Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

Ferdinando dos Santos Oliveira Cavalcante

A HIPÉRBOLE DE CENTRO NA ORIGEM COMO PRODUTO DE MATRIZES

Teresina - 2024

Ferdinando dos Santos Oliveira Cavalcante

Dissertação de Mestrado:

A HIPÉRBOLE DE CENTRO NA ORIGEM COMO PRODUTO DE MATRIZES

Dissertação submetida à Coordenaçao do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - Profmat, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática na modalidade profissional.

Orientador:
Prof. Dr. CLEIDINALDO AGUIAR SOUZA.

Teresina - 2024

Universidade Federal do Piauí - UFPI, Centro de Ciência da Natureza - CCN, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Mestrado Profissional em Matemática. Cep 64049-550 - Teresina, PI.

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

C376h Cavalcante, Ferdinando dos Santos Oliveira.
A hipérbole de Centro na origem como produto de matrizes / Ferdinando dos Santos Oliveira Cavalcante. -- 2024.
92 f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2024.
"Orientador: Prof. Dr. Cleidinaldo Aguiar Souza."

1. Matrizes. 2. Plano cartesiano. 3. Hipérbole. I. Souza, Cleidinaldo Aguiar. II. Titulo.

CDD 512.9

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461

Ferdinando dos Santos Oliveira Cavalcante

A HIPÉRBOLE DE CENTRO NA ORIGEM COMO PRODUTO DE MATRIZES

Dissertação submetida à banca examinadora abaixo discriminada em defesa pública e aprovada em 28/02/2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Cleidinaldo Aguiar Souza
Universidade Federal do Piauí-UFPI
Orientador

Prof. Dr. Manoel Vieira de Matos Neto
Universidade Federal do Piauí-UFPI
Avaliador Interno

Prof. Dr. Alexandre Bezerra do Nascimento Lima
Universidade Estadual do Piauí-UESPI
Avaliador Externo

Teresina - 2024

Dedico esta dissertação aos meus filhos, Enzo e Éverton e à minha esposa Glacildes.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar à Deus, pela minha vida e por me permitir vencer todos os obstáculos ao longo da realização deste tão sonhado mestrado.

Aos meus pais, Francisco de Assis e Luíza, pela educação e todos os ensinamentos ao longo da vida.

Aos meus filhos Enzo e Éverton, que sempre souberam compreender a minha ausência devido à minha dedicação ao mestrado. Amo vocês!.

À minha querida esposa Glacildes, pelo amor, incentivo e apoio incondicional, à minha sogra Rosimar pela torcida e ao meu eterno sogro João Carlos que não está mais conosco pelo apoio,incentivo e admiração.

Aos professores do programa PROFMAT, pelos ensinamentos, e aos colegas em geral que contribuíram de alguma forma para a realização dessa conquista..

Ao meu orientador, Professor Dr. Cleidinaldo, por sua paciência, incentivo e apoio incansável ao longo deste período. Este trabalho não teria sido possível sem a sua orientação e confiança em mim. Serei eternamente grato por ter tido a honra de tê-lo como meu orientador. Muito obrigado!

Aos meus colegas de mestrado, que me acompanharam ao longo desses dois anos e em especial ao meu amigo Ediney pela colaboração na trajetório do curso.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

“*“O cientista não é o homem que fornece as verdadeiras respostas; é quem faz as verdadeiras perguntas”.*".

Claude Lévi-Strauss.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo, através de igualdade de conjuntos, lemas, definição, proposições e teoremas, que o conjunto das hipérboles de centro na origem e reta focal paralela ao eixo OX, com $a = b = 1$, pode ser escrito como produto de um ponto fixo, pertencente a hipérbole, por uma matriz simétrica pré-fixada. Para isso, apresentamos nos primeiros capítulos conceitos básicos e propriedades importantes e usuais de plano cartesiano, hipérbole, matrizes e determinantes de forma bem resumida e através de uma linguagem matemática bem acessível. E, consequentemente, apresentamos um capítulo de hipérbole de centro na origem como produto de matrizes. E, por fim, apresentamos aplicações do resultado obtido utilizando o método da cadeia de Markov para estudar as previsões de mercado. Mais precisamente, aplicamos os resultados obtidos nos capítulos anteriores para estudar a projeção de mercado.

PALAVRAS-CHAVES: Matrizes, Matriz simétrica, Plano Cartesiano e Hipérbole

Abstract

This work aims, through equality of sets, lemmas, definition, propositions and theorems, that the set of hyperbolas with center at the origin and focal line parallel to the OX axis, with a = b = 1, can be written as the product of a fixed point, belonging to hyperbola, by a pre-fixed symmetric matrix. For this, we present in the first chapters basic concepts and important and common properties of plane Cartesian, hyperbola, matrices and determinants in a very summarized way and through a very accessible mathematical language. And consequently, we present a chapter of center hyperbola at the origin as product of matrices. And finally, we present applications of the result obtained using the Markov chain method to study the market forecasts. More precisely, we apply the results obtained in chapters previous studies to study market projection.

KEYWORDS: Matrices, Symmetric Matrices, Cartesian Plane and Hyperbola.

Sumário

Introdução

Motivado pelas constantes transformações que vem ocorrendo nas relações sociais e nos ambientes educacionais, sejam por avanços tecnológicos ou alterações comportamentais em ambientes sociais em especial nas famílias, faz se necessário que a escola se torne cada vez mais um espaço de convivência e de conhecimento, permitindo acima de tudo a promoção do conhecimento com qualidade e equidade.

Conceber a escola como agente transformador é fundamental a medida em que se aproprie de metodologias que busquem tornar esses espaços de aprendizado cada vez mais atrativo, para isso, se faz necessário corrigir rotas que por muito tempo tem tomado nossas instituições de ensino desinteressantes.

A eliminação de certos dogmas que mais afugentam do que atrai os nossos jovens em idade educacional é fundamental para a recuperação dos espaços de conhecimento, dentre os grandes desafios podemos citar o ensino e aprendizado de matemática, visto por muitos como bicho papão dentro das instituições de ensino, seja por metodologias equivocadas, métodos de ensino ineficientes e ineficazes.

A entrega de fórmulas prontas, sem uma explicação adequada de seu fundamento ou contexto, pode criar uma visão obscura da matemática para os alunos. Quando os educadores simplismente apresentam equações e operações sem formar o "porque"por trás delas, os alunos podem sentir que há algo escondido nas entrelinhas que não conseguem compreender. Isso pode levar desmotivações e à ideia de que a matemática é uma disciplina misteriosa e inacessível.

Quando se entrega ao aluno uma fórmula pronta, algo que surgiu do nada sem relação com um fundamento do que está sendo ensinado, é o mesmo que contribuir com a criação por parte do aluno de uma imagem obscura da matemática, pois há algo que fica escondido nas entrelinhas que os alunos nem sempre conseguem absorver, e isso faz com que alguns conteúdos pareçam mais difícil do que realmente são [6] Os alunos acham que a matemática é um corpo de conceitos verdadeiros e estáticos, do qual não se duvida ou questiona, nem mesmo nos preocupamos em compreender porque funciona. Em geral, acreditam também, que esses conceitos foram descobertos ou criados por gênios ([7], p. 01).

Como podemos perceber na fala de Costa ([6], é essencial que os educadores evitem a tentação de simplesmente transmitir fórmulas e equações como dogmas inquestionáveis. Em vez disso, eles devem se esforçar para iluminar o raciocínio por trás da matemática, mostrando aos alunos como ela se aplica e é fundamental em suas vidas. Isso não apenas torna a matemática mais acessível, mas também ajuda a construir uma base sólida de conhecimento e confiança nos estudantes, capacitando-os a enfrentar desafios matemáticos com uma compreensão genuína e um entusiasmo renovado.

Em particular, o conceito de matrizes atualmente é trabalhado em sala de aula de modo isolado, sem nenhuma interligação com outras áreas ou outros conceitos matemáticos. Recentemente, Oliveira e Souza [13]-[14] conseguiram uma interligação entre o conceito de matrizes e geometria. Mais precisamente, os autores escreveram a circunferência de centro na origem através do produto de matrizes, fazendo a interdisciplinaridade entre o conceito de matrizes e navegação de robôs. Posteriormente, Aguiar e Souza [1]-[2] estenderam este resultado para circunferência de centro em um ponto qualquer do plano. Além disso, Aguiar e Souza [3], conseguiram uma interdisciplinaridade entre o conceito de matrizes e situações da vida real, através de sólidos geométricos.

Dessa forma, nos propomos a apresentar a hipérbole de centro na origem e eixo real paralelo ao eixo das abscissas com $a = b = 1$ como produto de matrizes. Ligando dois conteúdos que segundo os Parâmetros Nacionais Curriculares (PCN) são apresentados aos discentes em séries distintas e quase sem nenhuma relação e aplicação.

Historicamente o conceito de matrizes já era utilizado antes de Cristo. ([5], p.71) Os primeiros registros sobre matrizes surgiu na antiga China, sob a forma de tabelas. Essas tabelas aparecem na obra Chui-Chang Suan-Shu (nove capítulos sobre a arte matemática), escrita por volta de 250 a.C. Com o auxílio dessas tabelas, os chineses resolviam sistemas de equações lineares, utilizando as matrizes, como são atualmente conhecidas.

([5], p.71) Avançando quase 2 mil anos, o matemático inglês Arthur Cayley foi um dos primeiros a introduzir matrizes na matemática, criando, em 1857, a àlgebra das matrizes.

No século XX, o matemático David Hilbert apresentou um estudo aprofundado sobre as matrizes, introduzindo, em 1904, as matrizes infinitas, associando-as com as equações integrais.

Foram muitas contribuições, mas ressaltamos aqui que foi o grande matemático Joseph Lois Lagrange quem primeiro utilizou o conceito de matrizes para estudar máximos e mínimos de uma função real.

Esse estudo trouxe como consequências o estudo da Teoria das Formas Quádricas que antes eram conhecidas apenas escalarmente como um polinômio homegênio de grau dois, ou seja, $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, após Lagrange, passou a ser estudada através da notação e metodologia matricial, a saber:

$$q(x,y) = (x,y)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

.

Não é fácil encontrar a matriz quadrada de ordem dois que satisfaça a equação acima e geralmente, utiliza-se conceitos da álgebra linear estudados no ensino superior como a ortogonalização de vetores e o Teorema Espectral para Matrizes simétricas.

([5], p.71) Já a hipérbole, estudada por Apolônio (astrônomo grego nascido em Persa), junto às outras cônicas, na obra Seções Cônicas (262-190 a.C.). Trata-se de uma obra extraordinária, com cerca de quatrocentos proposições, que Valeu a Apolônio o título de "O grande geômetra", concedido por seus contemporâneos, foi usada para resolver problemas de trissecção de um ângulo, aparece também no dia a dia, sem percebermos a sua presença.

Veja que, a equação da hipérbole de centro na origem e reta focal paralela ao eixo OX, com $a = b = 1$.

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \frac{(x-0)^2}{1^2} - \frac{(y-0)^2}{1^2} = x^2 - y^2 = 1$. É uma quádrica, assim pelo estudo desenvolvido por Langrange, podemos afirmar que dado um ponto $P(x,y)$ pertencente a hipérble existe uma matriz quadrada de ordem dois que transforma o ponto dado na equação da hipérbole a qual ele pertence.

Mostraremos neste trabalho que dado um ponto fixo P_0 e um ponto arbitrário P, ambos pertencentes a hipérbole, será sempre possível exibir uma matriz de ordem dois, que chamaremos de matriz hiperbólica, de tal modo que o produto desta matriz por P_0 gera a equação da hipérbole de centro na origem e reta focal paralela ao eixo OX, com $a = b = 1$. Ou seja, dados dois pontos quaisquer P e Q em uma hipérbole de centro na origem e reta focal paralela ao eixo OX com $a = b = 1$,existe sempre uma matriz M de ordem dois tal que $P = MQ$.

Neste trabalho objetivamos apresentar hipérbole de centro na origem como produto de matrizes.

Para que ocorra o objetivo geral deste trabalho serão necessários alguns objetivos específicos.

- Conhecer as noções básicas de plano cartesiano.
- Entender a definição de hipérbole, tipos de hipérbole, forma canônica e esboço da hipérbole.
- Reconhecer os conceitos de matrizes: introdução, tipos de matrizes, representação genérica, matrizes especiais e operações com matrizes.
- Ter noção básica de determinante: introdução, cofator e propriedades.

Este trabalho foi dividido em 6 capítulos com o intuito de mostrar uma boa fundamentação teórica e prática dos conteúdos, metodologia, aplicação e resultados, da seguinte maneira.

No capítulo 1, apresentaremos os conceitos básicos do plano cartesiano, como: sistema cartesiano ortogonal de coordenadas, par ordenado e propriedade fundamental dos pares ordenados, por compreender que tal conteúdo como pre-requesito básico para o melhor entendimento da proposta final.

No capítulo 2, definiremos a hipérbole como uma figura geométrica gerada por um conjunto de pontos que cumprem a mesma regra, mostrando as diferentes formas canônicas que essa equação pode ser enunciada e esboço da hipérbole.

No capítulo 3, apresentaremos a álgebra matricial ao definir detalhadamene a representação de matrizes, tipos de matrizes, operações entre matrizes, operação entre um número real e uma matriz, matriz identidade, matriz inversa, matriz transposta, matriz simétrica, matriz antissimétrica e matriz ortogonal, essa antepenúltima, é a protagonista desse trabalho.

No capítulo 4, apresentamos a noção de determinante de uma matriz dada e algumas propriedades mais importantes por ser um conteúdo de grande relevância e de repente ser usada em algum momento nesse trabalho.

No capítulo 5, mostraremos que toda hipérbole de centro na origem e reta focal paralela ao eixo OX com $a = b = 1$, pode ser obtida como produto de uma matriz simétrica hipérbolica de ordem dois por um ponto sobre essa hipérbole.

No capítulo 6, utilizamos os resultados dos capítulos anteriores para trabalhar algumas aplicações bem interessantes com a hipérbole de centro na origem e reta focal paralela ao eixo OX com $a = b = 1$.

Finalmente, no capítulo 7, fizemos as considerações finais deste trabalho.

Capítulo 1

O Plano Cartesiano

1.1 O Plano Cartesiano

Neste capítulo, introduziremos coordenadas na reta e no plano para representar pontos por meio de números reais. A representação dos pontos por suas coordenadas torna possível resolver algebricamente diversos problemas geométricos.

1.1.1 Representação de Pontos em uma Reta

Iniciaremos introduziremos coordenadas na reta . Dada uma reta **r**, aos pontos desta reta associamos números reais da seguinte maneira. Sejam O e A pontos distintos em **r**, a reta **r** sobre a qual foi escolhida uma semirreta $\vec{OA}$, denomina-se **eixo** ϵ de **origem** O com sentido de **percurso de percurso induzido pela semirreta** $\vec{OA}$, como ilustra a Figura (1.1).

À distância entre dois pontos $X, Y \in \epsilon$ será denotada por $d(X, Y)$, assim obtemos uma correspondência (biunívoca) entre o eixo ϵ e o conjunto dos números reais dada por:

(i) à origem O associamos o número real 0 (zero): $O \longleftrightarrow 0$;

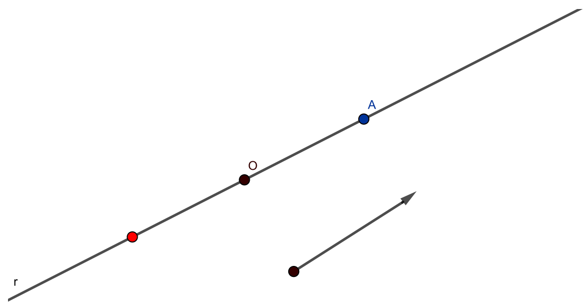
(ii) a cada ponto $X \neq 0$ da semirreta $\vec{OA}$ associamos o número real positivo $x = d(0, X)$: $X \longleftrightarrow x$;

(iii) a cada ponto $Y \neq 0$ da semirreta oposta $\vec{OB}$ associamos o número real negativo $y = -d(O, Y)$: $Y \longleftrightarrow y$.

Como consequência da definição acima, temos que

- O número real 0 (zero) tal que $O \longleftrightarrow 0$, é denominada coordenada da origem O no eixo ϵ.

