Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Vitor da Costa Souza

As contribuições da geometria dinâmica no processo de ensino e aprendizagem de geometria espacial por meio do software GeoGebra 3D e de atividades investigativas

Rio de Janeiro

2024

Vitor da Costa Souza

As contribuições da geometria dinâmica no processo de ensino e aprendizagem de geometria espacial por meio do software GeoGebra 3D e de atividades investigativas

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Roberto Pinto Mattos

Rio de Janeiro

2024

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

S729 Souza, Vitor da Costa.
As contribuições da geometria dinâmica no processo de ensino e aprendizagem de geometria espacial por meio do software Geogebra 3D e de atividades investigativas / Vitor da Costa Souza. – 2024.
183 f.: il.

Orientador: Francisco Roberto Pinto Mattos.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística,.

1. Geometria - Estudo e ensino - Teses. 2. Geogebra (Programa de computador) - Teses.. I. Mattos, Francisco Roberto Pinto. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 514

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

_______________________________ _______________________
Assinatura Data

Vitor da Costa Souza

As contribuições da geometria dinâmica no processo de ensino e aprendizagem de geometria espacial por meio do software GeoGebra 3D e de atividades investigativas

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 11 de abril de 2024.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Francisco Roberto Pinto Mattos (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof.ª Dra. Patrícia Nunes da Silva
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof.ª Dra. Marilis Bahr Karam Venceslau
Colégio Pedro II – PROFMAT CPII

Rio de Janeiro

2024

DEDICATÓRIA

Dedico o meu trabalho a todos que de alguma forma participaram e ajudaram no seu desenvolvimento. Dedico também aos alunos e professores que se empenham no estudo de matemática.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus no qual confio.

Agradeço à minha Esposa, Daiane Rangel Albuquerque Costa, por todo amor, carinho, companheirismo e suporte à nossa família.

Agradeço ao meu Filho, Diego Levi Rangel Costa, por todo amor, carinho e momentos felizes que me proporciona nos momentos bons e nos momentos ruins.

Agradeço à minha Mãe, Vanda da Costa Souza, pela confiança e incentivos depositados em mim, como também por me guiar pelos caminhos da honestidade.

Agradeço à minha Irmã, Carla da Costa Souza de Carvalho, por todo amor e ajuda que me deste.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Francisco Roberto Pinto Mattos, por sempre querer o melhor de mim neste trabalho.

A mente que se abre a uma nova ideia, jamais voltará ao seu tamanho original.

Albert Einstein

RESUMO

SOUZA, Vitor da Costa. *As contribuições da geometria dinâmica no processo de ensino e aprendizagem de geometria espacial por meio do software GeoGebra 3D e de atividades investigativas.* 2024. 183 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2024.

Esta dissertação de mestrado propõe a criação de atividades baseadas na aprendizagem investigativa matemática e na resolução de problemas, centradas na Geometria Espacial, utilizando o software GeoGebra 3D. O estudo visa analisar as vantagens e desvantagens dessa abordagem em uma sala de aula de uma escola pública. Inicialmente, o trabalho realiza uma revisão de literatura sobre a interpretação da Geometria Espacial nos documentos oficiais brasileiros, buscando embasamento teórico e contextualização curricular. Em seguida, é conduzido um estudo sobre metodologias ativas, com foco na aprendizagem investigativa e na resolução de problemas, visando compreender os fundamentos e os benefícios dessas abordagens no ensino da matemática. A pesquisa inclui uma análise de recursos disponíveis no GeoGebra, especialmente applets que possam ser utilizados para atividades investigativas em Geometria Espacial. Esse levantamento visa identificar ferramentas adequadas para a criação de atividades dinâmicas e interativas, favorecendo a exploração e a compreensão dos conceitos geométricos pelos alunos. Com base nesse embasamento teórico, são elaboradas atividades investigativas específicas sobre Geometria Espacial, utilizando o GeoGebra como ferramenta principal. Essas atividades são projetadas para incentivar a exploração ativa dos alunos, promovendo a construção do conhecimento por meio da investigação e da resolução de problemas. Além disso, são identificadas as vantagens e desvantagens da utilização do GeoGebra 3D nas aulas de Geometria Espacial. São considerados aspectos como a acessibilidade da tecnologia, a facilidade de uso, a motivação dos alunos, a interatividade das atividades e a integração com o currículo escolar. Por fim, a dissertação apresenta conclusões e recomendações para o uso efetivo do GeoGebra 3D como ferramenta de ensino de Geometria Espacial em escolas públicas. São discutidas estratégias para superar desafios e maximizar os benefícios dessa abordagem, visando contribuir para a melhoria do ensino e aprendizagem da matemática nesse contexto específico.

Palavras-chave: geometria espacial; geometria dinâmica; GeoGebra 3D; aprendizagem baseada na investigação; aprendizagem baseada na resolução de problemas.

ABSTRACT

SOUZA, Vitor da Costa. *The contributions of dynamic geometry in the teaching and learning process of spatial geometry through the Geogebra 3D software and investigative activities*. 2024. 183 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2024.

This master's thesis proposes the creation of activities based on mathematical investigative learning and problem solving, centered on Spatial Geometry, using the Geogebra 3D software. The study aims to analyze the advantages and disadvantages of this approach in a public-school classroom. Initially, the work conducts a literature review on the interpretation of Spatial Geometry in official Brazilian documents, seeking theoretical basis and curricular contextualization. Next, a study is conducted on active methodologies, focusing on investigative learning and problem solving, aiming to understand the foundations and benefits of these approaches in teaching mathematics. The research includes an analysis of resources available in Geogebra, especially applets that can be used for investigative activities in Spatial Geometry. This survey aims to identify suitable tools for creating dynamic and interactive activities, favoring the exploration, and understanding of geometric concepts by students. Based on this theoretical basis, specific investigative activities on Spatial Geometry are developed, using Geogebra as the main tool. These activities are designed to encourage active exploration by students, promoting the construction of knowledge through investigation and problem solving. Furthermore, the advantages and disadvantages of using Geogebra 3D in Spatial Geometry classes are identified. Aspects such as technology accessibility, ease of use, student motivation, interactivity of activities and integration with the school curriculum are considered. Finally, the dissertation presents conclusions and recommendations for the effective use of GeoGebra 3D as a tool for teaching Spatial Geometry in public schools. Strategies to overcome challenges and maximize the benefits of this approach are discussed, aiming to contribute to improving the teaching and learning of mathematics in this specific context.

Keywords: spatial geometry; dynamic geometry; 3D GeoGebra; inquiry-based learning; learning based on problem solving.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABI	Aprendizagem Baseada na Investigação
ABP	Aprendizagem Baseada em Problemas
ABRP	Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas
BNCC	Base Nacional Curricular Comum
CNE	Conselho Nacional de Educação
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC	Ministério da Educação
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
TDIC	Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação
TICs	Tecnologias da Informação e Comunicação

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Em 14 de Dezembro de 2018, foi homologada a Base Nacional Curricular Comum (BNCC), que tem por objetivo normatizar as aprendizagens essenciais que todos os estudantes do Brasil devem desenvolver ao longo da Educação Básica. A BNCC estabeleceu dez competências básicas, dentre elas duas serão tomadas como ponto de partida deste trabalho, as quais dizem:

> 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
> 4. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (Brasil, 2018, p.9).

A partir dessas duas competências supracitadas e ao analisar o que a BNCC diz nas etapas do Ensino Fundamental e do Ensino Médio na área de Matemática e suas Tecnologias, duas competências específicas se tornam objetos de estudo principal deste trabalho, respectivamente são elas:

> Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (Brasil, 2018, p. 267 e p. 531).

A partir dessa nova normatização nacional e das competências citadas, fica claro que é cada vez mais importante que os professores de Matemática incluam novas tecnologias em suas aulas além disso estimulem o espírito e os processos investigativos que auxiliarão na compreensão dos conceitos matemáticos.

Ainda no documento supracitado é ressaltada a importância da geometria no currículo escolar, enfatizando a necessidade de desenvolver competências como a compreensão e aplicação das propriedades dos objetos geométricos, a resolução de problemas envolvendo relações espaciais e a análise de formas tridimensionais. Ao alinhar as práticas pedagógicas com as diretrizes da BNCC, o uso da geometria dinâmica com o GeoGebra 3D possibilita um ensino mais alinhado com as exigências contemporâneas e com a realidade dos estudantes imersos em um mundo cada vez mais tecnológico. Referências, quanto o uso de tecnologias, podem ser encontradas nos Objetos de Conhecimento relacionados à geometria espacial, presentes na BNCC. Cada Objeto de Conhecimento está vinculado a habilidades específicas, como, por exemplo: Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais, (Matemática - EF05MA17), demonstrando a necessidade de uma abordagem interativa e prática para alcançar tais objetivos.

Segundo Barbosa (2003) a geometria espacial desempenha um papel fundamental no desenvolvimento cognitivo e na formação integral dos estudantes, contribuindo para o desenvolvimento de habilidades visuais, espaciais e de raciocínio abstrato. No entanto, ainda de acordo com a autora, o ensino tradicional dessa disciplina muitas vezes apresenta desafios para os alunos, uma vez que a natureza tridimensional dos objetos e espaços abstratos pode ser difícil de compreender por meio de métodos convencionais, ou seja, por meio de aulas tradicionais e expositivas usando o quadro bidimensional para representar figuras tridimensionais, além da utilização de livros didáticos, que de acordo com a autora supracitada, ainda apresentam a Geometria como um emaranhado de definições, propriedades, nomes e formulas sem conexões com as aplicações de natureza lógica ou histórica. Nesse contexto, de acordo com Araújo (2023), a utilização da geometria dinâmica, especialmente com a ferramenta GeoGebra 3D, surge como uma alternativa promissora para tornar o ensino da geometria espacial mais envolvente e eficaz.

De acordo com Alves e Soares (2003), a geometria dinâmica possibilita a manipulação interativa de objetos geométricos (através do arrastamento dos elementos geométricos) e a observação instantânea das mudanças correspondentes, permitindo aos alunos explorar visualmente as propriedades e relações geométricas de forma intuitiva. O GeoGebra 3D, uma extensão do conhecido software GeoGebra, acrescenta uma dimensão a essa interatividade, permitindo a exploração de construções geométricas em um ambiente tridimensional. Isso não apenas torna o processo de aprendizado mais atrativo para os estudantes, mas também permite que eles compreendam melhor conceitos complexos, como ângulos, sólidos, poliedros, interseções de planos e sólidos, entre outros.

Em vista disso, a presente dissertação de mestrado tem como objetivo investigar os motivos que sustentam o uso da geometria dinâmica com o GeoGebra 3D no ensino da geometria espacial através dos processos de aprendizagem baseada na investigação e resolução de problemas, considerando suas implicações pedagógicas e os benefícios para o processo de aprendizagem dos alunos, tais como interatividade, visualização tridimensional, feedback imediato, construção progressiva, colaboração entre os aluno e aplicações práticas. A pesquisa também buscará explorar como essa abordagem se alinha com os princípios da BNCC, contribuindo para uma educação matemática mais eficaz e significativa, capaz de formar indivíduos competentes e aptos a enfrentar os desafios da sociedade contemporânea.

A BNCC afirma que o professor deve utilizar as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) sempre que for possível, pois elas estão cada vez mais presentes no cotidiano da escola e são uma excelente ferramenta facilitadora do aprendizado. Devido a este fato, o presente trabalho de pesquisa possui como objetivo principal criar atividades que utilizam os processos da aprendizagem baseada na investigação matemática e na aprendizagem baseada na resolução de problemas, sobre Geometria Espacial com a utilização do software de geometria dinâmica GeoGebra 3D, assim como analisar as vantagens e desvantagens da sua utilização em uma sala de aula de uma escola pública do estado do Rio de Janeiro. Além disso ainda possui como objetivos específicos:

- Realizar uma busca de referências sobre como a Geometria Espacial é interpretada nos documentos oficiais do Brasil.
- Realizar um breve estudo sobre metodologias ativas, com um enfoque na aprendizagem baseada na investigação e na resolução de problemas.
- Realizar uma pesquisa no site do GeoGebra sobre applets que possam ser utilizados para atividades investigativas.
- Elaborar atividades investigativas sobre Geometria Espacial com a utilização do GeoGebra.

No primeiro capítulo será realizado um estudo sobre a importância e os desafios da Geometria Espacial e da utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs), para complementar será visto como estes tópicos são abordados nos diferentes documentos oficiais sobre Educação Básica propostos ao longo dos anos. Além disso, será feito um estudo sobre as vantagens e desvantagens da utilização da Geometria Dinâmica com o GeoGebra 3D, assim como a utilização de metodologias ativas.

No segundo capítulo será feito um estudo sobre diversos tópicos da Geometria Espacial presentes nos Ensinos Fundamental e Médio da Educação Básica, começando pelos axiomas da Geometria Plana, passando pelos postulados e definições de elementos da Geometria Espacial. Ainda será feito um estudo sobre os Poliedros, Relação de Euler, área e volume de prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas e suas respectivas demonstrações.

No terceiro capítulo falaremos um pouco sobre o produto criado a partir desta dissertação, que será um livro online disponível publicamente na plataforma do GeoGebra, contendo as atividades e construções que foram elaboradas e que serão utilizadas. Além disso, será mostrado como se criar tal livro, caso algum professor deseje criar suas próprias atividades.

No quarto capítulo estarão presentes as atividades baseadas em investigação e resolução de problemas, tais atividades são compostas por roteiros de atividades investigativas que podem ser impressas ou podem ser utilizadas pelo Livro disponível na plataforma do GeoGebra 3D, além disso cada atividade possui seu plano de aula, com indicação de para qual ano de escolaridade pode ser aplicada, conteúdos e objetivos pretendidos, recursos utilizados, vinculação passa a passo com a aprendizagem baseada na investigação e orientações pedagógicas para o professor.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo realizaremos todo o embasamento teórico a respeito dos pontos relevantes para a pesquisa, serão analisados os documentos oficiais elaborados pelo Brasil ao longo do tempo sobre Geometria Espacial e a utilização de TICs no processo de ensino e aprendizagem, comparando a evolução dos temas e o grau de destaque dado a cada um. Ainda será feito um estudo sobre a importância destes temas e de outros temas relevantes, como a geometria dinâmica e metodologias ativas, a partir da perspectiva de diversos autores, os quais formarão toda a fundamentação teórica na qual este trabalho está inserido.

1.1 **Geometria Espacial**

A geometria espacial é o ramo da matemática que estuda e analisa as formas e os espaços tridimensionais, se preocupando com as propriedades dos sólidos geométricos, suas medidas e as relações entre as suas diferentes representações. Segundo Viladaletti (2009) existem indícios de que, em 2000 a.EC, os babilônios já possuíam certo pensamento geométrico, os egípcios já utilizavam a geometria para realizar medições em seus terrenos e construções. Em 600 a.EC alguns filósofos e matemáticos da Grécia, como Tales e Pitágoras começaram a sistematizar os conhecimentos geométricos, no entanto foi com Euclides, em 111. a.EC, que a Geometria foi sistematizada através do Elementos de Euclides, composto por 13 volumes, que gerou o que hoje conhecemos como Geometria Euclidiana, formulada a partir de axiomas e postulados. Em seu livro XI ele trabalha com Geometria Espacial e poliedros regulares.

1.1.1 Geometria Espacial nos Documentos Oficiais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) foram desenvolvidos no Brasil na década de 1990, durante o governo do presidente Fernando Henrique Cardoso, com o objetivo de orientar a construção de currículos escolares para a educação básica em todo o país. Os PCN foram elaborados por uma equipe de especialistas em educação, sob a coordenação do Ministério da Educação (MEC), e passaram por um amplo processo de consulta pública antes de serem oficialmente lançados em 1996. Os PCN estabelecem as diretrizes para a educação básica nas áreas de Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza e Ciências Humanas, além de definir temas transversais como ética, meio ambiente, saúde, orientação sexual e pluralidade cultural. Desde sua implementação, os PCN têm sido alvo de críticas e polêmicas, com algumas vozes questionando sua efetividade na melhoria da qualidade da educação no país e outros argumentando que os parâmetros não são suficientemente claros ou abrangentes para orientar adequadamente a construção de currículos escolares. Apesar dessas controvérsias, os PCN continuam sendo um importante marco na história da educação brasileira e uma referência fundamental para a construção de políticas educacionais no país.

Os PCNs para o Ensino Fundamental, antigas 5ª a 8ª séries e atuais 6º a 9º anos, as questões de geometria espacial são encontradas a partir dos conceitos e procedimentos relativos a Espaço e Forma e Grandezas e Medidas, assim no terceiro ciclo o aluno deveria compreender os seguintes conceitos:

> - Distinção, em contextos variados, de figuras bidimensionais e tridimensionais, descrevendo algumas de suas características, estabelecendo relações entre elas e utilizando nomenclatura própria.
> - Classificação de figuras tridimensionais e bidimensionais, segundo critérios diversos, como: corpos redondos e poliedros; poliedros regulares e não-regulares; prismas, pirâmides e outros poliedros; círculos, polígonos e outras figuras; número de lados dos polígonos; eixos de simetria de um polígono; paralelismo de lados, medidas de ângulos e de lados.
> - Identificação de diferentes planificações de alguns poliedros.
> - Quantificação e estabelecimento de relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e de pirâmides, da relação desse número com o polígono da base e identificação de algumas propriedades, que caracterizam cada um desses sólidos, em função desses números.
> - Indicar o volume de um recipiente em forma de paralelepípedo retângulo pela contagem de cubos utilizados para preencher seu interior. (Brasil, 1998, p. 73-74).

Já no quarto ciclo, composto pelas antigas 7ª e 8ª séries, os PCNs abordam os seguintes conceitos e procedimentos relativos a Espaço e Forma, assim como a Grandezas e Medidas que possuem conexão com a Geometria Espacial:

> - Secções de figuras tridimensionais por um plano e análise das figuras obtidas.
> - Análise em poliedros da posição relativa de duas arestas (paralelas, perpendiculares, reversas) e de duas faces (paralelas, perpendiculares).
> - Representação de diferentes vistas (lateral, frontal e superior) de figuras tridimensionais e reconhecimento da figura representada por diferentes vistas.

> - Cálculo da área da superfície total de alguns sólidos geométricos (prismas e cilindros).
> - Cálculo do volume de alguns prismas retos e composições destes. (Brasil, 1998, p. 88-89).

O documento ainda sugere uma série de orientações didáticas que podem auxiliar o professor no processo de ensino dos conceitos e procedimentos acima citados, fornecendo algumas ferramentas que podem ser usadas pelos professores em suas aulas ou ainda podem servir de base para novas ideias pedagógicas.

Já os PCNs para o Ensino Médio, ou PCN+ de 2002, já trabalham com competências a serem atingidas durante essa fase escolar, complementando assim o ensino fundamental, preparando o aluno para vida permitindo que consiga refletir sobre essas competências e consiga decidir a forma de trabalhá-las. Assim conteúdos e habilidades referentes a Geometria Espacial podem ser encontradas nas unidades temáticas 2. Geometria Espacial e 3. Métrica:

> Geometria espacial: elementos dos poliedros, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos.
> - Usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções.
> - Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos.
> - Utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade.
> - Compreender o significado de postulados ou axiomas e teoremas e reconhecer o valor de demonstrações para perceber a Matemática como ciência com forma específica para validar resultados.
>
> Métrica: áreas e volumes; estimativa, valor exato e aproximado.
> - Utilizar propriedades geométricas para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes em situações reais relativas, por exemplo, de recipientes, refrigeradores, veículos de carga, móveis, cômodos, espaços públicos. (Brasil, 2002, p. 125).

Em 2013, foram instituídas, pelo Conselho Nacional de Educação (CNE), as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN) que têm como objetivo orientar a elaboração dos currículos da Educação Básica em todo o país. As DCN estabelecem os princípios, fundamentos e procedimentos para a construção de currículos escolares, destacando a importância da educação integral, da interdisciplinaridade, da contextualização e da flexibilização dos currículos para atender às necessidades dos estudantes. Além disso, as DCN definem as competências e habilidades que devem ser desenvolvidas pelos estudantes em cada etapa da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio), assim como os temas transversais que devem ser abordados, como ética, cidadania, meio ambiente, saúde e diversidade cultural. Elas também destacam a importância da participação da comunidade escolar na construção dos currículos e na definição dos objetivos da educação, além de ressaltar a necessidade de garantir o acesso e a inclusão de todos os estudantes na Educação Básica. Porém este é um documento que não fala sobre conteúdos, competências ou habilidades, tratando apenas das questões legislativas da educação em âmbito nacional.

Atualmente a Educação no Brasil está sob a égide da BNCC que é um documento normativo elaborado pelo MEC em colaboração com especialistas em educação e professores de todo o país. Aprovada em 2017, a BNCC define as aprendizagens essenciais que todos os estudantes da Educação Básica devem adquirir ao longo de sua trajetória escolar. A BNCC estabelece as competências e habilidades que os estudantes devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio), em áreas de conhecimento como Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza e Ciências Humanas, além de temas transversais como ética, cidadania, meio ambiente, saúde e diversidade cultural, além disso também destaca a importância da interdisciplinaridade, da contextualização e da flexibilização dos currículos para atender às necessidades dos estudantes, assim como a necessidade de garantir o acesso e a inclusão de todos os estudantes na Educação Básica, sendo a sua implementação de responsabilidade das redes de ensino e das escolas, que devem elaborar seus currículos a partir das diretrizes estabelecidas no documento. A BNCC tem como objetivo garantir a qualidade da educação e a equidade no ensino em todo o país, promovendo uma educação mais inclusiva, integral e contextualizada.

Na etapa do ensino fundamental, anos finais, a BNCC propõe cinco unidades temáticas (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística), dentro das unidades de Geometria, Grandezas e Medidas podemos encontrar os conceitos e procedimentos relativos à Geometria Espacial possuindo objetos de conhecimento que desenvolverão as seguintes habilidades:

- (EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.
- (EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas [...], capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.
- (EF07MA30) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico).
- (EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.
- (EF08MA20) Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes.

- (EF08MA21) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular.
- (EF09MA17) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.
- (EF09MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas. (Brasil, 2017, p.302-319).

Na etapa do Ensino Médio a BNCC procura uma consolidação, uma ampliação e um aprofundamento das habilidades desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental, dessa forma ela deseja correlacionar os conhecimentos já adquiridos de modo que o aluno consiga construir uma visão mais ampla e integrada da Matemática e de sua aplicação na realidade, com esse pensamento a BNCC propõe as seguintes habilidades a serem desenvolvidas no Ensino Médio:

- (EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
- (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- (EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
- (EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital. (Brasil, 2017, p.302-541).

É possível observar uma mudança ao longo do tempo da abordagem da Geometria Espacial nos documentos oficiais do Brasil, começando com a simples conceituação de conteúdos e procedimentos até ao desenvolvimento de competências e habilidades, porém mesmo com estas mudanças podemos observar grandes semelhanças em relação ao que deve ser ensinado pelo professor no âmbito da Geometria Espacial.

1.1.2 O Ensino e a Importância da Geometria Espacial

A geometria espacial é uma parte fundamental da matemática que estuda as propriedades e relações entre figuras tridimensionais, como pontos, linhas, planos, poliedros, esferas e cilindros. Dessa forma o estudo da geometria espacial é de grande importância, pois seu estudo é capaz de:

> [...]possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. (Brasil, 2006, p.75).

Além disso a geometria espacial é ampla e pode ser vista em diversas áreas, como:

✓ Arquitetura e Engenharia: A geometria espacial é essencial para projetar e construir edifícios, pontes, estradas, túneis e outros tipos de infraestrutura. Os engenheiros e arquitetos usam princípios geométricos para determinar a forma e o tamanho de cada componente, garantindo que todas as peças se encaixem perfeitamente.

✓ Física e Astronomia: A geometria espacial é fundamental para o estudo da física e astronomia, que envolvem conceitos tridimensionais complexos, como a forma e o movimento dos planetas, a trajetória de partículas subatômicas e a estrutura do universo em si.

✓ Design de Jogos e Animações: A geometria espacial é essencial para criar jogos em 3D e animações, permitindo que os designers criem personagens e objetos com formas e tamanhos realistas, e para determinar como esses elementos se movem e interagem.

✓ Ciência da Computação: A geometria espacial é uma ferramenta importante na computação gráfica, processamento de imagens, robótica e outras áreas da ciência da computação. É usada para criar modelos 3D, animações e jogos, além de ser fundamental para a construção de robôs e dispositivos que se movem no espaço tridimensional.

✓ Matemática Pura: A geometria espacial é uma área de estudo fascinante e desafiadora em si mesma. Os matemáticos estudam as propriedades das figuras tridimensionais e desenvolvem teoremas e métodos para entender e resolver problemas geométricos complexos.

Portanto é possível concluir que a geometria espacial é importante em muitas áreas da vida e da ciência, desde a engenharia até a matemática pura, e seu estudo nos permite entender e controlar o mundo tridimensional ao nosso redor.

Apesar do estudo da Geometria Espacial ser de suma importância, de acordo com Chaves (2013), a aprendizagem dela, por parte dos alunos, ainda apresenta alguns desafios, pois eles encontram algumas dificuldades em compreendê-la, corroborando com este fato Costa et al. (2009) perceberam que os alunos apenas utilizam as fórmulas da Geometria Espacial e em muitos casos não conseguem correlacionar as fórmulas com os conceitos, além de não conseguirem reconhecer os elementos dos sólidos, tal fato muitas das vezes é decorrente da defasagem quanto aos conceitos de geometria plana e em alguns casos essa dificuldade é proveniente das dificuldades dos próprios professores, seja na parte conceitual ou até mesmo na dificuldade de representar figuras tridimensionais em quadros bidimensionais.

Segundo Chaves (2013), para diminuir essas dificuldades, tanto dos alunos como dos professores, estes devem procurar novas metodologias de ensino, o qual irá necessitar de novas formas, como o uso de material concreto ou o uso de tecnologias, como softwares de geometria ou até mesmo jogos, de modo que propicie ao aluno a capacidade compreender as correlações das diferentes representações geométricas tridimensionais. Entretanto sabemos que a realidade de algumas escolas, principalmente as públicas, é precária quando pensamos em materiais concretos ou tecnológicos, o que muitas vezes impede que o professor desenvolva um ensino de melhor qualidade. Atualmente alguns alunos possuem aparelhos de smartphone e existem diversos softwares que exploram a geometria espacial, como o Poly, o GeoGebra e outros. Com essas ferramentas e alguma metodologia ativa o professor pode explorar esses recursos valiosos.

1.2 **Tecnologias de Comunicação e Informação (TICs) no Ensino de Matemática**

Nos últimos anos, as TICs têm desempenhado um papel fundamental na transformação dos processos de ensino e aprendizagem ao serem usados como ferramentas pedagógicas dentro das salas de aula, Kenski (2007) afirma que “Não há dúvida de que as novas tecnologias de comunicação e informação trouxeram mudanças consideráveis e positivas para a educação”. Assim, de acordo com Lima e Araújo (2021) a utilização dessas tecnologias, dentro da sala de aula, proporciona oportunidades significativas para aprimorar a compreensão dos alunos e promover a aprendizagem ativa e através da utilização de plataformas online, softwares educacionais e recursos multimídia, os professores podem oferecer uma experiência mais interativa e personalizada para seus alunos, criando um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e engajador.

Além disso, as TICs permitem que o ensino alcance um público mais amplo e diverso, promovendo a inclusão e a democratização do acesso ao conhecimento. No entanto, é importante lembrar que a tecnologia é apenas uma ferramenta, e que a qualidade do ensino depende em grande parte da capacidade dos professores em utilizá-la de forma adequada e eficiente.

De acordo com Merlo e Assis (2010) são grandes as potencialidades dos softwares matemáticos, pois estes podem propiciar grandes mudanças positivas nos processos de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemático, fornecendo assim novas formas de aprender a Matemática. Maia, Godim e Vasconcelos (2023) enfatizam sobre a importância das TIC na promoção da interatividade e da participação ativa dos alunos no processo de aprendizagem matemática, assim ferramentas como software de geometria dinâmica e aplicativos interativos permitem que os estudantes explorem conceitos matemáticos de maneira visual e intuitiva, contribuindo para a consolidação de conhecimentos.

Além disso, Bonizário et al. (2023) argumentam que as TICs facilitam a colaboração entre os alunos, assim como entre professores e alunos, criando ambientes de aprendizagem mais participativos e estimulantes, criando assim o conhecimento de maneira conjunta. Ainda de acordo com os autores supracitados, ferramentas de comunicação online, como fóruns e salas de bate-papo, promovem a discussão de problemas matemáticos, possibilitando a troca de ideias e perspectivas mesmo que os alunos não estejam fisicamente em um mesmo local.

No entanto, é fundamental abordar desafios e considerações éticas relacionadas ao uso das TIC no ensino de matemática. Silveira (2005) destaca a importância de uma abordagem que garanta que a tecnologia seja utilizada de maneira pedagogicamente eficaz, evitando potenciais desigualdades no acesso, de modo que os alunos alcancem o direito de interagirem e se comunicarem por meio das redes, permitindo inserção das camadas mais carentes da sociedade nesse novo mundo tecnológico. Além disso, Carneiro, Figueiredo e Ladeira (2020) afirmam que os professores devem procurar se capacitar ainda mais para que estejam preparados pedagogicamente para utilizarem essas TICs de modo que promovam aulas interativas, dinâmicas e principalmente que se correlacione com a realidade de seu público-alvo, de modo que consiga atingir a maioria deles e que os insiram nessa cultura digital cada vez mais.

1.2.1 As TICs nos Documentos Oficiais

Nos PCNs do Ensino Fundamental (1996), já se discutia a utilização das tecnologias na educação, tendo como um dos seus principais objetivos fazer com que os alunos sejam capazes de "saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos", dessa forma esperava-se que os alunos pudessem entender a importância das tecnologias e da necessidade de acompanhar sua evolução. No mesmo documento se dava ênfase na educação para formar trabalhadores mais criativos e versáteis através do uso das tecnologias existentes na época, dentre as contribuições das TICs no processo de ensino e aprendizagem de Matemática o documento ressalta que seu uso:

> - relativiza a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que por meio de instrumentos esses cálculos podem ser realizados de modo mais rápido e eficiente;
> - evidencia para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas;
> - possibilita o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem;
> - permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo. (Brasil, 1998, p.43-44).

Porém na época que este documento foi publicado, ainda não se tinha o desenvolvimento das tecnologias que temos hoje, então tudo que se falava sobre tecnologia era muito mais no campo teórico do que no campo prático, pois alguns recursos tecnológicos eram bem escassos ou ainda inexistentes em 1998, dessa forma o objetivo do PCN do Ensino Fundamental para área de Matemática concomitante com as TICs era que:

> A Matemática é importante na medida em que a sociedade necessita e se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, que por sua vez são essenciais para a inserção das pessoas como cidadãos no mundo do trabalho, da cultura e das relações sociais. (Brasil, 1998, p.56).

O PCN+ (2002) para o Ensino Médio afirma que não se pode desconsiderar os recursos oferecidos pelas TICs em pleno século 21, para tal utilização os professores devem passar por capacitações para a utilização de tais tecnologias existentes e devem sempre se manter atualizados, além disso o documento salienta que com o passar do tempo o custo dos aparelhos tem decrescido, enquanto a sua relevante utilização se torna cada vez mais importante, permitindo assim que instituições, professores e alunos tenha acesso mais facilitado a esses recursos com o passar dos anos.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) ressaltam que as TICs estão cada vez mais inseridas na sociedade, estando cada vez mais presente no dia a dia das instituições de ensino, dos professores e dos alunos, dessa forma torna-se mais imprescindível que todos sejam mais capacitados para utilizar essas tecnologias de maneira mais eficaz. O documento faz uma observação importante quando diz que a tecnologia é:

> [...] um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática. (Brasil, 2006, p.87).

Neste documento já se detalha um pouco mais quais são os recursos tecnológicos mais acessíveis na época como as calculadoras, as planilhas eletrônicas, os softwares de computador, os sites da internet e alguns mais recursos.

As Diretrizes Curriculares Nacionais (2013) afirmam que os alunos nasceram em uma era digital e que os professores devem acompanhar as evoluções tecnológicas, diminuindo a distância entre as TICs e o seu uso no processo de ensino e aprendizagem, assim elas devem ser utilizadas para a elaboração de novas metodologias didático-pedagógicas, de forma que sejam inseridas cada vez mais no dia a dia das escolas, dessa forma o documento salienta que:

> As tecnologias da informação e comunicação constituem uma parte de um contínuo desenvolvimento de tecnologias, a começar pelo giz e os livros, todos podendo apoiar e enriquecer as aprendizagens. Como qualquer ferramenta, devem ser usadas e adaptadas para servir a fins educacionais e como tecnologia assistiva; desenvolvidas de forma a possibilitar que a interatividade virtual se desenvolva de modo mais intenso, inclusive na produção de linguagens. Assim, a infraestrutura tecnológica, como apoio pedagógico às atividades escolares, deve também garantir acesso dos estudantes à biblioteca, ao rádio, à televisão, à internet aberta às possibilidades da convergência digital. (Brasil, 2013, p.8).

O documento ainda salienta que as TICs são de grande importância para os tempos atuais, visto que, permitem capacitar cada vez mais os alunos frente aos avanços tecnológicos, permitindo um eficiente exercício da cidadania e trazendo contribuições inovadoras para o mercado de trabalho. Por estes fatos as TICs devem ser utilizadas desde a Educação Infantil até o Ensino Médio. Assim o documento propõe uma nova forma de organização dos componentes curriculares através de eixos temáticos, dentre eles temos os seguintes eixos referentes às TICs: “IX – a utilização de novas mídias e tecnologias educacionais, como processo de dinamização dos ambientes de aprendizagem; X – a oferta de atividades de estudo com utilização de novas tecnologias de comunicação.” (Brasil, 2013, p.50).

O documento oficial que rege a educação básica atualmente no Brasil é a BNCC estabelecida em 2017 e ainda amplamente discutida em 2023, ela propõe algumas competências básicas que o aluno deve adquirir durante a educação básica, dentre as sete existentes, uma se refere à utilização das TICs:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (Brasil, 2017, p.9).

Corroborando com os documentos anteriores, a BNCC reafirma que as TICs estão cada vez mais evoluindo e ainda salienta que o acesso a elas está aumentado com o passar do tempo, devido a um aumento da disponibilidade de computadores, celulares, tablet e outros, estando os estudantes totalmente inseridos nesse ambiente tecnológico e utilizar as TICs no processo de ensino e aprendizagem torna os alunos mais engajados, pois cada vez mais atuam como protagonistas na construção do próprio conhecimento, seja pela investigação, exploração ou utilização de uma tecnologia, de modo que sejam capazes de apropriar-se das tecnologias sabendo utilizá-las de modo correto. A BNCC define outro termo sobre o qual é importante refletir, que são as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), pois os avanços tecnológicos estão presentes em todas as áreas da vida dos alunos, assim temos que:

> Tanto a computação quanto as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) estão cada vez mais presentes na vida de todos, não somente nos escritórios ou nas escolas, mas nos nossos bolsos, nas cozinhas, nos automóveis, nas roupas etc. Além disso, grande parte das informações produzidas pela humanidade está armazenada digitalmente. Isso denota o quanto o mundo produtivo e o cotidiano estão sendo movidos por tecnologias digitais, situação que tende a se acentuar fortemente no futuro. (Brasil, 2017, p.473).

No campo da Matemática e suas Tecnologias a BNCC destaca a utilização de calculadoras, planilhas eletrônicas, sites na internet e softwares livres para computador ou aplicativos para smartphone e tablets. Com essa utilização espera-se que o aluno possua um melhor pensamento computacional, interpretando, elaborando e investigando problemas e resultados matemáticos, assim a BNCC propõe que o aluno seja capaz de:

> 2.Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática. [...]
> [...]5.Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (Brasil, 2017, p.531).

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) é uma lei brasileira que estabelece as diretrizes e bases da educação no país. Ela foi promulgada em 1996 e é considerada um marco histórico na área da educação no Brasil, pois trouxe mudanças significativas na organização e na gestão do sistema educacional. Entre as principais mudanças, destaca-se a ampliação da obrigatoriedade do ensino para nove anos, a universalização do ensino fundamental, a criação dos sistemas de ensino, a descentralização do poder e a valorização dos profissionais da educação. A LDB é uma referência para a elaboração de políticas educacionais e para a atuação dos gestores e educadores, visando garantir uma educação de qualidade para todos os brasileiros. Apesar de ela ser o documento oficial mais antigo aqui citado, recentemente foram incluídos no artigo 4 da referida lei alguns pontos sobre a educação digital o que oficializa a importância da utilização das TDICs na educação:

> Art. 4º O dever do Estado com educação escolar pública será efetivado mediante a garantia de:[...]
> XII - educação digital, com a garantia de conectividade de todas as instituições públicas de educação básica e superior à internet em alta velocidade, adequada para o uso pedagógico, com o desenvolvimento de competências voltadas ao letramento digital de jovens e adultos, criação de conteúdos digitais, comunicação e colaboração, segurança e resolução de problemas. (Incluído pela Lei nº 14.533, de 2023)
> Parágrafo único. Para efeitos do disposto no inciso XII do **caput** deste artigo, as relações entre o ensino e a aprendizagem digital deverão prever técnicas, ferramentas e recursos digitais que fortaleçam os papéis de docência e aprendizagem do professor e do aluno e que criem espaços coletivos de mútuo desenvolvimento. (Incluído pela Lei nº 14.533, de 2023). (Brasil, 1996).

1.2.2 A Importância das TICs no Ensino

Como visto anteriormente os documentos oficiais reconhecem a importância das TICs como ferramentas fundamentais para o desenvolvimento econômico, social e educacional. A utilização dessas tecnologias é vista como um fator importante para a melhoria da qualidade de vida das pessoas e para a construção de uma sociedade mais conectada e informada. Elas são importantes no ensino porque permitem que os alunos tenham acesso a mais informações, interajam mais entre si e com os professores, personalizem seu aprendizado, desenvolvam habilidades importantes para o mercado de trabalho e tenham uma aprendizagem mais lúdica e motivadora, como afirma Jordão:

> As tecnologias digitais são, sem dúvida, recursos muito próximos dos alunos, pois a rapidez de acesso às informações, a forma de acesso randômico, repleto de conexões, com incontáveis possibilidades de caminhos a se percorrer, como é o caso da internet, por exemplo, estão muito mais próximos da forma como o aluno pensa e aprende. Portanto, utilizar tais recursos tecnológicos a favor da educação torna-se o desafio do professor, que precisa se apropriar de tais recursos e integrá-los ao seu cotidiano de sala de aula (Jordão, 2009, p.10).

O professor precisa compreender a nova realidade em que, na qual o ensino está inserido, precisa entender que hoje o aluno aprende de modo diferente e assim deve começar a repensar suas práticas pedagógicas a partir da nova sociedade digital que os alunos fazem parte, procurando sempre introduzir em suas aulas essas tecnologias que já fazem parte do cotidiano dos alunos, esse fato está descrito por Gouvêa (1999, apud Oliveira, 2013) quando ele afirma:

> O professor será mais importante do que nunca, pois ele precisa se apropriar dessa tecnologia introduzi-la na sala de aula, no seu dia a dia, da mesma forma que um professor, que um dia, introduziu o primeiro livro numa escola e teve de começar a lidar de modo diferente com o conhecimento, sem deixar as outras tecnologias de comunicação de lado. Continuaremos a ensinar e a aprender pela palavra, pelo gesto, pela emoção, pela afetividade, pelos textos lidos e escritos, pela televisão, mas agora também pelo computador, pela informação em tempo real, pela tela em camadas, em janelas que vão se aprofundando às nossas vistas. (Gouvêa, 1999).

Dessa forma os professores devem procurar se capacitar cada vez mais para que possam utilizar esses recursos de forma eficiente dentro da sua sala de aula, assim de acordo com Jordão (2009) o processo de atualização e capacitação do professor deve ser para a vida toda, pois sempre surgirão novos recursos tecnológicos. Porém por mais que o professor se capacite, muitas vezes não consegue utilizar os recursos tecnológicos, devido ao fato de sua realidade escolar não permitir, pois muitas vezes as escolas não possuem infraestrutura adequada para desenvolver tais atividades.

Segundo Prensky (2001) os alunos já nasceram e fazem parte desse novo mundo digital, sendo chamados de “nativos digitais”, enquanto os professores são considerados como “imigrantes digitais” por terem nascido antes desse desenvolvimento tecnológico atual, porém são estes que precisam se inserir na nova realidade. Essa adaptação do professor para utilizar as TICs em sala de aula, de acordo com Silva (2009), provoca uma maior motivação e um maior interesse dos alunos durante as aulas de Matemática, despertando a curiosidade deles, pois utilizarão recursos que eles gostam e que possuem grande interesse em aprender.

Existem diversas TICs que podem ser utilizadas durantes as aulas de Matemática, podemos citar alguns tais como:

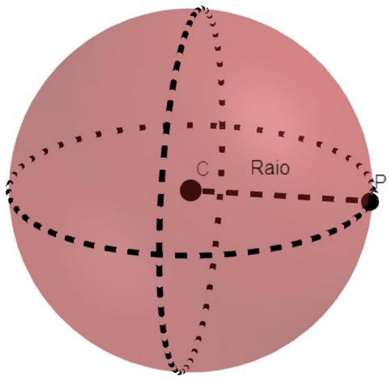
1. Softwares de Geometria Dinâmica: Softwares como o GeoGebra e o Cabri permitem que os alunos visualizem e manipulem figuras geométricas em 2D e 3D, o que ajuda a compreender conceitos geométricos de forma mais intuitiva.
2. Jogos educativos: Existem muitos jogos educativos de matemática que podem ser utilizados para ensinar conceitos matemáticos de forma lúdica e divertida. Alguns exemplos incluem o Mathletics, o DragonBox e o Prodigy.
3. Plataformas de ensino como o Khan Academy e o Matific oferecem uma grande variedade de atividades e aulas de matemática, que podem ser personalizadas de acordo com o nível de cada aluno.
4. Simuladores e modelos interativos: Simuladores como o PhET permitem que os alunos experimentem e observem o comportamento de fenômenos que envolvem conceitos matemáticos, como circuitos elétricos, ondas sonoras e reações químicas.
5. Aplicativos para dispositivos móveis: Existem muitos aplicativos de matemática para dispositivos móveis que permitem que os alunos estudem e pratiquem matemática em qualquer lugar, a qualquer hora. Alguns exemplos incluem o Photomath, o Mathway e o Desmos.

