PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Felipe Assis da Costa

UMA VISÃO INTERDISCIPLINAR DO TEOREMA DE DESARGUES

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção de grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-graduação em Matemática, do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Marcos Craizer

Rio de Janeiro,
abril de 2024

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Felipe Assis da Costa

UMA VISÃO INTERDISCIPLINAR DO TEOREMA DE DESARGUES

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de PósGraduação em Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

Prof. Marcos Craizer
Orientador
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof.ª Renata Martins da Rosa
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof.ª Dirce Uesu Pesco
Departamento de Geometria - UFF

Rio de Janeiro, 02 de abril de 2024

Todos os direitos reservados. A reprodução, total ou parcial, do trabalho é proibida sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Felipe Assis da Costa

Graduou-se em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal Fluminense. Pós-graduação no curso de especialização intitulado Gestão Escolar: Administração, Supervisão e Orientação. Atualmente exerce o cargo de Docente da Secretaria Municipal Adjunta de Educação Básica do Município de Macaé – RJ (SEMAEB), ministrando aula para o Ensino Fundamental.

Ficha Cartográfica

Costa, Felipe Assis da

Uma Visão Interdisciplinar do Teorema de Desargues / Felipe Assis da Costa; orientador: Marcos Craizer. – 2024.
95 f.: il. color. ; 30cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2024.
Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Teses. 2. Teorema de Desargues. 3. Interdisciplinaridade. 4. Geometria Projetiva. 5. Perspectiva. I. Craizer, Marcos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

À minha amada esposa Karina e aos meus filhos Tarcísio e João, por todo amor, incentivo, apoio e compreensão.

Nada disso teria sentido se vocês não existissem na minha vida.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus por todas as oportunidades concedidas a mim, pela força e tranquilidade nos momentos de fraqueza e dificuldades.

E como esta dissertação de mestrado não poderia chegar a bom porto sem o precioso apoio de várias pessoas agradeço imensamente ao meu orientador, Professor Doutor Marcos Craizer, por toda a paciência, pela manifestação de incondicional apoio e disponibilidade, empenho e sentido prático com que sempre me orientou neste trabalho, com aconselhamentos assertivos e pelo estímulo permanente.

Desejo igualmente agradecer aos meus colegas de Mestrado que sempre foram aliados nos desafios e motivadores nas dificuldades. E a minha família pela compreensão nos momentos de fadiga e força nos momentos de fraqueza.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Costa, Felipe Assis da; Craizer, Marcos; Uma Visão Interdisciplinar do Teorema de Desargues. Rio de Janeiro, 2024. 48p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A presente dissertação analisa a relação interdisciplinar entre a matemática e as artes, dando especial destaque ao Teorema de Desargues como uma ponte entre estas áreas. Destaca-se a importância atual da interdisciplinaridade na educação, embasada pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que dá destaque à integração de tecnologia e conhecimento em múltiplas áreas do currículo escolar. O Teorema de Desargues é abordado como um conceito que rompe os limites da matemática, alcançando também os campos da arte e da tecnologia. A Geometria Projetiva é contextualizada historicamente, apresentando seus primeiros passos e progresso ao longo do tempo. Revela Girard Desargues como um como precursor de ideias nesse contexto, contribuindo tanto para o avanço da matemática quanto para a expressão artística. A dissertação enfatiza a aplicação prática do Teorema de Desargues no contexto educacional, propondo atividades significativas e atrativas para os alunos no contexto escolar. Apresenta o produto educacional desenvolvido pelos autores como uma fonte valiosa de sugestões para educadores que pretendem se dedicar à interdisciplinaridade. A dissertação promove uma abordagem educacional que estimula o diálogo entre disciplinas, destacando a conexão entre matemática, geometria projetiva, arte e tecnologia, para isso utiliza o Teorema de Desargues desempenhando um papel central nesse processo.

Palavras-chave

Teorema de Desargues; Interdisciplinaridade; Geometria Projetiva; Perspectiva.

Abstract

Costa, Felipe Assis da; Craizer, Marcos (Adivisor); An Interdisciplinary Perspective on Desargues' Theorem. Rio de Janeiro, 2024. 48p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The present dissertation examines the interdisciplinary relationship between mathematics and the arts, with special emphasis on Desargues' Theorem as a bridge between these fields. It highlights the current importance of interdisciplinarity in education, supported by the National Common Curricular Base (BNCC), which emphasizes the integration of technology and knowledge across multiple areas of the school curriculum. Desargues' Theorem is approached as a concept that transcends the boundaries of mathematics, also reaching into the realms of art and technology. Projective Geometry is historically contextualized, tracing its origins and development over time. Girard Desargues is revealed as a precursor of ideas in this context, contributing to both the advancement of mathematics and artistic expression. The dissertation emphasizes the practical application of Desargues' Theorem in the educational context, proposing meaningful and engaging activities for students in the school setting. It presents the educational product developed by the authors as a valuable source of suggestions for educators looking to dedicate themselves to interdisciplinarity. The dissertation promotes an educational approach that encourages dialogue between disciplines, highlighting the connection between mathematics, projective geometry, art, and technology, utilizing Desargues' Theorem as a central element in this process.

Keywords

Desargues' Theorem, Interdisciplinarity, Projective Geometry, Perspective

Sumário

Lista de figuras

"Muitos artistas não têm consciência de que estão a fazer Matemática. É uma intuição que os conduz à Geometria, sem que estejam conscientes disso. Eu estou, porque passei a vida toda a magicar sobre isso."

Nadir Afonso

https://espacillimite.blogs.sapo.pt/tag/harmonia

1 - INTRODUÇÃO

Na vastidão dos teoremas e conceitos matemáticos, a disciplina, historicamente reconhecida por sua rigidez, abstração e complexidade, revela-se, quando explorada em sua plenitude, como um complexo entrelaçamento de conexões com outras áreas do saber, evidenciando a riqueza inerente da interdisciplinaridade. O Teorema de Desargues, eminente proposição da Geometria Projetiva, surge como um exemplar de destaque dessa interconexão, rompe a mera demonstração matemática ao ser imerso nas artes, proporcionando uma visão modificada da matemática, dotada de uma dimensão diversificada e intensa.

No cenário educacional contemporâneo, a interdisciplinaridade se destaca em sua importância, desafiando as barreiras tradicionais entre as disciplinas, Fazenda (1993) articula a interdisciplinaridade como uma relação entre duas ou mais disciplinas, que se manifesta através de uma profunda interação de conceitos, teorias e metodologias.

Vislumbramos a interdisciplinaridade quando, assim como pelas palavras de Japiassau (1976):

> [...] nos reconhecemos diante de um empreendimento interdisciplinar todas as vezes que ele conseguir incorporar os resultados de várias especialida-des, que tomar de empréstimo a outras disciplinas certos instrumentos e técnicas metodológicos, fazendo uso dos esquemas conceituais e das análises que se nos encontram diversos ramos do saber, a fim de fazê-los integrarem e convergirem, depois de terem sido comparados e julgados. Donde podermos dizer que o papel específico da atividade interdisciplinar consiste, primordialmente, em lançar uma ponte para ligar as fronteiras que haviam sido estabelecidas anteriormente entre as disciplinas com o objetivo preciso de assegurar, a cada uma, seu caráter propriamente positivo, segundo modos particulares e com resultados específicos (JAPIASSU, 1976, p. 75).

Sob essa perspectiva, a matemática deixa de ser um domínio isolado e assume o papel de linguagem universal, capaz de se comunicar integradamente com diversas áreas do saber. A conexão do Teorema de Desargues com a arte oferece uma perspectiva que enriquece a compreensão matemática, ressoando significativamente no meio acadêmico.

Concomitantemente, a revolução tecnológica caminha pelo cenário educacional, apresentando novas possibilidades e desafios. Conforme apontado por

Borba (1999), as tecnologias alteram tanto o conhecimento matemático quanto as abordagens tradicionais de ensino-aprendizagem. Surgem neste contexto, como ferramentas no diálogo entre matemática e artes, os Softwares de Geometria Dinâmica, funcionando como elos que tornam possíveis a visualização e manipulação de construções geométricas, proporcionando uma experiência envolvente na educação matemática.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento norteador para a educação básica no Brasil, publicado para ensino fundamental e educação infantil, Resolução CNE/CP nº 2/2017, e para o ensino médio foi em 2018, Resolução CNE/CP nº 4/2018, vem reiterar a importância da tecnologia e interdisciplinaridade caminharem juntas no processo educativo, ressaltando a primordial necessidade de preparar os estudantes para uma sociedade cada vez mais digital e interconectada.

Exploraremos nesta dissertação um pouco da Geometria Projetiva, em especial, o parte universo de possibilidades do Teorema de Desargues, analisando sua demonstração, sua relação com a geometria projetiva e a arte, os desafios inerentes a essa interdisciplinaridade e como o Geogebra pode servir como instrumento facilitador de um aprendizado intuitivo e inspirador.

Considerando um mundo moldado pela globalização e pela velocidade das transformações tecnológicas a fundamentação teórica desta produção abrange estudiosos globais dedicados à educação, interdisciplinaridade, tecnologia educacional e matemática.

2 - INTERDISCIPLINARIDADE E TECNOLOGIA NA EDUCAÇÃO

Ser capaz de integrar conhecimentos de diversas áreas é uma habilidade básica, não apenas no âmbito profissional, mas também diante dos desafios globais da sociedade, como mudanças climáticas, crises de saúde pública e questões socioeconômicas, onde a interdisciplinaridade resplandece como uma resposta propícia a estas demandas.

Segundo Fazenda (1994), a interdisciplinaridade é mais do que uma simples proximidade de disciplinas; é um processo dinâmico de troca intensa entre diferentes campos do conhecimento. Ela propõe superar a fragmentação do saber, estimulando não apenas o pensamento crítico, mas também a resolução inovadora de problemas. Ao romper estas barreiras disciplinares, a interdisciplinaridade amplia significativamente o horizonte de aprendizado dos estudantes, proporcionando uma visão mais abrangente e integrada do conhecimento.

No contexto do ensino de Matemática, é essencial adotar uma abordagem que vá além do simples aprendizado mecanizado.

> O ato de ensinar Matemática não deve ser visto ainda de maneira tradicional, em que o ensino resume-se na aprendizagem mecanizada, com a repetição de informações inquestionáveis, contribuindo para o desinteresse do estudante por esta ciência; e muito menos no simples exercício do emprego dos recursos tecnológicos, mas como um espaço capaz de orientar os sujeitos sociais a atuarem como cidadãos, criticamente, neste novo mundo moldado a partir do avanço tecnológico (Borba, 1999, apud Costa & Lacerda, 2014, p. 43).

Os Softwares de Geometria Dinâmica, destacados especialmente por Borba, surgem como ferramentas cruciais para proporcionar uma experiência imersiva e participativa na aprendizagem matemática, indo além do tradicionalismo. Dentre eles, em especial o GeoGebra, fornece um ambiente que permite aos alunos vivenciar as construções em tempo real. Essa dinâmica permite aos alunos absorver e assimilar conceitos através da experimentação, o que vem confirmar uma abordagem construtivista da aprendizagem.

Coxeter (1961) apresenta o Teorema de Desargues como um pilar da Geometria Projetiva, delineando uma correlação primordial entre triângulos perspectivos, esta apresentação comumente denota uma natureza abstrata o que dificulta a assimilação por parte dos alunos. Santos e Borba (2018) destacam que os softwares de Geometria Dinâmica podem transpor essa barreira abstrata, facilitando a visualização e interação com tais teoremas.

O uso da tecnologia na interdisciplinaridade é reconhecido pela BNCC como uma estratégia focal para o desenvolvimento das competências necessárias no século XXI. Ela incentiva as instituições educacionais a romperem com os limites tradicionais entre as disciplinas, mais que isso, também propõe eixos estruturantes que estimulam uma abordagem mais integrada e significativa que vai além do conhecimento matemático isolado, buscando um conhecimento aprofundado e a habilidade de colaborar para a construção de uma sociedade justa e inclusiva.

> Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. (BRASIL, 2017, p. 9)

A interdisciplinaridade não é apenas uma tendência educacional momentânea, é uma resposta aos desafios globais. Quando se pensa em preparar os alunos para o mundo complexo e interconectado do século XXI a BNCC está adotando uma perspectiva que destaca a ambição de formar cidadãos polivalentes, capazes de caminhar entre diversas áreas do saber e aplicar conhecimentos integrados para enfrentar desafios concretos.

Fundamentada em reflexões teóricas e práticas educacionais a interdisciplinaridade, não é apenas uma estratégia vital, é um retrato da constante evolução da educação diante de um mundo em transformação. A harmonização de conhecimentos enriquece a compreensão de diversos temas, além de alicerçar mentes críticas e interconectadas, capacitadas para enfrentar os desafios da atualidade. Essa abordagem, encontra sua expressão no Teorema de Desargues, mostrando como a matemática pode ser uma ponte entre disciplinas diversas, desempenhando um papel fundamental na formação de indivíduos críticos e conectados.

O uso de novas tecnologias no ensino da matemática abre novo horizonte para uma aprendizagem participativa e colaborativa. Ela dá vida a um processo que anteriormente era moroso e monótono.

3 - GEOMETRIA PROJETIVA

A Geometria Projetiva tem suas raízes entrelaçadas com o desenvolvimento do pensamento geométrico ao longo dos séculos. Já no Egito antigo, Euclides plantava as primeiras ideias que porventura culminariam na Geometria Projetiva. Euclides, em sua obra "Os Elementos", lançou as fundações da geometria dita euclidiana, mas a expansão para concepções mais abstratas só surgiria em períodos mais recentes.

Entre os séculos XIV e XVI, durante o Renascimento, a geometria romperia os limites da abordagem euclidiana, e figuras como Leonardo da Vinci, Gentile Bellini e Sandro Botticelli, exploraram a perspectiva e as projeções geométricas em suas obras de arte. Essa fusão entre arte e geometria marcou um período de transição, onde a visão artística inspirou conceitos que futuramente foram formalizados na Geometria Projetiva.

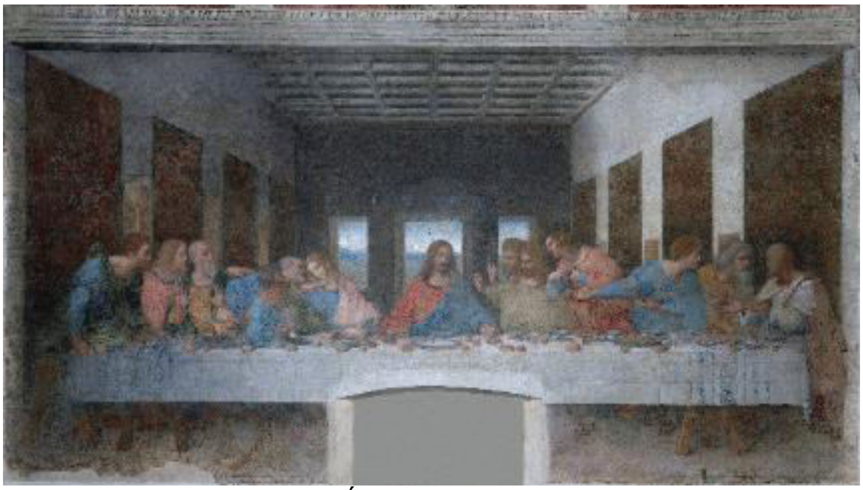


Figura 1: Quadro a Última Ceia, de Leonardo da Vinci.
Fonte: Wikimedia Commons. Disponível em: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/0/08/Leonardo_da_Vinci_(1452-1519)_-_The_Last_Supper_(1495-1498).jpg/1200px-Leonardo_da_Vinci_(1452-1519)_-_The_Last_Supper_(1495-1498).jpg. Acesso em: 07 nov. 2023

O século XVII foi marcado por avanços significativos na geometria, com projetos liderados por Girard Desargues. Neste período as ideias de perspectiva e projeções ganharam uma fundamentação matemática mais robusta.

No século XIX, Jean-Victor Poncelet e August Ferdinand Möbius deram contribuições cruciais à Geometria Projetiva. Poncelet, um engenheiro militar francês, uniu a geometria projetiva à teoria das máquinas, enquanto Möbius explorou as propriedades das transformações geométricas que preservam as relações projetivas.

Com a ajuda da álgebra linear e de outras teorias surgiram novas ferramentas matemáticas para a análise da geometria projetiva, no século XX houve a formalização de conceitos mais abstratos.

Atualmente a Geometria Projetiva caminha por fronteiras além da matemática e encontra aplicações em diversas disciplinas, incluindo a arte, a computação gráfica e a modelagem tridimensional. Softwares modernos, como os de animação se utilizam dos princípios da geometria projetiva para criar representações visuais realísticas.

Ao longo dos séculos a Geometria Projetiva evoluiu de uma área essencialmente geométrica para uma teoria matemática rica e aplicada. Desde suas origens até as aplicações contemporâneas, essa caminhada contou com contribuições de pensadores visionários e seu entrelaçamento com diversas áreas do conhecimento, destacando-se pela resiliência e constante evolução.

4 - GIRARD DESARGUES

Os registros sobre os anos iniciais da vida de Girard Desargues são poucos e do que existe muitas informações ainda não puderam ser confirmadas. Segundo Taton (1951) a família de Desargues é originária de Condreiu, pequena cidade, próxima de Lyon, ele teria nascido em 21 de fevereiro de 1591 e batizado em 2 de março do mesmo ano, na igreja de Santa Cruz em Lyon. Poudra (1864) declara que a sua família era influente na cidade, uma vez que em seus estudos localizou Desargues redator, um médico e um advogado, sendo estes possíveis parentes de Girard.

Desargues iniciou seus estudos em arquitetura, na época uma disciplina que estava intimamente ligada à matemática, se destacou como engenheiro militar, contribuindo para projetos arquitetônicos e desenvolvendo habilidades práticas que mais tarde influenciariam suas contribuições teóricas para a geometria. A atuação na engenharia militar permitiu-lhe aplicar princípios geométricos na resolução de problemas práticos, uma abordagem observada futuramente como característica de seu trabalho.

A obra mais notável de Girard Desargues é Brouillon Project d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan (Rascunho de um Projeto sobre as Interseções do Cone com um Plano), publicada em 1639. Neste trabalho, Desargues apresentou o teorema que hoje leva seu nome, o "Teorema de Desargues".

Seu teorema estabelece condições para que figuras geométricas possam ser projetadas a partir de um ponto em um plano para outro plano. Esse teorema foi crucial no desenvolvimento da geometria projetiva, oferecendo uma perspectiva inovadora sobre as propriedades projetivas das figuras geométricas e contribuindo significativamente para o entendimento geométrico.

Girard Desargues teve suas contribuições inicialmente subestimadas, foi somente anos depois de sua morte em 1961, com a geometria projetiva sendo assumida como disciplina matemática distinta, que Desargues recebeu o crédito devido por sua visão pioneira. Seu trabalho foi posteriormente redescoberto e valorizado por matemáticos renomados, consolidando seu lugar como uma figura central na história da geometria.

5 - AXIOMAS DA GEOMETRIA

Nesta seção se apresentam os axiomas da geometria euclidiana cujo texto se referenciam na obra de Barbosa (2006), Barros e Andrade (2004), Agustini (2022).

Inicialmente ressalta-se que consideraremos aqui que, *ponto*, *reta* e *plano* são conceitos ou noções primitivas, que não se definem, pois tal ação necessitaria da utilização de outros conceitos não definidos anteriormente.

Iremos nos ater por hora aos estudos de Euclides e Hilbert e seus sistemas axiomáticos.

5.1 - Sistema axiomático Euclidiano

Conforme escreveu Barros e Andrade a partir dos escritos de Euclides em seu livro Elementos, o sistema axiomático adotado por ele, possui noções ditas comuns, postulados e definições:

I. Noções comuns:

I.a. Coisas que são iguais a uma mesma coisa também são iguais;

I.b. Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais;

I.c. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais;

I.d. Coisas que coincidem uma com a outra são iguais;

I.e. O todo é maior que qualquer uma de suas partes.

II. Postulados (axiomas) da Geometria Euclidiana plana:

II.a. Incidência: pode-se traçar uma reta ligando quaisquer dois pontos;

II.b. Pode-se continuar qualquer reta finita continuamente em uma reta;

II.c. Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e qualquer raio;

II.d. Todos os ângulos retos são iguais;

II.e. Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.

III. Definições

III.a. Vinte e três definições que dizem respeito a ponto, reta, angulo, cırculo, triangulo, quadrilátero, entre outras, que não serão enumeradas aqui, mas que podem consultadas no livro Os

Elementos(Euclides), com tradução de Irineu Bicudo e publicado pela Editora Unesp.

5.2 - Axiomas de Hilbert

No século XIX o matemático alemão David Hilbert (1862 − 1943) apresentou um sistema de axiomas completo para a Geometria Euclidiana plana e espacial. Seu sistema axiomático é um dos marcos na História da Matemática pois organiza os fundamentos da Geometria e Análise.

Conforme descrito no Capítulo 2 do livro de Agustini, Hilbert criou, a partir dos 5 Postulados de Euclides, 5 grupos de axiomas. São eles:

- Axiomas de Incidência;
- Axiomas de Ordem;
- Axiomas de Congruência;
- Axiomas de Continuidade;
- Axioma das Paralelas.

I. Axiomas de Incidência (noção de “estar em")

I.a. Dois pontos distintos determinam uma reta.

I.b. A reta que passa por dois pontos distintos é única.

I.c. Três pontos não colineares determinam um plano.

I.d. O plano que passa por três pontos não colineares e único.

I.e. Uma reta que possui dois pontos distintos em um plano está contida nesse plano.

I.f. A intersecção de dois planos distintos que tem um ponto em comum possui necessariamente outro ponto em comum.

I.g. Em uma reta existem pelo menos dois pontos. Em um plano existem pelo menos três pontos não colineares. No espaço existem pelo menos quatro pontos não coplanares.

II. Axiomas de Ordem (noção de “estar entre")

II.a. Se o ponto B está entre os pontos distintos A e C, então B também está entre C e A, e são três pontos distintos colineares.

