UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Uso das Equações Diofantinas Lineares no Ensino Fundamental

Adriano Valeriano da Silva

Instituto de Matemática

Maceió
2013

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ADRIANO VALERIANO DA SILVA

USO DAS EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES NO ENSINO FUNDAMENTAL

Maceió – AL
2013

ADRIANO VALERIANO DA SILVA

USO DAS EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pelo Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Augusto Bronzi

Maceió – AL

2013

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

S586u Silva, Adriano Valeriano da.
Uso das equações diofantinas lineares no ensino fundamental / Adriano Valeriano da Silva. – 2013.
74 f.

Orientador: Marcus Augusto Bronzi.
Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2013.

Bibliografia: f. 65-66.
Apêndices: f. 67-73.
Anexo: f. 68.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Equações diofantinas lineares. 3. Resolução de problemas. 4. Sequência de atividades. 5. Ensino fundamental. I. Título.

CDU: 511.5

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Adriano Valeriano da Silva

USO DAS EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pelo Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Marcus Augusto Bronzi

Prof. Dr. Marcus Augusto Bronzi (IM/UFAL – Orientador)

Gregorio Manoel da Silva Neto

Prof. Msc. Gregorio Manoel da Silva Neto (IM/UFAL)

Kleyber Mota da Cunha

Prof. Dr. Kleyber Mota da Cunha (UFBA)

Maceió – AL, 12 de Abril de 2013

Dedico à minha estimada esposa Marleide e, ao meu corajoso filho Isaac.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente, a DEUS por está possibilitando mais uma conquista.

À minha família pelo apoio e incentivo.

Aos professores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas, por todo conhecimento adquirido e apoio, no período do mestrado.

Aos meus colegas de mestrado, pelos momentos agradáveis de estudo, pela ajuda quando solicitada, pelas caronas, em fim, pelo incentivo para vencer esta jornada de estudo.

Ao orientador Prof. Dr. Marcus Augusto Bronzi, primeiro por aceitar a orientação deste trabalho, e por sua sabedoria e paciência nesta orientação.

Ao Prof. Dr. Kleyber Mota da Cunha e ao Prof. Msc. Gregório Manoel da Silva Neto por participar da Banca Examinadora, pelos comentários e sugestões, contribuindo para a evolução do trabalho.

Aos meninos do apartartamento, pela acolhida, apoio e amizade.

À José Elenilson e Samuel Rocha por algumas dicas para o texto, especialmente, à Williams, Josefa Denize e Osvaldo por ajudarem na formatação e correções.

À toda equipe da Escola Municipal de Educação Básica José de Sena Filho pelo apoio e torcida, especialmente, à Josué e Erasmo.

À Maria das Neves Higino, secretaria municipal de educação na época, pela compreensão e ajuda.

Ao apoio financeiro da CAPES, fundamental para vencer alguns obstáculos.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), pelo excelente projeto que é o PROFMAT.

Em fim, agradeço a todos aqueles que contribuíram diretamente ou indiretamente para vencer mais essa jornada de estudo.

“Aquele que tentou e não conseguiu é superior àquele que nada tentou.”(Arquimedes)

RESUMO

No presente trabalho focamos principalmente uma melhor compreensão das Equações Diofantinas Lineares (EDL), por meio da resolução de problemas. Para isto, especificamos os conceitos básicos que se fazem necessários para seu desenvolvimento, assim como, seus principais resultados, baseando-se em livros, textos e pesquisas já realizadas, que tratam do referido assunto. Ao mesmo tempo, que descreveremos uma sequência de atividades relacionadas, direcionadas para serem trabalhadas com alunos da Educação Básica. Tendo em vista que a Teoria Elementar dos Números vem sendo tratada por vários pesquisadores, como meio favorável para o desenvolvimento de habilidades na resolução de problemas e do raciocínio dos alunos na compreensão da Matemática estudada no Ensino Fundamental e Ensino Médio, objetivamos fornecer um material didático para professores ou futuros professores de matemática da Educação Básica, como fonte de consulta e de apoio sobre as EDL; além de fornecer uma sequência de atividades que poderá ser aplicada em suas aulas no Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Equações Diofantinas Lineares; Resolução de Problemas; Sequência de Atividades; Ensino Fundamental.

ABSTRACT

In this paper we focus mainly a better understanding of Linear Diophantine Equations (LDE), through problem solving. For this, we specify the basic concepts that are necessary for its development, as well as its main results, based on books, texts and previous studies, dealing with the said issue. At the same time, we will describe a sequence of related activities, directed to be worked with students of Basic Education. Given that the Elementary Theory of Numbers has been treated by many researchers as a means conducive to the development of skills in problem solving and reasoning of students in understanding the mathematics studied in elementary school and high school, we aim to provide educational material for teachers or future teachers of mathematics of Basic Education, as a source of consultation and support on the LDE, and provides a sequence of activities that can be implemented in their classes in elementary school.

Keywords: Linear Diophantine Equations; Problem solving; Sequence of activities; Elementary School.

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

- EDL - Equações Diofantinas Lineares.
- ENC - Exame Nacional de Cursos.
- mdc - Máximo divisor comum.
- mmc - Mínimo múltiplo comum.
- OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.
- OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática.
- PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais.

SUMÁRIO

As equações diofantinas lineares não são um assunto abordado na Educação Básica. Porém, desde o Ensino Fundamental estudamos equações lineares com duas variáveis e sistemas de equações com duas variáveis, em que buscamos, geralmente, soluções racionais ou reais, ou seja, não restringimos estas soluções ao conjunto dos números naturais. Por exemplo, o professor solicita do aluno, com base no livro didático, para encontrar três soluções para a equação $3x+y=10$, neste o aluno atribui três valores reais ou racionais para uma variável e encontrará três valores correspondentes para outra variável. Notemos que nesta situação, a obtenção da solução de uma equação com duas variáveis torna-se um exercício repetitivo.

Agora, o exercício ficaria mais atraente se solicitasse aos alunos, todas as soluções naturais da equação $3x+y=10$. Ou melhor, em propor que eles solucionem uma situação-problema semelhante a esta: *Marleide desejava comprar uma bicicleta que custava R$180,00 para isso, foi incentivada por seus pais, a guardar moedas de 50 centavos e de 1 real em um "porquinho". Quais as possíveis quantidades de moedas de cada tipo, que ela deverá poupar, para conseguir seu objetivo?* Note que este problema pode ser modelado por uma equação linear com duas variáveis. Ambos os casos citados requerem a busca de soluções no conjunto dos números naturais, onde acreditamos que esta busca seja muito mais interessante e desafiadora para o aluno do que a referida anteriormente. Da mesma forma poderíamos citar outros exemplos atraentes, envolvendo situações-problema que recaem em sistemas de equações lineares, onde requerem soluções inteiras não negativas. Ao fazer isto, já estamos trabalhando com equações diofantinas lineares (EDL).

Queremos aqui, chamar a atenção dos professores ou futuros professores de matemática da Educação Básica que este assunto pode ser trabalhado desde o Ensino Fundamental de forma introdutória, aprofundado um pouco mais no Ensino Médio, sendo feito um estudo com maior rigor no Ensino Superior. Estamos de acordo com Sérgio de Assis [15], quando se refere ao tema das EDL ressalta:

> (...) esse tema pode ser trabalhado no Ensino Fundamental de uma forma introdutória, através do método de tentativas, com melhor exploração no ensino médio com a utilização das progressões aritméticas e sistemas lineares. Enfim, ser trabalhado de uma maneira mais rigorosa e formal na educação superior. (Oliveira, 2010, p. 11).

O estudo das equações diofantinas geralmente é feito na graduação em matemática em disciplinas referentes à Teoria dos Números, sendo importante a compreensão deste e de outros assuntos desta área, por se fazer presente de forma implícita ou explicita no currículo de matemática dos Ensinos Fundamental e Médio. E de acordo com Resende [18], em sua tese, na qual procura compreender a Teoria dos Números enquanto saber a ensinar, sugerindo um núcleo de tópicos essenciais de Teoria Elementar dos Números, constituídos pelos seguintes temas:

> **Números Inteiros**: evolução histórica e epistemológica do conceito de números naturais e inteiros; representações dos números naturais; operações, algoritmos e propriedades; definição por recorrência (potências em N, seqüências, progressões aritméticas e geométricas), princípio da boa ordem e princípio da indução finita. **Divisibilidade**: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, critérios de divisibilidade, o Teorema Fundamental da Aritmética. **Introdução à congruência módulo m**: definição, propriedades, algumas aplicações.**Equações diofantinas lineares** (Resende, 2007, p. 228, grifo da autora).

Nesse sentido, Silvio Barbosa [14], ao analisar a dissertação de Rama (2005) conclui que são evidentes os conceitos chave de Teoria Elementar dos Números que estão presentes nos livros didáticos do Ensino Fundamental, como a divisibilidade. "Isso quer dizer que os conhecimentos necessários ao das equações diofantinas lineares estão disponíveis aos alunos nos livros didáticos do Ensino Básico"(Oliveira, 2006, p.23).

Além disso, situação-problema como a que foi citada e outras do nosso cotidiano que envolve a Teoria Elementar dos Números, podem ser modeladas e resolvidas por meio das EDL, com aplicações interessantes e práticas para uso em sala de aula desde o Ensino Fundamental. E segundo Brasil [2], um dos princípios que a resolução de problemas, como eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, é o seguinte:

> A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e método matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las. (Brasil, 2001, p. 40).

Apesar de tudo, de acordo com Costa [4], que realizou sua pesquisa com 6 professores de matemática de escolas públicas e privadas da Educação Básica, na qual investigou se e como professores de matemática do Ensino Médio trabalham com seus alunos situações-problema que recaem em equações diofantinas lineares. Ele concluiu que, embora os professores afirmassem trabalhar com seus alunos problemas modeláveis via equações diofantinas lineares, nenhum deles deu indícios de trabalhar com seus alunos utilizando conhecimento dessas equações. Além disso, nenhum deles acionou recursos da Teoria Elementar dos Números na resolução dos problemas propostos que recaíam em equações diofantinas lineares com duas incógnitas.

O presente trabalho foi organizado em duas partes. Na primeira, foi feito um estudo em torno dos conceitos que envolvem equações diofantinas lineares (EDL); e na segunda, foi descrito uma sequência de atividades didáticas envolvendo equações diofantinas lineares, para serem usadas no Ensino Fundamental.

Para o desenvolvimento destas duas partes, foi realizada uma pesquisa bibliográfica e documental, com base em livros, teses, dissertações, artigos, entre outros, referente ao tema. Contudo, queremos investigar as possíveis respostas para a seguinte pergunta:

Qual a importância da abordagem das equações diofantinas lineares no Ensino Fundamental?

Nesse sentido, almejamos neste trabalho:

- **Fornecer apoio teórico para o professor ou futuro professor de matemática da Educação Básica sobre o assunto de equações diofantinas;**
- **Descrever uma sequência de atividades sobre equações diofantinas lineares, para uso no Ensino Fundamental.**

A dissertação foi dividida em três capítulos:

No capítulo I abordaremos alguns tópicos preliminares, que ajudarão na compreensão e no entendimento das EDL, facilitando o desenvolvimento da parte teórica que as envolvem. Com esse intuito, toda parte teórica será desenvolvida seguida de vários exemplos e aplicações.

No capítulo II desenvolveremos o conteúdo das equações diofantinas lineares e, em duas subseções falaremos das equações diofantinas não lineares. Com esta finalidade, a teoria será desenvolvida seguida de situações-problema que incidem em equações diofantinas.

No capítulo III descreveremos uma sequência de atividades didáticas baseadas em situações-problema envolvendo principalmente as EDL, que podem ser trabalhadas no Ensino Fundamental.

Além disso, apresentaremos um apêndice contendo as resoluções dos problemas propostos na sequência de atividades didáticas.

NOÇÕES PRELIMINARES

Neste capítulo, descreveremos alguns conceitos relativos ao conjunto dos números inteiros, importantes para a compreensão de vários conteúdos estudados em Teoria dos Números. Além disso, por fornecer uma ferramenta importante na resolução de problemas e também por estar presente no currículo da matemática da escola básica, que faz parte do cotidiano do professor ou do futuro professor de matemática da Educação Básica. Desse modo, dividimos este, em quatro seções que desenvolve, de forma introdutória, os conceitos sobre os números inteiros, o algoritmo da divisão, noções de divisibilidade e do máximo divisor comum, visando contribuir para uma melhor compreensão do ensino das equações diofantinas.

1.1 Números inteiros

No decorrer deste texto, trabalharemos com o conjunto dos números inteiros, denotado por $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ e seus subconjuntos, particularmente com o dos números naturais, representado por $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

Inicialmente, lembraremos alguns exemplos de subconjuntos importantes no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, vejamos, com $n \in \mathbb{N}$:

$N = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ dos inteiros positivos;
$P = \{0, 2, 4, 6, ..., 2n, ...\}$ dos números naturais pares não negativos;
$I = \{1, 3, 5, ..., 2n+1, ...\}$ dos números ímpares positivos.

Em $\mathbb{N}$ e em $\mathbb{Z}$ estão definidas duas operações, a saber, a adição (+) e a multiplicação ($\cdot$), sobre as quais assumiremos como conhecidas as respectivas propriedades elementares.

Da mesma forma, admitiremos a relação de ordem em $\mathbb{Z}$, isto é, dados quaisquer a e b inteiros, dizemos que a é menor do que ou igual a b, que indicamos por $a \leq b$, se existe um inteiro não-negativo c tal que $b = a + c$. Utilizamos a notação $b \geq a$ ($\Longleftrightarrow b - a \geq 0 \Longleftrightarrow$b > a *ou* b = a), que se lê b é maior do que ou igual a a.

As considerações feitas acima tendem dar uma ideia dos conceitos que envolvem os números inteiros, o leitor interessado em conhecer ou aprofundar seus conhecimentos acerca do referido assunto, pode consultar, por exemplo, as referências [7] e [12]. Vejamos a seguir, dois exemplos.

Exemplo 1.1. *Sendo m e n dois inteiros quaisquer, então, prove que $m+n$ e $m-n$ têm a mesma paridade.*

Prova. Temos três situações possíveis para m e n: 1) ambos pares; 2) ambos ímpares e 3) um é par e outro ímpar. Daí segue-se para:

1. Ambos pares, então, $m = 2c$ e $n = 2d$, sendo $c, d \in \mathbb{Z}$. Logo:

   $m + n = 2c + 2d = 2(c + d) = 2z$, com $z = c + d$, assim $m + n$ é par.

   $m - n = 2c - 2d = 2(c - d) = 2x$, com $x = c - d$, implica que $m - n$ é par.

2. Ambos ímpares, então, $m = 2c + 1$ e $n = 2d + 1$, sendo $c, d \in \mathbb{Z}$. Logo:

   $m + n = 2c + 1 + 2d + 1 = 2(c + d + 1) = 2z$, onde $z = c + d + 1$, logo $m + n$ é par.

   $m - n = 2c + 1 - 2d - 1 = 2(c - d) = 2x$, onde $x = c - d$, portanto $m - n$ é par.

3. Um é par e outro ímpar, digamos, sem perda de generalidade, que m seja par e n seja ímpar. Daí, $m = 2c$ e $n = 2d + 1$, para algum c, d inteiros, tem-se que:

   $m + n = 2c + 2d + 1 = 2(c + d) + 1 = 2z + 1$, onde $z = c + d$, então, segue-se que $m + n$ é ímpar.

   $m - n = 2c - 2d - 1 = 2(c - d) - 1 = 2x$, com $x = c - d$, logo $m - n$ é ímpar.

Dessa forma, nas três únicas situações possíveis, $m + n$ e $m - n$ possuem a mesma paridade.

Exemplo 1.2. *Dado um número inteiro n qualquer. Prove que não existe nenhum número inteiro m tal que $n < m < n + 1$.*

Prova. Suponhamos, por absurdo, que exista um inteiro m tal que $n < m < n + 1$. Assim, por um lado, existe um inteiro positivo q tal que $m = n + q$ $(*)$; por outro lado, existe um inteiro positivo w tal que $n + 1 = m + w$ $(**)$.

Substituindo, $(*)$ em $(**)$ teremos:

$$n + 1 = n + q + w \Longleftrightarrow 1 = q + w$$

o que é uma contradição, já que $q, w \geq 1$ (inteiros positivos).

Portanto, não existe nenhum número inteiro m tal que $n < m < n + 1$.

Agora, falaremos de outros resultados importantes, envolvendo os números inteiros não negativos, que são os seguintes princípios: *Princípio de Indução* (primeira e segunda forma) e o *Princípio de Boa Ordem*. Estes possibilitam a prova de inúmeros resultados envolvendo os números naturais. Vejamos:

I. ***(Princípio da Boa Ordem)*** *Todo conjunto não vazio de inteiros não negativos contém um menor elemento.*

II. ***(Princípio de Indução-primeira forma)*** *Seja A um subconjunto dos números naturais. Se A possui as seguintes propriedades*

i) $1 \in A$

ii) $k + 1 \in A$ *sempre que* $k \in A$,

então, A contém todos os números naturais.

III. ***(Princípio de Indução-segunda forma)*** *Seja $a \in \mathbb{N}$ e para cada $n \geq a$ é dada uma afirmação $P(n)$ tal que*

i) $P(a)$ é verdade

ii) qualquer $k \geq a$, $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$ é verdade

então, $P(n)$ é verdade para todo $n \geq a$.

A demonstração destes três princípios podem ser encontrada em [20] e, além disso, para uma discussão detalhada dos mesmos, veja o segundo capítulo de [8]. Aqui, faremos apenas um breve comentário a respeito dos mesmos.

Uma prova baseada no *Princípio da Boa Ordem* consiste em proceder em redução a um absurdo, onde nega a veracidade do conjunto das afirmações que se quer provar, e supõe que este conjunto é não vazio, a partir daí, o objetivo é obter uma contradição; aplicaremos este método para provar dois resultados importantes, apresentados nas próximas seções deste capítulo, que são o teorema que trata do *Algoritmo de Euclides* e o teorema de *Bachet-Bèzout*. Uma prova fundamentada no Princípio da Indução Matemática consiste em provar independentemente a veracidade das duas condições apresentas no referido princípio, seja usando o *Princípio de Indução* primeira, ou o da segunda forma; a única diferença entre as duas formas está na condição (i), que chamamos de *hipótese de indução*, pois, na primeira forma, supomos que $P(k)$ seja verdadeira e, na segunda forma, supomos que

$$P(k), P(k-1), P(k-2), \ldots, P(a+1), P(a)$$

sejam todas verdadeiras. Note também, que o princípio III segue do princípio II, basta considerar o subconjunto dos naturais $A = \{n \in \mathbb{N}; P(n+a-1)\, verdadeira\}$. Vejamos um exemplo.

Exemplo 1.3. *Seja a sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ definida por*

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_k &= 5a_{k-1}, \forall\, naturais\, k \geq 2. \end{aligned}$$

Prove por indução matemática que $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$, para todos os naturais $n \geq 1$.

Prova. Utilizaremos a primeira forma do *Princípio de Indução*.
$i)$ Para $n = 1$, temos:

$$a_n = a_1 = 2 \cdot 5^{1-1} = 2 \cdot 1 = 2,$$

que a afirmação é verdadeira.
$ii)$ Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para $n = k\,(k \geq 1)$, e provaremos que ela também é verdadeira para $k+1$. Assim, temos:

- Hipótese de Indução (H.I): $a_k = 2 \cdot 5^{k-1}, \forall$ naturais $k \geq 1$.
- Tese: $a_{k+1} = 2 \cdot 5^{(k+1)-1} = 2 \cdot 5^k, \forall$ naturais $k \geq 1$.

De fato, pela definição da sequência segue-se que:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 5a_k, \quad \forall \quad naturais \quad k \geq 2 \\ &= 5\cdot(2\cdot 5^{k-1}) \quad H.I \\ &= 2\cdot 5^{k-1+1} \\ &= 2\cdot 5^k, \end{aligned}$$

o que mostra a veracidade da afirmação para $k+1$.

Portanto, pelo Princípio de Indução, tem-se que $a_n = 2\cdot 5^{n-1}$ para todos os naturais $n \geq 1$.

1.2 Algoritmo de Euclides

Nesta seção, além de expor uma demonstração para o *Algoritmo de Euclides*, faremos uma aplicação deste resultado, na qual provaremos o *Lema dos Restos*, assim como utilizaremos estes resultados na resolução de alguns problemas. O leitor interessado neste e em outros resultados relacionados pode consultar [13].

Teorema 1.1. *(Algoritmo de Euclides) Dados dois inteiros a e b, com $b \neq 0$, então existem únicos inteiros q e r que satisfazem,*

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

Os inteiros q e r, são chamados de quociente e resto, respectivamente, na divisão de a por b.