O importante é saber escolher as ferramentas certas para cada situação e contexto, e sempre buscar formas de integrar as TICs de forma criativa e eficiente ao processo de ensino e aprendizagem e para driblar as dificuldades de infraestrutura da realidade escolar é possível utilizar algumas metodologias ativas que facilitarão esse processo.

1.3 **Geometria Dinâmica**

A teoria de Fischbein (1993 apud Gravina 1996), notável na psicologia da educação matemática, destaca a importância da distinção entre os componentes conceitual e figural no entendimento de objetos geométricos. O componente conceitual refere-se à compreensão das propriedades intrínsecas de uma figura geométrica, enquanto o componente figural relaciona-se à sua representação visual, ou seja, a forma conceitual é dada através da forma escrita ou falada, podendo ter ou não um certo grau de formalismo matemático, de acordo com as condições axiomáticas e com as propriedades a serem desenvolvidas, enquanto a forma figural consiste na imagem projetada mentalmente pelos alunos de acordo com os conceitos aprendidos, porém a forma figural pode ser alterada, mentalmente, a partir de movimentações permitidas pela geometria, como translações, rotações, homotetias, reflexões, simetrias e outras relações que mantenham inalteradas algumas relações.

Quadro 1 - Componente Conceitual e Figural

• Lugar Geométrico de todos os pontos P do espaço cuja distância a um ponto C (centro) é menor ou igual a um número real e positivo r, ou seja, $\mathbf{E} = \{\mathbf{P} \mid \overline{\mathbf{CP}} \leq \mathbf{r}\}$. • Dado um sistema de eixos ortogonais OXYZ o objeto geométrico representado pela equação cartesiana $\mathbf{E}: (\mathbf{x}-\mathbf{a})^2 + (\mathbf{y}-\mathbf{b})^2 + (\mathbf{z}-\mathbf{c})^2 \leq \mathbf{r}^2$ é uma esfera E de centro $\mathbf{C} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ e raio r. • Sólido de Revolução formado pela rotação completa de um semicírculo.	
Exemplo de Componente Conceitual	Exemplo de Componente Figural

Fonte - O Autor, 2023

Fischbein argumenta que um sólido entendimento matemático requer a integração efetiva desses dois componentes. A habilidade de transitar entre as representações figural e conceitual permite aos alunos uma compreensão mais profunda e flexível dos conceitos geométricos. Essa abordagem contribui significativamente para a construção de um conhecimento matemático mais robusto e transferível, capacitando os alunos a aplicar seus entendimentos geométricos em diversos contextos e desafios.

Quando se pensa em um objeto geométrico e suas propriedades sempre deve existir a relação entre as componentes conceitual e figural, para tal tem-se a argumentação lógica e dedutiva que é uma abordagem na qual os alunos utilizam raciocínio lógico para justificar e validar afirmações ou conclusões sobre propriedades geométricas. Nesse contexto, a dedução refere-se à aplicação de regras e princípios lógicos para chegar a conclusões inevitáveis a partir de premissas dadas. A argumentação lógica em geometria é essencial para construir uma compreensão sólida dos teoremas e propriedades geométricas, promovendo a clareza na comunicação, entre os componentes conceitual e figural, na matemática. Esse processo não apenas fortalece as habilidades de resolução de problemas, mas também ajuda os alunos a desenvolverem um pensamento analítico e crítico, fundamentais para o sucesso no estudo da geometria e em disciplinas matemáticas mais avançadas, corroborando com a argumentação lógica e dedutiva o desenho serve como de materialização dos objetos geométricos que guardam as relações e propriedades a serem desenvolvidas e exploradas, logo podem ocorrer duas dificuldades básicas na implementação da argumentação lógica e dedutiva que são:

> a) perceber no desenho configurações simples dentro de configurações complexas, as quais vão ser os "elos" compondo a cadeia de argumentação;
> b) controle do desenho para que características de contingência da representação não sejam incorporadas as propriedades matemáticas que determinam a configuração. (Gravina, 1996, p.3).

Devido a estas dificuldades, ainda de acordo com a autora supracitada, podem existir dissonâncias entres as componentes conceitual e figural, propostas na teoria de Fischbein, quanto à definição e as propriedades dos objetos matemáticos e tal fato, em grande parte dos casos, se dá pelo efeito estático do desenho e da componente figural (mental), assim uma maneira de minimizar estas dificuldades seria trabalhar com desenhos que possam se movimentar e desse modo o aluno pode verificar e investigar quais particularidades do objeto geométrico mudam e quais seguem invariáveis, estes representam as reais características e propriedades de tal objeto geométrico, ou seja, deve-se trabalhar com desenhos dinâmicos (que podem ser movimentados) para reduzir as dificuldades conectivas entre as componentes conceitual e figural, dessa forma a Geometria Dinâmica com softwares se apresente como uma ferramenta muito útil.

A Geometria Dinâmica é uma abordagem de ensino de geometria que utiliza softwares interativos para criar construções geométricas que podem ser manipuladas pelos usuários em tempo real. De acordo com Silva (1997) esses softwares permitem que os estudantes visualizem e experimentem conceitos geométricos de forma mais interativa e intuitiva do que com o uso de lápis e papel, dessa forma, segundo Goldenberg e Cuoco (1988, apud Lopes, 2013), tal interação ocorre através da transformação em tempo real através do recurso de "arrastar", permitindo que os alunos possam explorar propriedades geométricas e testar conjecturas de maneira interativa, ajudando a desenvolver a compreensão e a intuição geométrica. Assim Gravina (1996) afirma que existem dois principais objetivos didáticos na utilização da Geometria Dinâmica que são:

> a) os alunos constroem os desenhos de objetos ou configurações, quando o objetivo é o domínio de determinados conceitos através da construção;
> b) recebem desenhos prontos, projetados pelo professor, sendo o objetivo a descoberta de invariantes através da experimentação e, dependendo do nível de escolaridade dos alunos, num segundo momento, trabalham as demonstrações dos resultados obtidos experimentalmente.
> (Gravina, 1996, p.7).

Logo a geometria dinâmica pode ser usada para demonstrar desde conceitos mais simples até os mais complexos de maneira visual e interativa, tornando a aprendizagem mais efetiva e interessante. A utilização da dinâmica possui valiosas contribuições como a interatividade, a visualização de objetos geométricos em diferentes perspectivas, a flexibilidade no processo de experimentação e um ganho motivacional e de engajamento por parte dos alunos, em contrapartida existem algumas desvantagens, como a necessidade do software que pode não estar acessível ao aluno, as dificuldades técnicas tanto no aspecto do conhecimento técnico quanto no aspecto da infraestrutura das escolas.

Existem vários softwares de geometria dinâmica para computador disponíveis, podemos citar:

1. GeoGebra: é um software gratuito e de código aberto que permite criar figuras geométricas interativas e explorar conceitos matemáticos em três dimensões.
2. Cabri: é um software comercial que permite criar figuras geométricas interativas e explorar conceitos matemáticos em duas e três dimensões.
3. Cinderella: é um software comercial que permite criar figuras geométricas interativas e explorar conceitos matemáticos em duas e três dimensões.
4. JSXGraph: é um software gratuito e de código aberto que permite criar figuras geométricas interativas e explorar conceitos matemáticos em duas e três dimensões.
5. Eukleides: é um software gratuito e de código aberto que permite criar figuras geométricas interativas e explorar conceitos matemáticos em duas e três dimensões.

Enquanto para os aplicativos para dispositivos móveis (celulares e tablets) podemos citar:

1. GeoGebra
2. Cabri Jr.: um aplicativo comercial que permite criar figuras geométricas interativas e explorar conceitos matemáticos em duas e três dimensões.

3. iGeometry: um aplicativo comercial que permite criar figuras geométricas interativas e explorar conceitos matemáticos em duas e três dimensões.
4. Geometry Pad: um aplicativo gratuito que permite criar figuras geométricas interativas e explorar conceitos matemáticos em duas e três dimensões.
5. MathStudio: um aplicativo comercial que permite criar figuras geométricas interativas e explorar conceitos matemáticos em duas e três dimensões.

1.3.1 O GeoGebra 3D

O GeoGebra é um software de geometria dinâmica que permite que os usuários criem, visualizem e manipulem figuras geométricas em 2D e 3D. Ele combina recursos de geometria, álgebra, cálculo e estatística em uma única plataforma, o que o torna uma ferramenta muito útil para professores e alunos de matemática de todos os níveis. Com o GeoGebra, é possível criar e manipular figuras geométricas, resolver equações e sistemas de equações, realizar cálculos de derivadas e integrais, criar gráficos de funções e muito mais. Além disso, o GeoGebra é um software gratuito e de código aberto, o que significa que pode ser baixado e usado gratuitamente por qualquer pessoa.

O GeoGebra 3D é uma extensão do software GeoGebra que permite a criação e manipulação de figuras tridimensionais. Com ele, é possível criar e visualizar figuras geométricas em três dimensões, tais como poliedros, cones, esferas, cilindros, entre outros. Além disso, o software permite a criação e manipulação de vetores e de funções matemáticas em três dimensões, o que o torna uma ferramenta muito útil para professores e alunos de matemática, física e outras áreas afins. O software oferece uma interface amigável e intuitiva, além de uma grande variedade de recursos e ferramentas que permitem explorar e compreender conceitos tridimensionais de forma mais clara e interativa.

O aplicativo Calculadora Gráfica 3D do GeoGebra é uma ferramenta gratuita para dispositivos móveis que permite a criação e visualização de gráficos tridimensionais de funções matemáticas. Com o aplicativo, é possível plotar e manipular funções em três dimensões, utilizando recursos como translação, rotação, escalonamento e outras transformações. Além disso, o aplicativo permite a criação de superfícies de funções matemáticas, tais como paraboloides, elipsoides, esferas, cones e cilindros. O aplicativo é uma ferramenta muito útil para professores e alunos de matemática e áreas relacionadas, que desejam explorar e visualizar funções matemáticas em três dimensões de forma mais clara e interativa.

Além disso o Geogebra possui, em seu site oficial https://www.geogebra.org/, uma plataforma poderosa que disponibiliza uma variedade de recursos interativos para ensinar e aprender matemática e disciplinas relacionadas, inclusive o próprio GeoGebra 3D de modo online, ou seja, sem a necessidade de instalar o software. Abaixo estão alguns dos principais recursos disponíveis na plataforma GeoGebra:

1) Geometria Dinâmica
   - Construção e manipulação de figuras geométricas interativas.
   - Animação de objetos geométricos.
   - Exploração de teoremas e propriedades geométricas.

2) Álgebra
   - Representação de equações e inequações.
   - Manipulação algébrica e simplificação de expressões.
   - Gráficos de funções e relações.

3) Cálculo
   - Representação de funções e suas derivadas.
   - Integração de funções.
   - Visualização de conceitos de cálculo, como limites e áreas sob curvas.

4) Planilha de Dados
   - Entrada e manipulação de dados em uma planilha.
   - Criação de gráficos a partir de dados.

5) Comandos e Scripts
   - Uso de comandos e scripts para automatizar a criação de construções e realizar cálculos.
   - Programação para personalização avançada.

6) Ferramentas de Conferência

- Permite que professores e alunos colaborem em tempo real em uma construção.
- Compartilhamento de ideias e discussões sobre o material.

7) Aplicativos GeoGebra
   - Aplicativos especializados para ensinar e aprender conceitos específicos, como GeoGebra Graphing Calculator, GeoGebra 3D Calculator, GeoGebra Augmented Reality, entre outros.

8) Visualizações 3D
   - Exploração de objetos tridimensionais.
   - Representação de funções em três dimensões.

9) Widgets Interativos
   - Widgets específicos para representar conceitos matemáticos, como sliders, caixas de entrada, botões etc.
   - Facilitam a interação e exploração dos usuários.

10) Modelagem Matemática
   - Criação de modelos matemáticos para simulações.
   - Aplicações práticas de conceitos matemáticos em situações do mundo real.

11) Acesso à Comunidade
   - Compartilhamento e exploração de construções criadas por outros usuários na comunidade GeoGebra.

12) Recursos Educacionais
   - Acesso a materiais educacionais criados pela comunidade e por especialistas, como livros, aulas interativas, e planos de aula.

Estes são apenas alguns dos muitos recursos disponíveis na plataforma GeoGebra. A flexibilidade e interatividade proporcionadas pelo GeoGebra tornam-no uma ferramenta versátil para estudantes, professores e entusiastas da matemática.

1.4 **Metodologias Ativas**

Segundo Luz e Sabião (2019), a educação matemática tem passado por transformações significativas nas últimas décadas, os professores devem se capacitar para tais mudanças, pois está ocorrendo uma crescente adoção de abordagens pedagógicas que promovem a participação ativa dos estudantes em seu próprio processo de aprendizagem, ou seja, está ocorrendo uma migração de um modelo de aprendizagem passiva em que o professor é o protagonista da educação, para uma aprendizagem mais ativa onde o aluno é o personagem principal tornando-se responsável por sua própria aprendizagem, pois de acordo com Luckesi:

> A aprendizagem ativa é aquela construída pelo educando a partir da assimilação ativa dos conteúdos socioculturais. Isso significa que o educando assimila esses conteúdos, tornando-os seus, por meio da atividade de internalização de experiências vividas."
> (Luckesi, 1991, p.94).

Nesse contexto, surgem as chamadas metodologias ativas, que têm ganhado destaque como alternativas eficazes para o ensino e aprendizagem da matemática. Logo é importante que o professor explore as definições, vantagens, desvantagens e exemplos dessas metodologias, bem como as utilize como ferramentas que tornem o aprendizado dos discentes mais significativo.

Como visto anteriormente as metodologias ativas são abordagens pedagógicas que colocam o estudante como protagonista do seu próprio aprendizado, estimulando-o a construir conhecimento de forma ativa e participativa. Segundo Johnson, Johnson e Smith (2014), as metodologias ativas envolvem estratégias que incentivam a resolução de problemas, a colaboração entre os estudantes, a reflexão e a aplicação prática do conhecimento. Essas estratégias proporcionam um ambiente de aprendizagem mais dinâmico, motivador e propício ao desenvolvimento das habilidades matemáticas. Entretanto existe uma resistência por parte de alguns estudantes e professores por estarem acostumados com abordagens mais tradicionais e apresentam dificuldades de adaptação a essas novas metodologias, outro fator é o tempo de planejamento na implementação dessas metodologias que faz com que alguns professores desistam de utilizá-las.

Existem várias metodologias ativas que podem ser usadas no ensino de Matemática algumas podem ser aplicadas para solucionar possíveis desvantagens encontradas durante a utilização de alguma tecnologia. Abaixo apresentamos, de modo resumido, algumas possibilidades de uso dessas metodologias ativas, tais como:

- ✓ Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP): A ABP é uma metodologia educacional centrada na resolução de questões do mundo real. Nesse modelo, os alunos enfrentam desafios autênticos que demandam a aplicação prática de conhecimentos, incentivando o desenvolvimento de habilidades críticas e analíticas. A ABP envolve a identificação de problemas, pesquisa autônoma, discussões em grupo e a busca por soluções, promovendo a autonomia e a colaboração. Essa abordagem visa não apenas transmitir informações, mas cultivar a capacidade dos alunos de abordar problemas complexos de maneira reflexiva, integrando teoria e prática de forma significativa.

- ✓ Aprendizagem Baseada em Projetos: A aprendizagem baseada em projetos é uma abordagem educacional que coloca os alunos no centro do processo de aprendizagem, envolvendo-os em projetos significativos e práticos. Esses projetos abordam questões do mundo real, promovendo a aplicação prática do conhecimento. A metodologia estimula a autonomia dos alunos, incentivando a pesquisa, a resolução de problemas e a colaboração em equipe. Além de desenvolver habilidades específicas, a aprendizagem baseada em projetos fomenta o pensamento crítico e a criatividade, proporcionando uma educação mais contextualizada e relevante para os alunos. Esta é uma metodologia mais ampla que a ABRP, pois envolve a execução de projetos significativos que podem abordar uma variedade de questões e desafios do mundo real.

- ✓ Aprendizagem Cooperativa ou em Equipes: A aprendizagem cooperativa, ou em equipes, é uma abordagem educacional que enfatiza a colaboração entre os alunos para atingir objetivos comuns. Nesse método, os estudantes trabalham juntos em atividades, projetos ou problemas, promovendo a interação social e a troca de conhecimentos. A estratégia visa desenvolver habilidades interpessoais, como comunicação eficaz e trabalho em equipe, ao mesmo tempo em que fortalece o entendimento individual dos conceitos. A aprendizagem em equipe incentiva a responsabilidade compartilhada, o apoio mútuo e a diversidade de perspectivas, contribuindo para um ambiente de aprendizado mais dinâmico e colaborativo.

- ✓ Gamificação: A aprendizagem baseada na gamificação é uma estratégia educacional que incorpora elementos de jogos no ambiente de ensino para motivar e engajar os alunos. Essa abordagem utiliza características como competição, recompensas, desafios e narrativas envolventes para tornar o processo de aprendizagem mais lúdico e interativo. Ao aplicar princípios de design de jogos, como pontos, níveis e conquistas, a gamificação busca estimular o interesse dos alunos, promover a participação ativa e reforçar o aprendizado de maneira divertida. Essa metodologia visa criar um ambiente mais dinâmico, colaborativo e motivador, incentivando os estudantes a alcançarem objetivos educacionais por meio de experiências mais imersivas e envolventes.

- ✓ Sala de aula invertida: A sala de aula invertida é uma abordagem pedagógica em que os alunos recebem o conteúdo didático fora da sala de aula, geralmente por meio de vídeos ou materiais online, e reservam o tempo em sala para atividades práticas e discussões. Essa metodologia busca otimizar o tempo presencial, permitindo que os alunos apliquem ativamente o conhecimento adquirido. Os educadores desempenham um papel de facilitadores durante as atividades em classe, proporcionando suporte individualizado. A sala de aula invertida visa promover a participação ativa dos alunos, estimular a autonomia e personalizar o aprendizado de acordo com as necessidades de cada estudante.

- ✓ Aprendizagem baseada em Investigação: A aprendizagem baseada na investigação é uma abordagem educacional centrada na exploração ativa e na resolução de problemas. Nesse método, os alunos são incentivados a formular perguntas, buscar respostas e realizar investigações independentes. A ênfase está na construção do conhecimento por meio da participação ativa dos estudantes em projetos e atividades investigativas. A aprendizagem baseada na investigação promove o pensamento crítico, a criatividade e o desenvolvimento de habilidades de pesquisa. Essa abordagem visa não apenas transmitir informações, mas cultivar a curiosidade, o raciocínio analítico e a capacidade de resolver problemas de forma autônoma.

As metodologias ativas no ensino de Matemática têm se mostrado uma abordagem promissora para o desenvolvimento das habilidades matemáticas dos estudantes. Ao colocá-los como protagonistas do processo de aprendizagem, essas abordagens estimulam o engajamento, a construção do conhecimento e o desenvolvimento de habilidades sociais. No entanto, é importante considerar as vantagens e desvantagens dessas metodologias, bem como a necessidade de planejamento e adaptação por parte dos educadores. Ao explorar o potencial do aprendizado significativo, as metodologias ativas podem contribuir para uma educação matemática mais efetiva e prazerosa.

Como objeto principal desta pesquisa teremos a aprendizagem baseada na investigação e a aprendizagem baseada na resolução de problemas, como será visto nas seções a seguir, estas são abordagens pedagógicas que compartilham semelhanças e se complementam em muitos aspectos. Enquanto a aprendizagem baseada na investigação incentiva os alunos a explorar questões complexas, investigar e construir conhecimento por meio de métodos de pesquisa, a aprendizagem baseada na resolução de problemas desafia os alunos a aplicar esse conhecimento na solução de problemas autênticos. Ambas as abordagens priorizam a construção ativa do conhecimento, a autonomia do aluno e o desenvolvimento de habilidades de pensamento crítico e resolução de problemas. Ao integrar essas duas metodologias, os alunos são incentivados não apenas a buscar respostas, mas também a aplicar estratégias de investigação para resolver problemas do mundo real, promovendo assim uma aprendizagem mais significativa e duradoura.

1.4.1 Aprendizagem Baseada na Investigação

Aprendizagem Baseada na Investigação (ABI) é uma abordagem educacional que, de acordo com Albuquerque, Santos e Giannella (2017), coloca o aluno no centro do processo de aprendizado, incentivando-o a se envolver ativamente na busca, coleta e análise de informações para construir conhecimento significativo. Essa metodologia vai além da simples memorização e transmissão de informações pelo professor, buscando desenvolver habilidades como pensamento crítico, resolução de problemas e tomada de decisões informadas.

A ABI promove uma aprendizagem mais autônoma e participativa, permitindo aos alunos explorar tópicos de interesse pessoal e desenvolver suas próprias perguntas de pesquisa. Ao fazer isso, eles aprendem a conduzir investigações, analisar dados e chegar a conclusões embasadas em evidências. Essa abordagem pedagógica estimula a curiosidade natural dos estudantes, promove o engajamento e fortalece a conexão entre o aprendizado em sala de aula e a vida real. Segundo Valente, Baranauska e Martins (2014), um dos principais fundamentos da ABI é o construtivismo, que destaca o papel ativo do aluno na construção de conhecimento por meio da interação com o ambiente e dos processos mentais de assimilação e acomodação de novas informações, conforme proposto por Jean Piaget.

Pesquisas têm demonstrado que a ABI pode trazer benefícios significativos para o processo de aprendizagem dos alunos. De acordo com um estudo de Helle et al. (2017), a ABI ajuda a melhorar o desempenho acadêmico dos estudantes e a aumentar sua motivação intrínseca. Outra pesquisa realizada por Bell et al. (2019) destacou que a ABI pode fortalecer o pensamento crítico e as habilidades de resolução de problemas dos alunos, além de fomentar um maior interesse e envolvimento com os conteúdos abordados. No entanto, implementar a ABI com sucesso requer planejamento cuidadoso, apoio pedagógico e recursos adequados. Os professores desempenham um papel fundamental nesse processo, atuando como facilitadores e orientadores das atividades de pesquisa dos alunos.

De acordo com a revisão literária feita por com Albuquerque, Santos e Giannella (2017), sobre a ABI, diversos autores, de um modo geral, aplicam passos semelhantes a uma investigação científica, que são:

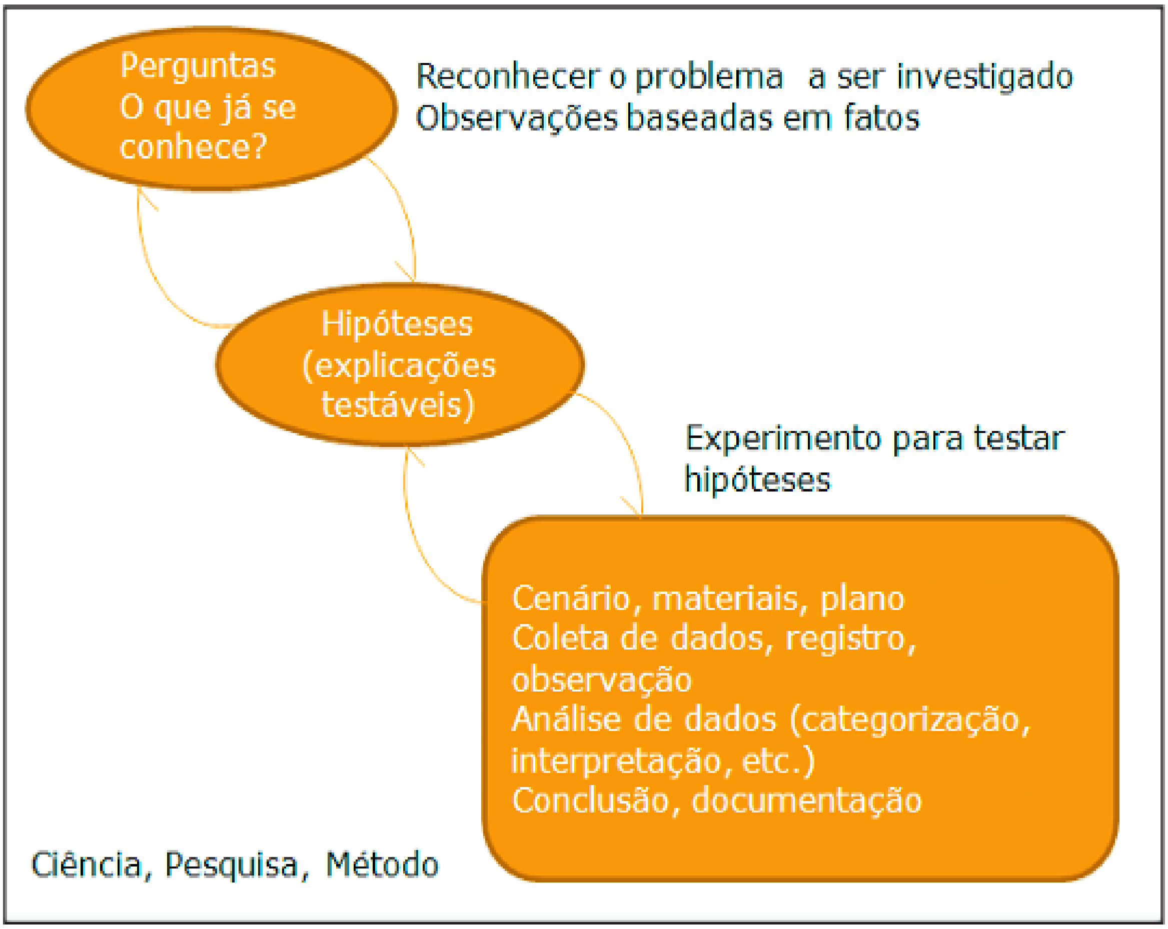
> 1- Orientação (contextualização do tema), 2- Conceitualização (onde pode haver questionamento e geração de hipóteses), 3- Investigação (compreendida por exploração ou experimentação e interpretação de dados) e Conclusão (fase final). Como discutem Pedaste et al (2015), a fase de Discussão (que inclui comunicação e reflexão) está potencialmente presente ao longo de toda a ABI e se conecta a todas as outras fases, porque pode ocorrer a qualquer momento (discussão em ação) ou mesmo ao final da atividade (discussão sobre a ação). (Albuquerque, Santos e Giannella, 2017, p.5).

Dessa forma, como afirma Valente, Baranauska e Martins (2014), o processo de aprendizagem pela investigação deve permitir que o aluno realize indagações (passo 2) sobre uma situação/realidade percebida (passo 1), de modo que ele seja capaz de formular possíveis explicações ou hipóteses (passo 2) sobre o fato analisado que será testado através da observação ou experimentação (passo 3), com o objetivo de responder ou conjecturar as respostas das indagações iniciais, estabelecendo assim o Meta-Modelo de ABI, que pode ser definido nos seguintes passos: 1 - Concepções espontâneas, 2 – Pergunta, 3 – Hipóteses e 4 – Experimento.

Ainda de acordo com Valente, Baranauska e Martins (2014), as concepções espontâneas são referentes aos conhecimentos já possuídos pelos alunos sobre os conceitos de

Método Científico e Pesquisa, de modo que seja possível colocá-lo no contexto da ABI, tal procedimento é importante para que o professor conheça mais sobre o aluno e que potencialize o processo de investigação. A Pergunta corresponde à curiosidade do aluno, são os questionamentos que ele pode fazer sobre a situação/realidade investigada. As Hipóteses são as possíveis respostas que os alunos criarão para as possíveis perguntas realizadas, tais respostas deverão ser testadas, através de um Experimento que seja possível experimentá-las e examiná-las, tais procedimentos podem ser vistos na imagem a seguir:

Figura 1- Metodologia da Aprendizagem Baseada na Investigação



Fonte – Valente, Baranauska e Martins, 2014

É possível verificar grandes semelhanças conceituais e procedimentais, dos autores supracitados, quanto ao processo de aprendizagem baseado na investigação, em resumo, ambos ressaltam que tal processo se estabelece em algumas etapas importantes e correlacionadas entre si, que devem permear e coexistir durante todo o processo, sendo a criação de hipóteses e a experimentação de grande importância para que a ABI seja eficiente e eficaz no processo de ensino e aprendizagem do aluno.

1.4.2 Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas

A aprendizagem baseada na resolução de problemas (ABRP) é uma abordagem educacional que, de acordo com Lopes, Filho e Alves (2019), coloca os alunos no centro do processo de aprendizagem, incentivando-os a desenvolver habilidades e competências ao resolver problemas do mundo real. Essa metodologia vai além da simples transmissão de conhecimento, pois busca envolver os estudantes em um processo ativo de construção do saber.

A ABRP tem suas raízes na teoria construtivista de Jean Piaget, que defendia que os indivíduos aprendem melhor quando estão ativamente envolvidos na resolução de problemas e na construção do conhecimento. Essa abordagem também se baseia na teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel, que enfatiza a importância de relacionar novas informações a conhecimentos prévios para uma aprendizagem mais efetiva.

Durante o processo de aprendizagem baseada na resolução de problemas, os alunos são apresentados a situações desafiadoras e complexas, que exigem a aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente e a busca por novas informações e segundo Mamede (2001, apud Genti; Furlanetto, 2009), eles são encorajados a trabalhar em grupos colaborativos para identificar e analisar problemas, desenvolver estratégias para resolvê-los e apresentar soluções fundamentadas.

Existem várias vantagens associadas à ABRP, pesquisas têm mostrado que essa abordagem pode melhorar a motivação dos alunos, a capacidade de resolução de problemas, o pensamento crítico e a aplicação prática do conhecimento (Hmelo-Silver, 2004; Hung, 2009). Além disso, a ABRP pode promover o desenvolvimento de habilidades sociais, como a colaboração e a comunicação, que são fundamentais no mundo profissional atual.

Uma das formas mais comuns de implementação da ABRP é a aprendizagem baseada em projetos (ABP), onde os alunos são desafiados a realizar projetos relevantes, que envolvem pesquisas, investigações e apresentações. Nesse contexto, os professores atuam como facilitadores, fornecendo orientação e apoio quando necessário. Para que a ABRP seja eficaz, é fundamental que os professores tenham um planejamento adequado, estabelecendo objetivos claros, escolhendo problemas desafiadores e oferecendo suporte adequado aos alunos durante todo o processo (Savery e Duffy, 1995). Além disso, é importante que haja uma reflexão constante sobre os resultados e ajustes para aprimorar a abordagem.

De acordo com Polya (1978 apud Marin e Araújo, 2016) a metodologia para utilização da ABRP será composta por algumas fases, que são: 1ª Fase - Compreensão do Problema, 2ª Fase - Elaboração de um Plano, 3ª Fase - Execução do Plano Elaborado e 4ª Fase - Verificação da Solução. De um modo geral, o professor deve apresentar um problema e permitir um tempo para que os alunos possam aplicar a 1ª Fase (Compreensão do Problema), nesta o aluno, segundo Marin e Araújo (2016), os alunos devem analisar e compreender o problema, debatendo as suas possíveis variáveis, assim como criando esboços do problema e das possíveis maneiras de resolvê-lo. Na 2ª fase (Elaboração de um Plano), o aluno deve estabelecer um significado entre o que foi compreendido na 1ª fase com os caminhos utilizados para alcançar a resolução do problema, saindo de uma linguagem mais usual para uma linguagem mais científica do problema. Já a 3ª Fase (Execução do Plano Elaborado) o aluno irá efetivamente colocar o plano em prática efetuando os cálculos (se forem necessários), elaborando os esquemas ou outras estratégias que forem criadas para o ajudarem a resolver o problema. Na 4ª Fase (Verificação da Solução) o aluno deve analisar a solução obtida, revendo a aprendizagem e analisando possíveis erros que possam ter acontecido ao longo do caminho.

Como esta é uma metodologia centrada no aluno, o professor fica em segundo plano, com uma posição mais de mediador e tal mediação também é importante para auxiliar o aluno na ABRP, em todas as quatro fases o professor deve estar atento às possíveis dificuldades que os alunos possam ter dentro de cada fase e quando isso acontecer ele deve efetuar perguntas que auxiliem o aluno em suas dificuldades e o permitam compreender e seguir com a ABRP, Polya (1978 apud Marin e Araújo, 2016) sugere algumas perguntas para cada fase diferente, tais sugestões estão expostas no quadro abaixo:

Tabela 1 - Síntese das Etapas para Resolver Problemas (Polya, 1978)

FASE	SUGESTÃO DE PERGUNTAS AUXILIADORAS
1ª Fase Compreensão do Problema	→ O que se pede no problema? → Quais os dados e as condições do problema? → É possível fazer uma figura, um esquema ou um diagrama? → É possível estimar a resposta?

2ª Fase Elaboração de um Plano	→ Qual é o seu plano para resolver o problema? → Que estratégia você tentará desenvolver? → Você se lembra de um problema semelhante que pode ajudá-lo a resolver este? → Tente organizar os dados em tabelas e gráficos. → Tente resolver o problema por partes.
3ª Fase Execução do Plano Elaborado	→ Execute o plano elaborado, verificando passo a passo. → Efetue todos os cálculos indicados no plano. → Execute todas as estratégias pensadas, obtendo várias maneiras de resolver o mesmo problema.
4ª Fase Verificação da Solução	→ Examine se a solução obtida está correta. → Existe outra maneira de resolver o problema? → É possível usar o método empregado para resolver problemas semelhantes?

Fonte: Marin e Araújo, 2016.

No campo da Matemática, Dante (2010 apud Marin e Araújo, 2016) afirma que a ABRP permitirá que o aluno alcance alguns dos objetivos desta, sendo assim a partir da ABRP o aluno conseguirá pensar produtivamente, através do desenvolvimento do seu raciocínio lógico, permitindo assim que o aluno seja capaz de enfrentar situações novas, contribuindo assim que para que os alunos possam se envolver mais com problemas e aplicações Matemáticas, tornando as aulas mais interessantes e desafiadoras, fornecendo aos alunos uma gama de estratégias que possam ser aplicadas na resolução de problemas de Matemática como de outras áreas do conhecimento.

2 FUNDAMENTOS DE GEOMETRIA ESPACIAL

A geometria é uma área matemática que estuda as propriedades e relações das figuras e espaços. Sua história remonta a civilizações antigas, como a dos egípcios e babilônios, que, de acordo com Roque e Pitombeira (2019), desenvolveram técnicas práticas de medição de terras e construções através do cálculo de comprimentos, áreas a volumes. No entanto, a geometria como uma disciplina formalizada baseada em princípios lógicos e dedutivos teve um grande impulso com os trabalhos dos gregos antigos, especialmente com Euclides e sua obra "Os Elementos".

A abordagem grega da geometria baseia-se na racionalidade, que envolve a formulação de axiomas (proposições auto evidentes) e a dedução rigorosa de teoremas a partir desses axiomas. Euclides estabeleceu uma coleção de cinco postulados (axiomas) que serviram como base para sua geometria, abordando conceitos como a existência de retas e pontos, a igualdade de ângulos e a possibilidade de extensão infinita de linhas. A geometria euclidiana tradicional, como apresentada em "Os Elementos", desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento da matemática e da ciência, influenciando a forma como pensamos sobre o espaço e as formas. No entanto, ao longo do tempo, os matemáticos perceberam que nem todos os sistemas geométricos precisavam seguir os postulados euclidianos. Isso levou ao desenvolvimento da geometria não euclidiana, como a geometria hiperbólica e a geometria elíptica, que exploram espaços curvos e desafiam as suposições euclidianas.

Princípios lógicos e dedutivos desempenham um papel crucial na geometria e na matemática em geral. Eles garantem a validade e a consistência das conclusões obtidas a partir de axiomas e premissas iniciais. A lógica fornece a estrutura para construir argumentos coerentes, enquanto a dedução permite inferir novas informações a partir das proposições já estabelecidas. Esse método rigoroso de raciocínio é o cerne da construção de teoremas geométricos e, mais amplamente, da busca por conhecimento matemático confiável.

É importante ressaltar que axiomas e teoremas são conceitos fundamentais na matemática, mas desempenham papéis distintos em relação à construção de argumentos e estruturas matemáticas.

- Os axiomas são proposições básicas e auto evidentes que servem como pontos de partida para a construção de uma teoria matemática. Eles são considerados verdades fundamentais que não são demonstradas ou provadas a partir de outros conceitos, mas são aceitos como premissas iniciais. Os axiomas são escolhidos para estabelecer as regras básicas de um sistema matemático, sobre as quais todas as demais conclusões serão derivadas.

- Os teoremas são proposições que são deduzidas de axiomas ou de outros teoremas através de um processo lógico e rigoroso de dedução. São afirmações que podem ser provadas a partir das premissas iniciais de um sistema matemático. Os teoremas podem abranger uma ampla variedade de declarações matemáticas, desde propriedades simples até resultados complexos e profundos.

Em resumo, a diferença fundamental entre axiomas e teoremas é que os axiomas são premissas iniciais aceitas como verdadeiras sem necessidade de prova, enquanto os teoremas são proposições que podem ser demonstradas ou provadas a partir dos axiomas e de outros teoremas por meio de dedução lógica. Os axiomas constituem a base sobre a qual os teoremas são construídos, formando o arcabouço da matemática e permitindo o desenvolvimento de estruturas e conhecimentos matemáticos.

2.1 **Axiomas da Geometria Plana**

Os axiomas da Geometria Plana são um conjunto de declarações fundamentais que formam a base lógica para o estudo da geometria no plano. Eles estabelecem as propriedades básicas dos pontos, linhas e ângulos, bem como as relações entre eles. Existem várias formulações dos axiomas da geometria plana, sendo a mais conhecida aquela proposta por Euclides na sua obra "Os Elementos". Esses axiomas ajudam a construir toda a teoria da geometria e a deduzir as propriedades dos objetos geométricos de maneira consistente. Os axiomas da Geometria Plana incluem declarações sobre a existência e propriedades dos pontos, retas e ângulos, bem como as relações entre eles. Alguns dos principais axiomas incluem:

- Axioma 1: Pode-se traçar uma (única) reta ligando quaisquer dois pontos.
- Axioma 2: Pode-se continuar (de maneira única) qualquer reta finita continuamente em uma reta.
- Axioma 3: Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
- Axioma 4: Todos os ângulos retos são iguais.

- Axioma 5: Se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos interiores, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos. Uma equivalência ao Axioma 5 é que por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.

2.2 **Postulados de Geometria Espacial**

Os postulados da geometria espacial, também conhecida como geometria tridimensional ou geometria euclidiana tridimensional, estabelecem as suposições básicas sobre o espaço tridimensional e suas propriedades. Assim como os axiomas da geometria plana, esses postulados são fundamentais para a construção lógica da geometria espacial. Abaixo estão alguns dos principais postulados da geometria espacial:

1. Postulados da Existência
    - Em uma reta e fora dela existem infinitos pontos.
    - Em um plano e fora dele existem infinitos pontos.
2. Postulados da Determinação
    - Por quaisquer dois pontos distintos, passa uma única reta.
    - Por três pontos não-colineares é determinado um único plano.
3. Postulados da Inclusão
    - Uma reta está contida em um plano quando dois pontos quaisquer da reta pertencem ao plano.
    - Um ponto pertence a um plano quando este pertence a uma reta qualquer do plano.
4. Postulados da Interseção
    - Se dois planos distintos possuem um ponto em comum, então existe uma única reta que passa por esse ponto e que pertence aos dois planos.
5. Postulados da Separação do Espaço
    - Um plano α qualquer divide o espaço em duas regiões distintas, I e II, as quais não contém o plano α e tais que:

a) Se um ponto $A \in I$ e um ponto $B \in II$, então $\overline{AB} \cap \alpha = \{C\}$, ou seja, se A pertence a região I e B a região II, então o segmento $\overline{AB}$ intersecta o plano α em um único ponto.
b) Se um ponto $A \in I$ e um ponto $B \in I$, então $\overline{AB} \cap \alpha = \emptyset$, ou seja, se A e B pertencem a região I, então o segmento $\overline{AB}$ não intersecta o plano α. Análogo para o caso $A \in II$ e $B \in II$.

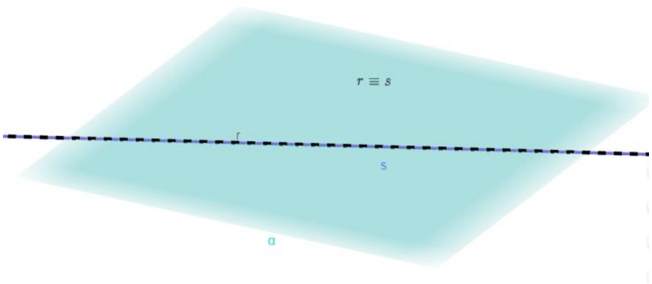
2.3 **Posição Relativa Entre Retas no Espaço**

Sejam duas retas r e s de um plano α, são possíveis duas situações: r e s são coplanares (estão contidas em um mesmo plano) ou r e s não são coplanares (não estão contidas em um mesmo plano), ou seja, são reversas.

✓ Se forem coplanares existem os seguintes casos:

I. Coincidente: As retas r e s são coincidentes se e somente se possuem todos os seus pontos em comum, ou seja, $r \equiv s$.

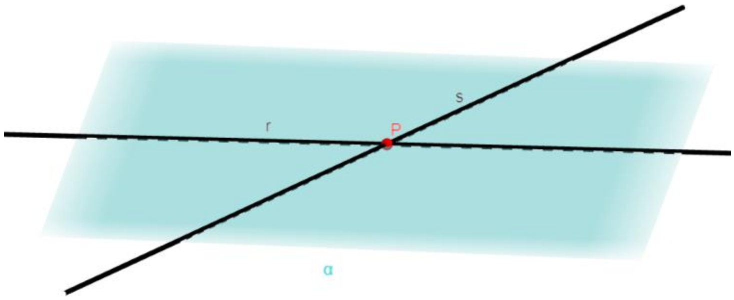
Figura 2 - Retas Coincidentes



Fonte – O Autor, 2023

II. Concorrentes ou Secantes: Duas retas são concorrentes ou Secantes se e somente se possuem um único ponto em comum, ou seja, $r \cap s = P$.