Figura 1.1: Reta **r** com origem O



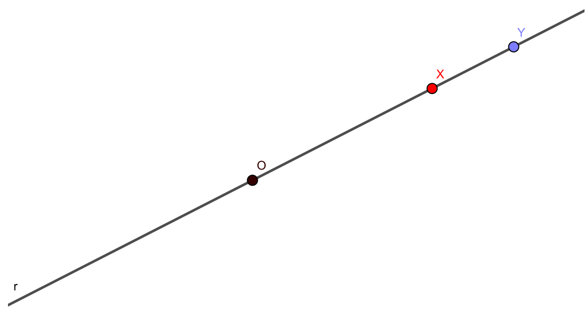
Fonte: Elaborada pelos autores

- O número real x tal que $X \longleftrightarrow x$, é denominada coordenada do ponto X no eixo ϵ.
- O número real Y tal que $Y \longleftrightarrow y$, é denominada coordenada do ponto Y no eixo ϵ

Como os pontos que estão sobre uma reta **r** podem ser representados por um número real, então naturalmente em relação à ordem podemos comparar os elementos sobre uma reta **r**, da seguinte maneira.

Sejam $X, Y \in$ **r** e sejam x e y suas, respectivas, coordenadas no eixo ϵ. Dizemos que Y está à direita (ou X está à esquerda de Y, como ilustra a Figura (1.2)) de X quando

Figura 1.2: $x < y$

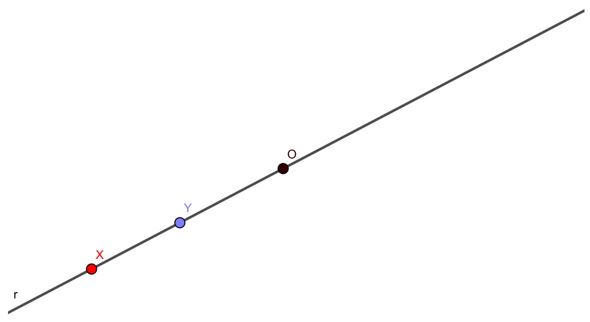


Fonte: Elaborada pelos autores

$x < y$, como ilustra a Figura (1.3).

Desta forma se $\vec{OB}$ é semirreta oposta a $\vec{OA}$, então os pontos distintos de O na

Figura 1.3: $y < x$



Fonte: Elaborada pelos autores

semirreta $\vec{OA}$ estão à direita de O, e os pontos distintos de O na semirreta $\vec{OB}$ estão à esquerda de O.

A proposição a seguir, fornece uma maneira de calcular a distância entre dois pontos sobre uma reta através de suas coordenadas reais.

Proposição 1.1.1 *Se x e y são as coordenadas dos pontos X e Y sobre o eixo ϵ, respectivamente, então*

$$d(X,Y) = \mid x - y \mid .$$

Prova Se $X = Y$, então imediatamente temos que $d(X,Y) = 0 = \mid x - y \mid$. Suponhamos que, $X = O$ ou $Y = O$, então

$$\mid x \mid = \pm x = d(O,X) \quad ou \quad \mid y \mid = \pm y = d(O,Y).$$

Sejam X, Y e O três pontos distintos. Sem perda de generalidade, suponhamos que X está à esquerda de Y, isto é, $x < y$. Temos três casos a considerar:

caso 1. X e y estão à direita da origem. Isto é, $0 < x < y$.

Neste caso, X está entre O e Y, pois caso contrário, Y estaria entre O e X e $d(O,Y) = y < x = d(O,X)$, o que contraria nossa hipótese. Logo,

$$d(O,Y) = d(O,X) + d(X,Y) \iff y = x + d(X,Y) \iff d(X,Y) = y - x = \mid y - x \mid .$$

caso 2. X e Y estão à esquerda de O. Isto é, $x < y < 0$.

De maneira análoga ao caso anterior, podemos verificar que Y está entre X e O.

Assim,

$$d(X,O) = d(X,Y) + d(Y,O) \iff -x = d(X,Y) - y \iff d(X,Y) = y - x = \mid y - x \mid .$$

caso 3. X está à esquerda de O e Y está à direita de O. Isto é, $x < 0 < y$.

Neste caso, Y está na semirreta $\vec{OA}$ e X está na semirreta oposta a $\vec{OA}$. Portanto, O está entre X e Y e

$$d(X,Y) = d(X,O) + d(O,Y) \iff d(X,Y) = -x + y = y - x = \mid y - x \mid .$$

De um outro modo, dada uma reta **r** podemos associar números reais aos pontos dessa reta. Para isso, escolhemos um ponto **O** (origem), uma unidade de medida de comprimento e um sentido positivo (para a direita).

A cada ponto **P** dessa reta associamos um número real **x** tal que:

- Se **P** está à direita de **O** (sentido de **O** a **P** é positivo), **x** é o comprimento do segmento $\overline{OP}$ associado a um sinal positivo.

  Exemplo: $x = +\,2 = 2$

- Se **P** está à esquerda de **O** (sentido de **O** a **P** é negativo), **x** é o comprimento do segmento $\overline{OP}$ associado a um sinal negativo.

  Exemplo: $x = -\,3$
  Em ambos os casos, dizemos que **x** é a **medida algébrica** do segmento $\overline{OP}$ e indicamos por $x = med\left(\overline{OP}\right)$

1.1.2 Representação de Pontos em um Plano

Para representar pontos em um plano, procederemos sa seguinte maneira:

1ª) Traçamos duas retas (eixo) perpendiculares e usamos a sua interseção **O** como origem para cada um desses eixos.

2ª) Para cada um dos eixos, escolhemos uma unidade de medida e um sentido positivo.

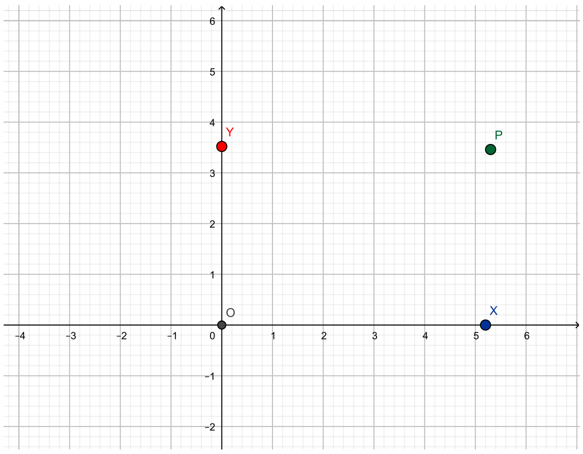
3ª) Para cada ponto **P** do plano traçamos:

- Uma reta paralela ao eixo vertical que intersecta o eixo horizontal no ponto **X**.
- Uma reta paralela ao eixo horizontal que intersecta o eixo vertical no ponto **Y**.

4ª) O número real $x = med\left(\overline{OX}\right)$ é a **abscissa** de **P**, e o número real $y = med\left(\overline{OY}\right)$ é a ordenada de **P**. Observe, conforme ilustra a figura 1.4, a abscissa de **P** é positiva e a ordenada de **P** também é positiva.
Os números reais **x** e **y** são as **coordenadas** de **P** e as indicamos na forma de **par ordenado** $P\left(x, y\right)$.

Um **sistema de eixos ortogonais** num plano π é um par de eixos, eixo OX e eixo OY, com unidade de medida de igual comprimento, que intersectam-se perpendicularmente na origem comum O. O eixo OX é denominado **eixo horizontal** e o eixo OY é denominado, **eixo vertical**. O Plano π com o sistema de eixos ortogonais acima, será chamado **sistema de eixos ortogonais** OXY, ou simplesmente **sistema** OXY, como ilustra a Figura (1.4).

Figura 1.4: Sistemas de eixos ortogonais



Fonte: Elaborada pelos autores

A escolha de um sistema de eixos ortogonais permite estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano π e os pares ordenados de números reais do conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid \quad x, \quad y \quad \in \mathbb{R}\},$$

da seguinte maneira.

Dado arbitrariamente um ponto $P_0 \in \pi$, traçamos as retas **r** e **s** passando por P_0, tal que:

(i) **r** seja paralela ao eixo OY e toque o eixo OX em um ponto X_0;

(ii) **s** seja paralela ao eixo OX e toque o eixo OY em um ponto Y_0.

Por coordenada na reta, o ponto X_0 está em correspondência biunívoca com um número real x_0 e o ponto Y_0 está em correspondência biunívoca com um número real y_0. Assim, obtemos a correspondência

$$P_0 \iff (x_0, y_0).$$

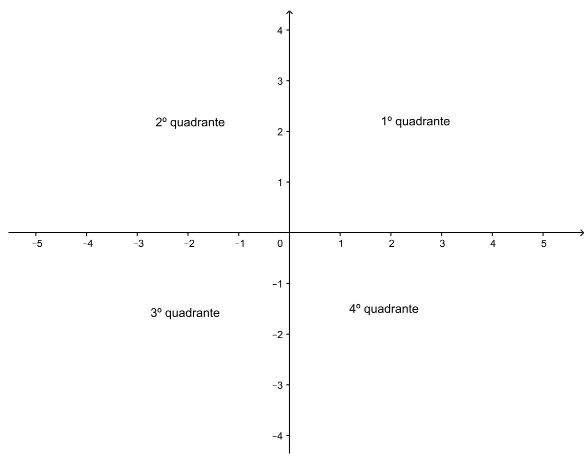
Como $P_0 \in \pi$ é arbitrário, segue que para todo ponto $P \in \pi$ existe uma correspondência biunívoca

$$P \iff (x, y).$$

Os números $x, y \in \mathbb{R}$ do par ordenado (x, y) associado ao ponto P são chamados **coordenadas cartesianas** do ponto P: x é a **primeira coordenada** ou **abscissa** de P e y é a **segunda coordenada** ou **ordenada** de P, como ilustra a Figura (1.4).

O complementar dos eixos no plano é a união de quatro regiões denominadas **quadrantes** e enumerados, como ilustra a Figura (1.5).

Figura 1.5: O plano divido em quadrantes



Fonte: Elaborada pelos autores

Note que os pontos do eixo OX têm coordenadas $(x, 0)$, os pontos do eixo OY têm coordenadas $(0, y)$ e os quadrantes, dados em coordenadas, são:

$$1^0 \text{ quadrante} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \;\; e \;\; y > 0\};$$

$$2^0 \text{ quadrante} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \;\; e \;\; y > 0\};$$

$$3^0 \text{ quadrante} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \;\; e \;\; y < 0\};$$

$$4^0 \text{ quadrante} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \;\; e \;\; y < 0\};$$

Assim, a numeração dos quadrantes é feita no sentido anti-horário, a contar do quadrante correspondente aos pontos que possuem ambas as coordenadas positivas, como ilustra a Figura (1.5).

O plano que contém as duas retas é o **plano cartesiano**, criado por René Descartes, e consiste em dois eixos perpendiculares, sendo o horizontal chamado de **eixo das**

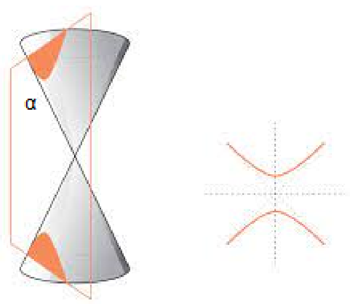
abscissas (OX) e o vertical de **eixo das ordenadas** (OY) e foi desenvolvido no intuito de localizar pontos num determinado espaço. Os eixos são numerados compreendendo o conjunto dos números reais. Observe, no plano cartesiano seguinte, a representação dos seguintes pontos **A**, **B**, **C**, **D**, **E** e **F** por meio de suas coordenadas:

Capítulo 2

Hipérbole

Neste capítulo realizaremos um estudo com a cônica HIPÉRBOLE . Definiremos o lugar geométrico e seus elementos, estudaremos a sua simetria e obteremos a forma canônica de sua equação. A Hipérbole é obtida através da intersecção de um plano α com a superfície de dois cones justapostos pelo vértice de altura infinita, como ilustra a Figura (2.1).

Figura 2.1: Justaposição de dois cones



Fonte: Brasil Escola

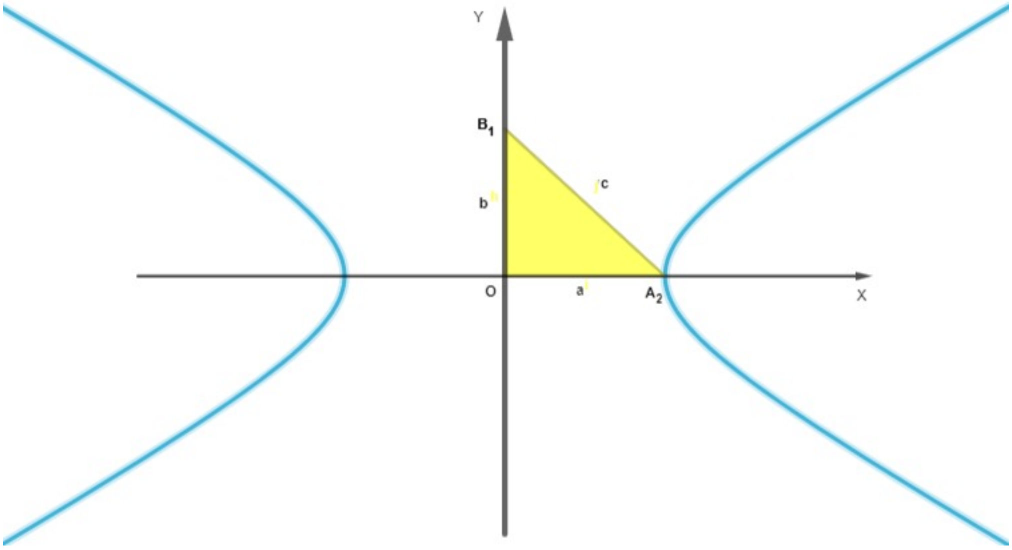
Definição: Uma hipérbole H de focos F_1 e F_2 é o conjunto de todos os pontos P do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, menor que as distâncias entre os focos $2c < 0$.

A Figura (2.2) ilustra uma hiperbóle.

Terminologia

- **Focos** são os pontos F_1 e F_2 e a reta que os contêm é a **reta focal**.
- **Vértices** são os pontos A_1 e A_2.
- **Eixo real ou eixo focal** é o segmento A_1A_2 e mede $2a$.
- **Vértices imaginátios** são os pontos B_1 e B_2.
- **Eixo imaginário ou eixo não focal** é o segmento B_1B_2 e mede $2b$.

Figura 2.2: Hiperbóle



Fonte:Elaborada pelos autores

- **Distância focal** é a distância entre os focos F_1 e F_2, ou seja, $2c$.
- **Excentricidade** é a razão $e = \frac{c}{a}$, sendo $e > 1$, pois $c > a$.

Relação fundamental

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OB_1A_1, temos:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Vamos obter a equação da hipérbole em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY nos casos em que a reta focal é o eixo OX ou o eixo OY.

