitivos escritos na forma $(2uv, u^2-v^2, u^2+v^2)$ onde u e v são primos entre si com $u > v$ e um sendo par e outro impar. ■

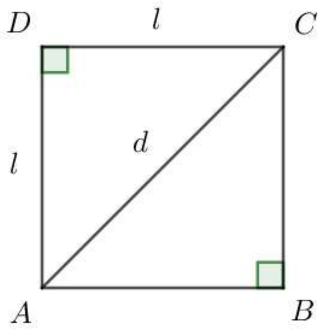
Após demonstrar o Teorema de Pitágoras os estudantes estão aptos a realizar algumas aplicações desse teorema. De fato, o teorema pode ser utilizado na resolução problemas em Geometria Plana ou mesmo em problemas não acadêmicos. Na próxima seção serão apresentadas algumas aplicações do teorema de Pitágoras.

4.4 Aplicações do Teorema de Pitágoras

A seguir apresentamos algumas aplicações do teorema no campo da Geometria Plana. A primeira que mostramos será a medida da diagonal do quadrado.

Proposição 4.1 *A medida da diagonal de um quadrado de lado l é $l\sqrt{2}$.*

Figura 4.8: Diagonal do quadrado de lado l



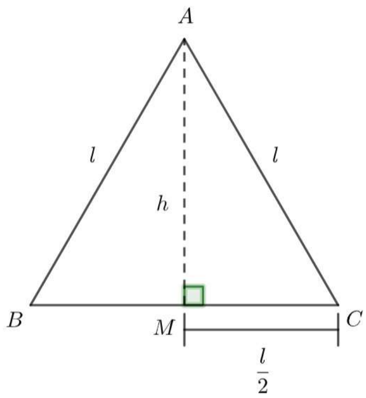
Fonte: Autor (2023)

Demonstração: Seja $ABCD$ um quadrado de lado l, observamos que $\overline{AC}$ é uma das diagonais desse quadrado. Logo, podemos obter a diagonal do quadrado aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC cujos catetos são os lados do quadrado e hipotenusa $\overline{AC}$, isto é, $d^2 = l^2 + l^2$. Logo $d = l\sqrt{2}$. ■

Outra aplicação que podemos realizar no Ensino Fundamental é a calcular a medida da altura do triângulo equilátero.

Proposição 4.2 *A medida da altura de um triângulo equilátero de lado l é dada por* $\dfrac{l\sqrt{3}}{2}$.

Figura 4.9: Altura do triângulo equilátero



Fonte: Autor (2023)

Demonstração: Seja ABC um triângulo equilátero de lado l. A altura é a mediatriz do lado oposto ao vértice e divide o triângulo em dois triângulos iguais com ângulos retos.

Seja M o ponto médio de $\overline{BC}$, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo AMC para obter altura h.

$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

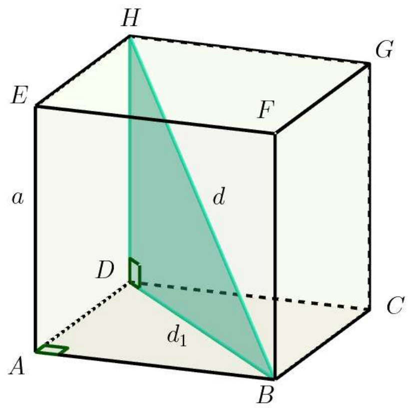
■

Durante o Ensino Fundamental são abordados alguns conceitos iniciais de geometria espacial. Entre os objetos estudados estão as figuras geométricas espaciais como cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera. Em muitos momentos, os estudantes sentem dificuldades de interpretar e até mesmo de aplicar fórmula. Ao fazer uma demonstração em sala de aula é mais que validar uma fórmula é abrir novos caminhos para observação e criatividade.

Aplicamos a seguir o Teorema de Pitágoras para determinar a diagonal de um cubo e a diagonal de uma paralelepípedo.

Proposição 4.3 *A medida da diagonal de um cubo de aresta a é $a\sqrt{3}$.*

Figura 4.10: Diagonal do cubo de aresta a

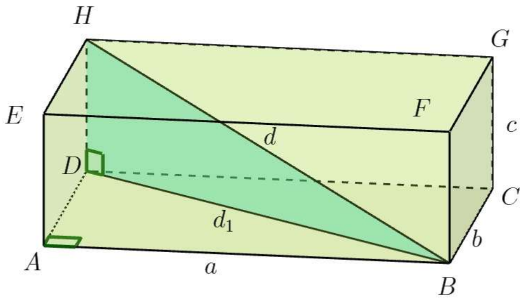


Fonte: Autor (2023)

Demonstração: Dado um cubo de aresta a, para determinara sua diagonal inicialmente vamos aplicar o Teorema de Pitágoras para determinar a diagonal da face $ABCD$, que indicamos por d_1, conforme a Figura (4.10). Aplicamos o Teorema de Pitágoras no triângulo DAB e obtemos $d_1^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$. Assim, $d_1 = a\sqrt{2}$. A diagonal do cubo pode ser indicada pelo segmento $\overline{HB}$, onde aplicamos novamente o Teorema de Pitágoras dessa vez no triângulo HDB. Assim, $d^2 = \overline{HB}^2 + d_1^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2$. Logo, $d = a\sqrt{3}$. ■

Proposição 4.4 *A medida da diagonal de um paralelepípedo retângulo de dimensões a, b e c é dada por $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.*

Figura 4.11: Paralelepípedo retângulo de dimensões a, b e c



Fonte: Autor (2023)

Dado um Paralelepípedo retângulo de dimensões a, b e c para determinara sua diagonal da face que indicamos por d_1, conforme a Figura 4.11. Aplicamos o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo BAD de catetos a e b, obtemos $d_1^2 = a^2 + b^2$. Assim, $d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$. Agora vamos determinar a diagonal do paralelepípedo retângulo. Aplicando novamente o Teorema de Pitágoras, agora no triângulo HDB, obtemos $d^2 = d_1^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Logo, $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. ■

4.5 Áreas de Polígonos

Nessa seção, apresentamos demonstrações de expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros. A BNCC descreve algumas habilidades a serem desenvolvidas durante o Ensino Fundamental, entre elas está a habilidade (EF07MA31) na unidade de Grandezas e Medidas que propõe "estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros" [1, p.309].

Para calcular a área de um polígono, é necessário postular as seguintes propriedades:

1 . Polígonos congruentes têm áreas iguais.

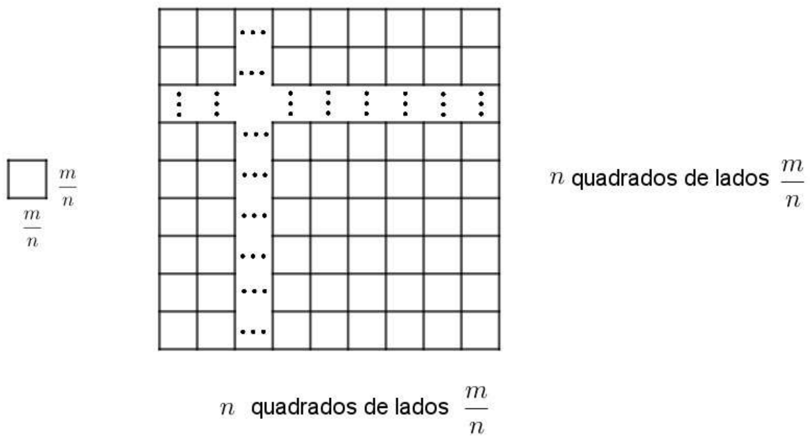
2 . Se um polígono convexo é particionado em um número finito de outros polígonos convexos, ou seja, se o polígono é a união de um finito de outros polígonos convexos, tais que dois quaisquer deles partilham somente um vértice ou uma aresta, então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.

3 . Se um polígono maior contém outro polígono menor em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor.

4 . A área de um quadrado de lado $1cm$ é igual a $1cm^2$.