Demonstração. (Existência) Suponhamos por simplicidade, que a seja positivo. Se $a < b$, basta tomar $q = 0$ e $r = a$; se $a = b$, então tomamos $q = 1$ e $r = 0$. Dessa forma, admitiremos também que $a > b > 0$. Assim, seja o conjunto formado por números inteiros:

$$S = \{a - xb \geq 0; x \in \mathbb{Z}\}$$

podemos notar que $S \neq 0$, pois, tomando $x = -a$, teremos:

$$a - (-a)b = a + ab \geq a + a > 0$$

logo, pelo *Princípio da Boa Ordem*, S possui um menor elemento, digamos que este seja r.

Como $r \in S$, temos que $0 \leq r$ e existe q tal que $r = a - qb$. Assim, basta comprovar que $r < b$. Para isto, suponhamos por absurdo, que $r \geq b$; neste caso, teríamos:

$$a - (q+1)b = (a - qb) - b = r - b > 0$$

dessa forma, $a - (q+1)b \in S$ e $a - (q+1)b < r$ o que contradiz o fato que r é o menor elemento de S. Deste modo, fica comprovado que $r < b$.

(Unicidade) Suponhamos que existem outros inteiros r_1 e q_1 tais que:

$$a = q_1 b + r_1, \quad 0 \leq r_1 < b$$

o que resulta em,

$$bq + r = q_1 b + r_1 \Longleftrightarrow r - r_1 = (q_1 - q) \cdot b \, (*)$$

daí, $r - r_1$ é múltiplo de b. Porém, tem-se que $0 \leq r < b$ e $0 \leq r_1 < b$, o que implica $0 \leq r - r_1 < 0$, segue dessa forma, que o único valor múltiplo de b é $r - r_1 = 0$, ou seja, $r = r_1$.

Portanto, teremos em $(*)$ que $0 = (q_1 - q) \cdot b$, como $b \neq 0$, tem-se $q_1 - q = 0 \Longleftrightarrow q_1 = q$. $\square$

Uma aplicação do importante resultado acima é o seguinte lema.

Lema 1.2. *(Lema dos Restos) A soma e o produto de quaisquer dois números naturais deixa o mesmo resto que a soma e o produto dos seus restos, na divisão por um inteiro positivo a.*

Demonstração. Sejam x e $y \in \mathbb{Z}$. Fazendo a divisão de ambos os números por a, teremos: $x = aq + r$ e $y = aq_1 + r_1$, com $0 \leq r, r_1 < a$. Então,

(1) $x + y = aq + r + aq_1 + r_1 = a(q + q_1) + r + r_1 = aQ + (r + r_1)$, onde $Q = q + q_1$.

Agora, dividindo $r + r_1$ por a, tem-se que:

(2) $r + r_1 = a.s + r'$, com $s \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r' < a$.

Substituindo (2) em (1), vem:

$$x + y = aQ + a.s + r' = a(Q + s) + r'$$

mostrando assim, que $x + y$ e $r + r_1$ quando divididos por a, deixam o mesmo resto.

Analogamente, mostra-se que $x \cdot y$ e $r \cdot r_1$ possuem o mesmo resto quando divididos por a. $\square$

Tendo em vista, obter uma melhor compreensão do exposto na seção até agora, veremos a seguir, três exemplos.

Exemplo 1.4. *(ENC-2000) Mostre que, se um número natural a não é divisível por* 3*, então* a^2 *deixa resto* 1 *na divisão por* 3.

Prova. Se 3 não divide a, então, de acordo com *Algoritmo da Divisão*, temos duas possibilidades: $a = 3g + 1$ ou $a = 3g + 2$, com $g \in \mathbb{N}$. Logo:

- $a^2 = (3g + 1)^2 = 9g^2 + 6g + 1 = 3k + 1$, onde $k = 3g^2 + 2g$;
- $a^2 = (3g + 2)^2 = 9g^2 + 12g + 4 = 3k' + 1$, onde $k' = 3g^2 + 4g + 1$.

Portanto, em ambos os casos, o resto da divisão de a^2 por 3 é 1.

Exemplo 1.5. *Prove que um dos inteiros* $a, a + 2, a + 4$ *é divisível por 3.*

Prova. De fato, devido ao *Algoritmo de Euclides*, tem-se que $a = 3q$, ou $a = 3q+1$, ou $a = 3q+2$, com $q \in \mathbb{Z}$. Assim,

- se $a = 3q \Longrightarrow a$ é divisível por 3.
- se $a = 3q+1 \Longrightarrow a+2 = 3q+3 = 3(q+1) \Longrightarrow a+2$ é divisível por 3.
- se $a = 3q+2 \Longrightarrow a+4 = 3q+6 = 3(q+2) \Longrightarrow a+4$ é divisível por 3.

Portanto, ou a, ou $a+2$, ou $a+4$ é divisível por 3.

Exemplo 1.6. *Qual é o resto da divisão* $2012 \cdot 2013 \cdot 2014 + 8^{2012}$ *por 7?*

Resolução. Como 2012 deixa resto 3, 2013 deixa resto 4 e 2014 deixa resto 5, quando dividido por 7, então, pelo *lema 1.2*, $2012 \cdot 2013 \cdot 2014$ deixa o mesmo resto que $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ por 7 que é 4; por outro lado, como 8 deixa resto 1, quando dividido por 7, então, 8^{2012} deixa o mesmo que $\underbrace{(1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1)}_{(2012 fatores)} = 1$ por 7 que é 1.

Portanto, novamente pelo *Lema 1.2*, temos que $2012 \cdot 2013 \cdot 2014 + 8^{2012}$ deixa o mesmo resto que $4+1 = 5$ por 7 que é 5.

1.3 Noção de divisibilidade

Na presente seção apresentaremos o conceito de divisibilidade, e a partir deste, provaremos algumas de suas propriedades básicas. Além disso, mostraremos o teorema da representação de um número inteiro qualquer positivo em uma determinada base maior que 1 e o critério de divisibilidade por 9.

Definição 1.1. *Dados dois números inteiros a e b, com* $a \neq 0$*, dizemos que b é divisível ou múltiplo de a, quando existir* $m \in \mathbb{Z}$ *tal que* $b = am$*. Denotaremos por* $a \mid b$ *para indicar que a divide b; caso contrário, usaremos* $a \nmid b$ *para indicar que a não divide b.*

Por exemplo, temos que $5 \mid -35$, pois $-35 = 5.(-7)$. Já $2 \nmid 13$, pois $\nexists m \in \mathbb{Z}$, tal que $13 = 2 \cdot m$.

Proposição 1.3. *Sejam* a, b, c, x *e* y *números inteiros, então:*

(a) para todo $a \neq 0$*, tem-se* $a \mid a$*;*
(b) se $a \mid b$ *e* $b \mid c$*, então* $a \mid c$*;*
(c) $a \mid b$ *se,e somente se,* $ax \mid bx$*, sendo* $x \neq 0$*;*
(d) se $a \mid b$ *e* $a \mid c$*, então* $a \mid bx \pm cy$*;*
(e) se $a \mid b$ *e* $b \neq 0$*, então* $|a| \leq |b|$*.*

Prova.

(a) Basta observar que $a = a \cdot 1$. $\square$

(b) Se $a \mid b$ e $b \mid c$, então, existem inteiros r e s tais que: $b = as$ e $c = br$. Logo, segue que $c = ars$, o que nos dá, que $a \mid c$. $\square$

(c) Inicialmente se $a \mid b$, então, existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ax$, daí $xb = (ax) \cdot x$, ou seja, $ax \mid bx$. Reciprocamente se $ax \mid bx$, então, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $xb = (ax) \cdot q$, então $b = aq$ e, portanto, $a \mid b$, pois $x \neq 0$. $\square$

(d) Se $a \mid b$ e $a \mid c$, então existem x e $y \in \mathbb{Z}$ tais que $b = ax$ e $c = ay$. Então

$$bx = (ax) \cdot x \quad \text{e} \quad cy = (ay) \cdot y.$$

Consequentemente, tem-se que:

$bx + cy = (ax) \cdot x + (ay) \cdot y = a \cdot (x^2 + y^2)$, logo, $a \mid bx + cy$; e

$bx - cy = (ax) \cdot x - (ay) \cdot y = a \cdot (x^2 - y^2)$, logo, $a \mid bx - cy$. Portanto, segue que $a \mid bx \pm cy$. $\square$

(e) Se $a \mid b$, então, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $b = am$. Tendo em vista que $b \neq 0$, necessariamente $m \neq 0$, pelo que $|m| \geq 1$. Assim, $|b| = |am| = |a| \cdot |m| \geq |a|$. $\square$

De posse do teorema seguinte, podemos escrever um número inteiro arbitrário em uma base $b > 1$, e sua demonstração é mais uma aplicação do Algoritmo da Divisão. Por exemplo, o sistema de numeração atual e que habitualmente usamos na representação de inteiros, é o de base 10, ou seja, é o sistema posicional decimal, em que utilizamos os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0 para escrever todos os outros números. No entanto, poderíamos representar os inteiros em outra base, digamos, na base 2, em que utilizamos para escrever os demais números, os algarismos 1 e 0.

Teorema 1.4. *Seja $b > 1$ um número inteiro positivo fixado. Então, qualquer inteiro positivo n pode ser escrito, de maneira única, na forma:*

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0$$

na qual os coeficientes a_i, para $i = 0, 1, 2, \ldots, k$, são elementos do conjunto de algarismos $0, 1, \ldots, b-1$, e $a_k \neq 0$.

Demonstração. Ora, para obter uma representação de n, na base b, vamos construir uma sequência finita de divisões euclidianas de n por b, cujos restos formarão a sequência de dígitos $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k$.

Primeiro, vamos dividir n por b, obtendo:

$$n = bq_0 + a_0, \quad 0 \leq a_0 < b$$

se $q_0 > 0$, então dividimos q_0 por b, obtendo:

$$q_0 = bq_1 + a_1, \quad 0 \leq a_1 < b$$

se $q_1 > 0$, então continuamos o processo, obtendo:

$$q_1 = bq_2 + a_2, \quad 0 \leq a_2 < b$$

$$q_2 = bq_3 + a_3, \quad 0 \leq a_3 < b (q_2 > 0)$$

$$\vdots$$

$$q_{k-1} = bq_k + a_k, \quad 0 \leq a_k < b(q_{k-1} > 0)$$

até obter o primeiro quociente $q_k = 0$.

Este processo é finito, pois a sequência $n > q_0 > q_1 > q_2 > \ldots$ é estritamente decrescente de inteiros não negativos, terminando, portanto em algum $q_k = 0$. Agora, substituindo sucessivamente $q_0, q_1, \ldots, q_{k-1}$, na equação $n = bq_0 + a_0$, teremos:

$$\begin{aligned}
n &= bq_0 + a_0 \\
&= b(bq_1 + a_1) + a_0 \\
&= q_1 b^2 + a_1 b + a_0 \\
&= (bq_2 + a_2)b^2 + a_1 b + a_0 \\
&= q_2 b^3 + a_2 b^2 + a_1 b + a_0 \\
&\vdots \\
&= (bq_k + a_k)b^k + a_{k-1}b^{k-1} + \cdots + q_1 b^2 + a_1 b + a_0 \\
&= a_k b^k + a_{k-1}b^{k-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0.
\end{aligned}$$

Portanto, $n = a_k b^k + a_{k-1}b^{k-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0$.

A unicidade dos números a_i decorre da unicidade dos restos na divisão euclidiana. $\square$

Vejamos um exemplo a seguir, para ilustrar o resultado acima. O leitor interessado em obter maiores detalhes sobre base de um sistema de numeração, consultar, por exemplo, [21].

Exemplo 1.7. *O número 2043 está na base 5. Escreva-o na base 8.*

Resolução. Como 2043 está na base 5. Daí, teremos:

$$(2043)_5 = 2 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 3 = 250 + 0 + 20 + 3 = 273 \text{ na base } 10.$$

Agora, basta escrever 273 na base 8. Por divisão euclidiana, tem-se:

$$273 = 8 \cdot 34 + 1 \tag{1.1}$$

$$34 = 8 \cdot 4 + 2 \tag{1.2}$$

Substituindo (1.2) em (1.1), obtemos:

$$273 = 8 \cdot (8 \cdot 4 + 2) + 1 = 4 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 3 = (423)_8$$

Logo, $(2043)_5 = (423)_8 = 273$, ou seja, o número na base 8 se representa por 423.

A próxima proposição mostra um critério de divisibilidade, que é uma aplicação dos conceitos estudados nesta seção.

Proposição 1.5. *(Critério de divisibilidade por 9) Um número natural n é divisível por 9 se, e somente se, a soma de seus algarismos for divisível por 9.*

Demonstração. Seja $a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0$ a representação de n na base 10, isto é:

$$n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0,$$

em que $a_k \in 0, 1, 2, \ldots, 8, 9$ para todo k natural.

Se n é divisível por 9, então: $9 \mid a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0$. Tendo em vista que:

$$n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0 - (a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0) + (a_k + a_{k-1} + \cdots + a_0)$$

$$n = a_k(10^k - 1) + a_{k-1}(10^{k-1} - 1) + \cdots + a_1(10^1 - 1) + (a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0)$$

e como para todo natural i, tem-se que $10^i - 1 = 9b_i$, onde b_i é um inteiro positivo. Segue-se que 9 divide $a_k(10^k - 1) + a_{k-1}(10^{k-1} - 1) + \cdots + a_1(10^1 - 1)$, logo, existe um natural d, tal que $a_k(10^k - 1) + a_{k-1}(10^{k-1} - 1) + \cdots + a_1(10^1 - 1) = 9d$. Assim,

$$n = 9d + (a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0).$$

Como 9 divide n, por hipótese, e 9 divide $9d$, segue que:

$$9 \mid n - 9d.$$

Portanto, $9 \mid a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0$.

Reciprocamente, se 9 divide $a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0$, e como 9 divide $9d$, vem que:

$$9 \mid 9d + (a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0) = n.$$

Portanto, segue-se que $9 \mid n$. $\square$

1.4 Máximo divisor comum

Nesta seção, apresentaremos dois caminhos para a obtenção do máximo divisor comum *(mdc)* de dois números inteiros, um pelo conjunto dos divisores, e o outro, usando o *Algoritmo de Euclides*. Além disso, exibiremos o *Lema de Euclides* e o teorema de *Bèzout*, assim como, veremos duas aplicações envolvendo o conceito do *mdc*.

Durante todo o desenvolvimento desta seção, vamos considerar a e b, inteiros não simultaneamente não nulos.

Definição 1.2. *(Divisores comuns) Um divisor comum de a e b inteiros, é um número inteiro que divide a e b, ao mesmo tempo.*

O conjunto formado por todos os divisores comuns de a e b será indicado por $D(a,b)$. Tendo em vista que 1 divide a e b, para quaisquer inteiros a e b, tem-se que o conjunto $D(a,b)$ é não vazio, já que $1 \in D(a,b)$.

Notemos também, se a ou $b \neq 0$, que o conjunto $D(a,b)$ é limitado superiormente, isto é, tem um elemento máximo. De fato, se $a \neq 0$ e d for um divisor comum de a e de b, então $|d| \leq |a|$.

Exemplo 1.8. *Qual é o maior divisor comum dos inteiros 12 e 18?*

Resolução. Os divisores de 12 são os elementos do conjunto

$$D(12) = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12\}$$

e os divisores de 18 são os do conjunto

$$D(18) = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18\},$$

logo, $D(12,18) = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$.

Portanto, o maior elemento do conjunto $D(12,18)$ é 6, este é o máximo divisor comum de 12 e 18.

Apesar desta forma de introduzir o máximo divisor comum ser interessante sob o ponto de vista didático, este método de obter o *mdc* é bastante trabalhoso para números maiores. Isto motiva a próxima definição que é equivalente a que foi ilustrada acima em termos do conjunto dos divisores comuns.

Definição 1.3. *(Máximo divisor comum) Dados a e b inteiros, dizemos que o máximo divisor comum, abreviadamente mdc, entre a e b é o número inteiro positivo d, que satisfaz as condições:*

I. $d \mid a$ e $d \mid b$;

II. *Se* $c \mid a$ e $c \mid b$, então $c \leq d$.

Neste caso, indicaremos o mdc de a e b por $d = mdc(a,b)$*, ou simplesmente por* $d = (a,b)$*. Se* $(a,b) = 1$*, então, os números a e b são chamados de primos entre si.*

Com o exposto até agora, podemos notar que o *mdc* de a e b independe da ordem em que a e b são tomados, ou seja, $(a,b) = (b,a)$. E também, a facilidade de calcular o *mdc* de a e b, em alguns casos particulares, como, por exemplo:

(a) Se $a = 0$, tem-se que $(0,b) = b$; se $a = 1$, temos que $(1,b) = 1$; se $a = b$, tem-se $(b,b) = b$. $\square$

(b) Se $a \mid b$ se, e somente se, $(a,b) = a$.

De fato, se $a \mid b$ e como $a \mid a$, temos que a é divisor comum de a e b (I); se $c \mid a$ e $c \mid b$, então $c \leq a$ (II). Isto mostra que $(a,b) = a$.

Reciprocamente, se $(a,b) = a$, seque-se da definição do *mdc*, que $a \mid b$. $\square$

(c) $mdc(a,b) = mdc(|a|,|b|)$. Seja $n \in \mathbb{Z}$ e $n = mdc(a,b)$, então, $n \mid a$ e $n \mid b$, ou seja, $n \mid |a|$ e $n \mid |b|$. Assim, $D(a,b) = D(|a|,|b|)$, o que nos dá, o resultado desejado. $\square$

Lema 1.6. *(Lema de Euclides) Sejam a e b inteiros e r o resto da divisão euclidiana de a por b. Então, $mdc(a,b) = mdc(b,r)$.*

Demonstração. Seja $mdc(a,b) = d$ e $a = qb + r$, onde q é um inteiro. Daí, $d \mid a$ e $d \mid b$, ou seja, $d \mid a - qb = r$. Logo, d é divisor comum de b e r (I). Se $c \mid b$ e $c \mid r$, então,

$$c \mid qb + r = a.$$

Mas, se $c \mid a$ e $c \mid b$, então, $c \leq d$, já que $d = mdc(a,b)$ (II). Portanto, $d = mdc(b,r)$.

Reciprocamente, se $d = mdc(b,r)$ e $a = qb + r$, então, $d \mid b$ e $d \mid r$, e daí, $d \mid qb + r = a$. Logo, d é divisor comum de a e b (I). Se $c \mid a$ e $c \mid b$, então,

$$c|a - qb = r.$$

Mas, se $c \mid b$ e $c \mid r$, então, $c \leq d$, já que $d = mdc(b,r)$ (II).

Portanto, $d = mdc(a,b)$. $\square$

Aplicando o *Lema 1.6* sucessivamente, obtemos um método prático e eficiente para determinar o $mdc(a,b)$, que é chamado de *Algoritmo de Euclides* para o cálculo do *mdc*.

Teorema 1.7. *(Algoritmo de Euclides para o mdc) Dados dois inteiros a e b, com $a \geq b$, aplicando sucessivamente a divisão euclidiana, obtem-se a sequência de igualdades,*

$$a = bq_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < b$$

$$b = r_1q_2 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3, \quad 0 \leq r_3 < r_2$$

$$r_2 = r_3q_4 + r_4, \quad 0 \leq r_4 < r_3$$

$$\vdots$$

$$r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k, \quad 0 \leq r_k < r_{k-1}$$

$$r_{k-1} = r_kq_{k+1} + r_{k+1}, \quad 0 \leq r_{k+1} < r_k$$

Até algum r_k dividir r_{k-1}. Então, $mdc(a,b) = r_k$.

Demonstração. De fato, observando as desigualdades anteriores, descritas no processo de divisões acima, tem-se uma sequência decrescente de números não negativos,

$$r_1 > r_2 > r_3 > \cdots > r_k > \cdots \geq 0$$

No entanto, existe apenas uma quantidade finita de números positivos menores que r_1. Logo, para algum resto r_k, temos que $r_{k+1} = 0$, ou seja, r_k dividir r_{k-1}. Assim, devido ao lema anterior, teremos sucessivamente:
$(a,b) = (b,r_1) = (r_1,r_2) = \cdots = (r_k,r_{k+1}) = (r_k,0) = r_k$. Portanto, $mdc(a,b) = r_k$. $\square$

Com o intuito de ilustrar a praticidade deste método, exibiremos dois exemplos.