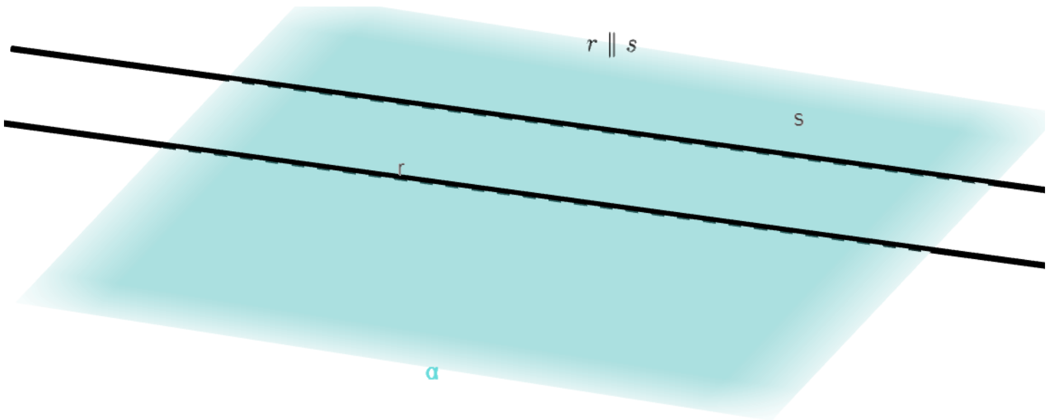
Figura 3 - Retas Concorrentes ou Secantes



Fonte – O Autor, 2023

III. Paralelas: Duas retas são paralelas se e somente se são coplanares e não possuem pontos em comum, ou seja, $r \cap s = \emptyset$.

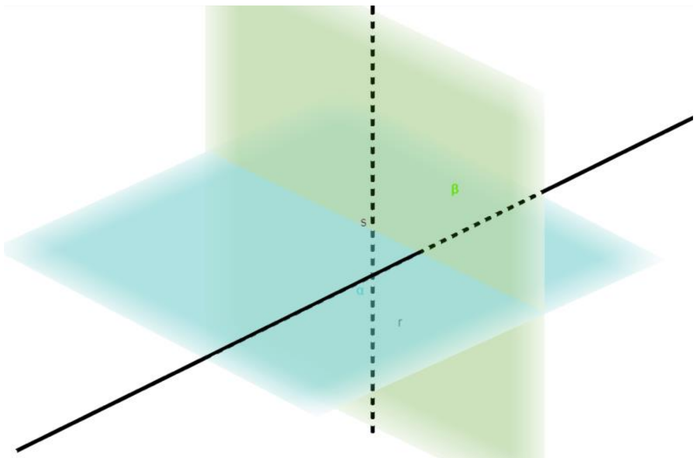
Figura 4 - Retas Paralelas



Fonte – O Autor, 2023

- ✓ Se as retas não forem coplanares são chamadas de retas reversas e não possuirão pontos em comum.

Figura 5 - Retas Reversas



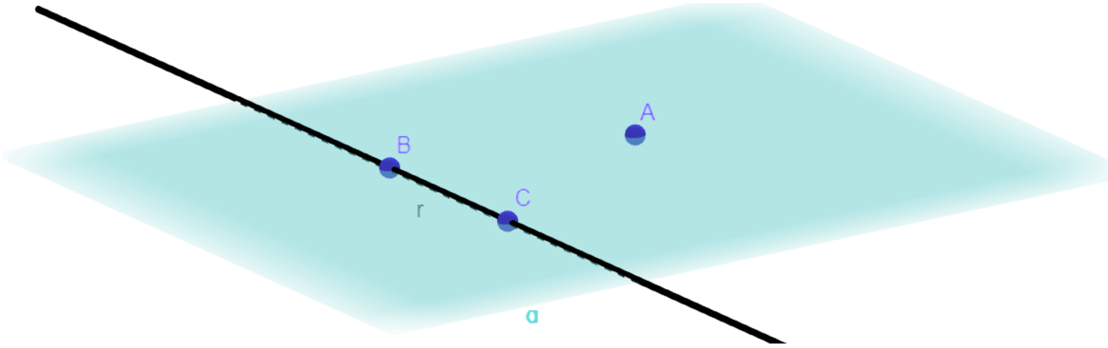
Fonte - O Autor, 2023

2.4 **Determinação de um Plano**

Temos como um dos postulados da determinação que por três pontos passa um único, a partir deste é possível estabelecer outras maneiras de determinar um plano, que são:

I. Uma reta r e um ponto A qualquer fora dela determinam um único plano: Para comprovar tal fato basta tomarmos dois pontos B e C pertencentes a r, logo, pelo postulado da determinação do plano, existe um único plano α formado pelos pontos A, B e C, consequentemente teremos $r \subset \alpha$

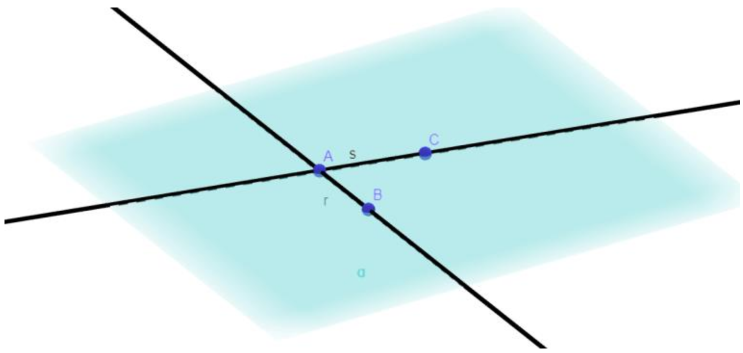
Figura 6 - Determinação de um Plano I



Fonte - O Autor, 2023

II. Duas retas r e s concorrentes no ponto A, determinam um único plano: Para demonstrar basta tomarmos dois pontos $B \in r$ e $C \in s$, ambos diferentes de A, logo pelo postulado da determinação do plano existe um único plano α formado pelos pontos A, B e C, consequentemente teremos $r \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$.

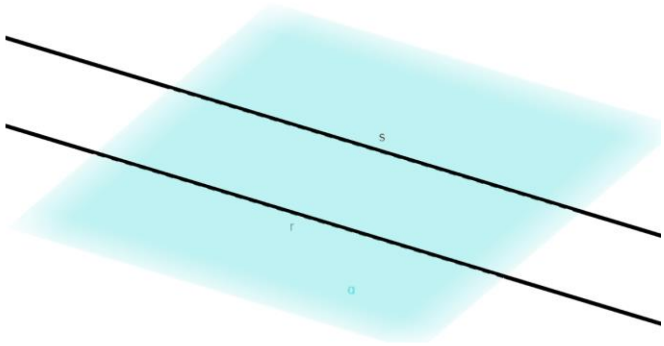
Figura 7 - Determinação de um Plano II



Fonte - O Autor, 2023

III. Duas retas r e s, tais que $r \parallel s$, determinam um único plano: Tal fato já é decorrente da definição de retas paralelas, as quais devem pertencer a um único plano.

Figura 8 - Determinação de um Plano III



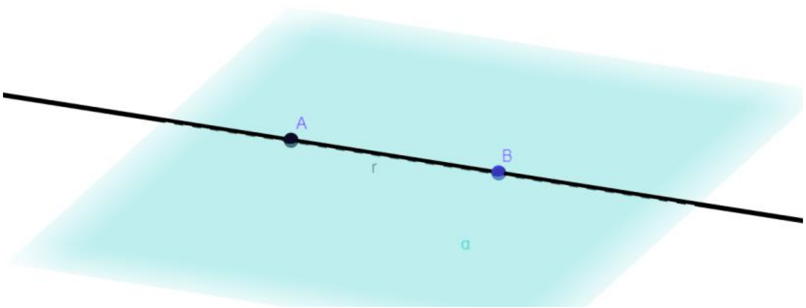
Fonte - O Autor, 2023

2.5 **Posição Relativa Entre Reta e Plano**

Existem três possibilidades para a posição relativa entre uma reta r e um plano α:

I. A reta r está contida no plano α, ou seja, $r \subset \alpha$, sendo assim todos os pontos de r também são pontos de α.

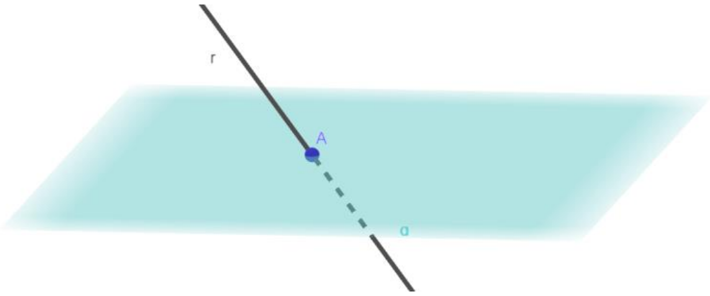
Figura 9 - Reta Contida no Plano



Fonte - O Autor, 2023

II. A reta r e o plano α possuem apenas um ponto em comum, ou seja, $r \cap \alpha = A$, assim dizemos que a reta e o plano são secantes.

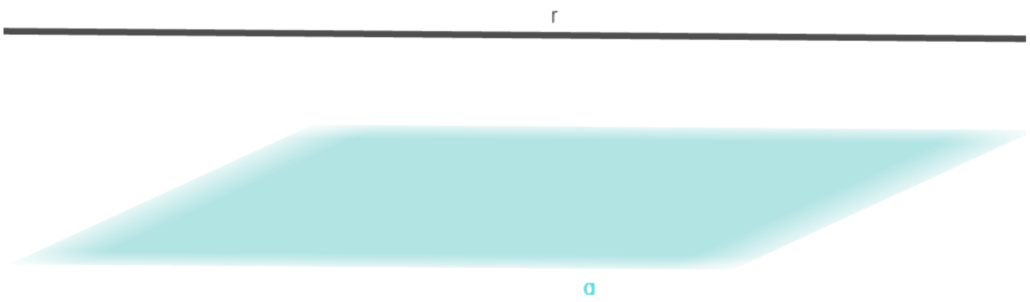
Figura 10 - Reta Secante ao Plano



Fonte - O Autor, 2023

III. A reta r não possui pontos em comum com o α, ou seja, $r \cap \alpha = \emptyset$, assim dizemos que a reta e o plano são paralelos.

Figura 11 - Reta Paralela ao Plano



Fonte - O Autor, 2023

2.6 **Posição Relativa Entre Dois Planos**

O postulado da interseção diz que se dois planos distintos possuem um ponto em comum, então existe uma única reta que passa por esse ponto e que pertence aos dois planos. A partir desse postulado, existem três possibilidades para a posição relativa entre dois planos α e β:

I. Coincidentes: Quando todos os pontos de α e β são comuns, ou seja, $\alpha \equiv \beta$.

Figura 12 - Planos Coincidentes

Fonte - O Autor, 2023

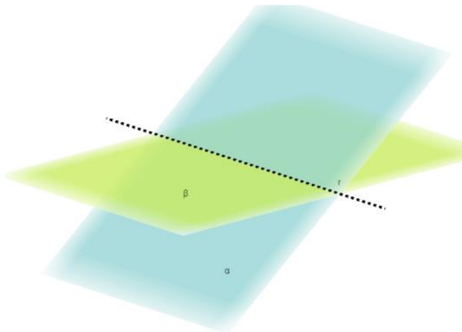
II. Paralelos: Não possuem pontos em comum, ou seja, $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

Figura 13 - Planos Paralelos

Fonte - O Autor, 2023

III. Concorrentes: Pelo postulado da interseção, existe uma reta que passa pela interseção destes dois planos, ou seja, $\alpha \cap \beta = r$.

Figura 14 - Planos Concorrentes



Fonte - O Autor, 2023

2.7 **Posição Relativa Entre Três Planos**

Considerando três Planos α, β e γ e analisando as situações geometricamente é possível observar oito possibilidades para as posições relativas entre α, β e γ.

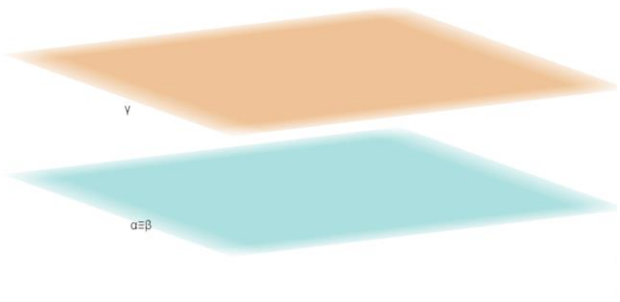
I. Os três planos são coincidentes, ou seja, $\alpha \equiv \beta \equiv \gamma$.

Figura 15 - Três Planos Coincidentes

Fonte - O Autor, 2023

II. Dois planos são coincidentes e o terceiro é paralelo a eles, ou seja, $\alpha \equiv \beta$ e $\alpha \cap \gamma = \beta \cap \gamma = \emptyset$.

Figura 16 - Dois Planos Coincidentes e o Terceiro Paralelo



Fonte - O Autor, 2023

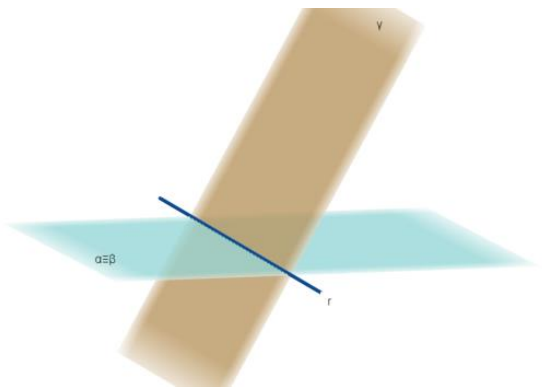
III. Os três planos são paralelos dois a dois entre si, ou seja, $\alpha \cap \beta = \emptyset, \alpha \cap \gamma = \emptyset$ e $\beta \cap \gamma = \emptyset$.

Figura 17 - Três Planos Paralelos

Fonte - O Autor, 2023

IV. Dois planos são coincidentes e o terceiro intersecta os outros dois em uma reta r, ou seja, $\alpha \equiv \beta$ e $\alpha \cap \gamma = \beta \cap \gamma = r$.

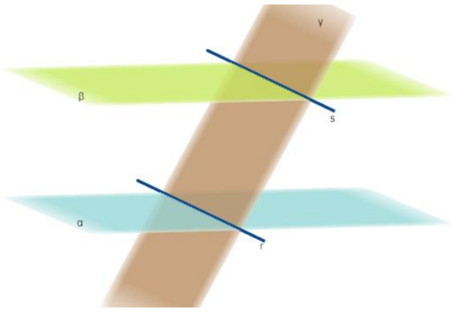
Figura 18 - Dois planos Coincidentes Intersectados pelo Terceiro Plano



Fonte - O Autor, 2023

V. Dois planos são paralelos o terceiro intersecta ambos em duas retas r e s paralelas entre si, ou seja, $\alpha \cap \beta = \emptyset, \alpha \cap \gamma = r, \beta \cap \gamma = s$ e $r \parallel s$.

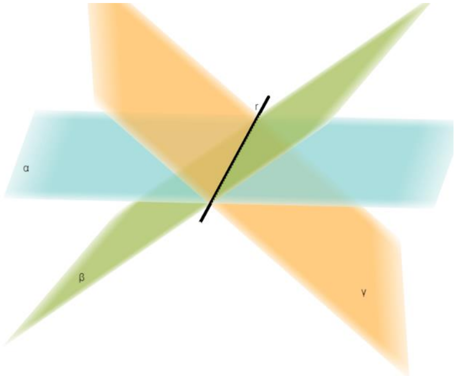
Figura 19 - Dois planos Paralelos Intersectados pelo Terceiro Plano



Fonte - O Autor, 2023

VI. Os três planos são distintos entre si e se intersectam em uma reta r, ou seja, $\alpha \neq \beta, \alpha \neq \gamma, \beta \neq \gamma$ e $\alpha \cap \beta \cap \gamma = r$.

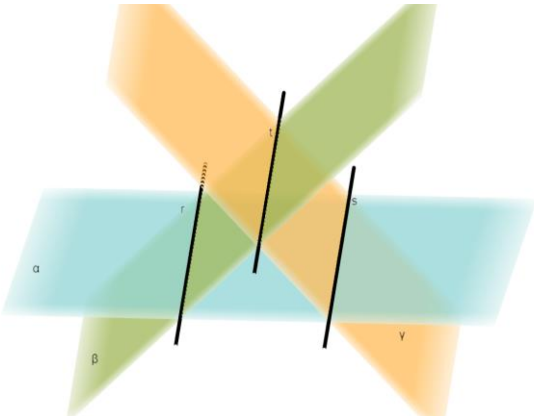
Figura 20 - Três Planos Distintos se Intersectando em uma Reta



Fonte - O Autor, 2023

VII. Os três planos se intersectam dois a dois através de três retas paralelas r, s e t, ou seja, $\alpha \cap \beta = r, \alpha \cap \gamma = s, \beta \cap \gamma = t$ e $r \parallel s \parallel t$.

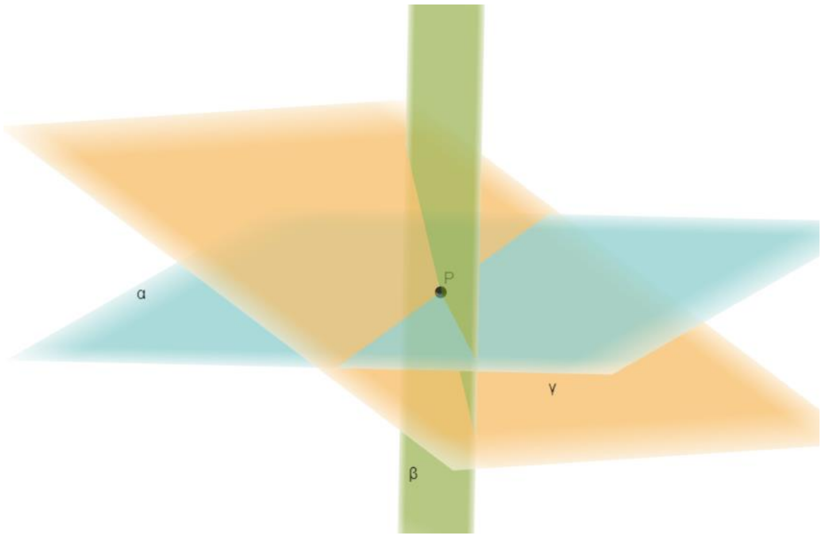
Figura 21 - Três Planos Distintos se Intersectando dois a dois



Fonte - O Autor, 2023

VIII. Os três planos se intersectam em um único ponto P, ou seja, $\alpha \cap \beta \cap \gamma = P$.

Figura 22 - Três Planos se Intersectando em um Único Ponto

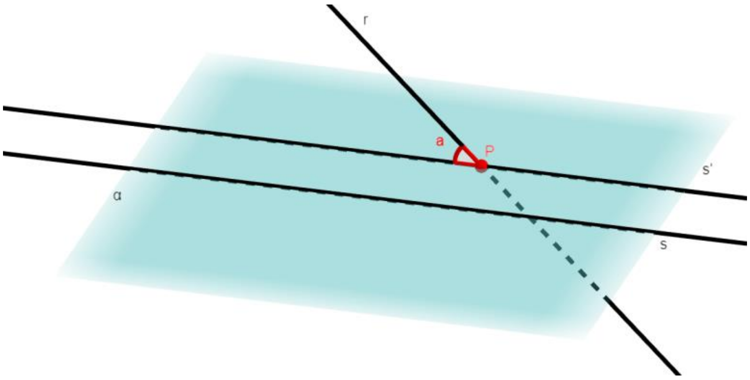


Fonte - O Autor, 2023

2.8 **Ângulos Entre Retas no Espaço**

Para que exista um ângulo entre duas retas r e s no espaço estas devem ser concorrentes ou reversas. No caso que as retas são reversas o ângulo entre elas, denotado por $\angle(r, s)$, é determinado pelo ângulo formado pela reta r com uma reta s' paralela a s e que intersecta a reta r em um ponto qualquer, ou seja, $\angle(r, s) = \angle(r, s') = \hat{a}$.

Figura 23 - Ângulo Entre Duas Retas



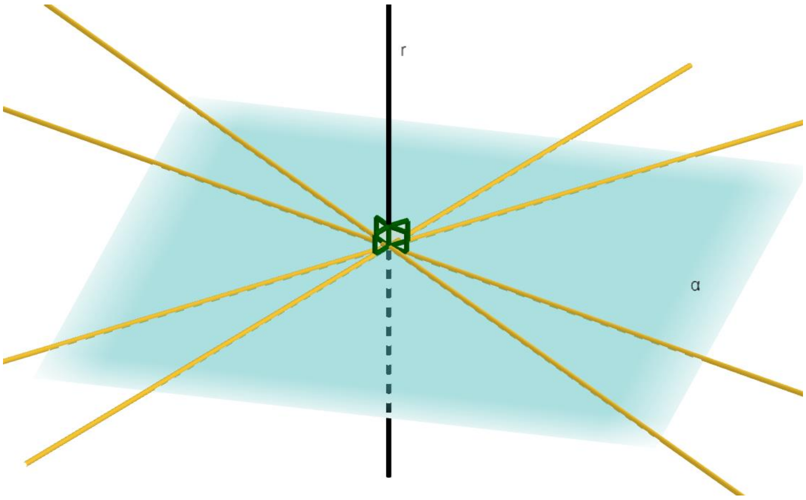
Fonte - O Autor, 2023

Assim é possível definir que duas retas concorrentes são perpendiculares, que denotaremos por $r \perp s$, quando formam 4 ângulos de retos (90º) entre si e duas retas reversas são ortogonais quando formam ângulos retos.

2.9 **Ângulos Entre Reta e Plano**

Dizemos que uma reta r é perpendicular a um plano α, denotado por r ⊥ α, se e somente r é secante a α e perpendicular a todas as retas pertencentes a α e que passam por seu traço (traço é o ponto de interseção entre o plano e a reta).

Figura 24 - Reta Perpendicular a um Plano

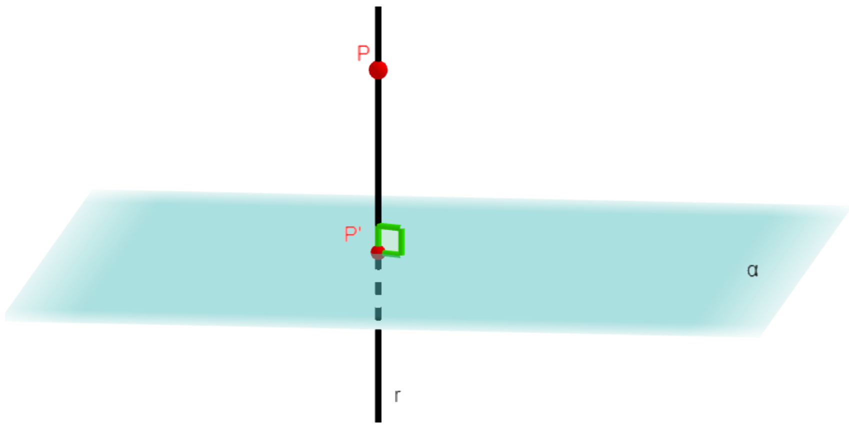


Fonte - O Autor, 2023

Dessa forma qualquer outra reta do plano que não passe pelo traço de r será reversa a r e consequentemente será ortogonal a r, formando assim um ângulo reto com todas as retas pertencentes ao plano.

A projeção ortogonal de um ponto P sobre um plano α é o traço da reta perpendicular ao plano α e que passa por ponto P, ou seja, P’ é a projeção ortogonal de P sobre o plano, logo $\overline{PP'} = \mathrm{dist}(P, \alpha)$.

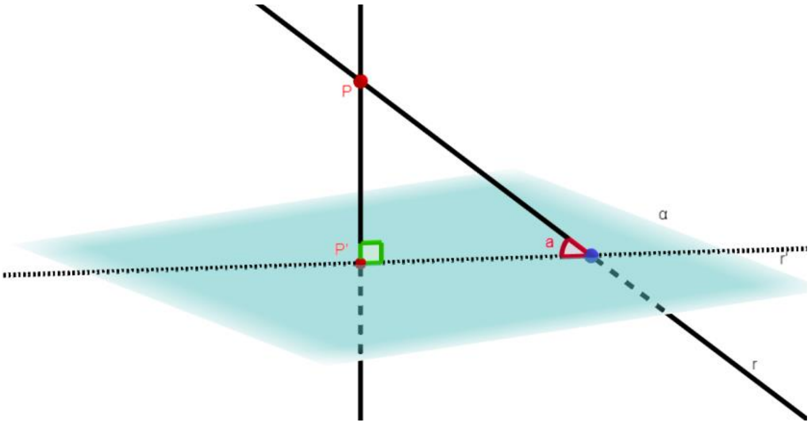
Figura 25 - Projeção Ortogonal de um Ponto sobre um Plano



Fonte - O Autor, 2023

Consequentemente, a projeção ortogonal, sobre o plano α, de uma reta r oblíqua ao plano é também uma reta r’ formada pela projeção ortogonal de todos os pontos da reta r sobre o plano. Dessa forma, definimos o ângulo formado entre o plano α e uma reta r oblíqua a ele como o ângulo entre a reta oblíqua r e a sua projeção ortogonal r’, ou seja, $\angle(\mathrm{r}, \alpha) = \angle(\mathrm{r}, \mathrm{r}') = \hat{\mathrm{a}}$.

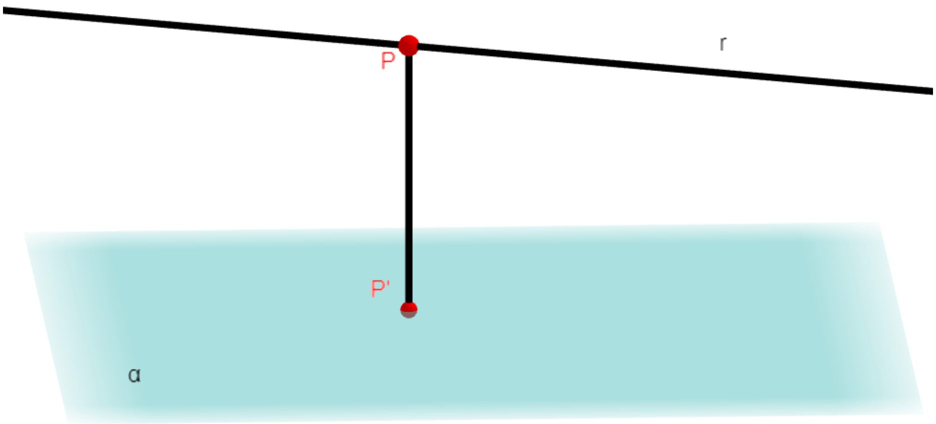
Figura 26 - Ângulo entre Reta e Plano



Fonte - O Autor, 2023

O ângulo entre uma reta r paralela a um plano α é nulo, ou seja, se r ∥ α, então $\angle(\mathrm{r}, \alpha) = 0°$. A distância entre r e α é dada pela distância de um dos pontos de r até o plano α, $\overline{\mathrm{PP'}} = \mathrm{dist}(\mathrm{r}, \alpha)$.

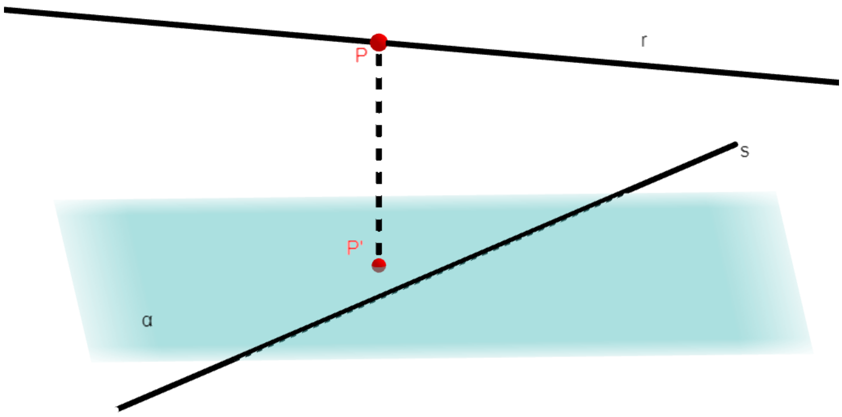
Figura 27 - Distância entre Plano e Reta Paralelos entre si



Fonte - O Autor, 2023

De modo semelhante é possível definir a distância entre duas retas r e s reversas de tal modo que será igual a distância entre uma das retas e o plano paralelo a ela que passa pela outra reta, assim tem-se $\overline{\mathrm{PP'}} = \mathrm{dist}(\mathrm{r}, \mathrm{s})$.

Figura 28 - Distância entre Duas Retas Reversas

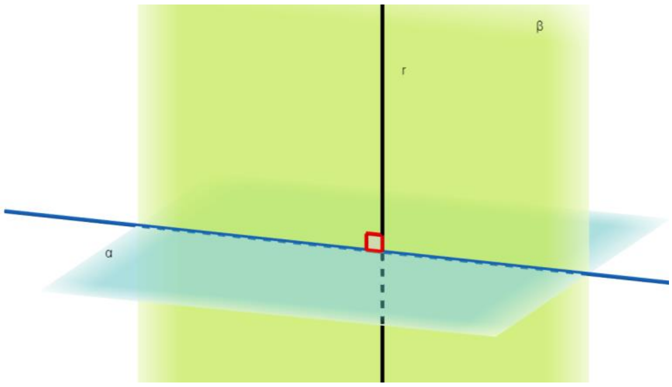


Fonte - O Autor, 2023

2.10 **Ângulo Entre Dois Planos**

Dois planos, α e β, são perpendiculares entre si se e somente se existe uma reta pertencente a um dos planos que é perpendicular ao outro plano.

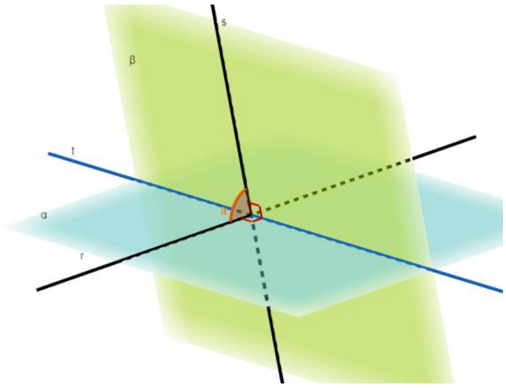
Figura 29 - Planos Perpendiculares



Fonte - O Autor, 2023

O ângulo entre dois planos, α e β, é o ângulo formado por duas retas r e s, com $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, perpendiculares à interseção dos planos e concorrentes em um ponto P, ou seja, $t = \alpha \cap \beta$, $r \perp t$ e $s \perp t$ então $\angle(\alpha, \beta) = \angle(r, s)$.

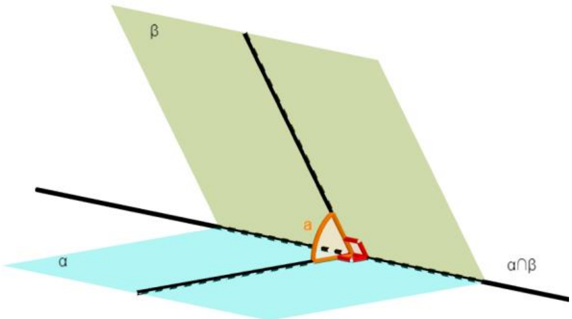
Figura 30 - Ângulo entre Dois Planos



Fonte - O Autor, 2023

Dessa maneira, podemos definir como Ângulo Diedro o ângulo formado por dois semiplanos de mesma origem e que não sejam coplanares, conforme representado na figura abaixo:

Figura 31 - Ângulo Diedro



Fonte - O Autor, 2023

Para os diedros seguem-se as mesmas classificações para os ângulos, assim tem-se:

- Diedro Reto quando sua medida é igual a 90°;
- Diedro Agudo quando sua medida está entre 0° e 90°;
- Diedro Obtuso quando sua medida está entre 90° e 180°

2.11 **Ângulos Triédricos**

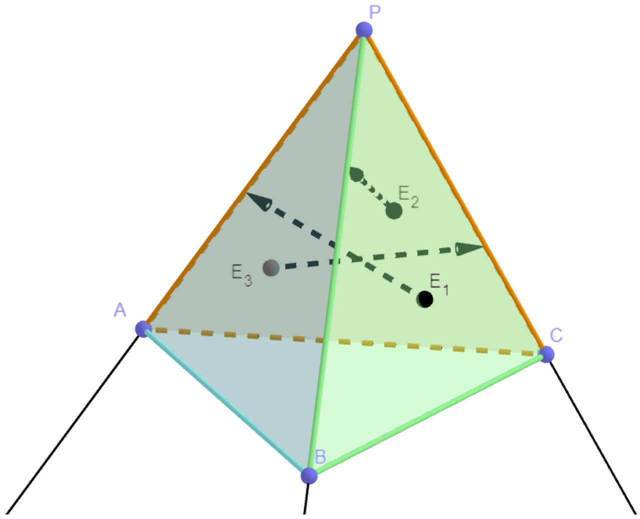
Sejam três semirretas $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ e $\overrightarrow{PC}$ com a mesma origem no ponto P e não coplanares e sejam também os semiespaços E_1, E_2 e E_3 definidos da seguinte forma:

- E_1 semiespaço com origem no plano formado por $\overrightarrow{PB}$ e $\overrightarrow{PC}$ e que contém $\overrightarrow{PA}$;

- E_2 semiespaço com origem no plano formado por $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PC}$ e que contém $\overrightarrow{PB}$;
- E_3 semiespaço com origem no plano formado por $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ e que contém $\overrightarrow{PC}$.

O Triedro determinado pelas semirretas $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ e $\overrightarrow{PC}$ é dado pela interseção entre os semiespaços E_1, E_2 e E_3, denotaremos o triedro $P(A, B, C) = E_1 \cap E_2 \cap E_3$, onde P é o vértice, $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ e $\overrightarrow{PC}$ são as arestas e $A\hat{P}B, A\hat{P}C$ e $B\hat{P}C$ são os ângulos das faces.

Figura 32 - Ângulo Triédrico



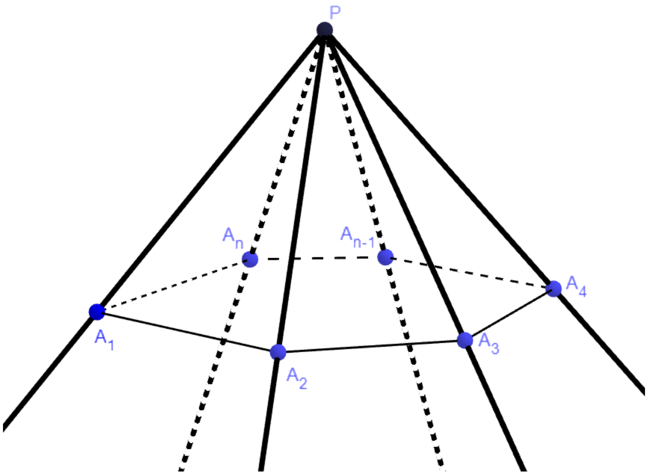
Fonte - O Autor, 2023

Os ângulos triédricos possuem as seguintes propriedades que são: em todo triedro qualquer ângulo das faces é menor do que a soma dos outros dois ângulos das faces, além disso a soma das medidas dos ângulos das faces é sempre menor do que 360º.

2.12 **Ângulos Poliédricos**

Os ângulos poliédricos são uma generalização da definição dos ângulos triédricos, ou seja, se considerarmos um conjunto finito de semirretas $\overrightarrow{PA_1}, \overrightarrow{PA_2}, \overrightarrow{PA_3}$ e $\overrightarrow{PA_n}$ com mesma origem em P de tal modo que o plano de duas semirretas consecutivas, $\overrightarrow{PA_1}$ e $\overrightarrow{PA_2}, \overrightarrow{PA_2}$ e $\overrightarrow{PA_3}, \overrightarrow{PA_3}$ e $\overrightarrow{PA_4}, \ldots \overrightarrow{PA_{n-1}}$ e $\overrightarrow{PA_n}$, deixe as demais semirretas em um mesmo semiespaço, denotados por $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$, sendo cada um destes com início no plano formado por duas semirretas consecutivas e que contém todas as outras.

Figura 33 - Ângulo Poliédrico



Fonte - O Autor, 2023

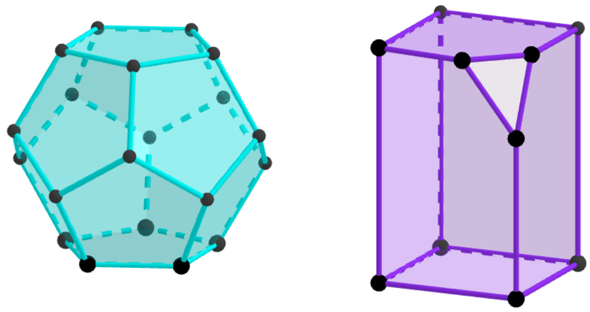
Logo o ângulo poliédrico convexo determinado pelas semirretas $\overrightarrow{PA_1}, \overrightarrow{PA_2}, \overrightarrow{PA_3}$ e $\overrightarrow{PA_n}$ é a interseção dos semiespaços $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ denotaremos o ângulo poliédrico $P(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n) = E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \ldots \cap E_n$, onde P é o vértice, $\overrightarrow{PA_1}, \overrightarrow{PA_2}, \overrightarrow{PA_3}$ e $\overrightarrow{PA_n}$ são as arestas e $A_1\widehat{P}A_2, A_2\widehat{P}A_3, A_3\widehat{P}A_4, \ldots, A_{n-1}\widehat{P}A_n$ e $A_n\widehat{P}A_1$ são os ângulos das faces.

2.13 **Poliedros**

Uma superfície será definida como uma superfície poliédrica limitada convexa quando for formada por uma reunião de uma quantidade finita de polígonos planos e convexos de tal modo que dois polígonos não sejam coplanares, sendo cada lado de cada polígono comum a apenas dois polígonos, além disso o plano que contém cada polígono deixa todos os outros polígonos em um mesmo semiespaço.

Caso existam lados de polígonos que só pertençam a um único polígono, estes lados devem formar uma única poligonal fechada, podendo ser plana ou não, que será chamada de contorno. As superfícies poliédricas limitadas convexas abertas são as que possuem contorno, já as que não possuem contorno são ditas fechadas.

Figura 34 - Superfícies Poliédricas Fechadas e Abertas



Fonte - O Autor, 2023

Uma superfície poliédrica possui as faces que são os polígonos, as arestas que são os lados dos polígonos, os vértices que são os vértices dos polígonos e os ângulos que são os ângulos dos polígonos.

Um ponto qualquer será considerado um ponto interior a superfície poliédrica convexa fechada quando uma semirreta qualquer, com origem no ponto, intercepta a superfície em um único ponto, a reunião da superfície poliédrica convexa fechada com todos os seus pontos internos é denominada Poliedro Convexo.

2.14 **A Relação de Euler**

Para os poliedros convexos existe uma relação entre o número V de vértices, F de faces e A de arestas, tal relação é apresentada a seguir:

$$V + F = A + 2$$

Tal relação ficou conhecida como Relação de Euler devido ao fato de ter sido descoberta pelo matemático Leonhard Paul Euler em 1758. Existem várias demonstrações para tal relação, aqui será adotada a demonstração feita pelo professor Zoroastro Azambuja Filho na Revista do Professor de Matemática nº 3 no ano de 1983.

Seja um Poliedro Convexo P qualquer, com as faces numeradas de 1 até F, denotando por n_k o número de lados da k-ésima face. Vamos iniciar calculando a soma dos ângulos internos de todas as faces de P, através da relação $S_i = (n - 2)\pi$, tal relação pode ser usada pois em um poliedro convexo todas as suas faces são polígonos convexos, assim tem-se que a soma dos ângulos internos de todas as faces de P será dada por:

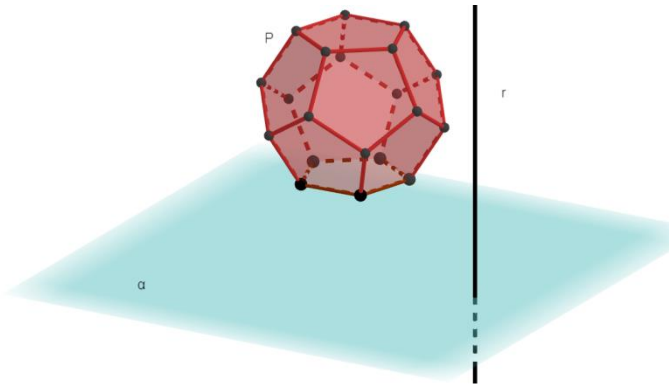
$$S = (n_1 - 2)\pi + (n_2 - 2)\pi + \cdots + (n_F - 2)\pi$$
$$S = (\underbrace{n_1 + n_2 + \cdots + n_F}_{\text{Total de Lados das Faces}})\pi - (\underbrace{2 + 2 + \cdots 2}_{\text{F fatores}})\pi \qquad (1)$$

Dessa forma, tem-se que a soma do número de lados de todas as faces será igual ao dobro da quantidade de arestas $2A = (n_1 + n_2 \cdots n_F)$, enquanto o somatório $(2 + 2 + \cdots + 2)$ possui F fatores 2, ou seja, $2F = (2 + 2 + \cdots + 2)$, substituindo em (1) obtém-se:

$$S = 2A\pi - 2F\pi$$
$$S = (A - F)2\pi \qquad (2)$$

O próximo passo é calcular a soma de todos os ângulos internos de todas as faces de uma outra forma, para isto traçaremos uma reta r que não seja paralela a nenhuma das faces do poliedro convexo P, além disso vamos escolher um plano α que não intersecte P e que seja perpendicular a r. O plano α será denominado plano horizontal, enquanto todas as retas paralelas a r e perpendiculares a α serão denominadas retas verticais. Para critério de ilustração será utilizado um dodecaedro, porém a demonstração é válida para qualquer poliedro convexo.