Iniciamos calculando a área do quadrado. Dado um quadrado de lado com medida $n \in \mathbb{N}$, podemos particionar este quadrado em n^2 quadrados cujo lado tem medida 1. Seja A_n a área do quadrado inicial, temos que A_n é igual a soma das áreas destes n^2 quadrados cujos lados têm medidas 1, isto é, $A_n = n^2$. Consideramos agora um quadrado de lado $\frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$ e área $A_{\frac{m}{n}}$. Tomamos n^2 cópias do mesmo, colocando n quadrados de $\frac{m}{n}$ em n filas, formando assim um quadrado de lado $\frac{m}{n} \cdot n = m$, conforme a Figura 4.12.

Figura 4.12: Área de um quadrado $m \times n$



Fonte: Autor (2023)

Portanto, o quadrado maior terá área m^2. Notamos que o quadrado maior está particionado em n^2 quadrados, cada um dos quais de lado $\frac{m}{n}$, sua área é igual à soma das áreas desses n^2 quadrados, isto é, $m^2 = n^2 \cdot A_{\frac{m}{n}}$. Daí,

$$A_{\frac{m}{n}} = \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

Como $A_n = n^2$ e $A_{\frac{m}{n}} = \left(\frac{m}{n}\right)^2$ com $n, m \in \mathbb{N}$, podemos postular que a área de um quadrado de lado l seja l^2. Porém, não garantimos que a área do quadrado de lado l seja l^2, para qualquer l real. Dado $k \in \mathbb{N}$, tomamos números racionais x_k e y_k tais que

$$x_k < l < y_k \ \text{ e } \ y_k - x_k < \frac{1}{k}.$$

Construímos quadrados de lados x_k e y_k, sendo o primeiro contido no segundo. Sabemos que, se um polígono maior contém outro polígono menor em seu interior, então a área do polígono externo é maior que a área do polígono interno. Logo, podemos calcular áreas de quadrados de lado racional, isso nos garante que a área de A_l do quadrado de lado l deve satisfazer as desigualdades $x_k^2 < A_l < y_k^2$.

Mas, como $x_k^2 < l^2 < y_k^2$, concluímos que ambos os números A_l e l^2 devem pertencer ao intervalo $(x_k^2, y_k^2\ )$, de maneira que

$$\begin{aligned} \left|A_l - l^2\right| < y_k^2 - x_k^2 &= (y_k - x_k)(y_k + x_k) \\ &< \frac{1}{k}(y_k - x_k + 2x_k) \\ &< \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} + 2l\right). \end{aligned}$$

Para que a desigualdade acima seja satisfeita para todo $k \in \mathbb{N}$, é imediato que $|A_l - l^2| = 0$, isto é, $A_l = l^2$. Portanto, a área do quadrado cujo lado tem medida l é l^2.

De modo análogo, é possível provar que um retângulo de lados a e b tem área igual a ab. Dado um retângulo de lados $m, n \in \mathbb{N}$, vamos particiona-lo em mn quadrado de lados 1 para mostrar que sua área mn. Em seguida, tomamos um retângulo de lados $\frac{m_1}{n_1}$ e $\frac{m_2}{n_2}$, com $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, e com n_1, n_2 cópias do mesmo, monta-se um retângulo de lados m_1 e m_2. Somando áreas iguais, podemos concluir que a área do retângulo dado originalmente é igual a $\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{m_2}$.

Tomando um retângulo de lados de medido a e b reais positivos, e, para $k \in \mathbb{N}$, racionais x_k, y_k, u_k, v_k tais que $x_k < y_k < u_k < v_k$ e $y_k - x_k, v_k - u_k < \frac{1}{k}$. Sendo A a área do retângulo de lados a e b, utilizando o raciocínio análogo feito para quadrados, temos que A e ab pertencem ambos ao intervalo $(u_k x_k, y_k v_v)$ e, daí, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |A - ab| &< v_k y_k - u_k x_k = (v_k - u_k)\, y_k + u_k\, (y_k - x_k) \\ &< \frac{1}{k}\,(y_k + u_k) < \frac{1}{k}\,((y_k - x_k) + 2x_k + (v_k - u_k) + 2) \\ &< \frac{1}{k}\left(\frac{2}{k} + 2a + 2b\right). \end{aligned}$$

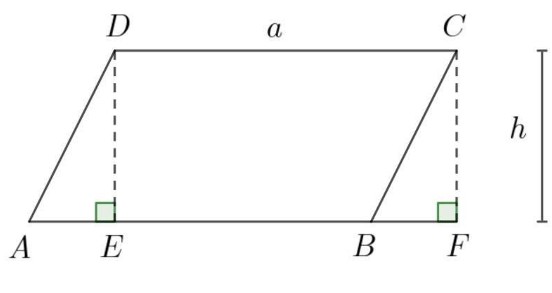
De forma análoga à validade da desigualdade acima para todo $k \in \mathbb{N}$ garante que $A = ab$. Portanto, dado um retângulo com lados medindo a e b sua área é dada por ab.

A partir do cálculo da área do retângulo podemos estabelecer uma fórmula para calcular a área de um paralelogramo.

Proposição 4.5 *A área de um paralelogramo de base a e altura h é igual a ah.*

Demonstração: Consideramos um paralelogramo $ABCD$ de diagonais AC e BD. Sejam E e F respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas de D e C à reta $\overline{AB}$, conforme mostra a Figura 4.13. Sem perda de generalidade, suponhamos que E pertence AB. Os triângulos ADE e BCF são congruentes pelo caso cateto hipotenusa, de modo que $\overline{AE} = \overline{BF}$. O postulado 1 nos diz que: polígonos congruentes tem áreas iguais. Portanto, $(ADE) = (BCF)$.

Figura 4.13: Área do Paralelogramo



Fonte: Autor (2023)

Então,

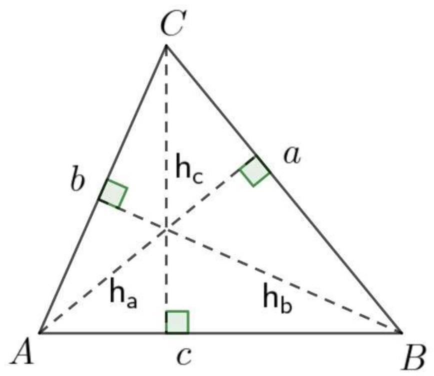
$$\begin{aligned}(ABCD) &= (ADE) + (BEDC)\\ &= (BCF) + (BEDC)\\ &= (CDEF).\end{aligned}$$

Notamos que $CDEF$ é um retângulo de base $\overline{EF} = \overline{EB} + \overline{BF} = \overline{EB} + \overline{AE} = \overline{AB} = a$ e altura h. Portanto, $(ABCD) = (CDEF) = ah$. ■

Tendo conhecimento da fórmula do paralelogramo, podemos obter uma fórmula para determinar a área de um triângulo qualquer.

Proposição 4.6 *A área de um triângulo ABC qualquer é a metade do produto do comprimento de qualquer um de seus lados pela altura relativa a este lado.*

Figura 4.14: Área de um triângulo qualquer



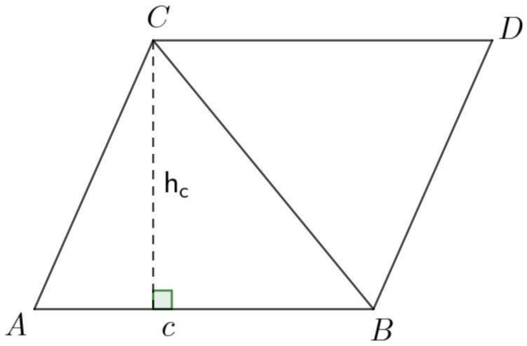
Fonte: Autor (2023)

Demonstração: Traçamos pelo vértice c uma reta paralela ao lado $\overline{AB}$, e pelo vértice B uma reta paralela ao lado $\overline{AC}$, seja D a interseção dessas retas conforme mostra Figura 4.15.