II.b. Se A e C são dois pontos distintos de uma reta, então existe pelo menos um ponto B entre A e C e existe pelo menos um ponto D tal que C está entre A e D.

II.c. De quaisquer três pontos distintos de uma reta, sempre há um, e somente um, que está entre os outros dois.

II.d. Sejam A, B e C três pontos não colineares e r uma reta no plano determinado por A, B e C que não passa por nenhum desses pontos mas que intersecta o segmento AC, então r intersecta o segmento BC ou o segmento AB.

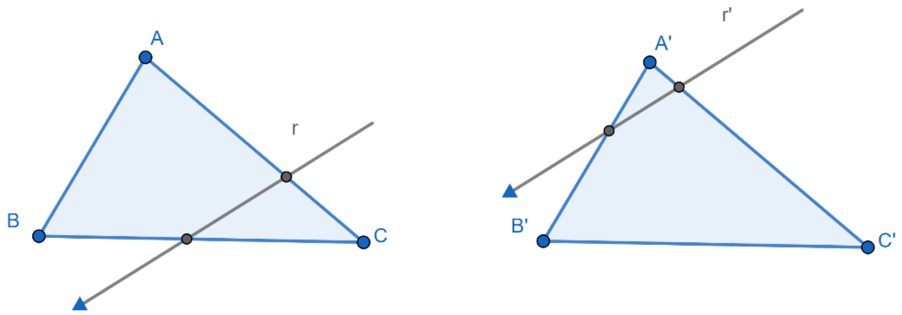


Figura 2: Intersecção de segmentos de um triângulo
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

III. Axiomas de Congruência (noção de “igualdade" entre segmentos e ângulos)

III.a. Se A e B são dois pontos distintos e A’ é a origem da semirreta s, então existe um único ponto B’ distinto de A’ em s tal que o segmento AB é congruente ao segmento A’B’. Além disso, todo segmento é congruente a si mesmo.

III.b. Se o segmento AB é congruente ao segmento CD e ao segmento EF, então o segmento CD é congruente ao segmento EF. (transitividade)

III.c. Sejam AB e BC segmentos em uma reta r com apenas B em comum. Além disso, seja, A’B’ e B’C’ segmentos em uma reta r’ com apenas B’ em comum. Se o segmento AB for congruente ao segmento A’B’ e o segmento BC for congruente ao segmento B’C’, então o segmento AC é congruente ao segmento A’C’

III.d. Sejam um semiplano σ e um ângulo Â. Tomemos uma semirreta s com origem em B contida na reta que determina o semipleno σ.

Então, existe apenas um ângulo $\hat{B}$ com lado em s contido no semiplano σ e congruente ao ângulo Â. além disso, todo ângulo é congruente a si mesmo.

III.e. Se o ângulo Â é congruente ao ângulo $\hat{B}$ e ao ângulo $\hat{C}$, então o ângulo $\hat{B}$é congruente ao ângulo $\hat{C}$. (transitividade)

III.f. Dados dois triângulos ABC e EFG, se AB é congruente a EF, AC é congruente a EG e Â é congruente a $\hat{B}$, então ABC é congruente a EFG. (caso LAL "lado, ângulo, lado" de congruência)

IV. Axiomas de Continuidade (para medição de segmentos e ângulos)

IV.a. Sejam AB e CD dois segmentos. Então, existe um número finito e distinto de pontos A1, A2, A3, : : :, An na reta que passa por A e B tal que os segmentos AA1,A1A2,A2A3, ...An-1An são congruentes a CD e o ponto B está entre A e An.

IV.b. Suponha que o conjunto de todos os pontos de uma reta r está na união dos conjuntos não vazios C1 e C2. Suponha ainda que nenhum ponto de C1 está entre dois pontos de C2 e vice-versa. Então, existe um único ponto O de C1 ou C2 entre quaisquer P1 ϵ C1 e P2 ϵ C2 com O diferente de P1 ou P2.

V. Axioma das Paralelas

No plano, por um ponto não pertencente a uma reta dada, pode ser traçada uma única reta que não intersecta a reta dada.

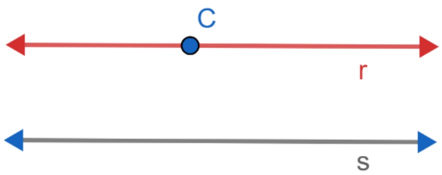


Figura 3: Retas paralelas
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

6 - Semelhança de Triângulos

Antes de pensarmos propriamente na semelhança de triângulos, precisamos conceituar o que é semelhança e o que é homotetia. Em seu livro Medida e Forma em Geometria, de 1991, o Professor Elon Lages de Lima trás nos capitulo 2 e 3, respectivamente estas definições:

Conceito 1- ***Semelhança:*** Sejam F e F', do plano ou do espaço e r um número real positivo.

Diz-se que F e F' são semelhantes, com razão de semelhança r, quando existe uma correspondência biunívoca $\sigma: F \rightarrow F'$, entre os pontos de F e os pontos de F', com a seguinte propriedade:

se X, Y são quaisquer de F e $X' = \sigma(X), Y' = \sigma(Y)$

são correspondentes em F' então $\overline{X'Y'} = r \cdot \overline{XY}$.

A correspondência biunívoca $\sigma: F \rightarrow F'$,com esta propriedade de multiplicar as distancias pelo fator constante r, chama-se uma semelhança de razão r entre F e F'. Se $X' = \sigma(X)$, diz-se que os pontos X e X' são homólogos.

Conceito 2- Homotetia*:* Seja O um ponto do plano Π e r um numero real positivo. A homotetia de centro O e razão r é a função $\sigma: \Pi \rightarrow \Pi$ definida do seguinte modo: σ: $(O) \rightarrow O$ e, para todo $X \neq O$, $\sigma(X) = X'$ é o ponto da semirreta OX tal que $\overline{OX'} = r \cdot \overline{OX}$.

Uma homotetia de razão 1 é simplesmente a aplicação identidade. Uma homotetia de centro Otransforma toda reta que passa por O em si mesma.

Toda homotetia é uma correspondência biunívoca, cuja inversa é a homotetia de mesmo centro e razão ${}^{1}/{}_{r}$.

Duas figuras F e F' chamam-se homotéticas quando existe uma homotetia σ tal que σ: $(F) \rightarrow F'$

No capítulo 4, sobre a Semelhança de Triângulos o professor Elon, assim a apresenta:

Teorema 1: Dois triângulos semelhantes têm ângulos iguais e lados homólogos proporcionais. Reciprocamente, se dois triângulos cumprem uma das três condições então eles são semelhantes:

a) *Têm lados proporcionais;*

b) *Têm ângulos iguais;*

c) *Têm um ângulo igual compreendido entre lados proporcionais.*

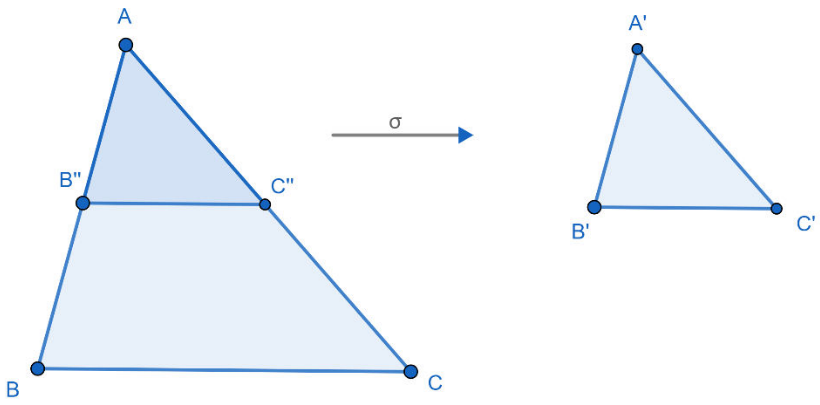


Figura 4: Triângulos Semelhantes
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Demonstração: Seja σ: $ABC \rightarrow A'B'C'$ uma semelhança de razão r entre os triângulos ABC e $A'B'C'$, com $A' = \sigma(A)$, $B' = \sigma(B)$ e $C' = \sigma(C)$. Então, pela definição de semelhança,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = r$$

logo os triângulos têm os lados homólogos proporcionais. Para provar que os ângulos são iguais, suponhamos, a fim de fixar ideias, que seja $0 < r < 1$. A homotetia τ, de centro A e razão r, transforma o triângulo ABC no triângulo parcial $AB''C''$, com $B''C''$ paralela a BC. Então $\angle B'' = \angle B$ e $\angle C'' = \angle C$.

Mas os triângulos $AB''C''$ e $A'B'C'$ são congruentes pois

$$\overline{AB''} = \overline{A'B'}(= r \cdot \overline{AB})$$

$$\overline{AC''} = \overline{A'C'}(= r \cdot \overline{AC})$$

e

$$\overline{B''C''} = \overline{B'C'}(= r \cdot \overline{BC})$$

Logo

$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B' \text{ e } \angle C = \angle C'$$

a) Sejam agora ABC e $A'B'C'$ triângulos tais que

$$\overline{A'B'} = r \cdot \overline{AB},\ \overline{A'C'} = r \cdot \overline{AC} \text{ e } \overline{B'C'} = r \cdot \overline{BC} \qquad \text{(I)}$$

para um certo $r > 0$. (Isto significa que eles têm os lados proporcionais). A homotetia de centro A e razão r transforma ABC o triângulo $AB''C''$ cujos lados medem

$$\overline{AB''} = r \cdot \overline{AB},\ \overline{AC''} = r \cdot \overline{AC} \text{ e } \overline{BC''} = r \cdot \overline{BC} \qquad \text{(II)}$$

De I e II temos que $AB''C''$ e $A'B'C'$ são congruentes porque tem os lados iguais.

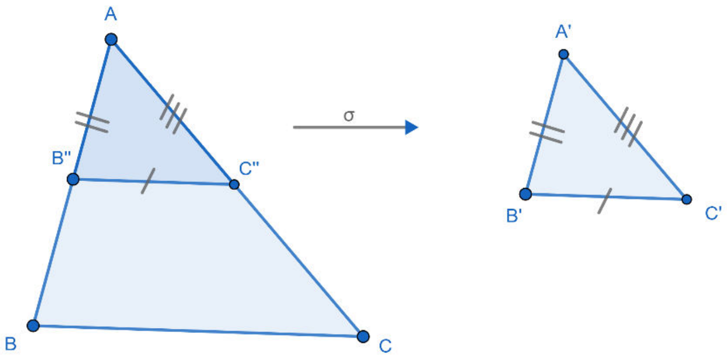


Figura 4.1: Triângulos Semelhantes (LLL)
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Como $AB''C''$ é semelhante a ABC, segue-se que ABC e $A'B'C'$ são semelhantes.

Popularmente conhecemos este caso como LLL (lado-lado-lado).

b) Sejam retas AB e AC tomemos os pontos B'' e C'' respectivamente, de modo que $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$ e $\overline{AC''} = \overline{A'C'}$. Os triângulos $AB''C''$ e $A'B'C'$ são congruentes porque têm um ângulo igual ($\angle A = \angle A'$) compreendido entre dois lados iguais. Logo $\angle B'' = \angle B'$, donde $\angle B = \angle B''$. Conclui-se que as retas $B''C''$ e BC são paralelas e daí os triângulos $AB''C''$ e ABC são semelhantes. Como $AB''C''$ e $A'B'C''$ são congruentes, resulta que ABC e $A'B'C'$ são semelhantes.

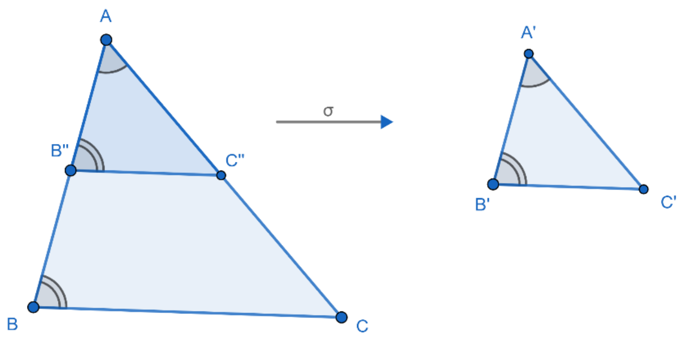


Figura 4.2: Triângulos Semelhantes (AA)
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

A este caso chamamos de AA (ângulo-ângulo) ou AAA (ângulo-ângulo-ângulo).

c) Finalmente, suponhamos que os triângulos ABC e $A'B'C'$ cumpram

$$\angle A = \angle A', \overline{A'B'} = r \cdot \overline{AB}, \ \overline{A'C'} = r \cdot \overline{AC}.$$

Novamente tomamos sobre as retas AB e AC, respectivamente, os pontos B'' e C'' com

$$\overline{AB''} = \overline{A'B'} \text{ e } \overline{AC''} = \overline{A'C'}$$

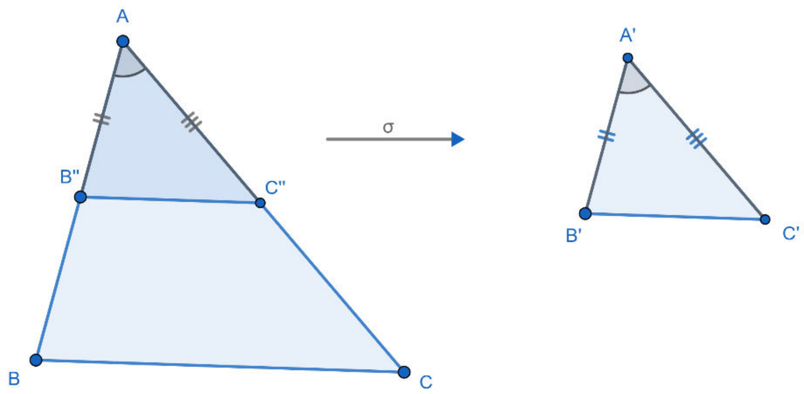


Figura 4.3: Triângulos Semelhantes (LAL)
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Os triângulos $AB''C''$ são congruentes, como no caso *b)*. A homotetia de centro A e razão AB em AB'' e AC em AC'' porque

$$\overline{AB''} = r \cdot \overline{AB} \text{ e } \overline{AC''} = r \cdot \overline{AC}$$

Logo essa homotetia é uma semelhança entre o triangulo ABC e o triangulo $AB''C''$. Como $AB''C''$ e $A'B'C'$ são congruentes, segue-se que ABC e $A'B'C'$ são semelhantes.

Este caso é denotado por LAL (lado-ângulo-lado)

7 - Teorema de Thales

Teorema 2: Sejam as retas $r \parallel s \parallel t$. Escolhemos pontos $A, A' \in r$, $B, B' \in s$ e $C, C' \in t$, de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois ternos de pontos colineares. Então

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

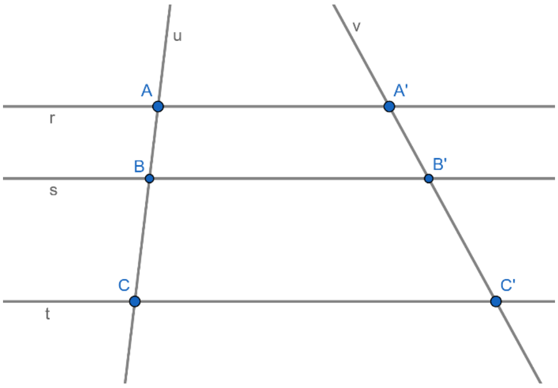


Figura 5: Teorema de Thales
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Demonstração:

Tomemos o triângulo cujos os vértices são A, B' e C de base AC e altura h no qual o segmento BB' descreve uma ceviana deste triângulo.

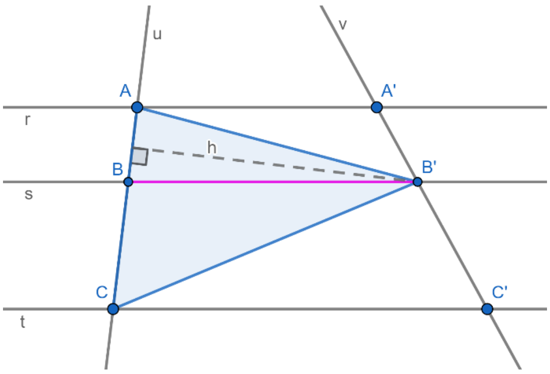


Figura 5.1: Teorema de Thales
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Dividindo o triângulo $AB'C$ em dois outros triângulos determinados a partir da ceviana descrita por BB', obtemos os triângulos $AB'B$ e $BB'C$, que compartilham da mesma altura (h) e possuem as bases AB e BC e áreas A_1 e A_2, respectivamente.

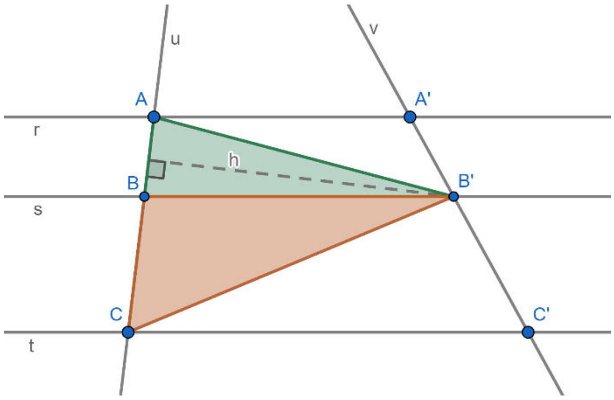


Figura 5.2: Teorema de Thales
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Calculando a área de cada um obtemos:

Para o triângulo $AB'B$:

$$A_{\Delta_{AB'B}} = A_1 = \frac{\overline{AB} \cdot h}{2} \qquad (*)$$

Para o triângulo $BB'C$:

$$A_{\Delta_{BB'C}} = A_2 = \frac{\overline{BC} \cdot h}{2} \qquad (**)$$

De (*) e (**), escrevendo a razão entre a áreas temos:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{\overline{AB} \cdot h}{2}}{\frac{\overline{BC} \cdot h}{2}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \qquad (\mathrm{I})$$

Tomemos agora o triângulo cujos os vértices são A', B e C' de base $A'C'$ no qual o segmento BB' descreve uma ceviana deste triângulo.

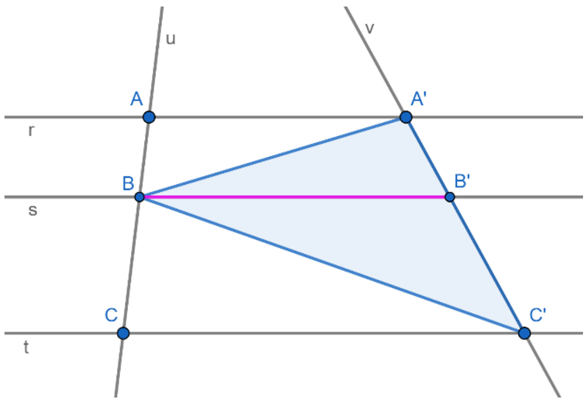


Figura 5.3: Teorema de Thales
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Dividindo o triângulo $A'BC'$ em dois outros triângulos determinados a partir da ceviana descrita por BB’, obtemos os triângulos $A'BB'$ e $B'BC'$.

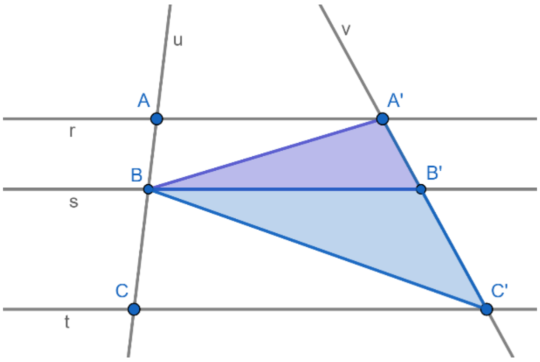


Figura 5.4: Teorema de Thales
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Verifiquemos que os triângulos $AB'B$ e $A'BB'$ possuem um lado comum, o seguimento BB', sobre a reta s, delimitemos momentaneamente este segmento como base dos mesmos, sobre a reta $r//s$ encontram-se os vértices A e A', respectivamente correspondentes aos triângulos em questão.

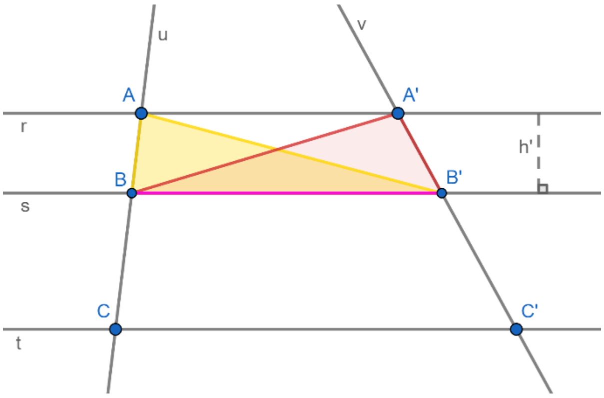


Figura 5.5: Teorema de Thales
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Hora, como $r//s$, a distancia de A à base BB' e a mesma distancia de A' a base BB', concluímos que as áreas dos triângulos $AB'B$ e $A'BB'$ são iguais, ou seja:

$$A_{\Delta_{AB'B}} = A_1 = A_{\Delta_{A'BB'}}$$

Reescrevendo o cálculo da área do triângulo $A'BB'$, tomando como base deste, o segmento $A'B'$, temos:

$$A_{\Delta_{A'BB'}} = A_1 = \frac{\overline{A'B'}\cdot h}{2} \qquad (***)$$

Analogamente para o triângulo $B'BC'$, temos:

$$A_{\Delta_{B'BC'}} = A_2 = \frac{\overline{B'C'} \cdot h}{2} \qquad (****)$$

De (***) e (****), escrevendo a razão entre a áreas temos:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{\overline{A'B'} \cdot h}{2}}{\frac{\overline{B'C'} \cdot h}{2}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \qquad (II)$$

De (I) e (II) como queríamos demonstrar,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

8 - Teorema de Menelaus

Teorema 3: Seja ABC um triângulo e A', B' e C' pontos sobre as retas suportes dos lados BC, CA e AB, respectivamente, todos distintos dos vértices ABC. Então:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1$$

Se, e só se, os pontos A', B' e C' forem colineares.