Exemplo 1.9. *Prove que a fração* $\dfrac{28n+2}{12n+1}$ *, sendo n natural, é irredutível.*

Resolução. Basta provar que o numerador e o denominador são primos entre si, ou seja, mostrar que $mdc(28n+2,12n+1)=1$. De fato, pelo *Lema 1.6*,

$$\begin{aligned} mdc(28n+2,12n+1) &= (28n+2-2(12n+1),12n+1) \\ &= (4n,12n+1) \\ &= (4n,12n+1-3.4n) \\ &= (4n,1) \\ &= 1, \end{aligned}$$

para qualquer n natural, tem-se, portanto que a fração $\dfrac{28n+2}{12n+1}$ é irredutível.

Exemplo 1.10. *Calcular o máximo divisor comum dos números 315 e 1428.*

Resolução. Aplicando o Algoritmo de Euclides, teremos:

$$1428 = 315\cdot 4+168$$

$$315 = 168\cdot 1+147$$

$$168 = 147\cdot 1+21$$

$$147 = 21\cdot 7$$

Logo, pelo *Teorema 1.7*, tem-se que $mdc(315,1428)=21$. Na prática, costuma-se reunir os cálculos acima em uma tabela:

quocientes	4	1	1	7
1428	315	168	147	21
168	147	21	0	restos

Tabela 1.1 Cálculo do mdc entre os números 1428 e 315

Além de calcular o *mdc*, o *Algoritmo de Euclides* nos fornece um método prático para escrever o *mdc* como combinação linear dos números envolvidos. Vejamos que:

$$\begin{aligned} 21 &= 168-147\cdot 1 = 168-(315-168\cdot 1)\cdot 1 = 168\cdot 2-315\cdot 1 \\ &= (1428-315\cdot 4)\cdot 2-315\cdot 1 = 1428\cdot 2-315\cdot 9 \end{aligned}$$

Portanto, $mdc(315,1428)=21=1428\cdot 2-315\cdot 9$.

Teorema 1.8. *(Bachet-Bèzout) Se* $d=mdc(a,b)$*, então existem inteiros* x *e* y *tais que* $d=ax+by$.

Demonstração. Seja $M = \{ax_0 + by_0; x_0, y_0 \in \mathbb{Z}\}$. Note que este conjunto contém, números negativos, positivos e o zero. Escolhendo convenientes x e y inteiros tais que $d = ax + by$ seja o menor elemento positivo pertencente a M, mostremos que $d = mdc(a,b)$.

De fato, suponhamos por absurdo, que $d \nmid a$, então, pelo algoritmo da divisão, obtemos inteiros q e r tais que $a = dq + r$, com $0 < r < d$. Daí, vem que:

$$r = a - dq = a - (ax + by)q = a - aqx - bqy = (1 - qx)a + (-qy)b,$$

logo, $r \in M$, o que é uma contradição, já que $0 < r < d$ e d é menor elemento positivo de M. Portanto, $d \mid a$; e analogamente, tem-se também que $d \mid b$.

Se $c \mid a$ e $c \mid b$, então, existem inteiros l_1 e l_2 tais que $a = cl_1$ e $b = cl_2$. Logo, $d = ax + by = cl_1x + cl_2y = c(l_1x + l_2y)$, daí segue-se que $c \mid d$, então, $c \leq d$.

Dessa forma, seque-se que $d = mdc(a,b) = ax + by$. $\square$

Os próximos resultados são aplicações, que envolvem o conceito do *mdc*. Os quais decorrem do teorema anterior.

Corolário 1.9. *Os inteiros a e b são primos entre si se, e somente se, existem inteiros x e y tais que* $ax + by = 1$.

Demonstração. Se $mdc(a,b) = 1$, então, pelo *Teorema 1.7*, existem inteiros x e y satisfazendo $ax + by = d = 1$.

Reciprocamente, se $ax + by = 1$, e d é tal que $d \mid a$ e $d \mid b$, então $d \mid ax + by = 1$, logo, $d \mid 1$, e daí $d \leq 1$, o que nos fornece, portanto, $1 = mdc(a,b)$. $\square$

Proposição 1.10. *Sejam a, b e p números inteiros, sendo p primo. Se* $p \mid ab$*, então,* $p \mid a$ *ou* $p \mid b$*.*

Demosntração. Suponhamos que $p \nmid a$, então, $mdc(p,a) = 1$. Daí, pela *Proposição 1.9*, existem x e y inteiros tais que $px + ay = 1$, e então $pbx + aby = b$. Tendo em vista que $p \mid ab$ e $p \mid p$, então, $p \mid pbx + aby = b$, logo, $p \mid b$. Analogamente, se $p \nmid b$, tem-se que $p \mid a$.

Portanto, temos que $p \mid a$ ou $p \mid b$. $\square$

Observação 1.1 A noção de máximo divisor comum estudado nesta seção pode ser generalizada para n números inteiros. Este resultado, assim como sua prova que é feita por indução matemática, pode ser encontrado em [10] nas páginas 61-62.

EQUAÇÕES DIOFANTINAS

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos referentes às Equações Diofantinas, fundamentais para resolução de vários problemas do nosso cotidiano e, por facilitar a compreensão e a aplicação da proposta que será apresentada no próximo capítulo. Desse modo, dividimos este em três seções: breve introdução, equações diofantinas lineares (EDL) e equações diofantinas não lineares; de modo que todo estudo feito, será exemplificado por meio de situações-problema, fazendo sempre que possível, um elo entre teoria e prática, favorecendo assim, um melhor aproveitamento dos conceitos apresentados.

2.1 Breve introdução

Historicamente, pouco se sabe sobre a vida e obra do matemático grego *Diofanto* de Alexandria. Acredita-se que viveu no século III d. C, tendo seu nome ligado à cidade de Alexandria, que foi o maior centro de atividade matemática no Egito. E segundo Boyer [1], *Diofanto* em sua obra *Aritmética*, composta de treze volumes, dos quais têm-se conhecimento de seis destes, desenvolveu um método de resolver problemas determinados e indeterminados, sem fazer distições claras entre estes, em que utilizava uma linguagem diferente de seus precursores, ou seja, não utilizava interpretação geométrica na resolução de tais problemas, e sim, apenas um procedimento semelhante ao que chamamos hoje de "método algébrico". Vejamos a seguir, um exemplo, em linguagem atual, mas utilizando procedimento semelhante ao que Diofanto utilizava na resolução do mesmo.

Exemplo 2.1. *(Diofanto, em Aritmética) Encontrar dois números tais que sua soma é 20 e a soma dos quadrados é 208. (Ver [1], p. 124)*

Resolução: Os números não podem ser iguais, já que $10^2+10^2=200\neq 208$. Então, sejam os números $x=10+a$ e $y=10-a$. Daí, temos:

$$(10+a)^2+(10-a)^2=208 \Longleftrightarrow 100+20a+a^2+100-20a+a^2=208 \Longleftrightarrow 2a^2=8 \Longleftrightarrow a^2=4.$$

Então $a=\pm 2$, como somente a solução positiva era admitida, segue que $a=2$.

Portanto, os números procurados são 12 e 8.

O problema abaixo se refere ao único dado pessoal sobre *Diofanto*, o qual encontra-se na forma de um enigma gravado em seu túmulo:

> Deus lhe concedeu ser menino pela sexta parte de sua vida, e somando sua duodécima parte a isso, cobriu - lhe as faces de penugem. Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! Infeliz criança; depois de viver a metade da vida de seu pai, o Destino frio o levou. Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números, ele terminou sua vida. (Boyer, 2003, p. 121).

A equação que representa o problema deste enigma é dada por $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$, onde x representa a respectiva idade. Resolvendo esta equação pode-se concluir, admitindo a exatidão de tal enigma, que ele viveu 84 anos.

Os problemas estudados, com ênfase nos problemas indetermidados (geralmente com infinitas soluções), por *Diofanto* em *Aritmética* consistia na busca de soluções inteiras ou racionais positivas, onde era apresentada apenas uma solução para tais problemas. Atualmente, tais problemas podem ser modelados via equações ou sistemas de equações algébricas. Em referência ao estudo de *Diofanto*, Sampaio [19], define Equações diofantinas como: "Equações polinomiais, em varias incógnitas, com coeficientes inteiros (ou racionais), das quais se buscam soluções restritas ao conjunto dos números inteiros, são habitualmente denominadas de equações diofantinas"(Sampaio, 2009, p.83).

Já, a definição dada por Domingues [6], para Equações Diofantinas é:

> Todas as equações polinomiais (não importa o número de incógnitas) com coeficientes inteiros, sempre que seu estudo seja feito tomando como universo das variáveis o conjunto dos inteiros. Isso não obstante Diofanto só ter trabalhado com alguns poucos casos particulares dessas equações e seu universo numérico ter sido o dos números racionais estritamente positivos. (Domingues, 2003, p. 50).

De acordo com Fernandes ...[et al.] [8], a equação diofantina mais conhecida é dada por $x^n+y^n=z^n$, onde $n\in\mathbb{Z}$ com $n\geq 2$, na qual procuramos soluções inteiras que a satifaça. Para o caso em que $n=2$, a equação possui infinitas soluções e é estudada desde a antiguidade, em que se buscava todos os inteiros positivos que satisfazem a identidade $x^2+y^2=z^2$, que é equivalente a encontrar todas as ternas inteiras, correspondentes a todos os triângulos retângulos cujos lados são inteiros positivos, denominadas de ternas pitagóricas.

Será possível sempre encontrar soluções inteiras para a equação diofantina $x^n+y^n=z^n$, para $n>2$? Um grande estudioso de *Diofanto* foi o advogado Pierre de Fermat (1601-1665), que tinha como passatempo estudar matemática, obtendo resultados interessantes na área de conhecimento que é denominada atualmente por Teoria dos Números. A equação acima é conhecida como equação de Fermat, a mais famosa da matemática, segundo Fernandes ...[et al.] [8].

> Fermat deixou anotado à margem do seu exemplar da Aritmética, de Diofanto, que a equação $x^n+y^n=z^n$ não possui soluções não triviais para $n\geq 3$ e que a demonstração desse resultado, ficou conhecido como o Último Teorema de Fermat e que ele afirmava conhecer, e seria dada em outra oportunidade, já que não havia espaço suficiente na margem daquele livro.(Fernandes ...[et al.], 2005, p. 109).

Durante muito tempo, muitos matemáticos tentaram demonstrar o teorema em vão, e muita matemática foi desenvolvida para que, em 1995, o matemático inglês Andrew Wiles desse a prova definitiva do teorema, encerrando assim, um belo capítulo da História da Matemática.

Por fim, chamaremos de *equações diofantinas lineares* em n variáveis toda equação que pode ser expressa na forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b são números inteiros ou racionais, que se busca encontrar inteiros $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que a satisfaça. E de *sistema de equações diofantinas lineares*, o conjunto de p equações diofantinas lineares, onde $p \in \mathbb{N}$ e $p \geq 2$, onde também buscamos soluções inteiras satisfazendo simultaneamente as p equações.

Vale ressaltar que, no presente texto estudaremos as equações diofantinas lineares com duas e três variáveis, assim como, os sistemas de equações diofantinas lineares composto por duas ou três equações.

2.2 Equações diofantinas lineares

Nesta seção, demonstraremos dois teoremas importantes no estudo das equações diofantinas lineares (EDL), os quais fornecem duas informações básicas. Uma nos diz quando uma equação diofantina linear tem solução inteira e a outra, como escrever a solução geral desta equação, quando a mesma possui uma solução inteira. Tudo isso, será feito de forma detalhada, bem como serão apresentados vários exemplos.

Definição 2.1. *Uma equação diofantina linear em duas variáveis x e y é uma equação expressa na forma $ax + by = c$, onde a, b e c são inteiros (ou racionais), com a e b não simultaneamente nulos e cujas soluções são números inteiros. Uma solução da equação $ax + by = c$ é um par ordenado de inteiros (x_0, y_0) tal que $ax_0 + by_0 = c$.*

No estudo das equações diofantinas lineares, devemos:

1. Saber se a equação possui ou não possui soluções inteiras.
2. Se possuir soluções inteiras, como escrever todas elas.

Nesse sentido, o teorema a seguir dá a condição suficiente e necessária para a existência de soluções inteiras de uma dada equação diofantina linear.

Teorema 2.1. *A equação diofantina linear $ax + by = c$ possui solução se, e somente se, o máximo divisor comum de a e b divide c.*

Demontração. Seja (x_0, y_0) uma solução inteira de $ax + by = c$, então $ax_0 + by_0 = c$, seja $d = mdc(a, b)$, então $d \mid a$ e $d \mid b$, e daí, tem-se que $d \mid ax_0$ e $d \mid by_0$, consequentemente, segue-se que $d \mid ax_0 + by_0$, e portanto, $d \mid c$.

Reciprocamente, se $d \mid c$, então existe um k tal que $c = kd$, onde $d = mdc(a, b)$. Além disso, de acordo com teorema de Bèzout, existem inteiros x_0, y_0 tais que $ax_0 + by_0 = d$. Logo, multiplicando esta última equação por k, teremos $akx_0 + bky_0 = dk$, e daí, segue-se que: $akx_0 + bky_0 = c$, o que nos fornece, portanto, que (kx_0, ky_0) é uma solução inteira da equação. $\square$

Vejamos, como exemplo, que a equação diofantina $3x - 6y = 2$ não possui solução, pois, $mdc(3, 6) = 3$ e $3 \nmid 2$. Já a equação $5x + 7y = 9$ possui solução, pois $mdc(5, 7) = 1$ e $1 \mid 9$.

Corolário 2.2. *Se $mdc(a,b) = 1$ então a equação diofantina linear $ax + by = c$ tem solução.*

Demonstração. Se $mdc(a,b) = 1$, então pelo *corolário 1.9* existem x_1 e y_1 inteiros tais que $ax_1 + by_1 = 1$, daí segue que $acx_1 + bcy_1 = c$. Logo, (cx_1, cy_1) é uma solução inteira da equação $ax + by = c$. □

Agora, com o próximo teorema, temos como escrever a solução geral de uma dada equação diofantina linear, quando esta possui uma solução inteira particular.

Teorema 2.3. *Seja (x_0, y_0) uma solução particular da equação diofantina linear $ax + by = c$, em que $ab \neq 0$. Então qualquer solução inteira dessa equação é dada por:*

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}t \\ y = y_0 - \frac{a}{d}t \end{cases}$$

com $t \in \mathbb{Z}$ e $d = mdc(a,b)$.

Demonstração. Inicialmente, se (x_0, y_0) for uma solução da equação $ax + by = c$, então, $ax_0 + by_0 = c$. Ora, se $x = x_0 + \frac{b}{d}t$ e $y = y_0 - \frac{a}{d}t$, com $t \in \mathbb{Z}$, então:

$$ax + by = a(x_0 + \frac{b}{d}t) + b(y_0 - \frac{a}{d}t) = ax_0 + \frac{ab}{d}t + by_0 - \frac{ab}{d}t = ax_0 + by_0 = c,$$

o que mostra, portanto, que (x, y) é uma solução da equação diofantina $ax + by = c$.

Da mesma forma, se (x, y) é uma solução da equação $ax + by = c$, segue-se que:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ ax_0 + by_0 = c \end{cases} \Longleftrightarrow ax + by = ax_0 + by_0 \Longleftrightarrow a(x - x_0) = b(y_0 - y)(*).$$

Mas, como d é divisor comum de a e b, então, $a = dm$ e $b = dn$, para convenientes inteiros m e n, primos entre si. Logo, substituindo em $(*)$, teremos:

$$dm(x - x_0) = dn(y_0 - y) \Longleftrightarrow m(x - x_0) = n(y_0 - y).$$

Daí, já que $mdc(m,n) = 1$, seque que $m \mid (y_0 - y)$. Assim, $y_0 - y = mt$, para algum $t \in \mathbb{Z}$. Tendo em vista que $m = \frac{a}{d}$, seque-se que:

$$y_0 - y = \frac{a}{d}t \Longleftrightarrow y = y_0 + \frac{a}{b}t.$$

Consequentemente, tem-se:

$$m(x - x_0) = n(y_0 - y) = nmt \Longrightarrow m(x - x_0) = nmt \Longleftrightarrow x = x_0 + nt.$$

Portanto, se (x_0, y_0) e (x, y) forem solução de $ax + by = c$, então existe $t \in \mathbb{Z}$, de modo que $(x_0 + \frac{b}{d}t, y_0 - \frac{a}{d}t)$ também é. □

Note que, no teorema anterior, se $d = mdc(a,b) = 1$, então, qualquer solução inteira é dada por

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \end{cases}$$

com $t \in \mathbb{Z}$.

E vale apena notar que uma equação diofantina linear $ax+by=c$ tem infinitas soluções, quando tem uma, significa geometricamente, que a reta que representa a equação $ax+by=c$, no plano cartesiano, possui uma infinidade de pontos de coordenadas inteiras, uma vez que o sistema representa a equação paramétrica de uma reta.

Exemplo 2.2. *O par ordenado* $(1,3)$ *é solução da equação* $2x+y=5$. *Logo, pelo Teorema 2.3 e como* $mdc(2,1)=1$, *para qualquer inteiro t, tem-se que*

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 3-2t \end{cases}$$

também é solução da equação.

Neste exemplo, para obter pares de inteiros não negativos que são soluções da equação, basta fazer:

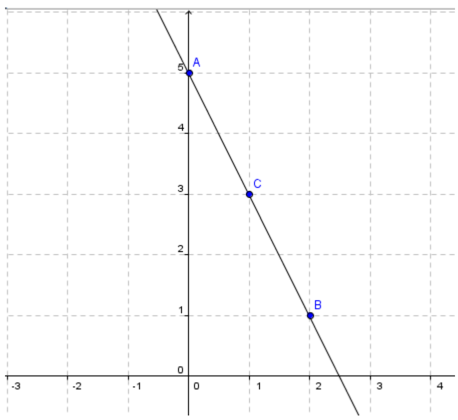
(i) $x \geq 0 \Longrightarrow 1+t \geq 0 \Longrightarrow t \geq -1$;

(ii) $y \geq 0 \Longrightarrow 3-2t \geq 0 \Longrightarrow t \leq \frac{3}{2} < 2$.

Logo, de (i) e de (ii) obtemos, $t=-1$, 0 ou 1. Daí, teremos:

- $t=-1 \Longrightarrow x=0$ e $y=5$;
- $t=0 \Longrightarrow x=1$ e $y=3$;
- $t=1 \Longrightarrow x=2$ e $y=1$.

Portanto, os únicos pares ordenados em que x e y são ambos não negativos, são $(0,5),(1,3)$ e $(2,1)$. Podemos representar a equação diofantina deste exemplo, no plano de coordenadas cartesianas. Veja o gráfico (construído no GeoGebra [1]), onde os pontos destacados representam as soluções inteiras não negativas da referida equação.



[1]GeoGebra é um Software gratuito de matemática dinâmica que reúne conceitos de geometria e álgebra.

Com o que foi exposto, podemos agora resolver algumas situações-problema que recaem em equações diofantinas lineares em duas variáveis. Resolver uma equação diofantina significa encontrar todos os pares de inteiros que satisfazem a mesma. Para isto, iremos utilizar duas estratégias de resolução: uma por tentativa, e a outra seguindo o procedimento do *Teorema 2.3*. De acordo com Fernandes ...[et al.] [8],

> "Certamente muitas equações diofantinas podem ser resolvidas por tentativa. Era essa, provavelmente, a maneira mais utilizada na Idade Média. Em muitos problemas as possibilidades são limitadas, de modo que não são necessárias muitas tentativas". (Fernandes ...[et al.],2005, p. 103).

Vejamos dois exemplos, em que utilizaremos em suas respectivas soluções, a estratégia por tentativa.

Exemplo 2.3. *Decomponha o número 100 em duas parcelas positivas tais que uma é múltipla de 7 e a outra é múltipla de 11.(ver [6], p. 52)*

Resolução. Denotaremos por $7x$ a parcela que é múltipla de 7 e por $11y$ a que é múltipla de 11. Daí, solucionar o problema, equivale a resolver a equação diofantina $7x+11y=100$, que possui solução, já que $mdc(7,11)=1$ divide 100. Daí:

$$7x+11y=100 \Longleftrightarrow x=\frac{100-11y}{7}.$$

Como estamos interessados em encontrar parcelas positivas, então devemos ter inteiros $x>0$ e $y>0$. Consequentemente, segue-se que $100-11y>0$, ou seja, $y<\frac{100}{11}<10$, o que nos dá $0<y<10$. Tomando sucessivamente $y\in\{1,2,\ldots,9\}$, encontraremos o valor de x correspondente. Assim, temos:

- $y=1 \Longrightarrow x=\frac{100-11\cdot 1}{7}=\frac{89}{7}$;
- $y=2 \Longrightarrow x=\frac{100-11\cdot 2}{7}=\frac{78}{7}$;
- $y=3 \Longrightarrow x=\frac{100-11\cdot 3}{7}=\frac{67}{7}$;
- $y=4 \Longrightarrow x=\frac{100-11\cdot 4}{7}=\frac{56}{7}=8$;
- $y=5 \Longrightarrow x=\frac{100-11\cdot 5}{7}=\frac{45}{7}$;
- $y=6 \Longrightarrow x=\frac{100-11\cdot 6}{7}=\frac{34}{7}$;
- $y=7 \Longrightarrow x=\frac{100-11\cdot 7}{7}=\frac{23}{7}$;
- $y=8 \Longrightarrow x=\frac{100-11\cdot 8}{7}=\frac{12}{7}$;
- $y=9 \Longrightarrow x=\frac{100-11\cdot 9}{7}=\frac{1}{7}$.