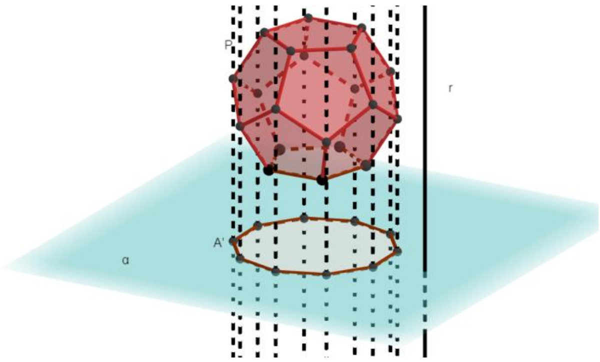
Figura 35 - Relação de Euler - Ilustração com Dodecaedro



Fonte - O Autor, 2023

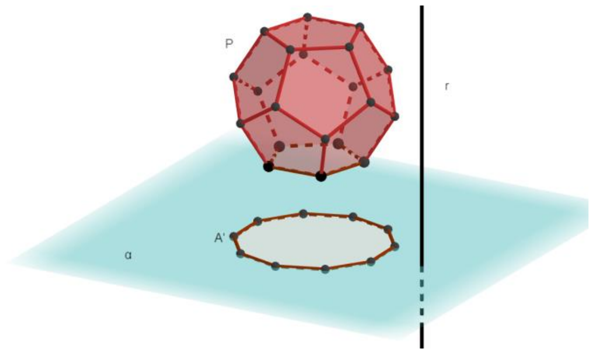
Seja a projeção ortogonal do poliedro convexo P sobre o plano α, assim será formado sobre plano A que possui o contorno que será denominado A’, onde cada ponto de A’ é a projeção ortogonal de um único ponto de P e cada ponto interior de A será a projeção ortogonal de dois pontos de P, sendo um ponto da parte superior e um da parte inferior. Como mostra as figuras abaixo:

Figura 36 - Relação de Euler - Projeção Ortogonal I



Fonte - O Autor, 2023

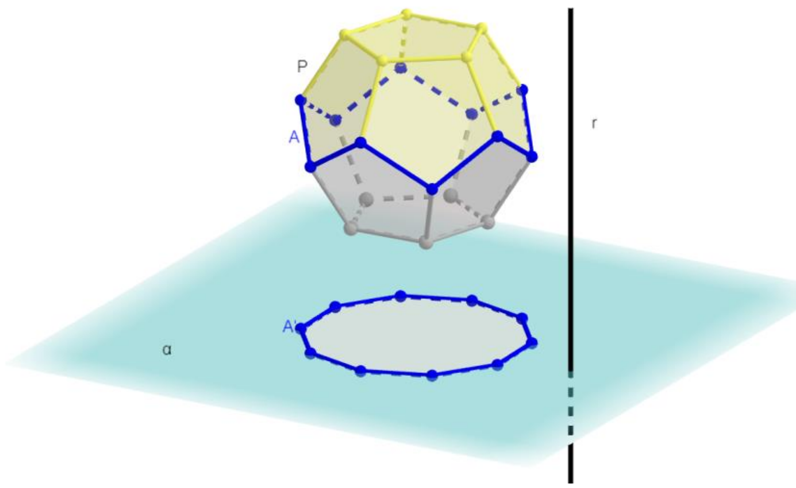
Figura 37 - Relação de Euler - Projeção Ortogonal II



Fonte - O Autor, 2023

Dessa forma é possível imaginar o poliedro convexo P decomposto em 3 partes separadas que seriam o conjunto dos pontos superiores, contorno aparente e conjunto dos pontos inferiores, onde denotaremos como V_0 o número de vértices do contorno aparente A (em azul), V_1 o número de vértices da parte superior (em amarelo) e V_2 o número de vértices da parte inferior (em cinza), conforme a figura abaixo ilustra:

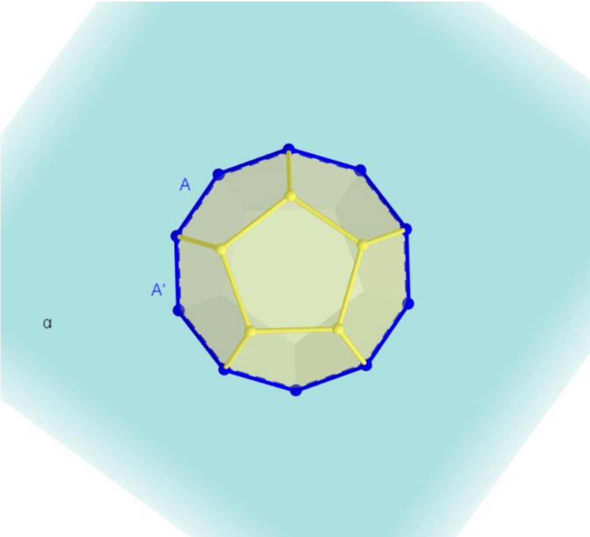
Figura 38 - Relação de Euler - Decomposição do Dodecaedro



Fonte - O Autor, 2023

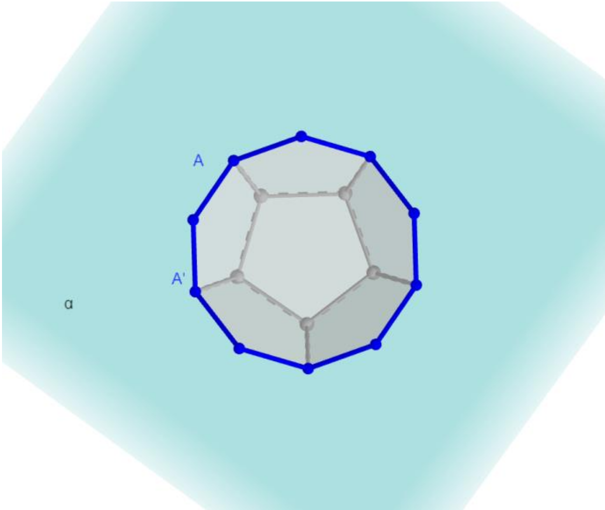
Observe que V_0 é igual ao número de vértices da poligonal A' além disso tem-se a projeção ortogonal da parte superior no plano α (vista superior de P) é um polígono convexo que possui V_0 no seu contorno e V_1 vértices no seu interior. O raciocínio é análogo para a parte inferior de P, onde a projeção será um polígono convexo com V_0 vértices no seu contorno e V_2 vértices no seu interior, conforme mostra a ilustração a seguir:

Figura 39 - Relação de Euler - Vista Superior



Fonte - O Autor, 2023

Figura 40 - Relação de Euler - Vista Inferior



Fonte - O Autor, 2023

Como a soma dos ângulos internos de um polígono convexo não se modifica quando este é projetado sobre um plano, então para calcular a soma dos ângulos internos de todas as faces das partes superior e inferior basta calcular a soma dos ângulos internos de suas respectivas projeções ortogonais. Dessa forma tem-se que a soma dos ângulos ao redor dos pontos internos das projeções acima é sempre igual a 2π e a soma dos ângulos internos da poligonal A' é dada por $S_i = (V_0 - 2)\pi$. Logo a soma dos ângulos internos das faces da parte superior (figura 39) é dada por:

$$S_S = 2\pi V_1 + (V_0 - 2)\pi$$

$$S_S = (V_0 + 2V_1 - 2)\pi \qquad (3)$$

De modo análogo para a soma dos ângulos internos das faces da parte inferior (figura 40) obtém-se:

$$S_I = 2\pi V_2 + (V_0 - 2)\pi$$

$$S_I = (V_0 + 2V_2 - 2)\pi \qquad (4)$$

Para obter a soma de todas as faces do poliedro convexo P basta somar (3) e (4), assim obtém-se:

$$S = (V_0 + 2V_1 - 2)\pi + (V_0 + 2V_2 - 2)\pi$$

$$S = (2V_0 + 2V_1 + 2V_2 - 2.2)\pi$$

$$S = (\underbrace{V_0 + V_1 + V_2}_{V} - 2)2\pi$$

Como a quantidade de vértices V do poliedro é $V = V_0 + V_2 + V_2$, tem-se que:

$$S = (V - 2)2\pi \qquad (5)$$

Igualando (2) e (5) obtém-se:

$$(A - F)2\pi = (V - 2)2\pi$$

$$A - F = V - 2$$

$$\boxed{V + F = A + 2}$$

Algumas considerações são relevantes quanto a Relação de Euler para poliedros convexos, são elas:

I. A mesma relação também vale para poliedros convexos abertos, neste caso a relação fica da forma $V_a + F_a = A_a + 1$, onde V_a, F_a e A_a são as quantidades de Vértices, Faces e Arestas do poliedro convexo aberto.

A demonstração pode ser feita por indução finita sobre a quantidade de faces de um poliedro convexo aberto.

- Para $F_a = 1$ tem-se apenas um polígono convexo com n lados, assim $V_a = n$ e $A_a = n$, substituindo em $V_a + F_a = A_a + 1 \Leftrightarrow n + 1 = n + 1$, portanto verdadeiro para $F_a = 1$.
- Admita-se como hipótese de indução que a relação vale para uma superfície poliédrica aberta com F'_a (V'_a, e A'_a), ou seja, vale $V'_a + F'_a = A'_a + 1$.
- Basta provar que a relação vale para $F'_a + 1$, assim vamos acrescentar uma face de m arestas a essa superfície poliédrica aberta, além disso deve-se considerar que n dessas arestas já coincidem com arestas existentes, assim será obtido uma superfície com V_a, F_a e A_a, assim ficará:

  $F_a = F'_a + 1$

  $A_a = A'_a + m - n$, pois n arestas são coincidentes

  $V_a = V'_a + m - (n + 1) = V'_a + m - n - 1$, pois se n arestas são coincidentes, então $n + 1$ vértices também são coincidentes.

  Tomando $V_a + F_a - A_a$ e substituindo os valores acima obtém-se:

$$V_a + F_a - A_a = V'_a + m - n - 1 + F'_a + 1 - A'_a - m + n$$

$$V_a + F_a - A_a = V'_a + F'_a - A'_a + m - m + n - n + 1 - 1$$

$$V_a + F_a - A_a = V'_a + F'_a - A'_a$$

A partir da igualdade acima fica provado que a expressão não se altera acrescentando ou retirando uma face da superfície portanto vale a relação $V_a + F_a - A_a = 1$.

II. Os poliedros que satisfazem a Relação de Euler são denominados Poliedros Eulerianos.

III. Todo poliedro convexo é Euleriano, entretanto nem todo poliedro Euleriano é convexo, ou seja, existem poliedros Eulerianos que não são convexos.

IV. Uma propriedade interessante é que a soma dos ângulos de todas as faces de todas as faces de um poliedro convexo com V vértices é dada por: $S = (V - 2) \cdot 360°$.

Considerando V, A e F as quantidades de Vértices, Arestas e Faces, respectivamente, do poliedro convexo e denotando por $n_1, n_2, \cdots, n_F$ a quantidade de lados de cada uma das faces e realizando soma dos ângulos internos de cada uma das faces tem-se:

$$
\begin{array}{rl}
 & S_1 = (n_1 - 2) \cdot 180° \\
+ & S_2 = (n_2 - 2) \cdot 180° \\
 & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
 & S_F = (n_F - 2) \cdot 180° \\
\hline
\end{array}
$$

$$S = S_1 + S_2 + \cdots + S_F = (n_1 + n_2 + \cdots + n_F - 2 \cdot F) \cdot 180°$$

Como S é a soma dos ângulos de todas as faces do poliedro convexo e $n_1 + n_2 + \cdots + n_F$ é a soma de todos os lados das respectivas faces e como cada aresta é lado de dois polígonos, logo $n_1 + n_2 + \cdots + n_F = 2A$, assim tem-se que:

$$S = (2A - 2F) \cdot 180°$$
$$S = 2(A - F) \cdot 180°$$
$$S = (A - F) \cdot 360°$$

Como, pela Relação de Euler, $A - F = V - 2$, substituindo na equação anterior obtém-se:

$$\boxed{S = (V - 2) \cdot 360°}$$

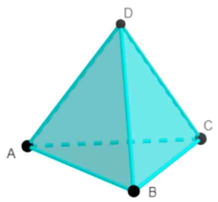
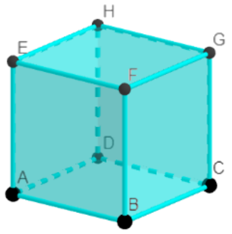
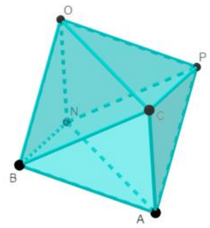
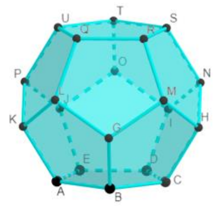
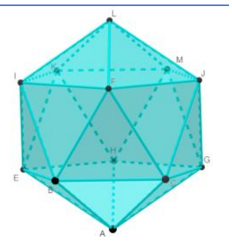
2.15 **Poliedros de Platão**

Um poliedro é denominado Poliedro de Platão se, e somente se, ele satisfaz as três condições a seguir:

i. Possui, em todas as suas faces, polígonos com um mesmo número (l) de lados;
ii. Todos os vértices são também vértices de ângulos poliédricos com um mesmo número de arestas (a).
iii. É um Poliedro Euleriano, ou seja, satisfaz $V + F = A + 2$

Uma propriedade interessante dos Poliedros de Platão é que existem apenas cinco deles, que são o Tetraedro, o Hexaedro, o Octaedro, o Dodecaedro e o Icosaedro. Abaixo está a representação de cada um deles, apesar de serem as representações regulares, eles também podem ser irregulares.

Quadro 2- Poliedros de Platão

				
Tetraedro	Hexaedro	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro

Fonte - O Autor, 2023

Para demonstrar tal propriedade vamos considerar um Poliedro de Platão com F faces, cada face sendo um polígono de l lados ($l > 2$), com V vértices, onde cada um dos ângulos poliédricos tem a arestas e a quantidade de arestas do Poliedro de Platão é dada por A. Assim pela definição de Poliedros de Platão temos:

1) $V + F = A + 2 \Leftrightarrow V - A + F = 2$, pois é Euleriano;
2) Como cada uma das F faces possui l arestas e cada uma destas está em duas faces tem-se que $l \cdot F = 2A \Leftrightarrow F = \frac{2A}{l}$.
3) Com cada um dos Vértices V tem a arestas e cada um destes possui dois vértices como extremidades tem-se que $a \cdot V = 2A \Leftrightarrow V = \frac{2A}{a}$.

Substituindo as equações obtidas em (2) e (3) na equação obtida em (1) teremos:

$$V - A + F = 2 \Leftrightarrow \frac{2A}{a} - A + \frac{2A}{l} = 2$$

Dividindo a equação por 2A, obteremos:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{2} + \frac{1}{l} = \frac{1}{A}$$

Assim devemos verificar se vale para as condições $l > 2$ *e* $a > 2$ e como A é a quantidade de arestas do poliedro, então devemos ter $A > 0$, ou seja, $\frac{1}{a} - \frac{1}{2} + \frac{1}{l} > 0$. Dessa forma para cada valor de l teremos valores para a da seguinte forma:

- $l = 3$ (faces triangulares) teremos $a < 6$, pois:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{6} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{6} \Leftrightarrow a < 6$$

- $l = 4$ (faces quadrangulares) teremos $a < 4$, pois:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{4} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow a < 4$$

- $l = 5$ (faces pentagonais) teremos $a < 3{,}333\ldots$, pois:
$$\frac{1}{a}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}>0 \Leftrightarrow \frac{1}{a}-\frac{3}{10}>0 \Leftrightarrow \frac{1}{a}>\frac{3}{10} \Leftrightarrow a<\frac{10}{3}=3{,}333\ldots$$
- $l \geq 6$ teremos $a < 3$, pois:
$$\frac{1}{a}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}>0 \Leftrightarrow \frac{1}{a}-\frac{4}{12}>0 \Leftrightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{3} \Leftrightarrow a<3$$

Tal fato contradiz a condição inicial de que $a > 2$.

Assim temos 5 classes diferentes de poliedros de acordo com a quantidade de lados (l) que cada face possui e com a quantidade de arestas (a) de um mesmo ângulo poliédricos.

1ª Classe: $l = 3$ e $a = 3$

Tem-se que $\frac{1}{a}-\frac{1}{2}+\frac{1}{l}=\frac{1}{A} \Leftrightarrow \frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{A} \Leftrightarrow \frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{A} \Leftrightarrow \frac{1}{6}=\frac{1}{A} \Leftrightarrow \boxed{A=6}$.

Como $V=\frac{2A}{a} \Leftrightarrow V=\frac{12}{3} \Leftrightarrow \boxed{V=4}$ e $F=\frac{2A}{l} \Leftrightarrow F=\frac{12}{3} \Leftrightarrow \boxed{F=4}$, obtém-se os poliedros de Platão com 4 faces triangulares chamados de tetraedros.

2ª Classe: $l = 4$ e $a = 3$

Tem-se que $\frac{1}{a}-\frac{1}{2}+\frac{1}{l}=\frac{1}{A} \Leftrightarrow \frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{A} \Leftrightarrow \frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{A} \Leftrightarrow \frac{1}{12}=\frac{1}{A} \Leftrightarrow \boxed{A=12}$.

Como $V=\frac{2A}{a} \Leftrightarrow V=\frac{24}{3} \Leftrightarrow \boxed{V=8}$ e $F=\frac{2A}{l} \Leftrightarrow F=\frac{24}{4} \Leftrightarrow \boxed{F=6}$, obtém-se os poliedros de Platão com 6 faces quadrangulares chamados de hexaedros.

3ª Classe: $l = 3$ e $a = 4$

Tem-se que $\frac{1}{a}-\frac{1}{2}+\frac{1}{l}=\frac{1}{A} \Leftrightarrow \frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{A} \Leftrightarrow \frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{A} \Leftrightarrow \frac{1}{12}=\frac{1}{A} \Leftrightarrow \boxed{A=12}$.

Como $V=\frac{2A}{a} \Leftrightarrow V=\frac{24}{4} \Leftrightarrow \boxed{V=6}$ e $F=\frac{2A}{l} \Leftrightarrow F=\frac{24}{3} \Leftrightarrow \boxed{F=8}$, obtém-se os poliedros de Platão com 8 faces triangulares chamados de octaedros.

4ª Classe: $l = 5$ e $a = 3$

Tem-se que $\frac{1}{a}-\frac{1}{2}+\frac{1}{l}=\frac{1}{A} \Leftrightarrow \frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{1}{A} \Leftrightarrow \frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{A} \Leftrightarrow \frac{1}{30}=\frac{1}{A} \Leftrightarrow \boxed{A=30}$.

Como $V=\frac{2A}{a} \Leftrightarrow V=\frac{60}{3} \Leftrightarrow \boxed{V=20}$ e $F=\frac{2A}{l} \Leftrightarrow F=\frac{50}{6} \Leftrightarrow \boxed{F=12}$, obtém-se os poliedros de Platão com 12 faces pentagonais chamados de dodecaedros.

5ª Classe: $l = 3$ e $a = 5$

Tem-se que $\frac{1}{a}-\frac{1}{2}+\frac{1}{l}=\frac{1}{A} \Leftrightarrow \frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{A} \Leftrightarrow \frac{1}{3}-\frac{3}{10}=\frac{1}{A} \Leftrightarrow \frac{1}{30}=\frac{1}{A} \Leftrightarrow \boxed{A=30}$.

Como $V=\frac{2A}{a} \Leftrightarrow V=\frac{60}{6} \Leftrightarrow \boxed{V=12}$ e $F=\frac{2A}{l} \Leftrightarrow F=\frac{60}{3} \Leftrightarrow \boxed{F=20}$, obtém-se os poliedros de Platão com 20 faces triangulares chamados de icosaedros.

2.16 **Poliedros Regulares**

Para que um poliedro seja definido como regular deve satisfazer a segu as seguintes condições:

i. Todas as faces são polígonos regulares e congruentes;
ii. Todos os seus ângulos poliédricos são congruentes.

Uma propriedade dos Poliedros Regulares é que existem cinco, e somente cinco, poliedros que possuem as características acima, que são: Tetraedro Regular, Hexaedro Regular, Octaedro Regular, Dodecaedro Regular e o Icosaedro Regular. (veja o quadro 1). Para comprovar tal fato basta olhar as condições para que um poliedro seja regular:

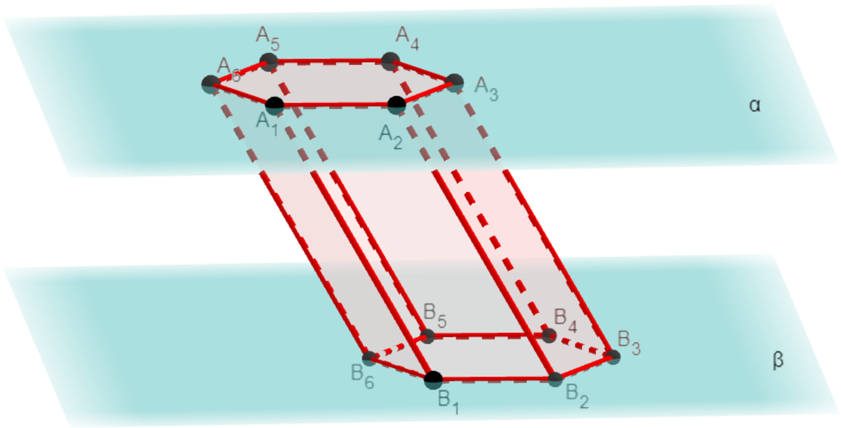
a) Como todas as suas faces são polígonos regulares e congruentes, então todas devem ter o mesmo número de arestas;
b) Como todos os seus ângulos poliédricos são congruentes, então todos devem ter o mesmo número de arestas.

As consequências acima são as condições necessárias para a definição de Poliedros de Platão, logo os poliedros regulares são também poliedros de Platão e como foi provado na seção anterior existem apenas cinco.

2.17 **Prismas**

Sejam dois planos α e β distintos e paralelos ($\alpha \parallel \beta$). Considere o polígono $A_1A_2 \ldots A_n$ pertencente a α e o ponto $B_1 \in \beta$ de modo que se obtenha os pontos $B_2, B_3 \ldots B_n$ tais que $\overline{A_1B_1} \parallel \overline{A_2B_2} \parallel \overline{A_3B_3} \parallel \cdots \parallel \overline{A_nB_n}$. Os pontos $A_1, B_1, A_2, B_2 \ldots A_n$ e B_n são os vértices de um poliedro denominado Prisma.

Figura 41 - Prisma e seus Elementos



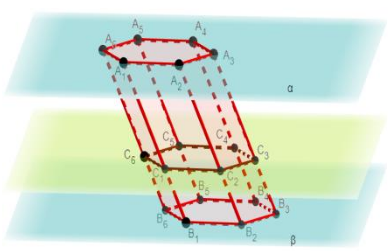
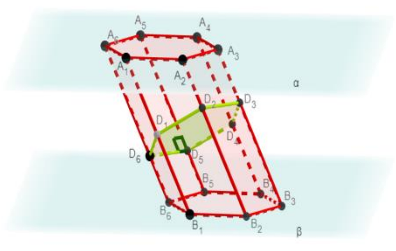
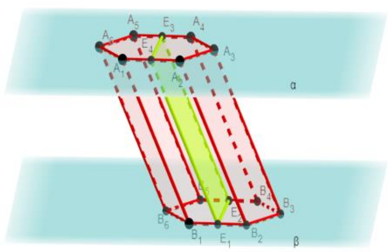
Fonte - O Autor, 2023

Os prismas possuem os seguintes elementos:

- Bases do Prisma: São os polígonos $A_1A_2 \dots A_n$ e $B_1B_2 \dots B_n$, ambos congruentes entre si, pois $\alpha \parallel \beta$ e $\overline{A_1B_1} \parallel \overline{A_2B_2} \parallel \overline{A_3B_3} \parallel \cdots \parallel A_nB_n$;
- Arestas das Bases do Prisma: São os segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, … , $\overline{A_{n-1}A_n}$ e $\overline{B_1B_2}, \overline{B_2B_3}, \dots , \overline{B_{n-1}B_n}$;
- Arestas Laterais do Prisma: São os segmentos $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, \overline{A_3B_3}, \dots, A_nB_n$;
- Faces Laterais do Prisma: São os polígonos $A_1A_2B_1B_2$, $A_2A_3B_2B_3, \dots , A_{n-1}A_nB_{n-1}B_n$.

A seção transversal de um prisma é dada pela interseção deste com um plano paralelo às bases formando assim o polígono $C_1C_2 \dots C_n$ que será congruente às bases do prisma. A seção reta (ou ortogonal) é dada pela interseção do prisma com um plano perpendicular às arestas laterais, formando o polígono $D_1D_2 \dots D_n$. A seção longitudinal é dada pela interseção do prisma com um plano paralelo às arestas laterais.

Quadro 3 - Seções do Prisma

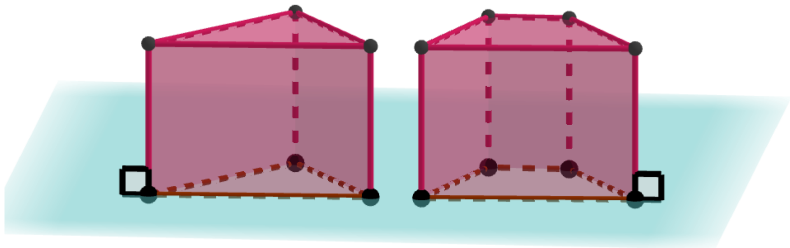
		
Seção Transversal	Seção Ortogonal	Seção Longitudinal

Fonte - O Autor, 2023

A Superfície Lateral de um prisma é composta por todas as suas faces laterais e a área da superfície lateral será indicada por A_l. Já a Superfície Total do prisma é composta pela união entres a superfície lateral com a superfície das bases, sendo sua área denotada por A_t. Os prismas também podem ser classificados como retos e oblíquos:

- Um prisma é reto quando possui arestas laterais perpendiculares às bases, logo suas faces laterais são retangulares e sua altura (h) será igual à medida da aresta lateral.

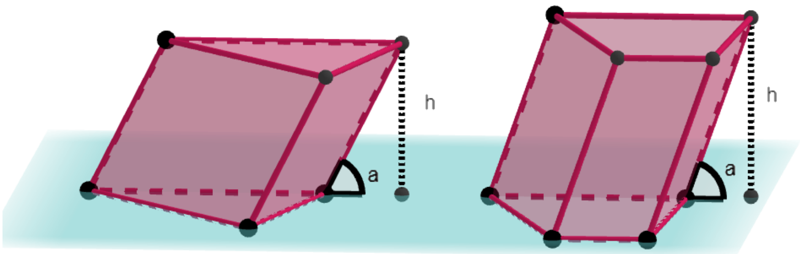
Figura 42 - Prisma Reto



Fonte - O Autor, 2023

- Um prisma é obliquo quando não for reto, logo suas faces laterais também são paralelogramos e sua altura (h) se relaciona com o ângulo (a) de inclinação do prisma, tal ângulo é obtido entre a aresta lateral e o plano da base. Nas figuras abaixo as medidas de a e h não são necessariamente as mesmas em ambos os prismas.

Figura 43 - Prisma Obliquo

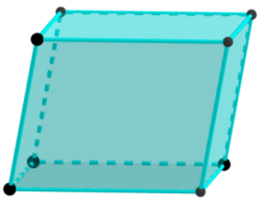
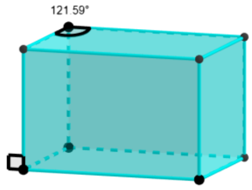
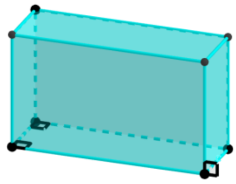
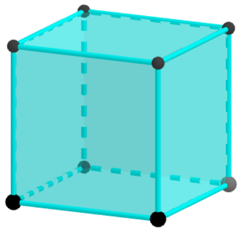


Fonte - O Autor, 2023

Um prisma é dito regular quando suas bases são polígonos regulares, além disso um prisma possui nomenclatura de acordo com o polígono de sua base, podendo ser triangular, quadrangular, pentagonal e assim por diante.

Um prisma importante é o Paralelepípedo que possui paralelogramos em sua base, sendo sua superfície total a reunião de 6 paralelogramos. Além disso o paralelepípedo pode ser reto, quando for um prisma reto com sua superfície total sendo a união das quatro faces laterais (retângulos) e as duas bases (paralelogramos), e pode ser um paralelepípedo retângulo, quando suas bases são retangulares e sua superfície total é a união de seis retângulos. Já um paralelepípedo retângulo que possui todas as arestas com a mesma medida será chamado de cubo e sua superfície total é a união de seis quadrados.

Quadro 4 - Tipos de Paralelepípedos

			
Paralelepípedo Qualquer	Paralelepípedo Reto	Paralelepípedo Retângulo	Cubo

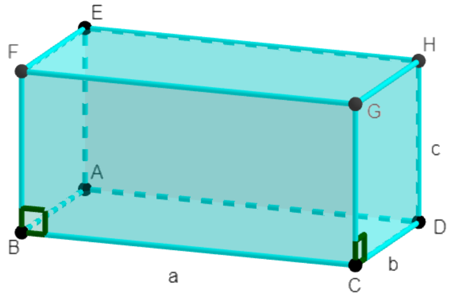
Fonte - O Autor, 2023

A área da superfície de um prisma é calculada a partir da soma das áreas das bases com as áreas de todas as faces laterais. Para prismas regulares podemos sintetizar uma fórmula para realizar tal cálculo, considerando A_b e A_f como a área da base (polígono regular de n lados) e de uma das faces respectivamente, tem-se que $A_t = 2A_b + n \cdot A_f$.

2.17.1 O Paralelepípedo Retângulo

O paralelepípedo retângulo, também chamado de bloco retangular, possui 8 vértices, 6 faces e 12 arestas, sendo 4 de medida a, 4 de medida b e 4 de medida c. Desse modo o paralelepípedo retângulo fica configurado por três medidas a, b e c, chamadas de comprimento, largura e altura, respectivamente conforme a figura abaixo:

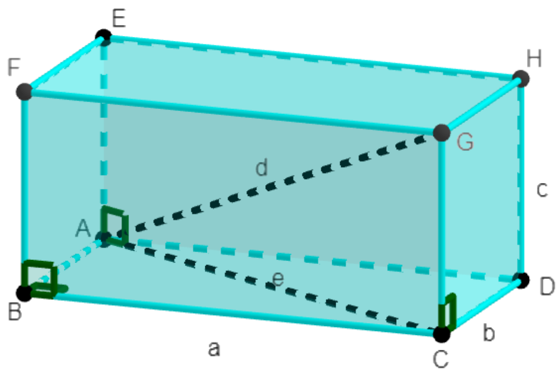
Figura 44 - Paralelepípedo Retângulo



Fonte - O Autor, 2023

O paralelepípedo retângulo possui alguns elementos interessantes, como as suas quatro diagonais. Para obter sua medida a partir das dimensões do paralelepípedo traçamos a diagonal da base e a diagonal do paralelepípedo, conforme a figura abaixo:

Figura 45 - Elementos do Paralelepípedo Retângulo



Fonte - O Autor, 2023

O triângulo ABC é retângulo em B, assim pelo teorema de Pitágoras tem-se que $e^2 = a^2 + b^2$. Realizando procedimento análogo no triângulo ACG teremos que $d^2 = e^2 + c^2$, substituindo uma equação na outra obtemos $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, logo $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Quanto a área da superfície do paralelepípedo retângulo basta notarmos os pares de faces congruentes, ou seja, as bases possuem área igual a $a \cdot b$, as faces laterais possuem área igual $b \cdot c$ e as faces dianteira e traseira possuem área igual a $a \cdot c$. Dessa forma a área total da superfície de um paralelepípedo retângulo é dada por: $A_{total} = 2(ab + bc + ac)$.

Define-se Volume de um sólido qualquer como um número real positivo relacionado ao sólido tal que sólidos que são congruentes sempre possuirão o mesmo volume e se um sólido é a união de outros dois sólidos que não possuem pontos internos em comum, então o volume desse sólido é obtido pela soma dos volumes dos outros sólidos. Dessa forma o volume de um paralelepípedo retângulo é tratado como um axioma, ou seja, o volume de um paralelepípedo de dimensões a, b, c (comprimento, largura e altura) é dado por: $V = a \cdot b \cdot c$, ou seja, é o produto das três dimensões.

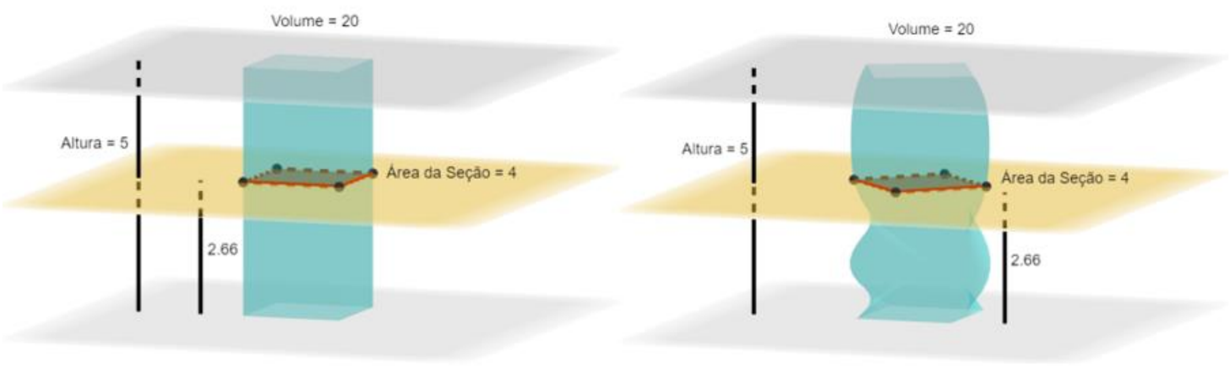
2.17.2 Princípio de Cavalieri

O princípio de Cavalieri está relacionado à geometria espacial e foi desenvolvido pelo matemático italiano Bonaventura Cavalieri no século XVII. Cavalieri foi contemporâneo de outros grandes matemáticos da época, como Galileu Galilei e Johannes Kepler, e fez contribuições significativas para a geometria e para a matemática aplicada. Cavalieri percebeu que duas figuras sólidas (geralmente prismas ou cilindros) tem volumes iguais se possuírem áreas de seção transversal iguais em todos os níveis, mesmo que suas formas e tamanhos globais possam ser diferentes.

De um modo geral, Lima et al (2006) afirmam que podemos considerar o Princípio de Cavalieri como um axioma que diz que dados dois ou mais sólidos quaisquer e um plano, se todo plano paralelo ao plano dado secciona os sólidos de forma que as seções sejam figuras de áreas iguais, então os volumes dos sólidos também são iguais. Para entender melhor o princípio, considere dois sólidos tridimensionais. Se, ao cortarmos ambos perpendicularmente à mesma direção, as áreas das seções transversais resultantes forem iguais para todos os cortes, então os dois sólidos têm o mesmo volume.

Essencialmente, o Princípio de Cavalieri afirma que se os sólidos possuem a mesma altura e as seções transversais em qualquer altura específica tenham áreas iguais, então os sólidos possuem o mesmo volume. Isso proporciona uma maneira eficiente de comparar volumes de sólidos, simplificando o processo ao se concentrar nas áreas das seções transversais, em vez de considerar cada pequena unidade volumétrica.

Figura 46 - Princípio de Cavalieri - Comparação entre Prisma e um Sólido Qualquer



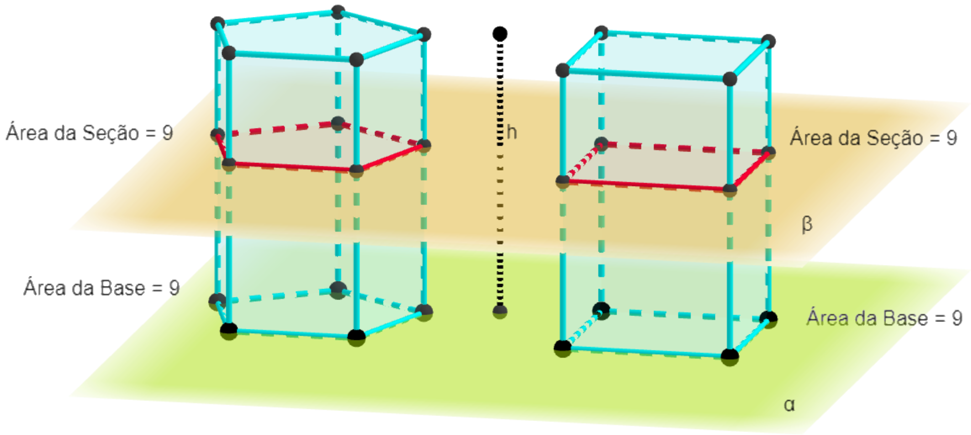
Fonte - O Autor, 2023

O Princípio de Cavalieri é frequentemente usado em cálculos de volume em contextos matemáticos mais avançados, como cálculo integral, especialmente quando se lida com sólidos de revolução ou outros corpos geométricos complexos. Ele representa uma poderosa ferramenta que simplifica consideravelmente a análise de volumes em certos casos, facilitando o trabalho dos matemáticos e físicos na resolução de problemas práticos e teóricos relacionados à geometria espacial.

2.17.3 Volume de um Prisma Qualquer

Para calcular o volume de um prisma qualquer, utiliza-se o Princípio de Cavalieri como ferramenta, para isto basta considerar um paralelepípedo retângulo e um outro prisma de base qualquer de tal forma que ambos tenham a mesma área da base A_b e a mesma altura h, além disso ambos devem possuir bases apoiadas sobre um mesmo plano α.

Figura 47 - Volume de um Prisma Qualquer



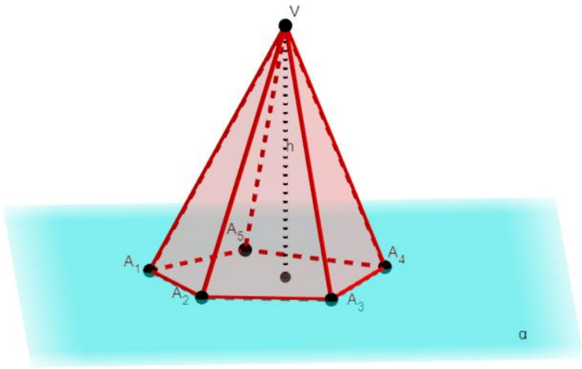
Fonte - O Autor, 2023

Dessa forma um plano β, paralelo ao plano α, intercepta os dois prismas em suas seções transversais e como estas são congruentes às suas respectivas bases, logo as seções transversais também serão congruentes, portanto, pelo Princípio de Cavaliere os sólidos possuem o mesmo Volume. Se observamos o volume do paralelepípedo retângulos ($V = a \cdot b \cdot c$), podemos perceber que se trata do produto da área da base $A_b = a \cdot b$ pela altura $h = c$, como as áreas das bases dos prismas possuem as mesmas medidas então o volume de ambos é dado pelo produto da área da base por sua altura, ou seja, $V = A_b \cdot h$.

2.18 **Pirâmide**

Seja um plano α qualquer e considere o polígono convexo $A_1A_2 \dots A_n$ pertencente a α e um ponto V não pertencente a α. Dessa forma e considerando os segmentos $\overline{A_1V}$, $\overline{A_2V}$, $\overline{A_3V} \dots \overline{A_nV}$, chamaremos de pirâmide de base $A_1A_2 \dots A_n$ e vértice V ao poliedro formado por todas as n faces triangulares formadas juntamente com sua base poligonal.

Figura 48 - Pirâmide e seus Elementos



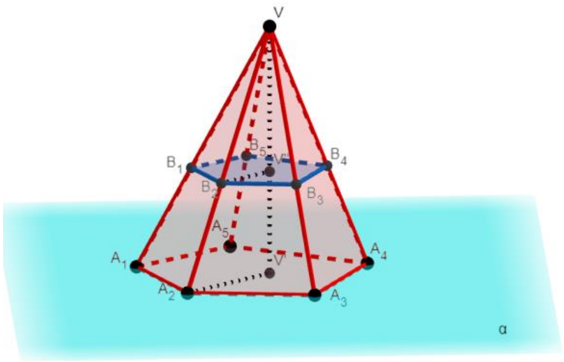
Fonte - O Autor, 2023

As pirâmides possuem os seguintes elementos:

- Bases da Pirâmide: É o polígono convexo $A_1A_2 \dots A_n$;
- Arestas da Base da Pirâmide: São os segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ... , $\overline{A_{n-1}A_n}$;
- Arestas Laterais da Pirâmide: São os segmentos $\overline{A_1V}$, $\overline{A_2V}$, $\overline{A_3V} \dots \overline{A_nV}$;
- Faces Laterais da Pirâmide: São os triângulos A_1A_2V, $A_2A_3V, \dots , A_{n-1}A_nV$.
- A distância do ponto V até o plano da base α é chamada de altura (h) da pirâmide.

A seção transversal de uma pirâmide é dada pela interseção desta com um plano paralelo às bases formando assim o polígono $B_1B_2 \dots B_n$ que será semelhante a base da pirâmide.

Figura 49 - Seção Transversal da Pirâmide

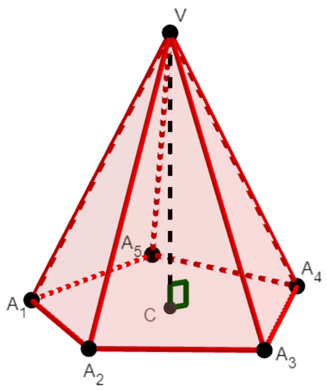


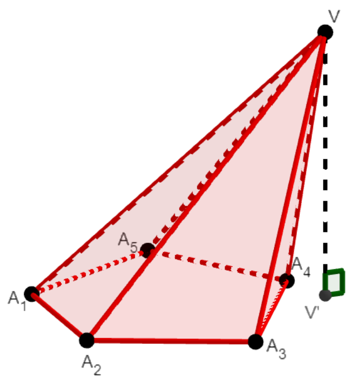
Fonte - O Autor, 2023

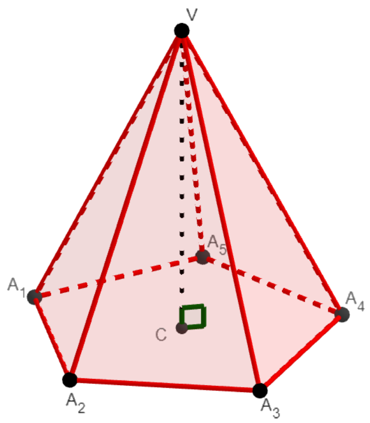
Como $\overline{A_1A_2} \parallel \overline{B_1B_2}$, pelo caso (AA) de semelhança de triângulos, tem-se que $\triangle A_1A_2V \sim \triangle B_1B_2V$, e analogamente, $\triangle A_2A_3V \sim \triangle B_2B_3V, \dots , \triangle A_{n-1}A_nV \sim \triangle B_{n-1}B_nV$. Dessa forma a razão de semelhança k será dada por: $k = \frac{VB_1}{VA_1} = \frac{B_1B_2}{A_1A_2} = \frac{VB_2}{VA_1} = \cdots$.

A Superfície Lateral de uma pirâmide é composta por todas as suas faces laterais e a área da superfície lateral será indicada por A_l. Já a Superfície Total da pirâmide é composta pela união entres a superfície lateral com a superfície da base, sendo sua área denotada por A_t. As pirâmides também podem ser classificadas como retas e oblíqua, ou seja, uma pirâmide é reta quando a projeção vértice V, sobre o plano α, é equidistante de todos os vértices da base, tal projeção estará no centro geométrico do polígono da base, caso contrário ela será chamada de oblíqua. Além disso uma pirâmide é dita regular quando é reta e sua base é polígono regular, nesta as arestas laterais são congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes.