O polígono $ABCD$ é um paralelogramo e os triângulos ABC e CDB são congruentes pelo caso (lado, lado, lado). Pelo postulado 1 temos $(ABC) = (CDB)$. Como $ABCD$ é um paralelogramo de base c e altura h_c, temos que

$$(ABC) + (CDA) = (ABCD) = ch_c.$$

Figura 4.15: Construção do paralelogramo para área do triângulo



Fonte: Autor (2023)

Portanto, $(ABC) = \frac{1}{2}ch_c$. As outras duas igualdades podem ser obtidas de maneira análoga. ■

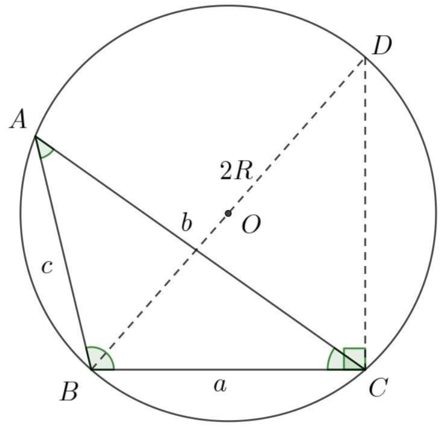
Quando estudamos a área de uma região triangular é comum pensar de imediato a expressão que foi de demonstrada, metade do produto da base pela altura. Porém, essa não é a única forma de calcular a área de triângulo. Podemos obter a área de uma região triangular conhecendo apenas a medida dos lados, os três lados e o raio da circunferência inscrita, os três lados e o raio da circunferência circunscrita, os três lados e o raio da circunferência ex-inscrita, dois lados e o ângulo formado por esses dois lados. A Todas essas demonstrações são acessíveis aos professores e estudantes do Ensino Fundamental, visto que são demonstradas mediante operações elementares. Para fazer as demonstrações utilizamos como referêcia os livros Matemática Elementar volume 9 [9] e Geometria [22].

Antes de apresentarmos, respctivamente, as diferentes formas citadas acima para calcular a área de uma região triangular, é importante apresentar algumas demonstrações que serão útéis no processo de demonstração.

Proposição 4.7 *(Lei dos senos) Em qualquer triângulo, o quociente entre a medida de cada lado e o seno do ângulo oposto a esse lado é igual ao dobro da medida do raio R da circunferência circunscrita a esse triângulo.*

Demonstração: Seja ABC um triângulo de lados a, b e c inscrito em uma circunferência de raio R, centro O e diâmetro BD. O triângulo BCD é retângulo em $\widehat{C}$, uma vez que o ângulo $\widehat{C}$ corresponde ao ângulo inscrito na circunferência. Portanto, tem medida igual à

Figura 4.16: Lei dos senos



Fonte: Autor (2023)

metade do arco correspondente que é uma semicircunferência, logo $\widehat{C} = 90°$. Os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{D}$ são congruentes, pois são ângulos inscritos correspondentes ao mesmo arco $\overset{\frown}{BC}$.

No triângulo BDC o $sen(\widehat{D}) = \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{a}{2R}$, ou seja, $\dfrac{a}{sen(\widehat{D})} = 2R$. Como $\widehat{A}$ é congruente ao $\widehat{D}$ temos que $sen(\widehat{A}) = sen(\widehat{D})$. Portanto, $\dfrac{a}{sen(\widehat{A})} = 2R$.

As igualdades $\dfrac{b}{sen(\widehat{B})} = 2R$ e $\dfrac{c}{sen(\widehat{C})} = 2R$ podem ser obtidas de modo análogo. Logo,

$$\frac{a}{sen(\widehat{A})} = \frac{b}{sen(\widehat{B})} = \frac{c}{sen(\widehat{C})} = 2R.$$

■

A lei dos senos é bastante útil para determinar o raio da circunferência a um triângulo.

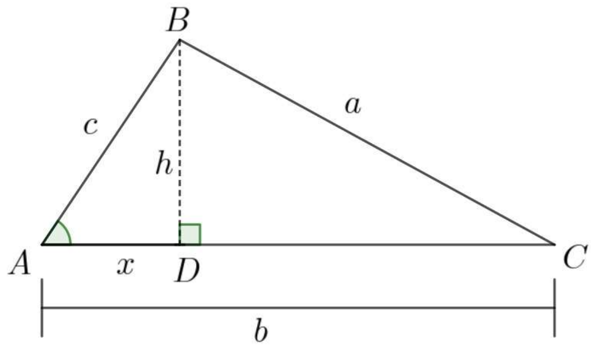
Proposição 4.8 *(Lei dos cossenos) Em qualquer triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.*

Demonstração: Para realizar essa demonstração consideramos dois casos. O primeiro é quando o triângulo é acutângulo, ou seja, quando os três ângulos internos forem menores que 90°. O segundo caso é quando o triângulo obtusângulo, quando um de seus ângulos é obtuso, ou seja, maior que 90°. Quando o ângulo for reto, ou seja, 90° recairá no Teorema Pitágoras.

Primeiro caso: O triângulo ABC acutângulo, $\widehat{A} < 90°$.

Seja D a projeção do vértice B sobre a reta $\overline{AC}$ e $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AD} = x$. Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos ABD e CBD, obtemos as

Figura 4.17: Lei dos cossenos tiângulo acutângulo



Fonte: Autor (2023)

seguintes relações:

$$c^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - x^2 \tag{4.11}$$

$$a^2 = (b - x)^2 + h^2. \tag{4.12}$$

Substituindo (4.11) em (4.12) temos:

$$a^2 = (b - x)^2 + (c^2 - x^2) \tag{4.13}$$

$$= b^2 - 2bx + x^2 + c^2 - x^2 \tag{4.14}$$

$$= b^2 + c^2 - 2bx. \tag{4.15}$$

Das relações trigonométricas, temos que $cos(\widehat{A}) = \dfrac{x}{c}$, ou seja, $x = cos(\widehat{A})$. Substituindo $x = cos(\widehat{A})$ em (4.15) temos:

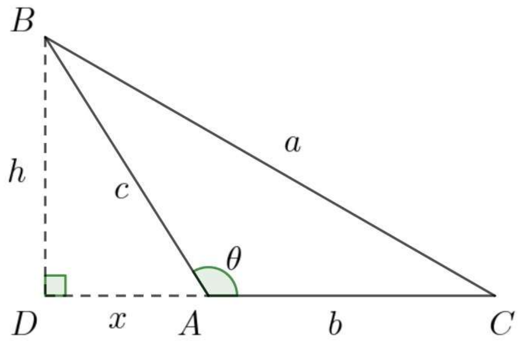
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\widehat{A}.$$

Segundo caso: O triângulo ABC é obtusangulo, isto é,$(\widehat{A}) > 90°$.

Seja D a projeção do vértice B sobre a reta $\overline{AC}$. Neste caso, D está na semirreta oposta à semirreta $\overline{AC}$ conforme a Figura (4.18).

Seja $\overline{AD} = x$ e seja $\theta = 180° - \widehat{A}$, com $\widehat{A}$ referente ao triângulo retângulo DBA, o ângulo interno de vértice A do triângulo ABC.

Figura 4.18: Lei dos cossenos, triângulo obtusângulo.



Fonte: Autor (2023)

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos BDC e BDA obtemos as seguintes relações:

$$a^2 = (x+b)^2 + h^2 \tag{4.16}$$

$$c^2 = x^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - x^2 \tag{4.17}$$

Substituindo (4.17) em (4.16) temos:

$$a^2 = (x+b)^2 + (c^2 - x^2) \tag{4.18}$$

$$= x^2 + 2bx + b^2 + c^2 - x^2 \tag{4.19}$$

$$= b^2 + c^2 + 2bx \tag{4.20}$$

Como os ângulos θ e $\widehat{A}$ são ângulos suplementares, logo $cos\theta = -cos(\widehat{A})$. Portanto, $cos(\widehat{A}) = -\dfrac{x}{c}$, ou seja, $x = -c \cdot \cos(\widehat{A})$. Substituindo o valor de x em (4.20) obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A}).$$

Analogamente, temos $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{A})$ e $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{A})$. ■

Ao aplicar a lei dos cossenos no triângulo retângulo temos exatamente a expressão do Teorema de Pitágoras.