2.0.1 Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX

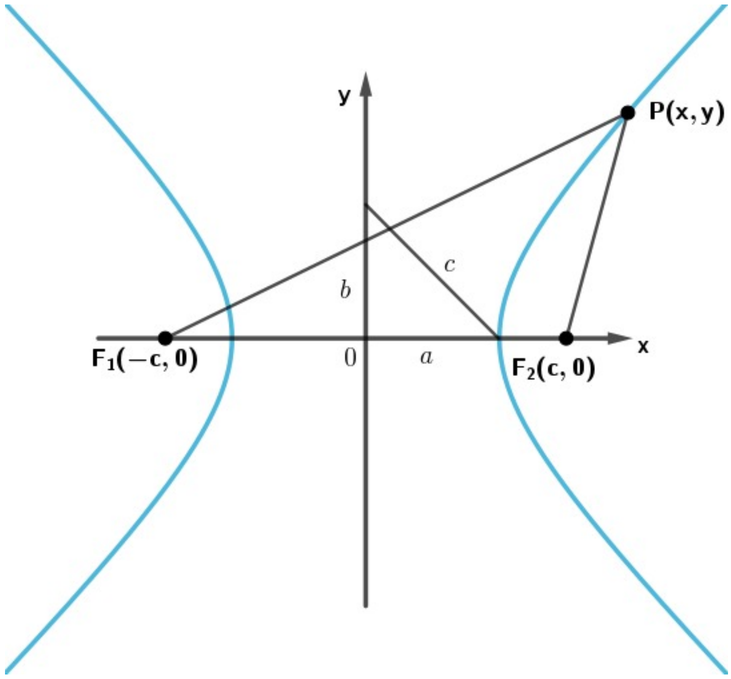
A forma canônica é: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Demonstração: Considere a hiperbóle ilustra na Figura (2.4). Para que um ponto genérico $P(x, y)$ pertença a curva, deve satisfazer a definição, ou seja:

$$|d_{PF_1} - d_{PF_2}| = 2a$$

Temos $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ e $P(x, y)$. Então devemos ter:

Figura 2.3: Hiperbóle com centro na origem e reta focal OX



Fonte:Elaborada pelos autores

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} &= \pm 2a \\ \iff \quad \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a \end{aligned}$$

Elevando os dois membros ao quadrado, temos:

$$\begin{aligned} (x+c)^2+y^2 &= (x-c)^2+y^2 \pm 4a\sqrt{(x-x)^2+y^2}+4a^2 \\ \iff x^2+2cx+c^2+y^2 &= x^2-2cx+c^2+y^2+4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\ \iff 2cx+2cx-4a^2 &= \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\ \iff 4cx-4a^2 &= \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\ \iff 4(cx-a^2) &= \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\ \iff (cx-a^2) &= \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \end{aligned}$$

Elevando essa expressão ao quadrado, vem:

$$
\begin{array}{rcl}
(cx - a^2)^2 & = & (\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 \\
\iff c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 & = & a^2[(x-c)^2 + y^2] \\
\iff c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 & = & a^2[x^2 - 2cx + c^2 + y^2] \\
\iff c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 & = & a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \\
\iff c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 & = & a^2c^2 - a^4 \\
\iff x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 & = & a^2(c^2 - a^2) \\
\iff x^2b^2 - a^2y^2 & = & a^2b^2
\end{array}
$$

Dividindo a última igualdade por a^2b^2, vem:

$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}.$$

Assim,

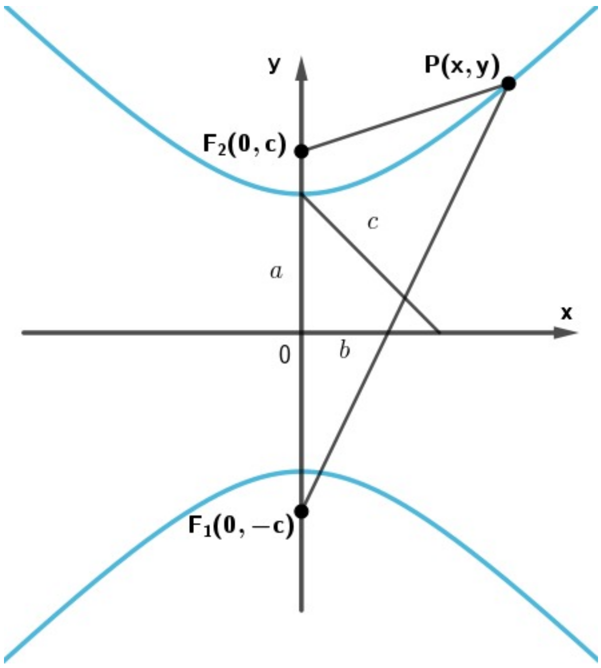
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2.0.2 Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY

A forma canônica é: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Demonstração: Considere a hiperbóle ilustrada na Figura (2.4)

Figura 2.4: Hiperbóle



Fonte:Elaborada pelos autores

Para que um ponto genérico $P(x, y)$ pertença a curva, deve satisfazer a definição, ou seja:

$|d_{PF_1} - d_{PF_2}| = 2a$

Temos $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$ e $P(x, y)$. Então devemos ter:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} - \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} \;=\; \pm 2a$$

$$\iff \qquad \sqrt{x^2 + (y+c)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \pm 2a$$

Elevando os dois membros ao quadrado, temos:

$$\begin{array}{rrcl}
 & x^2 + (y+c)^2 & = & x^2 + (y-c)^2 \pm 4a\sqrt{(x^2 + (y-c)^2} + 4a^2 \\
\iff & x^2 + y^2 + 2yc + c^2 & = & x^2 + y^2 - 2yc + c^2 + 4a^2 \pm 4a\sqrt{x^2 + (y-c)^2} \\
\iff & 2yc + 2yc - 4a^2 & = & \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + (y-c)^2} \\
\iff & 4yc - 4a^2 & = & \pm 4a\sqrt{x^2 + (y-c)^2} \\
\iff & 4(yc - a^2) & = & \pm 4a\sqrt{x^2 + (y-c)^2} \\
\iff & (yc - a^2) & = & \pm a\sqrt{x^2 + (y-c)^2}
\end{array}$$

Elevando essa expressão ao quadrado, vem:

$$\begin{array}{rrcl}
 & (yc - a^2)^2 & = & (\pm a\sqrt{x^2 + (y-c)^2})^2 \\
\iff & y^2c^2 - 2a^2yc + a^4 & = & a^2[x^2 + (y-c)^2] \\
\iff & y^2c^2 - 2a^2yc + a^4 & = & a^2[x^2 + y^2 - 2yc + c^2] \\
\iff & y^2c^2 - 2a^2yc + a^4 & = & a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2yc + a^2c^2 \\
\iff & y^2c^2 - a^2y^2 + a^2x^2 & = & a^2c^2 - a^4 \\
\iff & y^2(c^2 - a^2) - a^2x^2 & = & a^2(c^2 - a^2) \\
\iff & y^2b^2 - a^2x^2 & = & a^2b^2
\end{array}$$

Dividindo a última igualdade por a^2b^2, vem:

$$\tfrac{y^2b^2}{a^2b^2} - \tfrac{a^2x^2}{a^2b^2} \;=\; \tfrac{a^2b^2}{a^2b^2} \qquad .$$

Logo,

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

2.1 Forma canônica da hipérbole transladada

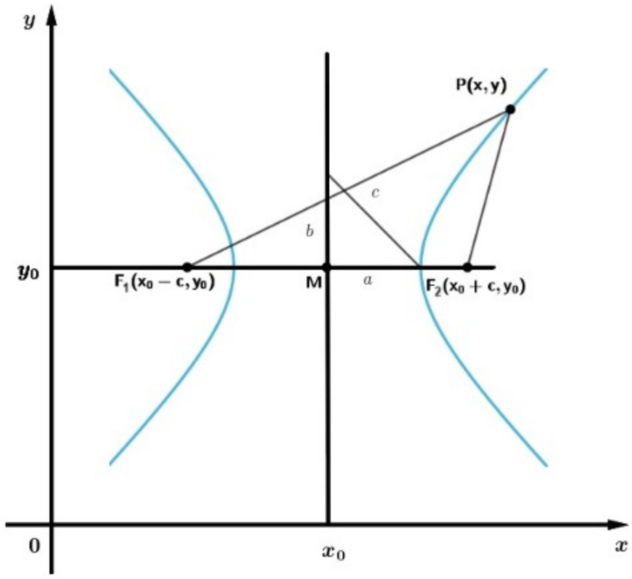
Vamos obter a equação da hipérbole em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY nos casos em que a reta focal é paralela ao eixo OX ou o eixo OY.

2.1.1 Hipérbole com centro no ponto x_0, y_0 e reta focal paralela ao eixo OX

A forma canônica é: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

Demonstração: Considere a hiperbóle ilustrada na Figura (2.5)

Figura 2.5: Hiperbóle na forma canônica transladada



Fonte:Elaborada pelos autores

Para que um ponto genérico $P(x, y)$ pertença a curva, deve satisfazer a definição, ou seja:

$|d_{PF_1} - d_{PF_2}| = 2a$

Temos $F_1(x_0 - c, y_0)$, $F_2(x_0 + c, y_0)$ e $P(x, y)$. Então devemos ter:

$$\begin{aligned} & \sqrt{[x-(x_0-c)]^2 + (y-y_0)^2} - \sqrt{[x-(x_0+c)]^2 + (y-y_0)^2} = \pm 2a \\ \Longleftrightarrow \quad & \sqrt{(x-x_0+c)^2 + (y-y_0)^2} = \sqrt{(x-x_0-c)^2 + (y-y_0)^2} \pm 2a \end{aligned}$$

Para facilitar os cálculos, façamos seguite mudança de variáveis: $x - x_0 = t(I)$ e $y - y_0 = u(II)$ e elevando os dois membros ao quadrado, temos:

$$
\begin{aligned}
& (t+c)^2+u^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(t-c)^2+u^2}+(t-c)^2+u^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & (t+c)^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(t-c)^2+u^2}+(t-c)^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & t^2+2tc+c^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(t-c)^2+u^2}+t^2-2tc+c^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & 2tc = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(t-c)^2+u^2}-2tc \\
\Longleftrightarrow\quad & 2tc+2tc-4a^2 = \pm 4a\sqrt{(t-c)^2+u^2} \\
\Longleftrightarrow\quad & 4tc-4a^2 = \pm 4a\sqrt{(t-c)^2+u^2} \\
\Longleftrightarrow\quad & 4(tc-a^2) = \pm 4a\sqrt{(t-c)^2+u^2} \\
\Longleftrightarrow\quad & tc-a^2 = \pm a\sqrt{(t-c)^2+u^2}
\end{aligned}
$$

Elevando essa expressão ao quadrado, vem:

$$
\begin{aligned}
& (tc-a^2)^2 = (\pm a\sqrt{(t-c)^2+u^2})^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & t^2c^2-2a^2tc+a^4 = a^2[(t-c)^2+u^2] \\
\Longleftrightarrow\quad & t^2c^2-2a^2tc+a^4 = a^2(t^2-2tc+c^2+u^2) \\
\Longleftrightarrow\quad & t^2c^2-2a^2tc+a^4 = a^2t^2-2a^2tc+a^2c^2+a^2u^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & t^2c^2+a^4 = a^2t^2+a^2c^2+a^2u^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & a^4-a^2c^2 = a^2t^2+a^2u^2-t^2c^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & a^2(a^2-c^2) = t^2(a^2-c^2)+a^2u^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & a^2(-b^2) = t^2(-b^2)+a^2u^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & -a^2b^2 = -t^2b^2+a^2u^2
\end{aligned}
$$

Dividindo a última igualdade por $-a^2b^2$, vem:

$$\tfrac{-t^2b^2}{-a^2b^2} - \tfrac{a^2u^2}{-a^2b^2} = \tfrac{-a^2b^2}{-a^2b^2}$$

Assim,

$$\frac{t^2}{a^2} - \frac{u^2}{b^2} = 1 \quad (III)$$

Substituindo (I) e (II) em (III), concluímos: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

2.1.2 Hipérbole com centro no ponto x_0, y_0 e reta focal paralela ao eixo OY

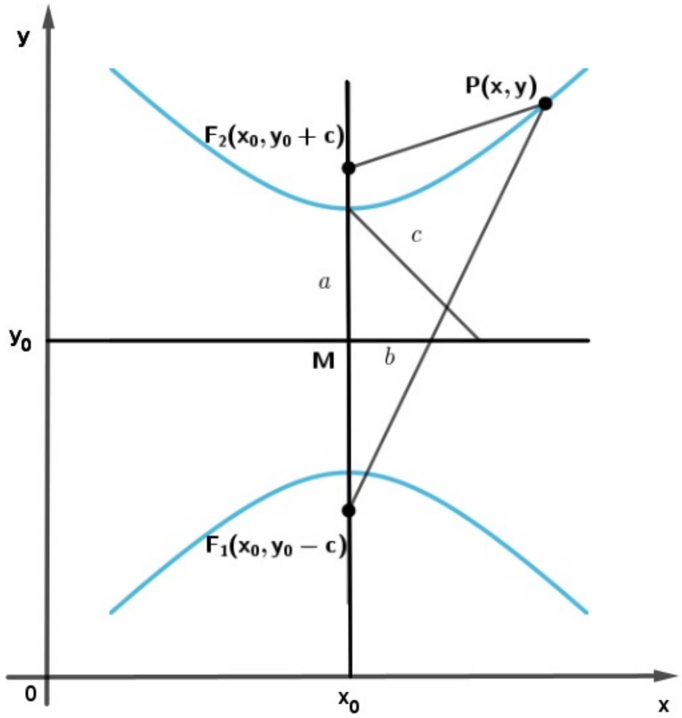
A forma canônica é: $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$

Demonstração: Considere a hiperbóle ilustrada na Figura (2.6)

Para que um ponto genérico $P(x,y)$ pertença a curva, o mesmo deve satisfazer a definição, ou seja:

$|d_{PF_1} - d_{PF_2}| = 2a$

Figura 2.6: Hiperbóle



Fonte:Elaborada pelos autores

Sejam $F_1(x_0, y_0 - c)$, $F_2(x_0, y_0 + c)$ e $P(x, y)$, temos que :

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x-x_0)^2+[y-(y_0-c)]^2}-\sqrt{(x-x_0)^2+[y-(y_0+c)]^2}=\pm 2a \\ \Longleftrightarrow \quad & \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0+c)^2}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0-c)^2}\pm 2a \end{aligned}$$

Para facilitar os cálculos, façamos seguite mudança de variáveis: $x - x_0 = t(I)$ e $y - y_0 = u(II)$ e elevando os dois membros ao quadrado, temos:

$$\begin{aligned} & t^2+(u+c)^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{t^2+(u-c)^2}+t^2+(u-c)^2 \\ \Longleftrightarrow \quad & (u+c)^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{t^2+(u-c)^2}+(u-c)^2 \\ \Longleftrightarrow \quad & u^2+2uc+c^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{t^2+(u-c)^2}+u^2-2uc+c^2 \\ \Longleftrightarrow \quad & 2uc = 4a^2 \pm 4a\sqrt{t^2+(u-c)^2}-2uc \\ \Longleftrightarrow \quad & 2uc+2uc-4a^2 = \pm 4a\sqrt{t^2+(u-c)^2} \\ \Longleftrightarrow \quad & 4uc-4a^2 = \pm 4a\sqrt{t^2+(u-c)^2} \\ \Longleftrightarrow \quad & 4(uc-a^2) = \pm 4a\sqrt{t^2+(u-c)^2} \\ \Longleftrightarrow \quad & (uc-a^2) = \pm a\sqrt{t^2+(u-c)^2} \end{aligned}$$

Elevando essa expressão ao quadrado, vem:

$$
\begin{aligned}
& (uc - a^2)^2 = (\pm a\sqrt{t^2 + (u-c)^2})^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & u^2c^2 - 2a^2uc + a^4 = a^2[t^2 + (u-c)^2)] \\
\Longleftrightarrow \quad & u^2c^2 - 2a^2uc + a^4 = a^2(t^2 + u^2 - 2uc + c^2) \\
\Longleftrightarrow \quad & u^2c^2 - 2a^2uc + a^4 = a^2t^2 + a^2u^2 - 2a^2uc + a^2c^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & u^2c^2 + a^4 = a^2t^2 + a^2u^2 + a^2c^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & a^4 - a^2c^2 = a^2t^2 + a^2u^2 - u^2c^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & a^2(a^2 - c^2) = a^2t^2 + u^2(a^2 - c^2) \\
\Longleftrightarrow \quad & a^2(-b^2) = a^2t^2 + u^2(-b^2) \\
\Longleftrightarrow \quad & -a^2b^2 = -b^2u^2 + a^2t^2
\end{aligned}
$$

Dividindo a última igualdade por $-a^2b^2$, vem:

$$\tfrac{-b^2u^2}{-a^2b^2} + \tfrac{a^2t^2}{-a^2b^2} = \tfrac{-a^2b^2}{-a^2b^2}$$

Donde

$$\frac{u^2}{a^2} - \frac{t^2}{b^2} = 1 \quad (III)$$

Substituindo (I) e (II) em (III), concluímos: $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$

2.2 Hipérbole equilátera

Se as medidas dos eixos real e imaginários são iguais, isto é, $2a = 2b$ ou $a = b$, a hipérbole é denominada **hipérbole equilátera**.

O gráfico a seguir, como ilustra a Figura (2.7) mostra uma hipérbole equilátera com eixo real sobre o eixo Ox e o centro na origem.

2.3 Assíntotas de uma hipérbole

A Figura (2.8) ilustra o gráfico, onde está representado o retângulo ABCD cujos lados medem $2a$ e $2b$.

As retas-suporte das diagonais desse retângulo são denominados **assíntotas** da hipérbole.