Quadro 5 - Tipos de Pirâmides





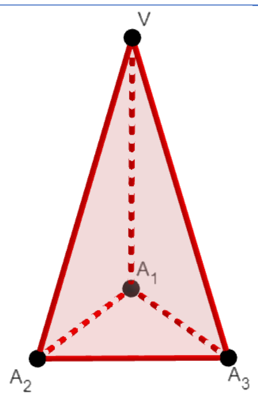


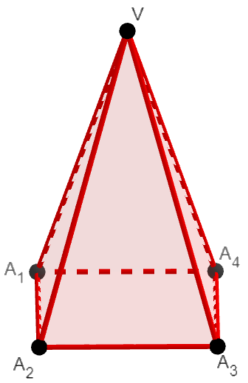
Pirâmide Reta	Pirâmide Oblíqua	Pirâmide Regular

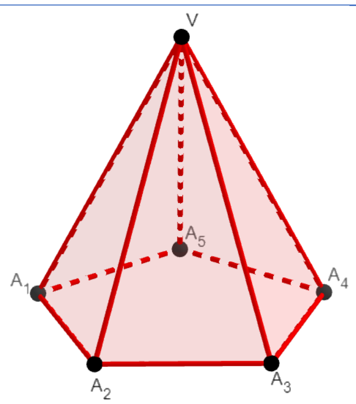
Fonte - O Autor, 2023

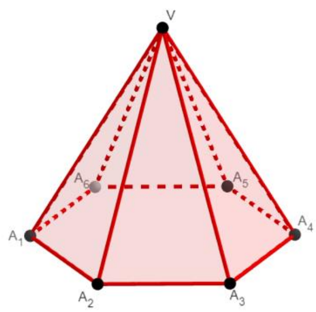
A natureza de uma pirâmide é dada de acordo com o número de lados do polígono da sua base, podendo ser triangular, quadrangular, pentagonal, hexagonal e assim por diante.

Quadro 6 - Natureza da Pirâmide









Triangular	Quadrangular	Pentagonal	Hexagonal

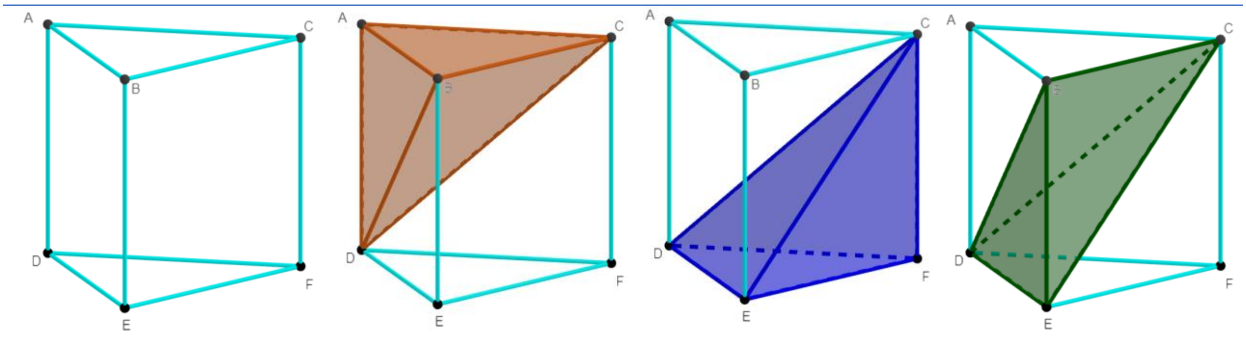
Fonte - O Autor, 2023

A área da superfície de um prisma é calculada a partir da soma das áreas das bases com as áreas de todas as faces laterais. Para prismas regulares podemos sintetizar uma fórmula para realizar tal cálculo, considerando A_b como a área da base, que é um polígono regular de n lados, e A_f como a área de uma das faces, que será um retângulo, tem-se que a área total A_t de um prisma regular será dada por: $A_t = 2A_b + n \cdot A_f$.

2.18.1 Volume da Pirâmide

Nesta seção apresentaremos um modo empírico para verificar uma regularidade para o volume da pirâmide a partir de um prisma triangular, assim vamos considerar um prisma triangular ABCDEF, este pode ser dividido em três pirâmides triangulares, sendo a 1ª pirâmide de base ABC e vértice D (pirâmide ABCD), a 2ª pirâmide de base DEF e vértice C (pirâmide DEFC) e a 3ª pirâmide de base DEB e vértice C (pirâmide DEBC).

Quadro 7 - Decomposição do Prisma em Pirâmides



Prisma Triangular	Pirâmide ABCD	Pirâmide DEFC	Pirâmide DEBC

Fonte - O Autor, 2023

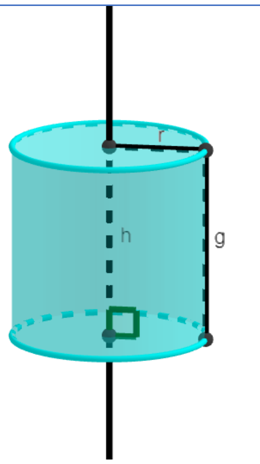
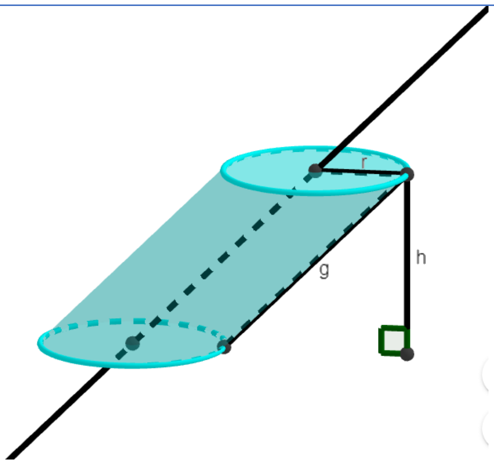
As pirâmides ABCD e DEFC possuem a aresta $\overline{DC}$ em comum, a partir da definição de prisma suas bases ABC e DEF são congruentes além disso, $\overline{DA} = \overline{FC} = h$, ou seja, as duas pirâmides possuem a mesma altura, o que satisfaz o Princípio de Cavalieri, portanto as duas pirâmides possuem o mesmo volume.

Tomando agora as pirâmides ABCD e DEBC, tem-se que, por LLL, as bases ABD e BED são congruentes e ambas possuem a mesma altura, logo, pelo Princípio de Cavalieri, as duas pirâmides possuem volumes iguais. Portanto conclui-se que o prisma ABCDEF está dividido em três pirâmides de volumes iguais, sendo assim o volume de cada pirâmide é um terço do volume de prisma, ou seja, $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$.

2.19 **Cilindro**

Uma das definições para cilindro circular é que este é um prisma de base regular cuja quantidade de vértices tende ao infinito, de tal forma que se as arestas forem perpendiculares à base tem-se um cilindro circular reto, caso contrário será denominado cilindro circular oblíquo.

Quadro 8 - Tipos de Cilindros

	
Cilindro Reto	Cilindro Oblíquo

Fonte - O Autor, 2023

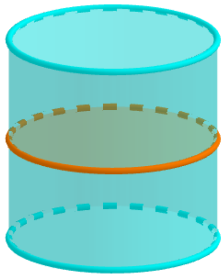
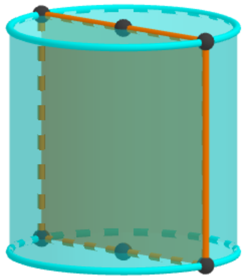
Os cilindros possuem os seguintes elementos:

- As bases do cilindro são circunferências que estão contidas em planos paralelos;
- As arestas do cilindro são chamadas de geratrizes (g);
- A reta que passa pelos centros das bases é chamada de eixo do cilindro;
- A distância entre os planos das bases é chamada de altura (h);
- O raio da base do cilindro é denominado por r.

O cilindro circular reto também é um dos sólidos de revolução, neste caso sua altura e sua geratriz possuem a mesma medida, dessa forma o cilindro de rotação é o sólido gerado a partir da rotação de um retângulo em torno do eixo que contém um de seus lados, é importante ressaltar que um cilindro circular oblíquo não é um cilindro de rotação.

A seção transversal de um cilindro de rotação é dada pela interseção deste com um plano paralelo às bases formando assim círculos paralelos às bases e congruentes a elas. Já a seção longitudinal ou meridiana de um cilindro de rotação é dada pela interseção deste com um plano formado a partir de dois diâmetros paralelos de cada base.

Quadro 9 - Seções do Cilindro

	
Seção Transversal	Seção Longitudinal ou Meridiana

Fonte - O Autor, 2023

A área total da superfície de um cilindro circular é dada pela soma da área das bases $A_b = 2 \cdot \pi \cdot r^2$ com a área lateral, para realizar o cálculo desta basta notar que ela planificada forma um paralelogramo de comprimento $2\pi r$ e altura h, logo a área lateral será dada por $A_l = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$, portanto a área total é dada por $A_t = A_b + A_l \Leftrightarrow A_t = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \ \Leftrightarrow A_t = 2\pi r \cdot (r + h)$.

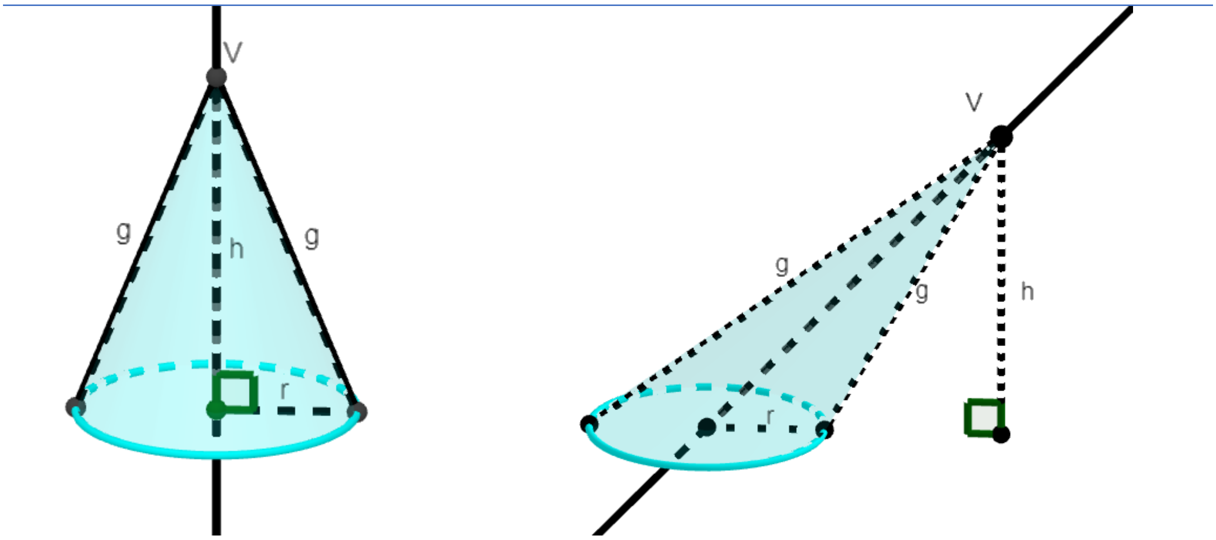
2.19.1 Volume do Cilindro

Como definimos o cilindro circular reto através de um prisma que tem um número de vértices das bases tendendo ao infinito, conclui-se que o volume do cilindro pode ser calculado da mesma maneira que de um prisma, que seria o produto da área da base pela altura, $V = A_b \cdot h$, como a base de um cilindro é um círculo, o volume do cilindro será: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

2.20 Cone

Uma das definições para cone circular é que este é uma pirâmide de base regular cuja quantidade de vértices da base tende ao infinito, de tal forma que se a pirâmide for reta será formado um cone circular reto, caso contrário será denominado cilindro circular oblíquo.

Quadro 10 - Tipos de Cones



Cone Circular Reto	Cone Circular Oblíquo

Fonte - O Autor, 2023

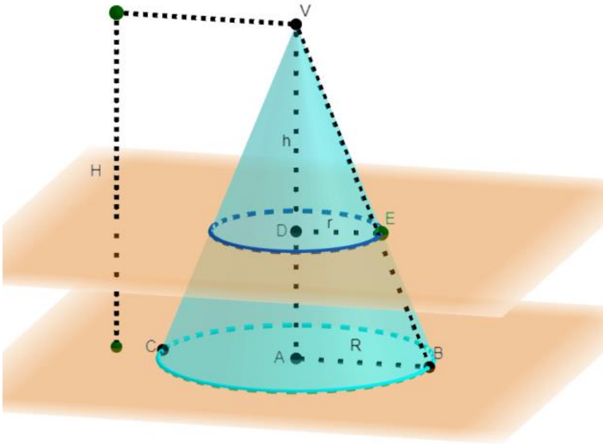
Os cones possuem os seguintes elementos:

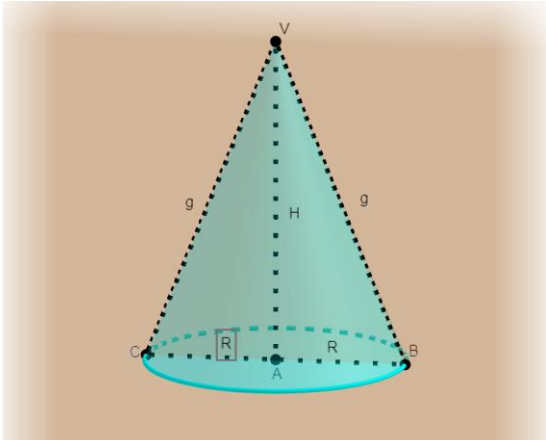
- A base do cone é uma circunferência;
- As arestas da pirâmide são chamadas de geratrizes (g) do cone;
- A reta que passa pelo centro da base e pelo vértice do cone é chamada de eixo do cone;
- A distância entre o plano da base e o vértice do cone é chamada de altura (h);
- O raio da base do cone é denominado por r.
- A geratriz de um cone circular reto é dada por $g^2 = r^2 + h^2$

O cone circular reto também é um dos sólidos de revolução, neste caso o cone de rotação é o sólido gerado a partir da rotação de um triângulo retângulo em torno do eixo que contém um de seus catetos, é importante ressaltar que um cone circular oblíquo não é um cone de rotação.

A seção transversal de um cone de rotação é dada pela interseção deste com um plano paralelo às bases formando assim um círculo paralelo à base, utilizando o caso AA de semelhança nos triângulos VDE e VAB obtemos a seguinte proporção $\frac{H}{h} = \frac{R}{r}$. Já a seção longitudinal ou meridiana de um cone de rotação é dada pela interseção deste com um plano formado a partir da reta que contém um dos diâmetros e da altura do cone, formando assim um triângulo isósceles de base 2R, altura H e lados congruentes iguais a g.

Quadro 11 - Seções do Cone





Seção Transversal	Seção Longitudinal ou Meridiana

Fonte - O Autor, 2023

A área total da superfície de um cone circular é dada pela soma da área das base $A_b = \pi \cdot r^2$ com a área lateral, para realizar o cálculo desta basta notar que ela planificada forma um setor circular, cuja área é dada por $A_l = \frac{g^2 \cdot \theta}{2}$, onde θ é o ângulo do setor circular, portanto a área total é dada por $A_t = A_b + A_l \Leftrightarrow A_t = \pi \cdot r^2 + \frac{g^2 \cdot \theta}{2}$.

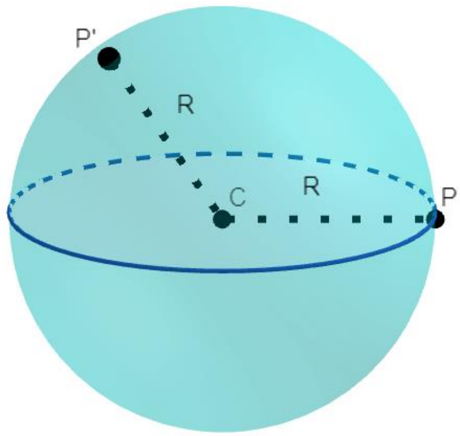
2.20.1 Volume do Cone

Como definimos o cone circular reto através de uma pirâmide que tem um número de vértices da base tendendo ao infinito, conclui-se que o volume do cone pode ser calculado da mesma maneira que a pirâmide, que seria o produto da área da base pela altura, $V = A_b \cdot h$, como a base de um cone é um círculo, o volume do cone será: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$.

2.21 **Esfera**

A esfera é o lugar geométrico de todos os pontos que estão a uma distância menor ou igual a uma constante R de um ponto C fixo.

Figura 50 - Esfera e seus Elementos



Fonte - O Autor, 2023

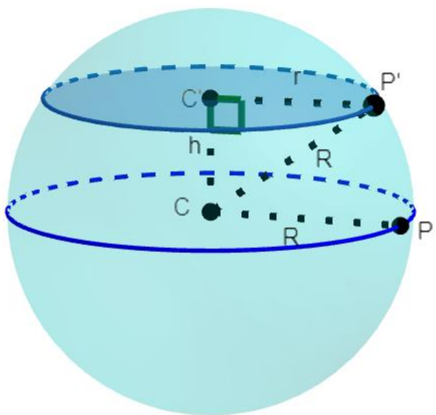
As esferas possuem os seguintes elementos:

- O ponto C fixo é chamado de centro da esfera;
- A distância R constante é chamada de raio da esfera

Considera-se como superfície esférica o lugar geométrico de todos os pontos equidistantes de centro C fixo a uma distância R. A esfera também pode ser considerada como um sólido de revolução, sendo gerado a partir da rotação de um semicírculo em torno do eixo que contém o diâmetro deste, dessa forma a superfície esférica seria a rotação da semicircunferência em torno do eixo que contém o diâmetro.

A seção de uma esfera de raio R é dada pela interseção desta com um plano que está a uma distância h do centro C será um círculo que terá raio r, tal que (por Pitágoras no triângulo CC’P’) $R^2 = h^2 + r^2 \Leftrightarrow r^2 = R^2 - h^2$.

Figura 51 - Seção da Esfera

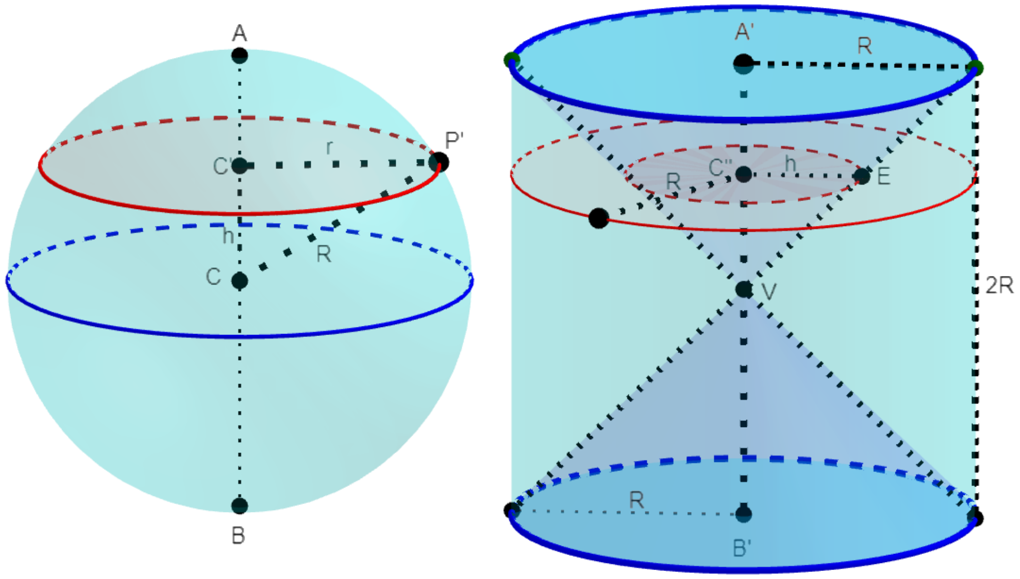


Fonte - O Autor, 2023

2.21.1 Volume da Esfera

Usaremos o Princípio de Cavalieri para calcular o volume de uma esfera, para tal vamos considerar e comparar uma esfera de raio R e centro C com um cilindro de altura 2R, tal que tenhamos $2R = \overline{AB} = \overline{A'B'}$, e raio da base do cilindro igual R. Além disso vamos considerar dois cones circulares retos com os mesmos vértices V no centro do cilindro, com alturas iguais a R e raio das bases também iguais a R, coincidentes com as bases do cilindro, conforme a figura abaixo:

Figura 52 - Princípio de Cavalieri - Volume da Esfera



Fonte - O Autor, 2023

Na figura acima, devemos considerar o sólido S formado pela diferença entre o cilindro e os cones. Pelo princípio de Cavalieri, a seção transversal do cilindro que passa pelos pontos A e A' é o que define as bases coincidentes entre um dos cones com o cilindro e o ponto A pertencente a esfera, logo esta seção não possui área, de modo análogo segue o raciocínio para as seções dos pontos B e B'. Os círculos formados pelas seções transversais nos cones possuirão raio e altura iguais a h, pois são cones semelhantes ao cone de raio e altura iguais a R. As outras seções transversais entre A e C formarão círculos de raio r na esfera e coroas circulares de raios R e h no sólido S. Assim podemos calcular as áreas da seção transversal na esfera e da coroa circular da seção no cilindro com os cones.

- Área da Seção Transversal da Esfera: $A_{círc} = \pi \cdot r^2 \Leftrightarrow A_{círc} = \pi \cdot (R^2 - h^2)$
- Área da Coroa Circular: $A_{coroa} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot h^2 \Leftrightarrow A_{coroa} = \pi \cdot (R^2 - h^2)$

A seção que passa por C e V, forma um círculo de raio R tanto na esfera como no cilindro, dessa forma serão seções equivalente. Assim para todos os planos paralelos à base do cilindro temos seções equivalentes na esfera, tanto para as coroas, como para as bases e no centro, portanto, pelo Princípio de Cavalieri, o volume da esfera será igual ao volume do cilindro menos o volume dos dois cones, ou seja, volume do sólido S.

- Volume do Cilindro: $V_{cilindro} = A_b \cdot H = \pi \cdot R^2 \cdot 2R \Leftrightarrow V_{cilindro} = 2\pi R^3$
- Volume dos Cones: $V_{cones} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot H' = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot R \Leftrightarrow V_{cones} = \frac{2}{3}\pi R^3$

Portanto o volume da esfera será dador por:

$$V_{esfera} = V_{cilindro} - V_{cones}$$

$$V_{esfera} = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3$$

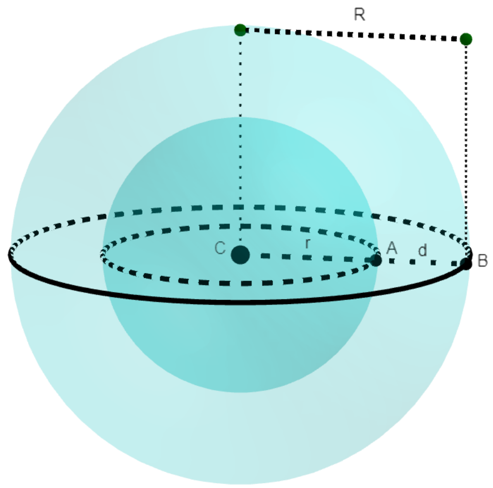
$$V_{esfera} = \frac{6}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3$$

$$\boxed{V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

2.21.2 Área da superfície Esférica

Para calcular a área da superfície esférica vamos considerar duas esferas concêntricas de raios r e R, tal que $r < R$. Além disso vamos considerar a diferença entre os raios, ou seja, $d = R - r$, observe a figura abaixo:

Figura 53 - Aproximação da Área da Superfície Esférica



Fonte - O Autor, 2023

Dessa forma a razão entre a diferença dos volumes e a diferença dos raios das esferas se aproxima da superfície esférica conforme d vai tendendo a zero. Calculando os volumes das esferas obtemos: $V_{maior} = \frac{4}{3}\pi R^3$ e $V_{menor} = \frac{4}{3}\pi r^3$, como $r = R - d$ tem-se que $V_{menor} = \frac{4}{3}\pi(R - d)^3$, desenvolvendo o produto notável obtemos $V_{menor} = \frac{4}{3}\pi(R^3 - 3R^2d + 3Rd^2 - d^3)$. Fazendo $V_{maior} - V_{menor}$ obteremos:

$$V_{maior} - V_{menor} = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi(R^3 - 3R^2d + 3Rd^2 - d^3)$$

$$V_{maior} - V_{menor} = \frac{4}{3}\pi(R^3 - R^3 + 3R^2d - 3Rd^2 + d^3)$$

$$V_{maior} - V_{menor} = \frac{4}{3}\pi(3R^2d - 3Rd^2 + d^3)$$

Tomando a razão das diferenças entre os volumes e os raios tem-se:

$$\frac{V_{maior} - V_{menor}}{R - r} = \frac{\frac{4}{3}\pi(3R^2d - 3Rd^2 + d^3)}{d} = \frac{4}{3}\pi(3R^2 - 3Rd + d^2)$$

Quanto mais próximo de zero for o valor de d, mais a razão acima se aproximará da área da superfície esférica, portanto quando $d = 0$ teremos que a área da superfície esférica será dada por: $A = \frac{4}{3}\pi \cdot 3R^2 \Leftrightarrow \boxed{A = 4\pi R^2}$.

3 PRODUTO EDUCACIONAL – ATIVIDADES INVESTIGATIVAS DE GEOMETRIA ESPACIAL

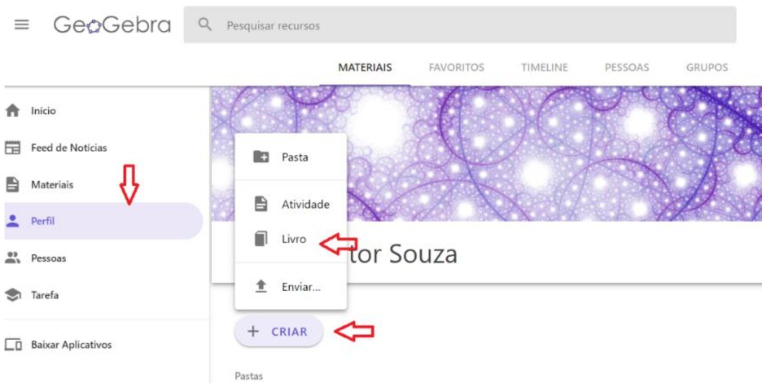
O GeoGebra é uma plataforma educacional dinâmica que integra matemática, geometria, álgebra, cálculo e outras áreas relacionadas de forma interativa. Embora a plataforma seja amplamente conhecida por suas ferramentas de ensino e aprendizado, a criação de um livro no GeoGebra pode ser uma maneira eficaz de compartilhar conhecimento e recursos educacionais personalizados. Como contribuição para os professores, o presente trabalho utilizará a ferramenta Livro da plataforma do GeoGebra para criar um produto educacional no formato de um livro, onde estarão presentes todas as atividades e planos de aula apresentados no trabalho, assim como as construções já prontas caso o professor deseje utilizá-las. O produto educacional pode ser encontrado na plataforma do GeoGebra com o título de **Atividades Investigativas de Geometria Espacial**, tendo visibilidade pública através do link https://www.geogebra.org/m/b6mbajax.

O diferencial deste trabalho está em propor atividades que permitam a investigação matemática, a qual reside na promoção de uma abordagem mais dinâmica e significativa para o aprendizado da matemática. Em vez de apenas fornecer fórmulas e conceitos prontos, a ênfase é colocada na exploração ativa, na descoberta e na construção do conhecimento por meio da investigação. Essas atividades envolvem desafios e problemas que incentivam os alunos a pensar criticamente, a experimentar diferentes abordagens e a desenvolver suas próprias estratégias de resolução. Nas atividades de investigação matemática, os alunos são estimulados a fazerem perguntas, a explorar padrões, a fazer conjecturas e a testar suas hipóteses, o que ajuda a desenvolver não apenas suas habilidades de resolução de problemas, mas também sua capacidade de raciocínio lógico e sua criatividade matemática. Além disso, essa abordagem promove uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos, uma vez que os alunos estão envolvidos ativamente na construção do conhecimento, em vez de apenas memorizá-lo. Outro aspecto importante é que as atividades de investigação matemática incentivam a colaboração e a comunicação entre os alunos, pois muitas vezes envolvem trabalhar em grupos para discutir ideias, compartilhar estratégias e resolver problemas em conjunto. Isso não apenas promove um ambiente de aprendizado colaborativo, mas também ajuda os alunos a desenvolver habilidades interpessoais essenciais.

Abaixo, segue um guia passo a passo sobre como criar um livro no site do GeoGebra:

- ✓ Passo 1: Acesse o Site do GeoGebra: Para começar, acesse o site oficial do GeoGebra em [www.geogebra.org] ou (https://www.geogebra.org/).
- ✓ Passo 2: Faça o Login ou Crie uma Conta: Se você já tiver uma conta no GeoGebra, faça o login. Caso contrário, crie uma conta para ter acesso a recursos adicionais e para salvar seus projetos.
- ✓ Passo 3: Vá para o GeoGebra Livro GeoBook: No canto esquerdo da plataforma clique em “Perfil”, em seguida clique no botão “+ Criar” e depois clique em livro. Isso o levará à seção de criação de livros da plataforma.

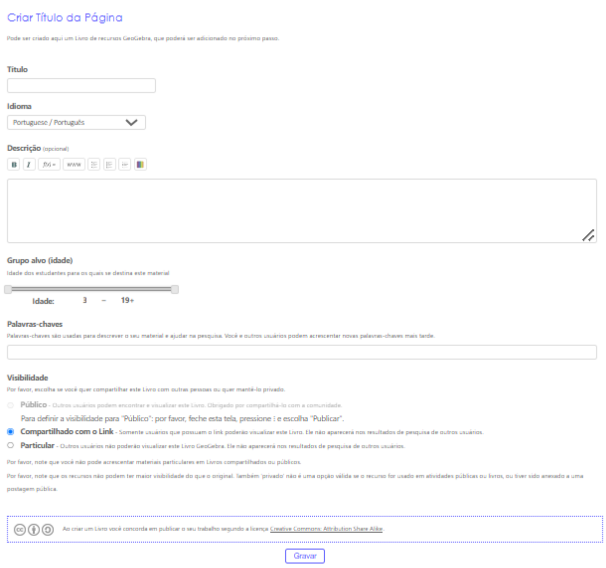
Figura 54 - Página Inicial da Plataforma do GeoGebra



Fonte - Disponível em https://www.geogebra.org/ (Acesso 08/02/24)

- ✓ Passo 4: Inicie um Novo Livro: Ao acessar a seção Livro, você será direcionado para uma nova página onde deverá preencher: Título, Idioma, Descrição (opcional), Grupo Alvo (idade), Palavras-Chaves e Visibilidade. Com tudo preenchido basta clicar no botão “Grava”.

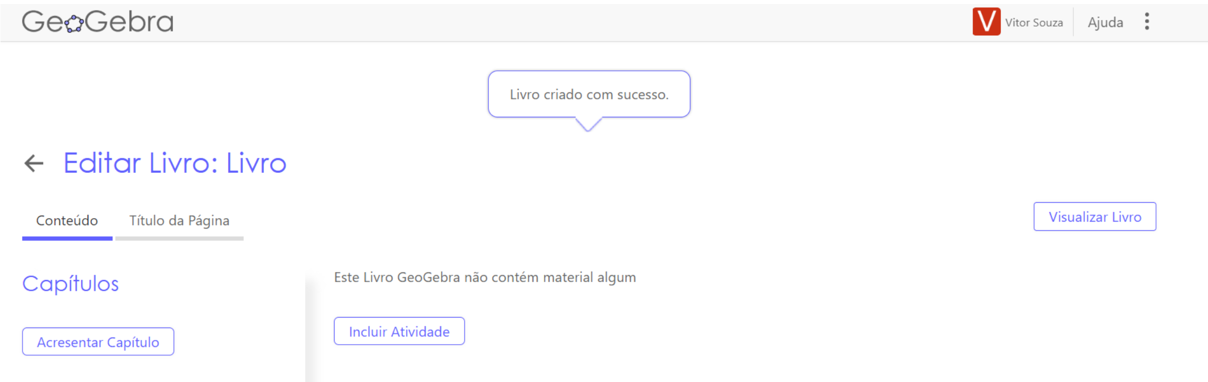
Figura 55 - Página Inicial Para Criação de um Livro



Fonte - Disponível em https://www.geogebra.org/ (Acesso 08/02/24)

✓ Passo 5: Adicione Capítulos e Atividades: No editor de livros, você verá a opção de adicionar capítulos. Crie capítulos conforme necessário para organizar o conteúdo do seu livro. Em cada capítulos, você pode adicionar elementos atividades interativas do GeoGebra, como gráficos, construções geométricas, slides, entre outros.

Figura 56 - Página para Edição do Livro



Fonte - Disponível em https://www.geogebra.org/ (Acesso 08/02/24)

✓ Passo 6: Personalize o Conteúdo: Personalize cada página conforme desejado. Você pode adicionar instruções, problemas para resolver, ou qualquer tipo de conteúdo educacional relacionado ao seu tópico.

Figura 57 - Página para Edição das Atividades

Fonte -Disponível em https://www.geogebra.org/ (Acesso 08/02/24)

✓ Passo 7: Salve o Seu Livro: Certifique-se de salvar seu progresso regularmente. O GeoGebra oferece opções de salvamento automático, mas é sempre bom verificar se o seu trabalho está sendo salvo conforme você avança.

✓ Passo 8: Compartilhe Seu Livro: Quando estiver satisfeito com o seu livro, vá até as configurações ou opções de compartilhamento e escolha tornar o livro público ou compartilhá-lo com pessoas específicas. Você pode gerar um link para compartilhar ou incorporar o livro em sites e blogs.

Criar um livro no GeoGebra permite que o compartilhamento de conceitos matemáticos de maneira interativa, tornando o aprendizado mais envolvente e acessível para os alunos. Certifique-se de explorar as opções de formatação e interatividade que a plataforma oferece para criar um recurso educacional significativo. O professor pode usar ou disponibilizar o livro criado no GeoGebra de várias maneiras para os alunos, tornando-o uma ferramenta valiosa para o ensino e aprendizado interativo. Aqui estão algumas sugestões:

1) Compartilhamento direto via link: Após criar o livro no GeoGebra, o professor pode gerar um link de compartilhamento direto, esse link pode ser enviado aos alunos por e-mail, mensagens, ou compartilhado através de plataformas de ensino online.
2) Incorporação em plataformas educacionais: Se a escola utiliza plataformas educacionais online, como Moodle, Google Classroom, ou outras, o professor pode incorporar o livro diretamente nessas plataformas. Os alunos podem acessar o livro sem sair do ambiente em que estão acostumados a interagir.
3) Disponibilização no site da escola: Se a escola possui um site, o professor pode disponibilizar o link do livro na seção destinada a materiais educacionais. Isso proporciona fácil acesso aos alunos, especialmente se o site da escola for uma fonte central de informações.
4) Discussões em sala de aula: O professor pode usar o livro durante as aulas para explicar conceitos, resolver problemas interativamente e envolver os alunos em discussões. Pode projetar o livro na lousa digital ou pedir aos alunos que acessem o livro em seus próprios dispositivos.
5) Atribuição de tarefas: Utilize o livro para criar tarefas específicas. Os alunos podem interagir com as construções matemáticas, responder a perguntas ou resolver problemas diretamente no livro. O professor pode revisar as respostas dos alunos e fornecer feedback personalizado.
6) Estímulo à exploração independente: Incentive os alunos a explorarem o livro por conta própria. Pode ser uma ferramenta valiosa para reforçar conceitos aprendidos em sala de aula ou para explorar tópicos adicionais.
7) Feedback e Avaliação: Use o livro para avaliações formativas ou somativas, permitindo que os alunos demonstrem seu entendimento de conceitos matemáticos de maneira interativa. O professor pode monitorar o progresso dos alunos e identificar áreas que precisam de reforço.

Portanto ao utilizar os livros do GeoGebra, o professor cria uma experiência de aprendizado mais dinâmica e envolvente, proporcionando aos alunos a oportunidade de interagir diretamente com os conceitos matemáticos de uma forma visual e prática.

4 ROTEIROS DE ATIVIDADES INVESTIGATIVAS

Neste capítulo exploramos uma variedade de conceitos matemáticos fundamentais, todos alinhados com as habilidades e competências previstas na BNCC tanto para o Ensino Fundamental quanto para o Ensino Médio. Os temas abordados, como a relação de Euler, volume de blocos retangulares, projeção ortogonal, princípio de Cavalieri e volumes de sólidos geométricos como prisma, cilindro, pirâmide e cone, foram selecionados especificamente por sua relevância no desenvolvimento das competências matemáticas estipuladas pela BNCC, além disso, mesmo com pouca menção no documento citado, serão propostas atividades sobre os postulados da geometria espacial que podem ser encontrados no Apêndice deste trabalho. Esses conceitos fornecem uma base sólida para o desenvolvimento do pensamento crítico, resolução de problemas e compreensão das relações matemáticas, conforme exigido pelos padrões educacionais. Os conceitos serão trabalhados e conduzidos a partir de atividades baseadas na investigação, diferente da abordagem tradicional já citada anteriormente, onde os alunos não apenas fortalecem suas habilidades matemáticas, mas também desenvolvem habilidades cognitivas e autônomas essenciais, como análise, síntese, comunicação e raciocínio lógico, fundamentais para o sucesso acadêmico e para a vida além da sala de aula. Além das atividades serão fornecidos planos de aula que servirão como norteadores para os professores, podendo estes realizarem alterações de acordo com suas respectivas realidades escolares.

4.1 **A Relação de Euler**

Nesta atividade iremos explorar através da experimentação a relação de Euler a qual diz que para os poliedros convexos existe uma relação entre o número V de vértices, F de faces e A de arestas, tal relação é dada por $V + F = A + 2$.

4.1.1 Plano de Aula sobre Relação de Euler

- Público-Alvo – Alunos do 6º Ano do Ensino Fundamental ou 2º Ano do Ensino Médio.
- Habilidades da BNCC – (EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.
- Tempo – 2 tempos de 50 minutos
- Objetivo Geral – Conjecturar a Relação de Euler
    - Objetivos Específicos
        - ✓ Relembrar o conceito de Poliedro;
        - ✓ Relembrar os conceitos de Vértice, Face e Aresta de um Poliedro;
        - ✓ Relembrar as definições de poliedros convexos e não convexos;
        - ✓ Analisar a relação entre o número de vértices, faces e arestas;
        - ✓ Analisar a correlação entre a relação de Euler e os poliedros convexos e não convexos.
- Conteúdos
    - ✓ Poliedros;
    - ✓ Elementos de um Poliedro;
    - ✓ Poliedro Convexo e Poliedro não Convexo;
    - ✓ Relação de Euler.
- Recursos Necessários
    - ✓ Projetor Multimídia;
    - ✓ Impressões;
    - ✓ Computadores ou smartphones com o GeoGebra 3D;
    - ✓ Internet para baixar as construções ou pendrive com as construções prontas;
    - ✓ Caneta de Quadro Branco;
    - ✓ Apagador;
    - ✓ Quadro Branco.
- Procedimentos/Resumo da Aula

Tabela 2 - Resumo da Aula de Relação de Euler

Etapas	**Objetivo Principal**	**Ação Principal**	**Itens da Atividade**	**Tempo**
Construção	Realizar a construção da situação a ser	Solicitar que os alunos sigam o passo	1, 2, 3, 4 e 5	15 min

	investigada.	a passo da construção.		
Concepções Espontâneas	Relembrar as definições de poliedros, elementos dos poliedros e de poliedros convexos e não convexos.	Solicitar que os alunos escrevam com suas próprias palavras o que eles sabem sobre os tópicos perguntados.	6, 7 e 8	15 min
Perguntas/Hipótese	Estimular a curiosidade quanto à relação entre a quantidade de vértices, faces e arestas dos poliedros correlacionados com suas características.	Responder a questionamentos de acordo com as construções abordadas.	9, 10, 11, 12, 14, 15, 17, 18	30 min
Experimento	Experimentar a validade ou não validade da Relação de Euler em diferentes Poliedros.	Usar a geometria dinâmica do software para testas as hipóteses.	11 e 16	20 min
Conclusões	Conjecturar a Relação de Euler	Definir corretamente a Relação de Euler	13, 19 e 20	20 min

Fonte - O Autor, 2024

- Orientações Pedagógicas

Na fase de construção os alunos devem seguir o passo a passo para realizar a construção do prisma e da pirâmide, caso os alunos não estejam familiarizados com o GeoGebra 3D o professor pode realizar a construção juntos com os alunos fazendo-a com uma projeção utilizando um projetor multimídia ou na falta deste recurso o professor pode já utilizar a construção pronta que está disponibilizada em no Livro – Atividades de Geometria Espacial. A fase de concepções espontâneas servirá para o professor verificar os conceitos que os alunos já tenham ou não tenham definidos, o professor pode propor um debate com todos os alunos a fim de chegar às definições solicitadas, pois estas serão de extrema importância para a conclusão da atividade. Na fase de perguntas/hipóteses os alunos serão questionados sobre as construções e experimentações que realizarão e a partir destas criarão suas hipóteses que deverão ser experimentadas na fase de experimentação. Com todas as experimentações, indagações e hipóteses testadas, os alunos vão aos poucos conjecturando a definição da Relação de Euler. Caso os alunos tenham dificuldades o professor pode intervir para que o aluno consiga prosseguir na construção do conhecimento ou pode solicitar que um outro aluno que já tenha conseguido auxilie o aluno com dificuldade.

4.1.2 Atividade Investigativa sobre a Relação de Euler

1) Abra o GeoGebra 3D.
2) Na janela de visualização 2D utilize a ferramenta a=2 Controle Deslizante e construa dois controles deslizantes:
    - V_b, no GeoGebra digite V_b, para a quantidade de vértices da base, com as seguintes características:

min	max	Incremento
3	20	1

    - h para a altura do prisma e da pirâmide que serão construídos, com as seguintes características:

min	max	Incremento
1	10	1

3) Ainda na janela de visualização 2D, utilize a ferramenta A Ponto e construa os pontos A, B, C e D sobre o Eixo X nos valores $-5, -3, 3$ e 5.

4) Utilize a ferramenta Polígono Regular para criar dois polígonos, depois de clicar no ícone anterior, clique sobre os pontos A e B, em seguida defina o número de vértices como V_b, ou seja, valor do controle deslizante V_b. Repita o processo para os pontos C e D. Observe que os polígonos serão nomeados por pol1 e pol2.