Dessa forma, o único par de inteiros que satisfaz a equação $7x+11y=100$ é $(8,4)$. Portanto, as parcelas são $7\cdot 8=56$ e $11\cdot 4=44$.

Exemplo 2.4. *Uma agência de correios possui apenas selo de 14 centavos e de 21 centavos. Determine as possíveis combinações desses selos para postar uma carta que tem o valor postal de R$1,40.*

Resolução. Seja x o número de selos de 14 centavos e y o número de selos de 21 centavos, então devemos ter $14x+21y = 140$ (R\$1,40=140 centavos). Note que o $mdc(14,21) = 7$ divide 140, logo a equação possui solução. Daí:

$$14x+21y = 140 \Longleftrightarrow 2x+3y = 20 \Longleftrightarrow x = \frac{20-3y}{2}.$$

Ora, de acordo com a natureza do problema devemos ter $x \geq 0$ e $y \geq 0$, consequentemente,

$$20-3y \geq 0 \Longrightarrow y \leq \frac{20}{3} < 7.$$

Daí segue-se que,

$$0 \leq y < 7 \Longrightarrow y \in \{0,1,\ldots,6\}.$$

Assim, teremos:

- $y = 0 \Longrightarrow x = \frac{20-3\cdot0}{2} = \frac{20}{2} = 10;$
- $y = 1 \Longrightarrow x = \frac{20-3\cdot1}{2} = \frac{17}{2};$
- $y = 2 \Longrightarrow x = \frac{20-3\cdot2}{2} = \frac{14}{2} = 7;$
- $y = 3 \Longrightarrow x = \frac{20-3\cdot3}{2} = \frac{11}{2};$
- $y = 4 \Longrightarrow x = \frac{20-3\cdot4}{2} = \frac{8}{2} = 4;$
- $y = 5 \Longrightarrow x = \frac{20-3\cdot5}{2} = \frac{5}{2};$
- $y = 6 \Longrightarrow x = \frac{20-3\cdot6}{2} = \frac{2}{2} = 1.$

Logo, temos 4 combinações possíveis, que são: 10 selos de 14 centavos e zero selo de 21 centavos; 7 selos de 14 centavos e 2 selos de 21 centavos; 4 selos de 14 centavos e 4 selos de 21 centavos; 1 selos de 14 centavos e 6 selos de 21 centavos.

A seguir apresentaremos dois exemplos no quais usaremos o roteiro do *Teorema 2.3*.

Exemplo 2.5. *Determine todos os naturais que divididos por 16 deixam resto 6 e, que divididos por 12, deixam resto 10.*

Resolução. Seja w o número natural tal que $w = 16x+6$ e $w = 12y+10$. Comparando as equações, vem que:

$$16x+6 = 12y+10 \Longleftrightarrow 16x-12y = 4 \Longleftrightarrow 4x-3y = 1.$$

Logo, como $mdc(4,3) \mid 1$, a equação possui solução. Agora, vamos encontrar uma solução particular. Para isto, consideremos o algoritmo euclidiano, $4 = 3\cdot1+1$, ou seja, $1 = 4\cdot1+3\cdot1$, portanto, $(1,1)$ é uma solução. Dessa forma, de acordo o *Teorema 2.3*, a solução geral é dada por:

$$\begin{cases} x = 1-3t \\ y = 1-4t \end{cases}$$

sendo $t \in \mathbb{Z}$.

Porém, como estamos interessados somente nos números naturais, o sistema acima pode ser, com $r \in \mathbb{N}$, escrito como:

$$\begin{cases} x = 1 + 3r \\ y = 1 + 4r \end{cases}$$

para a obtenção do último sistema de equações foi feito $r = -t$. Com isso, note que, ao substituir os valores obtidos para x e y, em $4x - 3y = 1$, obtemos:

$$4(1+3r) - 3(1+4r) = 4 + 12r - 3 - 12r = 1.$$

Deste modo, todos os números que atendem o problema são da forma $w = 16x + 6 = 16(1+3r) + 6 = 22 + 48r$. Portanto, $w = 22 + 48r$, com $r \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.6. *Um cachecol custa, na cidade de Coité do Nóia, 19 reais, mas o caso é que o comprador, que comprou apenas um cachecol, só tem notas de 2 reais, e o caixa só tem notas de 5 reais. Nessas condições, será possível pagar a importância da compra, e de que modo? (Suponha que a quantidade máxima de notas de cada tipo seja 40).*

Resolução. Seja x a quantidade de notas de 2 reais e y a quantidade de notas de 5 reais. Assim, podemos traduzir o problema pela equação diofantina $2x - 5y = 19$. Esta tem solução inteira, já que $mdc(2,5) \mid 19$. Daí, pelo *Algoritmo de Euclides*, tem-se:

$$5 = 2 \cdot 2 + 1 \Longleftrightarrow 1 = 5 - 2 \cdot 2,$$

então, $1 = 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1$, o que nos fornece, multiplicando por 19,

$$2 \cdot 57 - 5 \cdot 19 = 19.$$

Logo, o par $(57, 19)$ é uma solução da equação $2x - 5y = 19$. Dessa a solução geral, com $t \in \mathbb{Z}$, tem a forma:

$$\begin{cases} x = 57 - 5t \\ y = 19 - 2t \end{cases}$$

com as restrições do problema, estamos buscando soluções inteiras positivas, para isto, deve-se ter $57 - 5t > 0$ e $19 - 2t > 0$, ou seja, $t < 10$, e como $t \geq 4$ (já que x , $y < 40$). Então, segue-se que $4 \leq t < 10$. Daí, testando os casos:

- $t = 4 \Longrightarrow x = 57 - 5 \cdot 4 = 37$ e $y = 19 - 2 \cdot 4 = 11$;
- $t = 5 \Longrightarrow x = 57 - 5 \cdot 5 = 32$ e $y = 19 - 2 \cdot 5 = 9$;
- $t = 6 \Longrightarrow x = 27$ e $y = 7$;
- $t = 7 \Longrightarrow x = 22$ e $y = 5$;
- $t = 8 \Longrightarrow x = 17$ e $y = 3$;

- $t = 9 \Longrightarrow x = 12$ e $y = 1$.

Portanto, de acordo com as condições do problema, é possível pagar a compra de 6 modos, que são eles: 37 notas de 2 reais e 11 notas de 5 reais; 32 notas de 2 reais e 9 notas de 5 reais; 27 notas de 2 reais e 7 notas de 5 reais; 22 notas de 2 reais e 5 notas de 5 reais; 17 notas de 2 reais e 3 notas de 5 reais; 12 notas de 2 reais e 1 notas de 5 reais.

Como vimos nos exemplos anteriores, de acordo com as restrições impostas às soluções de uma equação diofantina linear, estas podem ser indeterminadas, determinadas ou não existirem soluções. Vale ressaltar também que apesar de termos resolvido os exemplos utilizando dois "métodos", poderíamos combinar estes ou utilizar outros procedimentos em suas resoluções, pois dependendo da situação-problema estudada, não temos um roteiro a seguir como se fosse uma receita de bolo. No entanto, com a compreensão dos dois teoremas desta seção, e das resoluções dos exemplos utilizando tentativa ou o roteiro do *Teorema 2.3*, o leitor terá uma boa base para resolver problemas que recaem em equações diofantinas lineares em duas variáveis.

2.2.1 Equações diofantinas lineares com três variáveis

Passamos agora a estudar, por meio de exemplos, equações diofantinas lineares com três incógnitas. Usaremos em suas resoluções estratégias que, de alguma forma, assemelham-se com as estratégias usadas na resolução das equações diofantinas anteriores.

Exemplo 2.7. *Combinando moedas de 1, 10, e 25 centavos, como podemos totalizar 59 centavos?*

Resolução. Denotando por x o número de moedas de 1 centavo, por y as moedas de 10 e por z as moedas de 25 centavos, teremos a seguinte equação diofantina:

$$1x + 10y + 25z = 59.$$

Fazendo $10y + 25z = 5w$, seque-se que:

$$1x + 5w = 49 \Longrightarrow x = 59 - 5w \Longrightarrow w \in \{0, 1, 2, ..., 11\},$$

já que se deve ter $x \geq 0$.

Por outro lado, $10y + 25z = 5w$ equivale a $2y + 5z = w$ (*). Vamos resolver a equação $(*)$. Para tal, aplicando o algoritmo da divisão para 5 e 2, tem-se:

$$5 = 2 \cdot 2 + 1 \Longrightarrow 1 = 5 - 2 \cdot 2 \Longrightarrow w = 5w - 2w \cdot 2 \Longrightarrow 2 \cdot (-2w) + 5 \cdot w = w.$$

Logo, $(-2w, w)$ é uma solução da equação (*). Assim, a solução geral desta é dada por:

$$\begin{cases} y = -2w + 5t \\ z = w - 2t \end{cases}$$

com $t \in \mathbb{Z}$.

Dessa forma, a solução geral da equação diofantina $1x+10y+25z=59$, é dada por:

$$\begin{cases} x = 59-5w \\ y = -2w+5t \\ z = w-2t \end{cases}$$

com $w \in \{0,1,2,\ldots,11\}$ e com $t \in \mathbb{Z}$. Onde devemos ter $-2w+5t \geq 0$ e $w-2t \geq 0$, daí segue-se que $\frac{2w}{5} \leq t \leq \frac{w}{2}$. Dessa forma, atribuindo os valores correspondentes de w encontraremos os respectivos valores inteiros de *t, x, y* e *z*, assim teremos:

w	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	10	11
t	0	*	1	*	2	2	3	3	4	4	4	5	5
x	59	*	49	*	39	34	29	24	19	14	9	9	4
y	0	*	1	*	2	0	3	1	4	2	0	5	3
z	0	*	0	*	0	1	0	1	0	1	2	0	1

Tabela 2.1 Possíveis soluções inteiras da equação $1x+10y+25z=59$. Em que, o símbolo * indica que a solução é não inteira.

Portanto, temos 11 possibilidades de combinar moedas de 1, de 10 e de 15 centavos para totalizar 59 centavos, descritas na tabela acima.

Observação 2.1 Escolhemos $5w = 10y+25z$, pois facilita a forma da equação, por ser divisível por 5.

Podemos notar no exemplo anterior, que poderíamos resolvê-lo atribuindo possíveis valores para as quantidades de moedas de 1, de 10 e de 25 centavos que totalizasse 59 centavos, isto é, poderíamos utilizar a estratégia de tentativa e erro em sua resolução. Ao analisar a equação diofantina, $1x+10y+25z=59$, está possui soluções inteiras, porque o $mdc(1,10,25)=1$ e 1 divide 59, consequentemente, ela tem infinitas soluções inteiras, dada pela solução geral:

$$\begin{cases} x = 59-5w \\ y = -2w+5t \\ z = w-2t \end{cases}$$

com $t, w \in \mathbb{Z}$.

Caso contrário, se o *mdc* dos coeficientes das variáveis não dividir o termo independente da equação diofantina dada, a mesma não possuiria soluções inteiras.

Proposição 2.4. *A equação diofantina linear $ax+by+cz=k$, onde a, b, c e k são inteiros não nulos, possui solução inteira se, e somente se, $d = mdc(a,b,c)$ divide k.*

Demonstração. Inicialmente, se (x_0, y_0, z_0) é uma solução inteira da equação, então, tem-se que $ax_0+by_0+cz_0=k$. Seja $d = mdc(a,b,c)$, então, $d \mid a, d \mid b$ e $d \mid c$, daí tem-se que $d \mid ax_0, d \mid by_0$ e $d \mid cz_0$, logo, $d|ax_0+by_0+cz_0=k$.

Reciprocamente, se $d = mdc(a,b,c)$ divide k, então existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $k = dm$. Seja $d_1 = mdc(a,b)$ e $d_2 = mdc(d_1,c)$, então, existem *r,s,t* e u inteiros tais que: $ar+bs = d_1$ e $d_1t+cu = d_2$. Daí vem que:

$$(ar+bs)t+cu = d_2 \Longrightarrow art+bst+cu = d_2 \Longrightarrow a(rtm)+b(stm)+c(um) = d_2m.$$

Como $d = mdc(a,b,c) = mdc((a,b),c) = mdc(d_1,c) = d_2$, segue-se que $a(rtm)+b(stm)+c(um) = dm = k$. Portanto, (rtm,stm,um) é uma solução particular da equação diofantina linear $ax+by+cz = k$. $\square$

Já a solução geral de uma equação diofantina linear com três variáveis, o leito interessado pode encontrar em [15]. Porém, não iremos descrever aqui, por acreditarmos que ao saber a solução geral das EDL com duas variáveis tornar-se fácil encontrar tal solução e também por possuírem várias estratégias de resolução. Assim, faremos seu estudo por meio de um exemplo.

Exemplo 2.8. *Encontre a solução geral da EDL* $3x+10y+25z = 59$.

Resolução. Primeiro a equação possui solução, pois $mdc(3,10,25) = 1$ e $1 \mid 59$. Agora, vamos calcular uma solução particular da equação. Para isto, utilizaremos o *Algoritmo de Euclides*. Tomando $3x+10y = w$, e $w = mdc(3,10) = 1$, então:

$$10 = 3\cdot 3+1 \Longrightarrow 1 = 1\cdot 10-3\cdot 3 \Longrightarrow 3\cdot(-3)+10\cdot 1 = 1 \Longrightarrow 3\cdot(-3w)+10\cdot 1w = w.$$

Logo $(-3w,w)$ é uma solução particular de $3x+10y = w$ e a sua solução geral é:

$$(*)\begin{cases} x = -3w+10t \\ y = w-3t \end{cases}$$

com $t \in \mathbb{Z}$. Agora vamos resolver a equação $w+25z = 59$. Note que $(9,2)$ é uma solução particular, então, sua solução geral, com $t \in \mathbb{Z}$, será:

$$\begin{cases} w = 9+25t \\ z = 2-t \end{cases}.$$

Substituindo o valor de w em $(*)$, encontraremos a solução geral da equação diofantina $3x+10y+25z = 6$,

$$\begin{cases} x = -3(9+25t)+10t \\ y = 9+25t-3t \\ z = 2-t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -27-65t \\ y = 9+22t \\ z = 2-t \end{cases}$$

com $t \in \mathbb{Z}$.

2.2.2 Sistema de equações diofantinas lineares

Vejamos duas situações-problema que são representadas por meio de sistemas de equações diofantinas lineares, que recaem em EDL com duas variáveis.

Exemplo 2.9. *Se um galo vale 5 moedas, uma galinha vale 3 e três frangos valem 1, quantos de cada um se pode comprar com 100 moedas, de modo que sejam 100 aves ao todo e pelo menos 4 galos? (ver [9], p. 153)*

Resolução. Seja x o números de galos comprados $(x \geq 4)$, y o números de galinhas e z o número de galos. Daí, de acordo com enunciado, o problema pode ser representado pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} 5x+3y+\frac{1}{3}z = 100 \\ x+y+z = 100 \end{cases},$$

em que a primeira equação do sistema representa o número de moedas e a segunda equação representa o número de animais. Que pode ser simplificado como segue:

$$\begin{cases} 15x+9y+z = 300 \\ x+y+z = 100 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 15x+9y+z = 300 \\ -x-y-z = -100 \end{cases}.$$

Daí, somando membro a membro das equações do último sistema, obtemos:

$$14x+8y = 200 \Longrightarrow 7x+4y = 100.$$

Agora basta resolver a EDL $7x+4y = 100$. Assim, pelo *Algoritmo da Divisão* temos:

$$7 = 4\cdot 1+3 \text{ e } 4 = 3\cdot 1+1.$$

Então:

$$1 = 4-3\cdot 1 = 4-(7-4\cdot 1)\cdot 1 = 4\cdot 2-7\cdot 1 \Longleftrightarrow -7\cdot 1+4\cdot 2 = 1$$

Multiplicando por 100, tem-se $7\cdot(-100)+4\cdot 200 = 100$, logo, $(-100, 200)$ é uma solução da $7x+4y = 100$. Assim, sua solução geral é dada por:

$$\begin{cases} x = -100+4t \\ y = 200-7t \end{cases},$$

com $t \in \mathbb{Z}$. Onde devemos ter:

$-100+4t \geq 4 \Longrightarrow 4t \geq 104 \Longrightarrow t \geq \frac{104}{4} = 26$, e $200-7t \geq 0 \Longrightarrow t \leq \frac{200}{7} \cong 28,57$.

Logo, $t \in \{26, 27, 28\}$, o que nos dá:

- Para $t = 26$:

$$\begin{cases} x = -100+4\cdot 26 = 4 \\ y = 200-7\cdot 26 = 18 \end{cases} \Longrightarrow z = 100-4-18 = 78,$$

  a solução $(4, 18, 78)$;

- Para $t = 27$

$$\begin{cases} x = -100+4\cdot 27 = 8 \\ y = 200-7\cdot 27 = 11 \end{cases} \Longrightarrow z = 100-8-11 = 81,$$

  a solução $(8, 11, 81)$;

- Para $t = 28$
$$\begin{cases} x = -100 + 4 \cdot 28 = 12 \\ y = 200 - 7 \cdot 28 = 4 \end{cases} \Longrightarrow z = 100 - 12 - 4 = 84,$$
a solução $(12, 4, 84)$.

Portanto, se pode comprar 4 galos, 18 galinhas e 78 frangos; ou 8 galos, 11 galinhas e 81 frangos; ou 12 galos, 4 galinhas e 84 frangos.

Poderíamos ter usado a estratégia de tentativa, a partir da equação $7x + 4y = 100$,ou equivalentimente, $y = \frac{100-7x}{4}$, onde $x \geq 4$ e $100 - 7x > 0$, isto é, $x < \frac{100}{7} \cong 14,29$. Logo, $x \in \{4, 5, 6, \ldots, 13, 14\}$, o que nos daria, atribuindo valores para x, a mesma solução encontrada acima, como ilustra a tabela abaixo:

x	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y	18	*	*	*	11	*	*	*	4	*	*
z	78	*	*	*	81	*	*	*	84	*	*

Tabela 2.2 Representa as possíveis soluções inteiras do exemplo 2.9. Em que, o símbolo * indica que a solução é não inteira.

Exemplo 2.10. *Uma pessoa foi ao banco para descontar um cheque no valor de x reais e y centavos. O caixa do banco errou na leitura do valor do cheque e pagou y reais e x centavos. A pessoa guardou o dinheiro no bolso sem verificar a quantia. No caminho de casa, ela gastou sessenta e oito centavos e quando chegou em casa verificou que tinha exatamente o dobro do valor do cheque. Sabendo-se que essa pessoa não levou dinheiro nenhum consigo quando foi ao banco, pergunta-se qual era o valor do cheque.*

Resolução. De acordo o problema, temos duas situações:

1. O valor do cheque em centavos é dado por: $R\$x, y = 100x + y$
2. O valor errado pago pelo caixa em centavos foi: $R\$y, x = 100y + x$. Daí, ao gastar 68 centavos ela verificou que ficou com o dobro do valor do cheque.