Demonstração:

=> Inicialmente, sem perda de generalidade, suponhamos que $A' \in \overrightarrow{BC} \backslash BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$ e que os pontos A', B' e C' são colineares pertencentes a reta r.

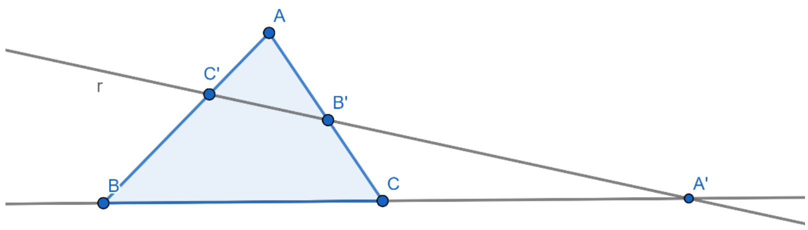


Figura 6: Teorema de Menelaus
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Paralela a reta r e passando pelo por B traçamos a reta s que toca o prolongamento do segmento que contém A, B' e C no ponto D.

Pela construção do problema o segmento que contém os pontos B, C e A' corta transversalmente as retas r // s.

Daí temos que os ângulos α em B' e D e os ângulos em B e A' são alternos internos respectivamente e os ângulos θ são opostos pelo vértice em C.

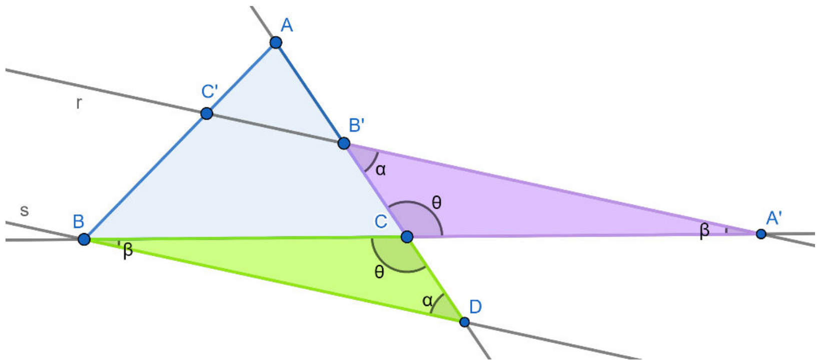


Figura 6.1: Teorema de Menelaus
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Temos portanto pelo caso de semelhança de triângulos AAA que:

$$\Delta BCD \sim \Delta A'CB'$$

A partir de então podemos escrever que:

$$\frac{CD}{CB'} = \frac{BC}{A'C}$$

Reescrevendo $CD = B'D - CB'$ e $BC = BA' - A'C$, obtemos:

$$\frac{B'D - CB'}{CB'} = \frac{BA' - A'C}{A'C}$$

$$\frac{B'D}{CB'} - \frac{CB'}{CB'} = \frac{BA'}{A'C} - \frac{A'C}{A'C}$$

$$\frac{B'D}{CB'} - 1 = \frac{BA'}{A'C} - 1$$

$$B'D = \frac{BA'}{A'C} \cdot CB' \qquad (I)$$

Ainda a partir da construção, podemos garantir os ângulos α opostos pelo vértice em B' e os ângulos γ colaterais em B e C'.

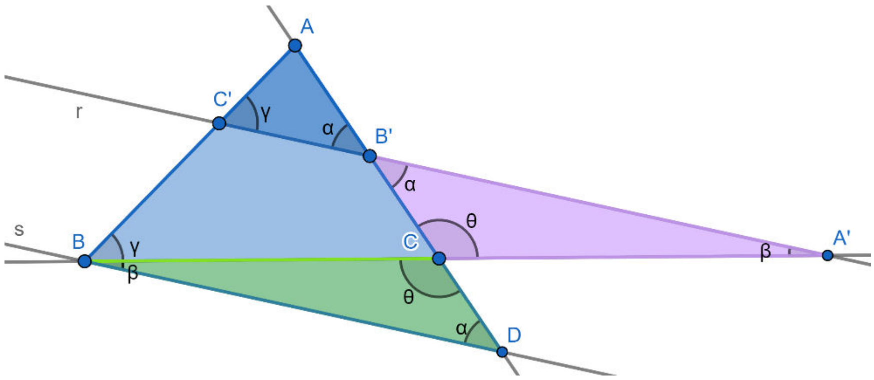


Figura 6.2: Teorema de Menelaus
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Temos portanto pelo caso de semelhança de triângulos AAA que:

$$\Delta AB'C' \sim \Delta ADB$$

A partir de então podemos escrever que:

$$\frac{AB}{AC'} = \frac{AD}{B'A}$$

Reescrevendo $AB = AC' + C'B$ e $AD = B'A + B'D$, obtemos:

$$\frac{AC' + C'B}{AC'} = \frac{B'A + B'D}{B'A}$$

$$\frac{AC'}{AC'} + \frac{C'B}{AC'} = \frac{B'A}{B'A} + \frac{B'D}{B'A}$$

$$1 + \frac{C'B}{AC'} = 1 + \frac{B'D}{B'A}$$

$$B'D = \frac{C'B}{AC'} \cdot B'A \qquad (II)$$

De I e II, temos que

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot CB' = \frac{C'B}{AC'} \cdot B'A$$

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1$$

<= Reciprocamente, sejam A', B' e C' pontos situados sobre as retas suportes dos lados BC, CA e AB, respectivamente, todos distintos dos vértices de ABC e tais que pelo teorema de Thales $\frac{AC'}{C'B} = \frac{AB'}{B'D}$ seja válida. Marque o ponto C'' interseção das retas $\overleftrightarrow{A'B'}$ e $\overleftrightarrow{AB}$. Como A', B' e C'' são colineares a primeira parte garante que:

$$\frac{AC''}{C''B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1$$

Comparando esta relação com $\frac{AC'}{C'B} = \frac{AB'}{B'D}$, concluímos que

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC''}{C''B} \qquad (III)$$

A partir daí, analisamos este seguimento AB que contém os pontos C' e C'':

Figura 7: Teorema de Menelaus: pontos colineares
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

$$C'B = AB - AC' \qquad e \qquad C''B = AB - AC''$$

Substituindo estas constatações em III,

$$\frac{AC'}{AB - AC'} = \frac{AC''}{AB - AC''}$$

$$\frac{AB - AC'}{AC'} = \frac{AB - AC''}{AC''}$$

$$\frac{AB}{AC'} - \frac{AC'}{AC'} = \frac{AB}{AC''} - \frac{AC''}{AC''}$$

$$\frac{AB}{AC'} - 1 = \frac{AB}{AC''} - 1$$

$$\frac{AB}{AC'} = \frac{AB}{AC''}$$

De onde concluímos que $AC' = AC''$ e portanto $C' = C''$. Logo A', B' e C' são colineares.

9 - Teorema de Desargues

Teorema 4. Se ABC e $A'B'C'$ são triângulos tais que $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{R\}$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = \{P\}$ e $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = \{Q\}$, então P, Q e R são colineares se, e somente se, $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são concorrentes ou paralelas.

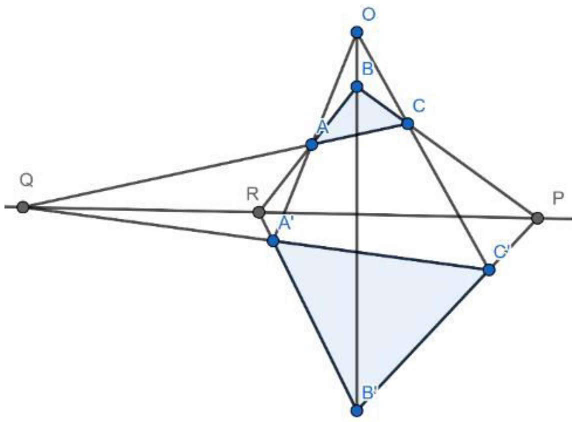


Figura 7: Teorema de Desargues
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Demonstração:

a. *Se dois triângulos são perspectivos por um ponto, então eles são perspectivos por uma reta*;

=>Suponhamos inicialmente que $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são concorrentes em O. Ou seja, os $\Delta ABC\ e\ \Delta A'B'C'$ são perspectivos pelo ponto O. Para mostrarmos que P, Q e R são colineares verificaremos pelo Teorema de Menelaus que:

$$\frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BR}{RA} = -1$$

Aplicaremos separadamente o Teorema de Menelaus nos $\Delta OA'B', \Delta OC'B'\ e\ \Delta OA'C'$:

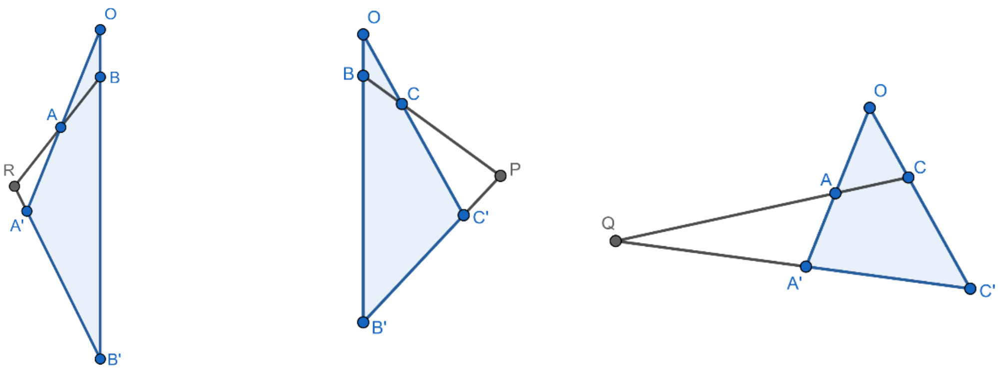


Figura 7.1: Teorema de Desargues: $\Delta OA'B'$, $\Delta OC'B'$ e $\Delta OA'C'$
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

No $\Delta OA'B'$ intersectado pela transversal BAR, temos:

$$\frac{OB'}{B'B} \cdot \frac{BR}{RA} \cdot \frac{AA'}{A'O} = -1 \qquad (*)$$

No $\Delta OC'B'$ intersectado pela transversal BCP, temos:

$$\frac{OC'}{C'C} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BB'}{B'O} = -1 \qquad (**)$$

No $\Delta OA'C'$ intersectado pela transversal CAQ, temos:

$$\frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{OA'}{A'A} \cdot \frac{AQ}{QC} = -1 \qquad (***)$$

Multiplicado (*), (**) e (***) temos:

$$\left(\frac{OB'}{B'B} \cdot \frac{BR}{RA} \cdot \frac{AA'}{A'O}\right) \cdot \left(\frac{OC'}{C'C} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BB'}{B'O}\right) \cdot \left(\frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{OA'}{A'A} \cdot \frac{AQ}{QC}\right) = -1$$

$$\left(\frac{OB'}{B'B} \cdot \frac{BB'}{B'O}\right) \cdot \left(\frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{OA'}{A'A}\right) \cdot \left(\frac{OC'}{C'C} \cdot \frac{CC'}{C'O}\right) \cdot \left(\frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BR}{RA}\right) = -1$$

$$\left(\frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BR}{RA}\right) = -1$$

Portanto os pontos P, Q e R são colineares.

b. *Se dois triângulos são perspectivos por uma reta, então eles são perspectivos por um ponto.*

<=Na recíproca suponhamos agora que P, Q e R são colineares.

Para demonstrar que as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são concorrentes ou paralelas, é suficiente supor que $\overleftrightarrow{AA'}$ e $\overleftrightarrow{BB'}$ são concorrentes no ponto O, mostraremos que $O \in \overleftrightarrow{CC'}$, ou seja, os pontos O, C e C' são colineares. E novamente o faremos usando o Teorema de Menelaus. No $\Delta AA'Q$, queremos concluir que

$$\frac{AO}{OA'} \cdot \frac{A'C'}{C'Q} \cdot \frac{QC}{CA} = -1$$

Aplicaremos separadamente o Teorema de Menelaus nos $\Delta RBB', \Delta BRP \text{ e } \Delta B'RP$:

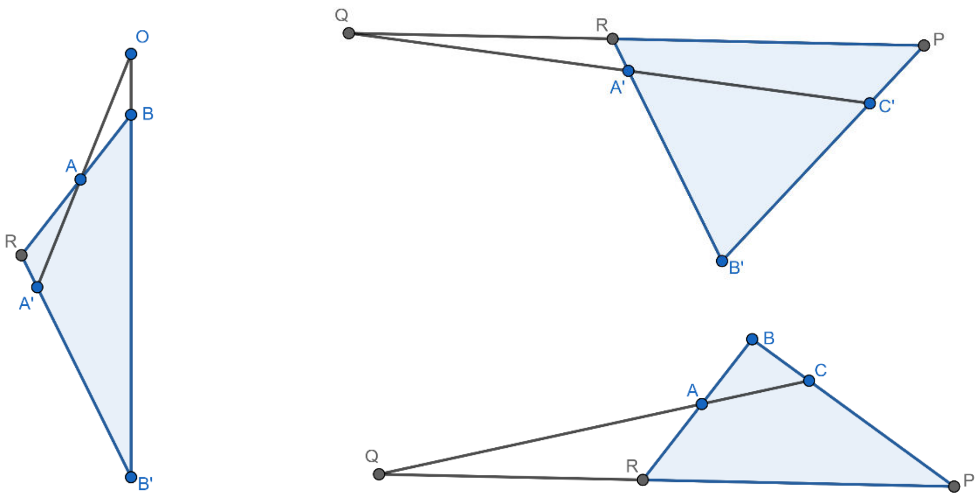


Figura 7.2: Teorema de Desargues: ΔBRP, $\Delta RBB'$ e $\Delta B'RP$
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

No $\Delta RBB'$ intersectado pela transversal $A'AO$, temos:

$$\frac{A'B'}{B'R}\cdot\frac{RB}{BA}\cdot\frac{AO}{OA'}=-1 \qquad (*)$$

No ΔRBP intersectado pela transversal CAQ, temos:

$$\frac{AB}{BR}\cdot\frac{RP}{PQ}\cdot\frac{QC}{CA}=-1 \qquad (**)$$

No $\Delta B'RP$ intersectado pela transversal $C'A'Q$, temos:

$$\frac{RB'}{B'A'}\cdot\frac{A'C'}{C'Q}\cdot\frac{QP}{PR}=-1 \qquad (***)$$

Multiplicado (*), (**) e (***) temos:

$$\left(\frac{A'B'}{B'R}\cdot\frac{RB}{BA}\cdot\frac{AO}{OA'}\right)\cdot\left(\frac{AB}{BR}\cdot\frac{RP}{PQ}\cdot\frac{QC}{CA}\right)\cdot\left(\frac{RB'}{B'A'}\cdot\frac{A'C'}{C'Q}\cdot\frac{QP}{PR}\right)=-1$$

$$\left(\frac{A'B'}{B'R}\cdot\frac{RB'}{B'A'}\right)\cdot\left(\frac{AB}{BR}\cdot\frac{RB}{BA}\right)\cdot\left(\frac{RP}{PQ}\cdot\frac{QP}{PR}\right)\cdot\left(\frac{AO}{OA'}\cdot\frac{A'C'}{C'Q}\cdot\frac{QC}{CA}\right)=-1$$

$$\left(\frac{AO}{OA'}\cdot\frac{A'C'}{C'Q}\cdot\frac{QC}{CA}\right)=-1$$

Portanto os pontos O, C e C’ são colineares.

9.1 - Teorema de Desargues: Casos Degenerados

A partir dos estudos da Geometria Projetiva constata-se que seus objetos de estudos podem ser apresentados em casos degenerados, e então a Geometria Euclidiana já não é suficiente para sustentar todas as possibilidades. Neste sentido, mesmo sem demonstrações, veremos as possibilidades, sustentados pela Geometria Projetiva, no que tange a intersecção de retas paralelas em um ponto no infinito.

A seguir podemos ver a três degenerações que o Teorema de Desargues pode sofrer:

(i) Tomando os pontos dos triângulos sobre retas paralelas. O centro da perspectiva se encontra no infinito (Figura 7.3), com construção disponível em: https://www.geogebra.org/graphing/gdyyxq7a.

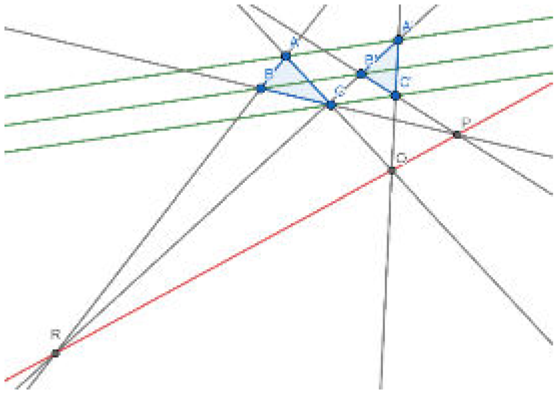


Figura 7.3: o Teorema de Desargues: Degeneração – $AA' \parallel BB' \parallel CC'$
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

(ii) Tomando um dos lados correspondentes dos triângulos como paralelos. Um dos pontos que define o eixo da perspectiva está no infinito (Figura 7.4), com construção disponível em: https://www.geogebra.org/graphing/gdyyxq7a.

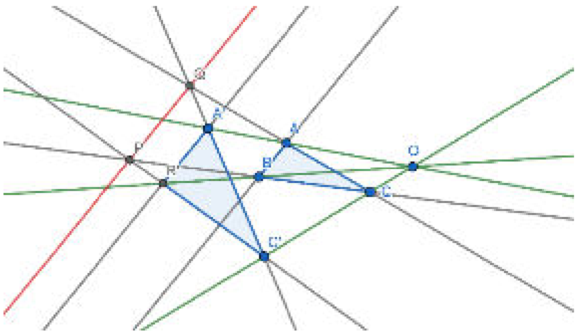


Figura 7.4: o Teorema de Desargues: Degeneração – $AB \parallel A'B'$
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

(iii) Tomando os três lados correspondentes dos triângulos como paralelos. Os três pontos determinantes do eixo da perspectiva estão no infinito (Figura 7.5), com construção disponível em: https://www.geogebra.org/graphing/bjrxjrun.

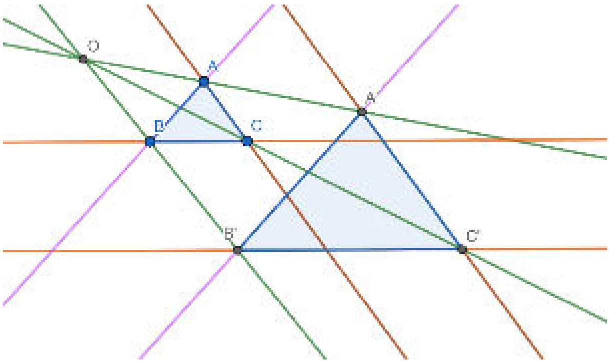


Figura 7.5: o Teorema de Desargues:
Degeneração – $AB \parallel A'B', BC \parallel B'C' e\ AC \parallel A'C'$
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

10 - Atividades Interdisciplinares Matemática-Artes

Nesta seção vamos vislumbrar algumas situações de trabalho interdisciplinar nas quais o Teorema de Desargues será o elo de sustentação entre as áreas em questão. Estas atividades estão detalhadamente apresentadas e justificadas em produto educacional de mesma autoria desta dissertação.

A interligação entre conhecimentos de áreas distintas é algo que, com frequência, nos deparamos no trabalho docente, pensando nisto detectou-se a necessidade de exemplificar atividades que pudessem ser utilizadas por professores da Educação Básica, no cotidiano escolar, em especial das disciplinas de Artes e Matemática.

Antes de conhecermos as atividades é necessário que detectemos os pontos de interseção da Matemática e da Arte no Teorema de Desargues e para isso devemos perceber que cada disciplina pode dar definições diferentes a situações que determinam o mesmo elemento. Retomando o Teorema de Desargues, vamos melhor analisa-lo em duas perspectivas:

(i) Se dois triângulos são perspectivos por um ponto, então eles são perspectivos por uma reta;

(ii) Se dois triângulos são perspectivos por uma reta, então eles são perspectivos por um ponto.

Ora, dizemos que duas figuras são perspectivas se os seus pontos podem ser colocados em uma correspondência biunívoca de forma que um par de pontos correspondentes definem retas concorrentes ou se retas podem ser colocadas em uma correspondência biunívoca de forma que par de retas correspondentes definem pontos colineares. Daí, temos que este teorema diz respeito a triângulos em perspectiva. A primeira correspondência é dita perspectividade por um ponto, chamado *centro da perspectividade*, enquanto a segunda correspondência é dita perspectividade por uma reta, chamada *eixo da perspectividade*.

Vamos usar a obra A Última Ceia de Leonardo da Vinci (Figura 8) para visualizar estas correspondências. O artista constrói sua pintura em três planos principais: o primeiro onde se destaca a mesa e os apóstolos com a figura de Jesus ao centro; no segundo a sala desenhada em perspectiva e o terceiro, ao longe nas janelas, o horizonte com as montanhas.