Equação da assíntota r_1

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ -a & b & 1 \\ a & -b & 1 \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow bx + ay + ab - ab + bx + ay = 0 \Longrightarrow$$

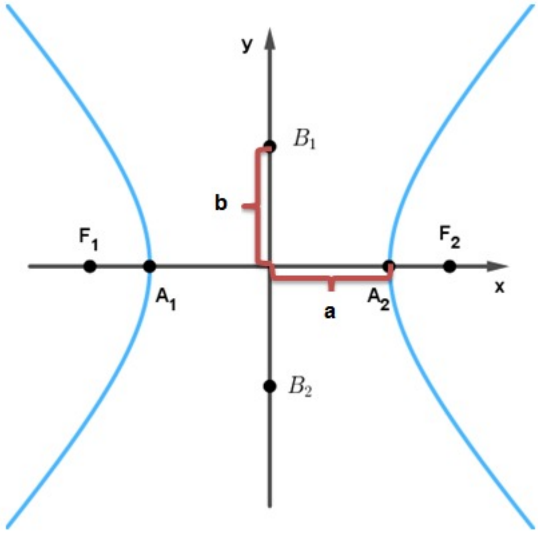


Figura 2.7: Hiperbóle Equilátera
Fonte:Elaborada pelos autores

$\Longrightarrow 2bx + 2ay = 0 \Longrightarrow y = -\frac{2bx}{2a} \Longrightarrow y = -\frac{bx}{a}$

Equação da assíntota r_2

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ -a & -b & 1 \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow bx - ay - ab + ab + bx - ay = 0$$

$\Longrightarrow 2bx - 2ay = 0 \Longrightarrow y = \frac{2bx}{2a} \Longrightarrow y = \frac{bx}{a}$

Exemplos

1. Determinar as medidas dos eixos e a distância focal da hipérbole de equação $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

   Resolução

   Comparando a equação dada com a equação genérica do tipo $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, temos: $a^2 = 9 \Longrightarrow a = 3$ e $b^2 = 4 \Longrightarrow b = 2$

   Como $c^2 = a^2 + b^2$, podemos calcular o valor de c:

   $c^2 = 9 + 4 \Longrightarrow c = \sqrt{13}$

   A medida do eixo real é dada por:

   $d_{A_1,A_2} = 2a \Longrightarrow d_{A_1,A_2} = 2 \times 3 \Longrightarrow d_{A_1,A_2} = 6$

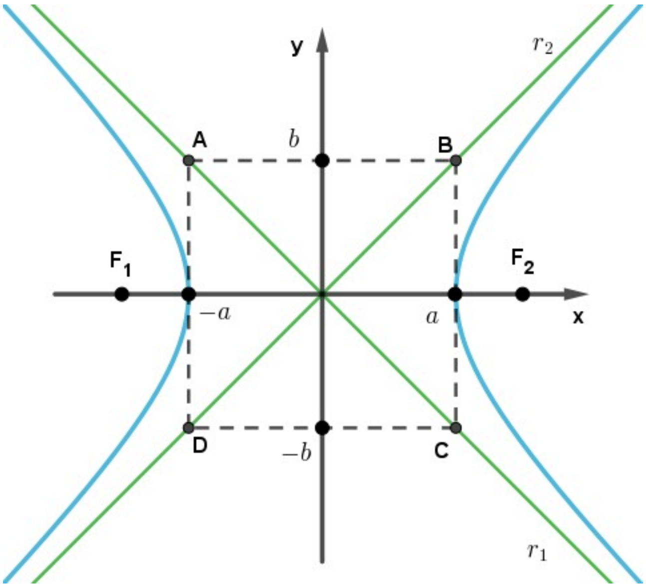
   A medida do eixo imaginário é dada por:

   $d_{B_1,B_2} = 2b \Longrightarrow d_{B_1,B_2} = 2 \times 2 \Longrightarrow d_{B_1,B_2} = 4$

   A distância focal é dada por:

   $d_{F_1,F_2} = 2c \Longrightarrow d_{F_1,F_2} = 2\sqrt{13}$

Figura 2.8: Retângulo ABCD



Fonte:Elaborada pelos autores

Portanto, os eixos real e imaginário dessa hipérbole medem respectivamente 6 e 4, e a distância focal mede $2\sqrt{13}$.

2. Dada a hipérbole de equação $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, determine a **excentricidade** e **as coordenadad dos focos**.

   Resolução

   Da equação dada, temos:

   $a^2 = 16 \Longrightarrow a = 4$ e $b^2 = 9 \Longrightarrow b = 3$

   O valor de c é dado por:

   $c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow c^2 = 16 + 9 \Longrightarrow c^2 = 25c = 5$

   A **excentricidade** é: $e = \frac{c}{a} \Longrightarrow e = \frac{5}{4}$

   As **coordenadas dos focos** são dadas por: $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Daí, $F_1(-5, 0)$ e $F_2(5, 0)$

3. Sendo $a = 2$ e $b = 1$, determine a equação da hipérbole que tem centro no ponto $P(-1, 2)$ e cujo eixo real é paralelo ao eixo das abscissas.

   Resolução

   Nesse caso, a equação é do tipo: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

   Então, temos:

   $\frac{[x-(-1)]^2}{2^2} - \frac{(y-2)^2}{1^2} = 1 \Longrightarrow \frac{(x+1)^2}{4} - (y-2)^2 = 1$

4. Determinar a equação das assíntotas da hipérbole de equação $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.

   Resolução

Pela equação dada, temos: $a^2 = 25 \Longrightarrow a = 5$ e $b^2 = 16 \Longrightarrow b = 4$

As assíntotas tem equações:

$r_1 : y = -\frac{bx}{a} \Longrightarrow y = -\frac{4x}{5}$

$r_2 : y = \frac{bx}{a} \Longrightarrow y = \frac{4x}{5}$

Capítulo 3

Matrizes

Definiremos matrizes formada por elementos reais, assim como as operações envolvendo matrizes. Apresentaremos algumas matrizes, chamadas matrizes especiais. Enunciaremos os principais resultados envolvendo as operações com matrizes. O objetivo principal deste capítulo é definir matriz é ortogonal.

Sejam **m** e **n** números naturais não nulos, uma tabela de **m** x **n** números reais dispostos em **m** linhas (filas horizontais) e **n** colunas (filas verticais) é uma matriz do tipo (ou formato) m **x** n, ou simplesmente matriz $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$. Denotaremos usualmente uma matriz colocando seus elementos (números reais) entre parênteses ou entre colchetes.

A tabela

- $A = \begin{bmatrix} 31 & 0 & 8 & 18 \\ 34 & 1 & 13 & 0 \\ 90 & \pi & 56 & 11 \\ 0 & 0 & 34 & 1 \end{bmatrix}$, é uma matriz de ordem 4 x 4

- $B = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 8 & 0 & 12 \\ 20 & 1 & 13 & 0 & 23 \\ 90 & \pi & 56 & 11 & 29 \end{bmatrix}$, é uma matriz de ordem 3 x 5

Seja uma matriz **A** do tipo **m** x **n**, denotaremos uma elemento qualquer desta matriz da seguinte maneira $\mathbf{a}_{ij}$; no qual o índice **i** refere-se à linha e o índice **j** refere-se à coluna em que se encontra tal elemento.

Convencionaremos que as linhas são numeradas de cima para baixo, e as colunas, da esquerda para à direita. De um modo geral, uma matriz **A** do tipo **m** x **n** é representada por $A = (a_{ij})_{m \text{ x } n}$, em que **i** e **j** são números inteiros positivos tais que $1 < i < m, 1 < j < n$, e a_{ij} é um elemento qualquer de **A**.

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 8 & 9 \\ 12 & 23 \end{bmatrix}_{3 \text{ x } 2}$$

- O elemento que está na linha 1, coluna 1, é $a_{11} = -5$;
- O elemento que está na linha 1, coluna 2, é $a_{12} = 7$;
- O elemento que está na linha 2, coluna 1, é $a_{21} = 8$;
- O elemento que está na linha 2, coluna 2, é $a_{22} = 9$;
- O elemento que está na linha 3, coluna 1, é $a_{31} = 12$;
- O elemento que está na linha 3, coluna 2, é $a_{32} = 23$.

As matrizes apresentadas a seguir, são chamadas de matrizes especiais.

1. **Matriz Linha**: é uma matriz formada por uma única linha.
   $A = \begin{bmatrix} \pi & -12 & 20 \end{bmatrix}$, é uma matriz linha 1 x 3. $B = \begin{bmatrix} 0 & -17 \end{bmatrix}$, é uma matriz linha 1 x 2.

2. **Matriz Coluna**: é uma matriz formada por uma única coluna.
   $A = \begin{bmatrix} 34 \\ 90 \\ 41 \\ -4 \end{bmatrix}$, é uma matriz coluna 4 x 1.
   $B = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \\ \sqrt{7} \end{bmatrix}$, é uma matriz coluna 2 x 1.

3. **Matriz Nula**: é uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero. Pode-se indicar uma matriz nula m x n por $0_{m \text{ x } n}$ $0_{2\text{x}3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, é uma matriz nula 2 x 4.
   $0_{2 \text{ x } 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, é uma matriz nula 3 x 3.

4. **Matriz Quadrada**: é uma matriz que possui o número de linhas iguais ao número de colunas.

$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$, é uma matriz quadrada de ordem 2.

$B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & \frac{1}{3} \\ \\ -2 & 0 & 7 \\ \\ \sqrt{3} & 1 & 4 \end{bmatrix}$, é uma matriz quadrada de ordem 3.

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**, temos que:

i. Os elementos de **A** cujo índice da linha é igual ao índice da coluna constituem a **diagonal principal** de **A**.

   Se **A** é uma matriz quadrada de ordem 3, os elementos $\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{22}, \mathbf{a}_{33}$ formam a diagonal principal de **A**.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{bmatrix}$$

ii. Os elementos da matriz **A** cuja soma dos índices da linha e da coluna é igual a $n+1$ constituem a **diagonal secundária** de **A**. Retornando ao exemplo anterior, os elementos $\mathbf{a}_{13}, \mathbf{a}_{22}, \mathbf{a}_{31}$ formam a diagonal principal de **A**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ \mathbf{a_{33}} & a_{32} & a_{13} \end{bmatrix}$$

5. **Matriz Identidade.** Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**, **A** é denominada **matriz identidade de ordem n** (indica-se por I_n) se os elementos de sua diagonal principal são todos iguais 1, e os demais elementos são iguais a zero. Assim:

   - $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz quadrada de ordem 2.
   - $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 3.
   - $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem n.

Introduziremos as seguintes operações com matrizes: adição de matrizes, produto de um número real por uma matriz e produto entre matrizes. Em seguida demonstraremos as propriedades para estas operações. Iniciaremos definindo quando duas matrizes são iguais.

Duas matrizes **A** e **B** de mesma ordem m x n são iguais se todos os seus elementos correspondentes são iguais, isto é, sendo $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, temos que $A = B$ se, e somente se, $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Para que $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & b \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 3 & d \\ c & -5 \end{pmatrix}$ sejam iguais, devemos ter

$$\begin{cases} a = 3 \\ 1 = d \\ 2 = c \\ b = -5 \end{cases}$$

(i) **Adição de matrizes.**

Dadas duas matrizes de mesma ordem, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, a soma de **A** com **B** (representa-se por $A + B$) é a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Em outras palavras, a matriz soma **C** tem mesma ordem que **A** e **B** e é tal que cada um de seus elementos é a soma de elementos correspondentes de **A** e **B**.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ -2 & 5 & \sqrt{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -6 & 9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ -8 & 14 & \sqrt{1}+1 \end{pmatrix}$$

Apresentaremos as propriedades da adição de matrizes. Sejam **A**, **B** e **C** matrizes de mesma ordem $(m \times n)$ e $0_{m\times n}$ a matriz nula, de ordem $m \times n$, valem as seguintes propriedades para a adição de matrizes:

(I). **Comutativa:** $A + B = B + A$

(II). **Associativa:** $(A + B) + C = A + (B + C)$

(III). **Existência do elemento neutro:** Existe **M** tal que $A+M = A$, qualquer que seja a matriz $A_{m\times n}$. (Observe que, nesse caso, **M** é a matriz nula do tipo $m\times n$.)

(IV). **Existência do oposto (ou simétrico):** existe $\mathbf{A}'$ tal que $A + A' = 0_{m\times n}$.

Prova:

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, temos:

$$A + B = C = (c_{ij})_{m\times n} \text{ e } B + A = D = (d_{ij})_{m\times n}$$

Mostraremos que

$$C = D$$

Para todo $i \in \{1, 2, ... , m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, ... , m\}$, assim

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Usando a propriedade comutativa dos reais

$$c_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = d_{ij}$$

e, então

$$D = E,$$

isto é

$$A + B = B + A.$$

Mostrando assim que vale a comutatividade.

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n}$ e $C = (c_{ij})_{m\times n}$, temos:

$$(A + B) + C = D = (d_{ij})_{m\times n} \text{ e } A + (B + C) = E = (e_{ij})_{m\times n}.$$

Mostraremos que

$$D = E,$$

Para todo $i \in \{1, 2, ... , m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, ... , n\}$, temos:

$$d_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}.$$

Usando a propriedade associativa da adição de números reais, podemos escrever:

$$d_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = e_{ij}$$

e, então,

$$D = E,$$

isto é

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

O que mostra a associatividade.

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $M = (a_{ij})_{m\times n}$, suponha que

$$A + M = A$$

então,

$$\begin{aligned} a_{ij} + m_{ij} = a_{ij} \quad &\Leftrightarrow \quad m_{ij} = a_{ij} - a_{ij} \\ &\Leftrightarrow \quad m_{ij} = 0 \end{aligned}$$

para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Assim,

$$M = 0_{m\times n},$$

ou seja, o elemento neutro da adição é M a matriz nula.

Agora mostraremos a existência de um elemento simétrico. Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $A' = \left(a'_{ij}\right)_{m\times n}$ e $0_{m\times n}$ a matriz nula de ordem $m \times n$. Suponha que

$$A + A' = 0_{m\times n}$$

então,

$$\begin{aligned} a_{ij} + a'_{ij} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a_{ij} = 0 - a'_{ij} \\ &\Leftrightarrow \quad a'_{ij} = -a_{ij} \end{aligned}$$

para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Assim,

$$A' = -A$$

Como consequência da existência do elemento simétrico, obtemos as seguintes definições. Seja a matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Chama-se **oposta de A** a matriz representada por $-A$, tal que

$$A + (-A) = 0_{m\times n}$$

onde $0_{m\times n}$ a matriz nula do tipo $m \times n$.

Note que, se **B** é oposta de **A**, então

$$A + B = 0$$

e daí, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, temos

$$\begin{array}{rrcl} & a_{ij} + b_{ij} & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & a_{ij} & = & -b_{ij} \\ \Longleftrightarrow & b_{ij} & = & -a_{ij} \end{array}$$

Observe que a matriz $-A$ é obtida de **A** trocando-se o sinal de cada um de seus elementos:

Sejam as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -9 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \text{e} B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \sqrt{5} \\ -8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Temos que

$$-A = \begin{pmatrix} -13 & 9 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \text{e } -B = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & -\sqrt{5} \\ 8 & -9 \end{pmatrix}.$$

Dadas duas matrizes de mesma ordem $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, chama-se diferença entre **A** e **B** (representa-se por $A - B$) a matriz soma de **A** com a oposta de **B**, isto é:

$$A - B = A + (-B)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Outra operação envolvendo matrizes é o produto de um número real por uma matriz, que definiremos a seguir Seja a matriz $(a_{ij})_{m\times n}$ e **k** um número real, o produto de **k** pela matriz **A** (indica-se $k \cdot A$) é a matriz $B = k \cdot a_{ij}$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Isto significa que **B** é obtida de **A** multiplicando-se por **k** cada um dos elementos de **A**.

Seja a matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Temos que

$$\begin{aligned} 3 \cdot A &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 9 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 27 & 12 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Seja a matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 7 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Temos que

$$\begin{aligned} -2 \cdot A &= \begin{pmatrix} -2 \cdot (-5) & -2 \cdot 2 \\ -2 \cdot 7 & -2 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -14 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}.$$

Em relação ao produto de um número real por uma matriz, temos as seguintes propriedades. Sejam **k** e **l** números reais e **A** e **B** matrizes de mesma ordem, valem as seguintes propriedades:

i. $k \cdot (l \cdot A) = (k \cdot l) \cdot A$

ii. $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$

iii. $(k + l) \cdot A = k \cdot A + l \cdot A$

iv. $1 \cdot A = A$.