O próximo resultado é conhecido como Teorema de Viviani. Este teorema é muito útil para determinar a altura de um triângulo equilátero dado um ponto arbitrário no seu interior ou a seus lados. O teorema foi formulado pelo matemático e cientista italiano Vincenzo Viviani (1622 - 1703). [2].

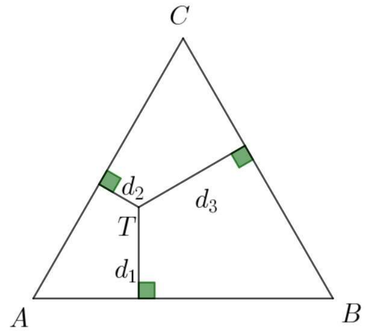
[2]Para mais informações sobre Vincenzo Viviani acesse http://ecalculo.if.usp.br/historia/viviani.htm

Proposição 4.9 *(Teorema de Viviani) A soma das distâncias aos lados de um triângulo equilátero de um ponto pertencente ao seu interior ou a seus lados é igual à medida da altura do triângulo.*

Demonstração: A demostração será dividida em dois casos. O primeiro caso em que o ponto pertence ao interior do triângulo equilátero e o segundado caso quando o ponto pertencer a um de seus lados.

Seja ABC um triângulo equilátero com lado a e altura h e T um ponto qualquer no interior do triângulo ABC. Denotamos d_1, d_2 e d_3 a distância do ponto T perpendicular aos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente.

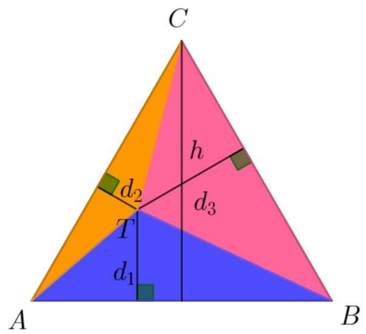
Figura 4.19: Teorema de Viviane



Fonte: Autor (2023)

A área do triângulo equilátero é igual a soma das áreas dos três triângulos interiores ATB, ATC e BTC, conforme mostra a Figura 4.20.

Figura 4.20: Teorema de Viviane ponto arbitrário no seu interior



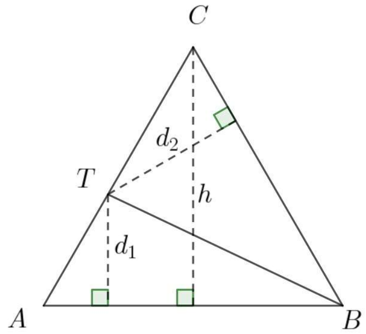
Fonte: Autor (2023)

Então,

$$\begin{aligned}
(ABC) &= (ATB) + (ATC) + (BTC) \\
\frac{ah}{2} &= \frac{ad_1}{2} + \frac{ad_2}{2} + \frac{ad_3}{2} \\
\frac{ah}{2} &= \frac{a}{2}(d_1 + d_2 + d_3) \\
h &= d_1 + d_2 + d_3.
\end{aligned}$$

Suponhamos agora, sem perda de generalidade, que o ponto T esteja sobre o lado $\overline{AC}$. Seja T conforme mostra a Figura 4.21. A área do triângulo equilátero é a soma das áreas

Figura 4.21: Terema de Viviane ponto está sobre o lado



Fonte: Autor (2023)

dos triângulos ADB e ADB. Então,

$$\begin{aligned}
(ABC) &= (ATB) + (CTB) \\
\frac{ah}{2} &= \frac{ad_1}{2} + \frac{ad_2}{2} \\
\frac{ah}{2} &= \frac{a}{2}(d_1 + d_2) \\
h &= d_1 + d_2.
\end{aligned}$$

Portanto, a soma das distâncias aos lados de um triângulo equilátero de um ponto pertencente ao seu interior ou a seus lados é constante à medida da altura do triângulo.

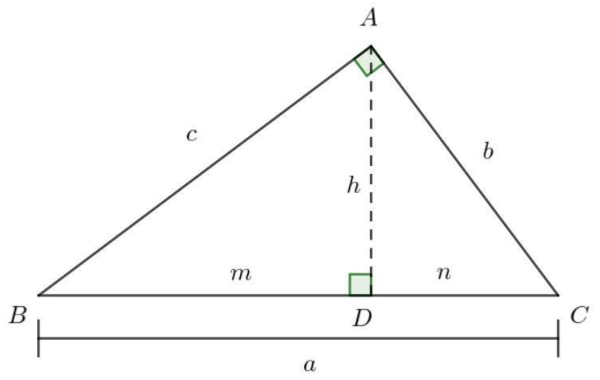
■

O próximo resultado, conhecido como a Fórmula de Heron e estabelece como calcular a área do triângulo em função da medida dos lados.

Proposição 4.10 *(Fórmula de Heron) Seja ABC um triângulo que possui os lados medindo a, b e c e seu perímetro é representado por $2p = a + b + c$. Então, a área do triângulo ABC é dada por*

$$(ABC) = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

Figura 4.22: Triângulo Fórmula de Heron



Fonte: Autor (2023)

Demonstração: Seja D a projeção do vértice A sobre a reta $\overline{BC}$ e $\overline{AD} = h$ altura do triângulo ABC, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos ADC e ADB obtemos, respectivamente, $b^2 = h^2 + n^2$ e $c^2 = h^2 + m^2$. Assim, $c^2 - b^2 = m^2 - n^2 = (m+n)(m-n) = a(m-n)$. Portanto, $m - n = \dfrac{c^2 - b^2}{a}$. Como $m + n = a$, temos o seguinte sistema de equações

$$m + n = a \tag{4.21}$$

$$m - n = \frac{c^2 - b^2}{a} \tag{4.22}$$

Somando (4.21) e (4.22) temos:

$$2m = a + \frac{c^2 - b^2}{2a} \Rightarrow m = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

Substituindo o valor de m, em $m+n=a$ temos:

$$\begin{aligned} n &= a-m \\ &= a-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right) \\ &= \frac{2a^2-(a^2+c^2-b^2)}{2a} \\ &= \frac{2a^2-a^2-c^2+b^2}{2a} \\ &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$m = \frac{a^2-b^2+c^2}{2a} \tag{4.23}$$

$$n = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}. \tag{4.24}$$

Podemos escrever $2p=a+b+c$ das seguintes maneiras:

$$a+b-c = a+b+c-2c = 2p-2c = 2(p-c) \tag{4.25}$$

$$a+c-b = a+b+c-2b = 2p-2c = 2(p-b) \tag{4.26}$$

$$b+c-a = a+b+c-2a = 2p-2a = 2(p-a) \tag{4.27}$$

Como $(ABC)=\dfrac{ah}{2}$, segue que $(ABC)^2=\left(\dfrac{ah}{2}\right)^2$. Então,

$$\begin{aligned} (ABC)^2 &= \frac{1}{4}a^2h^2 \\ &= \frac{1}{4}a^2(b^2-n^2) \\ &= \frac{1}{4}a^2(b+n)(b-n). \end{aligned}$$

Substituindo (4.24) na equação $(ABC)^2=\frac{1}{4}a^2(b+n)(b-n)$ obtemos

$$\begin{aligned} (ABC)^2 &= \frac{1}{4}a^2\left(b+\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)\left(b-\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right) \\ &= \frac{1}{4}a^2\left(\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2a}\right)\left(\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2a}\right) \\ &= \frac{1}{4}a^2\frac{\left[(a+b)^2-c^2\right]\left[c^2-(a-b)^2\right]}{4a^2} \\ &= \frac{1}{16}\left[(a+b-c)(a+b+c)\right]\left[(c-a+b)(c+a-b)\right]. \end{aligned}$$