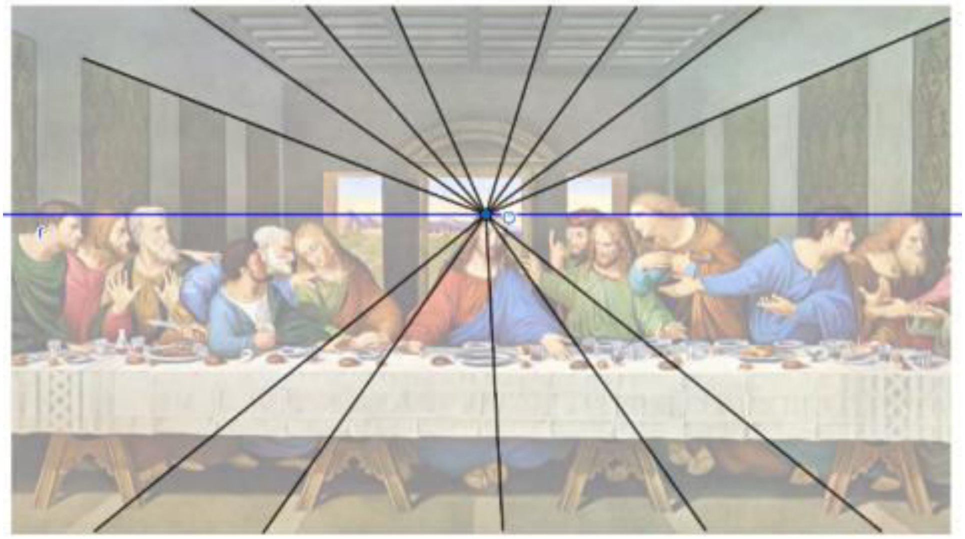


Figura 8: Adaptação do quadro A Última Ceia, de Leonardo da Vinci
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

O Centro da Perspectiva pode ser determinado a partir das arestas formadas pelas paredes e o teto da sala, assim como pelo alinhamento dos murais laterais e linhas do piso, ao traçar estas retas verificamos a convergência para um ponto comum sobre a face do elemento central da imagem, ponto denotado na figura como O e no universo artístico chamado de *Ponto Focal* ou *Ponto de Fuga*. O Eixo da Perspectiva passa pelo ponto O e é determinado pelo alinhamento das montanhas ao fundo, na figura explicitado pela reta r, nas artes chamado de *Linha do Horizonte*.

A seguir são apresentadas quatro propostas que podem ser desenvolvidas num projeto conjunto entre estas disciplinas. Vale ressaltar que a simples aplicação das atividades não caracteriza a interdisciplinaridade, esta se dará no processo, e culminará na consolidação das competências e habilidades por parte dos alunos.

A descrição detalhada dessas atividades está no produto educacional, intitulado Uma Visão Interdisciplinar do Teorema de Desargues: O Ensino da Perspectiva na Matemática e na Arte, a ser publicado no Portal do Educapes, e tambem segue como Apêndice nesta dissertação.

Atividade 1: *Lendo a Matemática o mundo da Arte*

Esta atividade consiste em apresentar aos alunos e/ou solicitá-los que pesquisem obras de arte nas quais os artistas se valeram de conhecimentos matemáticos na realização de obras.

A ideia é que surja dentre os achados dos alunos, obras como as de Da Vinci, de Perugino, entre outros.


Figura 9: Delivery of the Keys, de Pietro Perugino
Fonte: Wikimedia Commons. Disponível em: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/archive/0/0b/20130312164026%21Perugino_Keys.jpg. Acesso em: 31 jan. 2024

Caso não aconteça, caberá ao professor apresentar estas para que ocorra a construção do link com o Teorema de Desargues.

Dando sequência a esta atividade os professores de artes e matemática poderão aprofundar assuntos particulares em cada uma das áreas. Em especial na matemática recomenda-se a "mostração" do Teorema de Desargues sobre a Pintura de Da Vinci, e para isso pode-se utilizar de um Software de Geometria Dinâmica como o Geogebra (https://www.geogebra.org/graphing), ou o fazê-lo com compasso e régua.

Atividade 2: *Oficina de Fotografia*

Nesta atividade propõe-se aos alunos pesquisar imagens ou fotografar ambientes e/ou paisagens que se caracterizem pela aparição de Ponto de Fuga e Horizonte, entre elas é interessante a utilização de fotos com objetos em perspectiva.

Figura 10: Foto Modelo para Oficina de Fotografia (Ponto de Fuga e Linha do Horizonte) – Km 60 da RJ 162. Macaé-RJ
Fonte: Foto do autor (2024)

Atividade 3: *O teorema de Desargues e a Tecnologia*

O Objetivo é propor aos alunos a utilização do Geogebra para construir triângulos em perspectiva e mostrar a ocorrência do Teorema de Desargues em cada situação, inclusive nos casos degenerados. Como opção para a ausência de recurso tecnológicos as mesmas construções podem ser feitas com compasso e régua.

Figura 11: Construção da Degeneração – $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ do Teorema de Desargues no Geogebra
Fonte: Foto do autor (2024)

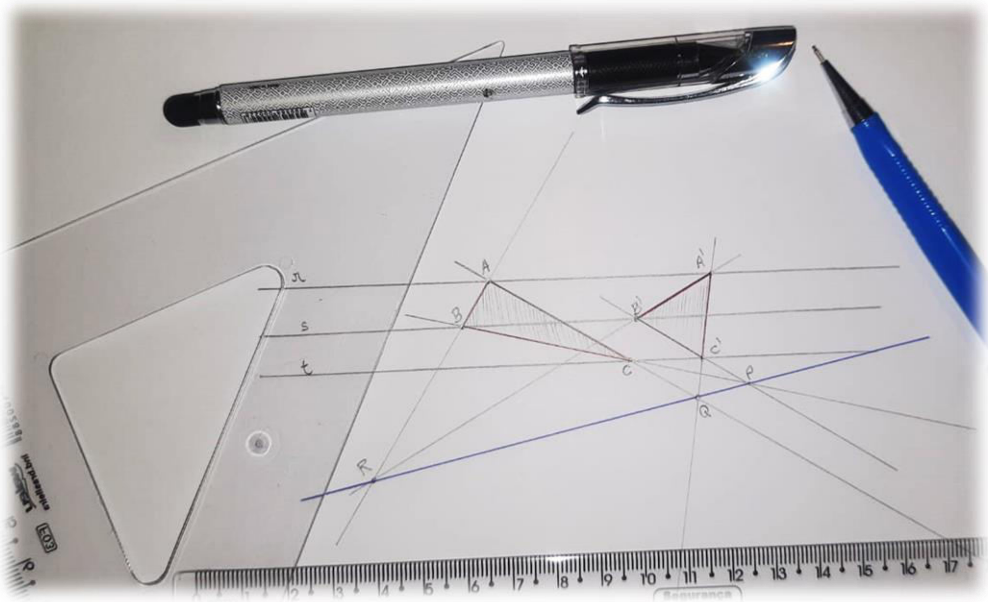


Figura 12: Construção da Degeneração – $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ do Teorema de Desargues com Réguas tipo Esquadro
Fonte: Foto do autor (2024)

Atividade 4: *Construindo a perspectiva a partir de um ponto*

A atividade consiste na construção de uma obra em perspectiva, um desenho realizado com o auxílio de uma linha fixada em um ponto (Ponto Focal), e a partir da movimentação do cordão realizar o traçado das linhas.

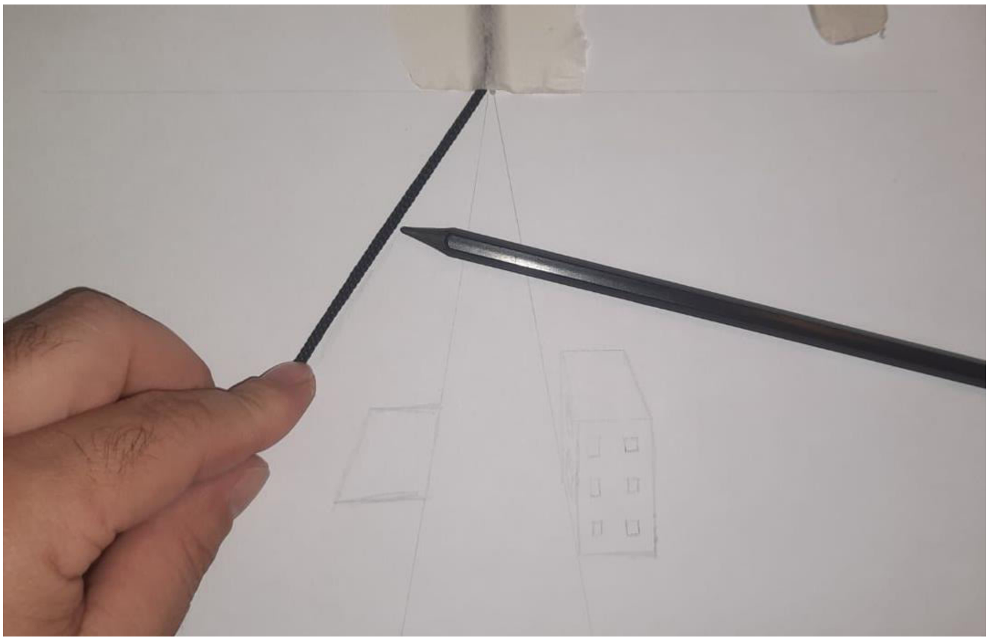


Figura 13: Construção em Perspectiva com Barbante
Fonte: Foto do autor (2024)

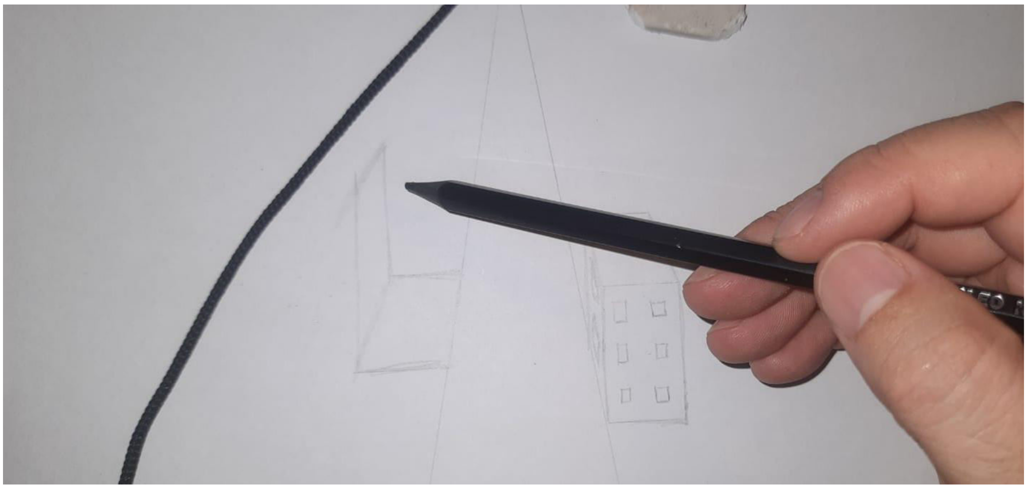


Figura 13.1: Construção em Perspectiva com Barbante
Fonte: Foto do autor (2024)

11 – Conclusão

Esta dissertação explorou o universo da interdisciplinaridade e o Teorema de Desargues, trazendo suas interconexões com a Geometria Projetiva, a arte e a tecnologia. Perpassando por seus capítulos, examinamos a importância da interdisciplinaridade e da tecnologia na educação, revelou-se em especial uma abordagem interligada entre Matemática e Artes, valendo-se do Geogebra como ferramenta pedagógica.

A interdisciplinaridade, é a profunda interação entre conceitos, teorias e metodologias de diferentes disciplinas, a criação de um novo campo, no qual a Matemática rompe sua rigidez e transformando-se em uma linguagem universal capaz de se comunicar integradamente com diversas áreas do conhecimento.

A relação do Teorema de Desargues com a arte, evidenciada na obra "A Última Ceia" de Leonardo da Vinci, resplandece a riqueza da matemática. Perceber o ponto focal/centro da perspectiva e o horizonte-eixo da perspectividade, nos revela o elo entre a geometria projetiva e a representação artística, evidenciando a aplicação prática do teorema em diferentes contextos.

O advento das novas tecnologias, em particular o Software de Geometria Dinâmica, como o GeoGebra, desempenha um papel de destaque no diálogo entre Matemática e Artes. Essas ferramentas tornam palpáveis construções e visualizações, oferecendo uma experiência fascinante na educação matemática. Neste contexto a BNCC está alinhada com as demandas do século XXI, reconhecendo a importância de integrar tecnologia e interdisciplinaridade no processo educativo.

Ao longo da histórica a Geometria Projetiva revelou-se como uma disciplina matemática rica e aplicada, rompendo fronteiras e encontrando aplicações em diversas áreas, desde a arte até a computação gráfica. Girard Desargues, postumamente reconhecido, foi figura de destaque central nesta narrativa, contribuiu de maneira significativa para o desenvolvimento dessa geometria, apresentando o Teorema de Desargues como um pilar fundamental.

Atividades interdisciplinares propostas, envolvendo Matemática e Artes, buscaram explorar o Teorema de Desargues em diferentes contextos educativos. Desde a análise de obras de arte que se valeram de conhecimentos matemáticos até a utilização do GeoGebra para construção de triângulos em perspectiva, as atividades visam não apenas aplicar um teorema, mas também evidenciar sua utilização prática, consolidando competências e habilidades dos alunos de maneira integrada.

Assim, concluímos que a interdisciplinaridade, aliada à tecnologia e fundamentada na geometria projetiva com o Teorema de Desargues, exerce um papel fundamental na formação de indivíduos críticos, interconectados e preparados para os desafios contemporâneos. Ao passar dos anos este teorema permanece como uma ponte entre diversas disciplinas, enriquecendo a compreensão matemática e contribuindo para diversas outras áreas da sociedade.

REFERENCIAS

AGUSTINI, E. Introdução à Geometria Hiperbólica Plana. Livro digital. Uberlândia: FAMAT UFU; CEaD UFU. 2022

ANDERSEN, K. Girard Desargues: Matemático francês. Disponível em: <https://www.britannica.com/biography/Girard-Desargues#ref710134>. Acessado em 05 jan. 2024.

ANDRADE. P. F. A.; BARROS. A. A. Introdução à Geometria Projetiva: com tratamento vetorial. Fortaleza: Universidade Federal do Ceará. 2004.

BARBOSA, J. L. M. Geometria Euclidiana Plana. Coleção do professor de matemática. 9ª Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. 2006.

BORBA, M. C.; BICUDO, M. A. V. (Org.). Tecnologias informáticas na educação matemática e reorganização do pensamento. Em: Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. 1ed.São Paulo: UNESP, 1999, v. 1, p. 285-295.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). .Resolução CNE/CP nº 2/2017. Ministério da Educação, 2017.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). .Resolução CNE/CP nº 4/2018. Ministério da Educação, 2018.

COSTA, A. P.; LACERDA, G. H. (2014). O uso do computador no ensino de Matemática: um estudo com professores da EJA. Educação, Escola e Sociedade. v. 7(n. 7), 1-49.

COXETER, H. S. M. Introduction to Geometry. New York: John Wiley & Sons, 1961.

DÍAZ, F. O processo de aprendizagem e seus transtornos. Salvador: EDUFBA, 2011.

FAZENDA, I. C. A. Interdisciplinaridade: História, Teoria e Pesquisa. Campinas: Editora Papirus, 1993

FAZENDA, I. Interdisciplinaridade: um projeto em parceria. São Paulo: Loyola, 1994.

JAPIASSU, Hilton. Interdisciplinaridade e patologia do saber. Rio de Janeiro: Imago, 1976.

Klein, F. "Development of Mathematics in the 19th Century," 1979.

LIMA, E. L. Medida e Forma em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.1991.

NETO, A. C. M. Geometria. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.2013.

POUDRA, N. G. Ouevres de Desargues, Réunies et Analysées. Paris, 1864.

POUDRA, N. G. L'Histoire de la Perspective Ancienne et Moderne. Paris, 1864.

SANTOS, S. C.; BORBA, M. C. Internet e softwares de geometria dinâmica como atores na produção matemática on-line. ZETETIKÉ: Revista de Educação Matemática. V.16, n. 1. 2018. Disponível em

<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8647037>
Acessado em 31 jan. 2024

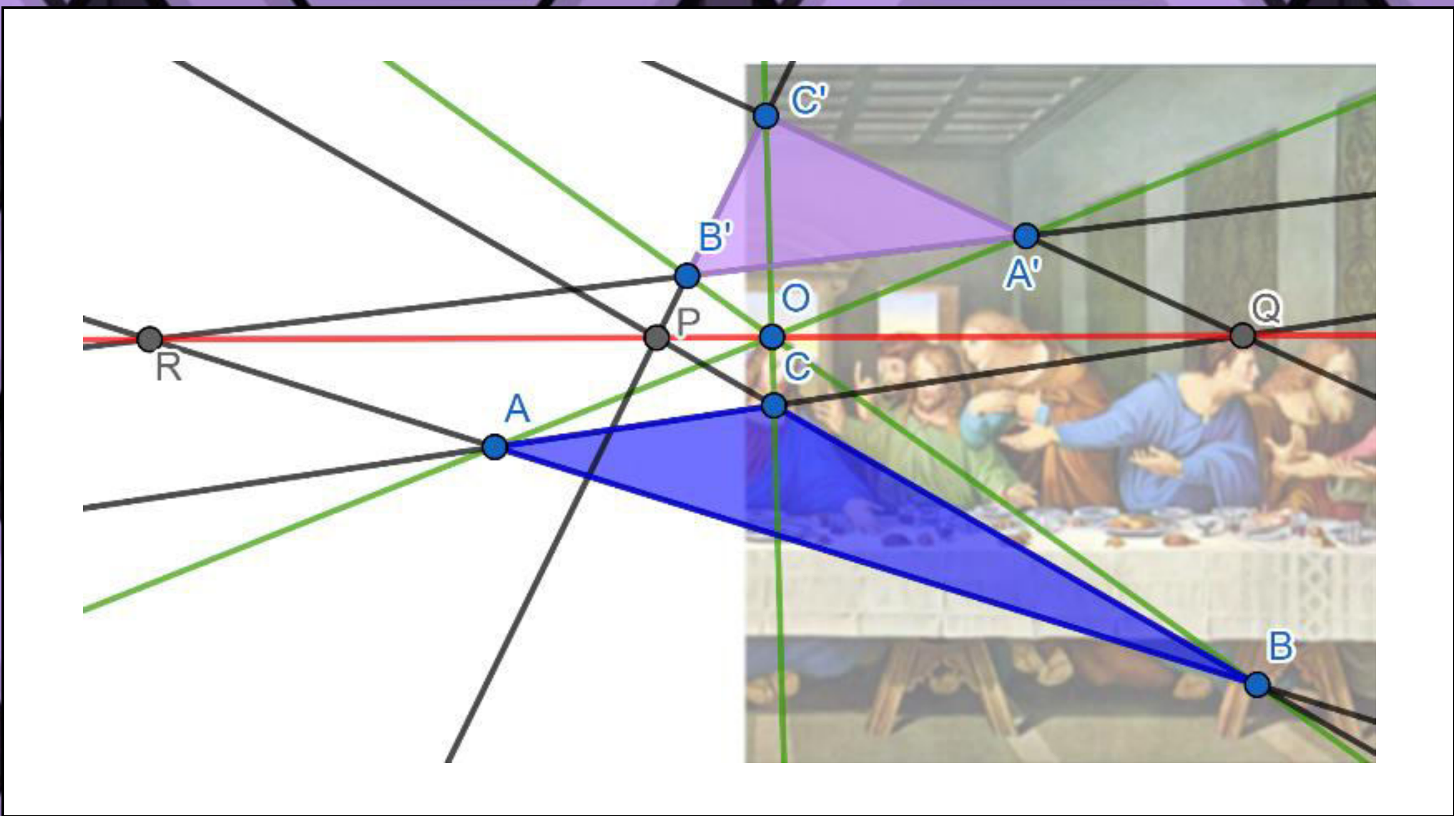
TATON, R. L'Ouevre Mathématique de G. Desargues. Presses Universitaire de France. Paris, 1951.

APÊNDICES

Nesta seção será apresentado o Produto Educacional de título "Uma Visão Interdisciplinar do Teorema de Desargues: O Ensino da Perspectiva na Matemática e na Arte", com autoria desta mesma dissertação, requisito parcial para obtenção de grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-graduação em Matemática, do Departamento de Matemática da PUC-Rio, o qual se mostra uníssono ao texto deste documento e, portanto, imprescindível o conhecimento do mesmo.

UMA VISÃO INTERDISCIPLINAR DO TEOREMA DE DESARGUES

O ENSINO DA PERSPECTIVA NA MATEMÁTICA E NA ARTE



Felipe Assis da Costa
Orientador: Prof. Marcos Craizer

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Felipe Assis da Costa

Uma Visão Interdisciplinar do Teorema de Desargues

O Ensino da Perspectiva na Matemática e na Arte

Produto Educacional

Produto Educacional apresentado como requisito parcial para obtenção de grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-graduação em Matemática, do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Marcos Craizer

Rio de Janeiro,

fevereiro de 2024

Apresentação

Este produto educacional foi elaborado a partir da dissertação de mestrado intitulada “Uma Visão Interdisciplinar do Teorema de Desargues” produzida por Felipe Assis da Costa e orientada pelo Professor Doutor Marcos Craizer. Este apresentara uma série de quatro atividade que propõe de maneira articulada entre a Matemática e a Arte, uma visão de trabalho interdisciplinar utilizando o Teorema de Desargues na Educação Básica, neste caso para turmas do 6º ano ao 9º ano do Ensino Fundamental, no a qual se abordam questões relacionadas a Perspectivas, entre outros conceitos.

A Criação deste produto educacional vem de encontro as propostas da Base Nacional Curricular, apresentando a professores das disciplinas, em especial de Matemática e Arte, algumas possibilidades de diversificar metodologias, formalizar competências e habilidades tão exigidas num contexto complexo e interconectado como o que vivemos atualmente.

Estas atividades tem o intuito de abrir o diálogo entre as disciplinas, retirá-las dos seus universos de gavetas e conectá-las com o auxílio de diversas estratégias, inclusive se valendo do uso da tecnologia, esta reconhecida pela BNCC como estratégia focal para o desenvolvimento das competências necessárias ao século XXI.

> O ato de ensinar Matemática não deve ser visto ainda de maneira tradicional, em que o ensino resume-se na aprendizagem mecanizada, com a repetição de informações inquestionáveis, contribuindo para o desinteresse do estudante por esta ciência; e muito menos no simples exercício do emprego dos recursos tecnológicos, mas como um espaço capaz de orientar os sujeitos sociais a atuarem como cidadãos, criticamente, neste novo mundo moldado a partir do avanço tecnológico (Borba, 1999, apud Costa & Lacerda, 2014, p. 43).

