Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Sergio da Silva Barbosa

Métodos geométricos de resolução das equações quadráticas

Rio de Janeiro

2024

Sergio da Silva Barbosa

Métodos geométricos de resolução das equações quadráticas

Dissertação apresentada, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Mohammad Soufi Neyestani

Rio de Janeiro

2024

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

B238	Barbosa, Sérgio da Silva. Métodos geométricos de resolução de equações quadráticas/ Sérgio da Silva Barbosa. – 2024. 55 f.: il. Orientador: Mohammad Soufi Neyestani Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística. 1. Equações quadráticas - Teses. I. Neyestani, Mohammad Soufi.. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título CDU 511.342

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Sérgio da Silva Barbosa

Métodos geométricos de resolução das equações quadráticas

Dissertação apresentada, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 02 de abril de 2024.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Mohammad Soufi Neyestani (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Sajad Salami
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Seyed Hamid Hassanzadeh
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

2024

AGRADECIMENTOS

Às adversidades que me forjaram, / À resiliência que me trouxe até aqui,/ Aos Amigos da Resistência que me fizeram/ compreender.../ Na família se concentram toda força e toda energia.

RESUMO

BARBOSA, Sergio da Silva. **Métodos geométricos de resolução das equações quadráticas**. 2024. 55 f.Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT), Instituto de Matemática e Estatística - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2024.

Este trabalho buscou compreender a evolução pensamento algébrico desde problemas a partir do papiro de *Rhind* até as soluções geométricas de *Al-Khwarizmi*. Durante a pesquisa bibliográfica, principalmente na organização do sistema de contagem e computação de resultados na aritmética egípcia, ficou clara a importância de uma representação simbólico-pictórica na compreensão das tarefas a serem realizadas. O que se passou na resolução de equações pelo método da falsa posição de então deve ser captado como um incentivo a outras formas de resolução de problemas. Nesse sentido, os esforços de Diofanto no desenvolvimento de uma simbologia na representação de problemas em equações são primordiais. Nesta investigação buscou-se avaliar o uso de algumas proposições de Euclides na mediação da compreensão das demonstrações geométricas dos resultados de *Al-Khwarizmi* para a solução de equações quadráticas.

Palavras-chave: Métodos Geométricos. Resolução das Equações. Equações Quadráticas.

ABSTRACT

BARBOSA, Sergio da Silva. Geometric methods for solving quadratic equations. 2024. 55 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT), Instituto de Matemática e Estatística - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2024.

This work sought to understand the evolution of algebraic thinking from problems from the Rhind papyrus to the geometric solutions of Al-Khwarizmi. During bibliographical research, mainly in the organization of the system of counting and computing results in Egyptian arithmetic, the importance of a symbolic-pictorial representation in understanding the tasks to be performed became clear. What happened in solving equations using the false position method at the time should be seen as an incentive for other forms of problem solving. In this sense, Diophantus' efforts to develop symbology for representing problems in equations are essential. In this investigation we sought to evaluate the use of some of Euclid's propositions in mediating the understanding of geometric demonstrations of Al-Khwarizmi's results for the solution of quadratic equations.

Keywords: Geometric Methods. Resolution of Equations. Quadratic Equations.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Howard Eves (2004) nos informa que a matemática primitiva servia de apoio ao desenvolvimento de atividades humanas tais como agricultura e engenharia. A evolução para formas mais avançadas de sociedade exigia obras que permitissem a manutenção dos governos e das cidades. Para transformar terras em agricultáveis, foi preciso drenar pântanos, controlar inundações e fazer irrigações, lançando mão das ferramentas da época.

Nessa fase inicial, a ênfase das atividades da matemática deu-se na aritmética e na mensuração práticas. É interessante observar que a palavra *práticas* vai se relacionar à descrição do processo de como fazer: a instrução passo a passo.

> "O aparecimento dessa nova civilização se deu nas cidades comerciais espalhadas ao longo das costas da Ásia Menor e, mais tarde, na parte continental da Grécia, na Sicília e no litoral da Itália. A visão estática do Oriente antigo sobre as coisas tornou-se insustentável e, numa atmosfera de racionalismo crescente, o homem começou a indagar *como* e *por quê*." [6].

O papiro de *Rhind* servirá de ponto de partida histórico na busca da compreensão dos processos de cálculos realizados pelos egípcios. Interessante ver que esses processos de cálculos que ocorrem nas tarefas de resolução de problemas traduzem o modo de pensar as quantidades e de lidar com elas. Tão importante, também, é verificar que a carência de símbolos na notação da época não impediu o domínio das técnicas da aritmética. A sua perícia nos cálculos envolvendo frações e os procedimentos usados para desvendar problemas complicados chamam a atenção para o surgimento das primeiras ideias de equações. Ao analisar o uso do método da falsa posição nos registros egípcios contidos no papiro, vê-se que a ideia de equação atrela a si a necessidade de construção de uma simbologia própria que atenda às demandas de sua apresentação e seguida dos passos de sua solução. Esse é um processo histórico lento no qual a aritmética vai tomando contornos de álgebra.

O desenvolvimento da notação algébrica, a partir da sua fase elementar, ocorre em três estágios correspondentes ao grau de evolução no uso do símbolo para representar uma quantidade desconhecida numa equação e forma de manipulação para a obtenção do seu resultado. São os estágios: retórico, sincopado e simbólico. Nesse processo, Diofanto é quem iniciou o uso do simbolismo algébrico. O seu sistema de símbolos previa o uso de palavras abreviadas para representar um objeto matemático bem definido, introduzindo assim a álgebra sincopada. Na sua obra *Arithmetica,* Diofanto dá tratamento algébrico às quantidades desconhecidas envolvidas num problema, com sua habilidade reduzia para uma só as várias incógnitas presentes numa questão, equacionando-a. Mas, mesmo assim, não desenvolveu um método de encontrar soluções. Muitas de suas respostas imediatas não eram de fácil conclusão, por isso persiste a convicção de que existia um método.

Mais adiante na história, o relacionamento aritmético-algébrico vai contar com o auxilio da geometria. Para além do legado de Euclides, com suas definições e proposições formais, firma-se o tratamento dado por al-Khwarizmi.

Em grande medida, a análise do conteúdo de *Latin Translation of the Algebra of Al-Khowarizmi*, de Robert of Chester's, deve contribuir para uma compreensão mais significativa da resolução das equações presentes naquele tratado e também gerar recursos e/ou incentivos para sua aplicação no ensino básico. Temos ainda que citar, sobre o trabalho de Al-Khwarizmi, a seguinte passagem:

> Nosso principal interesse durante o período arábico centra-se em al-khwarizmi porque seus livros (o *Al-jabr* e o *Liber algorismi*, ambos já mencionados) foram posteriormente traduzidos para o latim (*c.* 1200), influenciando grandemente a matemática europeia. Mas esse trabalho não está à altura de padrões anteriores; como assinala Van der Waerden, al-Khwarizmi rejeitou a "erudição grega" e ignorou outros resultados já alcançados. Seu objetivo era escrever um livro prático sobre resolução de equações. [1]

Essas são as tendências para as quais se inclinaram os trabalhos de Al-Khwarizmi: a preocupação em ser compreensível aos leitores (populares) e a introdução do sistema de numeração decimal. O sistema decimal facilitou grandemente as operações, no sentido de agilizar a obtenção dos resultados, popularizou-se também por obra de Al-Khwarizmi.

Portanto, o breve conhecimento histórico da trajetória do uso da simbologia na representação de problemas e as tentativas de soluções iniciadas em cada período da evolução dos símbolos fazem parte da aprendizagem da álgebra, e realizam uma conexão da prática logística com a teoria aritmética, características de Al-Khwarizmi. Neste trabalho não há uma busca cronológica para o surgimento das equações ou mesmo da álgebra, mas uma busca pelo encadeamento das ideias que possam conduzir a melhor compreensão e utilização dos conhecimentos até então alcançados.

Encontramos palavras de encorajamento para a necessidade de propor atividades que gerem oportunidade de algum resgate no ensino da geometria nos parâmetros deste trabalho, quando Oscar Guelli, na Revista do Professor de Matemática – 15, declara-se saudoso sobre o uso do processo da regra da falsa posição de que:

> Professores mais antigos lembram-se de encontrar este método em seus livros-texto, quando estudantes *(Arihmetica Progressiva*, de António Trajano, por exemplo).
> Por que o ensino desse processo caiu no esquecimento justamente agora que os processos de aproximação ganham tanta importância? Sim, pois este é um exemplo do uso das aproximações, em que se parte de um valor falso e procura-se corrigi-lo para melhorar o resultado, o que, neste caso, tem pleno êxito: chega-se à solução exata. [11]

1 ANTECEDENTES HISTÓRICOS

O *papiro de Ahmes* ou *papiro de Rhind* foi encontrado em Tebas nas ruínas de um pequeno edifício perto do Ramesseum. Foi adquirido em 1858 por A. Henry Rhind e após sua morte passou para a posse do Museu Britânico. É uma cópia feita pelo escriba chamado *A'hmosè*. A data em que esta cópia foi feita é indicada no antigo método egípcio até o ano do faraó chamado *A-user-Rê*, que foi identificado como membro da dinastia *Hyksos*, vivendo aproximadamente em 1650 a.C. O escriba afirmava ainda que sua cópia estava em semelhança com escritos mais antigos, da época do rei *Ne-ma'et-Re*' (Amenem-hêt III) que reinou de 1849 a 1801 a.C.' O papiro é escrito em hierático e originalmente era um único rolo de quase 18 pés de comprimento e cerca de 33 centímetros de altura, mas chegou ao Museu Britânico danificado e com vários fragmentos faltando, o mais importantes dos quais foram encontrados na posse da Sociedade Histórica de New York.

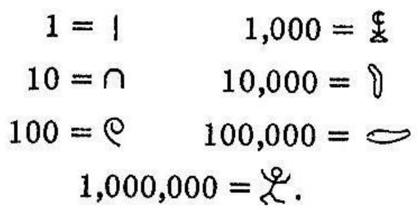
Têm-se poucos vestígios da aritmética egípcia com data anterior às fontes originadas no papiro de Rhind. Acredita-se que antes dessa data, por um longo período de existência da civilização egípcia, um desenvolvimento lento do elaborado sistema ocorreu durante mais de mil anos, até chegar ao que se apresenta atraves do papiro.

O *Papiro de Rhind* é considerado um antigo manual de Matemática, contendo oitenta problemas, cada um deles acompanhados de sua solução. O papiro revela uma ideia de métodos gerais aplicáveis a grupos de problemas, evoluindo dos simples para os mais complicados, sendo, porém, do mesmo tipo e assim sujeitos aos mesmos métodos de solução. Três processos de cálculo são especialmente tratados no papiro: (*i*) como relacionar uma expressão fracionária a um número dado; (*ii*) como usar o método da falsa posição; e (*iii*) Como determinar o valor a ser adicionado a uma aproximação de um determinado número para obtê-lo.

Os egípcios aparentemente concebiam dois tipos de números: (a) os inteiros, que possuíam uma notação decimal bem definida, correspondendo à sequencia crescente de 1 a 1.000.000. Porém, sem o dispositivo da notação posiçional atual; e, (b) a sequencia decrescente a partir de $\frac{2}{3}$ e seguido dos números recíprocos ou frações unitárias.

As operações de adição e subtração não apresentavam dificuldades, pois os egípcios utilizavam a base decimal e símbolos hieroglíficos para representar 1, 10, 100, ... , 1.000.000. Então, ao agrupar os símbolos, cada grupo contendo 10 unidades do mesmo símbolo era substituído por outro representando dez vezes o menor deles.

Figura 1: Símbolos hieroglíficos egípcios.



Fonte: Bunt, 1957.

Para os números fracionários que não fossem uma fração unitária, os egípcios usavam uma combinação de frações unitárias para representá-los, desde que as frações unitárias contidas nessas expressões fossem diferentes entre si e muito raramente poderiam ter uma soma igual ou maior que 1. Por exemplo, para representar $1\frac{3}{4}$, eles escreviam $1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$. Entendia-se que as frações ou o número inteiro e frações deveriam ser adicionados, sempre que fossem escritos lado a lado sem qualquer sinal de adição, como o atual $1\ \frac{1}{2}$.

Existem casos em que a expressão em fração unitária para um determinado número fracionário varia quando escrito como uma soma de frações unitárias, ou como a soma de um número inteiro e de tais frações. Com exceção da fração $\frac{2}{3}$ (ou $\bar{\bar{3}}$) [1], todas as frações representavam-se como soma de frações unitárias $\frac{1}{n}$ (ou $\bar{n}$).

Na matemática egípcia, as multiplicações se realizavam por meio do processo de dobrar ou reduzir pela metade os números, qualquer que fosse a quantidade numérica. O dobro do recíproco de um número par poderia ser facilmente encontrado, mas para números ímpares era conveniente ter uma tabela para auxiliar o trabalho. Como determinar o dobro de um número recíproco é o mesmo que descobrir por quanto o próprio número deve ser multiplicado para se obter o 2; então, o problema se torna equivalente a descobrir um número que multiplicado pelo número ímpar fornecido o produto dava 2.

Nas primeiras oito páginas do papiro essas relações são obtidos para todos os números ímpares de 3 a 101. Teoricamente o resultado pode ser colocado em um número infinito de formas; as formas dadas são geralmente as mais simples.

---

[1] Eminentes matemáticos discutiram a decomposição de fração numa soma de frações unitárias, notadamente James Joseph **Sylvester** (1880) e Gino Benedetto **Loria** (1892). In: Gow, James. A Short History of Greek Mathematics.

Figura 2: Decomposição de fração com numerador 2 em soma de frações unitárias.