Assim, tem-se que:

$$100y + x - 68 = 2(100x + y) \Longleftrightarrow -199x + 98y = 68 \Longleftrightarrow 199x - 98y = -68.$$

Aplicando, o *Algoritmo de Euclides*, teremos:

$$\begin{aligned} 199 &= 2 \cdot 98 + 3 \\ 98 &= 32 \cdot 3 + 2 \end{aligned}$$

$$3 = 1 \cdot 2 + 1 \Longrightarrow 1 = 3 - 1 \cdot 2 = 3 - 1 \cdot (98 - 32 \cdot 3) = 3 \cdot 33 - 1 \cdot 98 = (199 - 2 \cdot 98)33 - 1 \cdot 98,$$

o que nos dá:

$$199 \cdot 33 - 98 \cdot 67 = 1 \Longrightarrow 199 \cdot (-2244) - 98 \cdot (-4556) = -68.$$

Logo, $(-2244, -4556)$ é uma solução particular da EDL $199x - 98y = -68$, e sua solução geral é dada por:

$$\begin{cases} x = -2244 - 98t \\ y = -4556 - 199t \end{cases},$$

com $t \in \mathbb{Z}$. Mas, como devemos ter:

$$-2244 - 98t > 0 \Longrightarrow t < \tfrac{-2244}{98} \cong -22,9 \text{ e } -4556 - 199t < 0 \Longrightarrow t < \tfrac{-4556}{199} \cong -22,9.$$

Então, $t \in \{-23, -24, -25, -26, \dots\}$, assim, teremos quando $t = -23$:

$$\begin{cases} x = -2244 - 98 \cdot (-23) = 10 \\ y = -4556 - 199 \cdot (-23) = 21 \end{cases}.$$

De acordo com as condições do problema, esta é a única possibilidade, pois quando $t = -24, -25, -26, \dots$, teremos $y > 100$ o que não é possível, já que y representa os centavos $(y < 100)$.

Portanto, o valor do cheque era $R\$10,21$.

2.3 Equações diofantinas não lineares

As equações diofantinas não lineares também estão presentes no currículo da matemática quando estudamos as soluções inteiras, por exemplo, do Teorema de Pitágoras, onde relaciona os lados de um triângulo retângulo. Assim, nessa seção faremos apenas uma introdução, onde falaremos inicialmente da diferença de dois quadrados e, posteriormente, das ternas pitagóricas.

2.3.1 Diferença de dois quadrados

Agora estamos interessados em encontrar as soluções inteiras das equações diofantinas não lineares do tipo $x^2 - y^2 = n$. Por exemplo, a equação $x^2 - y^2 = 16$ possui soluções inteiras? E a equação $x^2 - y^2 = 14$? Em caso afirmativo, quais são elas?

Para $x^2 - y^2 = 16$, seque-se, fatorando o primeiro membro, que:

$$(x+y)(x-y) = 16.$$

Como a fatoração de 16 é:

$$\begin{cases} 16 = 16 \cdot 1 \\ 16 = 2 \cdot 8 \\ 16 = 4 \cdot 4 \end{cases}.$$

O que nos dá as seguintes possibilidades de sistemas de equações:

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ x - y = 1 \end{cases} \Longrightarrow 2x = 17,$$

nesse caso, não possui solução inteira.

$$\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=2 \end{cases} \Longrightarrow 2x=10 \Longrightarrow x=5, y=3.$$

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=4 \end{cases} \Longrightarrow 2x=8 \Longrightarrow x=4, y=0.$$

Portanto, as únicas soluções inteiras da equação $x^2-y^2=16$ são $(5,3)$ e $(4,0)$.

Já a equação $x^2-y^2=14$, não possui soluções inteiras, pois:

$$x^2-y^2=14 \Longrightarrow (x+y)(x-y)=14,$$

e a fatoração de 14 é

$$\begin{cases} 14=14\cdot 1 \\ 14=7\cdot 2 \end{cases}.$$

Daí vem:

$$\begin{cases} x+y=14 \\ x-y=1 \end{cases} \Longrightarrow 2x=15,$$

nesse caso, não possui solução inteira.

$$\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=2 \end{cases} \Longrightarrow 2x=9,$$

também não possui solução inteira.

O próximo teorema nos diz que quando a equação $x^2-y^2=n$ possui solução inteira.

Teorema 2.5. *Um número inteiro n pode ser escrito como diferença de dois quadrados perfeitos, $n=x^2-y^2$, se, e somente se, se n é ímpar ou múltiplo de 4.*

Demonstração. Fazendo $u=x+y$ e $v=x-y$, tem-se que:

$$n=x^2-y^2=(x+y)(x-y)=u\cdot v(*)$$

Por outro lado, o sistema:

$$\begin{cases} x+y=u \\ x-y=v \end{cases},$$

possui solução inteira se, e somente se, o sistema:

$$\begin{cases} 2x=u+v \\ 2y=u-v \end{cases},$$

também possuir.

Portanto, u e v devem ter a mesma paridade, pois, caso contrário, se u for par e v for ímpar, daí vem que $u+v$ e $u-v$ seriam ímpares, o nos daria um absurdo. Assim, temos duas possibilidades:

1. u e v são pares.

2. u e v são ímpares.

Ora, se u e v são pares, então existem inteiros a e $b \in \mathbb{Z}$ tais que $u = 2a$ e $v = 2b$, consequentemente, substituindo em $(*)$, teremos $n = u \cdot v = 2a \cdot 2b = 4ab$, n múltiplo de 4.

Se u e v são ímpares, então, n será ímpar, já que $n = u \cdot v$ (produto de dois ímpares é ímpar).

Portanto, seque-se que n é ímpar ou múltiplo de 4. $\square$

2.3.2 Ternas pitagóricas

Estamos interessados neste momento, em estudar todas as ternas (x, y, z) de inteiros positivos que satisfazem a relação $x^2 + y^2 = z^2$, a qual representa uma equação diofantina não linear. A terna pitagórica (x, y, z) é dita **primitiva** se $mdc(x, y, z) = 1$. Assim, a terna $(3, 4, 5)$ é pitagórica, pois $3^2 + 4^2 = 5^2$ e, é primitiva, já que $mdc(3, 4, 5) = 1$.

Lema 2.6. *Seja (x, y, z) uma terna pitagórica, então, x e y não podem ser ambos ímpares.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo que, x e y sejam ambos ímpares, ou seja, $x = 2a + 1$ e $y = 2b + 1$, onde a, $b \in \mathbb{Z}$. Daí, como

$$
\begin{aligned}
z^2 &= x^2 + y^2 \\
&= (2a+1)^2 + (2b+1)^2 \\
&= 4a^2 + 4a + 1 + 4b^2 + 4b + 1 \\
&= 4(a^2 + a + b^2 + b) + 2 \\
&= 4k + 2,
\end{aligned}
$$

onde $k = (a^2 + a + b^2 + b)$. Logo, z^2 é par, então, z é par.

Mas se z é par, então $z = 2n$ e $z^2 = 4n^2$, com $n \in \mathbb{Z}$. Isto daria o seguinte absurdo, $4n^2 = 4k + 2$, ou seja, $2n^2 = 2k + 1$ (par=ímpar). $\square$

Lema 2.7. *Se (x, y, z) é uma terna pitagórica primitiva, então, $mdc(x, y) = mdc(x, z) = mdc(y, z) = 1$.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo que $mdc(x, z) = d > 1$. Daí existe a e b inteiros tais que $x = ad$ e $z = bd$. Então, como $x^2 + y^2 = z^2$, seque-se que:

$$(ad)^2 + y^2 = (bd)^2 \Longrightarrow a^2d^2 + y^2 = b^2d^2 \Longrightarrow d^2 \mid y^2.$$

Daí segue-se que $d \mid y$, logo, $d = mdc(x, y, z)$ o que implica $d \leq 1$, já que (x, y, z) é uma terna pitagórica primitiva, chegando assim em um absurdo. $\square$

Teorema 2.8. *Seja (x, y, z) uma terna pitagórica primitiva em que y é par. Então, existem m e n inteiros positivos, primos entre si, de paridade distintas e $m > n$, tais que:*

$$x = m^2 - n^2; \quad y = 2mn \quad e \quad z = m^2 + n^2$$

Demonstração. De acordo com o *lema 2.6*, temos que x é ímpar, já que y é par. Dai, seque-se que z é ímpar, pois $z^2 = x^2 + y^2$ (ímpar + par = ímpar). Como,

$$y^2 = z^2 - x^2 = (z+x)(z-x) \text{ e, } z \text{ e } x \text{ são ímpares, então } (z+x) \text{ e } (z-x) \text{ são pares.}$$

Logo, existem u e v inteiros positivos, tais que $z+x = 2u$ e $z-y = 2v$, com $u > v$.Assim, $u = \frac{z+x}{2}$ e $v = \frac{z-x}{2}$, além disso, $mdc(u,v) = 1$, pois, pelo *lema 2.7*, quando $mdc(z,x) = 1$ e d divide u e v, então d dividirá $u+v = z$ e $u-v = x$, e portanto $d = 1$.

Por outro lado, $y^2 = uv$, isto é, o produto uv é um quadrado, mas como u e v não possuem fator em comum $(mdc(u,v) = 1)$, então, u e v são quadrados. Logo, existem inteiros positivos m e n, primos entre si, tais que: $u = m^2$ e $v = n^2$. Dessa forma, teremos:

$$u = \tfrac{z+x}{2} = m^2 \Longrightarrow u = z+x = 2m^2 \text{ e } v = \tfrac{z-x}{2} = n^2 \Longrightarrow v = z-x = 2n^2,$$

o que nos dá $y^2 = uv = 2m^2.2n^2 = 4m^2n^2$, e portanto, $y = 2mn$. E resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} z+x = 2m^2 \\ z-x = 2n^2 \end{cases},$$

obtemos $x = m^2 - n^2$ e $z = m^2 + n^2$, logo, m e n têm paridade distintas, já que z é ímpar.

Portanto, podemos concluir que todas as triplas pitagóricas primitivas são dadas palas fórmulas:

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn \quad e \quad z = m^2 + n^2. \quad \square$$

O resultado acima, além de gerar uma fórmula para calcular as ternas pitagóricas primitivas, mostra que são infinitas, basta fazer m e n variar. O assunto relacionado aos dois tópicos desta seção pode ser encontrado, por exemplo, em [22] e para o aprofundamento sobre equações diofantinas não lineares, sugerimos ao leitor interessado, consultar [7] ou [11] das referências. Vejamos dois exemplos, onde um deles é referente a diferença de dois quadrados e o outro a ternas pitagóricas.

Exemplo 2.11. *(OBM) Quantos são os pares (x,y) de inteiros positivos tais que $x^2 - y^2 = 2^{2010}$?*

A) 1000 B) 1001 C) 1002 D) 1003 E) 1004

Resolução. Note que $x^2 - y^2 = 2^{2010}$ se, e somente se, $(x+y)(x-y) = 2^{2010}$. Logo, existem inteiros positivos a e b, tais que $x+y = 2^a$ e $x-y = 2^b$, com $a+b = 2010$ e $a > b$. Assim, é fácil ver que os pares de inteiros (a,b) que geram sistemas da forma:

$$\begin{cases} x+y = 2^a \\ x-y = 2^b \end{cases},$$

são $(2009,1),(2008,2),(2007,3),\ldots,(1007,1003),(1006,1004)$, em um total de 1004 pares. Note que, ao somar membro a membro das equações do sistema acima, obtemos $2x = 2^a + 2^b$, então $x = 2^{a-1} + 2^{b-1}$ que é um inteiro positivo. E ao subtrair membro a membro, teremos:

$$2y = 2^a - 2^b \Longrightarrow y = 2^{a-1} - 2^{b-1},$$

como $a > b \geq 0$, então $a = b + k$, onde $k = a - b > 0$. Daí:

$$y = 2^{b+k+1} - 2^{b+1} = 2^{b+1}(2^k - 1) > 0,$$

uma vez que $k > 0$ implica $2^k > 2^0 = 1$.

Logo, como para cada par de inteiros (a,b) temos um único correspondente par (x,y), então podemos concluir que existem 1004 pares de inteiros positivos (x,y).

Exemplo 2.12. *Determinar todas as ternas pitagóricas (x,y,z) tais que x,y e z estão em progressão aritmética.*

Resolução. Sejam $x = a - r, y = a$ e $z = a + r$, onde a e r são inteiros positivos. Daí, como $z^2 = x^2 + y^2$, então, $(a+r)^2 = a^2 + (a-r)^2$, ou seja, $a^2 - 4ra = 0$. Resolvendo teremos $a = 0$ (não serve) ou $a = 4r$. Isto nos dá, $x = 3r, y = 4r$ e $z = 5r$. Portanto, todas as ternas são da forma $(3r, 4r, 5r)$.

EXPLORANDO O ENSINO DE EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES NO ENSINO FUNDAMENTAL

Neste capítulo, será descrito uma sequência de atividades didáticas que irá explorar, com base nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), no estudo feito em torno do conceito de equações diofantinas e nas experiências da prática de sala de aula como professor da Educação Básica, o ensino das equações diofantinas lineares e algumas questões acerca deste assunto que podem ser desenvolvidas na Educação Básica.

3.1 Sequência de atividades para uso no Ensino Fundamental

A sequência de atividades didáticas que será descrita ao longo deste capítulo é destinada à alunos dos anos finais do Ensino Fundamental (8º e 9º anos), tendo em vista que estudantes deste ciclo já possuem certo conhecimento sobre os números racionais, em especial, sobre operações e propriedades que envolvem os números naturais e inteiros, divisibilidade, e também já estudaram de forma introdutória a resolução de uma equação de 1º grau, de um sistema de equações de 1º grau, de inequações de 1º grau, entre outros. Dessa forma, subentende-se que alunos desse nível de escolaridade já possuem uma boa base para compreender a exploração de situações-problema que recaem em equações diofantinas lineares.

Nesse sentido, vale observar que as equações diofantinas lineares (EDL) são estudadas de forma implícita no Ensino Fundamental ao estudar as equações lineares com duas variáveis, o qual é feito geralmente após o estudo de equações de 1º grau e antes de estudar os sistemas de equações lineares, quando em uma determinada situação requer que restringimos as respectivas soluções ao conjunto dos números inteiros. Vale ressaltar que numerosas situações-problema do dia a dia requerem soluções inteiras e que podem ser modeladas via equações lineares com duas variáveis, ou seja, por EDL.

Dessa forma, para a aplicação dessa sequência de atividades didáticas, onde serão descritas quatro atividades, envolvendo situações-problema que incidem principalmente em equações diofantinas lineares e alguns tópicos relacionados, sugerimos ao professor que destine um período previsto de cinco aulas seguidas. Tendo em vista que a motivação para a realização de uma determinada atividade, para a maioria dos alunos, está relacionada com uma avaliação, recomendamos ao professor que a avaliação dos alunos seja feita principalmente por sua participação no desenvolvimento das atividades e para o cumprimento das referidas atividades, o professor poderá solicitar aos alunos que formem duplas, ou trios, ou até mesmo pequenos grupos de quatro alunos (fica a critério do professor). Com isso, pretende-se obter um maior envolvimento dos alunos na resolução dos problemas propostos nas atividades.

Por fim, para cada uma das quatro atividades propostas, será feito a apresentação, a descrição geral e as recomendações metodológicas. E também constará no apêndice a resolução das questões apresentadas nesta sequência de atividades. Vejamos a descrição das atividades.

3.1.1 Descrição da primeira atividade

A primeira atividade da sequência (atividade 1) possibilita ao professor do quarto ciclo fazer uma revisão de alguns conteúdos já estudados pelos estudantes no ciclo anterior, de maneira não repetitiva, onde ele poderá também aprofundar os conteúdos estudados nesta atividade, de acordo com a realidade e necessidade da turma, na qual a atividade é aplicada. Além disso, consta uma primeira situação problema que recai em uma equação diofantina linear com duas variáveis. Vejamos as etapas para aplicação da atividade 1.

Etapa 1: Apresentação da atividade

Nesse momento, o professor entrega uma copia da atividade a cada dupla ou trio formado. Recomenda-se, antes que os alunos iniciem a resolução da atividade, que o professor faça uma leitura detalhada e compartilhada com os alunos de todas as questões, objetivando esclarecer eventuais dúvidas com relação aos enunciados das mesmas. Para então, pedir aos alunos resolverem as questões de tal atividade com atenção, em que, ao final deste primeiro momento de aplicação da atividade 1, serão recolhidas com respectivas respostas.

Atividade 1

1. Responda os seguintes problemas:

a) Quais são os possíveis restos na divisão de um número natural n por 7?

n	7
Resto	Quociente

b) Qual o menor valor possível para a e o menor valor possível para b, na seguinte divisão?

a	b
17	6

c) Considerando os valores encontrados para a e b no item anterior, o que ocorre com a divisão, se dobramos o dividendo a? E se dobrarmos o dividendo a e o divisor b? E se aumentarmos em uma unidade o dividendo a?

d) (OBMEP) Qual é o resto da divisão de $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2011 + 21$ por 8?

a) 2 b) 3 c) 5 d) 6 e) 7

e) (OBM) Para homenagear a Copa do Mundo e as Olimpíadas no Brasil, Esmeralda, a prefeita da cidade Gugulândia, decidiu que seria feriado no dia x do mês de número y, onde x é o ultimo algarismo do número 2016^{2014} e y é o resto de 2014^{2016} na divisão por 11. Assim, esse feriado vai ser no dia:

A) 8 de março B) 6 de janeiro C) 4 de janeiro D) 6 de abril E) 6 de março

Obs.: O mês de janeiro corresponde ao mês de número 1, e assim por diante.

2. Uma indústria de tecidos fabrica retalhos de mesmo comprimento. Após realizarem os cortes necessários, verificou-se que duas peças restantes tinham as seguintes medidas: 546 centímetros e 312 centímetros. O gerente de produção ao ser informado das medidas pediu para que o funcionário José, cortasse o pano em partes iguais e de maior comprimento possível (sem desperdícios).

   a) Como ele poderá resolver essa situação?

   b) Fazendo o que lhe foi solicitado, quantos pedaços ao todo foram obtidos com o corte das referidas peças?

   c) É possível relsolver este problema utilizando o *Algoritmo da Divisão*? Justifique sua resposta.

Quociente	*	*	*
546	312	*	*
*	*	*	Resto

   d) Complete com números inteiros as identidades abaixo, de modo que, as tornem verdadeiras:

   i. $[] \cdot 4 + [] \cdot 7 = 1$

   ii. $[] \cdot 312 + [] \cdot 546 = 78$

3. Roberta e Marleide foram para casa de sua colega Adriana, fazer um trabalho escolar de Matemática. Para o lanche das meninas, a mãe de Adriana foi a uma sorveteria perto de sua casa, comprar dois tipos de sorvetes, um que custa R$1,00 real e o outro que custa R$2,00 reais. Com R$7,00 reais,

   a) quais as possibilidades de compra que ela tem?

   b) qual é a equação que representa esta situação?

   c) represente as soluções encontradas no item a, no plano cartesiano.

Etapa 2. Descrição geral

Esta atividade é composta de três questões, em que a primeira questão trata do algoritmo da divisão e divisibilidade de números inteiros positivos; onde os três primeiros itens trabalham com os elementos de uma divisão de dois números naturais e, os dois últimos itens que compõe a questão, foram retirados de provas das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e das Olimpíadas Brasileiras de Matemática (OBM), onde requer implicitamente a utilização do lema dos restos em suas respectivas resoluções. A segunda trata de uma situação-problema que pode ser resolvida utilizando o conceito do mdc, podendo ser calculado por meio do conjunto dos divisores ou fatores primos ou até mesmo utilizando o algoritmo da divisão. Na terceira e última questão desta atividade, tem-se uma situação problema que recai em uma EDL, que efetivamente inicia, com um problema aparentemente simples, a discussão da necessidade de estudar soluções inteiras para uma equação linear com duas variáveis que é estuda nos livros didáticos destinados para o Ensino Fundamental, assim como sua representação gráfica.

Objetivos:

- Revisar e aprofundar o entendimento sobre o Algoritmo da Divisão;
- Resolver situações-problema que envolvem divisibilidade;
- Aplicar o Algoritmo da Divisão para obtenção do mdc de dois números naturais;
- Aplicar o conceito do mdc para resolver situação-problema;
- Representar uma situação-problema por meio de uma equação;
- Obter soluções inteiras de uma equação linear com duas variáveis;
- Representar no plano cartesiano, soluções inteiras de uma equação linear com duas variáveis.

Pré-requisitos:

- Operações com números naturais e inteiros; noção de divisibilidade; máximo divisor comum (mdc); solução de uma equação linear com duas variáveis; plano cartesiano.

Tempo previsto:

- Duas aulas com dois tempos (de 50 minutos ou de 1 hora) cada.