Para o item [$i.$], sejam **k** e **l** $\in \mathbb{R}$ e $A = (a_{ij})_{m \times n}$ uma matriz de ordem m x n, temos

$$\begin{aligned} k \cdot (l \cdot A) &= k \cdot (l \cdot a_{ij})_{m \times n} \\ &= (k \cdot l \cdot a_{ij})_{m \times n} \\ &= (k \cdot l)\,(a_{ij})_{m \times n} \\ &= (k \cdot l) \cdot A \end{aligned}$$

No item $[ii.]$, sejam $\mathbf{k} \in \mathbb{R}$ e $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ duas matrizes de ordem m x n, temos

$$\begin{aligned} k \cdot (A + B) &= k \cdot \left((a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n}\right) \\ &= k \cdot (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} \\ &= (k \cdot (a_{ij} + b_{ij}))_{m \times n} \\ &= (k \cdot a_{ij} + k \cdot b_{ij})_{m \times n} \qquad . \\ &= (k \cdot a_{ij})_{m \times n} + (k \cdot b_{ij})_{m \times n} \\ &= k \cdot (a_{ij})_{m \times n} + k \cdot (b_{ij})_{m \times n} \\ &= k \cdot A + k \cdot B \end{aligned}$$

Mostraremos agora os itens $[iii.] - [iv.]$. Sejam $\mathbf{k}$ e $\mathbf{l} \in \mathbb{R}$ e $A = (a_{ij})_{m \times n}$ uma matriz de ordem $m \times n$, temos

$$\begin{aligned} (k + l) \cdot A &= (k + l) \cdot (a_{ij})_{m \text{ x } n} \\ &= ((k + l) \cdot a_{ij})_{m \times n} \\ &= (k \cdot (a_{ij}) + l \cdot (a_{ij}))_{m \text{ x } n} \qquad . \\ &= k \cdot (a_{ij})_{m \text{ x } n} + l \cdot (a_{ij})_{m \text{ x } n} \\ &= k \cdot A + l \cdot A \end{aligned}$$

O que prova o item $[iii.]$. Seja $A = (a_{ij})_{m \times n}$ uma matriz de ordem $m \times n$, temos

$$\begin{aligned}1 \cdot A &= 1 \cdot (a_{ij})_{m\times n}\\ &= (1 \cdot a_{ij})_{m\times n}\\ &= (a_{ij})_{m\times n}\\ &= A\end{aligned}.$$

Assim, como à adição de matrizes e o produto de um número real por uma matriz, faz sentido falar em produto de matrizes. Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{jk})_{n\times p}$, chama-se **produto de A por B**, e se indica $A \cdot B$, a matriz $C = (c_{ik})_{m\times p}$, em que

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + a_{i4} \cdot b_{4k} + ... + a_{in} \cdot b_{nk}$$

, para todo $i \in \{1, 2, ... , m\}$ e todo $k \in \{1, 2, ... , p\}$. Note que:

- A definição garante a existência do produto $A \cdot B$ se o número de colunas de **A** é igual ao número de linhas de **B**.
- A matriz produto $C = A \cdot B$ é uma matriz cujo números de linhas é igual ao número de linhas de **A** e o número de colunas é igual ao número de colunas de **B**, ou seja,

$$A_{(m\times n)} \cdot B_{(n\times p)} = C_{(m\times p)}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 \\ (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 & (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 5 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Vejamos as propriedades do produto de matrizes, assim com as demonstrações dessa propriedades.

Se **A** é quadrada de ordem **n**, temos: $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$. Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$ uma matriz quadrada de ordem n e I_n a matriz identidade de ordem n, temos:

$$
\begin{aligned}
A \cdot I_n &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 + \cdots + a_{1n} \cdot 0 & \cdots & a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 0 + \cdots + a_{1n} \cdot 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \cdot 1 + a_{n2} \cdot 0 + \cdots + a_{nn} \cdot 0 & \cdots & a_{n1} \cdot 0 + a_{n2} \cdot 0 + \cdots + a_{nn} \cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{12} + \cdots + 0 \cdot a_{1n} & \cdots & 0 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{12} + \cdots + 1 \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 \cdot a_{n1} + 0 \cdot a_{n2} + \cdots + 0 \cdot a_{nn} & \cdots & 0 \cdot a_{n1} + 0 \cdot a_{n2} + \cdots + 1 \cdot a_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\
&= I_n \cdot A
\end{aligned}
$$

Se $A = (a_{ij})_{n \text{ x } m}$, com $m \neq n$, temos:

$$I_n \cdot A = A \text{ e } A \cdot I_m = A$$

$$
\begin{aligned}
I_n \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_n \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{nxm} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{21} + \cdots + 0 \cdot a_{n1} & \cdots & 1 \cdot a_{1m} + 0 \cdot a_{2m} + \cdots + 0 \cdot a_{nm} \\ 0 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} + \cdots + 0 \cdot a_{n1} & \cdots & 0 \cdot a_{1m} + 1 \cdot a_{2m} + \cdots + 0 \cdot a_{nm} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{21} + \cdots + 1 \cdot a_{n1} & \cdots & 0 \cdot a_{1m} + 0 \cdot a_{2m} + \cdots + 1 \cdot a_{nm} \end{pmatrix}_{n \times m} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n \times m} \\
&= A
\end{aligned}
$$

O caso em que $A \cdot I_m$, basta proceder de maneira análoga. Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**, a matriz **A** é dita inversível (ou invertível) se existe uma matriz **B** (quadrada de ordem **n**), tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Onde I_n representa a matriz identidade de ordem **n**. Neste caso, **B** é dita **inversa** de **A** e é indicada por $\mathbf{A}^{-1}$.

A inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ é $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ pois:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

e

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Para verificar se uma matriz quadrada é ou não é inversível e, em caso afirmativo, determinar sua inversa, utilizamos um processo baseado na definição de matriz inversa e na resolução de sistemas. Vejamos um exemplo no caso da matriz 2×2.

– Determine, se existir, a inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Devemos verificar se existe

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tal que

$$A \cdot A^{-1} = I_2$$

Temos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3a+2c & 3b+2d \\ 5a+4c & 5b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Do conceito de igualdade de matrizes seguem os sistemas:

$$\begin{cases} 3a+2c = 1 \\ 5a+4c = 0 \end{cases}$$

cuja solução é

$$a = 2 \text{ e } c = -\frac{5}{2}$$

e

$$\begin{cases} 3b+2d = 0 \\ 5b+4d = 1 \end{cases}$$

cuja solução é

$$b = -1 \text{ e } d = \frac{3}{2}.$$

Assim,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

– Determine, se existir, a inversa de $X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Devemos verificar se existe

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tal que

$$X \cdot X^{-1} = I_2.$$

Temos:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff$$

.

$$\iff \begin{pmatrix} 4a+2c & 4b+2d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim,

$$\begin{cases} 4a+2c &= 1 \\ 2a+c &= 0 \end{cases} \quad (1) \text{ e } \begin{cases} 3b+2d &= 0 \\ 5b+4d &= 1 \end{cases} \quad (2)$$

Resolvendo o sistema (1):

$$\begin{cases} 4a+2c &= 1 \\ 2a+c &= 0 \ (\times 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+2c &= 1 \\ 4a+2c &= 0 \end{cases}$$

É fácil ver que o sistema acima não admite soluções, pois não existem **a** e **c** reais tais que $0 \cdot a \ + \ 0 \cdot c = 1$. Desse modo, já podemos concluir que não existe a inversa de X.

O processo apresentado nesses exemplos pode ser aplicado a matrizes quadradas de ordem **n**, $n \geq 2$. No entanto, para $n \geq 3$ o processo é, em geral, trabalhoso.

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se **transposta de A** (indica-se por $\mathbf{A}^t$) a matriz:

$$A^t = \left(a'_{ij}\right)_{n \times m}$$

tal que $a'_{ij} = a_{ij}$ para todo **i** e todo **j**.
Em outras palavras, a matriz $\mathbf{A}^t$ é obtida a partir de **A** trocando-se, ordenadamente, suas linhas pelas colunas.

A transposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ é $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

A transposta da matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ é $B^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

I - Dada uma matriz **A** de ordem $n \times m$, então $(A^t)^t = A$.

II - Dadas duas matrizes **A** e **B**, ambas de ordem $n \times m$, então $(A+B)^t = A^t + B^t$.

III - Dado $k \in R$ e uma matriz **A** de ordem $n \times m$, então $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$

IV - Dadas as matrizes **A** de ordem $n \times m$ e **B** de ordem $m \times r$, então $(AB)^t = B^t A^t$.

Para o item $[I]$, temos que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n \times m} \iff$$

$$\iff A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{m \times n} \iff .$$

$$\iff (A^t)^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n \times m} = A$$

Para o item $[II]$, temos que

$$\begin{aligned}
X_{n\times m}+Y_{n\times m} &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}_{n\times m} \iff \\
\iff \qquad (X+Y)^t &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{n1}+b_{n1} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{n2}+b_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m}+b_{1m} & a_{2m}+b_{2m} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}_{m\times n} = \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{m\times n} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1m} & b_{2m} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}_{m\times n} = \\
&= X^t + Y^t
\end{aligned}$$

Quanto ao item $[III]$, temos que

$$k\cdot A = \begin{pmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & \cdots & k\cdot a_{1m} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & \cdots & k\cdot a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k\cdot a_{n1} & k\cdot a_{n2} & \cdots & k\cdot a_{nm} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\,(k\cdot A)^t = \begin{pmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{21} & \cdots & k\cdot a_{n1} \\ k\cdot a_{12} & k\cdot a_{22} & \cdots & k\cdot a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k\cdot a_{1m} & k\cdot a_{2m} & \cdots & k\cdot a_{nm} \end{pmatrix} \Rightarrow k\cdot X^t$$

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mr} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1m}b_{m1} & \cdots & a_{11}b_{1r}+a_{12}b_{2r}+\cdots+a_{1m}b_{mr} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\cdots+a_{2m}b_{m1} & \cdots & a_{21}b_{1r}+a_{22}b_{2r}+\cdots+a_{2m}b_{mr} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+\cdots+a_{nm}b_{m1} & \cdots & a_{n1}b_{1r}+a_{n2}b_{2r}+\cdots+a_{nm}b_{mr} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Então

$$
\begin{aligned}
(AB)^t &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1m}b_{m1} & \cdots & a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+\cdots+a_{nm}b_{m1} \\ a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\cdots+a_{1m}b_{m2} & \cdots & a_{n1}b_{12}+a_{n2}b_{22}+\cdots+a_{nm}b_{m2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11}b_{1r}+a_{12}b_{2r}+\cdots+a_{1m}b_{mr} & \cdots & a_{n1}b_{1r}+a_{n2}b_{2r}+\cdots+a_{nm}b_{mr} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} b_{11}a_{11}+b_{21}a_{12}+\cdots+b_{m1}a_{1m} & \cdots & b_{11}a_{n1}+b_{21}a_{n2}+\cdots+b_{m1}a_{nm} \\ b_{12}a_{11}+b_{22}a_{12}+\cdots+b_{m2}a_{1m} & \cdots & b_{12}a_{n1}+b_{22}a_{n2}+\cdots+b_{m2}a_{nm} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1r}a_{11}+b_{2r}a_{12}+\cdots+b_{mr}a_{1m} & \cdots & b_{1r}a_{n1}+b_{2r}a_{n2}+\cdots+b_{mr}a_{nm} \end{pmatrix} = \\
&= B^tA^t
\end{aligned}
$$

Uma matriz quadrada **A** de ordem n é dita simétrica se

$$A = A^t$$

- Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, temos que $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, então A é uma matriz simétrica.
- Seja a matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, temos que $B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, então B é uma matriz simétrica.

A matriz identidade, de qualquer ordem, é simétrica.
Seja I_n a matriz identidade de ordem n, assim:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \iff I_n^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem n. Então:

I - Se **A** é simétrica, então para qualquer escalar k, a matriz $k \cdot A$ também é simétrica.

II - A *matriz nula*, de qualquer ordem, é simétrica.

III - A *matriz identidade*, de qualquer ordem, é simétrica.

Provaremos apenas o item $[I]$. Seja $k \in \mathbb{R}$ e $A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ uma matriz quadrada de ordem n tal que

$$A = A^t.$$

Por igualdade de matrizes, temos que

$$a_{ij} = a_{ji},\ \forall\ i, j = \{1, 2, \ldots, n\}$$

Assim

$$k \cdot A = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & \cdots & k \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{n1} & \cdots & k \cdot a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & \cdots & k \cdot a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{1n} & \cdots & k \cdot a_{nn} \end{pmatrix} = k \cdot A^t$$

Portanto $k \cdot A$ é uma matriz simétrica.

Uma matriz quadrada **A** de ordem n é dita antissimétrica se

$$A = -A^t.$$

Equivalentemente, os termos a_{ij}, satisfazem

$$a_{ij} = -a_{ji}.$$

Disso decorre que os termos da diagonal principal obrigatoriamente devem ser nulos.

– Seja a matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -1 \\ -7 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, temos que $B^t = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 1 \\ 7 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.
  Assim, $B = -B^t$ o que implica que **B** é antissimétrica.
– Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, temos que $A^t = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Assim, $A = A^t$, o que implica que **A** é antissimétrica.

Uma matriz quadrada **A** de ordem n é dita ortogonal se A é inversível e se

$$A^{-1} = A^t.$$

Em outras palavras, **A** é ortogonal se

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = I.$$

A inversa de uma matriz ortogonal também é ortogonal.

Se A é ortogonal, então $A^{-1} = A^t$, assim

$$A^{-1} \cdot \left(A^{-1}\right)^t = A^t \cdot \left(A^t\right)^t = A^t \cdot A = I$$

e

$$\left(A^{-1}\right)^t \cdot A^{-1} = \left(A^t\right)^t \cdot A^t = A \cdot A^t = I.$$

Donde,

$$A^{-1} \cdot \left(A^{-1}\right)^t = \left(A^{-1}\right)^t \cdot A^{-1} = I$$

O produto de duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.
Seja **A** e **B** duas matrizes ortogonais de ordem n. Como A e B são invertíveis, então já vimos que AB também é invertível e que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Daí

$$AB\,(AB)^{-1} = AB\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

e

$$(AB)^{-1}\,AB = \left(B^{-1}A^{-1}\right)AB = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

i - A matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

é ortogonal, pois

$$A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Além disso

$$
\begin{aligned}
A \cdot A^t &= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\[2ex] -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \\[2ex] -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
A^t \cdot A &= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\[2ex] -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = . \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = I.$$

ii - A matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é ortogonal, pois A é simétrica e

$$\begin{aligned}
A \cdot A^t &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= I
\end{aligned}.$$

Portanto,

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = I$$

iii - A matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é ortogonal, pois A é simétrica e

$$\begin{aligned}
A \cdot A^t &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0+1 & 0+0 \\ \\ 0+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= I
\end{aligned}.$$

Portanto,

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = I.$$

iv - A matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

é ortogonal, pois A é simétrica e

$$\begin{aligned} A \cdot A^t &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0+1 & 0+0 \\ \\ 0+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= I \end{aligned}.$$

Portanto,

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = I.$$

Colocaremos todas as matrizes de ordem $m \times n$, com elementos reais em um conjunto da seguinte maneira.

$$M_{m\times n} = \{A = (a_{ij})_{m\times n} : \quad a_{ij} \quad \in \quad \mathbb{R}\}.$$

Assim, podemos definir o conjunto das matrizes ortogonais como um subconjunto de $M_{n\times n}$ da seguinte maneira:

$$M_o = \left\{A \in M\left(n,n\right); A \cdot A^t = I\right\}.$$

Capítulo 4

Determinantes

Finalizaremos esta seção com a definição de determinante de uma matriz, e apresentando algumas de suas propriedades. A noção de determinante será utilizada na próxima seção como condição fundamental para este trabalho.

Seja A uma matriz de ordem n, afim de definirmos o determinante da matriz A, que denotaremos por $\det A$, consideraremos os seguintes casos para $n \geq 1$:

(i) Se A é uma matriz de ordem 1, isto é, $A = [a_{11}]$, então o determinante da matriz A é dada pelo elemento a_{ij}. Ou seja,

$$\det[a_{ij}] = a_{ij}$$

Seja a matriz $A = [16]$, temos que $\det A = 16$.

Seja a matriz $A = [-5]$, temos que $\det A = -5$.

(ii) Se A é uma matriz de ordem 2, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

então o determinante da matriz A é dado como a soma do produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária. Ou seja,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

temos que $\det A = 2.3 - 1.5 = 6 - 5 = 1$.

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 5 & 3 \end{bmatrix},$$

temos que $\det A = -4.3 - 5.9 = -12 - 45 = -47$.

(iii) Se A é uma matriz de ordem 3, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

então o determinante de A é dado por

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33}+a_{12}.a_{23}.a_{31}+a_{13}.a_{21}.a_{32}-a_{13}.a_{22}.a_{31}-a_{11}.a_{23}.a_{32}-a_{12}.a_{21}.$$

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

temos que $\det A = 1.2.3+3.3.1+2.0.0-2.2.1-1.3.0-3.0.8 = 6+9+0-4-0-0 = 11$.