Logo,

$$(ABC)^2 = \frac{1}{16}[(a+b-c)(a+b+c)][(c-a+b)(c+a-b)] \tag{4.28}$$

Substituindo (4.25),(4.26) e (4.27) em (4.28) temos

$$\begin{aligned}(ABC)^2 &= \frac{1}{16}[2(p-c)2p][2(p-a)2(p-b)]\\ &= \frac{1}{16}16p(p-a)(p-b)(p-c)\\ &= p(p-a)(p-b)(p-c).\end{aligned}$$

Portanto,

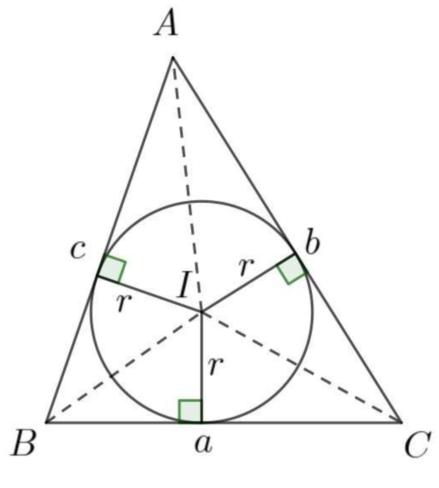
$$(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

■

Na próxima proposição será calculamos a área do triângulo em função dos lados e do raio r da circunferência inscrita.

Proposição 4.11 *A área de um triângulo ABC qualquer é igual ao produto do seu semiperímetro pelo raio da circunferência inscrita no triângulo.*

Figura 4.23: Área do triângulo em função dos lados e do raio r da circunferência inscrita



Fonte: Autor (2023)

Demonstração: Seja I o incentro, a área do triângulo (ABC) corresponde a áreas dos triângulos (AIB), (AIC) e (BIC). O raio da circunferência inscrita é perpendicular ao lado do triângulo ABC no ponto de tangência. Então,

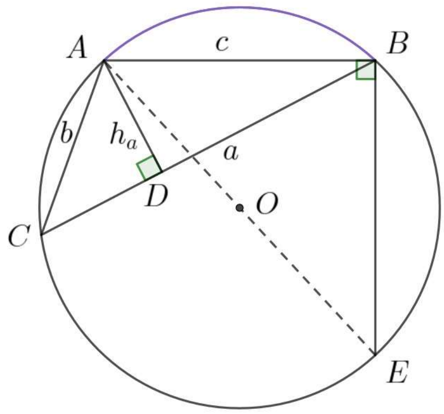
$$(ABC) = (AIB) + (AIC) + (BIC) = \frac{cr}{2} + \frac{br}{2} + \frac{ar}{2} = \frac{(c+b+a)\,r}{2} = \frac{2pr}{2} = pr$$

Portanto, $(ABC) = pr$. ■

É possível estabelecer uma expressão que calcule a área do triângulo em função dos lados e do raio r da circunferência circunscrita.

Proposição 4.12 *A área de um triângulo ABC qualquer é igual ao quociente do produto dos lados do triângulo pelo quádruplo do raio da circunferência circunscrita ao triângulo.*

Figura 4.24: Área do triângulo em função dos lados e do raio r da circunferência Circunscrita



Fonte: Autor (2023)

Demonstração: A área do triângulo ABC é o produto da área da base pela altura dividido por dois, isto é, $(ABC) = \dfrac{1}{2}ah_a$. Para determinar h_a, altura do triângulo ABC, construímos um triângulo ABE com $\overline{AE} = 2r$.

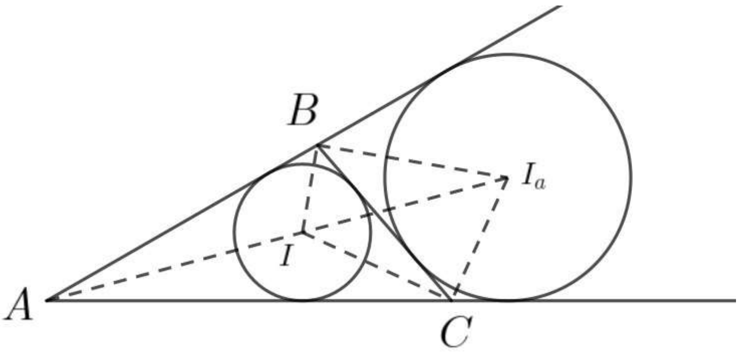
Notamos que, $\widehat{D} = \widehat{B}$, pois o triângulo ABE está inscrito na circunferência e tem sua base diâmetro da circunferência. Portanto, o triângulo ABE é retângulo em $\widehat{B}$ e $\widehat{C} = \widehat{E}$, pois estão inscritos ao mesmo arco. Logo, os triângulos ADC e ABE são semelhantes. Portanto, $\dfrac{h_a}{c} = \dfrac{b}{2r}$ e $h_a = \dfrac{bc}{2r}$. Assim, $(ABC) = \dfrac{abc}{4r}$. ■

Na próxima proposição calculamos a área do triângulo em função do raio de qualquer uma das circunferências ex-inscritas.

Antes de enunciar a proposição é bom lembramos que uma circunferência ex-inscrita a um triângulo se ela for tangente a um dos lados do triângulo e aos prolongamentos dos outros dois. O centro de uma circunferência ex-inscrita é denominado de ex-incentro.

Proposição 4.13 *Seja ABC um triângulo de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ e semiperímetro p. Se r e r_a denotam, respectivamente, os raios dos círculos inscritos em ABC e ex-inscrito a BC, então $(ABC) = pr = (p - a) . r_a$.*

Figura 4.25: Área do triângulo em função do raio de qualquer das circunferências ex-inscritas



Fonte: Autor (2023)

Demonstração: Sejam I o incentro e I_a o ex-incentro de ABC relativo a $\overline{BC}$. As alturas dos triângulos AIB, AIC e BIC, respectivamente, relativas aos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, são todas iguais a r. Logo, pelo postulado 2 obtemos.

$$\begin{aligned}(ABC) &= (AIB) + (AIC) + (BIC) \\ &= \frac{cr}{2} + \frac{br}{2} + \frac{ar}{2} \\ &= \frac{(abc)}{2} r \\ &= pr.\end{aligned}$$

Por outro lado, uma vez que as alturas de $(AI_aB), (AI_aC)$ e (BI_aC), respectivamente relativas aos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, são todas iguais a r_a. Logo,

$$\begin{aligned}
(ABC) &= (AI_aB) + (AI_aC) - (BI_aC) \\
&= \frac{cr_a}{2} + \frac{br_a}{2} - \frac{ar_a}{2} \\
&= \frac{(c+b-a)}{2} r_a \\
&= \frac{(c+b-a+a-a)}{2} r_a \\
&= \left(\frac{a+b+c}{2} - \frac{2a}{2}\right) r_a \\
&= (p-a)\, r_a
\end{aligned}$$

Portanto, $(ABC) = pr = (p-a)\, r_a$. ■

Podemos estabelecer uma expressão que forneça a área do triângulo em função de dois lados e do seno do ângulo compreendido. Para tal usamos a lei dos senos como ferramenta para estabelecer esta relação.

Proposição 4.14 *A área de um triângulo ABC qualquer é igual ao semi-produto das medidas de dois lados pelo seno do ângulo que eles formam entre si.*

Demonstração: Essa demonstração será dividida em dois casos. O primeiro é no triângulo acutângulo, o segundo caso é no triângulo obtusângulo. Quando o ângulo for reto, calculamos de forma direta, dado um triângulo ABC temos:

$$(ABC) = \frac{Base \times altura}{2}.$$

Primeiro caso: ABC é um triângulo acutângulo.