Etapa 3: Recomendações metodológicas

Sugere-se ao professor, nesse primeiro momento (na primeira aula), deixar os alunos à vontade na resolução das questões, ou seja, não fazendo nenhuma interferência. Recolhendo as atividades com respectivas soluções para cada item, ao final da primeira aula. Dessa forma, de posse destas soluções, o professor poderá analisar quais as dificuldades apresentadas pelos alunos e em quais assuntos. Assim o docente vai dispor de um diagnóstico qualitativo para subsidiar suas intervenções para próxima aula. Logo, é viável que o professor responda todas as questões com os alunos, e assim, no segundo momento (na segunda aula), faça uma discussão direcionada visando atender sanar ou diminuir as dificuldades apresentadas. Desse modo, poderá iniciar a segunda aula, fazendo as seguintes perguntas: Quais itens da atividade vocês tiveram maior dificuldade em sua resolução? Teve algum item que não conseguiram responder? Com isso, o professor saberá quais itens os alunos acreditam terem acertado e quais acreditam terem errado em suas soluções. O professor deve solicitar que os alunos respondam no quadro negro (ou na lousa) àquelas questões que acreditam terem acertado, favorecendo com isto, uma interação e participação dos alunos na resolução da atividade, onde o professor poderá fazer interferências nas resoluções apresentadas, com intuito de contribuir por meio das correções quando necessário, ou seja, auxiliando na construção e na evolução dos conceitos estudados nesta atividade. E também respondendo, com base no diagnóstico realizado, principalmente aqueles itens que os mesmos não conseguiram responder ou não acertaram suas respostas. Dessa forma, acredita-se tornar a aula mais interessante tanto para o professor quanto para os alunos, tornando-lhes agentes na construção do seu próprio conhecimento matemático, em que eles deixam de serem sujeitos passivos, para serem sujeitos ativos na sua aprendizagem em matemática. Tudo isso, com o intuito de atender os objetivos almejados, preestabelecidos em cada conceito estudado.

Sendo assim, recomenda-se ao professor atenção nas possíveis dificuldades previstas e possíveis contribuições para os alunos na resolução da atividade.

Para a **questão 1**, tem-se:

a) Neste ciclo espera-se que o aluno responda corretamente este item, tendo em vista que eles já estudaram o Algoritmo da Divisão em séries anteriores. Mas, poderá ter respostas incompletas, por exemplo, com apenas um resto possível. Assim, faz-se necessário que o professor em sua resolução, faça algumas indagações como: se fosse, n dividido por 6, quais os possíveis restos? E por 5? E por 4?. Fazendo, com isso, os alunos concluírem que um número natural n qualquer pode admitir uma das formas, quando dividido por 3, por exemplo, $3q, 3q+1$ ou $3q+2$, com q natural; tornando claro que o resto é sempre menor que o divisor.

b) Objetiva-se que os alunos escrevam a relação $a = b \cdot 6 + 17$, e concluam a resposta, pois de acordo com a discussão do item anterior, possibilita a conclusão de que $b > 17$ (resto menor que divisor), e o menor valor entre os infinitos valores que b pode assumir será 18, como consequência,a será 125.

c) Neste item, o professor poderá fazer varias indagações semelhantes, de modo que favoreça a compreensão e o entendimento do conceito de divisão, e do algoritmo da divisão, possibilitando aos alunos fazer o cálculo mental dos resultados referentes às mudanças feitas nos elementos de uma determinada divisão.

d) Esta questão foi retirada de uma prova para alunos de 8º e 9º anos (nível 2), 1ª fase de 2011, da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), onde está implícito o lema dos restos. Na resolução desta questão, o professor, nesse momento, poderá fazer outros exemplos envolvendo a divisão de uma soma ou produto por um número natural, levando os alunos a criar suas próprias conclusões, no que se refere ao lema dos restos.

e) Esta questão também foi retirada de uma prova para alunos de 8º e 9º anos (nível 2), 1ª fase de 2012, da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM). Mais uma vez, estamos utilizando o lema dos restos, neste caso, em relação ao produto. As olimpíadas de Matemática OBM e OBMEP já fazem parte da realidade dos alunos, então sugerimos aos professores interessados em questões diferenciadas para aplicar em sala ou fazer seu planejamento de suas aulas, consultar os respectivos sites `http://www.obm.org.br` e `http://www.obmep.org.br`. Nestes o professor encontrará um vasto material didático e vários links relacionados de excelente qualidade. Vale apena consultar.

Para a **questão 2**, temos:

a) Uma situação-problema que é solucionada utilizando máximo divisor comum. Os alunos poderão ter dificuldades em sua solução por se tratar de um problema, pois estão acostumados a calcular o mdc de dois ou três números dados, aplicando um determinado algoritmo ensinado, e de não aplicar este conceito na resolução de problemas. Existem algumas maneiras de calcular o mdc, digamos, por exemplo, seja pelo conjunto dos divisores que, nesse caso, não é viável por se tratar de dois números "grandes", sendo mais viável pela decomposição dos fatores primos dos dois números. No entanto, vale apena fazer uma discussão com toda turma de forma que deixe claro as estratégias de resolução e que faça com que os alunos exponham quais as maneiras e estratégias utilizadas por eles na resolução da questão. Outras situações semelhantes e, até mesmo, situações que envolvem o mínimo múltiplo comum (mmc) e respectiva relação com o mdc, podem ajudar os alunos a compreensão e o aprofundamento do máximo divisor comum, no sentido de utilizá-lo como estratégia de resolução de determinados problemas.

b) Se o aluno concluir corretamente o item a, fica fácil a conclusão deste item. No entanto, se concluir erradamente, consequentemente chegará a uma conclusão errada do item b; tornando um momento importante para que eles aprendam com o "erro", pois podem ocorrer respostas onde os pedaços de tecidos tem 2 cm de comprimento ou 6 cm. De fato é possível dividir as peças sem quem haja sobra de tecidos, com estas medidas. Mas, nenhuma destas é a maior possível, onde as resposta apresentariam um número maior de pedaços e assim, não atenderia o que foi pedido a José.

c) Neste item, o aluno é convidado a calcular o mdc usando o Algoritmo da Divisão, ou seja, fazendo divisões sucessivas. Apesar de que alguns livros ainda apresentam o Algoritmo da Divisão como ferramenta para calcular o mdc apenas de forma ilustrativa. Esta é uma ferramenta importante e poderá ser trabalhada pelo professor deste ciclo, pois é uma forma diferente de abordar o mdc, possibilitando ao aluno resolver algumas questões que antes não seria possível, além de revisar. Por exemplo, ao propor situações semelhantes ao do *exemplo 1.9* do capítulo I, o Algoritmo da Divisão é fundamental para sua resolução.

d) Neste, o aluno é solicitado a encontrar, por meio de calculo mental, dois números inteiros que satisfaça as igualdades. Na primeira, é uma combinação linear de dois números (números encontrados no item anterior) de modo que seja igual a 1; na segunda (decorre da primeira) basta multiplicar ambos os membros pelo *mdc (=78)* e, assim encontrará uma combinação linear do máximo divisor comum em função dos números envolvidos. Isto pode ser feito sempre, de modo que, não se faz necessário, neste ciclo, o professor escrever o *mdc* de forma sistemática, como já apresentada em alguns exemplos nos capítulos anteriores, como combinação linear dos dois números envolvidos. No entanto, como foi apresentado, acreditamos ser uma maneira viável para este nível de escolaridade, onde o professor poderá explorar outras situações, caso julgue necessário.

Por fim, para a **questão 3**, tem-se:

a) Para o primeiro momento no trabalho com equações diofantinas, uma questão aparentemente fácil, com um número reduzido de soluções, onde os alunos poderão responder por meio de tentativa e erro ou utilizando outro método que envolva as operações básicas, por exemplo. Mas, muitas das soluções apresentadas pelos alunos poderão estar incompletas, com apenas uma solução ou até mesmo com duas soluções. Isso poderá ocorrer pelo fato do aluno trabalhar essencialmente com exercícios e problemas que apresentem uma única solução. Então, na correção compartilhada com os alunos, é interessante que o professor não responda a questão e sim liste no quadro uma solução possível do problema e diga que existem outras soluções, levando os alunos a pensar e concluir as demais possibilidades de soluções.

b) O aluno é solicitado a equacionar o problema. Neste momento, os alunos podem apresentar dificuldades, até mesmo, maiores que solucionar o problema, pois os alunos têm dificuldades em traduzir uma situação-problema para a linguagem da matemática. Isto pode ocorrer pelo fato de não saber ou por terem dificuldades no uso das letras como generalização de modelos aritméticos, ou seja, ainda não desenvolveram uma das dimensões da álgebra[2]. Sugerimos ao professor, antes de "equacionar"o problema, incentivar os alunos a escreverem de forma simplificada o problema, por meio de palavras e símbolos ou somente por palavras, o que se pede no problema, fazendo a lista destas no quadro negro. Depois disso, pedir aos alunos que simplifique suas respectivas expressões, até concluírem a equação desejada. Por fim, fazer a comprovação com as respostas obtidas no item anterior na referida equação, com isso, os alunos verificarão se sua equação está correta, ou seja, se representa a situação problema; caso seja negativa, o trio ou a dupla é convidado a consertar seu erro. Assim, esperamos tornar um momento de discussão entre os alunos, onde eles aprendam com seus erros, com a interação entre os colegas, e principalmente desenvolva atitudes para superar as eventuais deficiências no equacionamento de certos problemas.

c) De posse dos pontos (soluções do problema) é fácil representar no plano cartesiano estes pontos. É uma forma de visualizar graficamente o problema, e de perceber a correspondência entre as quantidades de sorvetes envolvidas. Ressalta-se que esta representação não é da equação $2x+y=7$ e sim dos pontos inteiros positivos da mesma. Recomenda-se não traçar a reta unindo os respectivos pontos, pois esta é a imagem geométrica da equação.

3.1.2 Descrição da segunda atividade

Prosseguindo a sequência das atividades, falaremos da segunda atividade. Vejamos as etapas para sua aplicação.

Etapa 1. Apresentação da atividade

No primeiro momento, após entregar uma copia da atividade a cada dupla ou trio formado. Sugerimos que o professor faça uma leitura detalhada e compartilhada com os alunos, de todas as questões, objetivando esclarecer eventuais dúvidas com relação aos enunciados das mesmas. E ao final da aula, recolher as atividades respondidas pelos alunos.

[2]Em anexo consta um "resumo"bastante simplicado das dimesões ou finalidades da álgebra.

Atividade 2

1. Em um determinado dia, o senhor Isaac foi ao caixa eletrônico com o objetivo de sacar R$320,00 reais. No momento do saque o caixa eletrônico oferecia as seguintes opções de pagamento com:

   i. Cédulas de R$100,00 e de R$10,00;

   ii. Cédulas de R$50,00 reais e de R$20,00.

   a) Se o Sr. Isaac escolher a opção i, qual é maior e a menor quantidade de notas que ele irá receber?

   b) Escreva todas as maneiras possíveis da opção i.

   c) Escreva a equação que representa o referido saque, se o Sr. Isaac escolher a opção i.

   d) Se o Sr. Isaac escolher a opção ii, qual é maior e a menor quantidade de notas que ele irá receber?

   e) Escreva todas as maneiras possíveis da opção ii.

   f) Escreva a equação que representa o referido saque, se o Sr. Isaac escolher a opção ii.

2. Representem no plano cartesiano, as respectivas soluções inteiras não negativas, das equações obtidas na letra c e f da questão anterior.

3. Com apenas notas de R$50,00 e de R$20,00, o Sr. Isaac efetuou um pagamento de R$270,00. É possível que ele faça o pagamento usando um total de 10 notas? E usando um total de 9 notas?

Etapa 2. Descrição geral

Esta atividade é composta por três questões, em que a primeira questão trata de uma situação-problema que recai em uma EDL, que requer dos alunos, mais uma vez, solucionar um problema aparente simples, tendo a necessidade de estudar soluções inteiras, para uma equação linear com duas variáveis, o importante é proporcionar aos alunos, fazerem um elo entre os conceitos estudados na última questão da aula anterior, com este problema aparentemente simples e, com isso, possibilitando a retomada da discussão do final da aula anterior. Já a segunda questão requer dos alunos representação gráfica das soluções inteiras não negativas de duas equações lineares obtidas na questão anterior e, por fim, a última trata da solução inteira para um sistema de equações lineares com duas variáveis, que representa uma situação-problema.

Objetivos:

- Resolver situações-problema que envolve divisibilidade;
- Resolver, por tentativa e erro, uma determinada situação-problema;
- Representar uma situação-problema por meio de uma equação;
- Obter soluções inteiras de uma equação linear com duas variáveis;
- Representar no plano cartesiano, soluções inteiras de uma equação linear com duas variáveis.

- Representar uma situação-problema por meio de um sistema de equações;
- Obter a solução de um sistema de equações;
- Determinar a solução inteira de um sistema de equações.

Pré-requisitos:

- Operações com números inteiros; noção de divisibilidade; solução de uma equação linear com duas variáveis; plano cartesiano; solução de um sistema de equações lineares com duas variáveis.

Tempo previsto:

- Uma aula com dois tempos (de 50 minutos ou de 1 hora).

Etapa 3. Recomendações metodológicas

Como os alunos já tiveram um primeiro contato com uma situação-problema semelhante às duas primeiras questões, na primeira atividade, espera-se que eles não tenham dificuldades em suas respectivas soluções. Sendo assim, orienta-se ao professor, que destine apenas 40 minutos para resolução das duas primeiras questões e 40 minutos para resolução da terceira, totalizando um tempo 80 minutos para execução desta atividade, para o primeiro momento da aula, em que, responderão sem ajuda do professor e entregarão as suas soluções ao final deste tempo. No decorrer da aula, o professor poderá responder as questões junto com os alunos, seguindo a mesma ideia de resolução compartilhada da primeira atividade, em que os alunos são convidados a apresentarem suas soluções no quadro negro (ou na lousa), especialmente nesse momento, aqueles alunos que não foram ao quadro na correção da resolução da atividade 1, objetivando observar além de dificuldades apresentadas, o desempenho tanto, escrito e como na argumentação oral, de um maior número de alunos na resolução dos problemas.

Dessa forma, recomenda-se ao professor, para **questão 1**, nos itens a e d, mesmo sendo aparentemente fáceis, alertar os alunos para não confundirem a relação que para obter a maior quantidade de notas, deve-se ter um maior número de cédulas de menor valor. E para obter a menor quantidade de notas, deve-se ter um maior número de cédulas de maior valor. Assim, faz-se necessário a comprovação das respostas, fazendo as contas de multiplicação e adição, ou a calculadora, ou outra maneira importante que é utilizando cédulas de dinheiro de brinquedo, para isso, o professor pode levar uma quantidade de cédulas com valores variados (de acordo a necessidade do problema), mas o bom mesmo é solicitar na aula anterior dos alunos as referidas "cédulas", objetivando minimizar tal confusão.

Já para os itens c e f, mais duas situações que requerem a tradução de situações para a linguagem matemática, então, o professor terá a oportunidade de comprovar quais dificuldades ou erros os alunos apresentam em suas soluções, tendo em vista que na terceira questão da atividade 1, já foi feito uma discussão a respeito, mas pode surgir novas dúvidas ou novos erros. Agora, para os itens b e e, os alunos podem resolver por meio de tentativa e erro, no entanto, podem surgir soluções incompletas. O professor poderá alertar os alunos, que todas as soluções do problema, podem ser obtidas utilizando as equações obtidas nos itens c e f, que são respectivamente, $100x+10y=320$ e $50x+20y=320$, em que na primeira equação, x representa a quantidade de cédulas de R\$100,00 e y representa a quantidade de cédulas de R\$10,00; já na segunda, x representa a quantidade de cédulas de R\$50,00 e y representa a quantidade de cédulas de R\$20,00. Isolando, por exemplo, y na primeira equação e, com isso obter $y = 32-10x$ para concluir que $x = 0$, 1, 2 ou 3, então, substituindo os valores correspondentes de x encontrará os de y, consequentemente, obter todas as soluções da situação-problema. Fazendo isso, o professor possibilita um meio mais rápido de obtenção das soluções, já que os alunos, provavelmente, resolvam através do cálculo mental. Além do mais, estará trabalhando outra dimensão da álgebra, que é a manipulação de equações equivalentes e de inequações, pois devemos ter x e y maiores ou iguais a zero.

Para a **segunda questão**, temos a representação gráfica no plano cartesiano das soluções inteiras não negativas das equações $100x+10y=320$ e $50x+20y=320$, onde poderá fazer tal representação em papel quadriculado ou milimetrado. Aqui o professor pode trabalhar a representação gráfica do conjunto discreto das soluções inteiras das respectivas equações, assim como a representação do conjunto contínuo das soluções reais das equações. Assim, o aluno terá a oportunidade de perceber a diferença entre as representações gráficas do conjunto contínuo (reta) e do conjunto discreto (pontos) das soluções de uma equação diofantina linear com duas variáveis. Pois, apenas a representação gráfica de uma equação do tipo $ax+by=c$ que é uma reta, é feita geralmente no 8º ano e, para o 9º ano, é trabalhado a representação gráfica de uma função do 1º grau $y = ax+b$ que é uma reta. Mas, infelizmente, não se fala sobre soluções inteiras e tão pouco sobre sua representação gráfica.

Para a **terceira questão**, tem-se uma situação-problema que recai em sistema de equações lineares, onde o aluno pode comprovar que o sistema de equações possui ou não soluções inteiras. Por outro lado, o professor poderá explorar as soluções interas não negativas da equação $50x+20y=270$, onde x representa a quantidade de cédulas de R\$50,00 e y representa a quantidade de cédulas de R\$20,00, assim teria os valores possíveis para x e para y, consequentemente, teria a quantidade de notas usadas no referido pagamento. É interessante, utilizar novamente as "cédulas"de dinheiro para comprovar as soluções, em que o professor na resolução com os alunos apresente ou oriente as duas maneiras de solução.

3.1.3 Descrição da terceira atividade

Continuando a sequência das atividades, descreveremos a terceira atividade, assim como, as etapas para sua aplicação.

Etapa 1. Apresentação da atividade

No primeiro momento, segue-se as mesmas considerações das atividades anteriores, em que foi sugerido ao professor que fizesse uma leitura detalhada e compartilhada de todas as questões com os alunos para tirar eventuais dúvidas com relação aos enunciados das mesmas. Neste, o professor poderá formar novas duplas ou trios de alunos, proporcionando uma interação maior entre os alunos. Nessa escolha, o professor poderá distribuir para cada trio ou dupla um aluno que apresentou melhor desenvolvimento na resolução das atividades anteriores e, assim, favorecerá a todos os alunos que apresentarem problemas na resolução em determinadas questões apresentadas, incentivando-os a continuar tentando resolver as próximas situações-problema e, também, a uma melhor compreensão das informações de cada questão e respectivas estratégias de resolução.

Atividade 3

1. O professor Marcos propõe 16 problemas a seus alunos das séries finais do Ensino Fundamental, informando que lhes dará 5 pontos por cada problema resolvido e lhes tirará 3 pontos por cada problema não resolvido (ou com soluções incorretas).

   a) No final, é possível que um de seus alunos tivesse nota zero? Em caso afirmativo, quantos problemas este aluno resolveu?

   b) No final, é possível que um de seus alunos tivesse obtido 54 pontos? Justifique sua resposta.

   c) Escreva os sistemas de equações lineares que representam os itens a e b.

   d) Quais as possíveis pontuações que os alunos podem obter?

2. Seja $p = 5x - 3y$, em que $x + y = 16$ com x, y e p inteiros não negativos. Nessas condições, escreva:

   a) p em função de y;

   b) os possíveis valores para y;

   c) organize em uma tabela com os respectivos valores de y, x e p.

Etapa 2. Descrição geral

Esta atividade é composta de duas questões, em que a primeira questão trata de uma situação-problema que recai em um sistema de equações lineares, que requer dos alunos, mais uma vez, a tradução para a linguagem matemática e a solução inteira de um sistema de equações lineares de um problema aparentemente simples, semelhante ao da atividade anterior, fazendo mais uma vez um elo entre os conceitos estudados na última atividade, possibilitando ao professor a retomada da discussão do final da aula anterior. Já a segunda questão, requer dos alunos a manipulação algébrica de uma equação linear, assim como, a busca das respectivas soluções inteiras.

Objetivos:

- Resolver situações-problema múltiplos e divisores;
- Resolver, por tentativa e erro, uma determinada situação-problema;
- Representar uma situação-problema por meio de um sistema de equações lineares;
- Obter a solução de um sistema de equações lineares;

- Determinar a solução inteira de um sistema de equações lineares.

Pré-requisitos:

- Operações com números inteiros; noção de divisibilidade; resolver um sistema de equações; solução de um sistema de equações lineares com duas variáveis.

Tempo previsto:

- Uma aula com dois tempos (de 50 minutos ou de 1 hora).

Etapa 3. Recomendações metodológicas

Continuando a sequência de atividades, nesta, o professor poderá responder as questões junto com os alunos, da mesma forma que nas atividades anteriores, por meio da resolução de uma situação-problema, fará a correspondência com a última aula.