$2 \div 3 = \overline{2} + \overline{6}$	$2 \div 53 = \overline{30} + \overline{318} + \overline{795}$
$2 \div 5 = \overline{3} + \overline{15}$	$2 \div 55 = \overline{30} + \overline{330}$
$2 \div 7 = \overline{4} + \overline{28}$	$2 \div 57 = \overline{38} + \overline{114}$
$2 \div 9 = \overline{6} + \overline{18}$	$2 \div 59 = \overline{36} + \overline{236} + \overline{531}$
$2 \div 11 = \overline{6} + \overline{66}$	$2 \div 61 = \overline{40} + \overline{244} + \overline{488} + \overline{610}$
$2 \div 13 = \overline{8} + \overline{52} + \overline{104}$	$2 \div 63 = \overline{42} + \overline{126}$
$2 \div 15 = \overline{10} + \overline{30}$	$2 \div 65 = \overline{39} + \overline{195}$
$2 \div 17 = \overline{12} + \overline{51} + \overline{68}$	$2 \div 67 = \overline{40} + \overline{335} + \overline{536}$
$2 \div 19 = \overline{12} + \overline{76} + \overline{114}$	$2 \div 69 = \overline{46} + \overline{138}$
$2 \div 21 = \overline{14} + \overline{42}$	$2 \div 71 = \overline{40} + \overline{568} + \overline{710}$
$2 \div 23 = \overline{12} + \overline{276}$	$2 \div 73 = \overline{60} + \overline{219} + \overline{292} + \overline{365}$
$2 \div 25 = \overline{15} + \overline{75}$	$2 \div 75 = \overline{50} + \overline{150}$
$2 \div 27 = \overline{18} + \overline{54}$	$2 \div 77 = \overline{44} + \overline{308}$
$2 \div 29 = \overline{24} + \overline{58} + \overline{174} + \overline{232}$	$2 \div 79 = \overline{60} + \overline{237} + \overline{316} + \overline{790}$
$2 \div 31 = \overline{20} + \overline{124} + \overline{155}$	$2 \div 81 = \overline{54} + \overline{162}$
$2 \div 33 = \overline{22} + \overline{66}$	$2 \div 83 = \overline{60} + \overline{332} + \overline{415} + \overline{498}$
$2 \div 35 = \overline{30} + \overline{42}$	$2 \div 85 = \overline{51} + \overline{255}$
$2 \div 37 = \overline{24} + \overline{111} + \overline{296}$	$2 \div 87 = \overline{58} + \overline{174}$
$2 \div 39 = \overline{26} + \overline{78}$	$2 \div 89 = \overline{60} + \overline{356} + \overline{534} + \overline{890}$
$2 \div 41 = \overline{24} + \overline{246} + \overline{328}$	$2 \div 91 = \overline{70} + \overline{130}$
$2 \div 43 = \overline{42} + \overline{86} + \overline{129} + \overline{301}$	$2 \div 93 = \overline{62} + \overline{186}$
$2 \div 45 = \overline{30} + \overline{90}$	$2 \div 95 = \overline{60} + \overline{380} + \overline{570}$
$2 \div 47 = \overline{30} + \overline{141} + \overline{470}$	$2 \div 97 = \overline{56} + \overline{679} + \overline{776}$
$2 \div 49 = \overline{28} + \overline{196}$	$2 \div 99 = \overline{66} + \overline{198}$
$2 \div 51 = \overline{34} + \overline{102}$	$2 \div 101 = \overline{101} + \overline{202} + \overline{303} + \overline{606}$

Fonte: Bunt, 1957.

Processo de Sylvester para encontrar uma representação em fração unitária:

> (1) encontrar a maior fração unitária (aquela com o menor denominador) menor que a fração dada, (2) subtrair esta fração unitária da fração dada, (3) encontrar a maior fração unitária menor que a diferença resultante, (4) subtraindo novamente e continuando este processo.[2] [2] (Tradução nossa)

Para encontrar a maior fração unitária menor que a fração dada, deve-se tomar para denominador o maior inteiro em relação ao quociente entre o denominador e o numerador da fração dada.

No papiro de Rhind, o problema 32-seção VI, mostra o cálculo de 12 vezes 12.

[2] (1) finding the largest unit fraction (the one with the smallest denominator) less than the given fraction, (2) subtracting this unit fraction from the given fraction, (3) finding the largest unit fraction less than the resulting difference, (4) subtracting again, and continuing this process. (The Historical Roots of Elementary Mathematics, Bunt, p. 17)

Diagrama 1A: Calculo do hieróglifo de 12×12

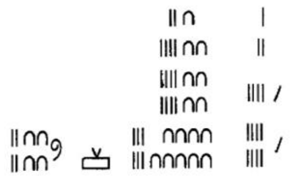


Diagrama 1B: Cálculo ‘atual’ de 12×12

1	12	
2	24	
\ 4	**48**	
\ 8	**96**	‘o resultado é o seguinte’ 144

Nota: A barra “\” indica as linhas que foram consideradas para obtenção do resultado. O diagrama B traduz os valores dos hieróglifos do diagrama A com os números lidos da direita para a esquerda.

Fonte: Bunt, p.9.

1.1 **O Método da Falsa Posição**

> *Os métodos dos egípcios eram em grande parte os de análise é o que se pode chamar de aproximação. Isto é, caso não se conseguisse a resposta, tentar-se-ia obter primeiro uma aproximação da resposta para depois encotrar o que falta.* [3] [4] (Tradução nossa)

O processo aritmético de cálculo, descrito passo a passo, funciona como um algoritmo para solução de problemas que recaiam no mesmo tipo de equação. Com esse fim, o método ou regra de falsa posição consiste em supor um valor numérico conveniente como resposta da quantidade desconhecida. Essa técnica era a mais comum entre os egípcios para a solução de problemas de quantidades desconhecidas (problemas de *aha*). À mesma época, desenvolveu-se o método de dupla falsa posição para tratar problemas semelhantes, porém mais complicados.

No uso do método da falsa posição, as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão egípcia na antiguidade são descritas no papiro. Os egípcios, via de regra, usavam duas operações para realizar a multiplicação: dobrar e adicionar. A Multiplicação por números inteiros era geralmente restrita aos multiplicadores 2 e 10; o processo resume-se em duplicações repetidas, ou ocasionalmente multiplicação por 10. Como o fator multiplicador pode ser composto por uma combinação dos multiplicadores 2 (ou 10), a soma dos produtos parciais formados pelos multiplicadores que compõe o fator dado é que constitui o produto pedido. A divisão egípcia descreve-se como um segundo tipo de multiplicação, visto que foram informados o multiplicando e o produto para auxiliarem a busca pelo multiplicador.

---

[3] The methods of the Egyptian were largely those of trial and what we might call approximation. That is, if he could not get the answer at once he would try to get nearly the answer first and then make up what was lacking. This appears especially in what we have called the second kind of multiplication, where he has the multiplicand and product given to find the multiplier (see page 5), while the method of false position is also a method of trial.(The Hind Math Papyrus, p. 39)

Neste caso, os multiplicadores 2 e 10 e suas combinações são testados, e/ou combinações das frações $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{10}$, quando a soma dos produtos parciais assim obtidos compunham o produto informado. Essa combinação correspondente ao multiplicador procurado. Mas nem sempre conseguiram obter o produto fornecido imediatamente desta forma e, nesses casos, a solução do problema envolvia três etapas: (*i*) multiplicações a partir das quais os produtos selecionados renderiam uma soma parcial inferior ao produto procurado, porém próximo a ele; (*ii*) determinação da diferença que deve ser adicionada a essa soma para formar o produto completo; e (*iii*) determinação do multiplicador ou multiplicadores necessários para produzir essa difrença. Os multiplicadores usados na primeira e terceira etapas formam o multiplicador necessário.

O problema 24 – seção V é um exemplo do uso do método da falsa posição:

Uma quantidade mais a sua sétima parte somam 19. Qual é a quantidade?

Considerando que 7 é o valor da quantidade pedida, a sua sétima parte é 1. Então, 7 adicionado à sua sétima parte somam 8, conforme a disposição abaixo.

$$\begin{array}{rr} \backslash\ 1 & 7 \\ \backslash\ \overline{7} & 1 \\ \text{Soma} & 8 \end{array}$$

O valor 7 é o conveniente porque aqui inibe o uso de fração e não se presume que este seja o valor correto, ou mesmo uma aproximação dele. Agora calculando o número de vezes que o número 8 "cabe" em 19, ou seja, o resultado da divisão de 19 por 8;

$$\begin{array}{rr} 1 & 8 \\ \backslash\,2 & \mathbf{16} \\ \overline{2} & 4 \\ \backslash\,\overline{4} & \mathbf{2} \\ \backslash\,\overline{8} & \mathbf{1} \\ 2\ \overline{4}\ \overline{8} & \end{array}$$

- a resposta é o produto de 7 (*valor considerado*) por 2 $\overline{4}$ $\overline{8}$;

$$\begin{array}{ll} \backslash\,1 & 2\ \overline{4}\ \overline{8} \\ \backslash\,2 & 4\ \overline{2}\ \overline{4} \\ \backslash\,4 & 9\ \overline{2} \\ & 16\ \overline{2}\ \overline{8} \end{array}$$

Verificação da resposta:

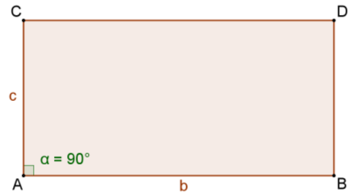
$$\begin{array}{rl} \text{A quantidade é} & 16\ \overline{2}\ \overline{8} \\ \text{A sétima parte é} & 2\ \overline{4}\ \overline{8} \\ \text{Soma} & 19 \end{array}$$

2 CONHECIMENTOS ANTERIORES

N'*Os Elementos*, que devem nortear a compreensão desse trabalho, conforme a obra de Bicudo, encontra-se no *Livro I* as noções comuns ou axiomas: (i) as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si; (ii) caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais os todos são iguais; (iii) caso de iguais sejam subtraídas (partes) iguais, as (partes) restantes são iguais; (iv) caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais; (v) os dobros da mesma coisa são iguais entre si; (vi) as metades da mesma coisa são iguais entre si; (vii) as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si; (viii) o todo é maior do que a parte; e, (ix) duas retas não contém uma área. Do Livro II, destacam-se, neste trabalho, as seguintes definições e proposições.

Definição 1.	***Todo paralelogramo retangular é dito ser contido pelas duas retas que contêm o ângulo reto.***

Figura 3: Paralelogramo retangular.



Fonte: O autor, 2024.

Deve-se observar que na construção de um paralelogramo retangular o ângulo reto é um elemento fundamental. Daí, dois casos no seu processo de construção são apresentados:

(i) conhecida a medida b de um dos seus lados e a medida c do outro

Sobre duas retas perpendiculares, partindo do ponto de interseção A, marcam-se os pontos B e C, de modo que $AB = b$ e $AC = c$ sejam as medidas conhecidas. Pelo ponto B, traça-se uma paralela a AC e, pelo ponto C, traça-se uma paralela a AB. O ponto D, interseção das paralelas traçadas, é o quarto vértice do paralelogramo retangular.

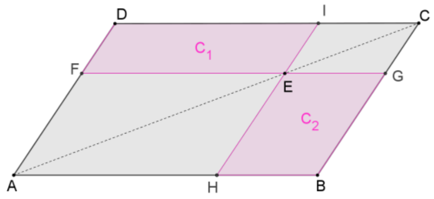
(ii) conhecida a medida $AB = b$ de um dos seus lados e a medida d da diagonal

Traça-se sobre uma reta horizontal a medida AB dada. A seguir traçam-se duas perpendiculares passando pelas extremidades A e B. Com o compasso centrado em uma das extremidades, traça-se um arco de circunferência, com medida $AD = d$, intersectando a perpendicular que passa pela outra extremidade, no ponto D. Finalmente, traçando um segmento paralelo ao lado AB, passando pelo ponto C, e intersectando a outra perpendicular, tem-se o paralelogramo retangular pedido.

Definição 2. ***De toda área paralelogrâmica, um dos paralelogramos, qualquer que seja, à volta da diagonal dela, com os dois complementos, seja chamado um gnômon.***

No paralelogramo $ABCD$, marca-se o ponto E sobre a diagonal AC, em seguida traçam-se o segmento FG paralelo ao lado AB e o segmento HI paralelo ao lado AD, com $E = FG \cap HI$. Desse modo, ficam determinados os paralelogramos $AHEF$ e $EGCI$ à volta da diagonal AC,bem como as regiões C_1 e C_2, paralelogrâmicas, chamadas complementos.

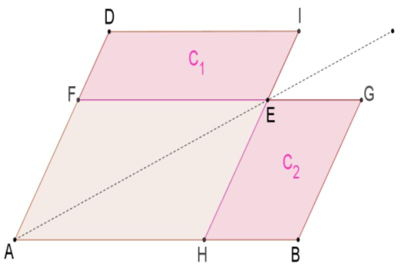
Figura 4: Gnômons (ou Gnômones).



Fonte: O autor, 2024.

Pela definição de gnômon [4], tem-se:

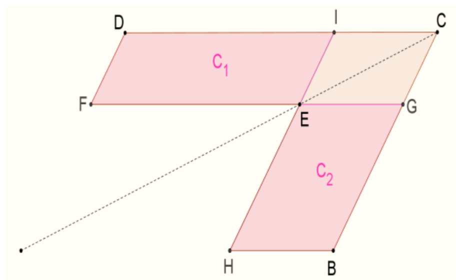
Figura 4a: Exemplo de gnômon.



Legenda: A região $ABGEID$, formada pelo paralelogramo $AHEF$, à volta da diagonal, e as regiões C_1 e C_2.

Fonte: O autor, 2024.

Figura 4b: Exemplo de gnômon.



Legenda: A região $HBCDFE$, formada pelo paralelogramo $EGCI$, à volta da diagonal, e as regiões C_1 e C_2.

2.1 Teorema do Gnômon

Os paralelogramos que formam os complementos tem mesma área.

Prova: Sejam as regiões C_1 e C_2, conforme a figura-2. Como a diagonal de um paralelogramo divide a sua área ao meio, tem-se que as áreas dos triângulos ABC e CDA, formados pela diagonal AC, são tais que $S_{ABC} = \frac{S_{ABCD}}{2} = S_{CDA}$, logo $S_{ABC} = S_{CDA}$.

[4] Segundo Heron da Alexandria: Um gnômon é qualquer figura que acrescentada a uma figura original, produz uma figura semelhante à original. (Lawlor, R. Geometria Sagrada). Aqui se aplica também a noção de números gnômicos ou números figurados. (Eves, H, p.107)

Analogamente, $S_{AHE} = S_{EFA}$ e $S_{EGC} = S_{CIE}$. Como $S_{ABC} = S_{AHE} + S_2 + S_{EGC}$ e $S_{CDA} = S_{CIE} + S_1 + S_{EFA}$, tem-se $S_{AHE} + S_2 + S_{EGC} = S_{CIE} + S_1 + S_{EFA}$, então conclui-se o resultado, $\boldsymbol{S_1 = S_2}$.

2.2 Algumas Proposições de Euclides

Após as definições 1 e 2, seguem-se as proposições que, analisadas pelo processo de decomposição, revelam algumas identidades algébricas, como conhecidas atualmente. A ideia fundamental é que nesse processo o todo é igual à soma das partes que o compõe.

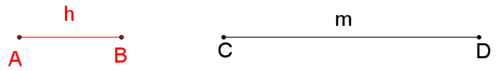
> *"Imbuídos da ideia de representação de um número por meio de um comprimento e carecendo completamente de qualquer notação algébrica adequada, os gregos antigos idearam processos algébricos engenhosos para efetuar operações algébricas."* [7]

Vale lembrar que, para os gregos, o número era uma medida ou comprimento ou um segmento; para isso, representa-se a medida de um segmento, um número, por uma letra minúscula do nosso alfabeto. Nesse mundo repleto de geometria, o produto de dois números era geometricamente representado pelo retângulo cujos lados eram formados pelos dois segmentos (números) dados. Figuras de retângulos, quadrados e suas combinações fornecem a prova de certas igualdades geométricas que serão traduzidas ou interpretadas em termos algébricos.