Ressaltamos que a série de atividades que serão apresentadas não são absolutas, podem e devem contar com a colaboração dos professores envolvidos para adaptações as realidades de cada turma. Nota-se ainda a possibilidade de interconexão com outras disciplinas, como a História, mas que não serão oportunizadas neste material e ficam a critério dos utilizadores.

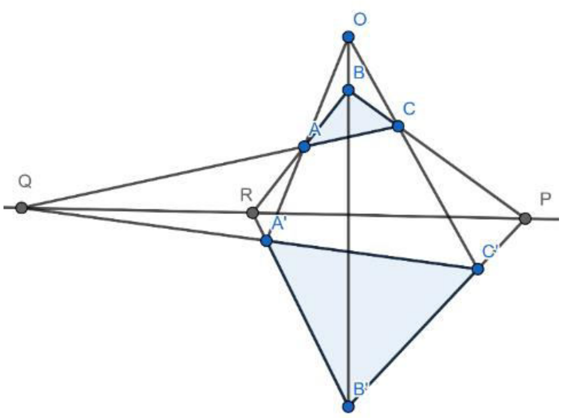
Sumário

I. A Geometria Projetiva e Girard Desargues

Podemos dizer que a Geometria Projetiva teve seu início já do Egito antigo, com Euclides, em "Os Elementos", e observando a história até o Renascimento com Leonardo da Vinci, Gentile Bellini e Sandro Botticelli explorando a perspectiva, é perceptível uma trajetória de evolução. No século XVII, sob as iniciativas de Girard Desargues, temos avanços significativos na fundamentação matemática das projeções. No século XIX, Jean-Victor Poncelet e August Ferdinand Möbius contribuíram com conceitos cruciais, unindo a geometria projetiva à teoria das máquinas e explorando transformações geométricas preservadoras de relações projetivas. Mais recentemente no século XX, com o auxílio da álgebra linear, a geometria projetiva foi capaz de formalizar conceitos mais abstratos. Nos tempos atuais ela rompe os limites da matemática, com aplicações em disciplinas como arte, computação gráfica e modelagem tridimensional, deixando evidente sua constante evolução e resiliência, sempre impulsionada por contribuições de pensadores visionários e sua integração com diversas áreas do conhecimento.

Entre estes pensadores visionários Girard Desargues obtém destaque, originário de Condrieu, perto de Lyon, Desargues nasceu em 1591 e se destacou como engenheiro militar após iniciar seus estudos em arquitetura, disciplina intimamente relacionada à matemática na época. Sua obra mais notável, publicada em 1639, apresentou o "Teorema de Desargues", crucial para o desenvolvimento da geometria projetiva, só obteve o devido reconhecimento anos depois da morte de seu autor. Este teorema estabelece condições para a projeção de figuras geométricas entre planos diferentes, contribuindo significativamente para o entendimento geométrico e o estudo das perspectivas.

Teorema (Desargues). Se ABC e $A'B'C'$ são triângulos tais que $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{R\}$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = \{P\}$ e $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = \{Q\}$, então P, Q e R são colineares se, e só se, $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são concorrentes ou paralelas.



Teorema de Desargues
Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

Podemos separar e melhor analisar este teorema em duas perspectivas:

(i) *Se dois triângulos são perspectivos por um ponto, então eles são perspectivos por uma reta*;

(ii) *Se dois triângulos são perspectivos por uma reta, então eles são perspectivos por um ponto.*

Dizemos que duas figuras são perspectivas se os seus pontos podem ser colocados em uma correspondência biunívoca de forma que um par de pontos correspondentes definem retas concorrentes ou se retas podem ser colocadas em uma correspondência biunívoca de forma que par de retas correspondentes definem pontos colineares. O Teorema de Desargues diz respeito a triângulos em perspectiva. A primeira correspondência é dita perspectividade por um ponto, chamado centro da perspectividade, enquanto a segunda correspondência é dita perspectividade por uma reta, chamada eixo da perspectividade.

II. Objetivos, Competências e Habilidades

As atividades propostas por este produto educacional têm por objetivo levar aos alunos a mobilização de conhecimentos, habilidade, atitudes e valores para resolver demandas da vida cotidiana, num contexto interconectado e tecnológico.

Nela trabalharemos em especial cinco das Competências Gerais presentes na BNCC, são elas a 1, 2, 3, 5 e 10, a saber:

1. Conhecimento: Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre os mundos físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade. Continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2. Pensamento científico, crítico e criativo: Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3. Senso estético e repertório cultural: Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

5. Cultura digital: Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

10. Autonomia: Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Abordaremos, mais especificamente competências e habilidades intrínsecas a Matemática e a Arte:

Na Matemática as Competências:

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

E as Habilidades:

(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.

(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.

(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.

(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.

(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

(EF09MA17) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.

Na Arte as Competências:

1. Explorar, conhecer, fruir e analisar criticamente práticas e produções artísticas e culturais do seu entorno social, dos povos indígenas, das comunidades tradicionais brasileiras e de diversas sociedades, em distintos tempos e espaços, para reconhecer a arte como um fenômeno cultural, histórico, social e sensível a diferentes contextos e dialogar com as diversidades.

2. Compreender as relações entre as linguagens da Arte e suas práticas integradas, inclusive aquelas possibilitadas pelo uso das novas tecnologias de informação e comunicação, pelo cinema e pelo audiovisual, nas condições particulares de produção, na prática de cada linguagem e nas suas articulações.

4. Experienciar a ludicidade, a percepção, a expressividade e a imaginação, ressignificando espaços da escola e de fora dela no âmbito da Arte.

5. Mobilizar recursos tecnológicos como formas de registro, pesquisa e criação artística.

8. Desenvolver a autonomia, a crítica, a autoria e o trabalho coletivo e colaborativo nas artes.

9. Analisar e valorizar o patrimônio artístico nacional e internacional, material e imaterial, com suas histórias e diferentes visões de mundo.

E as Habilidades:

(EF69AR04) Analisar os elementos constitutivos das artes visuais (ponto, linha, forma, direção, cor, tom, escala, dimensão, espaço, movimento etc.) na apreciação de diferentes produções artísticas.

(EF69AR05) Experimentar e analisar diferentes formas de expressão artística (desenho, pintura, colagem, quadrinhos, dobradura, escultura, modelagem, instalação, vídeo, fotografia, performance etc.).

(EF69AR35) Identificar e manipular diferentes tecnologias e recursos digitais para acessar, apreciar, produzir, registrar e compartilhar práticas e repertórios artísticos, de modo reflexivo, ético e responsável.

III. Atividades:

Atividade 1:

Lendo a Matemática no mundo da Arte

Tempo: 100 min

Materiais: Aparelhos celulares e/ou computadores conectados a internet (caso a atividade seja toda feita em sala), acervo de fotos de obras de arte dos diversos períodos históricos, cartolina, canetas hidrográficas, réguas e etc.

Indicação de Aplicação: A primeira e a segunda etapa podem ser aplicadas em quaisquer turmas do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, enquanto a terceira etapa recomendamos a aplicação ao 9º ano devido a abordagem de conceitos mais abstratos.

1ª Etapa: (20 min) *Introdução e Motivação*

Esta primeira etapa consiste em apresentar aos alunos a ideia de que a matemática não é "um bicho de sete cabeças", mas que ela é algo mais presente em nossas vidas do que comumente costumamos perceber.

Para facilitar esta percepção recomenda-se o vídeo produzido e disponibilizado no site do *International Mathematical Union*, em comemoração pelo *The International Day of Mathematics* (Dia Internacional da Matemática), disponível em sua página no endereço: https://player.vimeo.com/video/397014531

Após a apresentação recomenda-se um diálogo com a turma no qual se questione os alunos: ONDE VOCÊS PERCEBEM A MATEMÁTICA PARA ALÉM DA SALA DE AULA?

A partir de então oriente aos alunos uma pesquisa por obras de arte, as quais serão expostas em sala, nas quais os artistas se valeram de conhecimentos matemáticos na realização de obras.

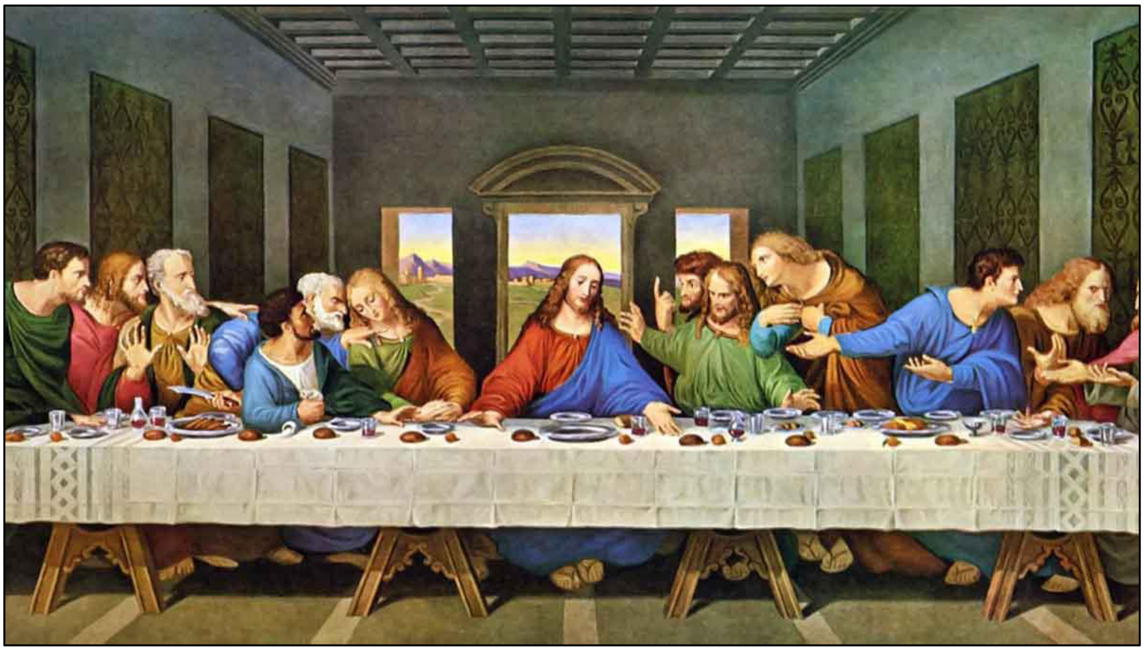
2ª Etapa: (50 min) *Coleta das pesquisas dos alunos e montagem da mostra das Obras de Arte/Matemática.*

Esta etapa pode ser reservada a pesquisa e montagem dos murais, ou caso a pesquisa seja orientada para ambiente extra classe, este momento será direcionado apenas a montagem dos murais.

Obs.: Recomenda-se aos professores envolvidos que também faça o levantamento de imagens que se enquadrem no tema e abordem os desenhos em perspectivas, para que na eventualidade, dos alunos não elencarem tais autores e obras, o trabalho possa ser continuado (no Anexo I podemos visualizar alguns exemplos).

3ª Etapa: (30 min) *Hora de criar o link de definições.*

Tomando como base uma das obras que abordem o tema da perspectiva o professor deverá apresentar aos alunos e orientar os mesmos na identificação do que é o Ponto de Fuga e a Linha do Horizonte da imagem. Sugerimos "A Última Ceia" de Leonardo da Vinci.



A Última Ceia, de Leonardo da Vinci

Fonte: Isto É. Disponível em: https://istoe.com.br/wp-content/uploads/2021/05/ceia-2-1280x720-1.jpg?x13129. Acesso em: 15 fev. 2024

Na Arte o *Ponto de Fuga* é a referência no horizonte para fazer as linhas em um desenho e construir uma perspectiva, na Matemática ele é conhecido como *Centro da Perspectiva,* ponto para o qual as linhas de projeção convergem.

Na Arte *Linha do Horizonte* é o elemento da construção em perspectiva que representa o nível dos olhos do observador, na Matemática ela é conhecida como *Eixo da Perspectiva.*

Para localizar o exposto anteriormente, oriente os alunos, utilizando réguas, a buscar linhas retas na imagem, como juntas do piso, alinhamento das marquises, construções e etc.

Será possível observar que estas linhas irão convergir para um ponto o Ponto de Fuga, por onde passa a Linha do Horizonte, geralmente delimitada pelo sopé das montanhas da imagem, quando visível (esta construção encontra-se no Anexo II)

Para fixar as terminologias do Universo da Arte e da Matemática recomendamos a ilustração a seguir disponível no Anexo III:

Fonte: Adaptação do autor. Disponível em: https://i.ytimg.com/vi/SUroyN-Y2k8/hq720.jpg?sqp=-oaymwEhCK4FEIIDSFryq4qpAxMIARUAAAAAGAElAADIQj0AgKJD&rs=AOn4CLC0xA0cvR_Bno-P9LaDpG71gnQ8gg.. Acesso em: 15 fev. 2024

Atividade 2

Oficina de Fotografia

Tempo: 100 min

Materiais: Maquina fotográfica, Celulares e/ou Smartphones com câmera, Computadores e/ou Smartphones com acesso à internet (caso as imagens tenham de ser obtidas pela internet), cartolina, canetas hidrográficas, réguas e etc.

Indicação de Aplicação: A primeira etapa podem ser aplicadas em quaisquer turmas do 7º ao 9º ano do Ensino Fundamental, enquanto a sgunda etapa recomendamos a aplicação ao 9º ano devido a abordagem de conceitos mais abstratos.

<u>1ª Etapa: (50 min)</u> *Vamos fotografar?!*

Propor aos alunos fotografar ambientes e/ou paisagens que se caracterizem pela aparição objetos em perspectivas, Ponto de Fuga e Linha Horizonte. Caso seja inviável a iniciativa anterior, estas imagens também podem ser obtidas na internet. Veja alguns exemplos de click's:

Foto Modelo para Oficina de Fotografia (Ponto de Fuga e Linha do Horizonte)
Km 60 da RJ 162. Macaé-RJ
Fonte: Foto dos autores (2024)

Foto Modelo para Oficina de Fotografia (Objetos em Perspectiva)
Fonte: Foto dos autores (2024)

<u>2ª Etapa: (50 min)</u> *Hora da pesquisa*

Nesta etapa deve-se orientar aos alunos uma pesquisa sobre Girard Desargues e suas contribuições para a Geometria Projetiva. A ideia é que surja nas pesquisas uma breve biografia deste matemático, juntamente com a historiografia da Geometria Projetiva e consequentemente o Teorema de Desargues, dados estes que poderão, e recomendamos, ser explicitados no mural da exposição.

Atividade 3

O teorema de Desargues e a Tecnologia

Tempo: 100 min

Materiais: Computador e/ou Smartphone com acesso à internet ou com o Software Geogebra (Geometria) (Disponível em: https://www.geogebra.org/download) previamente instalado e fichas com os guias de construção (Anexo IV)

Como opção a inexistência de recursos tecnológicos as construções podem ser realizadas com réguas esquadros (as fichas com o guia de construção encontram-se no Anexo V)

Indicação de Aplicação: Recomendamos a familiarização prévia com o Software Geogebra, e a aplicação desta atividade ao 9º ano do Ensino Fundamental.

1ª Etapa: (80 min) *Desenhando o Teorema*

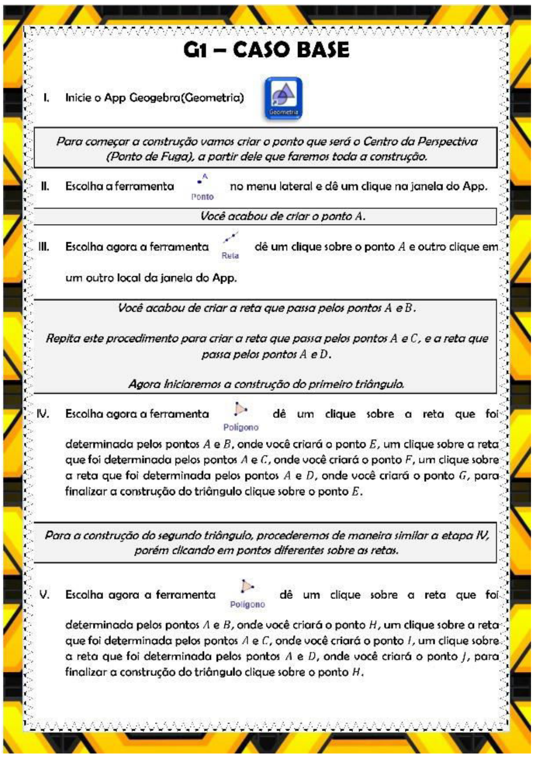
Nesta etapa será proposto aos alunos a utilização do Geogebra (ou réguas esquadro) para construir triângulos em perspectiva e a partir deles a visualização do Teorema de Desargues.

Divida a turma em 4 grupos, cada um será responsável por construir o caso base do teorema ou um de seus casos degenerados.

Cada grupo deverá receber uma das fichas com o guia de construção apresentados nas páginas a seguir e no (Anexo IV):

G1 – Caso Base

Frente | Verso



G1 – CASO BASE

I. Inicie o App Geogebra(Geometria) Geometria

Para começar a construção vamos criar o ponto que será o Centro da Perspectiva (Ponto de Fuga), a partir dele que faremos toda a construção.

II. Escolha a ferramenta Ponto no menu lateral e dê um clique na janela do App.

Você acabou de criar o ponto A.

III. Escolha agora a ferramenta Reta dê um clique sobre o ponto A e outro clique em um outro local da janela do App.

Você acabou de criar a reta que passa pelos pontos A e B.

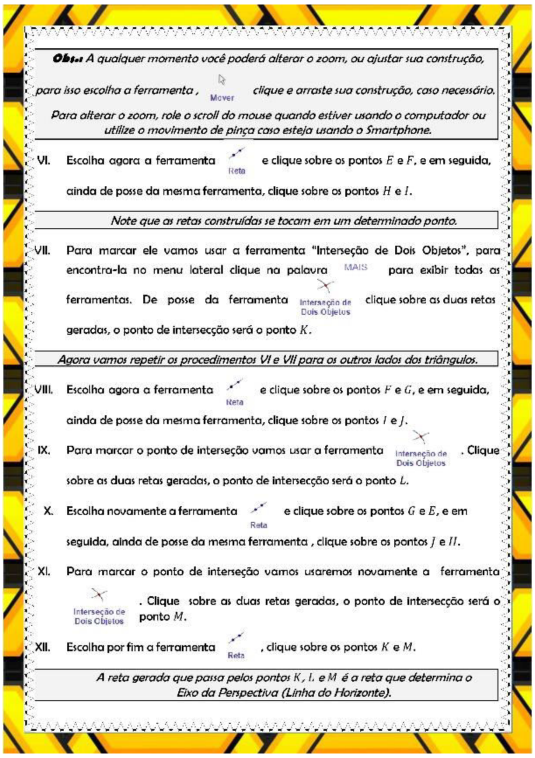
Repita este procedimento para criar a reta que passa pelos pontos A e C, e a reta que passa pelos pontos A e D.

Agora Iniciaremos a construção do primeiro triângulo.

IV. Escolha agora a ferramenta Polígono dê um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B, onde você criará o ponto E, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e C, onde você criará o ponto F, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e D, onde você criará o ponto G, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto E.

Para a construção do segundo triângulo, procederemos de maneira similar a etapa IV, porém clicando em pontos diferentes sobre as retas.

V. Escolha agora a ferramenta Polígono dê um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B, onde você criará o ponto H, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e C, onde você criará o ponto I, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e D, onde você criará o ponto J, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto H.



Obs.: *A qualquer momento você poderá alterar o zoom, ou ajustar sua construção, para isso escolha a ferramenta , Mover clique e arraste sua construção, caso necessário.*

Para alterar o zoom, role o scroll do mouse quando estiver usando o computador ou utilize o movimento de pinça caso esteja usando o Smartphone.

VI. Escolha agora a ferramenta Reta e clique sobre os pontos E e F, e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta, clique sobre os pontos H e I.

Note que as retas construídas se tocam em um determinado ponto.

VII. Para marcar ele vamos usar a ferramenta "Interseção de Dois Objetos", para encontra-la no menu lateral clique na palavra MAIS para exibir todas as ferramentas. De posse da ferramenta Interseção de Dois Objetos clique sobre as duas retas geradas, o ponto de intersecção será o ponto K.

Agora vamos repetir os procedimentos VI e VII para os outros lados dos triângulos.

VIII. Escolha agora a ferramenta Reta e clique sobre os pontos F e G, e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta, clique sobre os pontos I e J.

IX. Para marcar o ponto de interseção vamos usar a ferramenta Interseção de Dois Objetos . Clique sobre as duas retas geradas, o ponto de intersecção será o ponto L.

X. Escolha novamente a ferramenta Reta e clique sobre os pontos G e E, e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta , clique sobre os pontos J e II.

XI. Para marcar o ponto de interseção vamos usaremos novamente a ferramenta Interseção de Dois Objetos . Clique sobre as duas retas geradas, o ponto de intersecção será o ponto M.

XII. Escolha por fim a ferramenta Reta , clique sobre os pontos K e M.

A reta gerada que passa pelos pontos K, L e M é a reta que determina o Eixo da Perspectiva (Linha do Horizonte).

G2 – Caso em que as retas que determinam os vértices dos triângulos são paralelas.

Frente | Verso

G2 – RETAS PARALELAS

I. Inicie o App Geogebra(Geometria) Geometria

Para começar a construção vamos criar três retas paralelas, a partir delas que faremos toda a construção.

II. Escolha a ferramenta Reta no menu lateral e dê um clique na janela do App, será criado o ponto A, em seguida clique em um outro ponto na janela, será marcado o ponto B e criada a retas que passa pelos pontos A e B.

III. Agora vamos utilizar a ferramenta "Reta Paralela", para encontrá-la no menu lateral clique na palavra MAIS para exibir todas as ferramentas. De posse da ferramenta Reta Paralela clique sobre a reta já criada e clique em um outro ponto na janela. Este ponto será demarcado como ponto C e vote terá criado uma reta paralela a reta que passa pelos pontos A e B e que passa pelo ponto C.