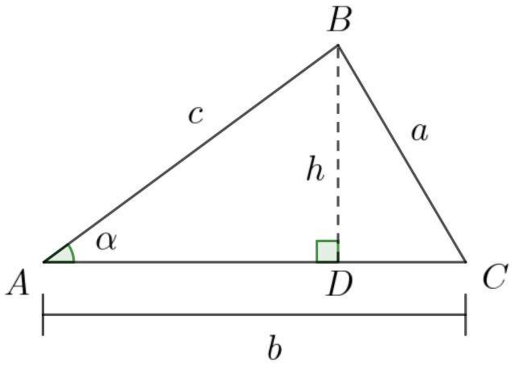
Seja D a projeção do vértice B sobre a reta $\overline{AC}$ e $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AD} = h$ altura do triângulo ABC, temos que:

$$(ABC) = \frac{bh}{2} \tag{4.29}$$

Aplicando a lei dos senos no triângulo ADB temos que $sen\widehat{\alpha} = \dfrac{h}{c}$. Então,

$$h = c \cdot sen\widehat{\alpha}. \tag{4.30}$$

Figura 4.26: Triângulo acutângulo



Fonte: Autor (2023)

Substituindo (4.30) em (4.29) temos:

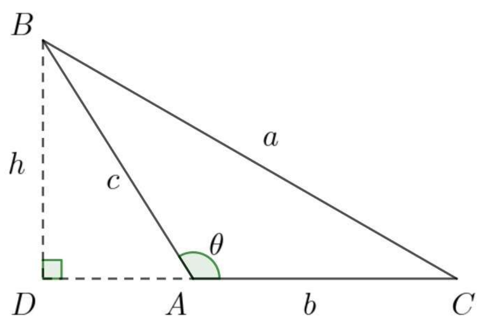
$$(ABC) = \frac{bc \cdot sen\widehat{\alpha}}{2}$$

Segundo Caso: ABC é um triângulo obtusângulo.

Seja D a projeção do vértice B sobre a reta $\overline{AC}$ e $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AD} = h$ altura do triângulo ABC. Neste caso, D está na semirreta oposta à semirreta $\overline{AC}$ conforme a Figura 4.27. Temos que:

$$(ABC) = \frac{bh}{2}.$$

Figura 4.27: Triângulo obtusângulo



Fonte: Autor (2023)

Aplicando a lei dos senos no triângulo ADB temos que $sen(180° - \widehat{\theta}) = sen\widehat{\theta} = \dfrac{h}{c}$.

Então,

$$h = c \cdot sen(\widehat{\theta}). \tag{4.31}$$

Substituindo (4.31) em (4.29) obtemos:

$$(ABC) = \frac{bc \cdot sen(\widehat{\theta})}{2}.$$

Nos dois casos anteriores as demonstrações para vértices B e C são inteiramente análogas. Portanto,

$$(ABC) = \frac{ac \cdot sen(\widehat{B})}{2} \quad \text{e} \quad (ABC) = \frac{ab \cdot sen(\widehat{C})}{2}.$$

■

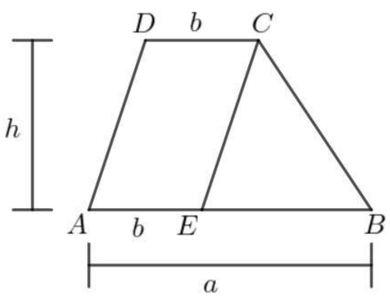
A partir da fórmula para calcular a área de um triângulo podemos estabelecer uma fórmula para determinar a área do trapézio. Para tal, convencionamos chamar de altura de um trapézio a distância entre as retas suportes das bases do mesmo.

Proposição 4.15 *Seja $ABCD$ é um trapézio de bases $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$ e altura h, então*

$$(ABCD) = \frac{(a+b)\,h}{2}.$$

Demonstração: Sem perda de generalidade, suponha que $a > b$ conforme mostra a Figura 4.28.

Figura 4.28: Área do Trapézio



Fonte: Autor (2023)

Se $E \in AB$ tal que $\overline{AE} = b$, o quadrilátero $ABCD$ tem dois lados paralelos e iguais, a saber $\overline{AD}$ e $\overline{EC}$, de modo que o quadrilátero $AECD$ é um paralelogramo. O triângulo EBC tem base $\overline{BE} = a - b$ e altura h. Pelo postulado 2 a área do trapézio é a soma as áreas dos polígonos $AECD$ e EBC. Assim,

$$\begin{aligned} (ABCD) &= (AECD) + (EBC) \\ &= bh + \frac{(a-b)\,h}{2} \\ &= \frac{2bh + (a-b)h}{2} \\ &= \frac{(a-b+2b)h}{2} \\ &= \frac{(a+b)\,h}{2}. \end{aligned}$$

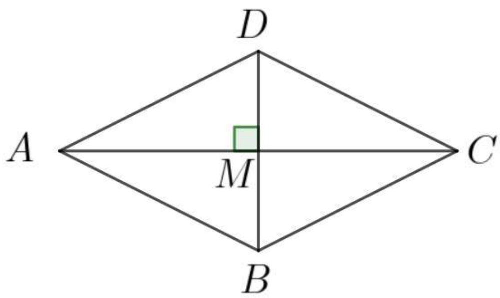
■

Utilizando a fórmula da área do triângulo podemos deduzir uma expressão matemática para calcular a área do losango. Isso é possível porque conseguimos particionar o losango em triângulos.

Proposição 4.16 *Se $ABCD$ é um losango de diagonais AC e BD, então*

$$(ABCD) = \frac{1}{2}\overline{AC}\ \overline{BD}.$$

Figura 4.29: Área do losango



Fonte: Autor (2023)

Demonstração: Inicialmente notamos que, podemos particionar o losango $ABCD$ em dois triângulos ABC e ACD. Pelo postulado 2, temos que a área maior é a soma das áreas dos polígonos menores. Logo, a área losango é a soma as áreas dos triângulos ABC e ACD. Observamos ainda que $\overline{BM} = \overline{DM}$, pois os triângulos ABC e ACD são congruentes pois $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\overline{AB} = \overline{DC}$ e o lado $\overline{AC}$ comum aos dois triângulos. Então,

$$\begin{aligned}(ABCD) &= (ABC) + (ACD)\\ &= \frac{1}{2}\overline{AC}\ \overline{BM} + \frac{1}{2}\overline{AC}\ \overline{DM}\\ &= \frac{1}{2}\overline{AC}\ (\overline{BM} + \overline{DM})\\ &= \frac{1}{2}\overline{AC}\ \overline{BD}.\end{aligned}$$

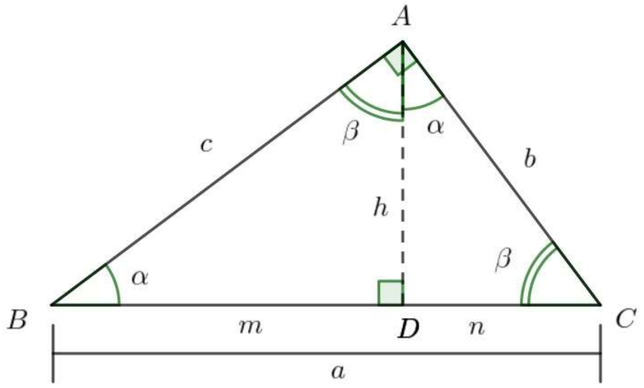
■

4.6 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

A BNCC descreve algumas habilidades a serem desenvolvidas durante o Ensino Fundamental, dentre eles está "(EF09MA13) demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o Teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos". [1, p.319].

O Teorema de Pitágoras é uma das relações métricas mais conhecidas. Além dela, outras relações são bastante úteis e ajudam a resolver vários problemas matemáticos. A seguir de vamos demonstrar alguns relações métricas do triângulo retângulo. Podemos obter as relações métricas utilizando semelhança de triângulos. Para isso considerar um triângulo ABC, retângulo em A, de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ e o ângulo $\widehat{B} = \alpha$ e $\widehat{c} = \beta$. Portanto os ângulos α e β são complementares, ou seja, $\alpha+\beta = 90°$. Consideramos ainda $\overline{AD} = h$ a altura relativa do triângulo ABC, $\overline{BD} = m$ e $\overline{DC} = n$ conforme mostra a Figura (4.30).