Proposição 1: ***Caso existam duas retas, e uma delas seja cortada em segmentos, quantos quer que sejam, o retângulo contido pelas duas retas é igual aos retângulos contidos tanto pela não cortada quanto por cada um dos segmentos.***

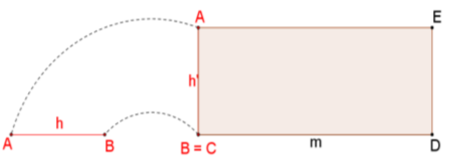
Considerem-se o segmento de reta AB de comprimento h e o segmento CD de comprimento m.

Figura 5: Retas (Segmentos).



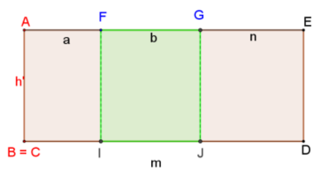
Fonte: O autor, 2024.

Figura 5a : Retângulo contido pelas duas retas.



Fonte: O autor, 2024.

Figura 5b: Retângulos contidos pela cortada.



De fato, a área do retângulo da figura 6a é igual ao produto hm. Tomando o mesmo retângulo, cortando o segmento CD nos pontos I e J tal que $m = a + b + n$. Traçando $FI \parallel GJ \parallel AB$, tem-se $\boldsymbol{hm = ha + hb + hn}$.

Substituindo m por $a + b + n$, segue o resultado $\boldsymbol{h(a + b + n) = ha + hb + hn}$.

Proposição 2:	***Caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, o retângulo contido pela reta toda e cada um dos segmentos é igual ao quadrado sobre a reta toda.***

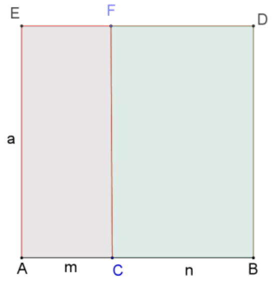
Seja o segmento AB de medida a, cortado ao acaso pelo ponto C, conforme a figura seguinte.

Figura 6: Segmento cortado ao acaso.

Fonte: O autor, 2024.

Traçando os segmentos AE, CF e BD todos medindo a, perpendiculares ao segmento AB pelos pontos A, C e B, tem-se:

Figura 6a: Quadrado sobre AB.



Fonte: O autor, 2024.

Como a área do quadrado $ABDE$ é igual a soma das áreas dos retângulos $ACFE$ e $CBDF$, o resultado é imediato: tem-se $a \times a = am + an$, ou seja, $\boldsymbol{a^2 = am + an}$.

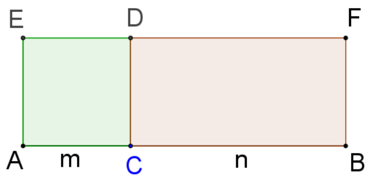
Sendo $a = m + n$, da igualdade acima, tem-se $\boldsymbol{(m + n)^2 = (m + n)m + (m + n)n}$.

Proposição 3:	***Caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, o retângulo contido pela reta toda e por um dos segmentos é igual a ambos, o retângulo contido pelos segmentos e o quadrado sobre o predito segmento.***

Seja o segmento AB de medida a, cortado ao acaso pelo ponto C, conforme a figura 6 da proposição anterior.

Construindo o quadrado $ACDE$ sobre o segmento AC e prolongando o lado ED até o ponto F tal que medida EF seja igual à medida de AB, traça-se o segmento BF, obtendo o retângulo $CBFD$.

Figura 7: Retângulo sobre a reta toda e um dos segmentos.



Fonte: O autor, 2024.

Como a área do retângulo $ABFE$ é igual à soma da área quadrado $ACDE$ com a área do retângulo $CBFD$, o resultado é imediato.

Fazendo a medida de $AC = m$ e a mediada de $CB = n$ pode-se escrever a relação entre as áreas pela identidade $\boldsymbol{m(m+n) = m^2 + mn}$.

Proposição 4:	***Caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, o quadrado sobre a reta toda é igual aos quadrados sobre os segmentos e também duas vezes o retângulo contido pelos segmentos.***

Seja o segmento AB de medida a, cortado ao acaso pelo ponto C, conforme a figura 6 da proposição 2.

Construindo o quadrado $ACDE$ sobre o segmento AC e prolongando o lado ED até o ponto F tal que medida EF seja igual à medida de AB, traça-se o segmento BF, obtendo-se o retângulo $CBFD$. A seguir, prolongando o lado AE até B', de modo que medida de AB' seja igual à medida de AB e repetindo o processo anterior, obtém-se o retângulo $EB'F'D$. Por construção, tem-se que o retângulo $CBFD$ é congruente ao retângulo $EB'F'D$ e o ponto G, interseção das semirretas $B'F'$ com BF, determina os quadrados $ABGB'$ e $DFGF'$.

Figura 8a: Quadrado sobre a reta toda.

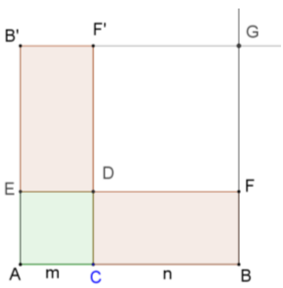
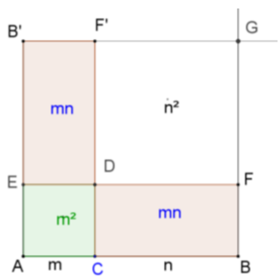


Figura 8b: Áreas Determinadas na figura 8a.



Fonte: O autor, 2024.

Observando na figura–8b, as indicações dos números das áreas e sabendo que a área do quadrado $ABGB'$, por decomposição, equivale à soma da área do quadrado $ACDE$ mais a área do quadrado $DFGF'$ mais a área do retângulo $CBFD$ mais a área do retângulo $EB'F'D$, complementos do gnômon sobre a diagonal AG, segue o resultado.

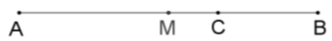
Fazendo $AC = m$ e $CB = n$, pode-se escrever $(\boldsymbol{m+n})^2 = \boldsymbol{m^2 + n^2 + mn + mn}$.

Portanto, tem-se a identidade $(\boldsymbol{m+n})^2 = \boldsymbol{m^2 + n^2 + 2mn}$.

Proposição 5:	***Caso uma linha reta seja cortada em iguais e desiguais, o retângulo contido pelos segmentos desiguais da reta toda, com o quadrado sobre a entre as seções, é igual ao quadrado sobre a metade.***

Dado o segmento AB, sendo M o seu ponto médio e C um ponto qualquer, conforme a figura.

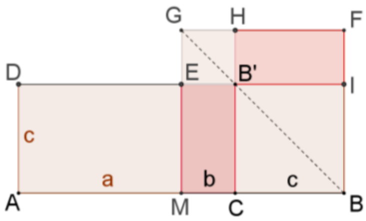
Figura 9: Segmento cortado em iguais e desiguais.



Fonte: O autor, 2024.

Sobre o segmento AB, constrói-se o retângulo $ABID$ com as medidas de AD e BI iguais à medida de CB. Traçar os segmentos ME e CB' paralelos ao lado AD. A seguir, construir o quadrado $MBFG$ sobre a metade e o quadrado $EB'HG$ entre as seções.

Figura 9a: Quadrado sobre a metade.



Fonte: O autor, 2024.

Como os retângulos $MCB'E$ e $B'IFH$ tem mesma área, pois são os complementos do gnômon que formam com quadrado $CBIB'$, tem-se que a área deste gnômon equivale à área do retângulo $ACB'D$ formado pelos segmentos desiguais.

Portanto, para completar a área do quadrado $MBFG$, adiciona-se a área do quadrado $EB'HG$ à área do retângulo $ACB'D$.

Fazendo $AM = a$, $MC = b$ e $CB = c$, tem-se $c(a+b) + b^2 = (b+c)^2$ ou ainda, como $c = a - b$, segue $(\boldsymbol{a-b})(\boldsymbol{a+b}) + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{a}^2$, ou ainda, $(\boldsymbol{a-b})(\boldsymbol{a+b}) = \boldsymbol{a^2 - b^2}$.

Proposição 6: ***Caso uma linha reta seja cortada em duas, e seja adicionada a ela alguma reta sobre uma reta, o retângulo contido pela reta toda junto com a adicionada e pela adicionada, com o quadrado sobre a metade, é igual ao quadrado sobre a composta tanto da metade quanto da adicionada.***

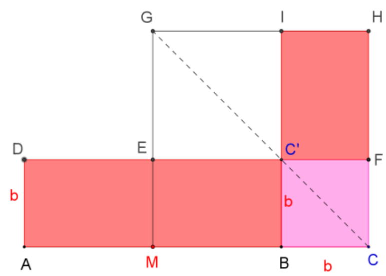
Dado o segmento AB, sendo M o seu ponto médio, e seja C um ponto qualquer do seu prolongamento, conforme a figura.

Figura 10: Segmento cortado em iguais e a adicionada.

Fonte: O autor, 2024.

Sobre o segmento AC, construir o retângulo $ACFD$ com as medidas de AD e de CF igual à medida de BC. Traçar os segmentos ME e BC' paralelos ao lado AD. A seguir, construir o quadrado $EC'IG$, sobre a metade, e o quadrado $MCHG$, sobre a metade e a adicionada.

Figura 10a: Quadrado sobre a metade e a adicionada.



Fonte: O autor, 2024.

Como os retângulos $MBC'E$ e $C'FHI$ tem mesma área, pois são os complementos do gnômon que formam com o quadrado $BCFC'$ e como $AMED$ e $MBC'E$ tem mesma área, por construção, segue que a área deste gnômon equivale à área do retângulo $ACFD$.

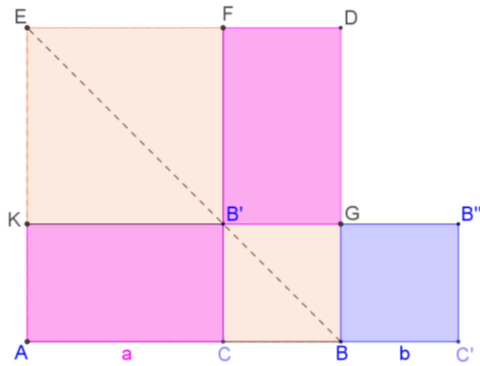
Portanto, para completar a área do quadrado $MCHG$, basta adicionar a área do quadrado $EC'IG$ à área do retângulo $ACFD$.

Sendo $AB = a$ e M o ponto médio de AB, então $AM = MB = \frac{a}{2}$. Como a área do quadrado $MCHG$ equivale à área do quadrado $EC'IG$ mais a área do retângulo $ACFD$, segue-se então o resultado $\left(\boldsymbol{\frac{a}{2} + b}\right)^{\boldsymbol{2}} = (\boldsymbol{a + b})\boldsymbol{b} + \left(\boldsymbol{\frac{a}{2}}\right)^{\boldsymbol{2}}$.

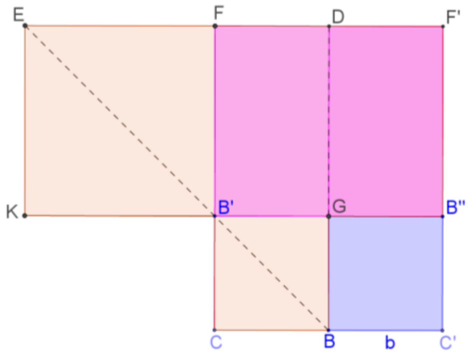
Proposição 7:	***Caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, os quadrados ambos juntos, o sobre a reta toda e o sobre um dos segmentos, são iguais a duas vezes o retângulo contido pela reta toda e pelo dito segmento e também o quadrado sobre o segmento restante.***

Seja o segmento AB, cortado ao acaso pelo ponto C, conforme a figura 8 da proposição 2. Construir o quadrado $ABDE$, sobre o segmento AB, e traçar os segmentos CF e GK paralelos aos lados do quadrado $ABDE$, com a medida de BG igual à de CB. Prolongando o segmento AB até o ponto C', com a medida de BC' igual à de CB, tem-se que os quadrados $CBGB'$ e $BC'B''G$ são congruentes, figura 11a.

i) Figura 11a: Quadrado sobre a reta toda e um dos segmentos.



ii) Figura 11b: Quadrado sobre o outro segmento e o retângulo sobre a reta toda e o segmento restante.



Fonte: O autor, 2024.

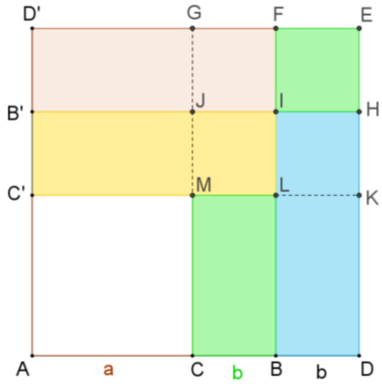
Construindo-se o retângulo $GB''F'D$ congruente ao retângulo $B'GDF$, que é congruente ao retângulo $ACB'K$, tem-se que as figuras 11a e 11b possuem mesma área.

Fazendo $AC = a$ e $CB = b$, na figura-11a vem $(a + b)^2 + b^2$ enquanto na figura-11b vem $a^2 + 2b(a + b)$, segue-se então o resultado $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$.

Proposição 8:	***Caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, quatro vezes o retângulo contido pela toda e por um dos segmentos, com o quadrado sobre o segmento restante, é igual ao quadrado descrito sobre a reta e também o dito segmento, como sobre uma única.***

Seja o segmento AB, cortado ao acaso pelo ponto C , conforme a figura 6 da proposição 2. Construindo o quadrado $ADED'$ e sendo o segmento BD, prolongamento de AB, de medida igual à medida do segmento CB, os segmentos BF, CG, $B'H$ e $C'K$, paralelos aos lados do quadrado $ADED'$, determinam o seguinte: o quadrado $ACMC'$, quatro retângulos congruentes entre si e quatro quadrados menores congruentes entre si.

Figura 12: Retângulos por um dos segmentos e o quadrado sobre o segmento restante.



Fonte: O autor, 2024.

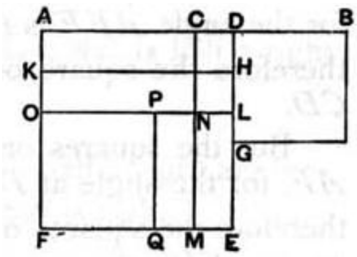
Observando que um retângulo adicionado a um quadrado menor equivale ao retângulo formado pelo segmento todo AB e o segmento CB, conclui-se o resultado: o quadrado $ADED'$ equivale ao quadrado $ACMC'$ adicionado a quatro desse retângulo.