Assim, alerta-se ao professor, para **questão 1**, mesmo sendo semelhante à ultima questão trabalhada, que os alunos podem não obter a solução dos itens a e b, ou responderem errado. No entanto, podem aparecer respostas corretas usando a resolução do sistema de equações lineares que representa o problema, nesse caso, os alunos atingiram os objetivos esperados; ou usando tentativa e erro, ou seja, apenas usando as operações básicas, tais respostas são válidas, mas, estes ainda possuem dificuldades de traduzir uma situação problema para a linguagem matemática; ou aparecer alguma resposta errada, onde o aluno traduziu a situação por meio de um sistema, e não conseguiu resolvê-lo corretamente ou não conseguiu resolver de nenhuma maneira, nem usando o sistema de equações, nem usando tentativa e erro. Logo, faz-se necessário o direcionamento de outras situações semelhantes, para cada grupo de alunos com tais dificuldades, para serem resolvidas em casa. Estes alunos terão o compromisso de apresentar suas soluções na próxima aula, com isso, o professor poderá identificar a dificuldade de cada aluno referido, para tentar eliminar ou diminuir estas. Já o item c, é justamente para aqueles alunos que responderam usando tentativa e erro, ou não responderam os itens anteriores, tentar escrever a situação para a linguagem matemática; embora alguns alunos já tenham respondido este item na resposta dos anteriores, este item, sugere ao professor a validade das respostas dos itens anteriores por meio de outra estratégia, diferente da habitual que é por meio do sistema de equações, valorizando com isso, o conhecimento dos alunos sobre as operações numéricas básicas. Para o item d, acredita-se que as respostas apresentadas para este, serão por meio de tentativa e erro, e de forma incompleta. Assim, vale a pena que o professor faça intervenções no sentido que os alunos obtenham os demais resultados, fazendo com que os alunos observem e utilizem todas as conduções do problema, para que possam, observando a regularidade das possíveis pontuações, escrever um sistema de equações lineares que represente tal situação.

Agora, a **segunda questão**, requer dos alunos a manipulação de equações, assim como, escreverem uma variável em função de outra e, observando as condições do problema, obter os respectivos valores das variáveis envolvidas. Esta questão representa a tradução para a linguagem algébrica da questão anterior, sendo assim, recomenda-se que a resolução da mesma seja feita passo a passo de forma a não deixar dúvidas para os alunos. Para a letra a, ao isolar x em $x+y=16$ e substituir este valor na equação $p = 5x - 3y$, o aluno encontrará $p = 80 - 8y$, que é a resposta solicitada; aqui o professor poderá solicitar aos alunos que escrevam p em função de x, neste caso, deve-se isolar y em $x + y = 16$ e substituir este valor na equação $p = 5x - 3y$, onde obterá $p = 8x - 48$. Tudo isso, para um melhor esclarecimento deste item, tendo em vista que alguns poderão apresentar respostas incorretas e, também, favorecerá uma estratégia de resolução da questão anterior, quando o professor for relacionar a resolução da primeira questão com a segunda, que é importante que seja feito. Assim, na letra b, pode ser respondido o que se pede, observando que x, y e p são inteiros não negativos, ou seja, devemos ter $80 - 8y \geq 0$ onde $y \geq 0$, o que nos dá $0 \leq y \leq 10$. A mesma discussão pode ser feita em torno dos possíveis valores para x, escrevendo p em função de x, onde obterá $6 \leq x \leq 16$. Para o item c, atribuindo os valores encontrados no item anterior para y, encontrará respectivamente os valores correspondentes para as variáveis x e p, organizando estes em tabela; o professor poderá pedir aos alunos para atribuírem os respectivos valores de x encontrados anteriormente, para encontrar os correspondentes valores de y e p, confrontando os valores encontrados nos dois casos, eles perceberão ao concluir que os resultados são os mesmos. Fazendo isso, espera-se que os alunos tenham condições suficientes para analisar soluções inteiras e manipular as equações lineares, decidindo qual será o melhor caminho a seguir na obtenção das respectivas respostas, além de favorecer um momento ideal para relacionar as soluções apresentadas na questão 1 com a questão 2 e, com isso, fazer uma discussão com relação as equações que o problema representa e as condições das variáveis envolvidas, facilitando a obtenção e verificação de todas soluções para o item d da questão 1 e a passagem da língua natural (português) para a linguagem da álgebra, favorecendo aos alunos outras formas de resolver o problema.

3.1.4 Descrição da quarta atividade

Descreveremos agora, a quarta e última atividade, bem como, as etapas para sua aplicação em sala de aula.

Etapa 1. Apresentação da atividade

Nesta última atividade, recomenda-se ao professor com o objetivo de tirar eventuais dúvidas com relação aos enunciados das questões, seguir o mesmo procedimento inicial da atividade anterior e para realização da mesma, forme pequenos grupos com quatro alunos, pois isso possibilitará um envolvimento maior dos alunos na busca das soluções dos problemas. Esta será composta por duas questões, em que a primeira trata de uma situação problema que incide em uma equação linear e a segunda foi retirada de um livro para 7ª série (hoje 8º ano) da coleção de livros destinados para o Ensino Fundamental, do autor Oscar Guelli, que recai em um sistema de equações lineares. Em ambas, requerem dos alunos as respectivas soluções inteiras.

Atividade 4

1. Marleide desejava comprar uma bicicleta que custava R$ 180,00, para isso, foi incentivada por seus pais a guardar moedas de 50 centavos e de 1 real em um "porquinho". Diga quais

as possíveis quantidades de moedas de cada tipo, que ela deverá poupar, para conseguir seu objetivo?

2. Se um galo vale 5 moedas, uma galinha vale 3 e três frangos valem 1, quantos de cada um se pode comprar com 100 moedas, de modo que sejam 100 aves ao todo e pelo menos 4 galos? (ver [9], p. 153)

Etapa 2. Descrição geral

Esta atividade finaliza a sequencia das atividades, com dois problemas interessantes, mas uma vez, fazendo o equacionamento das duas situações-problema, tem-se que a primeira incide em uma equação linear com duas variáveis e a segunda em um sistema de equações lineares.

Objetivos:

- Resolver situações-problema envolvendo múltiplos e divisores;
- Resolver, por tentativa e erro, uma determinada situação-problema;
- Resolver situações-problema envolvendo equação linear com duas variáveis;
- Determinar a solução inteira de uma equação linear com duas variáveis;
- Representar uma situação-problema por meio de um sistema de equações lineares;
- Obter a solução de um sistema de equações lineares;
- Determinar a solução inteira de um sistema de equações lineares.

Pré-requisitos:

- Operações com números inteiros; múltiplos e divisores de um número inteiro; resolver uma equação de 1º grau; resolver um sistema de equações de 1º grau; solução de uma equação e de um sistema de equações de 1º grau.

Tempo previsto:

- Uma aula com dois tempos (de 50 minutos ou de 1 hora).

Etapa 3. Recomendações metodológicas

Para esta última atividade, sugeri-se ao professor que responda a mesma, com base nos avanços e dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução dos problemas no desenvolvimento das atividades anteriores, e que valorize mais uma vez, as várias estratégias de resolução dos mencionados problemas e a participação dos alunos em suas respectivas soluções. Nesse momento, é oportuno observar as táticas usadas na solução de cada problema, já que os mesmos, não solicita dos alunos um roteiro a seguir em suas resoluções e, também, por já terem contato com situações semelhantes a esta, no decorrer das sequências de atividades, espera-se que apareçam soluções corretas, porém, podem aparecer soluções incompletas ou soluções erradas.

Nesse sentido, aconselha-se ao professor, na **primeira questão**, fazer uma síntese das resoluções apresentas pelos alunos para esta questão. Fazendo isso, o professor terá uma análise qualitativa das estratégias usadas por eles, na busca das respectivas soluções da situação-problema, fornecendo-lhe dessa forma, uma ferramenta importante para uma melhor orientação na solução compartilhada. Pois, como já foi dito, podem ocorrer várias estratégias de respostas, digamos, usando cálculo mental através de tentativa e erro, ou utilizando como base as operações básicas (múltiplos e divisores), ou usando tentativa e erro através da equação que representa a situação, entre outras. Acreditamos que algumas destas respostas podem estar incompletas, pois esta situação-problema contém 181 maneiras de obter 180 reais juntando moedas de 50 centavos e moedas de 1 real, tendo em vista que as situações-problema trabalhadas anteriormente tinham uma quantidade pequena de soluções, a obtenção das soluções é mais fácil. Mas também, podem ocorrer até mesmo soluções erradas, por apresentar erro na tradução do problema para a linguagem algébrica. Dessa forma, é interessante que o professor na resolução compartilhada com toda a turma da referida questão, como base na síntese das soluções apresentadas, explore todas as estratégias apresentadas pelos alunos, objetivando esclarecer para os alunos qual a melhor estratégia a ser utilizada na solução desta situação-problema.

Já a **segunda questão**, os alunos podem apresentar uma dificuldade maior em sua resolução, em relação das demais questões exploradas na sequência de atividades descritas neste capítulo, pois esta recai em sistema de equações com duas equações lineares e três variáveis (ver exemplo 2.9 do capítulo II), sendo raramente abordado no Ensino Fundamental. Para esta, recomenda-se ao professor fornecer aos alunos algumas sugestões, no sentido que eles consigam fazer a tradução do problema para linguagem matemática e que organize suas tentativas em uma tabela, tudo isso, em um primeiro momento na sala de aula. Como já foi mencionado, está questão pode ser colocada como um desafio para eles, e para a conclusão da mesma ou até mesmo sua resolução completa, o professor poderá deixar que os alunos, leve para responder em casa. Desse modo, objetiva-se que os mesmos procurem fazer um debate com os colegas de classe ou com colegas de outras turmas, ou pesquisar na internet ou tentar com seus familiares a obtenção da solução do problema, ou seja, permitir que os alunos façam suas pesquisas para obtenção de estratégias para solução do referido problema. Sendo assim, a discussão desta questão poderá ficar para a próxima aula.

Com isto, o **tempo previsto** para o desenvolvimento da proposta das quatro atividades será de seis aulas de dois tempos (de 50 minutos ou de 1 hora).

Além do que já foi descrito em cada atividade, o **material necessário** para o desenvolvimento da sequência de atividade é:

- Xerox das atividades para os alunos; papel ofício; lápis; borracha; régua; papel milimetrado ou quadriculado e notas de dinheiro de brinquedo.

Vale ressaltar que nas atividades propostas podem ser feito adaptações de acordo com a realidade da turma que a mesma será aplicada, no sentido de favorecer uma melhor compreensão dos problemas, as quais ficam a critério do professor, pois lembramos que apresentamos acima recomendações para algumas de suas aulas. E também, sugeri-se ao professor que estimular os alunos que não conseguiram resolver todas as questões de uma determinada atividade proposta em sala, a tentar em casa, assim como, passar mais algumas questões para incentivar àqueles que concluíram a referida atividade.

Outro fato importante que se faz necessário alertar o professor é que no desenvolvimento da sequência de atividades descritas na acima, podem ocorrer várias dificuldades e erros apresentados pelos alunos em suas resoluções, além dos mencionados. Sendo assim, um momento propício para fazer correções e retomada de discussões em torno de tais dificuldades e erros. Por exemplo, a mudança do significado do sinal de adição (+), pois em Aritmética, os alunos podem simplificar a expressão $15+6$, já em Álgebra, a expressão $x+6$ não pode simplificada. E também, os alunos têm dificuldades de compreender a variação do significado do sinal de igualdade (=) em Aritmética e em Álgebra, assim como a compreensão do significado de variável, a qual ora representa um valor conhecido, ora representa um valor desconhecido (incógnita), ora representa símbolos no papel (expressões algébricas) de acordo com o contexto que está sendo explorado, entre outras. O leitor interessado em uma discussão mais detalhada nesta questão e outras questões relacionadas com o ensino da álgebra pode consultar, por exemplo, [5] ou [17].

Já com relação às situações-problema apresentadas na proposta das atividades anteriores, vale advertir, que embora uma mesma situação possa representar um problema para uns, já para outros possa representar um simples exercício, de acordo com os conhecimentos de que dispõe. Na referida proposta, como estamos propondo para ser trabalhada com todos os alunos da sala de aula acreditamos que para a maioria deles as situações-problema propostas representam realmente um problema matemático e não um simples exercício, por estas favorecer a aprendizagem de conceitos matemáticos, assim como o desenvolvimento de atitudes e de procedimentos para a busca de solução dos mesmos e a comprovação destas soluções.

Por fim, na sequência de atividades descritas anteriormente pode ser feito também, algumas adequações na proposta das atividades apresentadas para serem aplicadas para alunos do Ensino Médio. Nesse caso, têm excelentes pesquisas que referem ao mesmo assunto, sendo boas fontes de consulta para o professor ou futuro professor da Educação Básica. Nesse sentido, um dos bons trabalhos de Wagner Marcerlo Pommer [16] é, por exemplo, o artigo com o título: *Equações diofantinas lineares: um tema articulador de estratégias no Ensino Básico*. Um outro bom trabalho é a dissertação de Bianca Herreira Capilheira [3] com o título: *Equações diofantinas Lineares: uma proposta para o Ensino Médio*, além de tudo, este traz uma seção sobre as produções nacionais referentes as equações diofantinas lineares. Estes são apenas dois exemplos de bons trabalhos que trata das EDL para o Ensino Médio.

Em síntese, neste texto buscamos, por um lado, propor um suporte teórico ao professor ou futuro professor de matemática da Educação Básica, principalmente, sobre o tema das equações diofantinas lineares, o qual foi desenvolvido de forma clara e objetiva, seguido de várias situações-problema para uma melhor compreensão e ilustração dos resultados acerca de toda teoria desenvolvida.

Assim, a dissertação pode contribuir para a formação continuada do professor ou na formação do futuro professor de matemática, de modo que, este seja capaz de decidir qual o melhor momento de abordar situações, preferencialmente, que possam ser modeláveis via equações diofantinas lineares, assim como alguns tópicos acerca deste assunto. E também, quais estratégias que podem ser adotadas na resolução destas situações.

Dessa forma, acreditamos fornecer ao docente ou futuro docente de matemática dos Ensinos Fundamental e Médio, condições adequadas para desenvolver habilidades e técnicas de resolver problemas que podem ser modelados via equações diofantinas lineares, com isso, explorar situações que possuem uma solução, mais de uma solução (quantidade finita ou infinitas soluções) ou nenhuma solução, que não é comum neste nível de escolaridade. De modo que as equações diofantinas lineares estão presentes no currículo de forma implícita, desde o Ensino Fundamental quando estudamos equações e sistemas de equações lineares com duas variáveis. Além do mais, alunos deste nível de ensino possuem conhecimento sobre números inteiros e suas propriedades, como por exemplo noções de divisibilidade, do algoritmo da divisão e do máximo divisor comum. Favorecendo assim, uma base para explorar de forma introdutória as EDL desde o Ensino Fundamental.

Buscamos também, por outro lado, descrevermos uma sequência de atividades didáticas referentes às equações diofantinas lineares para uso nas séries finais do Ensino Fundamental, nas quais descrevemos várias situações-problema do cotidiano que requerem soluções inteiras, e que podem serem expressas por equações e sistemas de equações lineares, ou seja, que incidem principalmente nas EDL, onde acreditamos serem acessíveis a alunos do 8º e 9º anos.

Como a referida proposta das atividades foi embasada na resolução de problemas, sugerimos ao professor que ao longo da descrição de cada atividade fosse trabalhado com pequenos grupos de alunos, visando um ambiente de discussão e troca de ideias e, também que fosse feito uma resolução compartilhada com os alunos de todas as questões apresentadas, favorecendo com isso, um momento oportuno para levantamento e esclarecimento de dúvidas no desenvolvimento das atividades propostas. Pois, acreditamos que essa seja a base para a utilização da importante ferramenta metodológica que é a resolução de problemas.

Além disso, com o intuito de obter um maior envolvimento dos alunos no desenvolver das atividades, recomendamos ao professor que a avaliação dos mesmos seja condicionada na participação deles na resolução dos problemas propostos. Nesse sentido, as situações foram apresentadas de forma gradativa, de modo que, os alunos utilizem conhecimentos adquiridos em séries anteriores, e também, a cada nova atividade proposta levar o aluno a fazer relação com a atividade anterior por meio de uma situação-problema.

Com relação aos problemas apresentados na proposta, propomos um total de dez situações-problema, das quais duas visam revisar alguns conceitos acerca das EDL, como o algoritmo da divisão, o máximo divisor comum e noções de divisibilidade de forma não repetitiva, pois, estes e outros conceitos relativos aos números inteiros são raramente retomados depois de serem estudados nos 6º e 7º anos do Ensino Fundamental. As demais situações desta proposta tratam de problemas que podem ser modeláveis por uma equação diofantina linear ou por sistemas de equações diofantinas lineares, os quais se apresentam em ordem crescente de dificuldade, contribuindo assim, para uma aprendizagem gradativa dos conceitos envolvidos nas referidas situações-problema.

Assim, iniciamos com um problema que incide em uma EDL, tendo poucas possibilidades de soluções, para favorecer a busca das respectivas soluções por meio do cálculo mental usando tentativa e erro, pois acreditamos que esta seja a primeira estratégia adotada pelos alunos frente a este tipo de situação. No decorrer das atividades, o número de soluções dos problemas foi aumentando gradativamente, de modo que os alunos adotassem outro tipo de estratégia que é usar a tentativa e erro observando os múltiplos e divisores, organizando estas tentativas em uma tabela. Nesta, o professor pode orientar os alunos a perceberem quando o problema possui ou não solução inteira. Propomos também situações em que as duas estratégias citadas não eram o melhor caminho a seguir, fazendo com que os alunos busquessem outro tipo de estratégia para solucionar o problema que é modelar via equação diofantina linear.

Logo, com o que foi exposto e da forma que foi proposta a sequência de atividades, podemos enumerar as possíves respostas para a pergunta inicial: *qual a importância da abordagem das equações diofantinas lineares no Ensino Fundamental?*

1. Retomada de conceitos já estudos pelos alunos referentes aos números naturais e inteiros, o que raramente é feito;

2. Trabalha situações-problema do cotidiano dos alunos, favorecendo que o professor utilize a ferramenta metodológica resolução de problemas;

3. Trabalha com problemas com soluções únicas, com mais de uma solução e com aqueles que não possuem solução, o que coloca o aluno frente à tomada da decisão de qual melhor estratégia adotada na busca das respectivas soluções;

4. Possibilita que o professor incentive os alunos a usarem uma linguagem matemática não apenas explicativa, mas também formal;

5. Favorece aos alunos uma ferramenta importante para resolver certos tipos de problemas do dia a dia;

6. Estimula um trabalho coletivo e cooperativo na busca das soluções de tais problemas.

Portanto, confiamos que a presente proposta, possibilita que os discentes do Ensino Fundamental desenvolvam capacidades e autonomia de organizar a melhor estratégia para solucionar o problema e percebam que a utilização da escrita algébrica facilita a organização, o aperfeiçoamento na busca das soluções inteiras do referido problema e na formalização das respectivas respostas de tais problemas. E permite que os docentes da Educação Básica tenham condições suficientes de abordar em suas aulas situações que incidem em equações diofantinas lineares e alguns tópicos relacionados, e de orientar os alunos na construção de conhecimentos novos e de novas competências frente a estas situações, promovendo com isso aulas mais dinâmicas, onde os educandos são agentes ativos na construção do conhecimento, tornando o processo de ensinar e aprender a matemática mais significativo e desafiador.

[1] BOYER, C. B. *História da Matemática. Revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide.*, 2. ed. Edgard Blucher, São Paulo, 2003.

[2] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* MEC/SEF, Brasília, 2001.

[3] CAPILHEIRA, B. H. Equações diofantinas lineares: uma proposta para o ensino médio. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

[4] COSTA, E. S. Equações diofantinas lineares e o professor do ensino médio. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

[5] COXFORD, ARTHUR F. & SHULTE, A. P. *As idéias da Álgebra. Traduzido por Hygino H. Domingos.* Atual, São Paulo, 1995.

[6] DOMINGOS, HYGINO H. & IEZZI, G. *Álgebra Moderna: volume único*, 4. reform. ed. Atual, São Paulo, 2003.

[7] DOMINGOS, H. H. *Fundamentos de Aritmética.* Atual, São Paulo, 1991.

[8] FERNANDES, N. M. V. *... [et al.]. Fundamentos de Álgebra.* UFMG, Belo Horizonte, 2005.

[9] GUELLI, O. *Matemática: uma aventura no pensamento.* Ática, São Paulo, 2004.

[10] HEFEZ, A. *Elementos de Aritmética.* SBM, Rio de Janeiro, 2011.

[11] MARTINEZ, F. E. B. *... [et al.]. Aritmética II. PROFMAT.* SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[12] MILIES, FRANCISCO C. P. & COELHO, S. P. *Números: Uma introdução à Matemática*, 2 ed., vol. 3. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

[13] OLIVEIRA, KRERLEY I. M. & FERNÁNDEZ, A. J. C. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções.* SBM, Rio de Janeiro, 2010.