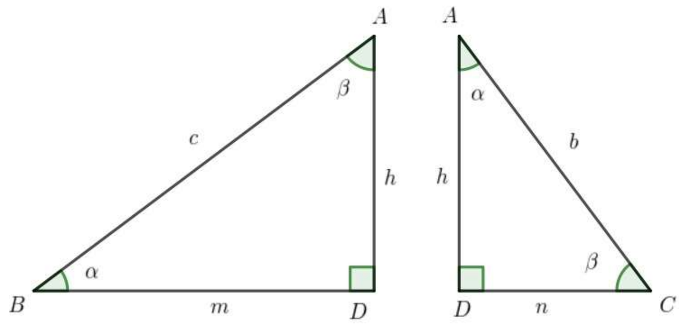
Figura 4.30: Relações métricas no triângulo retângulo



Fonte: Autor (2023)

Inicialmente notamos que, ao traçarmos a altura relativa ao triângulo ABC obtemos dois triângulos retângulos semelhantes ao triângulos ABC, o triângulo DBA retângulo em $\widehat{D}$ e o triângulo DAC retângulo em $\widehat{D}$ conforme mostra a Figura 4.31.

Figura 4.31: Relações métricas triângulos semelhantes



Fonte: Autor (2023)

Utilizamos as Figuras (4.30) e (4.31) para demonstrar os Teoremas 4.4, 4.5 e 4.6.

Teorema 4.4 *Em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.*

Demonstração: Aplicando semelhança entre os triângulos DBA e DAC, obtemos $\dfrac{h}{n} = \dfrac{m}{h}$. Logo, $h^2 = mn$. ■

Teorema 4.5 *Em um triângulo retângulo, o quadrado da medida de um cateto é igual ao produto da medida de sua projeção pela hipotenusa.*

Demonstração: Aplicando semelhança entre os triângulos ABC e DBA, obtemos $\frac{a}{c} = \frac{c}{m}$. Logo, $c^2 = am$. De forma análoga, aplicando semelhança entre os triângulos ABC e DAC, obtemos $\frac{a}{b} = \frac{b}{n}$. Logo, $b^2 = an$. ■

Teorema 4.6 *Em um triângulo retângulo, o produto entre a hipotenusa e a altura é igual ao produto das medidas dos catetos.*

Demonstração: Aplicando semelhança entre os triângulos ABC e DAC, obtemos $\frac{a}{b} = \frac{c}{h}$. Logo, $ah = bc$. ■

Ao realizar uma demonstração o estudante não obtém apenas uma fórmula que aplicará em seus exercícios. Eles constroem argumentos lógicos matemáticos que validam tal afirmação, além de trabalhar com ferramentas matemáticas para chegar a tal conclusão. Em particular, no estudo das relações métricas trabalhamos com vários conceitos matemáticos, tais como semelhança de triângulos, relação de igualdade, propriedade fundamental da proporção e operações básicas.

Conclusão

A presente dissertação explorou o uso de demonstrações matemáticas no Ensino Fundamental, visando fornecer subsídios e materiais de apoio para auxiliar professores e estudantes na compreensão e aplicação de conceitos matemáticos fundamentais. Ao longo deste estudo, buscamos atingir os objetivos estabelecidos na introdução, analisando cada um deles em detalhes.

O primeiro objetivo era desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo. Ao abordar métodos de demonstrações matemáticas e explorar conceitos como demonstração direta, princípio de indução finita e método de força bruta, procuramos fornecer aos estudantes ferramentas cognitivas essenciais para a construção de argumentos sólidos e a resolução de problemas matemáticos complexos. Através desta abordagem, acreditamos que os alunos foram capacitados a aplicar o pensamento lógico em diversas situações, contribuindo para o desenvolvimento de habilidades analíticas.

O segundo objetivo era melhorar a argumentação matemática. Ao discutir noções de lógica e métodos de demonstrações matemáticas, buscamos fortalecer a capacidade dos estudantes de formular e expressar argumentos de maneira clara e convincente. A compreensão dos princípios fundamentais da lógica permitiu aos alunos construir raciocínios matemáticos sólidos e comunicar suas ideias de forma eficaz, promovendo um ambiente de aprendizado colaborativo e enriquecedor.

O terceiro objetivo era justificar as fórmulas usadas no Ensino Fundamental. Ao explorar resultados matemáticos relevantes, como a resolução de equações do 2º grau, formas de calcular a área do triângulo e aplicações do teorema de Pitágoras, buscamos fornecer aos estudantes uma compreensão mais profunda e significativa dos conceitos matemáticos, permitindo-lhes justificar e aplicar fórmulas com confiança e precisão.

O quarto objetivo era desenvolver a criticidade dos estudantes. Ao incentivar uma abordagem investigativa e crítica no ensino e aprendizado da matemática, procuramos estimular o pensamento reflexivo e o questionamento ativo por parte dos alunos. Ao longo desta dissertação, buscamos não apenas transmitir conhecimento, mas também cultivar uma mentalidade crítica e exploratória que permita aos estudantes se tornarem aprendizes autônomos e engajados.

Em conclusão, a presente dissertação oferece percepções valiosas sobre o uso de demonstrações matemáticas no Ensino Fundamental, destacando sua importância no desenvolvimento de habilidades cognitivas, argumentativas e analíticas dos estudantes. Ao alcançar os objetivos estabelecidos, acreditamos que este trabalho contribui para a promoção de uma educação matemática mais inclusiva, dinâmica e enriquecedora, capacitando professores e estudantes a explorar o potencial da matemática como uma ferramenta para compreender e transformar o mundo ao seu redor.

Referências Bibliográficas

[1] Base Nacional Comum Curricular, 2018. Acesso em: 23 jan. 2024.

[2] H. Alencar, L. Cândido, and M. Farias. Resoluções visuais de alguns problemas de matemática da educação básica. *Revista do Professor de Matemática Online*, 7(1):1–19, 2019. Disponível em: 23 jan. 2024.

[3] N. Balacheff. The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM*, 40:501–512, 2008.

[4] P. C. P. Carvalho and A. C. d. O. MORGADO. *Matemática Discreta. Coleção PROFMAT.* 2.*ed.* Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[5] P. Davis and R. Hersh. *A Experiência Matemática Tradução de: João Bosco Pitombeira.* 3.*ed.* Rio de Janeiro: F. Alves, 1986.

[6] E. de Alencar Filho. *Iniciação a lógica matemática.* São Paulo: Nobel, 2002.

[7] D. C. de Morais Filho. *Um convite à Matemática. Coleção Professor de Matemática.* 3.*ed.* Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[8] M. de Villiers. Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração em geometria dinâmica. *Trad. Rita Bastos.PROFMAT*, 10, 2002.

[9] O. Dolce and J. N. Pompeo. *Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana.* 7.*ed.* São Paulo: Atual, 1993.

[10] J. A. Fossa. *Introdução às técnicas de demonstração na matemática.* Editora Livraria da Fisica, 2009.

[11] G. Garbi. *CQD: explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria.* São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

[12] A. Hefez. *Aritmética. Coleção PROFMAT. 2.ed.* Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[13] G. Iezzi and C. Murakami. *Fundamentos de Matemática Elementar, 1: Conjuntos, Funções. 9.ed.* São Paulo: Atual, 2013.

[14] IMPA. PAPMEM - Janeiro de 2008 - Perguntas e Respostas - Discussão 1. vídeo 1h04min5s. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=aShv3LYeals, 2008. Acesso em: 26 de Dezembro de 2023.

[15] E. Lima, P. Carvalho, E. Wagner, and A. Morgado. *Temas e Problemas Elementares. Coleção Professor de Matemática. 3.ed.* Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[16] E. L. Lima. *Meu professor de Matemática e outras histórias. Coleção Professor de Matemática. 6.ed.* Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[17] E. L. Lima. *Números e Funções Reais. Coleção PROFMAT. 1.ed.* Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[18] E. L. Lima. *Matemática e ensino. Coleção Professor de Matemática. 4.ed.* Rio de Janeiro: SBM, 2023.