Vejam-se também as proposições de 9 a 14 que completam o livro II. Conforme Heath [9], vale notar que Euclides abandona o método de demonstração em que as figuras são decompostas em vários retângulos e quadrados a que os teoremas se referem. Essas proposições marcam um novo ponto de partida nas demonstrações em que as provas serão feitas a partir do teorema de Pitágoras.[5] As demonstrações são apresentadas com a alternativa de continuar o processo utilizado nas proposições anteriores, quando possível assim serão exibidas aqui. Seguem-se as proposições, as figuras e as demonstrações:

[5] It is noteworthy that, while the first eight propositions of Book II. Are proved independently of the Pythagorean theorem **I.** 47, all the remaining propositions beginning with the 9th are proved by means of it. (Euclid's Elements, v.1 – Book II, Heath, 1908)

Proposição 9: ***Caso uma linha reta seja cortada em iguais e desiguais, os quadrados sobre os segmentos desiguais da toda são o dobro tanto do quadrado sobre a metade quanto do sobre a entre as seções.***

Figura 13: Quadrados sobre desiguais.

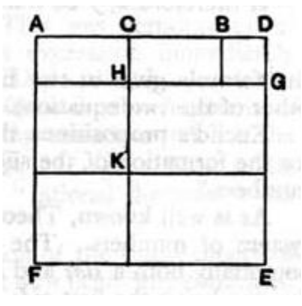


Fonte: Heath, 1968.

Construa os quadrados com lados nos segmentos AD e DB, respectivamente, como mostrado na figura. Marque os pontos H e L de modo que os segmentos DH e HL tenham medida igual a CD. Construa os segmentos HK, LO paralelos a EF e CM paralelo a DE. Marque os pontos N e P de modo que NP igual a CD, e construa o segmento PQ paralelo a DE.
Como AD, CD são respectivamente iguais a DE, DH, então HE é igual a AC ou CB; e, como HL é igual a CD, então LE é igual a DB.
Da mesma forma, como cada um dos segmentos EM, MQ é igual a CD, então FQ é igual a EL ou BD. Portanto, o quadrado de diagonal OQ é igual ao quadrado de lado DB.
Devemos provar que os quadrados em AD e DB são iguais ao dobro dos quadrados em AC, CD.
Como o quadrado em AD contem o quadrado de diagonal KM, equivalente ao quadrado em AC, e como os quadrados de diagonais CH e HN são o dobro do quadrado CD; falta provar que o que resta do quadrado em AD junto com o quadrado em DB é igual ao quadrado em AC.
Como sobraram os retângulos CK e NE, que são iguais a KN, PM respectivamente.
Mas estes últimos com um quadrado em DB são iguais aos retângulos KN, PM e o quadrado OQ, ou seja, ao quadrado KM ou ao quadrado em AC.
Portanto, o resultado necessário segue. [9]

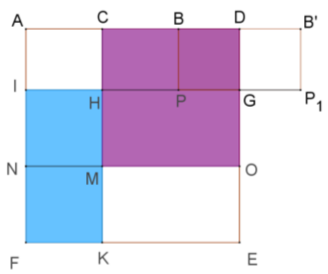
Proposição 10: ***Caso uma linha reta seja cortada em duas, e seja adicionada a ela alguma reta sobre uma reta, os quadrados ambos juntos, o sobre a toda com a adicionada e o sobre a adicionada, são o dobro tanto do sobre a metade quanto do quadrado descrito sobre a composta tanto da metade quanto da adicionada, como sobre uma única.***

Figura 14a : Proposição 10.



Fonte: Heath, 1968.

Figura 14b: Proposição 10 – Construção Auxiliar.



Fonte: O autor, 2024.

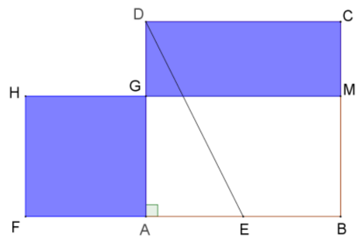
> A prova alternativa desta proposição por meio dos princípios exibido em II 1-8 segue as linhas daquele que dei para a proposição anterior.
> É imediatamente óbvio pela figura que o quadrado em AD inclui dentro dele o dobro do quadrado em AC junto com uma vez o quadrado em CD.
> O que sobra é a soma dos retângulos AH, KE. Estes, que equivalem a BH, GK, faça o quadrado em CD menos o quadrado em BD. Adicionando, portanto, o quadrado BG a cada lado, temos o resultado desejado. [9]

.

Proposição 11: ***Cortar a reta dada, de modo a o retângulo contido pela inteira e por um dos segmentos ser igual ao quadrado sobre o segmento restante.***

Sobre o segmento AB dado, construir a figura abaixo.

Figura 15: Quadrado equivalente a um retângulo.



Fonte: O autor, 2024.

Sobre a reta AB dada: Construir o quadrado $ABCD$ de lado AB; marcar o ponto E, ponto médio de AB, traçar o segmento ED e a seguir prolongue AB até o ponto F, de modo que EF igual a ED. sobre o prolongamento de AB, construir o quadrado $AFHG$ com lado de medida AF e prolongar HG até o ponto M.

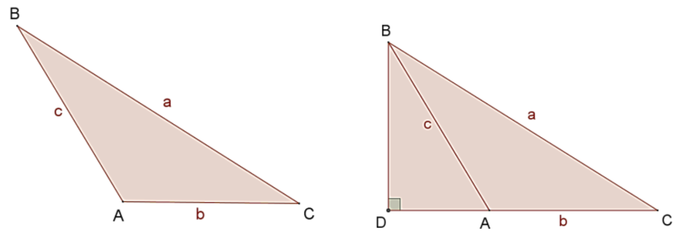
Como o segmento AB foi cortado ao meio em E, e FA é adicionado a ele, área do retângulo contido por $BFHM$ junto com a área do quadrado em AE é igual a área do quadrado EF, conforme a proposição 6.

No triangulo EAD o ângulo em A é reto; então, o Teorema Pitágoras garante que o quadrado DE equivale a soma dos quadrados AD e AE. Como EF é igual à DE (construção), segue $S_{AD} + S_{AE} = S_{BFHM} + S_{AE}$ o que implica $S_{AD} = S_{BFHM}$. Como $S_{AD} = S_{GMCD} + S_{ABMG}$ e $S_{BFHM} = S_{AFHG} + S_{ABMG}$, segue o resultado $S_{FAGH} = S_{GMCD}$

Proposição 12: ***Nos triângulos obtusângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo obtuso é maior do que os quadrados sobre os lados que contêm o ângulo obtuso por duas vezes o contido por um dos à volta do ângulo obtuso, sobre o qual cai a perpendicular, e também pela cortada exteriormente pela perpendicular relativamente ao ângulo obtuso.***

Dado um triângulo ABC com ângulo obtuso no vértice A.

Figura 16: Triângulo obtuso e triângulo retângulo auxiliar.



Fonte: O autor, 2024.

Prolongar o lado AC até o ponto D localizado na perpendicular a AC que passa pelo vértice B. Aplicando teorema de Pitágoras aos triângulos BDA e BDC ocorre, respectivamente, que; o quadrado sobre AB equivale à soma dos quadrados sobre BD e DA; e, o quadrado sobre BC equivale à soma dos quadrados sobre BD e DC. Logo, a diferença entre o quadrado BC e o AB equivale à diferença entre o quadrado DC e o DA.

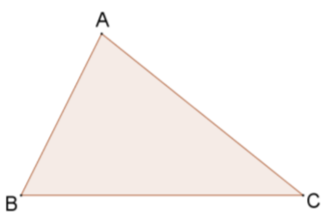
Como o ponto A corta aleatoriamente DC, então o quadrado DC equivale à soma dos quadrados DA e AC com duas vezes o retângulo DA,AC.

Portanto, a diferença entre o quadrado BC e o AB equivale à soma do AC com duas vezes o retângulo DA,AC.

Proposição 13: ***Nos triângulos acutângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo agudo é menor do que os quadrados sobre os lados que contêm o ângulo agudo por duas vezes o contido por um dos à volta do ângulo agudo, sobre o qual cai a perpendicular, e também pela cortada internamente pela perpendicular relativa ao ângulo agudo.***

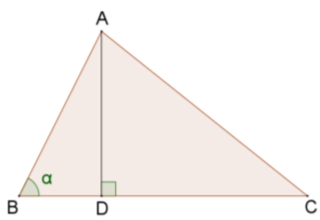
Dado o triangulo ABC acutângulo, conforme figura 17a, considerando o ângulo agudo α, traça-se AD perpendicular ao lado BC e obtém-se a figura 17b.

Figura 17a: Triângulo acutângulo.



Fonte: O autor, 2024.

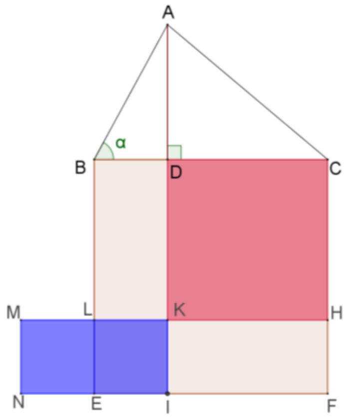
Figura 17b: Triângulo acutângulo auxiliar.



Fonte: O autor, 2024.

Construindo os quadrados $BCFE$ de lado BC e $MLEN$ de lado BD, conclui-se que o quadrado de lado BC adicionado ao quadrado de lado BD equivale ao quadrado DC adicionado a dois retângulos de lados BC, BD, figura seguinte.

Figura 18: Construção geométrica da proposição 13.



Fonte: O autor, 2024.

Como o triângulo *ABC* compõe-se pelos triângulos retângulos *ABD* e *ADC*, com *AD* comum, tem-se que: o quadrado *AB* equivale aos quadrados *AD* e *BD*; e, o quadrado *AC* equivale aos quadrados *AD* e *DC*. Então, adicionando o quadrado *AD* no resultado anterior, segue-se: quadrado de lado BC adicionado ao quadrado de lado BD adicionado ao AD equivale ao quadrado DC adicionado ao AD adicionado a dois retângulos de lados BC, BD; o que conclui o resultado.

Proposição 14: ***Construir um quadrado igual à retilínea dada.***

Conforme *Os Elementos*, Livro I definição 19: "Figuras retilíneas são as contidas por retas, ..." (Bicudo, 2009). Note-se que a palavra Figuras foi omitida no enunciado da proposição.

A proposição pede para construir um quadrado equivalente a uma região contida por retas, ou seja, equivalente a uma região poligonal.

Transformando a figura retilínea em um paralelogramo retangular, pode ocorrer que exista um quadrado imediatamente equivalente à figura retilínea dada, o que conclui.

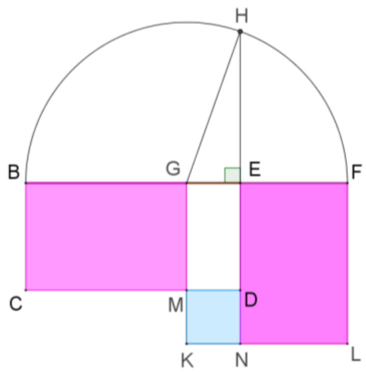
Caso contrário, existe um retângulo $BCDE$ equivalente à figura retilínea dada, contendo a região A.

Figura 19: Região retangular A.

Fonte: O autor, 2024.

Para construir o quadrado equivalente, prolonga-se BE até o ponto F, de modo que a medida de EF seja igual à de ED. Em seguida marca-se G, ponto médio de BF. Com centro no ponto G, traça-se uma semicircunferência sobre o diâmetro BF e prolonga-se DE até o ponto H. Considerando-se o raio GH, obtem-se o triângulo retângulo GEH, veja-se a figura.

Figura 20: Construção do quadrado.



Fonte: O autor, 2024.

Pela proposição 5 tem-se que o quadrado de lado GF é igual à soma do retângulo $BCDE$ com o quadrado de lado GE. Mas, pelo teorema de Pitágoras, o quadrado de lado GH equivale à soma dos quadrados de lado GE e o de lado HE. Como $GH = GF$, subtraindo-se o quadrado de lado GE da proposição 5 e do teorema de Pitágoras, simultaneamente, conclui-se que o retângulo $BCDE$ equivale ao quadrado de lado HE.

3 DIOFANTO

> *Esta tumba contém Diofanto. . . [e] conta cientificamente a medida de sua vida. Deus lhe concedeu ser um menino durante a sexta parte de sua vida, e acres-centando uma décima segunda parte a isso, Ele vestiu seu rosto com penugem. Ele acendeu-lhe a luz do casamento após a sétima parte, e cinco anos depois de Seu casamento concedeu-lhe um filho. Infelizmente! criança miserável nascida tardiamente; depois de atingir a metade da vida de seu pai, o frio do destino o levou. Depois de consolar sua dor com esta ciência dos números durante quatro anos, ele acabou com sua vida.—Epigrama* [8]

Pouco se sabe sobre a vida de Diofanto, exceto que ele morava em Alexandria. É através de sua obra principal, *Arithmetica*, que sua influência atingiu os tempos modernos. *Arithmetica* foi um primeiro tratado sobre álgebra, composto por treze livros. Desses 13 originais, apenas 6 foram presevados. Assim como o papiro de Ahmes, *Arithmetica* é uma coleção de problemas e soluções.

O grande avanço na apresentação das soluções de equações reside na introdução do simbo-lismo algébrico. Diofanto introduziu abreviações simbólicas para os vários termos envolvidos nas equações. No uso tradicional grego, Egípcios e Babilônios apresentavam suas equações e soluções de forma retórica; ao atribuir uma simbologia algébrica para lidar com essas equações, Diofanto passa a dar tratamento eminentemente analítico às soluções, assim pôde trabalhar com equações de grau superior ao terceiro, no caminho da superação do simbolismo linear de Euclides.

Vale ressaltar que os geômetras conheciam duas formas de provar uma proposição: a *sintética* em que, a partir de fatos conhecidos se vai avançando passo a passo na direção do desconhecido; e, a *analítica* em que a proposição a ser provada assume o valor verdadeiro ou falso, cuja consistência deve ser provada através de fatos mais simples já conhecidos ou deve se enquadrar a condições dadas no enunciado da proposição.

A partir do século II, usava-se a sequência das letras do alfabeto para representar as unidades, as dezenas e as centenas. Como o alfabeto grego clássico tinha apenas 24 letras e era preciso 27 símbolos, então acrescentaram-se três letras antigas que tinham caído em desu-so: *digamma* (F) ou *stigma* (ς) para 6; *qoppa* (ϟ)(ϙ) para 90;- *sampi* (ϡ) (ͳ) para 900. Um pequeno sinal, semelhante ao acento agudo, era colocado no alto e à direita da sequência de símbolos para indicar que as letras que o precediam eram numerais, ou ainda, uma barra horizontal era colocada sobre as letras-números. Para representar os milhares, uma vírgula antes da unidade tinha efeito multiplicativo por mil.

Figura 21: Valores das letras gregas.

α′, β′, γ′, δ′, ε′ = 1, 2, 3, 4, 5.
*ϛ = 6.
ζ′, η′, θ′, ι′ = 7, 8, 9, 10.
(ια′, ιβ′......ιθ′ = 11, 12......19.)
κ′, λ′, μ′, ν′, ξ′, ο′, π′ = 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80.
(κα′, κβ′, λα′, λβ′ etc. = 21, 22, 31, 32 etc.)
*ϙ = 90.