5) Agora na Janela de Álgebra, utilize a caixa de entrada 

e digite Prisma(pol1,h) e Pirâmide(pol2,h), para construir um prisma e uma pirâmide cujas bases serão os polígonos anteriores.

6) Você sabe o que é um Poliedro? Escreva com as suas palavras.

7) Você sabe quais são os elementos de um Poliedro? Escreva com suas palavras.

8) Você sabe o que é um Poliedro Convexo? E um Poliedro não-Convexo? Escreva com as suas palavras.

9) O que acontece com o Prisma e a Pirâmide quando você movimenta o controle deslizante V_b?

10) O que acontece com o Prisma e a Pirâmide quando você movimenta o controle deslizante h?

11) Movimente o controle deslizante V_b de acordo com o polígono da base solicitado e em seguida preencha a tabela abaixo com as quantidades de vértices, faces e arestas:

Tabela 3 - Quantidade de Vértices, Faces e Arestas

Polígono da Base	**Prisma**			**Pirâmide**		
	Vértices	Faces	Arestas	Vértices	Faces	Arestas
Triângulo						
Quadrilátero						
Pentágono						
Hexágono						
Decágono						
Dodecágono						

Fonte - O Autor, 2024

12) Você consegue ver alguma relação entre as quantidades de vértices, faces e arestas em cada um dos prismas e pirâmides analisados? Dica: Verifique as quantidades em cada uma das linhas e tente encontrar uma relação numérica entre as quantidades.

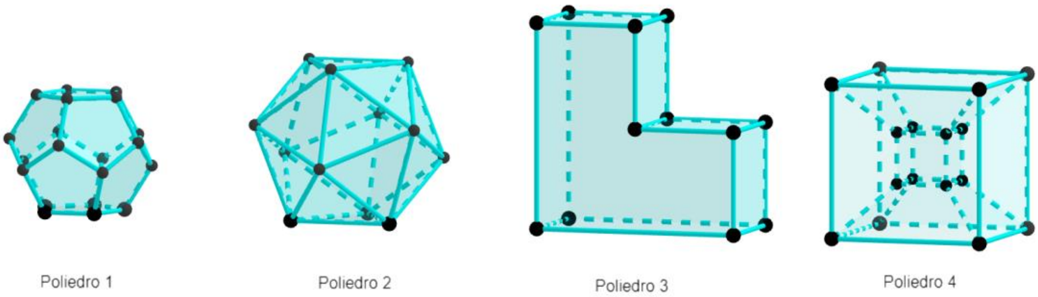
13) Caso você não tenha encontrado alguma relação, compare a soma das quantidades de vértices e faces com a quantidade de arestas, você consegue notar alguma relação entre a soma e a quantidade de arestas? Explique com as suas palavras.

14) A relação acima é chamada de Relação de Euler, você experimentou para os prismas e as pirâmides, com base nessa experimentação você acredita que vale para todo prisma e toda pirâmide?

15) Agora pensando em qualquer outro poliedro diferente dos prismas e das pirâmides, você acha que a relação é válida para todo poliedro existente?

16) Na construção a seguir observe os 4 poliedros dados.

Figura 58 - Quatro Poliedros Diferentes



Fonte - O Autor, 2024

17) Quais poliedros são convexos e quais não são convexos? Observe que o poliedro 4 é vazado no meio.

18) A Relação de Euler vale para todos os quatro poliedros? Para qual(is) vale e para qual(is) não vale?

____

____

19) De acordo com as respostas dos itens 15 e 16, o que você pode concluir quanto a validade da relação de Euler e o fato de ser ou não ser convexo?

____

____

20) Com base nas suas respostas dos itens 13 e 19 escreva uma definição para a Relação de Euler.

____

____

4.2 **Volume de Blocos Retangulares**

Nesta atividade iremos explorar através da experimentação como se calcula o volume de um bloco retangular a partir da relação entre o seu comprimento, a sua altura e a sua largura, ou seja, queremos concluir que o volume de um bloco retangular será dado por: $volume = comprimento \ \cdot largura \cdot altura.$

Nesta atividade utilizaremos um applet intitulado Volume de um cubo e disponível publicamente na plataforma do GeoGebra, no link https://www.geogebra.org/m/mRYqR8AP, de autoria de Cátia Almeida, cujo perfil na plataforma pode ser acessado através do link: https://www.geogebra.org/u/catiarcalmeida.

4.2.1 Plano de Aula sobre Volume de Blocos Retangulares

- Público-Alvo – Alunos do 8º Ano do Ensino Fundamental ou 2º Ano do Ensino Médio.
- Habilidades da BNCC – (EF08MA21) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular.
- Tempo – 2 tempos de 50 minutos

- Objetivo Geral – Conjecturar a fórmula do Volume de um Bloco Retangular
  - Objetivos Específicos
    - ✓ Relembrar o conceito de Bloco Retangular e suas dimensões;
    - ✓ Reconhecer objetos do mundo físico que possuem a forma de um bloco retangular;
    - ✓ Identificar um Paralelepípedo Retângulo;
    - ✓ Identificar o Cubo e a sua relação com o Paralelepípedo Retângulo;
    - ✓ Relembrar o conceito de Volume.
- Conteúdos
    - ✓ Paralelepípedo Retângulo;
    - ✓ Cubo;
    - ✓ Volume de um Bloco Retangular.
- Recursos Necessários
    - ✓ Projetor Multimídia;
    - ✓ Impressões;
    - ✓ Computadores ou smartphones com o GeoGebra 3D;
    - ✓ Internet para baixar as construções ou pendrive com as construções prontas;
    - ✓ Caneta de Quadro Branco;
    - ✓ Apagador;
    - ✓ Quadro Branco.
- Procedimentos/Resumo da Aula

Tabela 4 - Resumo da Aula de Volume de um Bloco Retangular

Etapas	Objetivo Principal	Ação Principal	Itens da Atividade	Tempo
Construção	Utiliza-se uma construção pronta disponível publicamente na plataforma do GeoGebra	Solicitar que os alunos sigam o passo a passo para abrir a construção.	2, 3	5 min
Concepções Espontâneas	Relembrar o conceito de Bloco Retangular e suas dimensões,	Solicitar que os alunos escrevam com suas próprias	1a), 1b), 1c), 1d) e 1e)	15 min

	Paralelepípedo retângulo, Cubo e a sua relação com o Paralelepípedo Retângulo e relembrar o conceito de Volume.	palavras o que eles sabem sobre os tópicos perguntados.		
Perguntas/Hipótese	Estimular a curiosidade quanto à relação entre a quantidade de blocos azuis e o volume total.	Responder a questionamentos de acordo com as construções abordadas.	4a), 4b), 4c) e 4d)	30 min
Experimento	Experimentar a relação entre as dimensões do bloco laranja, com a quantidade de cubos azuis e o volume total.	Usar a geometria dinâmica do software para testas as hipóteses.	4 e 5	30 min
Conclusões	Conjecturar o volume de um bloco retangular.	Definir corretamente o volume de um bloco retangular	6 e 7	20 min

Fonte - O Autor, 2024

- Orientações Pedagógicas

Na fase de construção só é preciso pesquisar a construção que será utilizada, caso os alunos não consigam o professor pode realizar mostrar aos alunos fazendo uma projeção utilizando um projetor multimídia ou na falta deste recurso o professor pode já utilizar a construção pronta que está disponibilizada em no Livro – Atividades Investigativas de Geometria Espacial. A fase de concepções espontâneas servirá para o professor verificar os conceitos que os alunos já tenham ou não tenham definidos, o professor pode propor um debate com todos os alunos a fim de chegar às definições solicitadas, pois estas serão de extrema importância para a conclusão da atividade. Na fase de perguntas/hipóteses os alunos serão questionados sobre as construções e experimentações que realizarão e a partir destas criarão suas hipóteses que deverão ser experimentadas na fase de experimentação. Com todas as experimentações, indagações e hipóteses testadas, os alunos vão aos poucos percebendo a relação entre a quantidade de cubos azuis com o volume total. Caso os alunos tenham dificuldades o professor pode intervir para que o aluno consiga prosseguir na construção do conhecimento, começando por comparar duas dimensões e o total de cubos azuis, assim deve ser mais fácil do aluno visualizar que a relação é dada pelo produto entre as dimensões ou pode solicitar que um outro aluno que já tenha conseguido auxilie o aluno com dificuldade.

4.2.2 Atividade Investigativa sobre Volume de um Bloco Retangular

1) Antes de abrir o GeoGebra e visualizar o applet da atividade, responda:

a) Você sabe explicar o que é o sólido geométrico chamado de Bloco Retangular? Sabe o nome dado às suas dimensões? Escreva com as suas palavras.

b) Quais objetos do mundo físico possuem o formato de um bloco retangular?

c) O que é um paralelepípedo retângulo?

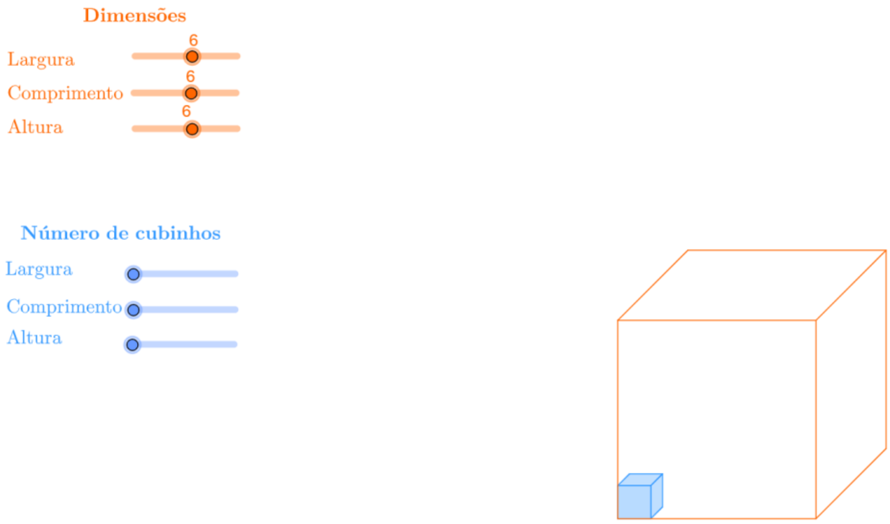
d) O que é um cubo? Qual a sua relação com o paralelepípedo retângulo?

e) Você sabe explicar o que é o volume de um corpo qualquer? Escreva com as suas palavras.

2) Abra GeoGebra 3D.

3) Em seguida clique na ferramenta e busque por VOLUME DE UM CUBO da autora Cátia Almeida.

Figura 59 - Applet sobre Volume de um Bloco Retangular



Fonte - Disponível em https://www.geogebra.org/m/mRYqR8AP (Acesso 20/01/24)

4) Movimente os controles deslizantes das Dimensões e do Número de cubinhos e observe o que muda na figura inicial. Responda:

a) Quais são as funcionalidades de cada um dos controles deslizantes, ou seja, o que cada um muda na figura inicial?

____

____

b) Qual a relação entre os controles dimensões e número de cubinhos, ou seja, o que cada um muda no outro?

____

____

c) Qual é a relação entre o número de cubinhos azuis e o volume do bloco retangular laranja?

____

____

d) É possível preencher todo o bloco retangular laranja com cubinhos azuis?

____

____

5) Como você deve ter percebido anteriormente, a quantidade de cubinhos azuis representa o volume do bloco retangular laranja sendo preenchido, ou seja, a quantidade total destes que preenchem o bloco retangular laranja é o volume da figura, logo podemos considerar cada bloquinho azul como uma unidade de volume. Faça alguns experimentos alterando as dimensões do bloco retangular e preencha a tabela abaixo:

Tabela 5 - Medida do Comprimento, Largura e Altura do Bloco Retangular

Experimento	Comprimento	Largura	Altura	Total de Blocos Azuis (Volume)
1				
2				
3				
4				
5				

Fonte - O Autor, 2024

6) Você consegue montar uma relação entre os valores das dimensões e o total de cubinhos azuis que preenchem o bloco laranja todo? Escreva com as suas palavras.

____

____

7) Considerando v (volume), c (comprimento), l (largura) e a (altura) do bloco retangular, conjecture uma fórmula matemática que relacione o volume com o comprimento, largura e altura.

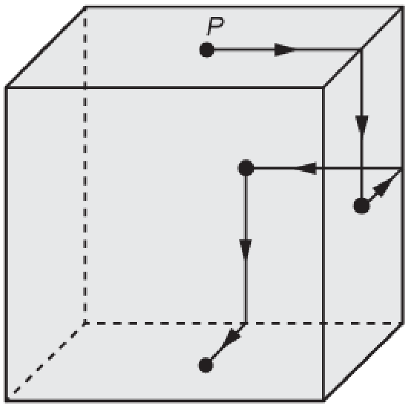
____

____

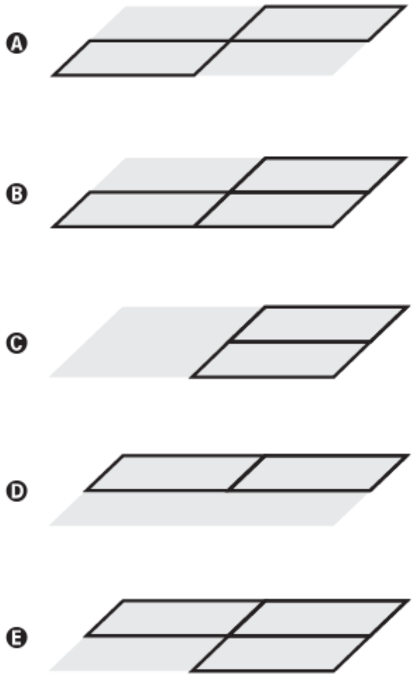
4.3 **Projeção Ortogonal**

Nesta atividade iremos explorar através da experimentação como se visualiza a projeção ortogonal de um objeto. A projeção ortogonal de figuras espaciais sobre um plano pode ser pensada como sendo a sombra da figura produzida quando o sol está no horário mais alto. Por ser um tema bastante recorrente no ENEM, utilizaremos uma questão que caiu na prova do ENEM no ano de 2022, cujo enunciado pode ser visto a seguir:

Um robô, que tem um ímã em sua base, se desloca sobre a superfície externa de um cubo metálico, ao longo de segmentos de reta cujas extremidades são pontos médios de arestas e centros de faces. Ele inicia seu deslocamento no ponto P, centro da face superior do cubo, segue para o centro da próxima face, converte à esquerda e segue para o centro da face seguinte, converte à direita e continua sua movimentação, sempre alternando entre conversões à esquerda e à direita quando alcança o centro de uma face. O robô só termina sua movimentação quando retorna ao ponto P. A figura apresenta os deslocamentos iniciais desse robô.



A projeção ortogonal do trajeto descrito por esse robô sobre o plano da base, após terminada sua movimentação, visualizada da posição em que se está enxergando esse cubo, é



4.3.1 Plano de Aula sobre Projeção Ortogonal

- Público-Alvo – Alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental ou 2º Ano do Ensino Médio.

Habilidades da BNCC – (EF09MA17) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.

- Tempo – 1 tempo de 50 minutos
- Objetivo Geral – Identificar a projeção ortogonal sob um plano dado.
  - Objetivos Específicos
    - ✓ Relembrar o conceito de Poliedros e seus elementos;
    - ✓ Utilizar os conceitos de ponto médio de um segmento;
    - ✓ Utilizar os conceitos de centro de uma face;
- Conteúdos
    - ✓ Poliedros e seus elementos;
    - ✓ Ponto Médio de um Segmento;
    - ✓ Centro de uma Face.
- Recursos Necessários
    - ✓ Projetor Multimídia;
    - ✓ Impressões;
    - ✓ Computadores ou smartphones com o GeoGebra 3D;
    - ✓ Internet para baixar as construções ou pendrive com as construções prontas;
    - ✓ Caneta de Quadro Branco;
    - ✓ Apagador;
    - ✓ Quadro Branco.
- Procedimentos/Resumo da Aula

Tabela 6 - Resumo da Aula de Projeção Ortogonal

Etapas	Objetivo Principal	Ação Principal	Itens da Atividade	Tempo
Construção	Realizar a construção da imagem apresentada na questão.	Solicitar que os alunos sigam o passo a passo para abrir a construção.	2, 3 e 4	15 min
Concepções Espontâneas	Relembrar o conceito poliedros e seus elementos. Relembrar sobre ponto médio de um segmento.	Solicitar que os alunos escrevam com suas próprias palavras o que eles sabem sobre os tópicos perguntados.	1	15 min

Perguntas/Hipótese	Estimular a curiosidade quanto à projeção ortogonal do caminho solicitado na questão.	Responder a questionamentos de acordo com as construções abordadas.	5	10 min
Experimento	Experimentar a projeção ortogonal sobre o plano XY.	Usar a geometria dinâmica do software para testas as hipóteses.	4	5 min
Conclusões	Responder corretamente à questão.	Definir corretamente a projeção ortogonal.	6	5 min

Fonte - O Autor, 2024

- Orientações Pedagógicas

Na fase de construção o aluno deverá seguir o passo a passo para construir a imagem da questão, caso os alunos não consigam o professor pode realizar mostrar aos alunos fazendo uma projeção utilizando um projetor multimídia ou na falta deste recurso o professor pode já utilizar a construção pronta que está disponibilizada em no Livro – Atividades Investigativas de Geometria Espacial, além disso existe a ferramenta de realidade aumentada disponível no GeoGebra 3D para smartphone que pode auxiliar essa construção. A fase de concepções espontâneas servirá para o professor verificar os conceitos que os alunos já tenham ou não tenham definidos, necessitam para essa atividade dos conceitos de poliedros, ponto médio e cento, o professor pode propor um debate com todos os alunos a fim de chegar às definições solicitadas, pois estas serão de extrema importância para a conclusão da atividade. Na fase de perguntas/hipóteses os alunos serão questionados sobre as construções e experimentações que realizarão e a partir destas criarão suas hipóteses que deverão ser experimentadas na fase de experimentação. Com todas as experimentações, indagações e hipóteses testadas, os alunos vão aos poucos percebendo e projetando ortogonalmente no plano solicitado. Caso os alunos tenham dificuldades o professor pode intervir para que o aluno consiga prosseguir na construção do conhecimento, a ferramenta de realidade aumentada é de grande valia para esta atividade pois facilitas a construção total da questão.

4.3.2 Atividade Investigativa sobre Vistas Ortogonais

1) Antes de abrir o GeoGebra e visualizar o applet da atividade, responda:

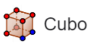
a) Você sabe explicar o que são vértices, faces e arestas de um poliedro? Escreva com suas palavras.

b) Você sabe explicar o que é a projeção ortogonal de um sólido geométrico? Discuta com seus amigos e com seu professor e escreva com as suas palavras.

c) Caso você não tenha conseguido responder à questão anterior pense na sombra de um objeto quando o sol está a pino, ou seja, qual seria o formato da sombra de uma esfera? E qual seria o formato da sombra de um cubo?

d) Com base nessas informações, como você explicaria a projeção ortogonal ou vista ortogonal?

2) Abra GeoGebra 3D.

3) Utilize a ferramenta 

e trace um cubo qualquer.

a) Descreva como você desenharia o caminho feito pelo robô até o último ponto apresentado na questão?

b) Existe alguma ferramenta que faz o que a questão pede?

c) A ferramenta 

serve para marcar o ponto médio de um segmento de reta ou para marcar o centro de uma face de um poliedro, utilizando esta ferramenta marque os centros das faces e os pontos médios dos segmentos que pertencem ao caminho. Caso seja necessário utilize a ferramenta Mover para girar a janela de visualização e ao final clique em visualização para retornar à janela de visualização inicial.

d) Utilize a ferramenta Segmento para traçar o caminho percorrido pelo robô ligando todos os pontos marcados no item anterior e respeitando a direção proposta pela figura.

e) Utilizando as mesmas ferramentas acima, complete o caminho até o robô voltar ao ponto P, cuidado com as direções a serem seguidas.

4) Em seguida clique na ferramenta Plano por três pontos e construa um plano que passe pelos pontos A, B e C do cubo, ou seja, o plano da base do cubo.

5) De acordo com o que você respondeu na questão 1 e utilizando a geometria dinâmica do GeoGebra 3D, descreva como você pode encontrar a projeção ortogonal do trajeto descrito por esse robô sobre o plano da base, após terminada sua movimentação?

6) Qual foi a alternativa correta?

4.4 Princípio de Cavalieri

Nesta atividade iremos explorar através da experimentação o Princípio de Cavalieri, tal princípio afirma que para dois ou mais sólidos geométricos quaisquer, se as seções horizontais formadas a partir da interseção deles com um plano paralelo a base possuírem áreas iguais, então seus volumes também serão iguais.

Nesta atividade utilizaremos um applet intitulado “O Princípio de Cavalieri” disponível publicamente na plataforma do GeoGebra, no link https://www.geogebra.org/m/utx7gkhz, de autoria de Aroldo Eduardo Athias Rodrigues, cujo perfil na plataforma pode ser acessado através do link: https://www.geogebra.org/u/aroldo.rodrigues. Como o próprio autor salienta tal applet foi uma contribuição de uma dissertação de mestrado feita por Edivan Mendes, com a orientação da prof.ª Ana Kelly, cuja idealização das funcionalidades do applet são do professor Pedro Franco Sá.

4.4.1 Plano de Aula sobre Princípio de Cavalieri

- Público-Alvo – 2º Ano do Ensino Médio.
- Habilidades da BNCC
  - ✓ (EF09MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.
  - ✓ (EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
- Tempo – 2 tempos de 50 minutos
- Objetivo Geral – Conjecturar o Princípio de Cavalieri
  - Objetivos Específicos
    - ✓ Relembrar os conceitos 1 dimensão, 2 dimensões e 3 dimensões;
    - ✓ Relembrar o conceito de Volume de um sólido geométrico;
    - ✓ Relembrar as definições de prismas, pirâmides, cilindros e cones;
- Conteúdos
  - ✓ Volume;
  - ✓ Prisma;
  - ✓ Pirâmide;
  - ✓ Cilindro;
  - ✓ Cone;
  - ✓ Princípio de Cavalieri.
- Recursos Necessários
  - ✓ Projetor Multimídia;
  - ✓ Impressões;
  - ✓ Computadores ou smartphones com o GeoGebra 3D;
  - ✓ Internet para baixar as construções ou pendrive com as construções prontas;
  - ✓ Caneta de Quadro Branco;
  - ✓ Apagador;
  - ✓ Quadro Branco.

- Procedimentos/Resumo da Aula

Tabela 7 - Resumo da Aula de Princípio de Cavalieri

Etapas	Objetivo Principal	Ação Principal	Itens da Atividade	Tempo
Construção	Utiliza-se uma construção pronta disponível publicamente na plataforma do GeoGebra	Solicitar que os alunos sigam o passo a passo para abrir a construção.	6	5 min
Concepções Espontâneas	Relembrar os conceitos de Volume de um sólido geométrico, assim como as definições de prisma, pirâmide, cilindro e cone.	Solicitar que os alunos escrevam com suas próprias palavras o que eles sabem sobre os tópicos perguntados.	1, 2 e 3	10 min
Perguntas/Hipótese	Estimular a curiosidade quanto à relação entre a dois sólidos de volumes iguais.	Responder a questionamentos de acordo com as construções abordadas.	4, 5, 9 e 10	10 min
Experimento	Interagir com o applet a fim de verificar suas funcionalidades e experimentar as igualdades entre os volumes.	Usar a geometria dinâmica do software para testas as hipóteses.	7, 8 e 11	50 min
Conclusões	Conjecturar o Princípio de Cavalieri	Definir corretamente o Princípio de Cavalieri.	12 e 13	25 min

Fonte - O Autor, 2024

- Orientações Pedagógicas

Na fase de construção só é preciso pesquisar a construção que será utilizada, caso os alunos não consigam o professor pode realizar mostrar aos alunos fazendo uma projeção utilizando um projetor multimídia ou na falta deste recurso o professor pode já utilizar a construção pronta que está disponibilizada em no Livro – Atividades Investigativas de Geometria Espacial. A fase de concepções espontâneas servirá para o professor verificar os conceitos que os alunos já tenham ou não tenham definidos, necessitam conhecer as definições de volume, prisma, pirâmide, cilindro e cone, o professor pode propor um debate com todos os alunos a fim de chegar às definições solicitadas, pois estas serão de extrema importância para a conclusão da atividade. Na fase de perguntas/hipóteses os alunos serão questionados sobre as construções e experimentações que realizarão e a partir destas criarão suas hipóteses que deverão ser experimentadas na fase de experimentação. Com todas as experimentações, indagações e hipóteses testadas, os alunos vão aos poucos percebendo as características que devem estar presentes para que os volumes possuam a mesma medida e assim vão conjecturando o Princípio de Cavalieri. Caso os alunos tenham dificuldades o professor pode intervir para que o aluno consiga prosseguir na construção do conhecimento ou pode solicitar que um outro aluno que já tenha conseguido auxilie o aluno com dificuldade.

4.4.2 Atividade Investigativa sobre o Princípio de Cavalieri

1) Você sabe explicar o que são objetos ou medidas unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais? Escreva com suas palavras.

   ____

   ____

2) Você sabe explicar o que é o VOLUME de um sólido geométrico ou de um corpo qualquer?

   ____

   ____

3) Você lembra o que são Prismas, Cilindros, Pirâmides e Cones? Escreva com suas palavras a definição de cada um deles.

   ____

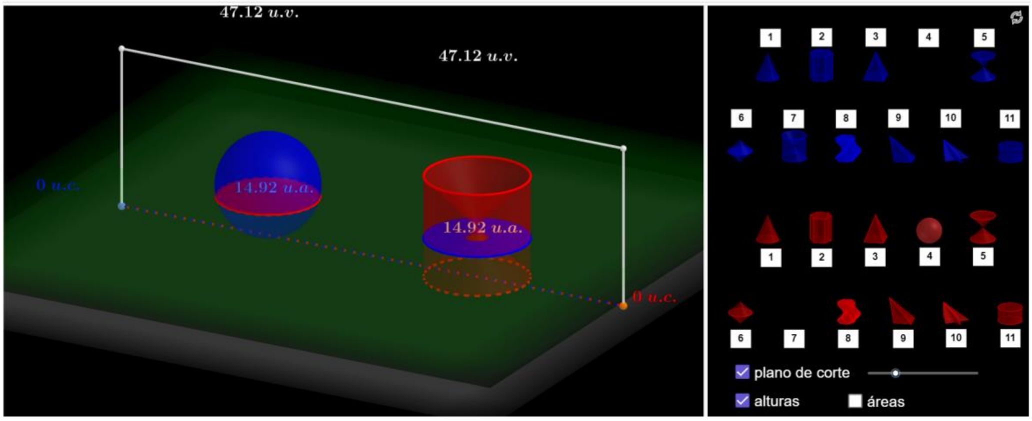
   ____

4) Agora reflita, é possível que dois sólidos geométricos distintos tenham o mesmo volume?

5) O que você acha que deve ocorrer para que possamos afirmar que dois sólidos distintos tenham o mesmo volume? Tome como exemplo uma pirâmide e um cone.

6) Vamos utilizar uma versão adaptada da construção intitulada de “O Princípio de Cavalieri” disponível publicamente na plataforma do GeoGebra, no link https://www.geogebra.org/m/utx7gkhz, de autoria de Aroldo Eduardo Athias Rodrigues. A versão adaptada está disponível em https://www.geogebra.org/m/nwwqwrgx.

Figura 60 - Applet sobre o Princípio de Cavalieri



Fonte - Disponível em https://www.geogebra.org/m/utx7gkhz (Acesso 21/01/24)

7) Nesta construção você pode observar que existes vários sólidos geométricos na cor azul e outros na cor vermelho, além de três caixas de seleção “plano de corte”, “alturas” e “áreas”. Além disso tem um controle deslizante ao lado da caixa de seleção plano de corte. Vamos explorar as funcionalidades.

a) O que você acha que significam as expressões $u.c, u.a$ e $u.v$? Elas têm alguma relação com a resposta do item 1?

b) O que acontece quando você clica nos sólidos de cor azul? E nos sólidos de cor vermelha?

c) O que acontece quando você marca e desmarca a caixa de seleção “plano de corte”?

d) O que acontece quando você marca e desmarca a caixa de seleção “alturas”?

e) O que acontece se você arrastar os pontos que aparecem nos pés da trave branca para cima? Para o que elas servem?

f) O que acontece quando você marca e desmarca a caixa de seleção “plano de corte”?

g) O que acontece quando você movimenta controle deslizante ao lado da caixa de seleção “plano de corte”?

h) Agora explique como ocorre o funcionamento do applet e quais comparações ele realiza.

8) O Princípio de Cavalieri fala sobre a igualdade entre os volumes $(u.v)$ de dois ou mais sólidos quaisquer. A partir dessa informação preencha a tabela abaixo utilizando Sim ou Não:

Tabela 8 - Medida das alturas, áreas das seções e volumes dos sólidos

Sólidos	**Os sólidos possuem alturas iguais? $(\mathbf{u.c})$**	**Os sólidos possuem seções transversais com áreas iguais? $(\mathbf{u.a})$**	**Os sólidos possuem volumes iguais? $(\mathbf{u.v})$**
1 e 2			
1 e 3			
1 e 4			
1 e 8			
1 e 9			
1 e 10			
2 e 3			

2 e 4			
2 e 8			
2 e 9			
2 e 10			
5 e 4			
5 e 6			
5 e 7			
5 e 8			

Fonte - O Autor, 2024

9) Agora observe todas as duplas que possuem volumes iguais, o que você observa de interessante quanto à altura e a área das seções?

____

____

10) E para as duplas que possuem volumes diferentes, o que você observa de interessante quanto à altura e a área das seções?

____

____

11) Você consegue encontrar mais sólidos que possuem volumes iguais? Em caso positivo, todos respeitam a resposta da questão 9?

____

____

12) Então se as alturas e as áreas das seções transversais são iguais os sólidos sempre terão o mesmo volume?

____

____

13) Escreva com as suas palavras o que você compreendeu sobre o Princípio de Cavalieri.

____

____

4.5 **Volume do Prisma**

Nesta atividade iremos explorar através da experimentação como se calcula o volume de uma Prisma qualquer, para tal adotaremos o volume de um paralelepípedo retângulo como axioma dado por $V = c \cdot l \cdot h$, como a área da base deste sólido é dada por $A_b = c \cdot l$, tem-se que o volume é dado pelo produto da área da base pela altura, ou seja, $V = A_b \cdot h$, assim podemos usar o Princípio de Cavalieri para estender esta fórmula para todos os prismas.

4.5.1 Plano de Aula sobre Volume do Prisma

- Público-Alvo – 9º Ano do Ensino Fundamental ou 2º Ano do Ensino Médio.
- Habilidades da BNCC
    - ✓ (EF09MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.
    - ✓ (EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
- Tempo – 2 tempos de 50 minutos
- Objetivo Geral – Conjecturar a fórmula do Volume do Prisma
    - Objetivos Específicos
        - ✓ Relembrar o conceito de Volume de um sólido geométrico;
        - ✓ Relembrar as definições de prisma;
        - ✓ Relembrar a fórmula para calcular o volume de um prisma;
        - ✓ Relembrar o Princípio de Cavalieri.
- Conteúdos
    - ✓ Volume;
    - ✓ Prisma;
    - ✓ Princípio de Cavalieri.

- Recursos Necessários
  - ✓ Projetor Multimídia;
  - ✓ Impressões;
  - ✓ Computadores ou smartphones com o GeoGebra 3D;
  - ✓ Internet para baixar as construções ou pendrive com as construções prontas;
  - ✓ Caneta de Quadro Branco;
  - ✓ Apagador;
  - ✓ Quadro Branco

  .

- Procedimentos/Resumo da Aula

Tabela 9 - Resumo da Aula de Volume do Prisma

Etapas	Objetivo Principal	Ação Principal	Itens da Atividade	Tempo
Construção	Utiliza-se uma construção pronta disponível publicamente na plataforma do GeoGebra	Solicitar que os alunos sigam o passo a passo para abrir a construção.	6	5 min
Concepções Espontâneas	Relembrar os conceitos de Volume de um sólido geométrico, assim como os conceitos de volume de um prisma e princípio de Cavalieri	Solicitar que os alunos escrevam com suas próprias palavras o que eles sabem sobre os tópicos perguntados.	1, 2, 3, 4 e 5	15 min
Perguntas/Hipótese	Estimular a curiosidade quanto à relação, a partir do princípio de Cavalieri, entre o volume de um bloco	Responder a questionamentos de acordo com as construções abordadas.	4, 5 e 11	10 min

	retangular e um prisma de base qualquer.			
Experimento	Interagir com o applet a fim de verificar suas funcionalidades e experimentar as igualdades entre os volumes e as seções transversais.	Usar a geometria dinâmica do software para testas as hipóteses.	7, 8, 9, 10 e 11	50 min
Conclusões	Conjecturar o uma fórmula para o volume de um prisma de base qualquer.	Definir corretamente o volume de um prisma.	12 e 13	20 min

Fonte - O Autor, 2024

- Orientações Pedagógicas

Na fase de construção só é preciso pesquisar a construção que será utilizada, caso os alunos não consigam o professor pode realizar mostrar aos alunos fazendo uma projeção utilizando um projetor multimídia ou na falta deste recurso o professor pode já utilizar a construção pronta que está disponibilizada em no Livro – Atividades Investigativas de Geometria Espacial. A fase de concepções espontâneas servirá para o professor verificar os conceitos que os alunos já tenham ou não tenham definidos, necessitam conhecer as definições de volume, volume de um bloco retangular que será um axioma e o conceito de princípio de Cavalieri para comparar os sólidos, o professor pode propor um debate com todos os alunos a fim de chegar às definições solicitadas, pois estas serão de extrema importância para a conclusão da atividade. Na fase de perguntas/hipóteses os alunos serão questionados sobre as construções e experimentações que realizarão e a partir destas criarão suas hipóteses que deverão ser experimentadas na fase de experimentação. Com todas as experimentações, indagações e hipóteses testadas, os alunos vão aos poucos percebendo as características que devem estar presentes para que os volumes entre os prismas possuam a mesma medida, respeitando as características de terem as mesmas alturas e áreas iguais em suas seções transversais. Caso os alunos tenham dificuldades o professor pode intervir para que o aluno consiga prosseguir na construção do conhecimento ou pode solicitar que um outro aluno que já tenha conseguido auxilie o aluno com dificuldade.

4.5.2 Atividade Investigativa sobre o Volume do Prisma

1) Você sabe explicar o que é o Volume de um sólido geométrico qualquer? Escreva com suas palavras.

2) Você sabe o que é um Prisma? Descreva, com suas palavras, as características de um Prisma de base qualquer.

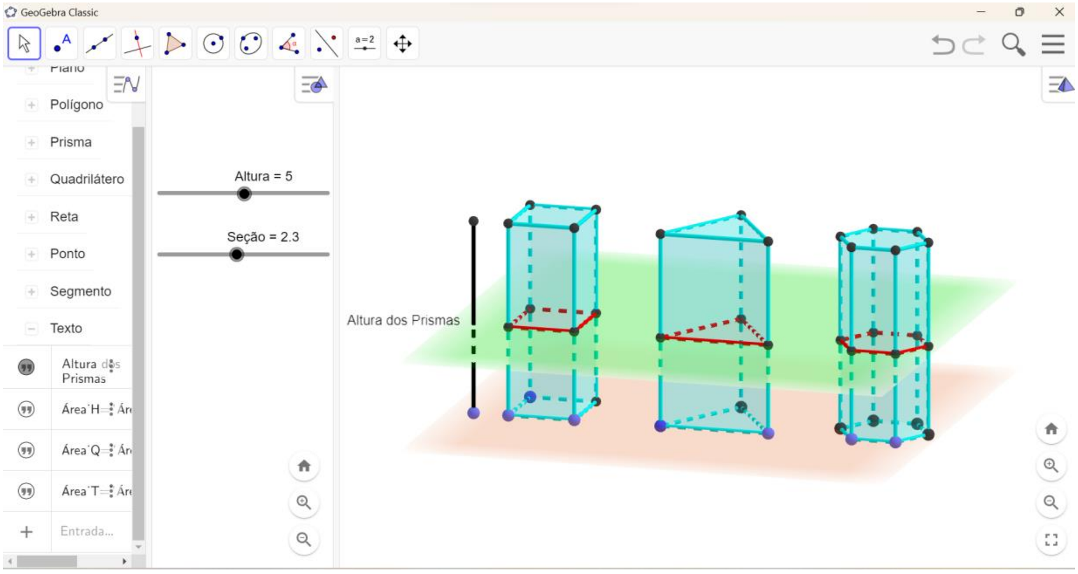
3) Você sabe calcular o Volume de um paralelepípedo retângulo, ou seja, o volume de um bloco retangular? Descreva uma fórmula matemática para realizar tal cálculo.

4) Na equação acima, quando se faz o produto entre o comprimento e a largura, o que de fato estamos calculando? Com base nessa resposta reescreva a fórmula anterior.

5) Você sabe explicar o Princípio de Cavalieri? Escreva com as suas palavras ou peça auxílio ao seu professor.

6) Abra o GeoGebra 3D e em seguida abra o applet intitulado de “Volume do Prisma – Atividade” disponível em https://www.geogebra.org/m/xfvrsaxu. Neste applet estão presentes três prismas de bases quadrangular (paralelepípedo retângulo), triangular e hexagonal, além de dois controles deslizantes denominados “Altura” e “Seção” e mais três textos na janela de álgebra que podem ser exibidos.

Figura 61 - Applet sobre o Volume do Prisma



Fonte - O Autor, 2024

7) Movimente o controle deslizante chamado de “Altura”, qual a sua funcionalidade?

____

____

8) Movimente o controle deslizante chamado “Seção”, qual sua funcionalidade?

____

____

9) Os textos “Área Q”, “Área T” e “Área H” são as áreas das seções transversais vermelhas, clique sobre elas na janela de álgebra para exibi-las. O que você percebe quanto aos seus valores?

____

____

10) Ao movimentar os controles deslizantes, as áreas das seções se alteram?

____

____

11) Clique sobre a janela de visualização 3D, selecione a ferramenta 

e clique sobre cada um dos prismas para calcular seus volumes, o que você percebe sobre esses valores?

____

____

12) Considerando o Princípio de Cavalieri e as respostas das questões 9, 10 e 11, o que você pode concluir quanto aos volumes dos três prismas?

____

____

13) Conjecture uma fórmula matemática para o Volume do Prisma.

____

____

4.6 **Volume do Cilindro**

Nesta atividade iremos explorar através da experimentação como se calcula o volume de um cilindro, para tal adotaremos o cilindro como um prisma cuja quantidade de lados do polígono da base tende ao infinito, percebendo isso conclui-se que o volume de um cilindro é calculado da mesma forma que o volume de um prisma, ou seja, $V = A_b \cdot h$, entretanto no cilindro a base é um círculo, logo $A_b = \pi \cdot r^2$ portanto o volume do cilindro será dado por $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

4.6.1 Plano de Aula sobre o Volume do Cilindro

- Público-Alvo – 9º Ano do Ensino Fundamental ou 2º Ano do Ensino Médio.
- Habilidades da BNCC
  - ✓ (EF09MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.
  - ✓ (EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
- Tempo – 2 tempos de 50 minutos
- Objetivo Geral – Conjecturar a fórmula do Volume do Cilindro

- Objetivos Específicos
  - ✓ Relembrar a área do círculo;
  - ✓ Relembrar o conceito de Volume de um sólido geométrico;
  - ✓ Relembrar as definições de prisma;
  - ✓ Relembrar a fórmula para calcular o volume de um prisma;
  - ✓ Relembrar as definições de Cilindro;

- Conteúdos
  - ✓ Área do Círculo
  - ✓ Volume;
  - ✓ Prisma;
  - ✓ Volume do prisma;
  - ✓ Cilindro;
  - ✓ Volume do Cilindro.

- Recursos Necessários
  - ✓ Projetor Multimídia;
  - ✓ Impressões;
  - ✓ Computadores ou smartphones com o GeoGebra 3D;
  - ✓ Internet para baixar as construções ou pendrive com as construções prontas;
  - ✓ Caneta de Quadro Branco;
  - ✓ Apagador;
  - ✓ Quadro Branco.

- Procedimentos/Resumo da Aula

Tabela 10- Resumo da Aula de Volume do Cilindro

Etapas	Objetivo Principal	Ação Principal	Itens da Atividade	Tempo
Construção	Utiliza-se uma construção pronta disponível publicamente na plataforma do GeoGebra	Solicitar que os alunos sigam o passo a passo para abrir a construção.	8	5 min
Concepções Espontâneas	Relembrar os conceitos de área do círculo,	Solicitar que os alunos escrevam com	1, 2, 3, 6 e 7	15 min

	prismas, volume dos prismas e cilindros.	suas próprias palavras o que eles sabem sobre os tópicos perguntados.		
Perguntas/Hipótese	Estimular a curiosidade quanto à relação entre a forma de um prisma e de um cilindro de acordo com a quantidade de lados do polígono da base do prisma.	Responder a questionamentos de acordo com as construções abordadas.	5, 12, 13 e 14	15 min
Experimento	Interagir com o applet a fim de verificar suas funcionalidades e experimentar a relação entre a quantidade de lados do polígono da base do prisma com a visualização do cilindro.	Usar a geometria dinâmica do software para testas as hipóteses.	9, 10 e 11	50 min
Conclusões	Conjecturar o uma fórmula para o volume de um cilindro.	Definir corretamente o volume de um cilindro.	15, 16 e 17	15 min

Fonte - O Autor, 2024

- Orientações Pedagógicas

Na fase de construção só é preciso pesquisar a construção que será utilizada, caso os alunos não consigam o professor pode realizar mostrar aos alunos fazendo uma projeção utilizando um projetor multimídia ou na falta deste recurso o professor pode já utilizar a construção pronta que está disponibilizada em no Livro – Atividades Investigativas de Geometria Espacial. A fase de concepções espontâneas servirá para o professor verificar os conceitos que os alunos já tenham ou não tenham definidos, necessitam conhecer as definições de volume, volume de um prisma, cilindro e área do círculo, o professor pode propor um debate com todos os alunos a fim de chegar às definições solicitadas, pois estas serão de extrema importância para a conclusão da atividade. Na fase de perguntas/hipóteses os alunos serão questionados sobre as construções e experimentações que realizarão e a partir destas criarão suas hipóteses que deverão ser experimentadas na fase de experimentação. Com todas as experimentações, indagações e hipóteses testadas, os alunos vão aos poucos percebendo que quanto mais se aumenta a quantidade de lados da base do primas, mais este se assemelha a um cilindro, logo o volume do cilindro pode ser calculado da mesma forma que o prisma, com a diferença de que no cilindro a base é um círculo. Caso os alunos tenham dificuldades o professor pode intervir para que o aluno consiga prosseguir na construção do conhecimento ou pode solicitar que um outro aluno que já tenha conseguido auxilie o aluno com dificuldade.