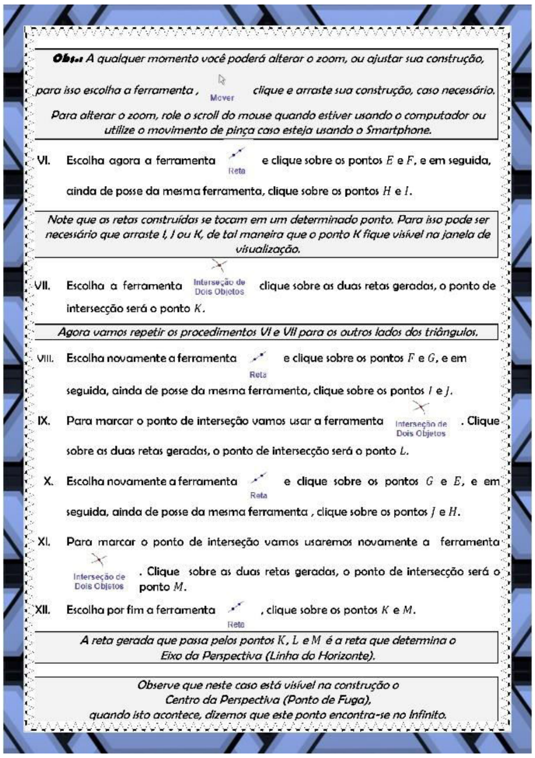
Repita este procedimento para criar outra reta paralela a estas.
O novo ponto será demarcado como ponto D e você terá criado uma reta paralela as retas anteriores e que passa pelo D.

Agora Iniciaremos a construção do primeiro triângulo.

IV. Escolha agora a ferramenta Polígono dê um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B, onde você criará o ponto E, um clique sobre a reta que foi determinada pelo ponto C, onde você criará o ponto F, um clique sobre a reta que foi determinada pelo ponto D, onde você criará o ponto G, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto E.

Para a construção do segundo triângulo, procederemos de maneira similar a etapa IV, porém clicando em pontos diferentes sobre as retas.

V. Escolha agora a ferramenta Polígono dê um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B, onde você criará o ponto H, um clique sobre a reta que foi determinada pelo C, onde você criará o ponto I, um clique sobre a reta que foi determinada pelo ponto D, onde você criará o ponto J, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto H.



Obs.: *A qualquer momento você poderá alterar o zoom, ou ajustar sua construção, para isso escolha a ferramenta , Mover clique e arraste sua construção, caso necessário.*

Para alterar o zoom, role o scroll do mouse quando estiver usando o computador ou utilize o movimento de pinça caso esteja usando o Smartphone.

VI. Escolha agora a ferramenta Reta e clique sobre os pontos E e F, e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta, clique sobre os pontos H e I.

Note que as retas construídas se tocam em um determinado ponto. Para isso pode ser necessário que arraste I, J ou K, de tal maneira que o ponto K fique visível na janela de visualização.

VII. Escolha a ferramenta Interseção de Dois Objetos clique sobre as duas retas geradas, o ponto de intersecção será o ponto K.

Agora vamos repetir os procedimentos VI e VII para os outros lados dos triângulos.

VIII. Escolha novamente a ferramenta Reta e clique sobre os pontos F e G, e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta, clique sobre os pontos I e J.

IX. Para marcar o ponto de interseção vamos usar a ferramenta Interseção de Dois Objetos . Clique sobre as duas retas geradas, o ponto de intersecção será o ponto L.

X. Escolha novamente a ferramenta Reta e clique sobre os pontos G e E, e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta , clique sobre os pontos J e H.

XI. Para marcar o ponto de interseção vamos usaremos novamente a ferramenta Interseção de Dois Objetos . Clique sobre as duas retas geradas, o ponto de intersecção será o ponto M.

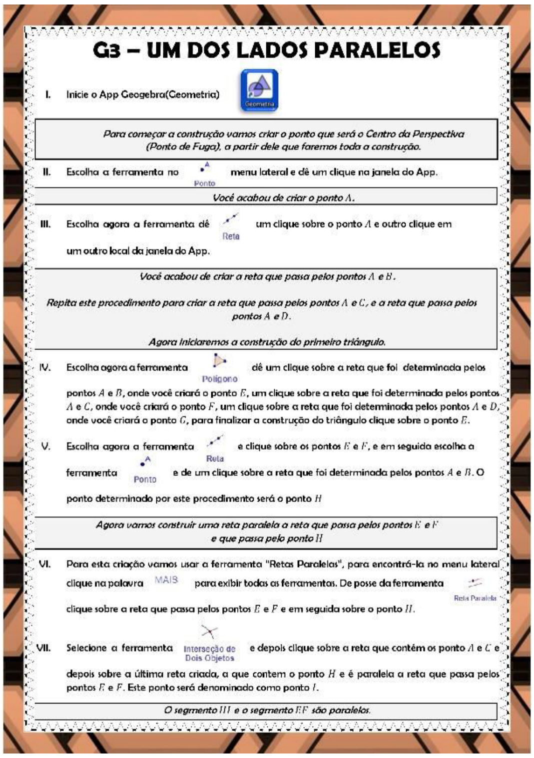
XII. Escolha por fim a ferramenta Reta , clique sobre os pontos K e M.

A reta gerada que passa pelos pontos K, L e M é a reta que determina o Eixo da Perspectiva (Linha do Horizonte).

Observe que neste caso está visível na construção o Centro da Perspectiva (Ponto de Fuga), quando isto acontece, dizemos que este ponto encontra-se no Infinito.

G3 – Caso em que um dos lados dos triângulos em perspectivas são paralelos entre si.

Frente | Verso



G3 – UM DOS LADOS PARALELOS

I. Inicie o App Geogebra(Geometria) Geometria

Para começar a construção vamos criar o ponto que será o Centro da Perspectiva (Ponto de Fuga), a partir dele que faremos toda a construção.

II. Escolha a ferramenta no Ponto menu lateral e dê um clique na janela do App.

Você acabou de criar o ponto A.

III. Escolha agora a ferramenta Reta dê um clique sobre o ponto A e outro clique em um outro local da janela do App.

Você acabou de criar a reta que passa pelos pontos A e B.

Repita este procedimento para criar a reta que passa pelos pontos A e C, e a reta que passa pelos pontos A e D.

Agora iniciaremos a construção do primeiro triângulo.

IV. Escolha agora a ferramenta Polígono dê um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B, onde você criará o ponto E, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e C, onde você criará o ponto F, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e D, onde você criará o ponto G, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto E.

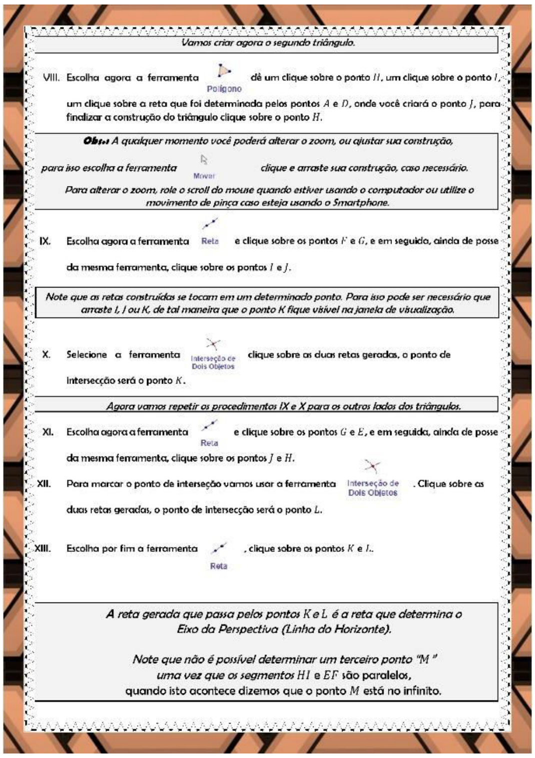
V. Escolha agora a ferramenta Reta e clique sobre os pontos E e F, e em seguida escolha a ferramenta Ponto e de um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B. O ponto determinado por este procedimento será o ponto H

Agora vamos construir uma reta paralela a reta que passa pelos pontos E e F e que passa pelo ponto H

VI. Para esta criação vamos usar a ferramenta "Retas Paralelas", para encontrá-la no menu lateral clique na palavra MAIS para exibir todas as ferramentas. De posse da ferramenta Reta Paralela clique sobre a reta que passa pelos pontos E e F e em seguida sobre o ponto H.

VII. Selecione a ferramenta Interseção de Dois Objetos e depois clique sobre a reta que contém os ponto A e C e depois sobre a última reta criada, a que contem o ponto H e é paralela a reta que passa pelos pontos E e F. Este ponto será denominado como ponto I.

O segmento HI e o segmento EF são paralelos.



Vamos criar agora o segundo triângulo.

VIII. Escolha agora a ferramenta Polígono dê um clique sobre o ponto H, um clique sobre o ponto I, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e D, onde você criará o ponto J, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto H.

Obs.: *A qualquer momento você poderá alterar o zoom, ou ajustar sua construção, para isso escolha a ferramenta Mover clique e arraste sua construção, caso necessário.*

Para alterar o zoom, role o scroll do mouse quando estiver usando o computador ou utilize o movimento de pinça caso esteja usando o Smartphone.

IX. Escolha agora a ferramenta Reta e clique sobre os pontos F e G, e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta, clique sobre os pontos I e J.

Note que as retas construídas se tocam em um determinado ponto. Para isso pode ser necessário que arraste I, J ou K, de tal maneira que o ponto K fique visível na janela de visualização.

X. Selecione a ferramenta Interseção de Dois Objetos clique sobre as duas retas geradas, o ponto de intersecção será o ponto K.

Agora vamos repetir os procedimentos IX e X para os outros lados dos triângulos.

XI. Escolha agora a ferramenta Reta e clique sobre os pontos G e E, e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta, clique sobre os pontos J e H.

XII. Para marcar o ponto de interseção vamos usar a ferramenta Interseção de Dois Objetos. Clique sobre as duas retas geradas, o ponto de intersecção será o ponto L.

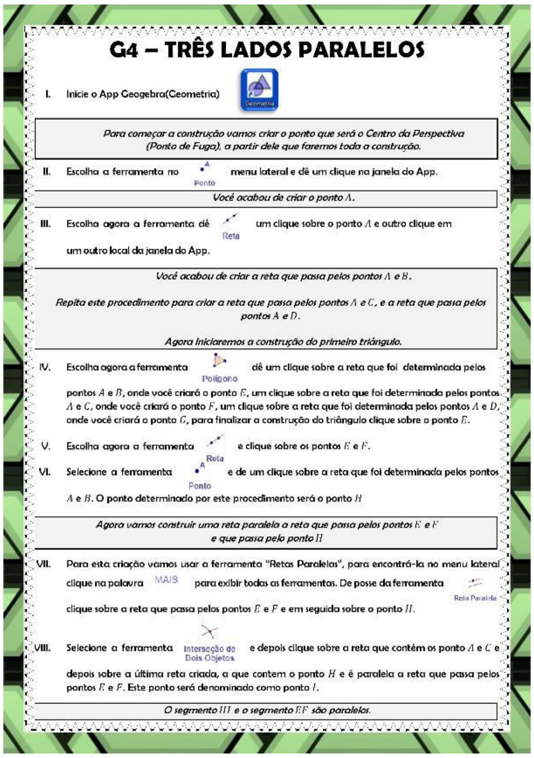
XIII. Escolha por fim a ferramenta Reta, clique sobre os pontos K e L.

A reta gerada que passa pelos pontos K e L é a reta que determina o Eixo da Perspectiva (Linha do Horizonte).

Note que não é possível determinar um terceiro ponto "M" uma vez que os segmentos HI e EF são paralelos,
quando isto acontece dizemos que o ponto M está no infinito.

G4 – Caso em que os três lados dos triângulos em perspectivas são paralelos entre si.

Frente | Verso



G4 – TRÊS LADOS PARALELOS

I. Inicie o App Geogebra(Geometria) Geometria

Para começar a construção vamos criar o ponto que será o Centro da Perspectiva (Ponto de Fuga), a partir dele que faremos toda a construção.

II. Escolha a ferramenta no Ponto menu lateral e dê um clique na janela do App.

Você acabou de criar o ponto A.

III. Escolha agora a ferramenta Reta dê um clique sobre o ponto A e outro clique em um outro local da janela do App.

Você acabou de criar a reta que passa pelos pontos A e B.

Repita este procedimento para criar a reta que passa pelos pontos A e C, e a reta que passa pelos pontos A e D.

Agora iniciaremos a construção do primeiro triângulo.

IV. Escolha agora a ferramenta Polígono dê um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B, onde você criará o ponto E, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e C, onde você criará o ponto F, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e D, onde você criará o ponto G, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto E.

V. Escolha agora a ferramenta Reta e clique sobre os pontos E e F.

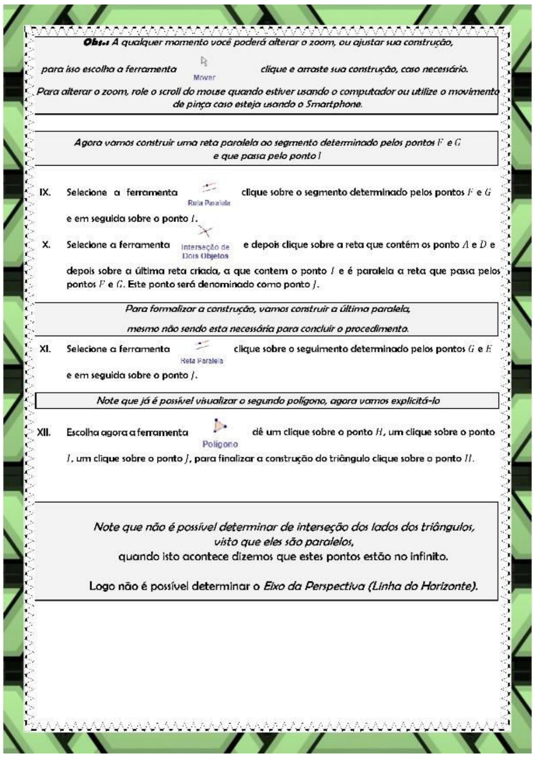
VI. Selecione a ferramenta Ponto e de um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B. O ponto determinado por este procedimento será o ponto H

Agora vamos construir uma reta paralela a reta que passa pelos pontos E e F e que passa pelo ponto H

VII. Para esta criação vamos usar a ferramenta "Retas Paralelas", para encontrá-la no menu lateral clique na palavra MAIS para exibir todas as ferramentas. De posse da ferramenta Reta Paralela clique sobre a reta que passa pelos pontos E e F e em seguida sobre o ponto H.

VIII. Selecione a ferramenta Interseção de Dois Objetos e depois clique sobre a reta que contém os ponto A e C e depois sobre a última reta criada, a que contem o ponto H e é paralela a reta que passa pelos pontos E e F. Este ponto será denominado como ponto I.

O segmento HI e o segmento EF são paralelos.



Obs.: *A qualquer momento você poderá alterar o zoom, ou ajustar sua construção, para isso escolha a ferramenta Mover clique e arraste sua construção, caso necessário.*

Para alterar o zoom, role o scroll do mouse quando estiver usando o computador ou utilize o movimento de pinça caso esteja usando o Smartphone.

Agora vamos construir uma reta paralela ao segmento determinado pelos pontos F e G e que passa pelo ponto I

IX. Selecione a ferramenta Reta Paralela clique sobre o segmento determinado pelos pontos F e G e em seguida sobre o ponto I.

X. Selecione a ferramenta Interseção de Dois Objetos e depois clique sobre a reta que contém os ponto A e D e depois sobre a última reta criada, a que contem o ponto I e é paralela a reta que passa pelos pontos F e G. Este ponto será denominado como ponto J.

Para formalizar a construção, vamos construir a última paralela, mesmo não sendo esta necessária para concluir o procedimento.

XI. Selecione a ferramenta Reta Paralela clique sobre o seguimento determinado pelos pontos G e E e em seguida sobre o ponto J.

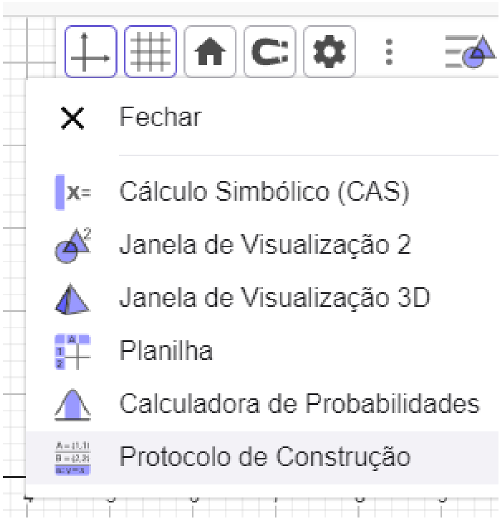
Note que já é possível visualizar o segundo polígono, agora vamos explicitá-lo

XII. Escolha agora a ferramenta Polígono dê um clique sobre o ponto H, um clique sobre o ponto I, um clique sobre o ponto J, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto H.

Note que não é possível determinar de interseção dos lados dos triângulos, visto que eles são paralelos,
quando isto acontece dizemos que estes pontos estão no infinito.

Logo não é possível determinar o *Eixo da Perspectiva (Linha do Horizonte).*

Obs.: Caso seja observada alguma dificuldade na construção dos casos, é possível visualizá-las no Geogrebra Clássico (Online). Utilize o títulos a seguir para acessar cada caso e acompanhe o passo-a-passo pela ferramenta "Protocolo de Construção", como pode ser visualizado na imagem a ser.



Localização da ferramenta Protocolo de Construção no Geogebra Clássico

Fonte: https://www.geogebra.org/classic. Acessado em: 20 fev. 2024

G1 – *Caso Base*

Acesse em: *https://www.geogebra.org/classic/gxejaszd*

G2 – *Caso em que as retas que determinam os vértices dos triângulos são*

Acesse em: *https://www.geogebra.org/classic/nnxfyetz*

G3 – *Caso em que um dos lados dos triângulos em perspectivas são paralelos entre si.*

Acesse em: *https://www.geogebra.org/classic/dkbctxcx*

G4 – *Caso em que os três lados dos triângulos em perspectivas são paralelos entre si.*

Acesse em: *https://www.geogebra.org/classic/wbe2wajm*

As imagens das construções com réguas esquadro se encontram no Anexo VI

2ª Etapa: (20 min) *Hora de testar novas possibilidades e expor os trabalhos*

Ao término da construção oriente aos grupos mover alguns pontos da construção e visualizar que as Leis do Teorema se mantém. Se for possível efetue a impressão das construções dos grupos e acrescente nos murais das Atividades 1 e 2.

Atividade 4

Construindo a perspectiva a partir de um ponto

Tempo: 50 min

Materiais: Folha branca (A3 ou A4), Barbante, Fita adesiva (crepe), lápis e borracha

Indicação de Aplicação: Recomendamos a aplicação desta atividade as turmas do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental.

1ª Etapa: (05 min) *Introdução e motivação*

Esta atividade consiste em uma oficina de desenho motivada por construções em perspectiva a partir de um ponto. Para motivar e orientar a atividade, sugerimos apresentar o vídeo "Desenho Perspectiva com Barbante" disponível em https://www.youtube.com/watch?v=Ci_VwrrIpLw, além de algumas das construções a seguir, que estão disponíveis nos anexos (Anexo VII), como exemplos.

Print's do vídeo "Como nunca mais erras na perpespectivas", da Academia Brasileira de Artes Disponível em: https://www.facebook.com/abra.arte/videos/como-nunca-mais-errar-nas-perspectivas/613863196246409/. Acessado em 15 fev. 2024

2ª Etapa: (45 min) *Desenho em Perspectiva*

Distribua uma folha de papel em branco A3 ou A4 (o tamanho da folha influenciará apenas no tamanho final do desenho, mas não em sua construção), um pedaço de barbante de aproximadamente 70 cm e um pedaço de Fita Crepe.

O aluno poderá optar por fazer seu desenho com a folha na horizontal ou na vertical sem nenhum prejuízo para a atividade.

Escolhida a posição, oriente os alunos a sinalizarem com um ponto onde eles desejam que seja o Ponto de Fuga de seu desenho e uma linha para ser a Linha do Horizonte. Estas escolhas influenciarão a construção do desenho.

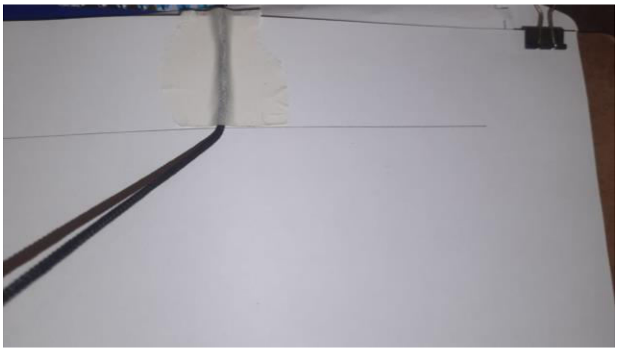
Materiais para desenho em perspectiva a partir de um ponto.

Fonte: Foto dos autores (2024)

Agora os alunos deverão fixar uma extremidade do barbante exatamente sobre este pontinho utilizando a fita crepe.

Passo a passo do desenho em perspectiva a partir de um ponto.

Fonte: Foto dos autores (2024)



Passo a passo do desenho em perspectiva a partir de um ponto.

Fonte: Foto dos autores (2024)

Passo a passo do desenho em perspectiva a partir de um ponto.

Fonte: Foto dos autores (2024)

Feita a fixação os alunos podem iniciar o desenho utilizando-se do barbante pra traças as linhas que determinarão a perspectiva do desenho.

Ao termino da atividade, recomendamos expor os trabalhos nos murais juntamente com as atividades 1, 2 e 3.