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

temos que $\det A = 3.1.5 + 2.3.2 + 2.1.4 - 2.1.2 - 3.3.4 - 2.1.5 = 15 + 12 + 8 - 4 - 36 - 10 = -15$.

(iv) Para definirmos o determinante de uma matriz de ordem $n > 3$, utilizaremos a noção de cofator, dada da seguinte maneira. Seja $A[a_{ij}]$ uma matriz de ordem $n \geq 2$, dado um elemento $a_{ij} \in A$ o cofator de a_{ij}, denotado por A_{ij}, é definido como sendo o número:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.D_{ij}, \tag{4.1}$$

onde D_{ij} é o determinante da matriz resultante, obtida eliminando-se à i-ésima linha e à j-ésima coluna da matriz A.

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

temos

$$A_{11} = (-1)^{1+1}.D_{11} = D_{11} = \det[3] = 3;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}.D_{12} = -1.D_{12} = -1.\det[1] = -1.1 = -1;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}.D_{21} = -1.D_{21} = -1.\det[5] = -1.5 = -5;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}.D_{22} = D_{22} = \det[2] = 2$$

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

temos que

$$A_{11} = (-1)^{1+1}.D_{11} = 1.D_{11} = 1.\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = -7;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}.D_{12} = -1.D_{12} = -1.\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 1;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}.D_{13} = 1.D_{13} = 1.\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 2;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}.D_{21} = -1.D_{21} = -1.\det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = -2;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}.D_{22} = 1.D_{22} = 1.\det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 11;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}.D_{23} = -1.D_{23} = -1.\det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 8;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}.D_{31} = 1.D_{31} = 1.\det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 4;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}.D_{32} = -1.D_{32} = -1.\det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = -7;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}.D_{33} = 1.D_{33} = 1.\det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1;$$

Assim, se A é uma matriz de ordem $n > 3$, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ & . & & ... & \\ & . & & ... & \\ & . & & ... & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{bmatrix},$$

então o determinante da matriz é dado da seguinte maneira: escolha um linha ou uma coluna qualquer da matriz A, digamos que a nossa escolha seja a primeira coluna $\{a_{11}, a_{21}, ..., a_{n1}\}$, segue que:

$$\det A = a_{11}.A_{11} + a_{21}.A_{21} + ... + a_{n1}.A_{n1} \tag{4.2}$$

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 9 & 12 \end{bmatrix},$$

escolhendo a primeira coluna para aplicar a definição de determinante, temos que

$$\det A = 0.A_{11} + 0.A_{21} + 0.A_{31} + 1.A_{44} = 1. - 15 = -15.$$

Como a noção de cofator faz sentido para todo $n \geq 2$, sugue que a partir da definição (4.2), obtemos a definição de determinante dada para matrizes de ordem 2 e 3. Assim, se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz quadrada de ordem $n > 1$, então o determinante de A é dado por (4.2).

Se uma matriz de ordem $n > 1$, tiver uma linha ou uma coluna formada apenas por zeros, então esta matriz possui determinante igual à zero.

Solução. Seja A uma matriz de ordem n, dada da seguinte maneira:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ...a_{1p-1} & 0 & a_{1p+1}... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ...a_{2p-1} & 0 & a_{2p+1}... & a_{2n} \\ & . & & ... & & & \\ & . & & ... & & & \\ & . & & ... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ...a_{np-1} & 0 & a_{np+1}... & a_{nn} \end{bmatrix},$$

escolhendo a coluna p que é formada apenas por zeros, por definição temos que

$$\det A = 0.A_{1p} + 0.A_{2p} + ... + 0.A_{np} = 0$$

A seguir enunciaremos algumas propriedades de determinantes. As demonstrações serão omitidas, o leitor interessado pode consultar a referência [1].

Proposição 4.0.1 *Se A é uma matriz de ordem n, então* $\det A = \det A^t$

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

temos que sua transposta é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Donde $\det A^t = \det A = 7$.

Proposição 4.0.2 *Seja A uma matriz de ordem n. Se λ é uma constante real, então*

$$\det \lambda.A = \lambda. \det A$$

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -4 & -4 \\ -2 & -2 & -6 \\ -4 & -8 & -10 \end{bmatrix},$$

temos que

$$\det A = \det \begin{bmatrix} -6 & -4 & -4 \\ -2 & -2 & -6 \\ -4 & -8 & -10 \end{bmatrix} = -2. \det \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} = 15.$$

Proposição 4.0.3 *Seja A uma matriz de ordem $n \geq 2$. Se trocarmos a posição de duas linhas ou de duas colunas paralelas, obtemos uma nova matriz B, tal que*

$$\det B = -\det A$$

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

trocando a primeira linha pela terceira linha, obtemos a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Segue que

$$\det B = -\det \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 52$$

Proposição 4.0.4 *Se uma matriz de ordem $n \geq 2$ tem duas linhas ou duas colunas paralelas iguais, então*

$$\det A = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} a & 3 & 2 & a \\ b & 1 & 10 & b \\ c & 4 & 12 & c \\ d & -23 & 18 & d \end{bmatrix} = 0.$$

Proposição 4.0.5 *Se uma matriz de ordem $n \geq 2$ tem duas linhas ou duas colunas paralelas, formadas por elementos respectivamente proporcionais, então*

$$\det A = 0$$

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix},$$

temos que a primeira coluna é obtida multiplicando por 6 a segunda coluna. Assim,

$$\det A = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 10 & 5 \\ 0 & 4 & 12 & 6 \\ 2 & -23 & 18 & 9 \end{bmatrix},$$

temos que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 10 & 5 \\ 0 & 4 & 12 & 6 \\ 2 & -23 & 18 & 9 \end{bmatrix} = 0.$$

A proposição a seguir é conhecida como Teorema de Binet

Proposição 4.0.6 *Se A e B são duas matrizes quadradas de ordem n, então*

$$\det(A.B) = (\det A).(\det B)$$

Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},$$

temos

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ 6 & 29 \end{bmatrix}.$$

Assim, $\det(A.B) = \det(A).\det(B) = -2.10$

Como consequência do Teorema de Binet (Proposição (4.0.6)), o corolário a seguir fornece uma maneira de calcular o determinante de matriz inversa.

Se a matriz A tem determinante não-nulo, então

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

temos que

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = -\frac{1}{2}.$$

Capítulo 5

A Hipérbole Como Produto de Matrizes

Neste capítulo faremos a interligação do conceito de matrizes com geometria. Mais precisamente, escreveremos a hipérbole através do produto de matrizes de ordem dois.

Seja um plano π com um sistema de eixos ortogonais OXY, podemos representar o plano π da seguinte maneira:

$$\pi = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : \quad x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Assim, cada ponto $P \in \pi$ será representado por uma matriz coluna, isto é

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Como a hipérbole $\mathbb{H}^1_{a,b}$ é um subconjunto do plano π, então naturalmente representaremos cada ponto P da hipérbole $\mathbb{H}^1_{a,b}$ por um vetor coluna, ou seja,

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

tal que $x^2 - y^2 = 1$.

Inicialmente apresentaremos algumas definições que serão utilizadas no decorrer deste trabalho. A primeira delas é a definição de igualdade entre conjuntos.

Definição 5.0.1 *Dizemos que dois conjuntos A e B são iguais e denotamos por $A = B$, quando simultaneamente tivermos $A \subset B$ e $B \subset A$.*

Outra definição que utilizaremos, é a de produto de dois conjuntos.

Definição 5.0.2 *Sejam A e B dois conjuntos, definimos o produto de A por B e denotamos por AB, como sendo o conjunto formado pelo produto dos elementos do conjunto A com os elementos do conjunto B. Ou seja,*

$$AB = \{ab : \quad a \in A \quad e \quad b \in B\}.$$

A partir de agora nos concentraremos em mostrar que toda hipérbole de centro na origem e eixo real paralelo ao eixo das abscissas com $a = b = 1$ pode ser escrita através do produto de matrizes. Por conveniência, denotaremos as hipérboles de centro na origem e eixo real paralelo ao eixo das abscissas com $a = b = 1$, por $\mathbb{H}^1$.

Inicialmente, apresentaremos o seguinte lema que caracteriza as matrizes que serão utilizadas ao longo do texto.

Lema 5.0.3 *Seja J uma matriz de ordem dois dada da seguinte maneira:*

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se A é uma matriz de ordem dois que satisfaz a condição: $A^t \cdot J \cdot A = J$, então ou

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix},$$

ou

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & -a \end{bmatrix}.$$

Prova
Dada uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

tal que

$$A^t \cdot J \cdot A \; = \; J,$$

temos que

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 - c^2 = 1 \\ b^2 - d^2 = -1 \qquad (**) \\ ab - cd = 0 \end{cases}$$

Resolvendo $(**)$, obtemos que $a = \pm d$ e $b = \pm c$. O que prova o Lema.

Assim, através do Lema 5.0.3 podemos apresentar, dentro do nosso contexto, a definição de matrizes hiperbólicas.

Definição 5.0.4 *Toda matriz de ordem dois dada de uma das seguintes formas* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & -a \end{bmatrix}$, *chama-se matriz hiperbólica.*

Apresentaremos o Lema a seguir, que funciona com uma recíproca para o Lema 5.0.3.

Lema 5.0.5 *Se* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *é uma matriz simétrica tal que* $\det A = 1$ *e* $ab - cd = 0$*, então a matriz A satisfaz* $A^t \cdot J \cdot A = J$*. Ou seja, A é uma matriz hiperbólica.*

Prova Segue-se diretamente através da definição de matriz simétrica.

Através do Lema 5.0.5, podemos particularizar a definição de matriz hiperbólica.

Definição 5.0.6 *Dizemos que uma matriz* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *é uma matriz simétrica hiperbólica, quando A for simétrica com* $\det A = 1$ *e* $ab - cd = 0$*. Denotaremos o conjunto das matrizes hiperbólicas por* $M_{(2)}$.

Agora temos condições de mostrar que uma hiperbóle de centro na origem pode ser obtida através do produto de matrizes hiperbólicas por um ponto sobre a hipérbole. Em particular, considerando o ponto $P_0 = (1, 0)$, obtemos que

$$\mathbb{H}^1 = M_{(2)} P_0.$$

Para isto iniciamos com o resultado a seguir, que mostra que qualquer hipérbole de centro na origem e eixo real paralelo ao eixo das abscissas com $a = b = 1$ contém o produto de $M_{(2)}$ com um ponto da hipérbole.

Proposição 5.0.7 *Sejam os conjuntos*
$M_{(2)}$ *e* $\mathbb{H}^1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 - y^2 = 1 \right\}$.
Se $P_0 \in \mathbb{H}^1$, *então* $M_{(2)} P_0 \subset \mathbb{H}^1$.

Prova
De fato, dada uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{(2)}$$

e um ponto

$$P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{H}^1.$$

Temos que

$$A \cdot P_0 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_0 + by_0 \\ cx_0 + dy_0 \end{bmatrix},$$

daí

$$\begin{aligned} (ax_0 + by_0)^2 - (cx_0 + dy_0)^2 &= (a^2x_0^2 + 2ax_0by_0 + b^2y_0^2) - (c^2x_0^2 + 2cx_0dy_0 + d^2y_0^2) \\ &= a^2x_0^2 + 2ax_0by_0 + b^2y_0^2 - c^2x_0^2 - 2cx_0dy_0 - d^2y_0^2 \\ &= x_0^2(a^2 - c^2) + y_0^2(b^2 - d^2) + 2x_0y_0(ab - cd) \qquad (*) \end{aligned}.$$

Por hipótese, temos que

$$A^t \cdot J \cdot A = J,$$

e

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad .$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 - c^2 = 1 \\ b^2 - d^2 = -1 \quad (**) \\ ab - cd = 0 \end{cases}$$

Substituindo $(**)$ em $(*)$, obtemos

$$\begin{aligned} & x_0^2 \left(a^2 - c^2\right) + y_0^2 \left(b^2 - d^2\right) + 2x_0y_0\,(ab - cd) \\ & = x_0^2 \cdot 1 + y_0^2 \cdot (-1) + 2x_0y_0 \cdot 0 \\ & = x_0^2 - y_0^2. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Temos ainda por hipótese que

$$P_0 \in \mathbb{H}^1 \Longleftrightarrow x_0^2 - y_0^2 = 1.$$

Portanto,

$$(ax_0 + by_0)^2 - (cx_0 + dy_0)^2 = 1.$$

Assim, segue que

$$A \cdot P_0 \subset \mathbb{H}^1$$

O resultado a seguir, mostra que qualquer hipérbole de centro na origem e eixo real paralelo ao eixo das abscissas com $a = b = 1$ está contida no produto de $M_{(2)}$ com um ponto $P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ da hipérbole.

Proposição 5.0.8 *Sejam os conjuntos*

$$M_{(2)} \;\; e \;\; \mathbb{H}^1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1 \right\}.$$

Se

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

então $\mathbb{H}^1 \subset M_{(2)}P_0$.

Prova. Dado um ponto $P \in \mathbb{H}^1$, mostraremos que existe uma matriz $A \in M_{(2)}$ tal que

$$A \cdot P_0 \;=\; P.$$

Dividiremos a prova em dois casos:

(I) Suponhamos que o ponto P seja dado por

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

temos que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 0 \\ c \cdot 1 + d \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Donde

$$\begin{cases} a &= 1 \\ c &= 0 \end{cases}$$

Desta forma, tomando

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

obtemos o desejado.

(II) Suponhamos que

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

seja um ponto qualquer, temos

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 0 \\ c \cdot 1 + d \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{cases} a & = & x \\ c & = & y \end{cases}$$

Como $A \in M_{(2)}$, então

$$A^t \cdot J \cdot A = J \iff \begin{bmatrix} x & y \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & b \\ y & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Temos que

$$A^t \cdot J = \begin{bmatrix} x & y \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot 1 + y \cdot 0 & x \cdot 0 + y \cdot (-1) \\ b \cdot 1 + d \cdot 0 & b \cdot 0 + d \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -y \\ b & -d \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$A^t \cdot J \cdot A = \begin{bmatrix} x & -y \\ b & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & b \\ y & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 - y^2 & x \cdot b - y \cdot d \\ b \cdot x - d \cdot y & b^2 - d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Segue por igualdade de matrizes que

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & 1 \\ bx - dy & = & 0 \\ b^2 - d^2 & = -1 \end{cases}$$

Como

$$b^2 - d^2 = -1 \Longleftrightarrow d^2 = b^2 + 1 \Longleftrightarrow d = \sqrt{b^2 + 1}$$

Substituindo em $bx - dy = 0$, temos:
$bx = dy \Longleftrightarrow bx = y\sqrt{b^2+1} \Longleftrightarrow \dfrac{bx}{y} = \sqrt{b^2+1} \Longleftrightarrow \dfrac{b^2x^2}{y^2} = b^2+1 \Longleftrightarrow b^2x^2 = y^2b^2+y^2 \Longleftrightarrow b^2x^2-y^2b^2 = y^2 \Longleftrightarrow b^2\cdot(x^2-y^2) = y^2 \Longleftrightarrow b^2 = y^2 \Longleftrightarrow b = \pm y.$
Substituindo novamente em $bx = dy$, temos:
Para $b = y$, tem-se

$$xy = dy \Longleftrightarrow d = x \quad (I)$$

Para $b = -y$, tem-se

$$-xy = dy \Longleftrightarrow d = -x \quad (II)$$

Assim obtemos que

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$$

ou

$$A = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & -x \end{bmatrix}.$$

Ambas matrizes hiperbólicas. Portanto, obtemos o desejado.

Note que no caso em que

$$P_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

a construção é análoga. Assim, segue-se

$$\mathbb{H}^1 \subset M_{(2)} \cdot P_0.$$

O resultado a seguir generaliza a Proposição anterior, mostrando que qualquer hipérbole de centro na origem e eixo real paralelo ao eixo das abscissas com $a = b = 1$ está contida no produto de $M_{(2)}$ com um ponto qualquer da hipérbole.

Proposição 5.0.9 *Sejam os conjuntos*

$$M_{(2)} \ \ e \ \ \mathbb{H}^1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1 \right\}.$$

Se $P_0 \in \mathbb{H}^1$ é um ponto qualquer, então $\mathbb{H}^1 \subset M_{(2)} P_0$.

Prova. Se o ponto P_0 é da forma

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou

$$P_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

então pela Proposição 5.0.8, obtemos o desejado.