4.6.2 Atividade Investigativa sobre o Volume do Cilindro

1) Você sabe como se calcula a área de um círculo?

   ____

   ____

2) Você sabe explicar o que é o Volume de um sólido geométrico qualquer? Escreva com suas palavras.

   ____

   ____

3) Você sabe o que é um Prisma? Descreva, com suas palavras, as características de um Prisma de base qualquer.

   ____

   ____

4) Você sabe o que é um Cilindro? Descreva, com suas palavras, as características de um Cilindro.

   ____

   ____

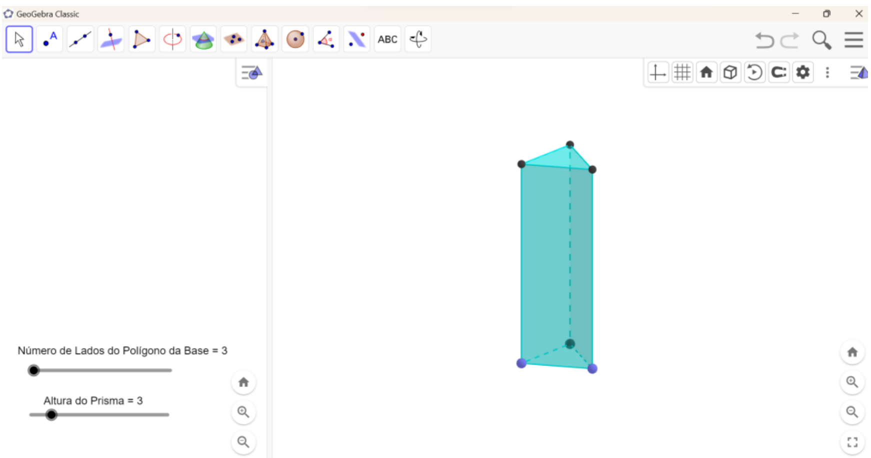
5) Você consegue imaginar alguma relação geométrica entre a forma de um prisma e a forma de um cilindro?

6) Você sabe calcular o Volume de um prisma qualquer? Descreva uma fórmula matemática para realizar tal cálculo.

7) Na equação acima, as bases são sempre que tipo de figuras planas?

8) Abra o GeoGebra 3D e em seguida abra o applet intitulado de "Volume do Cilindro – Atividade" disponível em https://www.geogebra.org/m/pbm9ynge. Neste applet estão presentes um prisma, além de dois controles deslizantes denominados "Número de Lados do Polígono da base" e "Altura do prisma".

Figura 62 - Applet sobre o Volume do Cilindro



Fonte - O Autor, 2024

9) Movimente o controle deslizante chamado de "Número de Lados do Polígono da base", qual a sua funcionalidade?

10) Movimente o controle deslizante chamado "Altura do prisma", qual sua funcionalidade?

11) Aumente gradativamente a quantidade de lados do polígono da base do prisma e responda (caso seja necessário utilize a ferramenta de zoom out ou aumente a altura do prisma):

a) Com 10 lados no polígono da base, você ainda identifica a figura como um prisma?

b) Com 20 lados no polígono da base, você ainda identifica a figura como um prisma?

c) Com 40 lados no polígono da base, você ainda identifica a figura como um prisma?

d) Com 200 lados no polígono da base, você ainda identifica a figura como um prisma?

12) Em alguma das perguntas acima você passou identificar o prisma como um outro sólido geométrico? Qual?

13) E se o número de lado aumentar infinitamente ficará mais ou menos parecido com um cilindro?

14) Podemos pensar no cilindro como um prisma cujo polígono da base possui infinitos lados?

15) A partir das respostas das questões 12, 13 e 14 qual relação existe entre o volume do prisma e o volume do cilindro?

16) Para o prisma a base é um polígono, porém para o cilindro qual é a forma da sua base?

____

____

17) Crie uma fórmula matemática que represente o Volume do Cilindro.

____

____

4.7 **Volume da Pirâmide**

Nesta atividade iremos explorar através da experimentação como se calcula o volume da pirâmide, o aluno será conduzido a percebe que o volume de uma pirâmide é um terço do volume do prisma de mesma base e mesma altura, ou seja, $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$.

4.7.1 <u>Plano de Aula sobre Volume da Pirâmide</u>

- Público-Alvo – 2º Ano do Ensino Médio.
- Habilidades da BNCC - (EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
- Tempo – 2 tempos de 50 minutos
- Objetivo Geral – Conjecturar a fórmula do Volume da Pirâmide
  - Objetivos Específicos
    - ✓ Relembrar o conceito de Volume de um sólido geométrico;
    - ✓ Relembrar as definições de Prisma;
    - ✓ Relembrar as definições de uma Pirâmide;
    - ✓ Relembrar a fórmula para calcular o volume de um prisma.
- Conteúdos
    - ✓ Volume;

- ✓ Prisma;
- ✓ Volume do prisma;
- ✓ Pirâmide;
- ✓ Volume da Pirâmide.

- Recursos Necessários
  - ✓ Projetor Multimídia;
  - ✓ Impressões;
  - ✓ Computadores ou smartphones com o GeoGebra 3D;
  - ✓ Internet para baixar as construções ou pendrive com as construções prontas;
  - ✓ Caneta de Quadro Branco;
  - ✓ Apagador;
  - ✓ Quadro Branco.
- Procedimentos/Resumo da Aula

Tabela 11 - Resumo da Aula de Volume da Pirâmide

Etapas	**Objetivo Principal**	**Ação Principal**	**Itens da Atividade**	**Tempo**
Construção	Utiliza-se uma construção pronta disponível publicamente na plataforma do GeoGebra	Solicitar que os alunos sigam o passo a passo para abrir a construção.	6 e 14	5 min
Concepções Espontâneas	Relembrar os conceitos de prisma e pirâmides e volume dos prismas.	Solicitar que os alunos escrevam com suas próprias palavras o que eles sabem sobre os tópicos perguntados.	1, 2, 3, 4 e 5	15 min
Perguntas/Hipótese	Estimular a curiosidade quanto à relação entre a forma de um prisma e de um cilindro de	Responder a questionamentos de acordo com as construções	10, 12, 13, 16 e 17	15 min

	acordo com a quantidade de lados do polígono da base do prisma.	abordadas.		
Experimento	Interagir com o applet a fim de verificar suas funcionalidades e experimentar a relação entre o volume do prisma e o volume das pirâmides.	Usar a geometria dinâmica do software para testas as hipóteses.	7, 8, 9, 15, 16 e 17	50 min
Conclusões	Conjecturar o uma fórmula para o volume de uma pirâmide.	Definir corretamente o volume de uma pirâmide.	11 e 18	15 min

Fonte - O Autor, 2024

- Orientações Pedagógicas

Na fase de construção só é preciso pesquisar a construção que será utilizada, caso os alunos não consigam o professor pode realizar mostrar aos alunos fazendo uma projeção utilizando um projetor multimídia ou na falta deste recurso o professor pode já utilizar a construção pronta que está disponibilizada em no Livro – Atividades Investigativas de Geometria Espacial. A fase de concepções espontâneas servirá para o professor verificar os conceitos que os alunos já tenham ou não tenham definidos, necessitam conhecer as definições de volume, volume de um prisma e os conceitos de pirâmides, o professor pode propor um debate com todos os alunos a fim de chegar às definições solicitadas, pois estas serão de extrema importância para a conclusão da atividade. Na fase de perguntas/hipóteses os alunos serão questionados sobre as construções e experimentações que realizarão e a partir destas criarão suas hipóteses que deverão ser experimentadas na fase de experimentação. Com todas as experimentações, indagações e hipóteses testadas, os alunos vão aos poucos percebendo que o volume da pirâmide é um terço do volume do prisma de mesma base e mesma altura. Caso os alunos tenham dificuldades o professor pode intervir para que o aluno consiga prosseguir na construção do conhecimento ou pode solicitar que um outro aluno que já tenha conseguido auxilie o aluno com dificuldade.

4.7.2 Atividade Investigativa sobre o Volume da Pirâmide

1) Você sabe explicar o que é o Volume de um sólido geométrico qualquer? Escreva com suas palavras.

____

____

2) Você sabe o que é um Prisma? Descreva, com suas palavras, as características de um Prisma de base qualquer.

____

____

3) Você sabe o que é uma Pirâmide? Descreva, com suas palavras, as características de uma Pirâmide.

____

____

4) Você sabe calcular o Volume de um prisma qualquer? Descreva uma fórmula matemática para realizar tal cálculo.

____

____

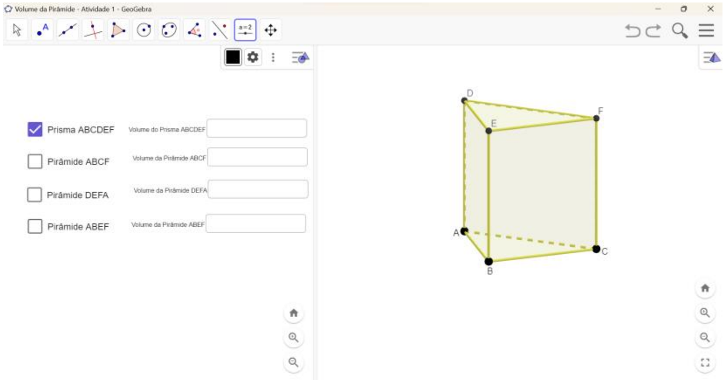
5) Na equação acima, as bases são sempre que tipo de figuras planas?

____

____

6) Abra o GeoGebra 3D e em seguida abra o applet intitulado de “Volume da Pirâmide – Atividade 1” disponível em https://www.geogebra.org/m/tcujetqb. Neste applet estão presentes um prisma triangular, além de quatro caixas de seleção que permitem exibir ou esconder determinados objeto.

Figura 63 - 1º Applet sobre Volume da Pirâmide



Fonte - O Autor, 2024

7) Utilize a ferramenta Volume, clique sobre o prisma para calcular o seu volume. Qual valor você encontrou? Anote no applet do GeoGebra e apague o valor que apareceu na janela de visualização 3D.

8) As outras três caixas de seleção exibirão três pirâmides cujas bases são formadas pelos três primeiros pontos de cada nomenclatura. Clique em cada caixa para exibir as pirâmides, o que você observa quanto ao espaço ocupado pelas pirâmides e o volume do prisma?

9) Utilize a ferramenta Volume, clique sobre cada uma das pirâmides para calcular os seus respectivos volumes. Qual valor você encontrou para cada pirâmide? Anote no applet do GeoGebra e apague o valor que apareceu na janela de visualização 3D.

10) Qual a relação entre os valores dos volumes de cada uma das pirâmides?

11) Qual a relação que existe entre o volume do prisma e o volume das pirâmides?

12) Crie uma hipótese para uma possível fórmula que calcule o volume da pirâmide.

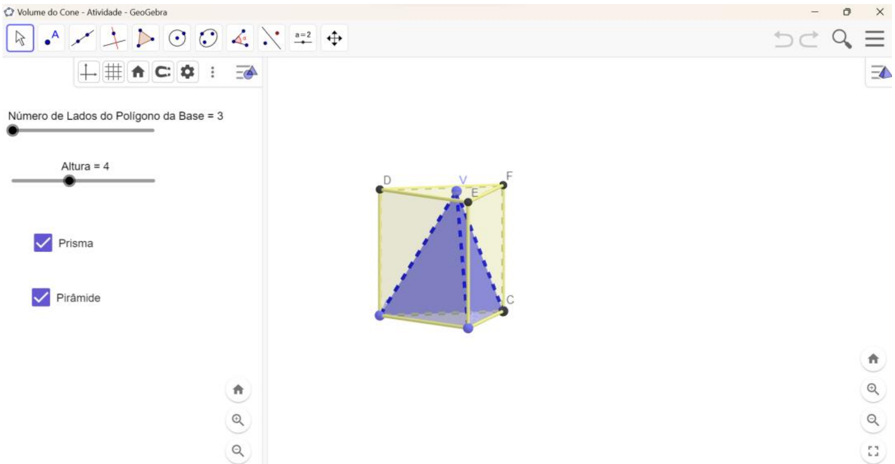
13) Foi utilizado na atividade anterior um prisma triangular, porém você acha que a sua hipótese é validade para qualquer prisma?

____

____

14) Abra o applet intitulado de “Volume da Pirâmide – Atividade 2” disponível em https://www.geogebra.org/m/bvkju5fp. Neste applet estão presentes uma pirâmide no interior de um prisma, ambos com as mesmas bases, dois controles deslizantes (um que indica a quantidade de lados do polígono da base e outro que determina a altura dos sólidos) e duas caixas de seleção que servem para exibir ou esconder os objetos.

Figura 64 - 2º Applet sobre Volume da Pirâmide



Fonte - O Autor, 2024

15) Utilize a ferramenta 

, para calcular o volume do prisma e da pirâmide. Em seguida escolha alguns valores para cada controle deslizante e preencha a tabela abaixo:

Tabela 12 - Relação entre Volume do Prisma e da Pirâmide

Número de Lados do Polígono da Base	**Altura do Prisma e da Pirâmide**	**Volume do Prisma**	**Volume da Pirâmide**

Fonte - O Autor, 2024

16) Com a utilização de uma calculadora, pode-se dizer que a sua hipótese do item 12 é válida para cada um dos seus experimentos?

____

____

17) O vértice da pirâmide pode ser movimentado no interior da base superior do prisma, essa movimentação altera o valor do volume da pirâmide?

____

____

18) Com base nas suas respostas dos itens 12, 16 e 17, explique como calculamos o volume da pirâmide e conjecture uma fórmula para tal finalidade.

____

____

4.8 **Volume do Cone**

Nesta atividade iremos explorar através da experimentação como se calcula o volume de um cone, para tal adotaremos o cone como uma pirâmide cuja quantidade de lados do polígono da base tende ao infinito, percebendo isso conclui-se que o volume de um cone é calculado da mesma forma que o volume de uma pirâmide, ou seja, $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$, entretanto no cone a base é um círculo, logo $A_b = \pi \cdot r^2$ portanto o volume do cone será dado por $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$.

4.8.1 Plano de Aula sobre Volume do Cone

- Público-Alvo –2º Ano do Ensino Médio.
- Habilidades da BNCC - (EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
- Tempo – 2 tempos de 50 minutos.

- Objetivo Geral – Conjecturar a fórmula do Volume do Cone.
  - Objetivos Específicos
    - ✓ Relembrar a área do círculo;
    - ✓ Relembrar o conceito de Volume de um sólido geométrico;
    - ✓ Relembrar as definições de pirâmide;
    - ✓ Relembrar a fórmula para calcular o volume de uma pirâmide;
    - ✓ Relembrar as definições de Cone;
- Conteúdos
    - ✓ Área do Círculo;
    - ✓ Volume;
    - ✓ Pirâmide;
    - ✓ Volume da Pirâmide;
    - ✓ Cone;
    - ✓ Volume do Cone.
- Recursos Necessários
    - ✓ Projetor Multimídia;
    - ✓ Impressões;
    - ✓ Computadores ou smartphones com o GeoGebra 3D;
    - ✓ Internet para baixar as construções ou pendrive com as construções prontas;
    - ✓ Caneta de Quadro Branco;
    - ✓ Apagador;
    - ✓ Quadro Branco.

- Procedimentos/Resumo da Aula

Tabela 13 - Resumo da Aula de Volume do Cone

Etapas	Objetivo Principal	Ação Principal	Itens da Atividade	Tempo
Construção	Utiliza-se uma construção pronta disponível publicamente na plataforma do	Solicitar que os alunos sigam o passo a passo para abrir a construção.	8	5 min

	GeoGebra			
Concepções Espontâneas	Relembrar os conceitos de área do círculo, pirâmide, volume de uma pirâmide e cones.	Solicitar que os alunos escrevam com suas próprias palavras o que eles sabem sobre os tópicos perguntados.	1, 2, 3, 6 e 7	15 min
Perguntas/Hipótese	Estimular a curiosidade quanto à relação entre a forma de uma pirâmide e de um cone de acordo com a quantidade de lados do polígono da base da pirâmide.	Responder a questionamentos de acordo com as construções abordadas.	5, 12, 13 e 14	15 min
Experimento	Interagir com o applet a fim de verificar suas funcionalidades e experimentar a relação entre a quantidade de lados do polígono da base da pirâmide com a visualização do cone.	Usar a geometria dinâmica do software para testas as hipóteses.	9, 10 e 11	50 min
Conclusões	Conjecturar o uma fórmula para o volume de um cone.	Definir corretamente o volume de um cone.	15, 16 e 17	15 min

Fonte - O Autor, 2024

- Orientações Pedagógicas

Na fase de construção só é preciso pesquisar a construção que será utilizada, caso os alunos não consigam o professor pode realizar mostrar aos alunos fazendo uma projeção utilizando um projetor multimídia ou na falta deste recurso o professor pode já utilizar a construção pronta que está disponibilizada em no Livro – Atividades Investigativas de Geometria Espacial. A fase de concepções espontâneas servirá para o professor verificar os conceitos que os alunos já tenham ou não tenham definidos, necessitam conhecer as definições de volume, volume de uma pirâmide, cone e área do círculo, o professor pode propor um debate com todos os alunos a fim de chegar às definições solicitadas, pois estas serão de extrema importância para a conclusão da atividade. Na fase de perguntas/hipóteses os alunos serão questionados sobre as construções e experimentações que realizarão e a partir destas criarão suas hipóteses que deverão ser experimentadas na fase de experimentação. Com todas as experimentações, indagações e hipóteses testadas, os alunos vão aos poucos percebendo que quanto mais se aumenta a quantidade de lados da base da pirâmide, mais esta se assemelha a um cone, logo o volume do cone pode ser calculado da mesma forma que a pirâmide, com a diferença de que no cone a base é um círculo. Caso os alunos tenham dificuldades o professor pode intervir para que o aluno consiga prosseguir na construção do conhecimento ou pode solicitar que um outro aluno que já tenha conseguido auxilie o aluno com dificuldade.

4.8.2 Atividade Investigativa sobre o Volume do Cone

1) Você sabe como se calcula a área de um círculo?

   ____

   ____

2) Você sabe explicar o que é o Volume de um sólido geométrico qualquer? Escreva com suas palavras.

   ____

   ____

3) Você sabe o que é uma Pirâmide? Descreva, com suas palavras, as características de uma Pirâmide de base qualquer.

   ____

   ____

4) Você sabe o que é um Cone? Descreva, com suas palavras, as características de um Cone.

   ____

   ____

5) Você consegue imaginar alguma relação geométrica entre a forma de uma Pirâmide e a forma de um Cone?

____

____

6) Você sabe calcular o Volume de uma pirâmide qualquer? Descreva uma fórmula matemática para realizar tal cálculo.

____

____

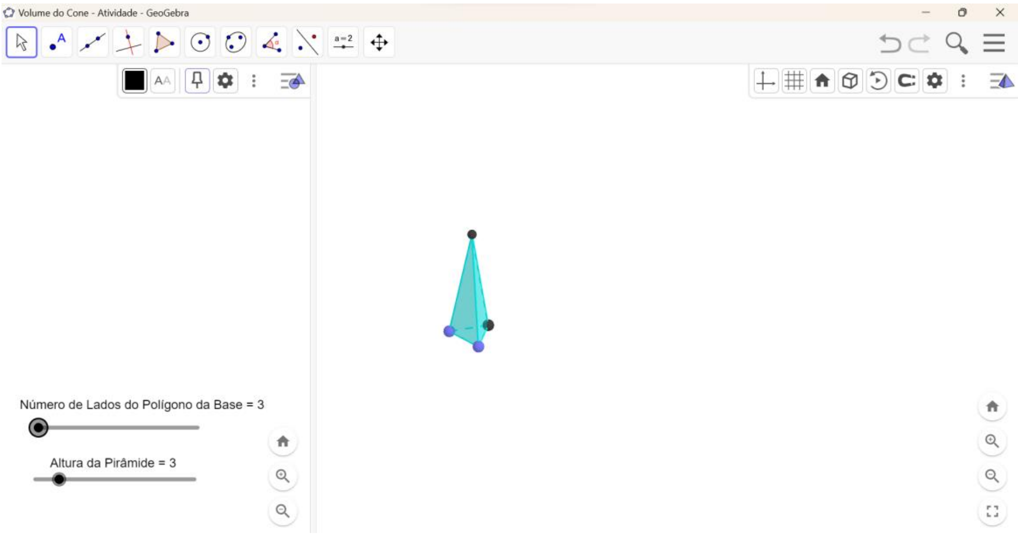
7) Na equação acima, as bases são sempre que tipo de figuras planas?

____

____

8) Abra o GeoGebra 3D e em seguida abra o applet intitulado de "Volume do Cilindro – Atividade" disponível em https://www.geogebra.org/m/nm5rpv6p. Neste applet estão presentes uma pirâmide, além de dois controles deslizantes denominados "Número de Lados do Polígono da base" e "Altura da pirâmide".

Figura 65 - Applet sobre Volume do Cone



Fonte - O Autor, 2024

9) Movimente o controle deslizante chamado de "Número de Lados do Polígono da base", qual a sua funcionalidade?

____

____

10) Movimente o controle deslizante chamado "Altura da Pirâmide", qual sua funcionalidade?

11) Aumente gradativamente a quantidade de lados do polígono da base da pirâmide e responda (caso seja necessário utilize a ferramenta de zoom out ou aumente a altura do prisma):

a) Com 10 lados no polígono da base, você ainda identifica a figura como uma pirâmide?

b) Com 20 lados no polígono da base, você ainda identifica a figura como uma pirâmide?

c) Com 40 lados no polígono da base, você ainda identifica a figura como uma pirâmide?

d) Com 200 lados no polígono da base, você ainda identifica a figura como uma pirâmide?

12) Em alguma das perguntas acima você passou identificar a pirâmide como um outro sólido geométrico? Qual?

13) E se o número de lado aumentar infinitamente ficará mais ou menos parecido com um cone?

14) Podemos pensar no cone como uma pirâmide cujo polígono da base possui infinitos lados?

15) A partir das respostas das questões 12, 13 e 14 qual relação existe entre o volume da pirâmide e o volume do cone?

16) Para a pirâmide a base é um polígono, porém para o cone qual é a forma da sua base?

____

____

17) Crie uma fórmula matemática que represente o Volume do Cone.

____

____

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Dentre as 10 competências gerais da Educação Básica presente na BNCC duas foram norteadoras deste trabalho, enquanto a primeira delas fala sobre o exercício da curiosidade intelectual a partir de processos investigativos e reflexivos que busquem analisar situações e causas, assim como a elaboração e testagem de hipóteses a fim de que o aluno seja capaz de formular e criar soluções, a segunda fala sobre que o aluno seja capaz de compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de uma forma mais crítica, tornando-as, cada vez mais presentes, nas práticas escolares com o objetivo de produzir conhecimento.

A BNCC ainda possui alguns papéis complementares que asseguram as aprendizagens essenciais na Educação Básica, entretanto para alcançar essas, algumas decisões/ações devem ser tomadas no percurso, como por exemplo aplicar metodologias e estratégias diversificas no processo educacional, que sejam motivadoras e engajadoras quanto ao processo de ensino e aprendizagem, assim o professor pode partir da produção, seleção, aplicação e avaliação de recursos didáticos e tecnológicos que auxiliem no desenvolvimento do aluno.

A partir do exposto no documento supracitado, fica claro que o professor deve procurar maneiras para reduzir o trinômio escolar (definição, exemplo e exercício) a partir de conhecimento meramente transmissivo, corroborando com isso Borba e Penteado, citado por Cruz (2012, p.9), afirma a metodologia do ensino em Matemática está em um processo transitório do tradicional (oral, escrita, lápis, papel e giz) para utilização de metodologia mais tecnológicas e consequentemente mais ativas. Assim nota-se a importância da implementação da Metodologias Ativas que, de acordo com Oliveira, Oliveira e Santos (2021), permitem que os alunos atuem como protagonistas, sendo o professor o responsável por estimular que os alunos pensem de maneira autônoma, logo o professor deixa de um simples transmissor e ao colocar o aluno no centro do processo de ensino e aprendizagem torna-se mais viável a autorregularão da aprendizagem o que incentivará a construção do conhecimento.

A BNCC discorre sobre a importância do ensino da Geometria Plana e Espacial nos Ensinos Fundamental e Médio, entretanto tanto professores como alunos ainda apresentam dificuldades de representação e visualização 3D de objetos espaciais, principalmente pelo modelo mais tradicional empregado por muitos professores, porém foi citado acima que existe um processo de transição e que tais mudanças estão em plena consonância com o que é proposto e estabelecido nas competências exigidas pela BNCC, entretanto a utilização das TDICs requerem alguns cuidados, pois:

> O uso da tecnologia no ensino de Matemática necessita do comprometimento de professores, coordenadores diretores e do próprio aluno, pois apesar de terem funções diferentes no processo de ensino e aprendizagem, todos devem repensar a forma de ensinar e de aprender. O uso da tecnologia deve favorecer o desenvolvimento do aluno como cidadão participativo crítico para lidar com as novas tecnologias dentro e fora do ambiente escolar." (Cruz, 2012, p.11).

São vários os recursos tecnológicos que podem estar presentes em uma sala de aula, um destes são os smartphones, apesar de ocasionalmente serem motivo conflitos entre professores e alunos, é completamente possível utilizá-los em sala de aula como instrumentos que auxiliem o processo de ensino e aprendizagem, até a calculadora pode ser usada como ferramenta de um processo investigativo. Quanto à Geometria Espacial é possível utilizar o aplicativo Calculadora Gráfica 3D do GeoGebra para realizar as atividades investigativas propostas neste trabalho, permitindo assim, segundo Silva (2009), que o aluno obtenha uma aprendizagem mais lúdico, atrativo e autônoma, motivando a sua curiosidade a partir da investigação, pois boa parte dos alunos já estão inseridos no mundo tecnológico.

Esse trabalho visou fornecer material pedagógico baseado na utilização de uma TDICs, através de processos de aprendizagem baseados na investigação e resolução de problemas no que consta a alguns tópicos de Geometria Espacial para os professores que podem ser utilizados em diversos momentos da vida escolar do aluno, entretanto o professor pode adaptar as atividades ou planos de aula de acordo com as especificações de sua comunidade escola, as atividades propostas vão desde os conteúdos mais básicos até no auxílio das resoluções das questões do Enem. As atividades aqui propostas seguem os passos de uma investigação científica onde é seguido o Meta-Modelo de ABI proposto por Valente, Baranauska e Martins (2014), ou seja, primeiro verifica-se as concepções espontâneas dos alunos com o objetivo de verificar os conceitos e conhecimentos que serão pré-requisitos para o desenvolvimento da atividade, caso os alunos não os tenham, o professor pode fazer uma aula com os conceitos básicos necessários. Em seguida são feitas algumas Perguntas que nortearão o raciocínio dos alunos, onde eles também serão induzidos a criarem suas próprias perguntas norteadoras a respeito da situação/realidade analisada, para consequentemente começarem a elaborar as possíveis Hipóteses que são as respostas das Perguntas e por meio da Experimentação e da utilização da geometria dinâmica os alunos poderão examinar e analisar a situação estudada a fim de conjecturar as hipóteses ou até mesmo mostrar que elas estão erradas para em seguida buscar novas e testá-las.

A utilização desse modelo é capaz de trazer algumas vantagens como uma maior motivação do aluno, assim como um maior interesse e um método de aprendizado mais próximo da sua realidade tecnológica.

Entretanto, nem todas as escolas ou nem todos os professores podem possuir os meios e os recursos necessários para a utilização de tais atividades, assim alguns desafios podem ocorrer durante esse processo, como por exemplo:

- Os alunos não têm um smartphones ou têm, porém possuem limitações de hardware e software, o que não permitirá a utilização do aplicativo. Caso o professor se depare com este cenário é sugerido realizar atividades em grupos, colocando pelo menos um aparelho compatível com a tecnologia por grupo;
- Falta de capacitação do professor no que consta à utilização de algumas tecnologias, para reduzir esse cenário o professor pode procurar cursos de capacitação para conhecer diversas ferramentas educacionais tecnológicas;
- Limitações do GeoGebra 3D, ele não é perfeito e em alguns casos podem levar os alunos a conjecturas erradas, para este cenário é sugerido que o professor explore a construção, verifique as limitações e quando acontecerem, relacione-as com os conceitos matemáticos, fazendo com que o aluno entenda as divergências;

Portanto, dentro da área de Matemática e suas tecnologias, são diversas opções tecnológicas existentes, algumas aqui citadas na seção 1.2.2, logo o professor deve usar, sempre que possível, as TDICs, pois estas trazem várias vantagens educacionais, que superam as desvantagens, e podem ser utilizadas em todas as etapas da vida escolar do aluno. Porém para tornar o processo de ensino e aprendizagem mais completos para o aluno, sugere-se que tal uso seja concomitantemente com o uso de alguma Metodologia Ativa, assim o professor fornecerá recursos e meios de investigação, para que seja possível a criação de hipóteses e o estabelecimento de conjecturas por parte dos alunos. Dessa forma, o professor terá o seu processo de ensino e aprendizagem em consonância com o que é proposto pela BNCC, permitindo que a aprendizagem seja mais eficiente, eficaz, autônoma e tecnológica.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, F. S. *Tecnologias na Educação Matemática: o uso do GeoGebra como ferramenta pedagógica no ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio*. 2023. 105f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, 2023. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6973&id2=171056901. Acesso em: 21 nov. 2023.

ALBUQUERQUE, G. G.; SANTOS, R. F.; GIANNELLA, T. R. Aprendizagem Baseada em Investigação integrada às tecnologias digitais de informação e comunicação no ensino de Ciências: uma revisão da literatura. *In*: *XI ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS – XI ENPEC*, 11., 2017. Florianópolis: UFSC, 2017. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/345692086_Aprendizagem_Baseada_em_Investigacao_integrada_as_TecnologiasDigitais_de_Informacao_e_Comunicacao_no_Ensino_de_Ciencias_uma_revisao_da_literatura_Inquiry_Based_Learning_integrated_to_Digital_Informat. Acesso em: 15 ago. 2023.

ALVES, G. S.; SOARES, A. B. Geometria Dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do software Tabulae. *In*: *IX WORKSHOP EM INFORMÁTICA NA ESCOLA*, 9., 2003. São Paulo: USP. 2003. Disponível em: http://milanesa.ime.usp.br/rbie/index.php/wie/article/download/786/772. Acesso em: 21 nov. 2023.

BARBOSA, P. M. O Estudo da Geometria. *In*: *BENJAMIN CONSTANT*, 25., 2003 Rio de Janeiro: IBC. 2003. Disponível em: https://revista.ibc.gov.br/index.php/BC/article/view/546/261 . Acesso em: 08 ago. 2023.

BARANAUSKAS, M. C. C e MARTINS, M. C. *ABInv Aprendizagem Baseada na Investigação:* A Metodologia. Disponível em: https://www.nied.unicamp.br/wp-content/uploads/other-files/livro-abinv.pdf. Acesso em 03 nov. 2023.

BELL, S. et al. *Collaborative inquiry learning: models, tools, and challenges. International Journal of Science Education*, p. 349-377. 2010 Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/48666917_Collaborative_Inquiry_Learning_Models_Tools_and_Challenges. Acesso em: 04 ago. 2023.

BONIZÁRIO, A. N. S. et al. O impacto das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) na Educação: uma análise sistemática. *REVISTA FT*, 125., 2023. Disponível em: https://revistaft.com.br/o-impacto-das-tecnologias-da-informacao-e-comunicacao-tic-na-educacao-uma-analise-sistematica/. Acesso em: 21 nov. 2023.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001 apud CRUZ, F. C. S. *O Uso de Tecnologias no Ensino de Matemática.* Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2012. Disponível em: https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/o-uso-de-tecnologias-noensino -de-matematica---flaviani.pdf. Acesso em: 11 fev. 2024.

BRASIL. Ministério da educação e cultura. *Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica*. Brasília: MEC, 2013. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/junho-2013-pdf/13448-diretrizes-curiculares-nacionais-2013-pdf. Acesso em: 20 abr. 2023.

BRASIL. Ministério da educação e cultura. *Parâmetros curriculares nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental*. Brasília: MEC, 1988. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 20 abr. 2023.

BRASIL. Ministério da educação e cultura. *Parâmetros curriculares nacionais: Ensino médio. Ciência da natureza, matemática e tecnologia*. Brasília: MEC, 2002. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 19 abr. 2023.

BRASIL. Ministério da educação e cultura. *Parâmetros curriculares nacionais: Ensino médio. Volume 2: Ciência da natureza, matemática e tecnologia*. Brasília: MEC, 2006, p. 75, 76. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em: 20 abr. 2023.

BRASIL. Ministério da educação e cultura. *Base Nacional Curricular Comum: Educação é a Base*. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br /images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 20 abr. 2023.

CARNEIRO, A. P.; FIGUEIREDO, I. S. S.; LADEIRA, T. A. A importância das tecnologias digitais na Educação e seus desafios. *REVISTA DA EDUCAÇÃO PÚBLICA*, v. 20. 2020. Disponível em: https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/20/35/joseph-a-importancia-das-tecnologias-digitais-na-educacao-e-seus-desafios-a-educacao-na-era-da-informacao-edaci ber cultura. Acesso em 21 nov. 2023.

CHAVES, J. *Geometria Espacial no Ensino Fundamental:* uma reflexão sobre as propostas metodológicas. 2013. 88 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2013. Disponível em: https://www.locus.ufv.br/handle/ 123456789/5879. Acesso em: 20 set. 2023.

COSTA, A. C.; BERMEJO, A. P. B.; MORAES, M. S. F. Análise do Ensino de Geometria Espacial. *X ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 10., 2009. Ijuí: UNIJUÍ, 2009. Disponível em: http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscom mand/CC/CC_49.pdf. Acesso em: 20 abr. 2023.

CRUZ, F. C. S. *O Uso de Tecnologias no Ensino de Matemática*. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2012. Disponível em: https:// www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/o-uso-de-tecnologias-noensino-dematematica---flaviani.pdf. Acesso em: 24 fev. 2024.

DANTE, L. R. *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*, 12 ed. São Paulo: Editora Ática, 2010. 176p. apud MARIN, D. e ARAÚJO, L. G. Metodologia do Ensino de Matemática. Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia, 2016. Disponível em: https://www. unifucamp.edu.br/wp-content/uploads/2020/07/metodologia-do-ensino-de-matematica-FUN-TEORICOS-E-PRATICOS-2020.pdf. Acesso em 20 ago. 2023.

FISCHBEIN, E. The theory of figural concepts. Educational Studies in Mathematics. 1993. apud GRAVINA, M.A. Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado de geometria. In: *SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO*, 7., 1996, Belo Horizonte, 1996. Disponível em: https://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri2014/ pdf/maria-alice_geometria-dinamica1996 -vii_sbie.pdf. Acesso em: 21 abr. 2023.

FILHO, Z. A. Demonstração do Teorema de Euler Para Poliedros Convexos. *REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA*, 3., 1983. Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm /3/5.htm. Acesso em 14 nov. 2023.

FRÓES, J. R. M. *Educação e Informática: A Relação Homem/Máquina e a Questão da Cognição*. Disponível em: http://edu3051.pbworks.com/f/foes+cognicao_aula2.PDF. Acesso em: 20 dez. 2023.

GOLDENBERG, E. P.; CUOCO, A. A. *What is dynamic geometry?* apud LOPES, M. M. *Sequência Didática para o Ensino de Trigonometria Usando o Software GeoGebra. In*. BOLEMA, v. 27, n. 46., 2013, Rio Claro, SP, 2013. Disponível em: https://www. periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/8265/5839. Acesso em 11 nov. 2023.

GOUVÊA, S. F. *Os caminhos do professor na Era da Tecnologia*. REVISTA DE EDUCAÇÃO E INFORMÁTICA, 13., 1999 apud OLIVEIRA, E. D. Tecnologia e Educação. *In*. XI ENCONTRO DE PESQUISADORES DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO: CURRÍCULO, 11., 2013. São Paulo: PUC-SP. Disponível em: https:/ /www4.pucsp.br/webcurriculo/edicoes_anteriores/encontro-pesquisadores/2013/downloads/anais_encontro_2013/oral/elda_damasio_de_oliveira.pdf. Acesso em 15 ago. 2023.

GRAVINA, M. A. Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado de geometria. *In*: *SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO*, 7., 1996, Belo Horizonte. Anais... Belo Horizonte, 1996. Disponível em: https://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri2014/pdf/maria-alice_geometria-dinamica199 6-vii_sbie.pdf. Acesso em: 21 abr. 2023.

HELLE, L.; TYNJÄlÄ, P.; OLKINUORA, E. *Project-based learning in post-secondary education-Theory, practice, and rubber sling shots*. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/226593203_Project-Based_Learning_in_Post-Secondary_Education_-_Theory_Practice_and_Rubber_Sling_Shots. Acesso em: 04 ago. 2023.

HMELO, C. E. *Problem-based learning: What and how do students learn? Educational Psychology Review*. 2004. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1023/B:EDPR.0000034022.16470.f3. Acesso em 04 ago. 2023.

HUNG, W. (2009). *Problem-Based Learning: A Learning Environment for Enhancing Learning Transfer. New Directions for Teaching and Learning*, 2009. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/264647031_Problem-Based_Learning_A_Learning_Environment_for_Enhancing_Learning_Transfer. Acesso em: 04 ago. 2023.

JOHNSON, D. W.; JOHNSON, R. T. e SMITH, K. A. *Cooperative Learning: Improving University Instruction by Basing Practice on Validated Theory*. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/284471328_Cooperative_Learning_Improving_university_instruction_by_basing_practice_on_validated_theory. Aceso em: 04 ago. 2023.

JORDÃO, T. C. Formação de educadores: a formação do professor para a educação em um mundo digital. *In*. *TECNOLOGIAS DIGITAIS NA EDUCAÇÃO*, 19,. 2009. Brasília: MEC, 2009. Disponível em: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000012178. pdf. Acesso em: 21 abr. 2023

KENSKI, V. M. *Educação e tecnologias*: o novo ritmo da informação. 11. ed. Campinas: Papirus, 2007.

LOPES, R. M.; FILHO, M. V. S. e ALVES, N. D. *Aprendizagem baseada em problemas: Fundamentos para a aplicação no ensino médio e na formação de professores.* Rio de Janeiro: PUBLIKI, 2019. Disponível em: https://educapes.capes.gov.br/handle/capes/432641. Acesso em: 11 fev. 2024.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio:* Volume 2. 6. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, M. F.; ARAÚJO, J. F. S. A utilização das tecnologias de informação e comunicação como recurso didático-pedagógico no processo de ensino e aprendizagem. *REVISTA EDUCAÇÃO PÚBLICA*, v. 21, n. 23,. 2021. Rio de Janeiro: CECIERJ. Disponível em: https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/21/23/a-utilizacao-das-tecnologias-de-informacao-e-comunicacao-como-recurso-didatico-pedagogico-no-processo-de-ensino-prendizagem. Acesso em 21: nov. 2023.

LUCKESI, C. C. *Subsídios Para a Organização do Trabalho Docente*. São Paulo: FDE, 1991. Disponível em: http://www.crmariocovas.sp.gov.br/amb_a.php?t=017. Acesso em: 11 fev. 2024.

LUZ, B. W. S.; SABIÃO, R. M. A evolução no ensino da matemática e a importância de se conhecer sua história. *In*. *REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR NÚCLEO DO CONHECIMENTO*. 8,.2019. ISSN: 2448-0959. Disponível em: https://www.nucleodo conhecimento.com.br/educacao/ensino-da-matematica. Acesso em: 04 ago. 2023.

MAIA, L. E. O.; GONDIM, R. S.; VASCONCELOS, F. H. L. Utilização do GeoGebra para o ensino de geometria: uma revisão sistemática de literatura. *In*. *ENSINO DA MATEMÁTICA EM DEBATE*, v. 10, n. 1. 2023. DOI: 10.23925/2358-4122.2023v10i60031. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/60031. Acesso em: 21 nov. 2023.

MAMEDE, S.; PENAFORTE, J. C. *Aprendizagem Baseada em Problemas*: anatomia de uma nova abordagem educacional. Fortaleza: Hucitec, 2001 apud GENTIL, R. M.; FURLANETTO, E. C. *Aprendizagem Baseada em Problemas:* Educação e Saúde numa Tessitura Interdisciplinar. *In*. X CONGRESSO INTERNACIONAL GALEGO PORTUGUÊS DE PSICOPEDAGOGIA, 9,. 2009. Braga: Universidade do Minho, 2009. Disponível em: https://lagarto.ufs.br/uploads/content_attach/path/11326/abp_numa_tessitura_interdisciplinar_0.pdf. Acesso em: 21 nov. 2023.

MARIN, D.; ARAÚJO, L. G. *Metodologia do Ensino de Matemática*. Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/25239/1/Metodologia%20do%20Ensino%20de%20Matematica.pdf. Acesso em: 13 out. 2023.

OLIVEIRA, C. R.; OLIVEIRA, G.S.; SANTOS, A. O. Metodologias Ativas e o Ensino de Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *REVISTA VALORE*, 6., 2021. DOI: https://doi.org/10.22408/reva602021103640-54. Disponível em: https://revistavalore.emnuv ens.com.br/valore/article/view/1036/823. Acesso em 11 fev. 2024.

PEDASTE, M. et al. *Phases of inquiry-based learning: Definitions and the inquiry cycle*. EDUCATIONAL RESEARCH REVIEW, 14., 2015 apud ALBUQUERQUE, G. G.; SANTOS, R. F.; GIANNELLA, T. R. *Aprendizagem Baseada em Investigação integrada às tecnologias digitais de informação e comunicação no ensino de Ciências: uma revisão da literatura*. *In*: XI ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS – XI ENPEC, 11., 2017. Florianópolis: UFSC, 2017. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/345692086_AprendizagemBaseada_em_Investigacao_integrada_as_TecnologiasDigitais_de_Informacao_e_Comunicacao_no_Ensino_de_Ciencias_uma_revisao_da_literatura_Inquiry_Based_Learning_integrated_toDigital_Informat. Acesso em: 15 ago. 2023.

POLYA, G. *A arte de Resolver Problemas*. 1978 apud MARIN, D.; ARAÚJO, L. G. Metodologia do Ensino de Matemática. Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/25239/1/Metodologia%20do %20Ensino%20de%20Matematica.pdf. Acesso em: 13 out. 2023.