IV. Referências:

BORBA, M. C. Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do Pensamento. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). .Resolução CNE/CP nº 2/2017. Ministério da Educação, 2017.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). .Resolução CNE/CP nº 4/2018. Ministério da Educação, 2018.

COSTA, F. A. Uma Visão Interdisciplinar do Teorema de Desargues. Rio de Janeiro. 2024. 95p. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

International Mathematical Union. The International Day of Mathematics. 2020. Disponível em: https://www.idm314.org/math-everywhere-video. Acesso em 21 fev. 2024.

ANEXOS

Anexo I

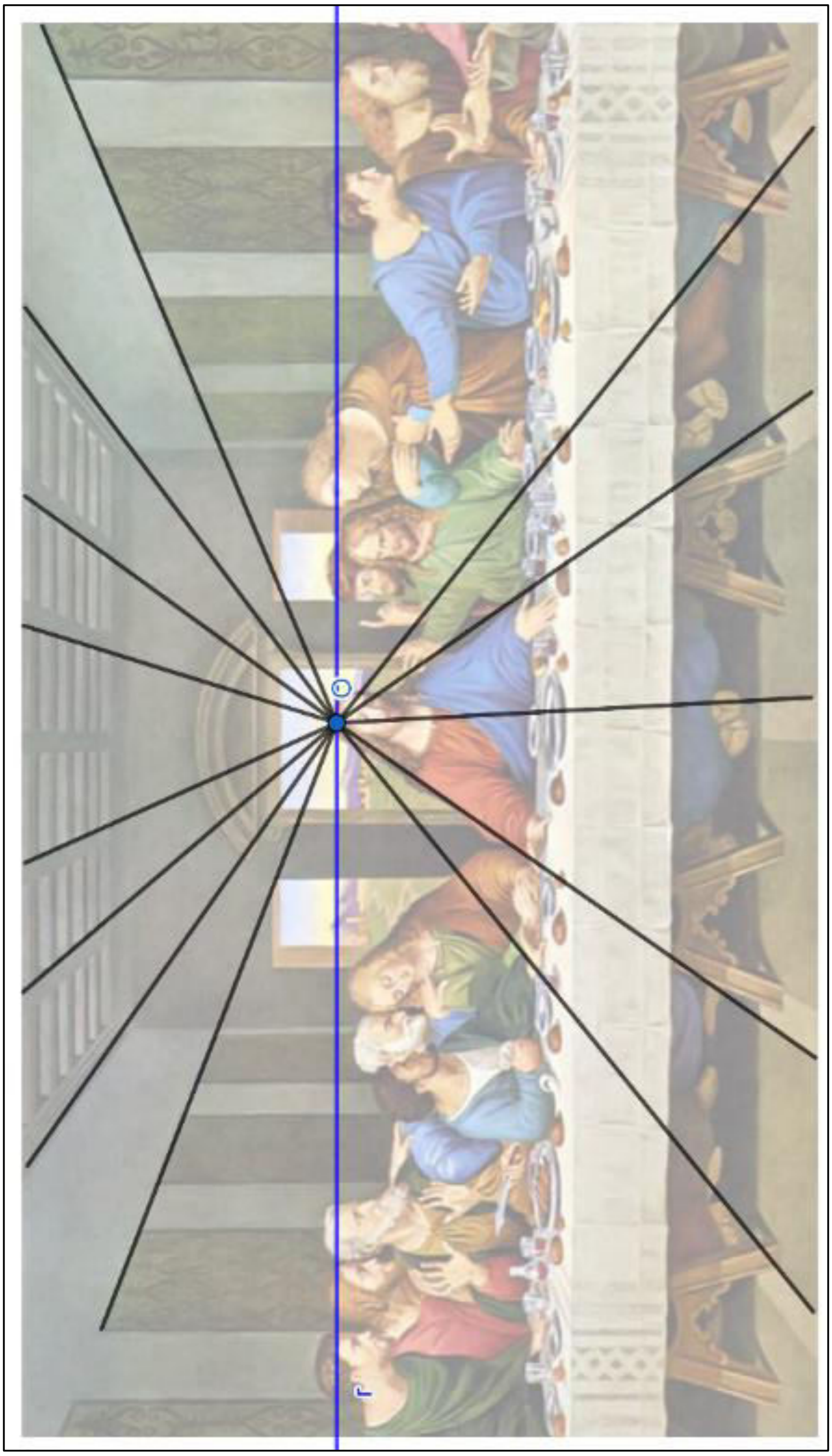
Delivery of the Keys, de Pietro Perugino

Fonte: Wikimedia Commons. Disponível em: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/archive/0/0b/20130312164026%21Perugino_Keys.jpg. Acesso em: 31 jan. 2024

A Última Ceia, de Leonardo da Vinci

Fonte: Isto É. Disponível em: https://istoe.com.br/wp-content/uploads/2021/05/ceia-2-1280x720-1.jpg?x13129. Acesso em: 15 fev. 2024

Anexo II



Quadro A Última Ceia, de Leonardo da Vinci.

Fonte: Adaptação do autor

Anexo III

Fonte: Adaptação do autor. Disponível em: https://i.ytimg.com/vi/SUroyN-Y2k8/hq720.jpg?sqp=-oaymwEhCK4FEIIDSFryq4qpAxMIARUAAAAAGAElAADIQj0AgKJD&rs=AOn4CLC0xA0cvR_Bno-P9LaDpG71gnQ8ggAcesso em: 15 fev. 2024

Anexo IV

Guias de Construção para o Geogebra

G1 – CASO BASE

I. Inicie o App Geogebra(Geometria) Geometria

Para começar a construção vamos criar o ponto que será o Centro da Perspectiva (Ponto de Fuga), a partir dele que faremos toda a construção.

II. Escolha a ferramenta Ponto no menu lateral e dê um clique na janela do App.

Você acabou de criar o ponto A.

III. Escolha agora a ferramenta Reta dê um clique sobre o ponto A e outro clique em um outro local da janela do App.

Você acabou de criar a reta que passa pelos pontos A e B.

Repita este procedimento para criar a reta que passa pelos pontos A e C, e a reta que passa pelos pontos A e D.

Agora Iniciaremos a construção do primeiro triângulo.

IV. Escolha agora a ferramenta Polígono dê um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B, onde você criará o ponto E, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e C, onde você criará o ponto F, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e D, onde você criará o ponto G, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto E.

Para a construção do segundo triângulo, procederemos de maneira similar a etapa IV, porém clicando em pontos diferentes sobre as retas.

V. Escolha agora a ferramenta Polígono dê um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B, onde você criará o ponto H, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e C, onde você criará o ponto I, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e D, onde você criará o ponto J, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto H.

***Obs.:** A qualquer momento você poderá alterar o zoom, ou ajustar sua construção, para isso escolha a ferramenta , Mover clique e arraste sua construção, caso necessário.*

Para alterar o zoom, role o scroll do mouse quando estiver usando o computador ou utilize o movimento de pinça caso esteja usando o Smartphone.

VI. Escolha agora a ferramenta Reta e clique sobre os pontos E e F, e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta, clique sobre os pontos H e I.

Note que as retas construídas se tocam em um determinado ponto.

VII. Para marcar ele vamos usar a ferramenta "Interseção de Dois Objetos", para encontra-la no menu lateral clique na palavra MAIS para exibir todas as ferramentas. De posse da ferramenta Interseção de Dois Objetos clique sobre as duas retas geradas, o ponto de intersecção será o ponto K.

Agora vamos repetir os procedimentos VI e VII para os outros lados dos triângulos.

VIII. Escolha agora a ferramenta Reta e clique sobre os pontos F e G, e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta, clique sobre os pontos I e J.

IX. Para marcar o ponto de interseção vamos usar a ferramenta Interseção de Dois Objetos . Clique sobre as duas retas geradas, o ponto de intersecção será o ponto L.

X. Escolha novamente a ferramenta Reta e clique sobre os pontos G e E, e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta , clique sobre os pontos J e H.

XI. Para marcar o ponto de interseção vamos usaremos novamente a ferramenta Interseção de Dois Objetos . Clique sobre as duas retas geradas, o ponto de intersecção será o ponto M.

XII. Escolha por fim a ferramenta Reta , clique sobre os pontos K e M.

A reta gerada que passa pelos pontos K, L e M é a reta que determina o Eixo da Perspectiva (Linha do Horizonte).

G2 – RETAS PARALELAS

I. Inicie o App Geogebra(Geometria) Geometria

Para começar a construção vamos criar três retas paralelas, a partir delas que faremos toda a construção.

II. Escolha a ferramenta Reta no menu lateral e dê um clique na janela do App, será criado o ponto A, em seguida clique em um outro ponto na janela, será marcado o ponto B e criada a retas que passa pelos pontos A e B.

III. Agora vamos utilizar a ferramenta "Reta Paralela", para encontrá-la no menu lateral clique na palavra MAIS para exibir todas as ferramentas. De posse da ferramenta Reta Paralela clique sobre a reta já criada e clique em um outro ponto na janela. Este ponto será demarcado como ponto C e vote terá criado uma reta paralela a reta que passa pelos pontos A e B e que passa pelo ponto C.

Repita este procedimento para criar outra reta paralela a estas.
O novo ponto será demarcado como ponto D e você terá criado uma reta paralela as retas anteriores e que passa pelo D.

Agora Iniciaremos a construção do primeiro triângulo.

IV. Escolha agora a ferramenta Polígono dê um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B, onde você criará o ponto E, um clique sobre a reta que foi determinada pelo ponto C, onde você criará o ponto F, um clique sobre a reta que foi determinada pelo ponto D, onde você criará o ponto G, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto E.

Para a construção do segundo triângulo, procederemos de maneira similar a etapa IV, porém clicando em pontos diferentes sobre as retas.

V. Escolha agora a ferramenta Polígono dê um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B, onde você criará o ponto H, um clique sobre a reta que foi determinada pelo C, onde você criará o ponto I, um clique sobre a reta que foi determinada pelo ponto D, onde você criará o ponto J, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto H.

***Obs.:** A qualquer momento você poderá alterar o zoom, ou ajustar sua construção, para isso escolha a ferramenta , Mover clique e arraste sua construção, caso necessário. Para alterar o zoom, role o scroll do mouse quando estiver usando o computador ou utilize o movimento de pinça caso esteja usando o Smartphone.*

VI. Escolha agora a ferramenta Reta e clique sobre os pontos E e F, e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta, clique sobre os pontos H e I.

Note que as retas construídas se tocam em um determinado ponto. Para isso pode ser necessário que arraste I, J ou K, de tal maneira que o ponto K fique visível na janela de visualização.

VII. Escolha a ferramenta Interseção de Dois Objetos clique sobre as duas retas geradas, o ponto de intersecção será o ponto K.

Agora vamos repetir os procedimentos VI e VII para os outros lados dos triângulos.

VIII. Escolha novamente a ferramenta Reta e clique sobre os pontos F e G, e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta, clique sobre os pontos I e J.

IX. Para marcar o ponto de interseção vamos usar a ferramenta Interseção de Dois Objetos. Clique sobre as duas retas geradas, o ponto de intersecção será o ponto L.

X. Escolha novamente a ferramenta Reta e clique sobre os pontos G e E, e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta , clique sobre os pontos J e H.

XI. Para marcar o ponto de interseção vamos usaremos novamente a ferramenta Interseção de Dois Objetos. Clique sobre as duas retas geradas, o ponto de intersecção será o ponto M.

XII. Escolha por fim a ferramenta Reta, clique sobre os pontos K e M.

A reta gerada que passa pelos pontos K, L e M é a reta que determina o Eixo da Perspectiva (Linha do Horizonte).

Observe que neste caso está visível na construção o Centro da Perspectiva (Ponto de Fuga), quando isto acontece, dizemos que este ponto encontra-se no Infinito.

G3 – UM DOS LADOS PARALELOS

I. Inicie o App Geogebra(Geometria) Geometria

Para começar a construção vamos criar o ponto que será o Centro da Perspectiva (Ponto de Fuga), a partir dele que faremos toda a construção.

II. Escolha a ferramenta no Ponto menu lateral e dê um clique na janela do App.

Você acabou de criar o ponto A.

III. Escolha agora a ferramenta dê Reta um clique sobre o ponto A e outro clique em um outro local da janela do App.

Você acabou de criar a reta que passa pelos pontos A e B.

Repita este procedimento para criar a reta que passa pelos pontos A e C, e a reta que passa pelos pontos A e D.

Agora Iniciaremos a construção do primeiro triângulo.

IV. Escolha agora a ferramenta Polígono dê um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B, onde você criará o ponto E, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e C, onde você criará o ponto F, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e D, onde você criará o ponto G, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto E.

V. Escolha agora a ferramenta Reta e clique sobre os pontos E e F, e em seguida escolha a ferramenta Ponto e de um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B. O ponto determinado por este procedimento será o ponto H

Agora vamos construir uma reta paralela a reta que passa pelos pontos E e F e que passa pelo ponto H

VI. Para esta criação vamos usar a ferramenta "Retas Paralelas", para encontrá-la no menu lateral clique na palavra MAIS para exibir todas as ferramentas. De posse da ferramenta Reta Paralela clique sobre a reta que passa pelos pontos E e F e em seguida sobre o ponto H.

VII. Selecione a ferramenta Interseção de Dois Objetos e depois clique sobre a reta que contém os ponto A e C e depois sobre a última reta criada, a que contem o ponto H e é paralela a reta que passa pelos pontos E e F. Este ponto será denominado como ponto I.

O segmento HI e o segmento EF são paralelos.

Vamos criar agora o segundo triângulo.

VIII. Escolha agora a ferramenta Polígono dê um clique sobre o ponto H, um clique sobre o ponto I, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e D, onde você criará o ponto J, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto H.

Obs.: *A qualquer momento você poderá alterar o zoom, ou ajustar sua construção, para isso escolha a ferramenta* Mover *clique e arraste sua construção, caso necessário.*
Para alterar o zoom, role o scroll do mouse quando estiver usando o computador ou utilize o movimento de pinça caso esteja usando o Smartphone.

IX. Escolha agora a ferramenta Reta e clique sobre os pontos F e G, e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta, clique sobre os pontos I e J.

Note que as retas construídas se tocam em um determinado ponto. Para isso pode ser necessário que arraste I, J ou K, de tal maneira que o ponto K fique visível na janela de visualização.

X. Selecione a ferramenta Interseção de Dois Objetos clique sobre as duas retas geradas, o ponto de intersecção será o ponto K.

Agora vamos repetir os procedimentos IX e X para os outros lados dos triângulos.

XI. Escolha agora a ferramenta Reta e clique sobre os pontos G e E, e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta, clique sobre os pontos J e H.

XII. Para marcar o ponto de interseção vamos usar a ferramenta Interseção de Dois Objetos. Clique sobre as duas retas geradas, o ponto de intersecção será o ponto L.

XIII. Escolha por fim a ferramenta Reta, clique sobre os pontos K e L.

A reta gerada que passa pelos pontos K e L é a reta que determina o Eixo da Perspectiva (Linha do Horizonte).

Note que não é possível determinar um terceiro ponto "M" uma vez que os segmentos HI e EF são paralelos,
quando isto acontece dizemos que o ponto M está no infinito.

G4 – TRÊS LADOS PARALELOS

I. Inicie o App Geogebra(Geometria) Geometria

Para começar a construção vamos criar o ponto que será o Centro da Perspectiva (Ponto de Fuga), a partir dele que faremos toda a construção.

II. Escolha a ferramenta no Ponto menu lateral e dê um clique na janela do App.

Você acabou de criar o ponto A.

III. Escolha agora a ferramenta dê Reta um clique sobre o ponto A e outro clique em um outro local da janela do App.

Você acabou de criar a reta que passa pelos pontos A e B.

Repita este procedimento para criar a reta que passa pelos pontos A e C, e a reta que passa pelos pontos A e D.

Agora Iniciaremos a construção do primeiro triângulo.

IV. Escolha agora a ferramenta Polígono dê um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B, onde você criará o ponto E, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e C, onde você criará o ponto F, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e D, onde você criará o ponto G, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto E.

V. Escolha agora a ferramenta Reta e clique sobre os pontos E e F.

VI. Selecione a ferramenta Ponto e de um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B. O ponto determinado por este procedimento será o ponto H

Agora vamos construir uma reta paralela a reta que passa pelos pontos E e F e que passa pelo ponto H

VII. Para esta criação vamos usar a ferramenta "Retas Paralelas", para encontrá-la no menu lateral clique na palavra MAIS para exibir todas as ferramentas. De posse da ferramenta Reta Paralela clique sobre a reta que passa pelos pontos E e F e em seguida sobre o ponto H.

VIII. Selecione a ferramenta Interseção de Dois Objetos e depois clique sobre a reta que contém os ponto A e C e depois sobre a última reta criada, a que contem o ponto H e é paralela a reta que passa pelos pontos E e F. Este ponto será denominado como ponto I.

O segmento HI e o segmento EF são paralelos.

Obs.: *A qualquer momento você poderá alterar o zoom, ou ajustar sua construção,*

para isso escolha a ferramenta Mover *clique e arraste sua construção, caso necessário.*

Para alterar o zoom, role o scroll do mouse quando estiver usando o computador ou utilize o movimento de pinça caso esteja usando o Smartphone.

Agora vamos construir uma reta paralela ao segmento determinado pelos pontos F e G e que passa pelo ponto I

IX. Selecione a ferramenta Reta Paralela clique sobre o segmento determinado pelos pontos F e G e em seguida sobre o ponto I.

X. Selecione a ferramenta Interseção de Dois Objetos e depois clique sobre a reta que contém os ponto A e D e depois sobre a última reta criada, a que contem o ponto I e é paralela a reta que passa pelos pontos F e G. Este ponto será denominado como ponto J.

Para formalizar a construção, vamos construir a última paralela,

mesmo não sendo esta necessária para concluir o procedimento.

XI. Selecione a ferramenta Reta Paralela clique sobre o seguimento determinado pelos pontos G e E e em seguida sobre o ponto J.

Note que já é possível visualizar o segundo polígono, agora vamos explicitá-lo

XII. Escolha agora a ferramenta Polígono dê um clique sobre o ponto H, um clique sobre o ponto I, um clique sobre o ponto J, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto H.

Note que não é possível determinar de interseção dos lados dos triângulos, visto que eles são paralelos,
quando isto acontece dizemos que estes pontos estão no infinito.

Logo não é possível determinar o *Eixo da Perspectiva (Linha do Horizonte).*

Anexo V

Guias de Construção para Régua Esquadro

G1 – CASO BASE

* Construção com Régua

Para começar a construção vamos criar o ponto que será o Centro da Perspectiva (Ponto de Fuga), a partir dele que faremos toda a construção.

I. Marque sobre a folha um ponto ao qual chamaremos de A.

II. Marques outros três pontos distinto distintos de A e entre si, aos quais chamaremos de B, C e D.

III. Trace três retas, cada uma delas com origem no ponto A e que passem por cada um dos pontos B, C e D.

Sobre cada uma das retas marque um ponto:

IV. Sobre a reta determinada pelos pontos A e B, marque o ponto E.

V. Sobre a reta determinada pelos pontos A e C, marque o ponto F.

VI. Sobre a reta determinada pelos pontos A e D, marque o ponto G.

VII. Interligue os pontos E, F e G formando um triângulo.

Vamos criar agora um segundo triângulo seguindo as diretrizes anteriores, marcando pontos distintos dos anteriores.

VIII. Sobre a reta determinada pelos pontos A e B, marque o ponto H.

IX. Sobre a reta determinada pelos pontos A e C, marque o ponto I.

X. Sobre a reta determinada pelos pontos A e D, marque o ponto J.

XI. Interligue os pontos H, I e J formando um triângulo.

XII. Prolongue as retas determinadas pelos segmentos EF e HI, e na interseção destas marque o ponto K.

XIII. Prolongue as retas determinadas pelos segmentos FG e IJ, e na interseção destas marque o ponto L.

XIV. Prolongue as retas determinadas pelos segmentos GE e JH, e na interseção destas marque o ponto M.

XV. Trace a reta que interliga os pontos K, L e M

A reta gerada no item anterior, que passa pelos pontos K, L e M é a reta que determina o Eixo da Perspectiva (Linha do Horizonte).

G2 – RETAS PARALELAS

* Construção com Régua

Para começar a construção vamos criar três retas paralelas sobre, a partir delas que faremos toda a construção.

I. Marque sobre a folha um ponto ao qual chamaremos de A.
II. Em seguida marque um outro ponto, distinto de A, ao qual o chamaremos de B.
III. Trace a reta determinada pelos ponto A e B.
IV. Marque agora um ponto C, fora da reta desenhada anteriormente.
V. Trace a reta paralela ao seguimento AB e que passa por C.
VI. Marque um ponto D fora das retas anteriores.
VII. Trace a reta paralela ao seguimento AB e que passa por D.

Sobre cada uma das retas marque um ponto:

VIII. Sobre a reta determinada pelos pontos A e B, marque o ponto E.
IX. Sobre a reta determinada pelos pontos A e C, marque o ponto F.
X. Sobre a reta determinada pelos pontos A e D, marque o ponto G.
XI. Interligue os pontos E, F e G formando um triângulo.

Vamos criar agora um segundo triângulo seguindo as mesmas diretrizes e marcando pontos distintos dos já marcados

XII. Sobre a reta determinada pelos pontos A e B, marque o ponto H.
XIII. Sobre a reta determinada pelos pontos A e C, marque o ponto I.
XIV. Sobre a reta determinada pelos pontos A e D, marque o ponto J.
XV. Interligue os pontos H, I e J formando um triângulo.
XVI. Prolongue as retas determinadas pelos segmentos EF e HI, e na interseção destas marque o ponto K.
XVII. Prolongue as retas determinadas pelos segmentos FG e IJ, e na interseção destas marque o ponto L.
XVIII. Prolongue as retas determinadas pelos segmentos GE e JH, e na interseção destas marque o ponto M.
XIX. Trace a reta que interliga os pontos K, L e M.

A reta gerada que passa pelos pontos K, L e M é a reta que determina o Eixo da Perspectiva (Linha do Horizonte).