ρ′, σ′, τ′, υ′, φ′, χ′, ψ′, ω′ = 100, 200, 300......800.
*ϡ = 900.
(ρια′, ρκβ′ etc. = 111, 122 etc.)
͵α, ͵β, ͵γ, ͵δ, ͵ε etc. = 1000, 2000, 3000 etc.
Mυ or M, $\overset{\beta}{M}$, $\overset{\gamma}{M}$ etc. = 10,000, 20,000, 30,000 etc.

Fonte: Gow, 1884.

Resumindo as informações acima, segue-se a tabela.

Tabela 1: Numeração grega alfabética.

Unidades				Dezenas				Centenas			
Maiúscula	Minúscula	Nome	Valor	Maiúscula	Minúscula	Nome	Valor	Maiúscula	Minúscula	Nome	Valor
Α	α	Alfa	1	Ι	ι	iota	10	Ρ	ρ	rô	100
Β	β	Beta	2	Κ	κ	capa	20	Σ	σ	sigma	200
Γ	γ	Gama	3	Λ	λ	lambda	30	Τ	τ	tau	300
Δ	δ	Delta	4	Μ	μ	mi	40	Υ	υ	ípsilon	400
Ε	ϵ	Épslon	5	Ν	ν	ni	50	Φ	ϕ	phi	500
Ϝ Ϛ	ϝ ϛ	**Digama stigma**	6	Ξ	ξ	csi	60	Χ	χ	khi	600
Ζ	ζ	Dzeta	7	Ο	o	ômicron	70	Ψ	ψ	psi	700
Η	η	Eta	8	Π	π	pi	80	Ω	ω	ômega	800
Θ	θ	Teta	9	Ϙ Ϟ	ϙ ϟ	**qoppa**	90	Ͳ Ϡ	ͳ ϡ	**sampi**	900

Nota: Inspirada em Ifrah, História Universal dos Algarismos - I, p.467.
Fonte: O autor, 2024.

3.1 **Os símbolos de Diofanto**

Os símbolos de Diofanto são abreviações: considera-se que ς seja a contração das duas primeiras letras $\alpha\rho$ da palavra αριθμος (*arithmos* ou número), representativa da quantidade desconhecida (x); e $\overset{\circ}{M}$, a abreviação de μονας (*monas* ou unidade) que representa a unidade (o termo independente).

Como Diofanto não teve oportunidade de usar potências além do expoente seis nos problemas que resolveu, o seu sistema de símbolos não vai além desse valor.

Tabela 2: Símbolos de Diofanto para as potências e a representação moderna.

Diofanto		Representação Moderna
Termo (desconhecido)	Símbolo	
Unidade *	$\overset{\circ}{M}$	x^0
Número	ς	x
Quadrado	Δ^Y	x^2
Cubo	K^Y	x^3
Quadrado-quadrado	$\Delta^Y\Delta$	x^4
Quadrado-cubo	ΔK^Y	x^5
Cubo-cubo	$K^Y K$	x^6

Fonte: Bunt, 2020.

As regras de escrita das expressões algébricas (polinômios), segundo Diofanto, exigiam que: (*i*) os coeficientes fossem escritos em algarismos gregos após o termo desconhecido; (*ii*) Todos os termos a serem subtraídos fossem escritos após o símbolo ⋔; (*iii*) Os termos a serem acrescentados fossem escritos lado a lado, justapostos, sem acréscimo de sinal entre eles e da mesma forma para os termos a serem subtraídos. Nas obras pesquisadas encontramos, por exemplo, a expressão $\Delta^Y\bar{\gamma}\ \varsigma\overline{\iota\beta}\mathrm{M}^{\circ}\bar{\theta}$, que significa: 3 quadrados ($\Delta^Y\bar{\gamma}$); 12 números (ςιβ) ;e, 9 unidades (M˚θ); ou seja, $\Delta^Y\bar{\gamma}\ \varsigma\overline{\iota\beta}\mathrm{M}^{\circ}\bar{\theta}$ representa $\boldsymbol{3x^2+12x+9}$; Observando que os gregos representavam os números γ = 3, ιβ = 12 e θ = 9. Já a expressão x^3-5x^2+8x-2 equivale a 1 cubo; 8 números; menos (⋔); 5 quadrados; 2 unidades representamos por $K^Y 1\varsigma 8 \pitchfork \Delta^Y 5 M^o 2$. Mas, como $1=\alpha,\ 8=\eta,\ 5=\epsilon,\ 2=\beta,$ finalmente temos $\boldsymbol{K^Y\bar{\alpha}\varsigma\bar{\eta}\pitchfork\Delta^Y\bar{\epsilon}M^o\bar{\beta}}$.

Como a maioria dos problemas da *Aritmética* envolviam a determinação de várias quantidades desconhecidas e devido à insuficiencia de notação, Diofanto procurou reduzir todos os problemas para equações a uma incógnita. Nas suas soluções, consideradas as condições do problema, ele expressava as quantidades desconhecidas em termos de um único símbolo. Realizadas todas as transformações necessárias, apenas respostas racionais positivas eram admitidas, visto que ele não considerava o conceito de quantidades (desconhecidas) negativas, muito embora permitisse a operação de subtração.

Nessa limitação de símbolos, muitas vezes Diofanto descrevia as operações através de palavras, mesmo em condições em que o uso do símbolo fosse de melhor proveito. Desse modo, a algebra de Diofanto deve ser reconhecida como sincopada[6].

[6] As we have seen, Diophantiis used but few symbols. Sometimes he ignored even these by describing an operation in words, when the symbol would have answered as well or better. Considering the amount of symbolism used, Diophantus' algebra may be designated as "syncopated." (Cajori Florian, p.90)

O primeiro Livro limita-se a determinadas equações algébricas; os Livros II ao V contêm na maior parte problemas indeterminados, envolvendo expressões do primeiro ou do segundo grau, a duas ou mais variáveis que devem ser transformadas em quadrados ou cubos. Na visão de Heath, a partir do estudo que fez da *Arithmetica*, Diofanto vive num estado maravilhoso, inteligente, perspicaz, infatigável, mas não penetra completa ou profundamente na raiz do problema. O trabalho de Diofanto distingue-se na construção das equações e na sua solução. Ele é brilhante na arte da análise indeterminada que inventou, mas devido à insuficiência no pensamento especulativo, que foca no resultado Verdadeiro mais do que no correto, a ciência tem uma dívida direta com esse gênio brilhante de poucos métodos.

Na solução Problema 2 do Livro V, *Encontrar três números em proporção contínua*[7] *de modo que, quando somados a um determinado número (20), cada um dê um quadrado,* quando surge a equação $4x + 20 = 4$, seu resultado é considerado “absurdo”, porque levaria a um número negativo, ou seja, solução “impossível”. O 4 deve ser algum número, quadrado perfeito, maior que 20. Seus métodos de solução variavam de caso para caso, de modo que não era possível verificar a existência de uma teoria sistemática em seu trabalho. Cada pergunta exigia sua própria técnica especial, que muitas vezes não serviria para outros problemas.

3.2 **As soluções de Diofanto**

Esperava-se que o método de Diofanto fosse considerado um trabalho de logística e não de aritmética. Mas, feita a distinção: enquanto logística procura uma resposta particular para uma questão; a aritmética busca definir classes de números ou encontrar regras aplicáveis a todos os números. Os problemas com os quais Diofanto lida geralmente são de aritmética. Porém, ele fica satisfeito quando chega a um resultado particular. Mesmo quando o problema se resolve por uma equação quadrática que admita duas raízes positivas, ele se contenta apenas com uma. Em nota de rodapé, Nesselmann afirma que os árabes e os primeiros italianos sempre davam as duas raízes, conforme [7].

Diofanto apresentava a seguinte regra para resolução[8] de *equações puras* (equações que contem somente uma potência desconhecida de qualquer grau), isto é, da forma $Ax^m = B$:

---

[7] Proporção contínua ou três termos em progressão geométrica.

[8] In Def. XI. Diophantus gives a rule for the solution of pure equations in the following manner: "If a problem leads to an equation containing the same powers of the unknown (εἴδη τὰ αὐτά) on both sides but not with the same coefficients (μή ὁμοπλήθη)', you must deduct like from like till only two equal terms remain. But when on one side or both some terms are negative (ἐνελλείπει), you must add the negative terms to both sides till all the terms are positive (ἐνυπάρχει) and then deduct as before stated." (A Short History of Greek Math, p. 113)

> "Quando a mesma potência do termo desconhecido aparece nos dois lados da equação, mas não com o mesmo coeficiente, você deve deduzir igual de igual... Mas, quando aparecer um ou mais termo negativo em um lado ou em ambos, você deve adicionar os termos negativos até que se tornem positivo e então fazer como no início." [8]

Diofanto admitia como resposta um único valor numérico dentre os números racionais (inteiros ou fracionários) e positivos. Nos casos em que m era par, considerava-se apenas o valor positivo para resposta às equações puras, $Ax^m = B$.

A seguir ele promete um método para resolver (*mixed ou adfected*)[9] equações quadráticas; embora encontre essas equações, nunca apresenta o processo de solução. Ele simplesmente declara a raiz ou afirma que a equação é solúvel[10], para raízes irracionais, apresentava uma aproximação. Em seu método de solução para equações do tipo $mx^2 + px = q$, ele primeiro multiplicou os termos por m em vez de dividi-los. Três formas de equações quadráticas ocorrem em Diofanto:

(1) $mx^2 + px = q$, por exemplo, Livro VI – problema 6;

(2) $mx^2 = px + q$, por exemplo, Livro IV – problema 45; e,

(3) $mx^2 + q = px$, por exemplo, Livro VI - problema 24.

A este ponto pode surgir uma dúvida sobre a paternidade da álgebra. Ademais, na sequência deste texto, serão apresentadas as formas de resolução praticadas por Al-Khwarizmi, após o que se pode retomar essa reflexão. Resta ainda, para ajudar nessa avaliação posterior, considerar a seguinte afirmação sobre o conhecimento da obra de Diofanto no mundo árabe:

> "... os livros desaparecidos de Diofanto foram aparentemente perdidos numa data muito antiga, provavelmente antes do século *X*, pois não há indicação de que os árabes sequer os possuíssem." [11] [3] (Tradução nossa)

Segundo Katz, só recentemente os quatro outros livros foram descobertos numa versão árabe. Ao comparar o estilo do texto original grego com a escrita arabe, chegou–se a conclusão de que a obra árabe possivelmente origina-se numa tradução de um comentário sobre a *Arithmética*, escrito por Hipácia por volta do ano de 400 EC.

---

[9] Considere *mixed or adfected quadratic equation* como equação quadrática contendo os termos mx^2, px e q.

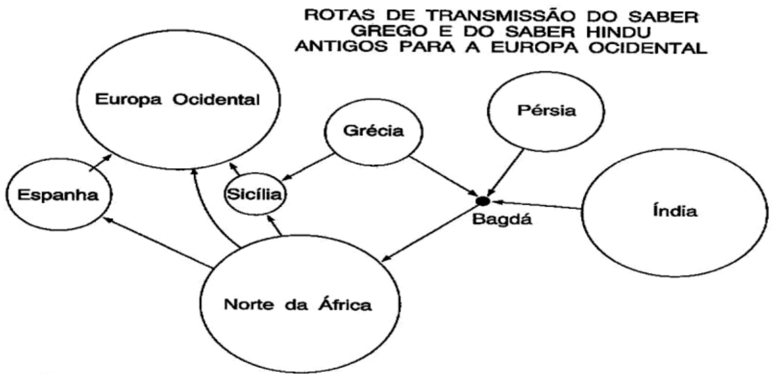
[10] He then promises to give the method of solving mixed or adfected quadratic equations, but this rule does not appear in our texts, and unfortunately Diophantus, though he often arrives at such equations, never goes through the process of solving them. He merely states a root or says that the equation is soluble. (A Short History of Greek Math, p. 113)

[11] "... the missing books were apparently lost at a very early date, probably before the tenth century, for there is no indication that the Arabs ever possessed them." Burton, p. 219.

4 TRANSMISSÃO DO SABER NO PERÍODO DE EXPANSÃO

No período da expansão islâmica, iniciada pelo profeta Maomé, (632–732), (em árabe ف تح, *Fatah***,** literalmente "fechadura"), com referência à primeira metade do século VII, surge uma nova civilização. Superados os problemas da conquista territorial, a vastidão do império deu surgimento aos califados. Os conquistadores islâmicos acomodaram as tensões existentes entre os habitantes das cidades, consequência da intensificação das relações comerciais e o desenvolvimento da vida urbana, através de patrocínios. A biblioteca de Bagdá, capital recém-criada, foi estabelecida pelo califa Harun al-Rashid e recebeu a contribuição de trabalhos de vários intelectuais que fugiram de perseguição sofrida nas academias de Atenas e Alexandria. Esses estudiosos levaram manuscritos que continham textos científicos e da Matemática Grega Clássica. Imediatamente iniciou-se a promoção de programa sistemático de tradução desses manuscritos para o árabe.

Figura 22: Indicação das Rotas de Transmissão do Saber.



Fonte: Eves, 2004.

Complementando observação da figura acima, cita-se o fragmento:

> O advento do islamismo forneceu o ímpeto que logo (c. 700) levaria os árabes à conquista da Índia, Pérsia, Mesopotâmia, Norte da África e Espanha. Dessa forma, os árabes obtiveram (avidamente) os escritos científicos de gregos e hindus, que traduziram para o árabe preservando-os assim ao longo da Idade Média da Europa. Uma das aquisições mais brilhantes foi o sistema de numerais hindu (muitas vezes chamados arábicos)... [1]

Desse contexto de efervescência, surge o período de transmissão, quando as obras ganharam suas traduções. Nesse período, o conhecimento grego que fora preservado pelos muçulmanos é passado para os europeus ocidentais principalmente pelos intelectuais cristãos que se deslocavam aos centros de saber árabe e pelas relações comerciais mantidas pelo reino normando da Sicília e o Oriente. Segundo Howard Eves, a solução completa da equação quadrática surgiu pela primeira vez na obra *Geometria Prática* de Abraham Bar Hiyya e ressalta, ainda, a atuação de Gerardo de Cremona (1114-1187) que traduziu do árabe para o latim o *Almagesto* de Ptolomeu, os *Elementos* de Euclides e a álgebra de Al-Khwarizmi, entre outros dos mais de noventa trabalhos árabes.