Suponhamos que P_0 seja diferente dos casos estudados anteriormente, isto é,

$$P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

com $x_0 \neq 1$ e $x_0 \neq -1$. Dado um elemento $P \in \mathbb{H}^1$, escrito da seguinte forma

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

encontraremos uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{(2)}$$

tal que

$$A^t \cdot P_0 = P$$

De fato, temos que

$$A^t \cdot P_0 = P$$

se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} ax_0 + cy_0 \\ bx_0 + dy_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{cases} ax_0 + cy_0 = x \\ bx_0 + dy_0 = y \end{cases}$$

Donde

$$\begin{cases} a = \dfrac{x - cy_0}{x_0}^{(*)} \\ \\ b = \dfrac{y - dy_0}{x_0}^{(**)} \end{cases}$$

Por hipótese,

$$A^t \cdot J \cdot A = J,$$

daí

$$\begin{bmatrix} \dfrac{x - cy_0}{x_0} & c \\ \\ \dfrac{y - dy_0}{x_0} & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{x - cy_0}{x_0} & \dfrac{y - dy_0}{x_0} \\ \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

equivalenteme

$$\begin{bmatrix} \dfrac{x - cy_0}{x_0} & -c \\ \dfrac{y - dy_0}{x_0} & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{x - cy_0}{x_0} & \dfrac{y - dy_0}{x_0} \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Obtendo

$$\begin{bmatrix} \dfrac{(x - cy_0)^2}{x_0^2} - c^2 \;\;^{(I)} & \left(\dfrac{x - cy_0}{x_0}\right)\left(\dfrac{y - dy_0}{x_0}\right) - cd \;\;^{(II)} \\ \left(\dfrac{y - dy_0}{x_0}\right)\left(\dfrac{x - cy_0}{x_0}\right) - cd \;\;^{(III)} & \dfrac{(y - dy_0)^2}{x_0^2} - d^2 \;\;^{(IV)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

De (I), temos que

$$\begin{aligned} & \frac{(x - cy_0)^2}{x_0^2} - c^2 = 1 \\ \iff \quad & x^2 - 2xcy_0 + c^2 y_0^2 - x_0^2 c^2 = x_0^2 \\ \iff \quad & x^2 - 2xcy_0 + c^2 y_0^2 - x_0^2 c^2 - x_0^2 = 0 \\ \iff \quad & c^2 \left(y_0^2 - x_0^2\right) - c\left(2xy_0\right) + x^2 - x_0^2 = 0 \\ \iff \quad & c^2 \left(y_0^2 - x_0^2\right) + c\left(-2xy_0\right) + x^2 - x_0^2 = 0 \end{aligned}$$

O valor do discriminante Δ da equação do 2^0 grau em c, é dado por

$$\begin{aligned} \Delta &= (2xy_0)^2 - 4\left(y_0^2 - x_0^2\right)\left(x^2 - x_0^2\right) \\ &= (2xy_0)^2 + 4\left(x_0^2 - y_0^2\right)\left(x^2 - x_0^2\right) \\ &= 4x^2 y_0^2 + 4\left(x^2 - x_0^2\right) \end{aligned}$$

Resolvendo a equação de 2^0 grau em c, obtemos que

$$c = \frac{2xy_0 \pm \sqrt{4x^2y_0^2 + 4\left(x^2 - x_0^2\right)}}{2 \cdot (-1) \cdot \left(x_0^2 - y_0^2\right)}$$

$$= \frac{2xy_0 \pm 2\sqrt{x^2y_0^2 + \left(x^2 - x_0^2\right)}}{-2}$$

$$= -xy_0 \pm \sqrt{x^2y_0^2 + x^2 - x_0^2}$$

$$= -xy_0 \pm \sqrt{x^2\left(y_0^2 + 1\right) - x_0^2}$$

$$= -xy_0 \pm \sqrt{x^2\left(x_0^2\right) - x_0^2}$$

$$= -xy_0 \pm \sqrt{x_0^2\left(x^2 - 1\right)}$$

$$= -xy_0 \pm \sqrt{x_0^2y^2}$$
$$= -xy_0 \pm x_0y \qquad (V)$$

Considere $c = -xy_0 + x_0y$ e substituindo (V) em $(*)$, temos que:

$$a = \frac{x - \left(-xy_0 + x_0y\right)y_0}{x_0}$$

$$= \frac{x - \left(-xy_0^2 + x_0yy_0\right)}{x_0}$$

$$= \frac{x + xy_0^2 - x_0yy_0}{x_0}$$

$$= \frac{x\left(1 + y_0^2\right) - x_0yy_0}{x_0} \qquad .$$

$$= \frac{xx_0^2 - x_0yy_0}{x_0}$$

$$= \frac{x_0\left(xx_0 - yy_0\right)}{x_0}$$

$$= xx_0 - yy_0$$

Por (II), temos que:

$$\left(\frac{x - cy_0}{x_0}\right)\left(\frac{y - dy_0}{x_0}\right) - cd = 0$$

$$\iff \left(\frac{xy - dxy_0 - cy_0y + cdy_0^2}{x_0^2}\right) - cd = 0$$

$$xy - dxy_0 - cy_0y + cdy_0^2 - cdx_0^2 = 0$$

$$\iff xy - dxy_0 - cy_0y + cd\left(y_0^2 - x_0^2\right) = 0$$

$$\iff xy - dxy_0 - cy_0y - cd\left(x_0^2 - y_0^2\right) = 0$$

$$\iff xy - dxy_0 - cy_0y - cd = 0$$

$$\iff -dxy_0 - cd = cy_0y - xy$$

$$\iff dxy_0 + cd = -cy_0y + xy$$

$$\iff d\left(xy_0 + c\right) = -cy_0y + xy$$

$$\iff d = \frac{-cy_0y + xy}{c + xy_0}$$

Melhorando a expressão para d, por (V), temos:

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{-\left(-xy_0 + x_0y\right)yy_0 + xy}{\left(-xy_0 + x_0y\right) + xy_0} \\
&= \frac{\left(xy_0 - x_0y\right)yy_0 + xy}{xy_0} \\
&= \frac{xyy_0^2 - x_0y_0y^2 + xy}{x_0y} \\
&= \frac{xy\left(y_0^2 + 1\right) - x_0y_0y^2}{x_0y} \\
&= \frac{xyx_0^2 - x_0y_0y^2}{x_0y} \\
&= \frac{x_0y\left(xx_0 - yy_0\right)}{x_0y} \\
&= xx_0 - yy_0 \quad (VI)
\end{aligned}
$$

Substituindo (VI) em $(**)$, temos que:

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{y - \left(xx_0 - yy_0\right)y_0}{x_0} \\
&= \frac{y - \left(xx_0y_0 - yy_0^2\right)}{x_0} \\
&= \frac{y - xx_0y_0 + yy_0^2}{x_0} \\
&= \frac{y\left(1 + y_0^2\right) - xx_0y_0}{x_0} \\
&= \frac{yx_0^2 - xx_0y_0}{x_0} \\
&= \frac{x_0\left(yx_0 - xy_0\right)}{x_0}
\end{aligned}
$$

Logo

$$b = yx_0 - xy_0$$

Assim

$$A = \begin{bmatrix} xx_0 - yy_0 & yx_0 - xy_0 \\ \\ -xy_0 + x_0y & xx_0 - yy_0 \end{bmatrix}.$$

Note que

$$A^t \cdot J \cdot A \ = \ \begin{bmatrix} xx_0 - yy_0 & -xy_0 + x_0y \\ \\ yx_0 - xy_0 & xx_0 - yy_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xx_0 - yy_0 & yx_0 - xy_0 \\ \\ -xy_0 + x_0y & xx_0 - yy_0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow A^t \cdot J \cdot A = \begin{bmatrix} xx_0 - yy_0 & xy_0 - x_0y \\ \\ yx_0 - xy_0 & -xx_0 + yy_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xx_0 - yy_0 & yx_0 - xy_0 \\ \\ -xy_0 + x_0y & xx_0 - yy_0 \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned}
a_{11} &= (xx_0 - yy_0)^2 + (xy_0 - x_0y)(-xy_0 + x_0y) \\
&= x^2x_0^2 - 2xx_0yy_0 + y^2y_0^2 + (-x^2y_0^2 + xx_0yy_0 + x^2y_0^2 + xx_0yy_0 - x_0^2y^2) \\
&= x^2x_0^2 + y^2y_0^2 - x^2y_0^2 - x_0^2y^2 \\
&= x^2(x_0^2 - y_0^2) + y^2(y_0^2 - x_0^2) \\
&= x^2(x_0^2 - y_0^2) - y^2(x_0^2 - y_0^2) \\
&= x^2 - y^2 \\
&= 1 \\
a_{12} &= (xx_0 - yy_0)(yx_0 - xy_0) + (xy_0 - x_0y)(xx_0 - yy_0) \\
&= xyx_0^2 - x^2x_0y_0 - y^2y_0x_0 + xyy_0^2 + x^2x_0y_0 - xyy_0^2 - xyx_0^2 + x_0y_0y^2 \\
&= 0 \\
a_{21} &= (yx_0 - xy_0)(xx_0 - yy_0) + (-xx_0 + yy_0)(-xy_0 + x_0y) \\
&= yxx_0^2 - y_0x_0y^2 - y_0x_0x^2 + xyy_0^2 + x_0y_0x^2 - yxx_0^2 - yxy_0^2 + y_0x_0y^2 \\
&= 0 \\
a_{22} &= (yx_0 - xy_0)^2 + (-xx_0 + yy_0)(xx_0 - yy_0) \\
&= (yx_0 - xy_0)^2 - (xx_0 - yy_0)(xx_0 - yy_0) \\
&= (yx_0 - xy_0)^2 - (xx_0 - yy_0)^2 \\
&= y^2x_0^2 - 2yxy_0x_0 + x^2y_0^2 - (x^2x_0^2 - 2xx_0yy_0 + y^2y_0^2) \\
&= y^2x_0^2 - 2yxy_0x_0 + x^2y_0^2 - x^2x_0^2 + 2xx_0yy_0 - y^2y_0^2 \\
&= y^2(x_0^2 - y_0^2) - x^2(x_0^2 - y_0^2) \\
&= -1
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$A^t \cdot J \cdot A = J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Por fim, temos que

$$\begin{aligned} A^t \cdot P_0 &= \begin{bmatrix} xx_0 - yy_0 & -xy_0 + x_0 y \\ \\ yx_0 - xy_0 & xx_0 - yy_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (xx_0 - yy_0)\, x_0 + (-xy_0 + x_0 y)\, y_0 \\ \\ (yx_0 - xy_0)\, x_0 + (xx_0 + yy_0)\, y_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} xx_0^2 - yy_0x_0 - xy_0^2 + yy_0x_0 \\ \\ yx_0^2 - y_0x_0x + y_0x_0x - yy_0^2 \end{bmatrix} \qquad . \\ &= \begin{bmatrix} x\,(x_0^2 - y_0^2) \\ \\ y\,(x_0^2 - y_0^2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x \\ \\ y \end{bmatrix} \\ &= P \end{aligned}$$

Assim, todas as condições são satisfeitas, pois $A \in M_{(2)}, P_0$ e $P \in H^1_{a,b}$ e

$$A^t \cdot P_0 = P \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} xx_0 - yy_0 & -xy_0 + x_0 y \\ \\ yx_0 - xy_0 & xx_0 - yy_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \\ y \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\mathbb{H}^1 \subset M_{(2)} \cdot P_0.$$

Finalmente, mostraremos que o produto do conjunto $M_{(2)}$ com um ponto qualquer da hipérbole com centro na origem e eixo real sobre o eixo x, com $a = b = 1$ é a própria hipérbole.

Teorema 5.0.10 *Sejam os conjuntos*

$$M_{(2)} \quad e \quad \mathbb{H}^1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1 \right\}.$$

Se $P_0 \in \mathbb{H}^1$ é um ponto qualquer, então $\mathbb{H}^1 = M_{(2)}P_0$.

Prova Pela Proposição 5.0.7, temos que

$$M_2P_0 \subset \mathbb{H}^1.$$

Pelas Proposições 5.0.8 e 5.0.9, temos que

$$\mathbb{H}^1 \subset M_2P_0.$$

Logo, por definição, segue que

$$\mathbb{H}^1 = M_{(2)}P_0.$$

Portanto, se $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{H}^1$, concluímos que a hiperbóle $\mathbb{H}^1$ é dada da seguinte maneira:

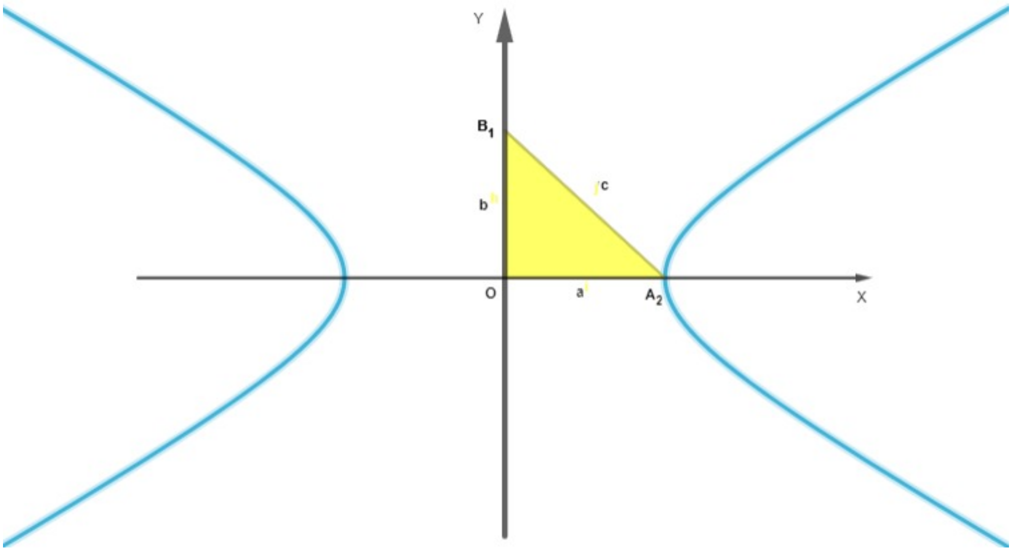
$$\mathbb{H}^1 = \left\{ \begin{bmatrix} xx_0 - yy_0 & yx_0 - xy_0 \\ \\ x_0y - xy_0 & xx_0 - yy_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} : \det \begin{bmatrix} xx_0 - yy_0 & yx_0 - xy_0 \\ \\ x_0y - xy_0 & xx_0 - yy_0 \end{bmatrix} = 1 \right\}. \quad (5.2)$$

Em particular, a hiberbóle $\mathbb{H}^1$ é dada de modo elegante através do produto de matrizes:

$$\mathbb{H}^1 = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ \\ y & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} : \det \begin{bmatrix} x & y \\ \\ y & x \end{bmatrix} = 1 \right\}. \quad (5.3)$$

Assim, conseguimos fornecer uma representação para a figura sobre o plano cartesiano, ilustra na Figura (5.1) , através do produto de matrizes dados por meio das expressões (5.2) e (5.3).

Figura 5.1: Hiperbóle por meio do produto de matrizes



Fonte: Elaborada pelos autores

Capítulo 6

Aplicações

Previsão de mercado é a projeção do nível do mercado no futuro, baseado na evolução presente ou passada. As previsões de vendas são fundamentais para avaliar o nível de mercado futuro, tomando como indicador o volume de vendas de uma dada companhia.

Dentre os objetivos da previsão de mercado, destacamos: estimar vendas futuras através dos dados de vendas do passado; produzir decisões de mercado prevendo a evolução futura do mercado. Existem alguns métodos para alcançar estas previsões, por exemplo: analogia, teste de conjecturas, cadeia de Markov, dentre outros.

Neste trabalho utilizaremos o método da cadeia de Markov para estudar as previsões de mercado. Mais precisamente, aplicaremos os resultados obtidos nos capítulos anteriores para estudar a projeção de mercado. A teoria sobre a cadeia de Markov já é bastante estudada, existem vários trabalhos na literatura, como por exemplo [9] e [12]. Neste trabalho propomos uma abordagem diferente para a teoria sobre cadeia de Markov. Não faz parte deste trabalho fazer uma apresentação rigorosa sobre a cadeia de Markov, para mais detalhes você pode consultar [9], [12] e [15].

Uma cadeia de Markov é definida basicamente por dois tipos de matrizes, que são a matriz de estado estacionário e pela matriz probabilidade de transição P.