Observe que neste caso está visível na construção o Centro da Perspectiva (Ponto de Fuga), quando isto acontece, dizemos que este ponto encontra-se no Infinito.

G3 – UM DOS LADOS PARALELO

* Construção com Régua

Para começar a construção vamos criar o ponto que será o Centro da Perspectiva (Ponto de Fuga), a partir dele que faremos toda a construção.

I. Marque sobre a folha um ponto ao qual chamaremos de A.

II. Marques outros três pontos distinto distintos de A e entre si, aos quais chamaremos de B, C e D.

III. Trace três retas, cada uma delas com origem no ponto A e que passem por cada um dos pontos B, C e D.

Sobre cada uma das retas marque um ponto:

IV. Sobre a reta determinada pelos pontos A e B, marque o ponto E.

V. Sobre a reta determinada pelos pontos A e C, marque o ponto F.

VI. Sobre a reta determinada pelos pontos A e D, marque o ponto G.

VII. Interligue os pontos E, F e G formando um triângulo.

Agora realizaremos a construção de um segundo triângulo:

VIII. Sobre a reta determinada pelos pontos A e B, marque o ponto H, diferente de E.

IX. Trace a reta que é paralela ao segmento EF e passa pelo ponto H.

X. Na interseção desta reta com a reta descrita pelos pontos A e C, marque o ponto I.

XI. Sobre a reta determinada pelos pontos A e D, marque o ponto J, diferente de G.

XII. Interligue os pontos H, I e J formando um triângulo.

XIII. Prolongue as retas determinadas pelos segmentos FG e IJ, e na interseção destas marque o ponto K.

XIV. Prolongue as retas determinadas pelos segmentos GE e JH, e na interseção destas marque o ponto L.

XV. Trace a reta que interliga os pontos K e L.

A reta gerada que passa pelos pontos K e L é a reta que determina o Eixo da Perspectiva (Linha do Horizonte).

Note que não é possível determinar um terceiro ponto "M"
uma vez que os segmentos HI e EF são paralelos,
quando isto acontece dizemos que o ponto M está no infinito.

G4 – TRÊS LADOS PARALELOS

* Construção com Régua

Para começar a construção vamos criar o ponto que será o Centro da Perspectiva (Ponto de Fuga), a partir dele que faremos toda a construção.

I. Marque sobre a folha um ponto ao qual chamaremos de A.

II. Marques outros três pontos distinto distintos de A e entre si, aos quais chamaremos de B, C e D.

III. Trace três retas, cada uma delas com origem no ponto A e que passem por cada um dos pontos B, C e D.

Sobre cada uma das retas marque um ponto:

IV. Sobre a reta determinada pelos pontos A e B, marque o ponto E.

V. Sobre a reta determinada pelos pontos A e C, marque o ponto F.

VI. Sobre a reta determinada pelos pontos A e D, marque o ponto G.

VII. Interligue os pontos E, F e G formando um triângulo.

Agora realizaremos a construção de um segundo triângulo:

VIII. Sobre a reta determinada pelos pontos A e B, marque o ponto H, diferente de E.

IX. Trace a reta que é paralela ao segmento EF e passa pelo ponto H.

X. Na interseção desta reta com a reta descrita pelos pontos A e C, marque o ponto I.

XI. Trace a reta que é paralela ao segmento FG e passa pelo ponto I.

XII. Na interseção desta reta com a reta descrita pelos pontos A e D, marque o ponto J.

XIII. Interligue os pontos H, I e J formando um triângulo.

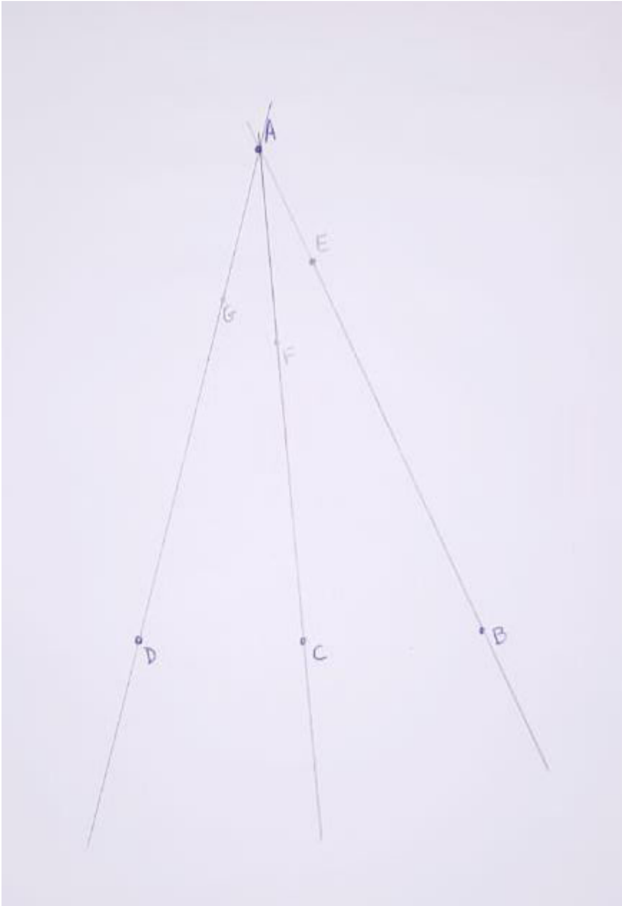
Note que não é possível determinar de interseção dos lados dos triângulos, visto que eles são paralelos,
quando isto acontece dizemos que estes pontos estão no infinito.

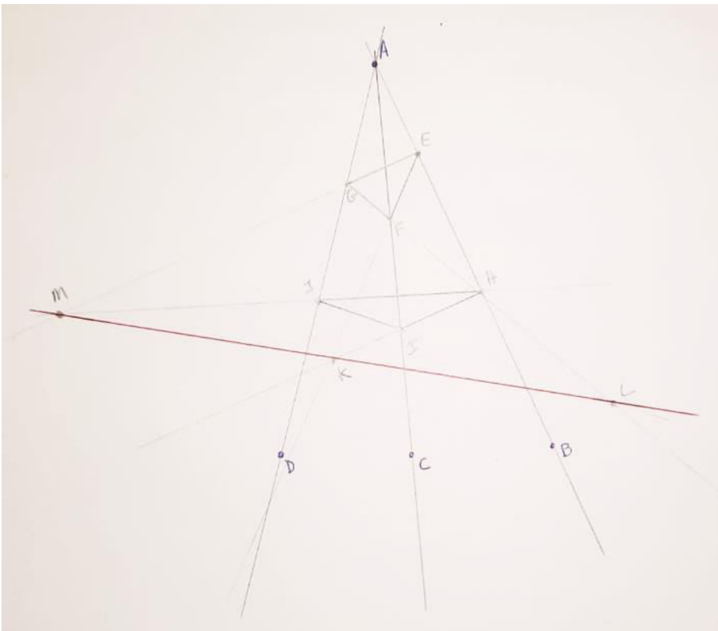
Logo não é possível determinar o *Eixo da Perspectiva (Linha do Horizonte).*

Anexo VI

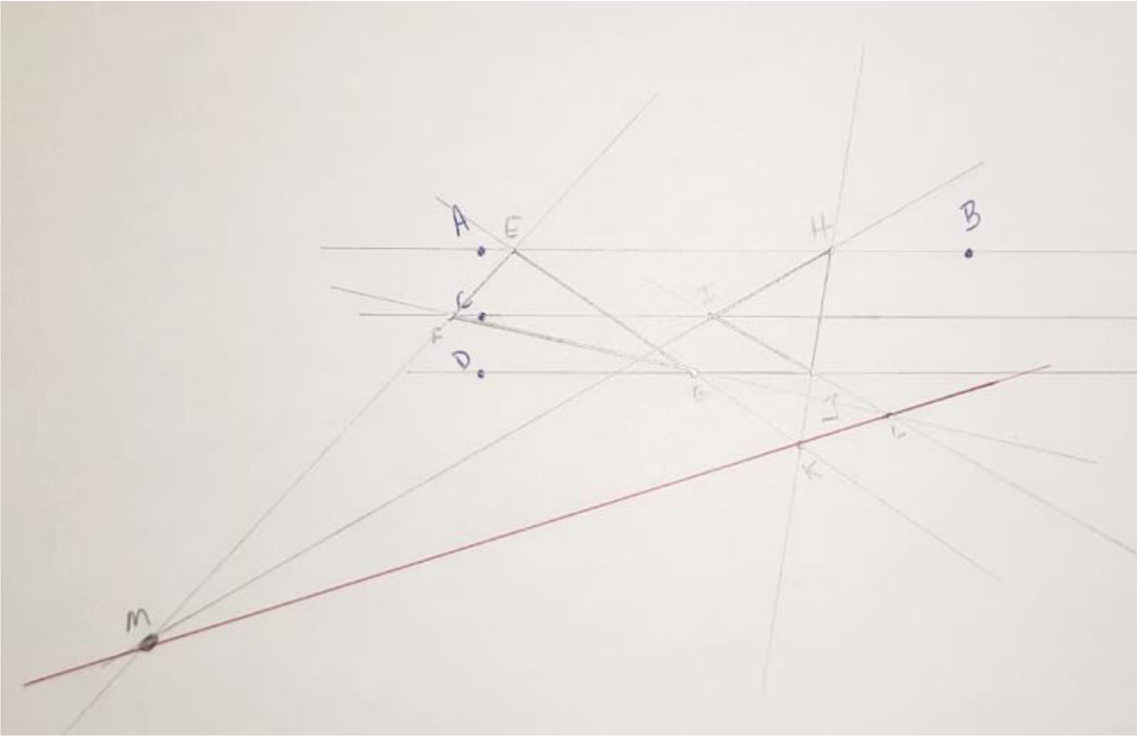
Fotos com exemplos das Construção com Réguas Esquadro

G1 – Caso Base

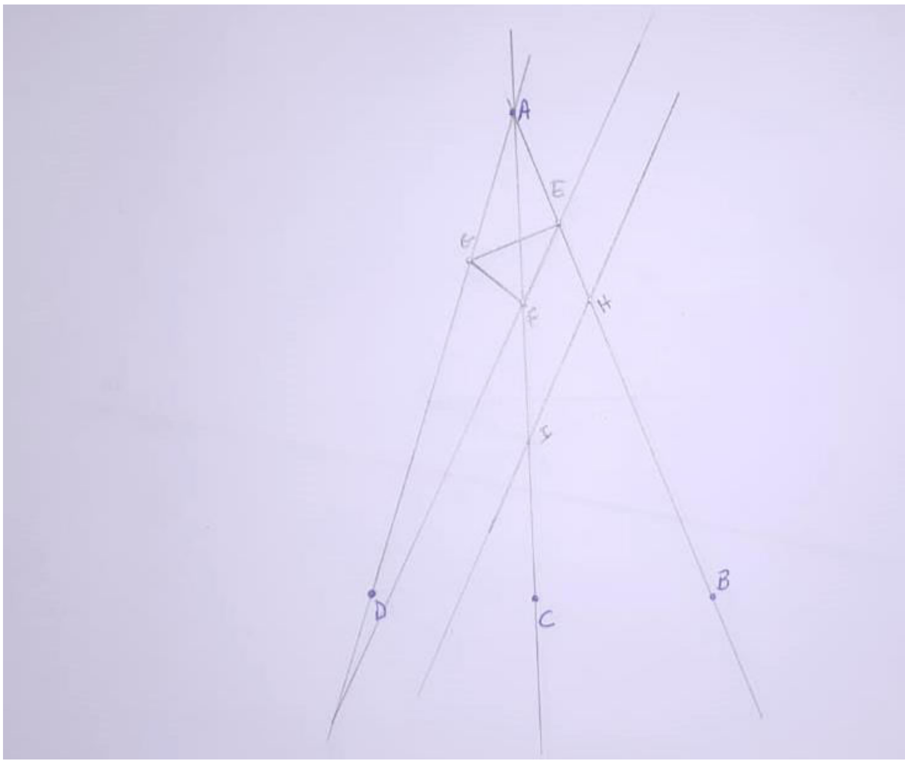


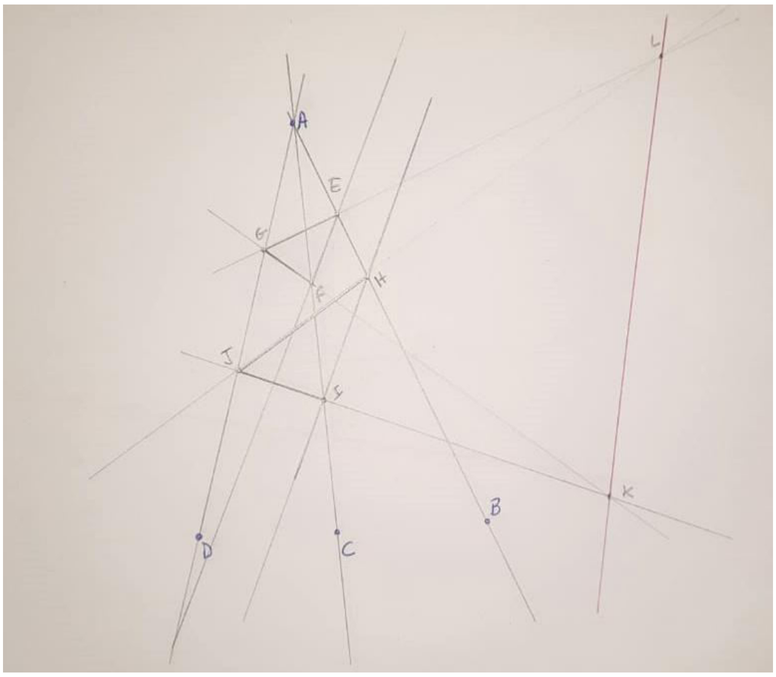


G2 – Retas Paralelas

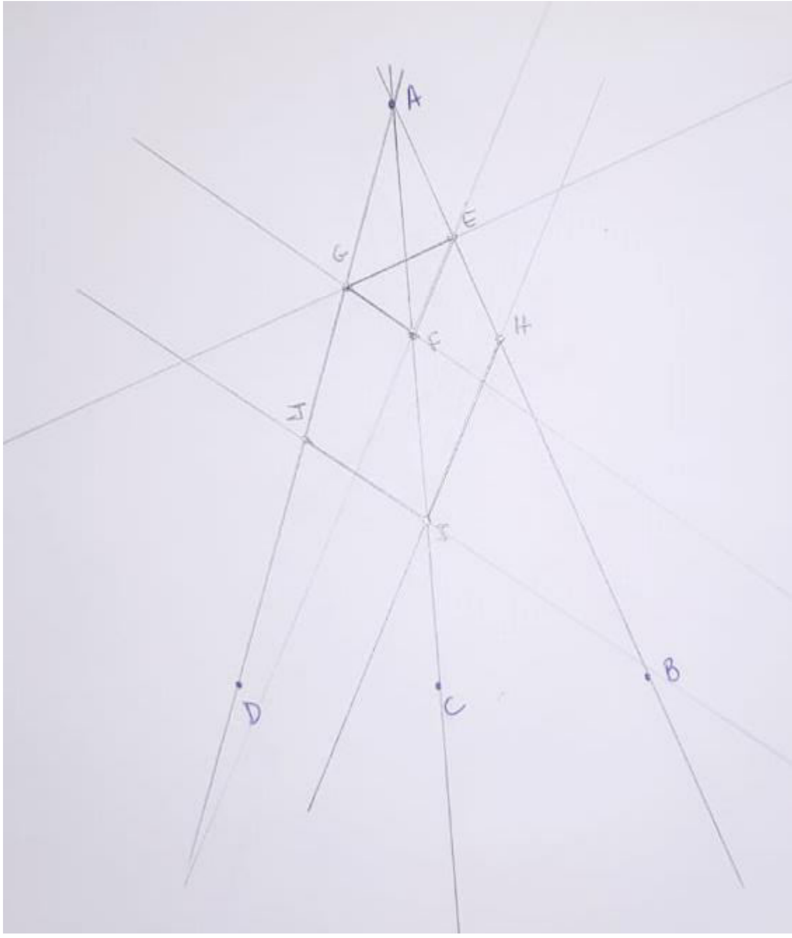


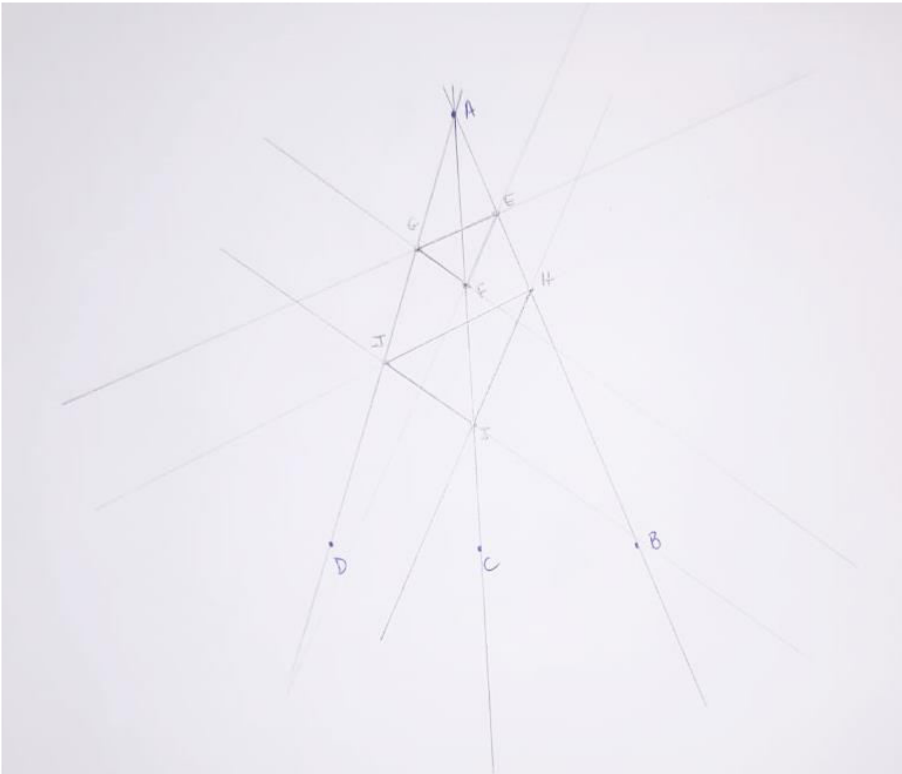
G3 – Um dos Lados Paralelo





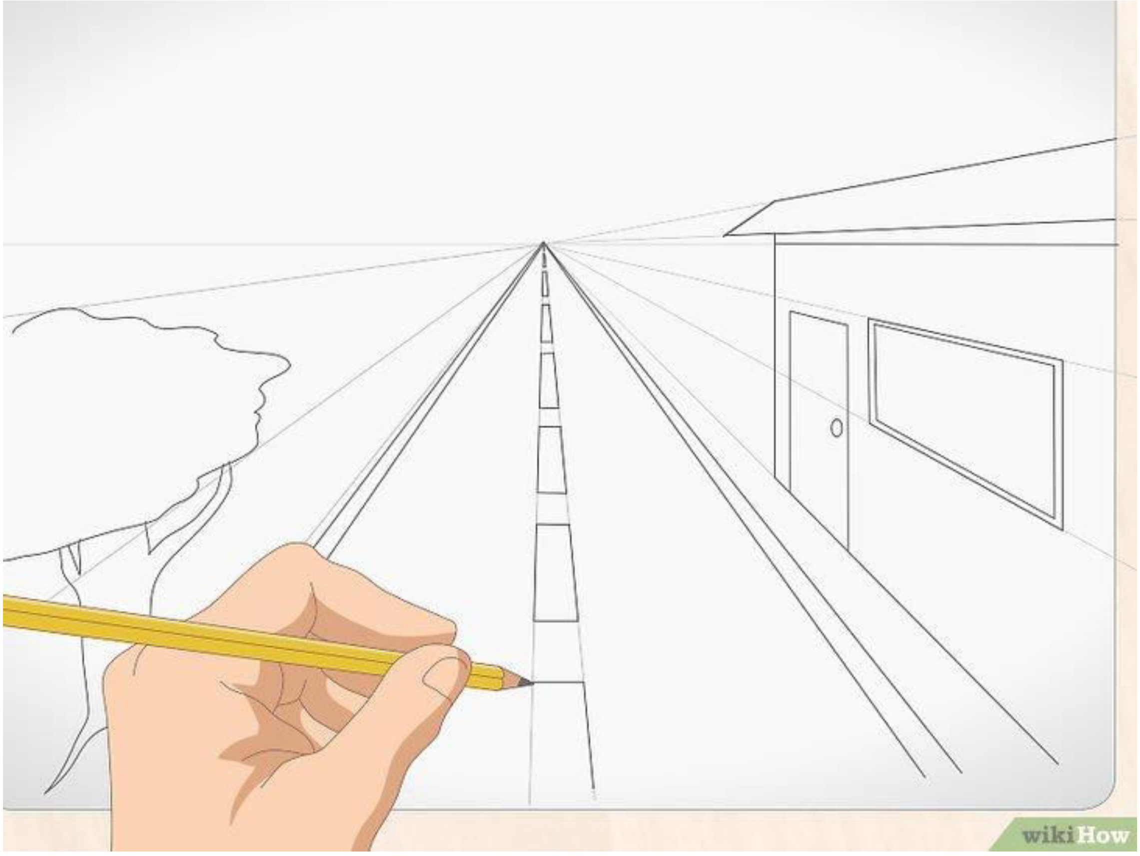
G4 – Três lados Paralelos





Anexo VII

Exemplos de desenhos em perspectiva



Disponível em: https://pt.wikihow.com/Desenhar-em-Perspectiva#/Imagem:Draw-Perspective-Step-5-Version-3.jpg. Acessado em: 15 fev. 2024

Disponível em: https://construcaoedesign.com/wp-content/uploads/2010/01/perspectiva-aprender-a-desenhar-a-mao-livre.webp. Acessado em: 15 fev. 2024