[14] OLIVEIRA, S. B. D. As equações diofantinas lineares e o livro didático de matemática para o ensino médio. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

[15] OLIVEIRA, S. D. A. Uma exploração didática das equações diofantinas lineares de duas e três incógnitas com estudantes de cursos de licenciatura em matemática. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

[16] POMMER, W. M. Equações diofantinas lineares: um tema articulador de estratégias no ensino básico. *Caderno Pedagógico V. 9* (2012), 137–154.

[17] PONTE, J. P. D. ... [et al.]. Álgebra no ensino básico. Disponível em : `http://area.dgidc.minedu.pt/materiais_NPMEB/003_Brochura_Algebra_NPMEB_(Set2009).pdf`., Acesso em 08/02/2013.

[18] RESENDE, M. R. *Re-significando a disciplina teoria dos números na formação do professor de matemática na lincenciatura*. Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

[19] SAMPAIO, JOÃO C. V. & CAETANO, P. A. S. *Introdução à Teoria dos Números: um curso breve*. EdUFSCar, São Carlos, 2009.

[20] SANTOS, J. P. O. *Introdução à Teoria dos Números*. IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

[21] SILVA, V. D. *Números: construção e propriedades*. Ed. da UFG, 2005.

[22] WIKILIVROS. Teoria de números/equações diofantinas. Disponível em: `http://pt.wikibooks.org/wiki/Teoria_de_n%C3%BAmeros/Equa%C3%A7%C3%B5es_diofantinas`., Acesso em 05/02/2013.

Resolução das questões apresentadas na proposta das atividades. Onde apresentaremos uma solução para cada questão. No entanto, vale ressaltar que, poderá existir outra (as) maneira (as) de resolução para cada item.

Resolução das questões da atividade 1

Para a **questão 1**, teremos:

(a) Os possíveis restos são 0, 1, 2, 3, 4, 5, ou 6.

(b) Aplicando o Algoritmo da Divisão (dividendo = divisor x quociente + resto), segue-se que $a = b \cdot 6 + 17$, tendo em vista que $b > 17$, o menor valor natural de b é 18, consequentemente, o menor valor de a será $a = 18 \cdot 6 + 17 = 125$.

(c) Ao dobrar o dividendo, teremos: quociente igual 13 e resto 16; ao dobrarmos o dividendo e o divisor, tem-se o mesmo quociente e dobro do resto, que é 34; ao aumentar uma unidade o dividendo terá uma divisão exata, onde o quociente será 7.

(d) Note que a parcela $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 2011$ é divisível por 8 e a segunda parcela 21 deixa resto 5, quando dividida por 8. Então, o resto da divisão de $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 2011 + 21$ por 8 é 5, já que ao repartir a soma em grupo de 8, teremos um quantidade exata de grupos para a primeira parcela e a segunda dá dois grupos e sobra 5 unidades, que é o resto da soma por 8.

(e) Observe que ao multiplicar 6 por 6 temos 36, multiplicando por 6 tem-se 216, e assim, o algarismo das unidades é sempre 6, quando temos um produto $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot ...$, daí

$$2016^{2014} = \underbrace{(2016 \cdot 2016 \cdot ... \cdot 2016)}_{2014\, vezes},$$

terá como algarismo das unidades 6, o que nos dá $x = 6$ (dia 6); veja que o resto da divisão de 2014 por 11 é 1, então, o resto da divisão de
$2014^{2016} = \underbrace{(2014 \cdot 2014 \cdot ... \cdot 2014)}_{2016\, vezes}$ por 11 será igual ao resto de $\underbrace{(1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1)}_{2016\, vezes} = 1$ por 11 que é 1, o que nos dá $y = 1$ (primeiro mês).

Portanto, o feriado vai ser no dia 6 de janeiro.

Para a **questão 2**, tem-se:

(a) Decompondo os números 546 e 312 em fatores primos, teremos
$546 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$ e $312 = 23 \cdot 3 \cdot 13$. Logo, o $mdc(546, 312) = 2 \cdot 3 \cdot 13 = 78$. Com isso, José

poderá cortar as peças, sem disperdícios, em pedaços com 78 centímetros, pois 78 é o maior comprimento possível que divide $546 = 7 \cdot 78$ e $312 = 5 \cdot 78$.

(b) Com a peça de 546 centímetros obtém 7 pedaços e, 4 pedaços com a peça de 312 centímetros. Portanto, obterá ao todo 11 pedaços de 78 centímetros de comprimento.

(c) Fazendo divisões sucessivas, tem-se que:

$$546 = 1 \cdot 312 + 234;$$

$$312 = 1 \cdot 234 + 78;$$

$$234 = 3 \cdot 78 + 0.$$

Daí segue-se então:

Quociente	1	1	3
546	312	234	78
234	78	0	Resto

Portanto, o $mdc(546, 312) = 78$.

(d) Por tentativa e erro, temos 2 e 1 são os números naturais que tornam as duas igualdades verdadeira. Veja que:
i.$[2] \cdot 4 + [-1] \cdot 7 = 1$
ii.$[2] \cdot 312 + [-1] \cdot 546 = 78$

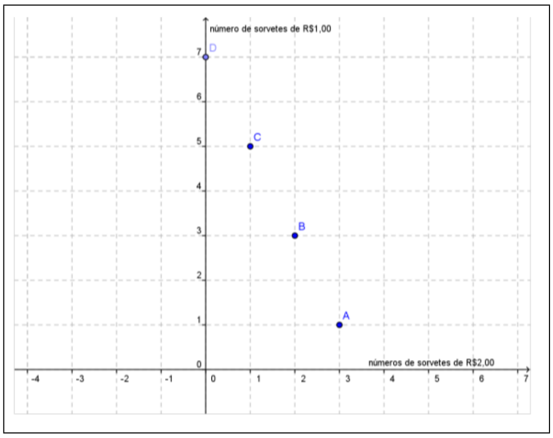
Para a **questão 3**,tem-se:

(a) Por tentativa e erro, temos as seguintes possibilidades de compra:

- 3 sovertes de R$ 2,00 e 1 soverte de R$ 1,00;
- 2 sovertes de R$ 2,00 e 3 sovertes de R$ 1,00;
- 1 soverte de R$ 2,00 e 5 sovertes de R$ 1,00;
- Nenhum soverte de R$ 2,00 e 7 sovertes de R$ 1,00.

(b) Denotando por x a quantidade de sorvetes de R$2,00 e por y a quantidade de sorvetes de R$1,00, logo, a equação que representa a situação problema é $2x + y = 7$.

(c) Gráfico construído no GeoGebra, onde denotamos as possibilidades de soluções inteiras positivas pelos pontos A, B, C e D ilustrados no gráfico abaixo.



(a) Gráfico 2

Resolução das questões da atividade 2

Para a **primeira questão**, temos:

(a) Para que receba a maior quantidade de notas, tem que haver o maior número possível de cédulas de R$10,00, ou seja, 32 cédulas de R$10,00, nesse caso, temos um total de 32 cédulas. Já para que receba a menor quantidade de notas, tem que haver o maior número possível de cédulas de R$100,00, ou seja, 3 cédulas de R$100,00 e os outros 20 reais são completados com duas cédulas de 10 reais, nesse caso, temos um total de 5 cédulas.

(b) Por tentativa, observando os múltiplos de 100 e de 10, teremos: de 10, tem-se:

- 3 notas de 100 reais e 2 notas de 10 reais;
- 2 notas de 100 reais e 12 de 10 reais;
- 1 nota de 100 reais e 22 notas de 10 reais;
- Nenhuma nota de 100 reais e 32 notas de 10 reais.

(c) Denotando por x o número de cédulas de R$100,00 e por y o número de cédulas de R$10,00, tem-se a seguinte equação $100x + 10y = 320$ que modela o problema.

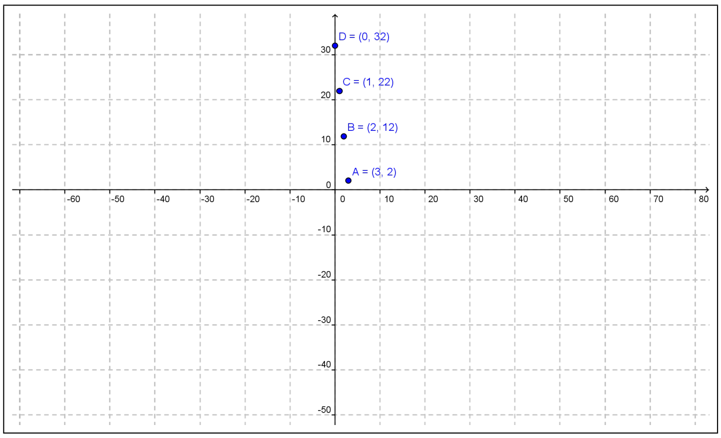
(d) Para que receba a maior quantidade de notas, tem que haver o maior número de cédulas de 20 reais possível, ou seja, 16 cédulas de 20 reais. Nesse caso, temos um total de 16 notas. Já para que receba a menor quantidade de notas, tem que haver o maior número possível de cédulas de 50 reais, ou seja, seis notas de $R\$50,00$ e os outros 20 reais são completados com uma nota de 20 reais. Nesse caso, temos um total de 7 notas.

(e) Temos as seguintes maneiras:

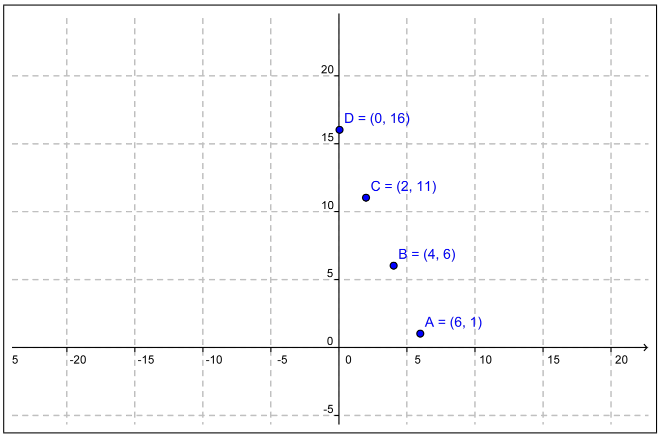
- 6 notas de 50 reais e 1 nota de 20 reais;
- 4 notas de 50 reais e 6 notas de 20 reais;
- 2 notas de 50 reais e 11 notas de 20 reais;
- Nenhuma de 50 reais e 16 notas de 20 reais.

(f) Equacionando a opção ii, vamos obter a seguinte equação $50x + 20y = 320$, em que x representa a quantidade de notas de R\$50,00 e y a quantidade de notas de R\$20,00.

Para a **segunda questão**, temos a representação gráfica (contruida no GeoGebra).



(b) Gráfico 3



(c) Gráfico 4

Para a **terceira questão**, temos:

Com 10 notas, o sistema de equações lineares que representa a situação-problema é:

$$\begin{cases} 50x + 20y = 270 \\ x + y = 10 \end{cases},$$

que ao resolvê-lo, não obtemos solução inteira. Ou seja, não é possível efetuar um pagamento de R\$270,00 com 10 notas.

Já com 9 notas, o sistema de equações lineares que representa a situação-problema é:

$$\begin{cases} 50x + 20y = 270 \\ x + y = 9 \end{cases},$$

que resolvendo nos dá x=3 e y=6. Ou seja, é possível efetuar o referido pagamento 3 notas de 50 reias e 6 notas de 20 reais.

Resolução das questões da atividade 3

Para a **primeira questão**, tem-se:

(a) Sim. Para isto, o aluno pode resolver corretamente um número menor ou igual a 6 problemas.

(b) Não, pois a partir dos dados podemos montar o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 54 \\ x + y = 16 \end{cases},$$

em que x representa o número de problemas corretos e por y o número de problemas não resolvidos ou com soluções incorretos.E ao resolvê-lo não obtemos valores inteiros, ou seja, o sistema não possui soluções inteiras.

(c) Denotando por x o número de problemas corretos e por y o número de problemas não resolvidos ou com soluções incorretos,teremos os respectivos sistemas:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 0 \\ x + y = 16 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} 5x - 3y = 54 \\ x + y = 16 \end{cases}.$$

(d) Note que o total de pontos (p) obtidos pode ser expresso por $p = 5x - 3y$, onde $x + y = 16$. Daí, isolando o valor de y e substituindo em $p = 5x - 3y$ teremos:

$$p = 5x - 3(16 - x) \Longleftrightarrow p = 8x - 48 \Longleftrightarrow p = 8(x - 6).$$

Então, atribuindo valores para $x \in \{6, 7, 8, ..., 15, 16\}$ obtemos as seguintes pontuações possíveis 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72 ou 80.

Já para **segunda questão**, teremos:

(a) De $x + y = 16$ vem que $x = 16 - y$. Daí, substituindo o valor de x em p = 5x - 3y, vamos obter:

$$p = 5(16 - y) - 3y \Longleftrightarrow p = -8y + 80 \Longleftrightarrow p = 8(10 - y).$$

(b) Como p não é negativo, então, devemos ter $p = -8y + 80 \geq 0$. Logo, para isto segue-se que $0 \leq y \leq 10$, ou seja, $y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\, e\, 10\}$.

(c) De acordo com os dados obtidos os itens anteriores, ao atribuir um valor para y tem-se um valor correspondente para x e para p, como ilustra a tabela abaixo:

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
p	80	72	64	56	48	40	32	24	16	8	0

Resolução das questões da atividade 4

Para a **primeira questão**, tem-se:

Solução 1. Tendo em vista que 180 é múltiplo de 1 e de 0,5, assim, supondo que os 180 reais sejam de moedas de um real e para cada moeda de um real retirada deve ser colocadas duas de 50 centavos. Dessa forma, podemos montar uma tabela com as possíveis quantidades de moedas de cada tipo, vejamos:

Moedas de 1 real	180	179	178	177	...	3	2	1	0
Moedas de 50 centavos	0	2	4	6	...	354	356	358	360

Solução 2. Seja x a quantidade de moedas de R$ 1,00 e y a quantidade de moedas de R$ 0,50, daí a equação que representa a situação-problema é:

$$1x-0,5y=180 \Longleftrightarrow 10x-5y=1800 \Longleftrightarrow 2x-y=360 \Longleftrightarrow y=2x-360.$$

Como $x \geq 0$ e $y \geq 0$, devemos ter $2x-360 \geq 0$,o que nos fornece $0 \leq x \leq 180$. Assim, para cada valor de x atribuído tem-se um valor de y correspondente, como ilustra a tabela acima na solução 1. Portanto, temos 181 maneiras de obter um total de R$ 180,00, juntando moedas de 1 real e de 50 centavos.

Observação. Não se faz necessário descrever todas as maneiras possíveis, pois são 181 possiblidades. Porém, a situação requer que os alunos percebam a importância de organizar as tentativas observando preferencialmente a pontencialidade da escrita algébrica para resolver situações-problema desse tipo.

Já para **segunda questão**, tem-se:

Solução. Veremos apenas uma solução. Seja x o números de galos comprados $(x \geq 4)$, y o números de galinhas e z o número de galos. Daí, de acordo com enunciado, o problema pode ser representado pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} 5x+3y+\frac{1}{3}z=100 \\ x+y+z=100 \end{cases},$$

em que a primeira equação do sistema representa o número de moedas e a segunda equação representa o número de animais. Que pode ser simplificado como segue:

$$\begin{cases} 15x+9y+z=300 \\ x+y+z=100 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 15x+9y+z=300 \\ -x-y-z=-100 \end{cases}.$$

Daí, somando membro a membro das equações do último sistema, obtemos:

$$14x+8y=200 \Longrightarrow 7x+4y=100.$$

Agora basta resolver a EDL $7x+4y=100$. Assim, pelo *Algoritmo da Divisão* temos:

$$7=4\cdot 1+3 \text{ e } 4=3\cdot 1+1.$$

Então:

$$1 = 4 - 3 \cdot 1 = 4 - (7 - 4 \cdot 1) \cdot 1 = 4 \cdot 2 - 7 \cdot 1 \Longleftrightarrow -7 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 1$$

Multiplicando por 100, tem-se $7 \cdot (-100) + 4 \cdot 200 = 100$, logo, $(-100, 200)$ é uma solução da $7x + 4y = 100$. Assim, sua solução geral é dada por:

$$\begin{cases} x = -100 + 4t \\ y = 200 - 7t \end{cases},$$

com $t \in \mathbb{Z}$. Onde devemos ter:

$-100 + 4t \geq 4 \Longrightarrow 4t \geq 104 \Longrightarrow t \geq \frac{104}{4} = 26$, e $200 - 7t \geq 0 \Longrightarrow t \leq \frac{200}{7} \cong 28,57$.

Logo, $t \in \{26, 27, 28\}$, o que nos dá:

- Para $t = 26$:
$$\begin{cases} x = -100 + 4 \cdot 26 = 4 \\ y = 200 - 7 \cdot 26 = 18 \end{cases} \Longrightarrow z = 100 - 4 - 18 = 78,$$
a solução $(4, 18, 78)$;

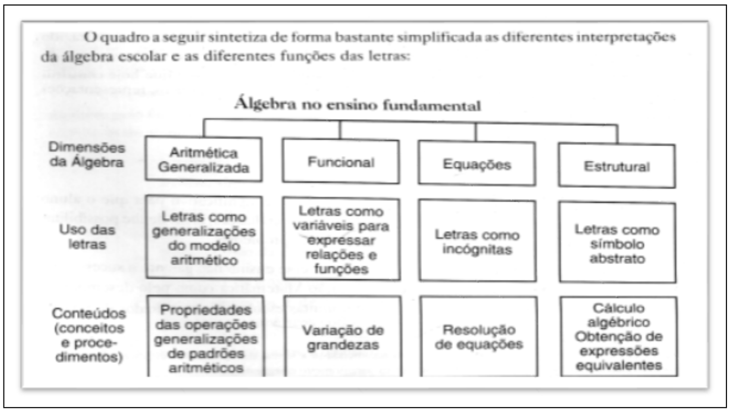
- Para $t = 27$
$$\begin{cases} x = -100 + 4 \cdot 27 = 8 \\ y = 200 - 7 \cdot 27 = 11 \end{cases} \Longrightarrow z = 100 - 8 - 11 = 81,$$
a solução $(8, 11, 81)$;

- Para $t = 28$
$$\begin{cases} x = -100 + 4 \cdot 28 = 12 \\ y = 200 - 7 \cdot 28 = 4 \end{cases} \Longrightarrow z = 100 - 12 - 4 = 84,$$
a solução $(12, 4, 84)$.

Portanto, se pode comprar 4 galos, 18 galinhas e 78 frangos; ou 8 galos, 11 galinhas e 81 frangos; ou 12 galos, 4 galinhas e 84 frangos.

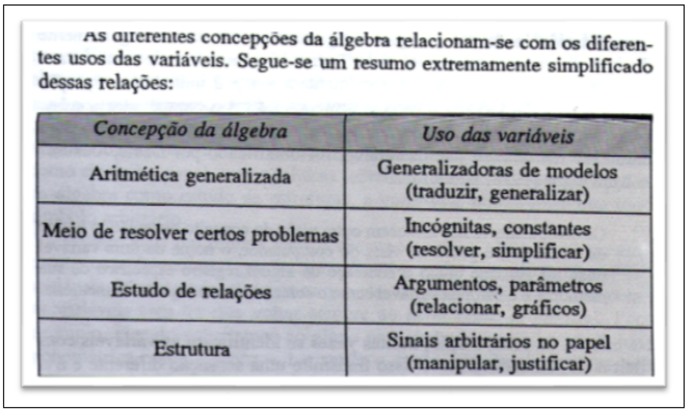
Algumas considerações importantes sobre as dimensões ou concepções da Álgebra na Educação Básica podem ser encontradas em [2] ou com mais detalhes em [5]. Vejamos um pequeno resumo apresentado por estas referências, ilustrado abaixo:

- Este quadro pode ser encontrado na página 116 da referência [2].


O quadro a seguir sintetiza de forma bastante simplificada as diferentes interpretações da álgebra escolar e as diferentes funções das letras:

(d) Quadro 1

- Este resumo pode ser encontrado na página 20 da referência [5].


As diferentes concepções da álgebra relacionam-se com os diferentes usos das variáveis. Segue-se um resumo extremamente simplificado dessas relações:

Concepção da álgebra	*Uso das variáveis*
Aritmética generalizada	Generalizadoras de modelos (traduzir, generalizar)
Meio de resolver certos problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudo de relações	Argumentos, parâmetros (relacionar, gráficos)
Estrutura	Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar)

(e) Quadro 2