PRENSKY, M. *Digital Natives, Digital Immigrants*. 2001. Disponível em: http://www.marcprensky.com/writing/. Acesso em: 10 out. 2009.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. *Tópicos de História da Matemática*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2019.

SAVERY, J. R; DUFFY, T. M. *Problem-based learning: An instructional model and its constructivist framework. Educational Technology*. 1995. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/44428296. Acesso em: 13 out. 2023.

SILVA, A. S. *O Teorema de Euler e Alguma Aplicações*. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologias: Departamento de Matemática, Universidade Estadual da Paraíba, Campo Grande – PB. 2015. Disponível em: http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/8607/1/PDF%20%20Ataiz%20Souza%20Silva.pdf. Acesso em: 11 nov. 2023.

SILVA, F. I. C. *Explorando a função Quadrática com o software GeoGebra numa turma do 10º Ano.* Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade da Madeira, Funchal. 2009. Disponível em: https://digituma.uma.pt/handle/10400.13/56. Acesso em: 11 nov. 2023.

SILVA, M. C. L. *Teorema de Tales: uma engenharia didática utilizando o CabriGéomètre*. 1997. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 1997. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11369. Acesso em: 15 nov. 2023.

VALENTE, J. A.; BARANAUSKA, M. C. C; MARTINS, M. C. *ABInv - Aprendizagem Baseada na Investigação*. Campinas: Unicamp/NIED, 2014.1. Disponível em: https://www.nied.unicamp.br/wp-content/uploads/other-files/livro-abinv.pdf. Acesso em: 04 ago. 2023.

VIDALETTI, V. B. B. *Ensino e Aprendizagem da Geometria Espacial a Partir da Manipulação de Sólidos*. Dissertação (Mestrado Profissionalizante no Ensino de Ciências Exatas) – Centro Universitário Univates, Lajeado, 2009. Disponível em: https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/115212/000963525.pdf?sequence=1. Acesso em: 17 abr. 2023.

APÊNDICE A - 1º Postulado da Existência

Nesta atividade iremos explorar através da experimentação o 1º postulado da existência, queremos concluir que em uma reta e fora dela existem infinitos pontos.

❖ Plano de Aula

- Habilidades da BNCC – Não existe uma habilidade da BNCC que trate especificamente dos postulados da geometria espacial.
- Tempo – 1 tempo de 50 minutos.
- Objetivo Geral – Compreender o 1º Postulado da Existência.
  - Objetivos Específicos
    - ✓ Identificar que dois pontos determinam uma única reta;
    - ✓ Identificar que existem infinitos pontos pertencentes a uma reta;
    - ✓ Identificar que existem infinitos pontos que não pertencem a reta.
- Conteúdos
    - ✓ Conceito de Reta;
    - ✓ 1º Postulado da Existência
- Recursos Necessários
    - ✓ Projetor Multimídia;
    - ✓ Impressões;
    - ✓ Computadores ou smartphones com o GeoGebra 3D;
    - ✓ Internet para baixar as construções ou pendrive com as construções prontas;
    - ✓ Caneta de Quadro Branco;
    - ✓ Apagador;
    - ✓ Quadro Branco.
- Procedimentos/Resumo da Aula

Tabela 14 - Resumo da aula sobre 1º Postulado da Existência.

Atividades	Objetivo Principal	Ação Principal	Itens da Atividade	Tempo
Construção	Realizar a construção da situação a ser	Solicitar que os alunos sigam o passo a passo da	1, 2 e 3	5 min

	investigada.	construção.		
Concepções Espontâneas	Relembrar a definição de Reta.	Solicitar que os alunos escrevam com suas próprias palavras o que eles sabem sobre os tópicos perguntados.	3a) e 3b)	10 min
Perguntas/ Hipóteses	Estimular a curiosidade quanto à quantidade de pontos pertencentes e não pertencentes à Reta.	Responder a questionamentos de acordo com as construções abordadas.	4c), 4d)	10 min
Experimento	Experimentar a quantidade de pontos pertencentes e não pertencentes ao plano	Usar a geometria dinâmica do software para testas as hipóteses.	4 e 5	10 min
Conclusões	Conjecturar o 1º Postulado da Existência	Definir corretamente o 1º Postulado da Existência	4e), 5f) e 5g)	15 min

Fonte - O Autor, 2023.

- Orientações Pedagógicas

Na fase de construção os alunos devem seguir o passo a passo para realizar a construção da reta, caso os alunos não estejam familiarizados com o GeoGebra 3D o professor pode realizar a construção junto com os alunos fazendo-a com uma projeção utilizando um projetor multimídia ou na falta deste recurso o professor pode já utilizar a construção pronta que está disponibilizada em no Livro – Atividades Investigativa de Geometria Espacial. A fase de concepções espontâneas servirá para o professor verificar se os alunos possuem os conceitos euclidianos sobre a reta, o professor pode propor um debate com todos os alunos a fim de chegar às definições solicitadas, pois estas serão de extrema importância para a conclusão da atividade. Na fase de perguntas/hipóteses os alunos serão questionados sobre as construções e experimentações que realizarão e a partir destas criarão suas hipóteses que deverão ser experimentadas na fase de experimentação. Com todas as experimentações, indagações e hipóteses testadas, os alunos vão aos poucos conjecturando a que existem infinitos pontos que pertencem à reta e infinitos pontos que não pertencem à reta. Caso os alunos tenham dificuldades o professor pode intervir para que o aluno consiga prosseguir na construção do conhecimento ou pode solicitar que um outro aluno que já tenha conseguido auxilie o aluno com dificuldade.

❖ Atividade Investigativa sobre o 1º Postulado da Existência

1) Abra o GeoGebra 3D;
2) Construa dois pontos A e B quaisquer no espaço;
3) Utilize a ferramenta Reta e trace a reta $\overleftrightarrow{AB}$;

a) Você sabe explicar o que é uma reta? Escreva com as suas palavras.

b) Quantas retas são possíveis de serem construídas e que passam pelos pontos A e B?

4) Utilize a ferramenta Ponto e marque o máximo de pontos que conseguir sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$.

c) Quantos pontos você conseguiu marcar sobre a reta?

d) Ao utilizar as ferramentas Ampliar e Reduzir, você consegue marcar mais pontos?

e) Quantos pontos você consegue marcar sobre a reta?

5) Utilize a ferramenta Ponto e marque o máximo de pontos que conseguir fora da reta $\overleftrightarrow{AB}$.

f) Quanto pontos você consegue marcar fora da reta $\overleftrightarrow{AB}$?

g) A partir das respostas dadas nas letras (e) e (f), o que você pode concluir? Escreva com suas palavras.

APÊNDICE B - 2º Postulado da Existência

Nesta atividade iremos explorar através da experimentação o 2º postulado da existência, queremos concluir que em um plano e fora dele existem infinitos pontos.

❖ Plano de Aula

- Habilidades da BNCC – Não existe uma habilidade da BNCC que trate especificamente dos postulados da geometria espacial.
- Tempo – 1 tempo de 50 minutos
- Objetivo Geral – Compreender o 2º Postulado da Existência.
    - Objetivos Específicos
        - ✓ Identificar que três pontos determinam um único plano;
        - ✓ Identificar que existem infinitos pontos pertencentes a um plano;
        - ✓ Identificar que existem infinitos pontos que não pertencem ao plano.
- Conteúdos
    - ✓ Conceito de Plano;
    - ✓ 2º Postulado da Existência
- Recursos Necessários
    - ✓ Projetor Multimídia;
    - ✓ Impressões;
    - ✓ Computadores ou smartphones com o GeoGebra 3D;
    - ✓ Internet para baixar as construções ou pendrive com as construções prontas;
    - ✓ Caneta de Quadro Branco;
    - ✓ Apagador;
    - ✓ Quadro Branco.
- Procedimentos/Resumo da Aula

Tabela 15 - Resumo da aula sobre 2º Postulado da Existência.

Atividades	Objetivo Principal	Ação Principal	Itens da Atividade	Tempo
Construção	Realizar a construção da situação a ser	Solicitar que os alunos sigam o passo a passo da	1, 2 e 3	5 min

	investigada.	construção.		
Concepções Espontâneas	Relembrar a definição de Reta.	Solicitar que os alunos escrevam com suas próprias palavras o que eles sabem sobre os tópicos perguntados.	3a) e 3b)	10 min
Perguntas/ Hipóteses	Estimular a curiosidade quanto à quantidade de pontos pertencentes e não pertencentes ao Plano.	Responder a questionamentos de acordo com as construções abordadas.	4c), 4d)	10 min
Experimento	Experimentar a quantidade de pontos pertencentes e não pertencentes ao plano	Usar a geometria dinâmica do software para testas as hipóteses.	4 e 5	10 min
Conclusões	Conjecturar o 2º Postulado da Existência	Definir corretamente o 2º Postulado da Existência	4e), 5f) e 5g)	15 min

Fonte - O Autor, 2023.

- Orientações Pedagógicas

Na fase de construção os alunos devem seguir o passo a passo para realizar a construção da reta, caso os alunos não estejam familiarizados com o GeoGebra 3D o professor pode realizar a construção junto com os alunos fazendo-a com uma projeção utilizando um projetor multimídia ou na falta deste recurso o professor pode já utilizar a construção pronta que está disponibilizada em no Livro – Atividades Investigativa de Geometria Espacial. A fase de concepções espontâneas servirá para o professor verificar se os alunos possuem os conceitos sobre plano, o professor pode propor um debate com todos os alunos a fim de chegar às definições solicitadas, pois estas serão de extrema importância para a conclusão da atividade. Na fase de perguntas/hipóteses os alunos serão questionados sobre as construções e experimentações que realizarão e a partir destas criarão suas hipóteses que deverão ser experimentadas na fase de experimentação. Com todas as experimentações, indagações e hipóteses testadas, os alunos vão aos poucos conjecturando que existem infinitos pontos que pertencem ao plano e infinitos pontos que não pertencem ao plano. Caso os alunos tenham dificuldades o professor pode intervir para que o aluno consiga prosseguir na construção do conhecimento ou pode solicitar que um outro aluno que já tenha conseguido auxilie o aluno com dificuldade.

❖ Atividade Investigativa sobre o 2º Postulado da Existência

1) Abra o GeoGebra 3D;
2) Construa três pontos A, B e C quaisquer no espaço;
3) Utilize a ferramenta Plano por três pontos e trace o plano p;

a) Você sabe explicar o que é um plano? Escreva com as suas palavras.

b) Quantos planos são possíveis de serem construídos e que passam pelos pontos A, B e C?

4) Utilize a ferramenta A Ponto e marque o máximo de pontos que conseguir sobre o plano p.

c) Quantos pontos você conseguiu marcar sobre o plano?

d) Ao utilizar as ferramentas Ampliar e Reduzir, você consegue marcar mais pontos?

e) Quantos pontos você consegue marcar sobre o plano?

5) Utilize a ferramenta A Ponto e marque o máximo de pontos que conseguir fora do plano.

f) Quanto pontos você consegue marcar fora do plano?

g) A partir das respostas dadas nas letras (e) e (f), o que você pode concluir? Escreva com suas palavras.

APÊNDICE C - 1º Postulado da Determinação

Nesta atividade iremos explorar através da experimentação o 1º postulado da determinação, queremos concluir que por quaisquer dois pontos distintos, passa uma única reta.

❖ Plano de Aula

- Habilidades da BNCC – Não existe uma habilidade da BNCC que trate especificamente dos postulados da geometria espacial.
- Tempo – 1 tempo de 50 minutos
- Objetivo Geral – Compreender o 1º Postulado da Determinação.
    - Objetivos Específicos
        - ✓ Identificar que dois pontos determinam uma única reta;
        - ✓ Compreender o conceito de retas coincidentes.
- Conteúdos
    - ✓ Conceito de Reta;
    - ✓ Conceito de Reta Coincidente;
    - ✓ 1º Postulado da Determinação.
- Recursos Necessários
    - ✓ Projetor Multimídia;
    - ✓ Impressões;
    - ✓ Computadores ou smartphones com o GeoGebra 3D;
    - ✓ Internet para baixar as construções ou pendrive com as construções prontas;
    - ✓ Caneta de Quadro Branco;
    - ✓ Apagador;
    - ✓ Quadro Branco.
- Procedimentos/Resumo da Aula

Tabela 16 - Resumo da aula sobre o 1º Postulado da Determinação

Atividades	**Objetivo Principal**	**Ação Principal**	**Itens da Atividade**	**Tempo**
Construção	Realizar a construção da situação a ser	Solicitar que os alunos sigam o passo a passo da	1, 2 e 3	5 min

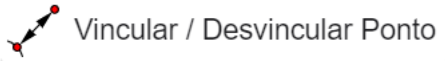
	investigada.	construção.		
Concepções Espontâneas	Relembrar a definição de Retas Coincidentes.	Solicitar que os alunos escrevam com suas próprias palavras o que eles sabem sobre os tópicos perguntados.	3a)	10 min
Perguntas/ Hipóteses	Estimular a curiosidade quanto à quantidade de retas que passam por dois pontos.	Responder a questionamentos de acordo com as construções abordadas.	3b)	10 min
Experimento	Experimentar que por dois pontos passa uma única reta.	Usar a geometria dinâmica do software para testas as hipóteses.	3b) e 3d)	10 min
Conclusões	Conjecturar o 1º Postulado da Determinação	Definir corretamente o 1º Postulado da Determinação	3c), 3d) e 3e)	15 min

Fonte - O Autor, 2023.

- Orientações Pedagógicas

Na fase de construção os alunos devem seguir o passo a passo para realizar a construção da reta, caso os alunos não estejam familiarizados com o GeoGebra 3D o professor pode realizar a construção junto com os alunos fazendo-a com uma projeção utilizando um projetor multimídia ou na falta deste recurso o professor pode já utilizar a construção pronta que está disponibilizada em no Livro – Atividades Investigativa de Geometria Espacial. A fase de concepções espontâneas servirá para o professor verificar se os alunos compreendem o conceito de retas concorrentes, o professor pode propor um debate com todos os alunos a fim de chegar às definições solicitadas, pois estas serão de extrema importância para a conclusão da atividade. Na fase de perguntas/hipóteses os alunos serão questionados sobre as construções e experimentações que realizarão e a partir destas criarão suas hipóteses que deverão ser experimentadas na fase de experimentação, nesta atividade os alunos podem ter dificuldades de tornar as retas coincidentes, o professor pode orientar os alunos a verificarem as equações das retas na janela de álgebra para terem certeza de que as retas são coincidentes. Com todas as experimentações, indagações e hipóteses testadas, os alunos vão aos poucos conjecturando que dois pontos determinam uma única reta além disso que qualquer outra reta coincidente também passará pelos pontos A e B. Caso os alunos tenham dificuldades o professor pode intervir para que o aluno consiga prosseguir na construção do conhecimento ou pode solicitar que um outro aluno que já tenha conseguido auxilie o aluno com dificuldade.

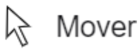
❖ Atividade Investigativa sobre o 1º Postulado da Determinação

1) Abra o GeoGebra 3D;
2) Construa pontos A, B e C de modo que A possa ser qualquer e B e C sejam pontos do plano XY, utilize a ferramenta 

para vincular os pontos B e C ao plano XY;
3) Utilize a ferramenta 

e trace as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, altere a cor de uma das retas para melhorar a visualização;

a) Você sabe o que significa retas coincidentes?

b) As duas retas construídas são distintas e dizemos que duas retas são coincidentes quando possuem todos os seus pontos em comum. Mantendo o ponto B fixo e movendo o ponto C com a ferramenta 

é possível tornar estas duas retas distintas em retas coincidentes? Movimente o ponto C e tente tornar as retas coincidentes, em caso de dúvida verifique as equações de cada reta na janela de álgebra e verifique se estão iguais.

c) Qual foi a posição do ponto C que permitiu que as retas fossem coincidentes?

d) Suponha que fossem marcados pontos D, E, F, ... no plano XY e fossem traçadas as retas $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{AF}$, ..., ao mover os pontos D, E, F, ... pelo plano XY quais são as posições que as retas $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{AF}$, ... serão coincidentes com as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$?

e) O que você pode concluir nessa experimentação? Escreva com suas palavras.

APÊNDICE D - 2º Postulado da Determinação

Nesta atividade iremos explorar através da experimentação o 2º postulado da determinação, queremos concluir que por três pontos não-colineares é determinado um único plano.

❖ Plano de Aula

- Habilidades da BNCC – Não existe uma habilidade da BNCC que trate especificamente dos postulados da geometria espacial.
- Tempo – 1 tempo de 50 minutos
- Objetivo Geral – Compreender o 2º Postulado da Determinação.
    - Objetivos Específicos
        - ✓ Identificar que três pontos determinam um único plano;
        - ✓ Compreender o conceito de pontos colineares e não colineares.
        - ✓ Compreender o conceito de planos coincidentes;
- Conteúdos
    - ✓ Conceito de Plano;
    - ✓ Conceito de Pontos Colineares e não Colineares;
    - ✓ Conceito de Plano Coincidente;
    - ✓ 2º Postulado da Determinação.
- Recursos Necessários
    - ✓ Projetor Multimídia;
    - ✓ Impressões;
    - ✓ Computadores ou smartphones com o GeoGebra 3D;
    - ✓ Internet para baixar as construções ou pendrive com as construções prontas;
    - ✓ Caneta de Quadro Branco;
    - ✓ Apagador;
    - ✓ Quadro Branco.
- Procedimentos/Resumo da Aula

Tabela 17 - Resumo da aula sobre o 2º Postulado da Determinação

Atividades	**Objetivo Principal**	**Ação Principal**	**Itens da Atividade**	**Tempo**

Construção	Realizar a construção da situação a ser investigada.	Solicitar que os alunos sigam o passo a passo da construção.	1, 2, 3, 4 e 5	5 min
Concepções Espontâneas	Relembrar a definição de Pontos Colineares e não colineares e o conceito de planos Coincidentes.	Solicitar que os alunos escrevam com suas próprias palavras o que eles sabem sobre os tópicos perguntados.	5a) e 5b)	10 min
Perguntas/ Hipóteses	Estimular a curiosidade quanto à quantidade de planos que passam por três pontos.	Responder a questionamentos de acordo com as construções abordadas.	5c), 5d) e 5e)	10 min
Experimento	Experimentar que por três pontos passa um único plano.	Usar a geometria dinâmica do software para testas as hipóteses.	5c) e 5f)	10 min
Conclusões	Conjecturar o 2º Postulado da Determinação	Definir corretamente o 2º Postulado da Determinação	3c), 3d) e 3e)	15 min

Fonte - O Autor, 2023.

- Orientações Pedagógicas

Na fase de construção os alunos devem seguir o passo a passo para realizar a construção da reta, caso os alunos não estejam familiarizados com o GeoGebra 3D o professor pode realizar a construção junto com os alunos fazendo-a com uma projeção utilizando um projetor multimídia ou na falta deste recurso o professor pode já utilizar a construção pronta que está disponibilizada em no Livro – Atividades Investigativa de Geometria Espacial. A fase de concepções espontâneas servirá para o professor verificar se os alunos compreendem o conceito de pontos colineares e não colineares e de planos coincidentes, o professor pode propor um debate com todos os alunos a fim de chegar às definições solicitadas, pois estas serão de extrema importância para a conclusão da atividade. Na fase de perguntas/hipóteses os alunos serão questionados sobre as construções e experimentações que realizarão e a partir destas criarão suas hipóteses que deverão ser experimentadas na fase de experimentação, nesta atividade os alunos podem ter dificuldades de tornar os planos coincidentes, o professor pode orientar os alunos a verificarem as equações dos planos na janela de álgebra para terem certeza de que os planos são coincidentes. Com todas as experimentações, indagações e hipóteses testadas, os alunos vão aos poucos conjecturando que três pontos determinam um único plano além disso que qualquer outro plano coincidente também passará pelos pontos A, B e C. Caso os alunos tenham dificuldades o professor pode intervir para que o aluno consiga prosseguir na construção do conhecimento ou pode solicitar que um outro aluno que já tenha conseguido auxilie o aluno com dificuldade.

❖ Atividade Investigativa sobre o 2º Postulado da Determinação

1) Abra o GeoGebra 3D;
2) Construa pontos A, B e C de modo que A, B e C sejam pontos do plano XY, utilize a ferramenta Vincular / Desvincular Ponto para vincular os pontos A, B e C ao plano XY;
3) Utilize a ferramenta Plano por três pontos e construa o plano p formado pelos pontos A, B e C.
4) Marque um ponto D fora do plano p.
5) Utilize a ferramenta Plano por três pontos e construa o plano q formado pelos pontos A, B e D, altere a cor do plano q para melhorar a visualização;

a) Você sabe o que significa pontos colineares e não colineares? Explique com suas palavras.

____

____

b) Você sabe o que significa planos coincidentes? Explique com suas palavras.

____

____

c) Os dois planos construídos são distintos, pois possuem pontos que não são comuns, por exemplo, $C \notin q \text{ e } D \notin p$. Mantendo o ponto C fixo e movendo o ponto D com a ferramenta Mover é possível tornar estes dois planos distintos em planos coincidentes? Movimente o ponto D e tente tornar os planos coincidentes, em caso de dúvida verifique as equações de cada plano na janela de álgebra e verifique se estão iguais.

____

____

d) Qual foi a posição do ponto D que permitiu que os planos fossem coincidentes?

e) Suponha que fossem marcados pontos E, F, G... fora do no plano XY e fossem construídos os planos formados pelos planos ABE, ABF, ABG, ... ao mover os pontos E, F, G ... pelo espaço quais são as posições que planos ABE, ABF, ABG, ... serão coincidentes com o plano p?

f) O que você pode concluir nessa experimentação? Escreva com suas palavras.

APÊNDICE E - 1º Postulado da Inclusão

Nesta atividade iremos explorar através da experimentação o 1º postulado da inclusão, queremos concluir que uma reta está contida em um plano quando dois pontos quaisquer da reta pertencem ao plano.

❖ Plano de Aula

- Habilidades da BNCC – Não existe uma habilidade da BNCC que trate especificamente dos postulados da geometria espacial.
- Tempo – 1 tempo de 50 minutos
- Objetivo Geral – Compreender o 1º Postulado da Inclusão.
  - Objetivos Específicos
    - ✓ Identificar as relações de continência;
- Conteúdos
    - ✓ Conceito de Reta;
    - ✓ Conceito de Plano;
    - ✓ Relações de Continência;
    - ✓ 1º Postulado da Inclusão.
- Recursos Necessários
    - ✓ Projetor Multimídia;
    - ✓ Impressões;
    - ✓ Computadores ou smartphones com o GeoGebra 3D;
    - ✓ Internet para baixar as construções ou pendrive com as construções prontas;
    - ✓ Caneta de Quadro Branco;
    - ✓ Apagador;
    - ✓ Quadro Branco.
- Procedimentos/Resumo da Aula

Tabela 18 - Resumo da aula sobre o 1º Postulado da Inclusão

Atividades	Objetivo Principal	Ação Principal	Itens da Atividade	Tempo
Construção	Realizar a construção da	Solicitar que os alunos	1, 2, e 3	5 min

	situação a ser investigada.	sigam o passo a passo da construção.		
Concepções Espontâneas	Relembrar a definição das relações de continência.	Solicitar que os alunos escrevam com suas próprias palavras o que eles sabem sobre os tópicos perguntados.	3a)	10 min
Perguntas/ Hipóteses	Estimular a curiosidade quanto à relação de continência entre reta e plano.	Responder a questionamentos de acordo com as construções abordadas.	3b), 3c), 4d) e 4e)	10 min
Experimento	Experimentar que para que uma reta esteja contida em um plano, dois pontos quaisquer dela devem pertencer ao plano.	Usar a geometria dinâmica do software para testas as hipóteses.	3 e 4	10 min
Conclusões	Conjecturar o 1º Postulado da Inclusão	Definir corretamente o 1º Postulado da Inclusão	3c) e 4f)	15 min

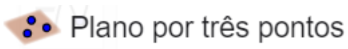
Fonte – O Autor, 2023.

- Orientações Pedagógicas

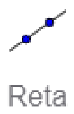
Na fase de construção os alunos devem seguir o passo a passo para realizar a construção da reta, caso os alunos não estejam familiarizados com o GeoGebra 3D o professor pode realizar a construção junto com os alunos fazendo-a com uma projeção utilizando um projetor multimídia ou na falta deste recurso o professor pode já utilizar a construção pronta que está disponibilizada em no Livro – Atividades Investigativa de Geometria Espacial. A fase de concepções espontâneas servirá para o professor verificar se os alunos compreendem as relações de continência, assim como os seus símbolos, o professor pode propor um debate com todos os alunos a fim de chegar às definições solicitadas, pois estas serão de extrema importância para a conclusão da atividade. Na fase de perguntas/hipóteses os alunos serão questionados sobre as construções e experimentações que realizarão e a partir destas criarão suas hipóteses que deverão ser experimentadas na fase de experimentação. Com todas as experimentações, indagações e hipóteses testadas, os alunos vão aos poucos conjecturando que que uma reta está contida no plano quando dois pontos quaisquer desta pertencem ao plano. Caso os alunos tenham dificuldades o professor pode intervir para que o aluno consiga prosseguir na construção do conhecimento ou pode solicitar que um outro aluno que já tenha conseguido auxilie o aluno com dificuldade.

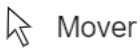
❖ Atividade Investigativa sobre o 1º Postulado da Inclusão

1) Abra o GeoGebra 3D;

2) Utilize a ferramenta 

e construa o plano p formado pelos pontos A, B e C.

3) Utilize a ferramenta 

e trace a reta $\overleftrightarrow{AB}$, em seguida utilize a ferramenta 

e visualize superiormente e inferiormente o plano p e a reta $\overleftrightarrow{AB}$.

a) Você sabe o que significam as relações continência? Conhece o símbolo que representa essas relações? Escreva com suas palavras.

____

____

b) Tem alguma parte da reta $\overleftrightarrow{AB}$ que não está passando (está fora) pelo plano p?

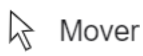
____

____

c) De acordo com sua resposta anterior é possível afirmar que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ está contida no plano p ($\overleftrightarrow{AB} \subset p$)? Justifique sua resposta.

____

____

4) Marque um ponto D sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$, em seguida utilize a ferramenta 

e movimente o ponto D sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$.

d) O ponto D em algum momento fica fora do plano p?

____

____

e) Se fossem marcados pontos E, F, G, ... sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e todos fossem movimentados algum deles ficaria fora do plano p?

f) O que podemos concluir desse experimento que relaciona $\overleftrightarrow{AB} \subset p$ e os pontos da reta $\overleftrightarrow{AB}$? Escreva com suas palavras.

APÊNDICE F - 2º Postulado da Inclusão

Nesta atividade iremos explorar através da experimentação o 2º postulado da inclusão, queremos concluir que um ponto pertence a um plano quando este pertence a uma reta qualquer do plano.

❖ Plano de Aula

- Habilidades da BNCC – Não existe uma habilidade da BNCC que trate especificamente dos postulados da geometria espacial.
- Tempo – 1 tempo de 50 minutos
- Objetivo Geral – Compreender o 2º Postulado da Inclusão.
  - Objetivos Específicos
    - ✓ Compreender os conceitos de retas concorrentes;
    - ✓ Compreender as relações de pertinência
- Conteúdos
    - ✓ Conceito de Reta;
    - ✓ Conceito de Plano;
    - ✓ Relação de Pertinência;
    - ✓ 2º Postulado da Inclusão.
- Recursos Necessários
    - ✓ Projetor Multimídia;
    - ✓ Impressões;
    - ✓ Computadores ou smartphones com o GeoGebra 3D;
    - ✓ Internet para baixar as construções ou pendrive com as construções prontas;
    - ✓ Caneta de Quadro Branco;
    - ✓ Apagador;
    - ✓ Quadro Branco.
- Procedimentos/Resumo da Aula

Tabela 19 - - Resumo da aula sobre o 2º Postulado da Inclusão

Atividades	Objetivo Principal	Ação Principal	Itens da Atividade	Tempo
Construção	Realizar a construção	Solicitar que os alunos	1, 2, 3 e 4	10 min

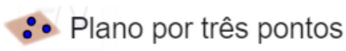
	da situação a ser investigada.	sigam o passo a passo da construção.		
Concepções Espontâneas	Relembrar o conceito de retas concorrentes e as relações de pertinência.	Solicitar que os alunos escrevam com suas próprias palavras o que eles sabem sobre os tópicos perguntados.	5a) e 5b)	10 min
Perguntas/ Hipóteses	Estimular a curiosidade quanto à relação de pertinência entre ponto e plano.	Responder a questionamentos de acordo com as construções abordadas.	5c), 8e) e 8f)	10 min
Experimento	Experimentar que para se um ponto pertence ao plano então ele pertence a uma reta do plano.	Usar a geometria dinâmica do software para testas as hipóteses.	5, 7 e 8	10 min
Conclusões	Conjecturar o 2º Postulado da Inclusão	Definir corretamente o 2º Postulado da Inclusão	5d), 8f) e 8g)	10 min

Fonte - O Autor, 2023.

- Orientações Pedagógicas

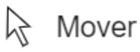
Na fase de construção os alunos devem seguir o passo a passo para realizar a construção da reta, caso os alunos não estejam familiarizados com o GeoGebra 3D o professor pode realizar a construção junto com os alunos fazendo-a com uma projeção utilizando um projetor multimídia ou na falta deste recurso o professor pode já utilizar a construção pronta que está disponibilizada em no Livro – Atividades Investigativa de Geometria Espacial. A fase de concepções espontâneas servirá para o professor verificar se os alunos compreendem o conceito de retas concorrentes e as relações de pertinência, assim como o reconhecimento dos seus símbolos, o professor pode propor um debate com todos os alunos a fim de chegar às definições solicitadas, pois estas serão de extrema importância para a conclusão da atividade. Na fase de perguntas/hipóteses os alunos serão questionados sobre as construções e experimentações que realizarão e a partir destas criarão suas hipóteses que deverão ser experimentadas na fase de experimentação. Com todas as experimentações, indagações e hipóteses testadas, os alunos vão aos poucos conjecturando que um ponto pertence a um plano quando ele pertence a uma reta do plano. Caso os alunos tenham dificuldades o professor pode intervir para que o aluno consiga prosseguir na construção do conhecimento ou pode solicitar que um outro aluno que já tenha conseguido auxilie o aluno com dificuldade.

❖ Atividade Investigativa sobre o 2º Postulado da Inclusão

1) Abra o GeoGebra 3D.
2) Utilize a ferramenta 

e construa o plano p formado pelos pontos A, B e C.
3) Utilize a ferramenta 

e marque um ponto D de modo que seja um ponto do plano p
4) Em seguida utilize a ferramenta 

e trace as retas $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BD}\ E\ \overleftrightarrow{CD}$.
5) Utilize a ferramenta 

e mova o ponto D sobre o plano p, visualize superiormente e inferiormente o plano p e as retas $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BD}\ E\ \overleftrightarrow{CD}$.

a) Você sabe explicar o que são retas concorrentes? Escreva com as suas palavras.

b) Você sabe o que significam as relações de pertinência? Conhece o símbolo que representa essas relações? Escreva com suas palavras.

c) Tem alguma parte das retas $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BD}\ E\ \overleftrightarrow{CD}$ que não está passando (estão fora) pelo plano p?

d) De acordo com sua resposta anterior é possível afirmar que as retas $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BD}\ E\ \overleftrightarrow{CD}$ estão contidas no plano p ($\overleftrightarrow{AD} \subset p, \overleftrightarrow{BD} \subset p\ \ e\ \ \overleftrightarrow{CD} \subset p$)? Justifique sua resposta.

6) Utilize a ferramenta 

para desvincular o ponto D do plano p;

7) Utilize a ferramenta Mover, clique sobre o ponto D para trocar a orientação da ferramenta Mover e mova o ponto D para fora do plano p, visualize superiormente e inferiormente o plano p e as retas $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BD}\ E\ \overleftrightarrow{CD}$.

e) Tem alguma parte das retas $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BD}\ E\ \overleftrightarrow{CD}$ que não está passando (estão fora) pelo plano p?

____

____

f) De acordo com sua resposta anterior é possível afirmar que as retas $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BD}\ E\ \overleftrightarrow{CD}$ estão contidas no plano p ($\overleftrightarrow{AD} \subset p, \overleftrightarrow{BD} \subset p\ \ e\ \ \overleftrightarrow{CD} \subset p$)? Justifique sua resposta.

____

____

g) O que você pode concluir com esse experimento? Justifique com suas palavras.

____

____

APÊNDICE G - Postulado da Interseção

Nesta atividade iremos explorar através da experimentação o postulado da interseção, queremos concluir que se dois planos distintos possuem um ponto em comum, então existe uma única reta que passa por esse ponto e que pertence aos dois planos.

❖ Plano de Aula

- Habilidades da BNCC – Não existe uma habilidade da BNCC que trate especificamente dos postulados da geometria espacial.
- Tempo – 1 tempo de 50 minutos
- Objetivo Geral – Compreender o Postulado da Interseção.
  - Objetivos Específicos
    - ✓ Compreender os conceitos de interseção entre conjuntos e objetos geométricos;
- Conteúdos
    - ✓ Conceito de Plano;
    - ✓ Interseção entre Conjuntos;
    - ✓ Interseção entre Objetos Geométricos;
    - ✓ Postulado da Interseção.
- Recursos Necessários
    - ✓ Projetor Multimídia;
    - ✓ Impressões;
    - ✓ Computadores ou smartphones com o GeoGebra 3D;
    - ✓ Internet para baixar as construções ou pendrive com as construções prontas;
    - ✓ Caneta de Quadro Branco;
    - ✓ Apagador;
    - ✓ Quadro Branco.
- Procedimentos/Resumo da Aula

Tabela 20 - - Resumo da aula sobre o Postulado da Interseção

Atividades	**Objetivo Principal**	**Ação Principal**	**Itens da Atividade**	**Tempo**
Construção	Realizar a construção da	Solicitar que os alunos	1, 2 e 3	10 min

	situação a ser investigada.	sigam o passo a passo da construção.		
Concepções Espontâneas	Relembrar os conceitos de interseção entre conjuntos e entre objetos geométricos.	Solicitar que os alunos escrevam com suas próprias palavras o que eles sabem sobre os tópicos perguntados.	3a)	10 min
Perguntas/ Hipóteses	Estimular a curiosidade quanto à interseção entre dois planos.	Responder a questionamentos de acordo com as construções abordadas.	3b), 3c) e 4e)	10 min
Experimento	Experimentar utilizando a ferramenta do GeoGebra que se dois planos distintos possuem um ponto em comum então existe uma única reta que contém o ponto e pertence aos dois planos.	Usar a geometria dinâmica do software para testas as hipóteses.	4	10 min
Conclusões	Conjecturar o Postulado da Interseção	Definir corretamente o Postulado da Interseção	4d) e 4f)	10 min

Fonte - O Autor, 2023.

- Orientações Pedagógicas

Na fase de construção os alunos devem seguir o passo a passo para realizar a construção da reta, caso os alunos não estejam familiarizados com o GeoGebra 3D o professor pode realizar a construção junto com os alunos fazendo-a com uma projeção utilizando um projetor multimídia ou na falta deste recurso o professor pode já utilizar a construção pronta que está disponibilizada em no Livro – Atividades Investigativa de Geometria Espacial. A fase de concepções espontâneas servirá para o professor verificar se os alunos compreendem o conceito de interseção entre conjuntos e entre objetos geométricos, assim como o reconhecimento dos seus símbolos, o professor pode propor um debate com todos os alunos a fim de chegar às definições solicitadas, pois estas serão de extrema importância para a conclusão da atividade. Na fase de perguntas/hipóteses os alunos serão questionados sobre as construções e experimentações que realizarão e a partir destas criarão suas hipóteses que deverão ser experimentadas na fase de experimentação. Com todas as experimentações, indagações e hipóteses testadas, os alunos vão aos poucos conjecturando que se dois planos distintos possuem um ponto em comum então existe uma única reta que contém o ponto e pertence aos dois planos. Caso os alunos tenham dificuldades o professor pode intervir para que o aluno consiga prosseguir na construção do conhecimento ou pode solicitar que um outro aluno que já tenha conseguido auxilie o aluno com dificuldade.

❖ Atividade Investigativa sobre o Postulado da Interseção

1) Abra o GeoGebra 3D;
2) Utilize a ferramenta Ponto e marque os pontos A, B, C, D e E quaisquer no espaço, de modo que os cinco pontos não fiquem no mesmo plano.
3) Utilize a ferramenta Plano por três pontos e construa os planos p e q utilizando os pontos A, B e C e os pontos A, D e E respectivamente.

a) Você sabe explicar o que é a interseção entre conjuntos ou entre objetos geométricos?

b) Com essa sua construção, existe algum ponto que pertença aos planos p e q simultaneamente?

c) Como é representada, matematicamente, a resposta acima?

4) Utilize a ferramenta Interseção de Duas Superfícies e clique sobre os planos p e q.

d) Qual é a interseção entre os planos p e q?

e) Essa interseção é única ou é possível traçar outra reta que esteja contida nos dois planos ao mesmo tempo?

f) O que você pode concluir sobre esse experimento? Justifique com suas palavras.

____

____

APÊNDICE H - Postulado da Separação do Espaço

Nesta atividade iremos explorar através da experimentação o postulado da separação do espaço, queremos concluir que um plano α qualquer divide o espaço em duas regiões distintas, I e II, as quais não contém o plano α e tais que:

a) Se um ponto $A \in I$ e um ponto $B \in II$, então $\overline{AB} \cap \alpha = \{C\}$, ou seja, se A pertence a região I e B a região II, então o segmento $\overline{AB}$ intersecta o plano α em um único ponto.
b) Se um ponto $A \in I$ e um ponto $B \in I$, então $\overline{AB} \cap \alpha = \emptyset$, ou seja, se A e B pertencem a região I, então o segmento $\overline{AB}$ não intersecta o plano α. Análogo para o caso $A \in II$ e $B \in II$.

❖ Plano de Aula

- Habilidades da BNCC – Não existe uma habilidade da BNCC que trate especificamente dos postulados da geometria espacial.
- Tempo – 1 tempo de 50 minutos
- Objetivo Geral – Compreender o Postulado da Separação do Espaço.
    - Objetivos Específicos
        - ✓ Compreender os conceitos de posição relativa entre reta e plano;
        - ✓ Compreender o conceito de espaço;
- Conteúdos
    - ✓ Conceito de Plano;
    - ✓ Conceito de Espaço;
    - ✓ Posição Relativa entre Reta e Plano;
    - ✓ Postulado da Separação do Espaço.
- Recursos Necessários
    - ✓ Projetor Multimídia;
    - ✓ Impressões;
    - ✓ Computadores ou smartphones com o GeoGebra 3D;
    - ✓ Internet para baixar as construções ou pendrive com as construções prontas;
    - ✓ Caneta de Quadro Branco;
    - ✓ Apagador;

- ✓ Quadro Branco.

- Procedimentos/Resumo da Aula

Tabela 21 - Resumo da aula sobre o Postulado da Separação do Espaço

Atividades	Objetivo Principal	Ação Principal	Itens da Atividade	Tempo
Construção	Realizar a construção da situação a ser investigada.	Solicitar que os alunos sigam o passo a passo da construção.	1, 2, 3 e 5	10 min
Concepções Espontâneas	Relembrar os conceitos de posição relativa entre reta e plano.	Solicitar que os alunos escrevam com suas próprias palavras o que eles sabem sobre os tópicos perguntados.	5a)	10 min
Perguntas/ Hipóteses	Estimular a curiosidade quanto à interseção entre segmentos de reta e plano.	Responder a questionamentos de acordo com as construções abordadas.	5c)	10 min
Experimento	Experimentar utilizando o postulado da separação do espaço.	Usar a geometria dinâmica do software para testas as hipóteses.	5 e 6	10 min
Conclusões	Conjecturar o Postulado da Separação do Espaço	Definir corretamente o Postulado da Separação do Espaço	5d) e 6f)	10 min

Fonte 1- O Autor, 2023.

- Orientações Pedagógicas

Na fase de construção os alunos devem seguir o passo a passo para realizar a construção da reta, caso os alunos não estejam familiarizados com o GeoGebra 3D o professor pode realizar a construção junto com os alunos fazendo-a com uma projeção utilizando um projetor multimídia ou na falta deste recurso o professor pode já utilizar a construção pronta que está disponibilizada em no Livro – Atividades Investigativa de Geometria Espacial. A fase de concepções espontâneas servirá para o professor verificar se os alunos compreendem as posições relativas entre retas e planos, o professor pode propor um debate com todos os alunos a fim de chegar às definições solicitadas, pois estas serão de extrema importância para a conclusão da atividade. Na fase de perguntas/hipóteses os alunos serão questionados sobre as construções e experimentações que realizarão e a partir destas criarão suas hipóteses que deverão ser experimentadas na fase de experimentação. Com todas as experimentações, indagações e hipóteses testadas, os alunos vão aos poucos conjecturando o enunciado do postulado da separação do espaço. Caso os alunos tenham dificuldades o professor pode intervir para que o aluno consiga prosseguir na construção do conhecimento ou pode solicitar que um outro aluno que já tenha conseguido auxilie o aluno com dificuldade.

❖ Atividade Investigativa sobre o Postulado da Separação do Espaço

1) Abra o GeoGebra 3D.
2) Utilize a ferramenta Plano por três pontos e construa o plano p formado pelos pontos A, B e C.
3) Considere como região I a parte do espaço acima do plano e região II a parte do espaço abaixo do plano. Utilize a ferramenta Ponto e marque os pontos D e E de modo que cada um esteja em uma região diferente do outro.
4) Em seguida utilize a ferramenta Segmento e trace o segmento de reta $\overline{DE}$.
5) Utilize a ferramenta Interseção de Dois Objetos e clique sobre o plano p e o segmento de reta $\overline{DE}$.

a) Você sabe quais são as posições relativas entre uma reta e um plano? Escreva com as suas palavras.

____

____

b) Você sabe explicar o significado de espaço? Escreva com as suas palavras.

____

____

c) Algum novo objeto foi construído? Qual?

____

____

d) Como é representada, matematicamente, a resposta acima?

6) Utilize a ferramenta Mover, clique sobre o ponto D para trocar a orientação da ferramenta Mover e mova o ponto D para a outra região do plano p, de modo que os pontos D e E fiquem na mesma região.

e) Ao movimentar o ponto D o que acontece com o ponto F construído nos itens anteriores?

f) O que você pode concluir a partir desse experimento? Escreva com as suas palavras.