O califa al-Ma'mun (813-833), sucessor de Harun al-Rashid, fundou a Casa da Sabedoria (Bayt al-Hikma), um instituto de pesquisas que existiria por mais de dois séculos. Acadêmicos e estudiosos de todas as partes do califado foram convidados para executarem trabalhos de tradução de textos gregos e indianos para o árabe. Também tiveram liberdade para desenvolverem seus próprios trabalhos de pesquisa. Como resultado, no final do século IX, estavam disponíveis para estudos muitos dos principais trabalhos de Euclides, Archimedes, Apollonius, Diophantus, Ptolemy, e outros matemáticos gregos. Os acadêmicos islâmicos foram além. Robert of Chester adverte que :

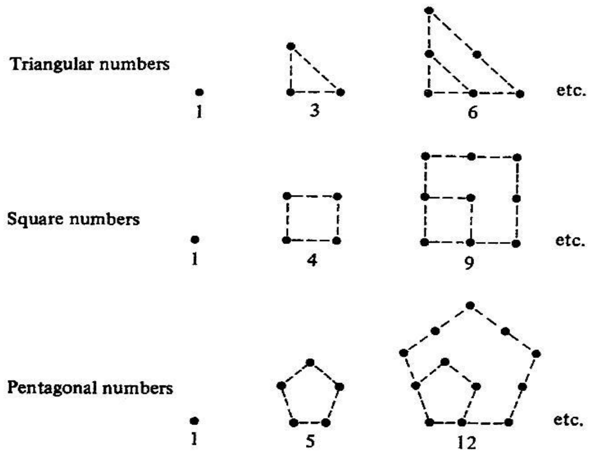
> Muitos dos nossos conhecimentos sobre a matemática grega vêm de fontes árabes; as primeiras versões latinas vieram de traduções de textos árabes ao invés dos originais gregos. Do mesmo modo, a aritmética e a astronomia hindus chegaram à Europa através do Islam. Os serviços árabes para a ciência não se limitaram à preservação e à transmissão das aprendizagens de outras nações. Eles contribuíram com o desenvolvimento em muitos campos de conhecimento. [12] [5] (Tradução nossa)

[12] Much of our knowledge of Greek mathematics comes to us from Arabic sources; the early Latin versions were frequently based upon Arabic texts rather than the Greek originals. Similarly, Hindu arithmetic and astronomy were transmitted to Europe by Islam. The services of the Arabs to Science were not limited to the preservation and transmission of the learning of other nations. They made independent contributions in many fields. (Robert of Chester's, Latin Translation of Algebra of Al-Khowarizmi, p. 1)

5 CONHECIMENTOS RECEBIDOS

É importante ressaltar que para os gregos as soluções de problemas de matemática compreendiam duas formas de enfrentamento: a **logística**, que tratava dos procedimentos de cálculo, essa tarefa era de responsabilidade dos comerciantes e escravos; a **aritmética** que, sob responsabilidade dos filósofos e nobres, estudava os números (naturais) e suas propriedades de maneira mais teórica, a chamada de teoria dos números. A relação entre aritmética e geometria surge, na teoria dos números, através dos estudos dos números figurados.

Figura 23: Números Figurados.



Fonte: Bunt, 2020.

Na geometria de Euclides, essas relações faziam-se nas construções de figuras para a análise das partes que as compunham, método da decomposição desenvolvido pelos primeiros pitagóricos. Algumas construções que foram apresentadas aqui, conforme propostas nos *Elementos*, podem ser facilitadoras para a compreensão de demonstrações no trabalho de Al-Khwarizmi. Levando-se em conta que as soluções de Al-Khwarizmi eram completamente retóricas, a inclusão de demonstrações geométricas vai dar um sentido de uso prático às suas afirmações sobre solução de equações.

O processo de apropriação e manutenção dos conhecimentos recebidos da matemática antiga foi patrocinado pelos governantes e encorajado por apoio financeiro de famílias ricas. Embora o trabalho de Euclides não esteja diretamente relacionado à álgebra de Al-Khwarizmi, os princípios inaugurados por ele, relacionados ao rigor matemático, são de grande importância para auxiliar nessa compreensão. Como fonte de inspiração ao trabalho de Al-Khwarizmi, é firme a hipótese de estar baseado em fonte hindu, conforme Toomer (*Dictionary of Scientific Biography*), citado em *A History of Algebra*, Waerden, B.L. van der, pp.14-15. Reforça essa ideia o fato de Al-Khwarizmi ter escrito um tratado sobre os numerais hindus.

Um descontentamento em Al-Khwarizmi fica claro quando ele possivelmente resiste na utilização da obra de tradução de seu velho contemporâneo, Al-Hajjaj, protagonista na recepção dos trabalhos da ciência grega no mundo árabe. Al-Hajjaj foi responsável pela tradução dos elementos de Euclides. Parece que para manter essa posição, AL-Khwarizmi realiza seu proposito de escrever um tratado popular contornando as dificuldades da matemática teórica grega, o qual tem por finalidade o uso prático em resolução de problemas e necessidades de ordem legal, comercial, etc, da sociedade emergente à época.

> Uma comparação entre a fig. 13.2, tirada da *Álgebra* de al-khowarizmi, com diagramas encontrados em *Os elementos* de Euclides em conexão com a álgebra geométrica grega (como nossa Fig. 7.7) leva inevitavelmente à conclusão de que a álgebra árabe tinha muito em comum com a geometria grega: no entanto, a primeira parte, aritmética, da *Álgebra* de al-Khowarizmi evidentemente é estranha ao pensamento grego. O que aparentemente aconteceu em Bagdá foi exatamente o que seria de se esperar num centro comercial e cosmopolita. Os sábios árabes tinham grande admiração pela astronomia, matemática, medicina e filosofia gregas, assuntos que dominaram o melhor que podiam. [...] pela primeira vez chamou a atenção para os nove maravilhosos dígitos hindus, "há também outros que sabem alguma coisa". É provável que al-Khowarizmi fosse um exemplo típico do ecletismo árabe que será tão frequentemente observado em outros casos. Seu sistema de numeração muito provavelmente vinha da Índia, sua sistemática resolução de equações pode ter sido desenvolvida na Mesopotâmia, e o quadro geométrico lógico para suas soluções evidentemente vinham da Grécia.
>
> A Álgebra de al-Khowarizmi contem mais que a resolução material que ocupa a primeira metade. Há, por exemplo, regras para operações com expressões binomiais, inclusive produtos como $(10+2)(10-1)$ e $(10+x)(10-x)$. Embora os árabes rejeitassem as raízes negativas e grandezas negativas, conheciam as regras que governam o que chamamos números com sinal. Há também provas geométricas alternativas de alguns dos seis casos de equações do autor. Finalmente a Álgebra contém uma ampla variedade de problemas ilustrando os seis capítulos ou casos. (Boyer, 1998).

6 ÁLGEBRA DE AL-KHWARIZMI

Dentre as contribuições árabes, destaca-se a Álgebra de Al-Khwarizmi. Segundo Chester, esse trabalho é uma excursão pelo pensamento medieval e, ainda hoje, repleto de sugestões de atividades para o professor de matemática elementar. Há intenção de tirar proveito dessas análises por meios geométricos elaborados por Al-Khwarizmi sobre as soluções de equações quadráticas.

Apenas alguns detalhes da vida de al-KwärizmI podem ser obtidos a partir dos breves relatos em obras bibliográficas islâmicas e de comentários ocasionais de historiadores e geógrafos islâmicos. O epíteto "al-Khwärizml" normalmente indicaria que ele veio de Khwärizm (...). Mas o historiador al-Tabarl dá-lhe o epíteto adicional "al-Qutrubbull", indicando que ele veio de Qu!rubull, um distrito entre o Tigre e o Eufrates, não muito longe de Bagdá, então talvez seus ancestrais, e não ele próprio, tenham vindo de Khwarizm; esta interpretação é confirmada por algumas fontes que afirmam que sua linhagem (a~i) era de Khwärizm.

Durante o reinado do Califa al-Maʾmūn (813-833), Muḥammad ibn Mūsā al-Khwarizmi foi encorajado a popularizar a álgebra. Importa considerar que as primeiras traduções de textos matemáticos para o árabe eram de difícil compreensão, isto porque não se dispunha de um vocabulário técnico para lidar com os significados específicos encontrados nos trabalhos herdados.

Nesse pormenor, vale relembrar a resistência de al-Khwarizmi ao uso da tradução de al-Hajjaj. Sua algebra representou um protesto à aplicação direta da tradução de Euclides na recepção da ciência grega no mundo árabe; mesmo com as traduções que já circulavam no território por realização de Al-Hajjaj. Al-Khwarizmi escreveu um manual popular para orientar a resolução de equações, a descoberta de um número. Ao tornar-se um membro da "Casa da Sabedoria" e sob o patrocínio de AL-Ma'mun, ganhou notoriedade. Nesse contexto, Al-Khwarizmi compôs seu tratado de astronomia e dedicou-o ao soberano, bem como a sua Álgebra reverencia Al-Ma'mun.

O uso do sistema de contagem Hindu foi de fundamental importância para o desenvolvimento da álgebra. Al Khwarizmi produziu um pequeno tratado, em árabe, para explicar o uso do sistema decimal hindu. Embora tenha usado nove letras para representar os dígitos na escrita dos números, ele também fez uso do zero. Na subtração, por exemplo, quando não restar nada , registre-se um pequeno círculo para que o espaço não fique vazio.

Dessa forma, a dificuldade de operar com letras isoladas representando quantidades estava superada.

O *Kitāb al-jabr wa-al-muqābala* (*livro Álgebra e al-Muqābala)* escrito por al-Khwarizmi, pela primeira vez tratava o termo álgebra como uma disciplina distinta e com um vocabulário próprio. Al-Khwarizmi é reconhecido como o primeiro autor islâmico a obter soluções de problemas através das leis de *al-jabr* e de *al-muqabala".* O termo ***jabr*** significa restaurar, completar ou tornar inteiro: usualmente referindo-se a adicionar termos iguais aos dois membros de uma equação, de modo a eliminar termos negativos; pode ser também multiplicar os dois lados de uma equação pelo mesmo número de modo a eliminar frações. Já o termo ***muqabala*** representa reduzir, comparar ou balancear termos semelhantes, que aparecem nos dois lados de uma equação, subtraindo dos membros da equação a mesma quantidade desses termos semelhantes. Segundo *Waerden*, o significado literal da palavra *muqabala* é comparar, colocar-se em oposição.

Na introdução do seu livro, Al-Khwarizmi revela o objeto d'O Livro Álgebra e Almucabola: refere-se a problemas de aritmética e geometria; faz ***Agradecimento***, como era o costume, louvemos a Deus, terno e piedoso, assim começa o livro "de Restauração e Oposição de número". Mohammed disse, louve a Deus o criador que conferiu ao homem o poder de descobrir o significado dos números. A unidade está implícita em todo número. De fato, considerando que todas as coisas necessárias aos homens requerem contagem. Eu descobri que todas as coisas envolvem número e descobri que número não é outra coisa senão aquilo que é composto de unidades. E ainda mais, eu descobri que todos os números podem ser agrupados em unidades até formar uma dezena, o sistema decimal.

O número dez pode ser tratado da mesma forma que a unidade, isto é, pode ser dobrado, triplicado como a unidade. E assim, duplicando a dezena temos 20, triplicando temos o 30. Desse modo multiplicando por dez temos uma centena. Repetindo o procedimento para a centena, dobrando, triplicando, etc: a centena chega a milhar. Prosseguindo com a multiplicação da milhar, chegamos a vários outros números e suas denominações, o que nos conduz aos números no infinito. ***Números de restauração e de oposição***, ademais, eu descobri que os *números de restauração e de oposição* são de três tipos: raízes, quadrados e números. O número por si só não está ligado nem às raízes nem aos quadrados. A raiz é qualquer "coisa" [شيء (shay)] composta de unidades que podem ser multiplicadas por si mesmo, ou qualquer número maior que a unidade multiplicado por si mesmo, ou aquele que é diminuído abaixo da unidade quando multiplicado por si mesmo. O quadrado é aquele que resulta da multiplicação de uma raiz por ela mesma. Portanto, as raízes são números não negativos.

Como pouca ou nenhuma matemática era ensinada à população, além das noções básicas de leitura em árabe. As soluções de problemas através das leis de *al-jabr* e de *al-muqabala* eram apresentadas de maneira retórica, no vocabulário árabe. O termo *shay*, usado em árabe para designar coisa, passa a representar o termo desconhecido de primeiro grau. *Shay* teve tradução para o latim *res* e para o italiano *cosa*. Circulou por séculos, na Alemanha, a obra *Die Coss*, escrita em 1524, de Adam Riese, cujo título deriva da palavra *cosa*, no sentido utilizado por Al-Khwarizmi. Assim, os problemas eram resolvidos através de *coss*. Referia-se à álgebra por "*cossic art*" na Inglaterra e por "*die coss*" na Alemanha. Em estudos recentes sobre as traduções da língua árabe para as línguas europeias, o americano Terry Moore, afirma que a palavra árabe *al-shalan* (a coisa desconhecida) ou *shai* (coisa), ficou ligada à letra grega *chi*: X – χ. Depois, o desconhecido chegou até nós, através de traduções do latim, em que o x virou símbolo de incógnita. Sobre as conclusões de Moore, a própria fonte nos adverte que:

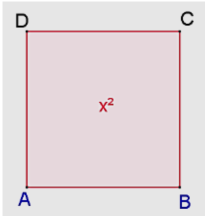
> " Na verdade, o uso de x (bem como de y e z) tornou-se comum graças ao uso de René Descartes das três últimas letras do alfabeto para representar quantidades desconhecidas em seu tratado *La Géométrie*. ... Descartes pode simplesmente ter visto as letras no final do alfabeto como notações convenientes para o desconhecido - em contraste, ele tinha a, b e c representando o conhecido." [11]

Os processos de cálculo utilizados por Al-Khwarizmi eram retorica e exaustivamente explicados, considerado o seu propósito de popularizar a matemática elementar da época. De modo que as demonstrações geométricas assumiram um papel esclarecedor, convincente e prático das operações realizadas com os números, as raízes e os quadrados. De certa maneira, é o reconhecimento da força que a demonstração (geométrica), com o seu apelo visual, tem no processo de aprendizagem e compreensão.

"Agora, portanto, é necessário que demonstremos geometricamente as verdades dos mesmos problemas que resolvemos em números (aritmeticamente)", Robert of Chester's, p.77. Observe-se que a palavra proposição será utilizada aqui considerando que o problema e a sua solução formam uma unidade significativa.

A primeira proposição é que "*um quadrado e 10 raízes são iguais a 39 unidades"*. Para prova, um quadrado de lado desconhecido foi construído e qualquer lado representa a raiz x que se deseja encontrar. Seja $ABCD$ esse quadrado de lado desconhecido medindo x:

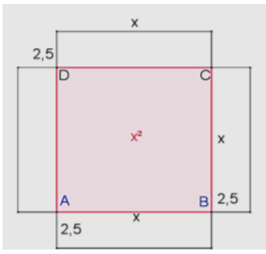
Figura 24- Quadrado de lado x



Fonte: O autor, 2024.

Ao multiplicar qualquer lado deste por um número é evidente que o resultado será um número de raízes (do quadrado). Como foram propostas dez raízes mais o quadrado, pega-se uma quarta parte do número dez para construir em cada lado do quadrado uma área retangular, cujo comprimento deve ser igual ao comprimento do quadrado descrito pela primeira vez e a largura $\frac{10}{4} = 2{,}5$, que é a quarta parte de 10. Logo, quatro áreas de lados congruentes são aplicadas ao quadrado, $ABCD$. Em cada um destes, o comprimento x e também a largura $2{,}5$, agora são as áreas $2{,}5x$. Portanto, haverá quatro áreas retangulares cuja soma é $10x$.