A matriz de estado estacionário, é uma matriz linha formada por elementos não negativos tal que a soma dos seus elementos é igual a um. A matriz de estado estacionário representa fenômenos que serão analisados em algum ponto, baseado na data real. Por sua vez, os elementos da matriz probabilidade de transição são estimandos, em prática, de acordo com as pesquisas de mercado a respeito do consumo. A matriz probabilidade de transição, também pode ser chamada de matriz de transição.

A matriz de transição, é uma matriz quadrada formada por elementos não negativos tais que a soma dos elementos de cada linha é igual a um. Trazendo para o nosso contexto, uma matriz de transição é uma matriz de ordem dois formada por elementos não negativos tais que a soma dos elementos de cada linha é igual a um.

Por sua vez, uma matriz de estado estacionário é uma matriz com uma linha e duas colunas, formada por elementos não negativos tais que a soma dos seus elementos é igual a um.

Considerando p_{ij} a probabilidade de transição da marca (do estado) i para a marca (o estado) j, obtemos que a matriz de probabilidade de transição é dada por

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}.$$

Além disso, se a_i^k representa a probabilidade de ocorrer um evento em favor do estado i, no intervalo de tempo k, então a matriz de estado estacionário para o tempo k é dada por

$$v^k = \begin{bmatrix} a_1^k & a_2^k \end{bmatrix}.$$

Portanto, Markov garante que

$$v^{k-1} \cdot P = v^k. \tag{6.1}$$

Ou seja,

$$\begin{bmatrix} a_1^{k-1} & a_2^{k-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^k & a_2^k \end{bmatrix}. \tag{6.2}$$

Equivalente, trazendo para o nosso contexto

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1^{k-1} \\ a_2^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^k \\ a_2^k \end{bmatrix}. \tag{6.3}$$

Como colocado no inicio desta seção, faremos uma abordagem diferente para a aplicação da teoria da Cadeia de Markov. Na literatura, existem vários trabalhos onde os autores encontram a matriz de estacionária futura, conhecendo-se a matriz probabilidade de transição. Neste trabalho, encontraremos a matriz probabilidade conhecendo-se as matrizes de estado presente e futuro.

Exemplo Uma grande rede de supermercados, chamada Super A, atualmente atende uma população de 100.000 habitantes em uma região de Teresina formada por 6 bairros. Outra grande rede de supermercados, chamada Super B, pretendem se instalar no segundo semestre deste ano na mesma região para disputar uma fatia desta clientela. A rede de supermercado Super B, levando em conta o crescimento populacional, apontado pelo Censo IBGE 2022, de $6,5\%$ ao ano pretende ao final do segundo semestre deste ano conquistar 3.000 clientes desta região. Para atingir este objetivo a equipe de Marketing deve atuar e encontrar o percentual de clientes com perfil de mudança para a nova loja, além de entender o perfil do cliente que eles terão que fidelizar. Admitindo que você faça parte da equipe de Marketing, determine o percentual de clientes que a Super B deve fidelizar, o percentual de clientes que a Super A mantém fiel e o percentual de clientes que a Super A pode perder para a Super B, neste período de tempo. Em seguida, determine a quantidade de clientes que a Super B conseguirá fidelizar após um ano de instalação.

Solução.

Como no primeiro semestre a Super A detinha o monopólio da clientela, então neste intervalo de tempo a matriz de estado estacionário é dada por

$$v^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde o número 1 representa 100 por cento da clientela para Super A e 0 representa nenhum cliente para Super B. Ao final do segundo semestre os analistas projetaram a matriz de estado estacionário por

$$v^1 = \begin{bmatrix} 0,971 \\ 0,029 \end{bmatrix},$$

onde o número 0,971 representa 97,1 por cento da clientela para Super A e 0,029 representa 2,9 por cento de clientes para Super B.

Em termos de valores absolutos, dividos por 100.000, obtemos

$$v^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde o número 1 representa 100.000 clientes atendidos pela rede Super A e 0 representa nenhum cliente para Super B. Ao final do segundo semestre os analistas projetaram a matriz com os valores dados por

$$v^1 = \begin{bmatrix} 1,0004 \\ 0,03 \end{bmatrix},$$

onde o número 1,0004 representa 100.040 clientes atendidos pela rede Super A e 0,03 representa 3.000 clientes atendidos pela rede Super B. Considerando as matrizes com valores absolutos dada acima, obtemos que v^0 e v^1 são valores sobre a hiperbóle. Pelo Teorema 5.0.10, segue que existe uma matriz hiperbólica P, dada da seguinte maneira:

$$P^t = \begin{bmatrix} 1,0004 & 0,03 \\ 0,03 & 1,0004 \end{bmatrix},$$

tal que $P^t \cdot v^0 = v^1$.

Em termos percentuais, obtemos que a matriz probabilidade de transição é dada por

$$P^t = \begin{bmatrix} 0,971 & 0,029 \\ 0,029 & 0,971 \end{bmatrix}.$$

Donde por Markov, $p_{11} = 0,971$ representa o percentual de clientes fidelizados pela rede Super A, neste semetre; $p_{12} = 0,029$ representa o percentual de clientes que estão dispostos em mudarem para Super B.

Utilizando a matriz de P com valores absolutos, obtemos que ao primeiro aniversário da rede Super B, tem-se os valores referentes ao número de clientes v^2 sobre a hiperbóle com valores absolutos dados por:

$$v^2 = \begin{bmatrix} 1,0004 & 0,029 \\ 0,029 & 1,0004 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,0004 \\ 0,029 \end{bmatrix}.$$

Ou seja ,

$$v^2 = \begin{bmatrix} 1,0017 \\ 0,06 \end{bmatrix}.$$

Isto é, multiplicando por 100.000

$$v^2 = \begin{bmatrix} 100.170 \\ 6.000 \end{bmatrix}.$$

Portanto, completado o primeiro ano de aniversário a rede Super B já tem conquistado 6.000 clientes.

Apresentaremos outro exemplo, para isto, generalizaremos a idéia aplicada no exemplo anterior. Generalizando, se p_{ij} representa a probabilidade de transição da marca (do estado) i para a marca (o estado) j, então a matriz de probabilidade de transição, também é dada por uma matriz de ordem 3 da seguinte maneira:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}.$$

Além disso, se a_i^k representa a probabilidade de ocorrer um evento em favor do estado i, no intervalo de tempo k, então a matriz de estado estacionário para o tempo k é dada por

$$v^k = \begin{bmatrix} a_1^k & a_2^k & a_3^k \end{bmatrix}.$$

Portanto, Markov garante que

$$v^{k-1} \cdot P = v^k. \tag{6.4}$$

Ou seja,

$$\begin{bmatrix} a_1^{k-1} & a_2^{k-1} & a_3^{k-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^k & a_2^k & a_3^k \end{bmatrix}. \tag{6.5}$$

Equivalente, trazendo para o nosso contexto

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1^{k-1} \\ a_2^{k-1} \\ a_3^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^k \\ a_2^k \\ a_3^k \end{bmatrix}. \tag{6.6}$$

Exemplo Uma grande rede de supermercados, chamada Supe A, atende uma população de 185.000 habitantes em uma região de Teresina formada por 6 bairros. Duas grandes redes de supermercados, chamadas Super B e Super C, pretendem se instalarem no segundo semestre deste ano na mesma região para disputarem uma fatia desta clientela. A rede de supermercado Super A, levando em consideração a taxa de crescimento populacional, dada pelo o Censo IBGE 2022, que é de $6,5\%$ fez um estudo e concluiu que ao final do ano a mesma possui um total de 110.000 clientes fidelizados com a rede. O que representa $55,83\%$ dos clientes. O estudo da super A ainda prevê que a rede super B irá até o final do ano conquistar 45.825,75 clientes, o que representa $23,26\%$ do total de clientes. Logo, a rede Super C irá conquistar apenas 41.197,925 clientes, o que corresponde $20,91\%$ do total de clientes.

Continuando, o estudo da Super A aponta que ao final de um ano de instalação das concorrentes, a rede Super A irá deter 120.000 clientes, o que corresponde a $62,8\%$ do total de clientes. Além disso, ao final de um ano a rede Super B contará com uma parcela de 66.332 clientes, o que corresponde a $34,72\%$ do total de clientes. Por fim a rede Super C ao final do primeiro ano, terá 4.737,11 clientes, o que corresponde $2,48\%$ do total de clientes. A equipe de Marketing, decidirá se a estratégia adotada no primeiro ano de funcionamento das concorrentes será adotada para os anos seguintes ou terá que adotar uma nova estratégia, para isto, é de fundamental importância o conhecimento da matriz de probabilidade de transição. Determine a situação das três redes após 18 meses de funcionamento das três simultaneamente.

Solução.

Inicialmente consideramos os dados em formato percentuais, obtemos as matrizes

$$v^1 = \begin{bmatrix} 0,5583 \\ 0,2326 \\ 0,2091 \end{bmatrix},$$

onde o número 0,5583 representa o percentual de clientes para Super A, e 0,2326 representa o percentual de clientes para Super B e 0,2091 representa o percentual de clientes para a Super C, ambos para o segundo semestre de instalação das redes. Por sua vez,

$$v^2 = \begin{bmatrix} 0,628 \\ 0,3472 \\ 0,0248 \end{bmatrix},$$

onde o número 0,628 representa o percentual de clientes para Super A, e 0,3472 representa o percentual de clientes para Super B e 0,0248 representa o percentual de clientes para a Super C, ambos para o primeiro semestre de instalação das redes.

Considerando os dados de v^1 e v^2 em termos absolutos dividos por 100.000, obtemos:

$$v^1 = \begin{bmatrix} 1,1 \\ 0,4582 \\ 0,4119 \end{bmatrix},$$

onde o número 1,1 representa 110.000 clientes para Super A, e 0,4582 representa 45.825,75 clientes para Super B e 0,4119 representa 41.197,9275 clientes para a Super C, ambos para o segundo semestre de instalação das redes.
Por sua vez,

$$v^2 = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 0,66 \\ 0,047 \end{bmatrix},$$

onde o número 1,2 representa 120.000 clientes para Super A, e 0,66 representa 66.000 clientes para Super B e 0,047 representa 4.737,11 clientes para a Super C, ambos para o primeiro semestre de instalação das redes.

Note que por v^1 e v^2 podemos obter as matrizes

$$u^1 = \begin{bmatrix} 1,1 \\ 0,4582 \end{bmatrix},$$

$$u^2 = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 0,66 \end{bmatrix},$$

ambas pertencentes a hiperbóle. Pelo Teorema 5.0.10, existe uma matriz A dada por

$$A^t = \begin{bmatrix} 1,017 & 0,1761 \\ 0,1761 & 1,017 \end{bmatrix},$$

tal que $A^t \cdot u^1 = u^2$. Multiplicando cada valor da matriz A por 100.000, obtemos em termos percentuais a matriz A dada da seguinte maneira:

$$A^t = \begin{bmatrix} 0,516 & 0,0893 \\ 0,0893 & 0,516 \end{bmatrix},$$

donde a matriz P é dada por:

$$P^t = \begin{bmatrix} 0,52 & 0,081 & 0,399 \\ 0,081 & 0,52 & 0,399 \\ 0,399 & 0,399 & 0,202 \end{bmatrix}.$$

Utilizando a matriz de probabilidade de transição, obtemos que ao final do terceiro semestre, a situação é projetada da seguinte maneira:

$$v^3 = \begin{bmatrix} 0,52 & 0,081 & 0,399 \\ 0,081 & 0,52 & 0,399 \\ 0,399 & 0,399 & 0,202 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,628 \\ 0,3472 \\ 0,0248 \end{bmatrix}.$$

Ou seja ,

$$v^3 = \begin{bmatrix} 0,3645 \\ 0,2413 \\ 0,3941 \end{bmatrix}.$$

Isto é, com três semestres de funcionamento a Super A detém apenas $36,45\%$ dos clientes sendo superada pela rede Super C, com $39,41\%$ da parcela de clientes. Assim, a rede Super A será obrigada a mudar sua estratégia.

Capítulo 7

Considerações Finais

O presente trabalho proporciona uma análise aprofundada das transformações nas relações sociais e nos ambientes educacionais, enfatizando a crescente necessidade de a escola se transformar em um espaço de convivência e conhecimento, promovendo o aprendizado com qualidade e equidade. A reflexão sobre a escola como agente transformador é crucial, especialmente ao considerar a influência dos avanços tecnológicos e das mudanças comportamentais nas famílias.

A abordagem crítica em relação ao ensino de matemática destaca a importância de superar desafios tradicionais, como a percepção equivocada dessa disciplina como algo inacessível. A crítica à entrega de fórmulas sem um contexto explicativo apropriado ressalta a necessidade de iluminar o raciocínio por trás dos conceitos matemáticos, visando tornar a matéria mais acessível e motivadora para os alunos.

A proposta de interdisciplinaridade, especialmente no estudo das matrizes e sua relação com a geometria e situações da vida real, destaca a importância de conectar diferentes áreas do conhecimento. A análise histórica do conceito de matrizes, desde sua utilização na antiga China até as contribuições de matemáticos notáveis, enriquece o entendimento do leitor sobre a evolução desse conteúdo.

O foco no estudo da hipérbole e sua interligação com as matrizes é inovador e promissor. A proposta de apresentar a hipérbole de centro na origem e eixo real paralelo ao eixo das abscissas como produto de matrizes oferece uma perspectiva única, aproximando conceitos muitas vezes trabalhados de forma isolada.

Ao explorar a conexão entre a hipérbole e as matrizes, o trabalho contribui significativamente para a compreensão mais aprofundada desses conceitos. A proposta de demonstrar que é sempre possível encontrar uma matriz hiperbólica que transforme dois pontos em uma hipérbole específica é intrigante e abre caminho para futuras investigações e aplicações práticas.

Em resumo, a dissertação oferece uma análise perspicaz das transformações educacionais e sociais, destacando a importância de uma abordagem inovadora no ensino de matemática. Especial ênfase é dada à interdisciplinaridade entre as matrizes e a geometria, culminando na fascinante relação entre a hipérbole e as matrizes. Este trabalho representa uma contribuição positiva para o campo educacional e matemático, sublinhando a necessidade de repensar métodos tradicionais e promover uma abordagem mais integrada e motivadora no processo-aprendizado.

Referências Bibliográficas

[1] AGUIAR, Gerson Bruno Pinto de . A circunferência Escrita Como Soma e Produto de matrizes: uma nova abordagemdo ensino de matrizes ensino médio. Dissertação de mestrado. Orientador: Cleidinaldo Aguiar Souza. UFPI. 2021.

[2] AGUIAR, Gerson Bruno Pinto de; SOUZA, Cleidinaldo Aguiar. Representação da circunferência como o produto e soma de matrizes. Revista piauiense de matemática. 2022.

[3] AGUIAR, Gerson Bruno Pinto de; SOUZA, Cleidinaldo Aguiar. *Pragmatismo matemátic: matrizes* Edufpi. 2023.

[4] BRASIL ESCOLA - UOL. Disponível em: https://images.app.goo.gl/ZhE9R3gsNCHc4Fe17. Acesso em 22 de janeiro de 2024, 15:35:00.

[5] BUCCHI, Paulo. Curso prático de matemática. 3º. Ed. São Paulo: Editora Moderna, 1998

[6] COSTA, Bruno Feldman da. A Importância do Saber Matemático na Vida das Pessoas. Porto Alegre, 2010.

[7] D'AMBROSIO, Beatriz S. Como Ensinar Matemática Hoje? 2010.

[8] DELGADO, Jorge; FRENSEL, Kátia; CRISSAFF, Lhaylla.: Geometria Analítica. Rio de Janeiro, SBM, 2017.

[9] GUAZZELLI, Milo Ricardo. Teoria e prática sobre as cadeias de Markov. Revista Ambiente, v. 7, n. 1, p. 45-51, 1993.

[10] IEZZI, Gerson; MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 04. São Paulo, ed. Atual, 1993.

[11] LIMA, Elon, Lages.; et al. A Matemática do Ensino Médio, vol. 01 e 03. Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[12] NORRIS, James R. Markov chains. Cambridge university press, 1998.

[13] OLIVEIRA, Marina França. A circunferência de centro na origem como produto de matrizes. Dissertação de mestrado. Orientador: Cleidinaldo Aguiar Souza. UFPI. 2019.

[14] OLIVEIRA, Marina França; SOUZA, Cleidinaldo Aguiar. A circunferência de centro na origem como produto de matrizes. Revista do professor de matemática. 2020.

[15] RODRIGUES, Welton Carlos. Cadeias de Markov: Uma aula para alunos do ensino médio. 2013.