[19] Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* MEC/SEF, Brasília, 1997.

[20] Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* MEC/SEF, Brasília, 1998.

[21] M. C. Mota and M. P. de Carvalho. Os diferentes tipos de demonstrações: uma reflexão para os cursos de licenciatura em matemática. *Revista da Educação Matemática*, 1, 2011.

[22] A. C. Muniz Neto. *Geometria. Coleção PROFMAT. 1.ed.* Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[23] OBMEP. Indução matemática, 2009. Acesso em: 23 jan. 2024.

[24] K. I. M. Oliveira and A. J. C. Fernandez. *Iniciação à Matemática: Um curso com problemas e soluções. Coleção Olimpíadas de Matemática. 2.ed.* Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[25] G. Pólya. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araujo*. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1995.

[26] F. D. S. Soares, B. A. Dassie, and J. L. d. Rocha. Ensino de matemática no século xx– da reforma francisco campos à matemática moderna. *Horizontes, Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 7-15, jan./jun. 2004*, 2004.

Apêndice A - Uma proposta de Sequência Didática

Introdução

Este recurso educacional é resultado da dissertação “O uso de Demonstrações Matemáticas no Ensino Fundamental” e consiste em uma sequência didática que recorre a técnicas de demonstrações matemáticas aplicada no Ensino Fundamental, buscando estimular a prática das demonstrações nas aulas de Matemática nesta etapa do ensino.

Iniciar o processo de demonstração matemática no Ensino Fundamental não é uma tarefa simples, pois é preciso levar consideração o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, porém, é interessante fazer as demonstrações sempre que possível, pois exercem um papel muito importante no aprendizado da matemática.

Espera-se que essa sequência didática possa auxiliar os professores na preparação e execução de suas aulas.

Público alvo

Estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental.

Conteúdo

Técnicas de demonstrações matemáticas.

Objetivo Geral

Disponibilizar recursos que ampliem a compreensão e aprofundem o conhecimento em matemática, enriquecendo a experiência educacional e promovendo o desenvolvimento intelectual dso estudantes.

Objetivos Específicos

O desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo;

Aprimoramento da argumentação matemática;

O estímulo à criticidade dos estudante.

Ponto de Partida

Qual a importância das demonstrações Matemáticas?

Procedimento Didático-Metodológico

O desenvolvimento da sequência didática será marcado por 5 encontros, cada encontro terá duração de 50 min, totalizando 4h10 min. Nos quatro primeiros encontros será apresentado uma parte teórica seguindo com uma atividade a ser desenvolvida pelos estudantes individualmente ou em grupo, no quinto encontro o professor fará observações e comentários dos encontros e das atividades realizadas durante a semana.

1 - Encontro

O professor deverá apresentar a definição de conjectura e teorema. Diferente de outras ciências, a Matemática não é uma ciência experimental, sua essência está em suas demonstrações, na argumentação e sua justificativa lógica. Em sua estrutura, uma afirmação para ao qual não existe prova é chamada de conjectura, este termo é usado quando se suspeita que a afirmação seja verdadeira. Caso uma conjectura seja demonstrada, ela passa a ser um teorema.

Exemplo .1 *A conjectura de Collatz é um famoso problema não resolvido na matemática. Ela afirma que, para qualquer número inteiro positivo n:*

1. *Se n for par, divida-o por* 2;
2. *Se n for ímpar, multiplique-o por* 3 *e some* 1;
3. *Repita o processo com o novo valor de n.*

A conjectura afirma que, independentemente do valor inicial de n, chegará ao número 1.

Exemplo .2 *A conjectura de goldbach afirma que todo número par maior que* 2 *pode ser representado pela soma de dois números primos. Por exemplo.*

$4 = 2 + 2$

$6 = 3 + 3$

$8 = 3 + 5$

$10 = 3 + 7 = 5 + 5$

$12 = 5 + 7$

$14 = 7 + 7$

$16 = 5 + 11$

$18 = 7 + 11$

$20 = 7 + 13$

Atividade 1 *Após apresentar a conjectura de Collatz o professor deverá propor aos estudantes que substituem números inteiros positivos na conjectura de Collatz.*

Com essa atividade os estudantes observarão que independentemente do número escolhido inicialmente chegará ao número 1. No entanto, não existe uma prova que a conjectura seja válida para todo número inteiro positivo, tendo assim diante deles uma conjectura.

2 - Encontro

O professor deverá apresentar técnicas de demonstrações. Neste encontro deve iniciar apresentando o método de demonstração direta. Uma das técnicas mais comuns, ela é usada para provar que uma proposição implica outra, seguindo uma sequência lógica de passos. Supomos que a hipótese seja válida e, usando o processo lógico-dedutivo, devemos deduzir diretamente a tese.

Exemplo .3 *A soma de dois números pares é sempre um número par.*

Demonstração: Suponhamos, inicialmente, que a e b sejam pares. Dessa forma, $a + b = 2k + 2t = 2(k + t)$ com k, t números naturais. Como, $k + t$ é um número natural segue que $a + b$ é um número par. ■

Exemplo .4 *Se n um número ímpar. Então, n^2 também é um número ímpar.*

Demonstração: Seja n um número natural ímpar, então existe um número natural k tal que $n = 2k + 1$. Consequentemente, $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, o que implica que n^2 é um número ímpar. ■

Atividade 2 *Mostre que a soma de dois números ímpares é sempre um número par.*

3 - Encontro

Neste encontro professor deverá apresentar o método de força bruta. Esse método, também é conhecido como prova por casos, indução perfeita ou prova por exaustão, e é um método de demonstração no qual são testadas todos os casos possíveis de uma hipótese.

Exemplo .5 *Mostre que lançando simultaneamente dois dados temos* 9 *possibilidades de obter um número primo em cada dado.*

Pelo Método de Força Bruta, mostramos por meio de uma tabela todas as possibilidades possíveis no laçamento de dois dados.

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)
\end{array}$$

As possibilidades são: $(2,2); (2,3); (2,5); (3,2); (3,3); (3,5); (5,2); (5,3)$ e $(5,5)$.

Portanto, é possível verificar, pelo método de força bruta, que existem nove possibilidades de ter um número primo em cada dado.

Atividade 3 *Mostre que quando lançando simultaneamente dois dados temos* 21 *possibilidades de obter uma somar menor ou igual a sete.*

4- Encontro

Neste encontro professor deverá apresentar método por contraexemplo. Relembramos que uma conjectura matemática é uma afirmação para a qual ainda não temos uma demonstração que comprove a sua validade. Nem sempre é possível mostrar que a conjectura é verdadeira, pois muitas vezes estamos num espaço infinito de casos e por vez não possuímos ferramenta para verificar tal afirmação. Entretanto, através um contraexemplo, um exemplo que nega a afirmação, é possível mostrar que a afirmação não é verdadeira.

Vamos analisar a seguinte proposição: Todo número da forma $n^2 + n + 41$, para n natural, é um número primo.

Observamos na tabela a seguir que para os sete primeiros números naturais o resultado é um número primo.

Número	**Resultado**	**Número Primo**
1	43	sim
2	47	sim
3	53	sim
4	61	sim
5	71	sim
6	83	sim
7	97	sim

Baseados nos primeiros resultados, poderíamos pensar que o valor obtido seria um número primo para todo natural. Entretanto, através um contraexemplo, é possível mostrar que a afirmação não é verdadeira. De fato é isso que ocorre nessa proposição, a afirmação é falsa para n igual a 40, pois $40^2 + 40 + 41 = 1.681 = 41^2$ que é um número composto. Portanto, mediante um contraexemplo, podemos verificar que a proposição é falsa.

Atividade 4 *Verifique se para todo número da forma* $n^2 + n + 17$, *para n natural, é um número primo.*

5- Encontro

Observações e comentários dos encontros e das atividades realizadas durante a semana.