Figura-25: Exemplo de representação geométrica.



Fonte: O autor, 2024.

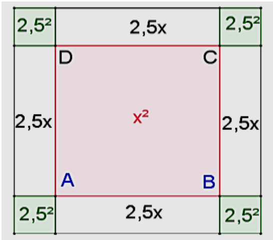
Representação algébrica da figura-25

$$x^2 + 2{,}5x + 2{,}5x + 2{,}5x + 2{,}5x$$
$$=$$
$$\boldsymbol{x^2 + 10x}$$

Um quadrado mais dez raizes.

Quando se constroem externamente pelos vertices do quadrado $ABCD$ outros quatro quadrados de lados medindo 2,5, conforme a figura seguinte, fica formado um quadrado de área maior. O número das áreas de cada um dos quatro cantos encontra-se multiplicando $2\frac{1}{2}$ por $2\frac{1}{2}$, e é oque completa o quadrado maior. Então, somando essas quatro áreas à area anteriormente dada, encontra-se a área do quadrado maior. Como a primeira figura quadrada, que representa o quadrado da incógnita (x^2), com as quatro áreas das laterais do quadrado $(10x)$ perfazem o número 39; quando se adiciona o número 25, ou seja, as áreas dos quatro quadrados menores a esse total, obtem-se a área do quadrado maior.

Figura 26 - Representação geométrica auxiliar.



Fonte: O autor, 2024.

Representação algébrica da figura 26

Como $\boldsymbol{x^2 + 10x = 39}$, então

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$

$$x^2 + 10x + 25 = 64$$

$$(x + 5)^2 = 64$$

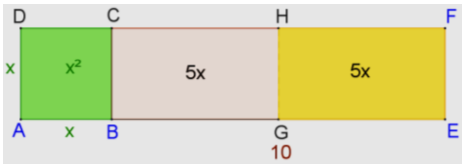
A área do quadrado maior é 64,
Logo, 8 é sua raiz.

Como o lado do quadrado maior mede $2{,}5 + x + 2{,}5 = x + 5$ cujo valor é 8; então, encontra-se a raiz do primeiro quadrado $ABCD$ subtraindo 5 de 8, isto é, $x = 3$.

Alternativamente, pode-se mostrar o mesmo do seguinte modo:

Ao quadrado $ABCD$, que representa o quadrado da incógnita (x^2), adiciona-se as dez raízes $(10x)$ e depois marca-se a metade dessas dez raízes $(5x)$.

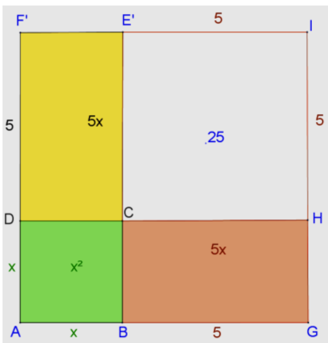
Figura-27: Representação geométrica alternativa.



Fonte: O auto, 2024.

Então, transfere-se cada uma dessas duas metades da área adicionada a dois lados consecutivos da figura do quadrado *ABCD*. Como cada uma dessas areas tem uma medida igual a x, largura de um lado do quadrado *ABCD*, e a outra medida igual a 5. Forma-se o quadrado de raiz $x + 5$ ao adicionar um quadrado de área 25, lado 5, e assim completar o quadrado $x + 5$, conforme a figura seguinte.

Figura-28: Construção alternativa.



Fonte: O autor, 2024.

Como as duas áreas unidas aos dois lados do primeiro quadrado equivalem a dez raízes ($10x$) e adicionando à área do primeiro quadrado (x^2) somam 39; e, como evidente, a área do quadrado maior ou total é formada pela adição de 25 a 39, cujo total é 64. Portanto, a raiz do quadrado maior $x + 5$ é 8 e segue o resultado.

Comparando com o procedimento anterior, percebemos que o desenho do quadrado maior, raiz $x + 5$, estava incompleto: (i) pela falta de quatro quadrados de lado $\frac{10}{4} = 2{,}5$; ou, (ii) pela falta de um quadrado de lado $\frac{10}{2} = 5$. Essa comparação torna evidente que a quarta parte de qualquer número multiplicado por si mesmo e depois multiplicado por quatro dá o mesmo número que a metade do número multiplicado por si mesmo. Para um número qualquer c, tem-se que:

$$4\left(\frac{c}{4}\right)^2 = 4\left(\frac{c^2}{16}\right) = \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{2^2} = \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Após completarmos o passo a passo na construção das respostas acima pela geometria, podemos perceber que algumas dificuldades na compreensão das ideias empregadas são esclarecidas por meio de figuras geométricas. Desse modo, as figuras são um facilitador necessário para uma melhor apendizagem no estudo das equações quadráticas. Do que se acabou de ver, Chester's adverte que:

> *A correspondência do procedimento geométrico com a terminologia e os métodos empregados na álgebra torna altamente desejável apresentar as discussões geométricas e algébricas em conjunto aos estudantes de matemática elementar.* [13] [5] (Tradução nossa)

6.1 Soluções de Al-Khwarizmi.

Seguem as regras de solução dadas por Al-Khwarizmi, retorica e algebricamente, e seus respectivos exemplos. Deve-se ter cuidado com o uso da expressão "completar quadrados", posto que o seu significado no contexto do trabalho árabe é tornar o coeficiente de x^2 unitário, procedimento que corresponde à operação *al-jabr*.

Considerando o quadrado x^2, tem-se x como *raiz* e consiferando n como *unidades* ou "*número puro*", pode-se relacionar ou combinar esses três tipos de números em seis tipos de equações.

[13] The correspondence of the geometrical procedure to the terminology and the methods employed in algebra makes it highly desirable to present the geometrical and algebraical discussions together to students of elementary mathematics. ([5], p.81)

Tomando dois desses *números* para formar uma equação, podem-se ter os três tipos seguintes.

Estes são os três tipos designados como "simples" por Omar al-Khayyami, Al-Karkhi e Leonardo de Pisa.[14] [5]

(i) Raízes iguais a números:

Equação	Solução:	Quando as raízes são iguais a um número, divida o número (n) pelo número de raízes (a), então o quociente representa a quantidade desejada (x).
$ax = n$	$\Longrightarrow$	$x = \frac{n}{a}$ Qualquer que seja o número de raízes, eles terão que ser reduzidos a uma raiz e a mesma operação deve ser realizada nos números.

Exemplos de raízes iguais a números:

a) Uma raiz é igual a 3. Portanto, nove é o quadrado desta raiz. ($x = 3$, então $x^2 = 9$)

b) Quatro raízes são iguais a 20. Portanto, uma raiz deste quadrado é 5. ($4x = 20$, então $x = 5$)

c) Meia raiz é igual a dez. A raiz inteira, portanto é igual a 20, dos quais, é claro, 400 representa o quadrado. ($\frac{1}{2}x = 10$, então $x = 20$ e $x^2 = 400$)

(ii) Quadrados iguais a números:

Equação	Solução:	Quando os quadrados são iguais a um número, divida o número (n) pelo número de quadrados (a), então a raiz (quadrada) do quociente representa a quantidade desejada (x).
$ax^2 = n$	$\overset{1}{\Leftrightarrow}$	$x^2 = \frac{n}{a} \quad \overset{2}{\Rightarrow} \quad x = \sqrt{\frac{n}{a}}$ 1 – Qualquer que seja o número de quadrados, eles terão que ser reduzidos a um quadrado e a mesma operação deve ser realizada nos números.

Exemplos de quadrados iguais a números:

a) Um quadrado é igual a nove. Então, nove mede o quadrado dos quais três representa uma raiz. ($x^2 = 9$, então $x = 3$)

---

[14] These are the three types designated as ' simple ' by Omar al-Khayyami, Al-Karkhi, and Leonard of Pisa. Robert of Chester's, p107.

b) Cinco quadrados equivalem a 80. Portanto, um quadrado é igual à quinta parte do número 80 que é 16. ($5x^2 = 80$, então $x^2 = \frac{80}{5} = 16$)

c) Metade de um quadrado é igual a 18. Este quadrado, portanto, é igual a 36. ($\frac{1}{2}x^2 = 18$, então $x^2 = 2 \times 18 = 36$)

(*iii*) Quadrados iguais a raízes:

Equação	Solução:	Quando as raízes são iguais a quadrados, então divida o número de raízes (b) pelo o número de quadrados (a), e o quociente representa a quantidade desejada (x).
$ax^2 = bx$	$\Rightarrow$	$x = \dfrac{b}{a}$

Exemplos de quadrados iguais a raízes:

a) Um quadrado é igual a 5 raízes. A raiz do quadrado é então 5, e 25 forma o seu quadrado que, claro, é igual a cinco de suas raízes."

b) A terceira parte de um quadrado é igual a quatro raízes. Então, a raiz do quadrado é 12 e 144 designa seu quadrado.

c) Cinco quadrados equivalem a 10 raízes. Portanto, um quadrado é igual a duas raízes e a raiz do quadrado é 2. Quatro representa o quadrado.

Agora, tomando os três tipos *números* de uma vez para formar uma equação, podem-se ter os outros três tipos seguintes de equação.

(*iv*) Quadrados e raízes iguais a números:

Equação	Solução:	Quando um número é igual à soma dos quadrados e das raízes, então divida (*a equação*) pelo número de quadrados (a). Após a divisão, pegue metade do número de raízes $\left(\frac{b}{2a}\right)$ e multiplique por si mesmo. A este produto adicione o número $\left(\frac{n}{a}\right)$. A raiz desta soma menos a metade do número de raízes representa aquilo que é procurado (x).
$ax^2 + bx = n$	$\overset{1}{\Leftrightarrow}$	$x^2 + \dfrac{b}{a}x = \dfrac{n}{a} \quad \overset{2}{\Rightarrow} \quad x = \sqrt{\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{n}{a}} - \dfrac{b}{2a}$

Vide o exemplo anteriormente dado, ***um quadrado e 10 raízes são iguais a 39 unidades***.

(v) Quadrados e números iguais a raízes:

Equação	Solução:	Quando as raízes são iguais a um número e quadrados, então divida (a *equação*) pelo número de quadrados (a). Após a divisão, pegue metade do número de raízes $\left(\frac{b}{2a}\right)$ e multiplique por si mesmo. Deste produto subtraia o número $\left(\frac{n}{a}\right)$; a raiz do resto subtraída da metade do número de raízes é a quantidade desejada (x). Mas, se não for possível subtrair a raiz do resto da metade do número de raízes, é permitido adicionar.
$ax^2 + n = bx$	$\overset{1}{\Leftrightarrow}$	$x^2 + \frac{n}{a} = \frac{b}{a}x \quad \overset{2}{\Rightarrow} \quad x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{n}{a}}$

(vi) Raízes e números iguais a quadrados:

Equação	Solução:	Quando os quadrados são iguais a um número e raízes, então divida (a *equação*) pelo número de quadrados (a). Após a divisão, pegue metade do número de raízes $\left(\frac{b}{2a}\right)$ e multiplique por si mesmo. A este produto adicione o número $\left(\frac{n}{a}\right)$; a raiz desta soma mais metade do número de raízes representa aquilo que é procurado (x).
$bx \ + n = ax^2$	$\overset{1}{\Leftrightarrow}$	$\frac{b}{a}x + \frac{n}{a} = \ x^2 \quad \overset{2}{\Rightarrow} \quad x = \frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{n}{a}}$

6.2 **Construções Geométricas das soluções**

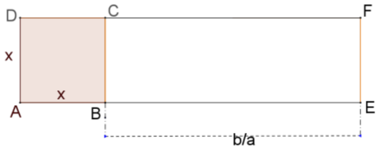
As demonstrações das soluções das equações do tipo (i), (ii) e (iii) são dadas de forma direta pelos enunciados das soluções, por *al-jabr*. Nos outros tipos tem-se, caso a caso:

(iv) Quadrados e raízes iguais a números: $\boldsymbol{ax^2 + bx = n}$.

Primeiro reduzir o número de quadrados para uma unidade, obtendo $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{n}{a}$.

Considerando o quadrado $ABCD$ de lado medindo x e prolongando o lado AB até o ponto E, de modo que o segmento BE meça b/a, construir o retângulo $BEFC$.

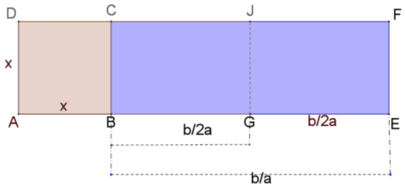
Figura 29 – Representação geométrica caso (*iv*)



Fonte: O autor, 2024.

Marcando G, o ponto médio do segmento BE, e J, o ponto médio do segmento CF, obtém-se dois retângulos congruentes $BGJC$ e $GEFJ$.

Figura 30- Retângulos $BGJC$ e $GEFJ$.



Fonte: O autor, 2024

Construindo o quadrado $AGHI$, figura 27a, e traçando BL, prolongamento do lado BC do quadrado $ABCD$, tem-se que os retângulos $DCLI$ e $BGJC$ são congruentes por serem complementos do gnômon formado com o quadrado $ABCD$, figura 23b.

Figura 30a: O quadrado $AGHI$.

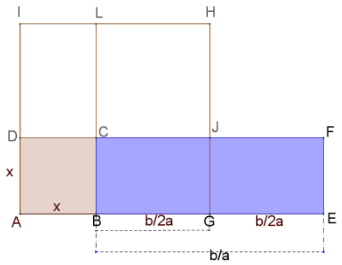
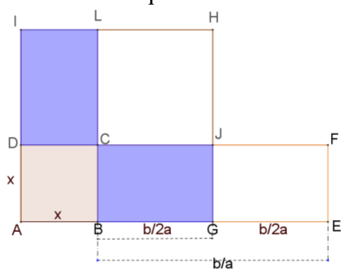


Figura 30b: Gnômon à volta do quadrado $ABCD$.



Fonte: O autor, 2024.

Como o quadrado $AGHI$ formado pelo gnômon à volta do quadrado $ABCD$ com o quadrado $CJHL$, tem-se que a área do quadrado $AGHI$ é igual à soma da área do retângulo $AEFD$ com a área do quadrado $CJHL$. Como área do quadrado $AGHI$ é igual a $(x+\frac{b}{2a})^2$, a área do retângulo $AEFD$ é igual a $x^2+\frac{b}{a}x$ e a área do quadrado $CJHL$ é igual a $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$; então,

$(x+\frac{b}{2a})^2 = x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, como $x^2+\frac{b}{a}x = \frac{n}{a}$, segue-se que $(x+\frac{b}{2a})^2 = \frac{n}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

Portanto, $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{n}{a}} - \frac{b}{2a}$

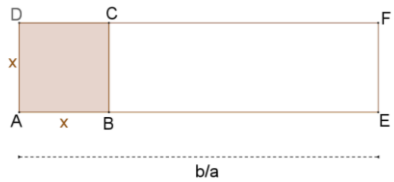
(v) Quadrados e números iguais a raízes: $\boldsymbol{ax^2 + n = bx}$ **.**

A descrição deste método mostra que ele poderia solucionar uma equação com duas raízes positivas, pelo menos numericamente.

Reduzindo o número de quadrados para uma unidade, obtém-se $x^2 + \frac{n}{a} = \frac{b}{a}x$ que fica representado geometricamente como segue.

Considerando o quadrado $ABCD$ e prolongando o lado AB até o ponto E, de modo que AE meça b/a, construímos o retângulo $AEFD$, cuja área é $\frac{b}{a}x = x^2 + \frac{n}{a}$.

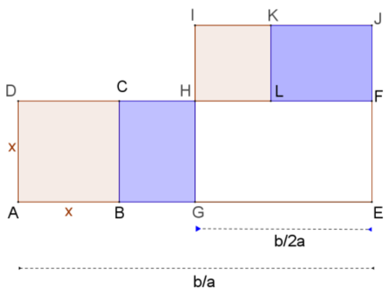
Figura 31: Representação geométrica caso (v)



Fonte: O autor, 2024.

Traçando GH, sendo G e H respectivamente o ponto médio dos lados AE e DF. Então, constrói-se o quadrado $HLKI$ com lado medindo CH=BG e o quadrado $GEJI$, com lado medindo $b/2a$.

Figura 32: Solução geométrica caso (v).



Fonte: O autor, 2024.

A área do quadrado $GEJI$ é igual à soma da área do retângulo $BEFC$ com a área do quadrado $HLKI$, pela proposição 5, página 9. [15]

Como a área do quadrado $GEJI$ é igual à soma da área de $GEFH$ mais a área de $LFJK$ mais a área de $HLKI$ e como soma da área de $GEFH$ mais a área de $LFJK$ é igual a área do retângulo $BEFC$.

[15] Thabit ibn Qurra observou explicitamente que o procedimento geométrico dos Elementos ... é comple-tamente análogo ao procedimento dos "algebristas", ... [10], pp. 276-277.

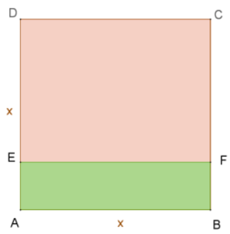
Então, de $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{n}{a} + \left(\frac{b}{2a} - x\right)^2$ segue o resultado $x = \frac{b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{n}{a}}$

Observa-se que o sinal negativo ocorre quando o ponto G está localizado à direta do ponto B, isto é, quando $\frac{b}{2a} > x$. Caso ocorra o ponto B localizado à direta do ponto G, teremos $x > \frac{b}{2a}$ e segue o resultado $x = \frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{n}{a}}$.

(vi) Raízes e números iguais a quadrados: $\boldsymbol{bx + n = ax^2}$.

Reduzindo o número de quadrados para uma unidade, obtém-se $\frac{b}{a}x + \frac{n}{a} = x^2$ que fica representado geometricamente na figura 26 seguinte. Basta considerar o quadrado $ABCD$ de lado medindo x tal que $DE = CF = \frac{b}{a}$ e a área do retângulo $ABFE$ igual a $\frac{n}{a}$,tem-se:

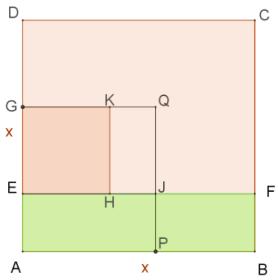
Figura 33: Representação geométrica caso (vi).



Fonte: O autor, 2024.

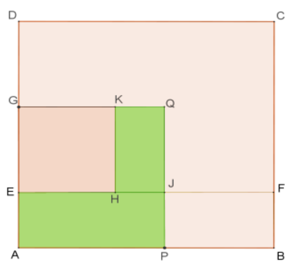
Sobre o lado AD marcar o ponto médio G do segmento DE e construir o quadrado $APQG$ com lado de medida AG. Ao construir-se o quadrado $EHKG$ com lado de medida GE, o retângulo $HJQK$ fica congruente ao $PBFJ$, conforme a figura 26a.

Figura 34a: Construção.



Fonte: O autor, 2024.

Figura 34b: Área de $APQG$



Considerando a área do quadrado $APQG$, figura 26b, tem-se que ela é igual à soma da área do quadrado $EHKG$ com a área dos retângulos $APJE$ e $HJQK$. Como a área dos retângulos $APJE$

e $HJQK$ equivale à área do retângulo $ABFE$, então a área do quadrado $APQG$ é igual à soma da área do quadrado $EHKG$ com a área do retângulo $ABFE$. Algebricamente, como a área do quadrado $APQG = \left(x - \frac{b}{2a}\right)^2$; a área do quadrado $EHKG = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$; e, a área do retângulo $ABFE = \frac{n}{a}$, tem-se $\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{n}{a}$, o que implica $x = \frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{n}{a}}$.

Ao final da apresentação geométrica dos resultados do livro de Algebra e Almucabola de Al-Khwarizmi, Robert of Chester's, na sua tradução latina, incluiu o seguinte:

> Agora que explicamos essas coisas de forma concisa pela geometria, para que o que é necessário a uma compreensão deste ramo de estudo possa ser facilitado. As coisas que com alguma dificuldade são concebidas pelos olhos da mente são esclarecidas por figuras geométricas.[16] [5]

A conclusão é que todos os problemas que recaiam em alguma das equações, como apresentadas anteriormente, podem ser resolvidas pelo método descrito por Al-Khwarizmi.

6.3 **Regras das operações**

Para seguir adiante na utilização do método, Al-Khwarizmi faz esclarecimentos sobre como realizar algebricamente a multiplicação de quantidades desconhecidas ou raízes. Define a multiplicação afirmando o processo de como encontrar o resultado: "*a única maneira de multiplicar um número por outro número é multiplicar o número tantas vezes quantas são as unidades do número pelo qual ele deve ser multiplicado.*" Atente-se que aqui se consideram os três tipos de números (quadrados, raízes e números).

Caso a multiplicação envolva números representados por somas ou diferenças, o texto em inglês apresenta o termo *nodes of numbers* (traduzido para *o maior número*) e *units* (traduzido para *o menor número*), então o processo da multiplicação terá quatro partes: (*i*) o maior multiplica o maior; (*ii*) o menor multiplica o maior; (*iii*) o maior multiplica o menor; e, (*iv*) o menor multiplica o menor; então, o processo termina com a adição dessas partes. Surge a operação da multiplicação de binômios como vistos atualmente. Nesse contexto, $(x \pm a)$ e $(x \pm b)$ pressupõem que $x > a$ e $x > b$, operando pelo processo acima, tem-se que:

(1) $(x + a) \times (x + b) = (x + a)x + (x + a)b = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a + b)x + ab$

(2) $(x - a) \times (x - b) = (x - a)x + (x - a)b = x^2 - ax - bx + ab = x^2 - (a + b)x + ab$; e,

(3) $(x + a) \times (x - b) = (x + a)x + (x + a)(-b) = x^2 + ax - bx - ab = x^2 + (a - b)x - ab$

---

[16] We have now explained these things concisely by geometry in order that what is necessary for an understanding of this branch of study might be made easier. The things which with some difficulty are conceived of by the eye of the mind are made clear by geometrical figures. [5], p. 89.

Sejam os exemplos de operações citados no *livro de Algebra e Almucabola*:

Um problema deste tipo é dado pelo seguinte: 10 e 2 devem ser multiplicados por 10 e 1. Portanto multiplique 10 por 10, dando 100; então 2 por 10, dando 20 para serem somados; da mesma forma, 10 por 1, dando 10 a ser adicionado. Dois por 1 dá 2 para ser adicionado. A soma total desta multiplicação é finalmente 132. E isto ilustra o que dissemos a respeito do tipo em que as unidades que acompanham o maior devem ser adicionadas.

Mas quando você deseja multiplicar 10 menos 2 por 10 menos 1, você diz 10 por 10 dá 100; 2 a ser subtraído por 10 dá 20 a ser subtraído; também 10 por 1 dá 10 para ser subtraído. Este total, então, equivale a 70. Mas menos 2 multiplicado por menos um dá positivo 2. Portanto, a soma total é finalmente 72. Isso ilustra o que dissemos quando ambos (binômios) envolvem negativos.

Além disso, se você deseja multiplicar 10 e 2 por 10 menos 1, você diz 10 por 10, 100, e 2 positivo multiplicado por 10 dá 20 positivo. Também 10 multiplicado por negativo 1 dá negativo 10. Esta soma, além disso, equivale a 110. Mas positivo 2 multiplicado por negativo i dá negativo 2. De onde a soma total desta multiplicação é igual a 108. E isto ilustra o tipo de processo quando unidades devem ser adicionadas e outras subtraídas.

Da mesma forma no caso das frações, se o problema for uma unidade e um sexto (a ser multiplicado) por uma unidade e um sexto. Você diz, unidade por unidade dá unidade; e um sexto de uma unidade por uma unidade dá um sexto de uma unidade. Também um sexto por uma unidade dá um sexto e um sexto por um sexto dá um sexto de um sexto, ou seja, um trigésimo sexto. O total será uma unidade e $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{36}$ de uma unidade.

Da mesma maneira, se você multiplicar uma unidade menos um sexto por uma unidade menos um sexto, o produto será igual a $\frac{5}{6}$ multiplicado por seu igual. De onde este produto é igual a 25 trinta e seis avos de uma unidade, ou seja, $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{6}$ de um sexto.

Agora, o método dessa multiplicação é multiplicar unidade por unidade, dando unidade; então negativo um sexto por unidade, dando negativo um sexto; então você multiplica uma unidade por negativo um sexto, resultando em um sexto negativo. Portanto, restam dois terços de uma unidade. E negativo um sexto multiplicado por negativo um sexto produz um sexto de um sexto positivo. A soma total equivale, portanto, a $\frac{2}{3}$ e um sexto de um sexto.
([5], pp. 91-93) (Tradução nossa)

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No caminho percorrido pela aritmética em direção à álgebra, isto é, na representação de processos de computação de resultados, encontra-se por elo a geometria.

Com a implementação do uso do sistema decimal, Al-Khwarizmi superou as dificuldades de operar com as letras-números apresentando e desenvolvendo o uso dos algarismos (símbolos específicos para quantidades) nos processos de computação de resultados. Daí a álgebra passa a ser considerada uma disciplina diferenciada.

Além do longo caminho percorrido pela "álgebra-aritmética", Al-Khwarizmi com as descrições geométricas de seu método tornou possível a mudança do foco da resolução de equações quadráticas. Sua busca, bem como a de alguns de seus antecessores, não reside tão somente na descoberta das medidas dos lados de quadrados, mas em encontrar números que satisfaçam certas condições, as equações.

Na introdução do seu trabalho, ele explicou o termo "raiz", não como um lado de um quadrado, mas como "qualquer coisa composta de unidades" que podem ser multiplicadas por si mesmas ou qualquer número maior que a unidade, multiplicado por si mesmo; ou ainda, aquele que é encontrado diminuído, menor que a unidade, quando multiplicado por si mesmo. É possível observar que se mantem a ideia egípcia de dois tipos numéricos: os inteiros (crescentes) e os fracionários (decrescentes).

Os resultados obtidos por al-khwarizmi podem e devem ser apresentados entrelaçados: algebra e geometria apoiando-se mutuamente. Essa foi a forma que a álgebra pôde ser apresentada a todos, no enfoque logístico de al-khwarizmi. E mais, que o impacto da evolução das ideias da representação simbólica da resolução de equações possa ser percebido através deste trabalho e que o hábito de resolver algebricamente problemas geométricos possa dar lugar à melhor compreensão aos estudos futuros em Geometria Analítica.

APÊNDICE - Plano para atividades

Público alvo:

As atividades serão ministradas aos alunos do ensino médio, a partir do primeiro ano. Os materiais utilizados variam de acordo com a disponibilidade da instituição e do acesso dos alunos. Por exemplo, folhas de papel quadriculado e/ou papel milimetrado, apostilas ou instruções impressas, programas/aplicativos (*Geogebra*), *Algeplan*, exercícios de obras específicas.

Objetivos:

1- a) Apresentar atividades de aritmética que possibilitem o uso da ideia de proporcionalidade, conforme apresentadas nas operações realizadas pelos egípcios;

b) Apresentar e/ou rever a base 2 (binária);

c) Mostrar o uso da base binária nas operações realizadas pelos egípcios.

2- Introduzir o estudo das proposições da geometria de Euclides contidas neste trabalho.

3- Apresentar os exemplos da álgebra de Al-Khwarizmi, utilizando-se das soluções geométricas das equações quadráticas.

Palavras de encorajamento, conforme RPM 15 - A regra da falsa posição:

> Professores mais antigos lembram-se de encontrar este método em seus livros-texto, quando estudantes *(Arihmetica Progressiva,* de António Trajano, por exemplo).
> Por que o ensino desse processo caiu no esquecimento justamente agora que os processos de aproximação ganham tanta importância? Sim, pois este é um exemplo do uso das aproximações, em que se parte de um valor falso e procura-se corrigi-lo para melhorar o resultado, o que, neste caso, tem pleno êxito: chega-se à solução exata.

Esquecimento parecido tem ocorrido com o ensino da geometria, por isso vê-se nessa proposta de atividades uma oportunidade de algum resgate.

REFERÊNCIAS

1 – Baumgart, John K. Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. SP, Ed Atual, 1992. Tradução de Hygino H Domingues.

2 – Bunt, Lucas N. H., Jones, Phillip S., Bedient, Jack D. *The Historical Roots of Elementary Mathematics*, Dover Publications, Inc., New York, 2020.

3 – Burton, David M. *The History of Mathmatics: An Introduction*. McGrow-Hill, 2011.

4 – Chace, Arnold Buffum. *The Rhind Mathematical Papyrus*, v.1 MAA. Ohio, 1927.

5 – Chester's, Robert of. *Latin Translation of the Algebra of Al-Khowarizmi*. Macmillan Co. New York, 1915.
https://www.wilbourhall.org/pdfs/MBP/robertofchesters00khuw.pdf Download 15/07/2022.

6 – Eves, Howard. *Introdução à Historia da Matem*ática. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora Unicamp, 2004.

5 – Gow, James. *A Short History of Greek Mathematics*. Cambridge University Press, 1884.

8 – Heath, Thomas L. *Diophantus of Alexandria a Study in the History of Greek Algebra*. Cambridge, 1910.

9 – Heath, Thomas L. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Cambridge, 1968.

10 – Katz, Victor J. *A History of Mathmatics*. University of the District of Columbia. Pearson Education, Inc, 2009.
https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/6075667/mod_resource/content/1/Victor%20J.%20Katz%20-%20A%20History%20of%20Mathematics-Pearson%20%282008%29.pdf Download 18/07/2022.

Sites consultados

11 – https://matematicaevida.com.br/por-que-usamos-a-letra-x-para-representar-o-desconhecido/ acessado em 18/12/2023.