
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – UEMS

Câmpus de Dourados

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO

E INOVAÇÃO – PROPPI

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL

EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Geometria Esférica e Aplicações

Gustavo da Silva Martins

Orientador: Jaime Rezende de Moraes

Dourados,

Abril – 2024

Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – UEMS

Câmpus de Dourados

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO

E INOVAÇÃO – PROPI

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL

EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Geometria Esférica e Aplicações

Gustavo da Silva Martins

Orientador: Jaime Rezende de Moraes

Dissertação de Mestrado, apresentado à Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, como requisito obrigatório para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Dourados,

Abril - 2024

M343g Martins, Gustavo da Silva

Geometria esférica e aplicações / Gustavo da Silva Martins. - Dourados, MS: UEMS, 2024.
93 p.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Matemática em Rede Nacional - Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS), 2024.

Orientador: Prof.º Dr.º Jaime Rezende de Moraes

1. Geometria esférica - Aplicações. 2. Esfera celeste. 3. Triângulo Esférico. 4. Trigonometria esférica. 5. Coordenadas astronômicas. 6 Metodologias ativas. I. Moraes, Jaime Rezende de. II. Título.

CDD 23 ed. 516.244

Ata de Defesa de Dissertação
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional

Aos cinco dias do mês de abril do ano de dois mil e vinte e quatro, às treze horas, na Sala 07 bloco G - piso superior - Unidade de Dourados, da Fundação Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, realizou-se a sessão de defesa de Dissertação, intitulada: "GEOMETRIA ESFÉRICA E APLICAÇÕES" de autoria do aluno: **GUSTAVO DA SILVA MARTINS**, CPF 067.002.931-97, sob a orientação de JAIME REZENDE DE MORAES do Programa de Pós-Graduação em Matemática, nível: Mestrado Profissional. Reuniu-se a Banca Examinadora composta pelos membros: JAIME REZENDE DE MORAES (**Presidente**), RAFAEL MOREIRA DE SOUZA e ANA CLÁUDIA MACHADO MENDONÇA (UFGD). Concluída a apresentação e arguição, os membros da Banca Examinadora emitiram parecer expresso conforme segue:

Aprovação

Aprovação com revisão

Reprovação



EXAMINADOR

Dr. JAIME REZENDE DE MORAES

Dr. RAFAEL MOREIRA DE SOUZA

Dra. ANA CLÁUDIA MACHADO MENDONÇA (UFGD)


ASSINATURA



participação por videoconferência

OBSERVAÇÕES:

Nada mais a ser tratado, o Presidente declarou a sessão encerrada e agradeceu a todos pela presença.

Assinaturas:


Presidente da Banca Examinadora


Aluno

Agradecimentos

Primeiramente sou profundamente grato a Deus sive Natura, não só por ter me possibilitado a existência mas também por proporcionar a capacidade de poder adquirir conhecimento, por conseguinte, me trazer mais próximo de si e principalmente por poder vislumbrar o esplendor da vida e da natureza.

Gostaria de expressar também minha gratidão a todos que contribuíram para o sucesso desta dissertação. Primeiramente, ao professor Dr. Jaime Rezende de Moraes, pela sua orientação dedicada, sabedoria e paciência ao longo deste processo. Sua experiência e insights foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho, e estou verdadeiramente grato pela oportunidade de aprender com sua expertise.

Ao apoio da minha família e amigos. Agradeço aos meus pais José Ailton Martins, Rosânia da Silva Martins e meu irmão Geovane da Silva Martins por seu amor incondicional, encorajamento constante e por serem fontes inesgotáveis de inspiração. À minha companheira Crisnara Bilibio, familiares e amigos, agradeço pela compreensão, incentivo e paciência durante este desafiador período de estudo.

Expresso minha gratidão aos professores que compartilharam conhecimentos e experiências ao longo desta jornada acadêmica, ao Coordenador Dr. Vando Narciso, e toda a equipe pedagógica do curso de pós-graduação PROFMAT da UEMS. Suas contribuições foram inestimáveis para o enriquecimento do meu trabalho.

À Fundect pelo apoio financeiro.

Dedico este trabalho à minha
amada família, cujo apoio
incondicional é a força por trás
desta conquista.

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo aprofundar a compreensão da Geometria Esférica, explorando seus fundamentos teóricos e aplicações práticas em diversos contextos. Iniciamos nossa investigação estabelecendo os axiomas da geometria plana e geometria esférica, destacando o quinto postulado de Euclides como a motivação da criação das geometrias não euclidianas e as principais adaptações para a geometria esférica, como o círculo máximo da esfera sendo análoga a reta no plano.

Investigamos o conceito de superfícies planas e superfícies curvas dando atenção à superfície esférica definindo seus principais elementos, citamos ainda como exemplo de aplicação destes elementos a superfície terrestre e suas linhas imaginárias. Em seguida, introduzimos o conceito de triângulo esférico, destacando suas peculiaridades e similaridades com os triângulos planos. Definimos os conceitos de ângulos esféricos e “segmentos de retas” como geodésicas e suas métricas e cálculo de área na Geometria Esférica.

A trigonometria esférica emerge como uma ferramenta crucial para o auxílio de resolução de problemas que envolvam distâncias, ângulos e áreas em superfícies esféricas. Exploramos suas principais fórmulas e aplicações práticas. Ampliando nosso escopo, investigamos a esfera celeste, utilizada na astronomia, e discutimos coordenadas astronômicas, estabelecendo conexões entre a Geometria Esférica e a análise celestial.

Destacamos, ainda, o papel dos triângulos astronômicos como instrumentos de análise celestial, oferecendo métodos de aplicação na astronomia, navegação e geolocalização. Finalmente, propomos sequências didáticas que visam tornar a Geometria Esférica acessível e envolvente, promovendo uma compreensão intuitiva por meio de abordagens práticas.

Essa dissertação contribui para o entendimento abrangente da Geometria Esférica, reconhecendo sua importância em diversas disciplinas acadêmicas e sua aplicabilidade em situações do mundo real. Ao unir teoria e prática, buscamos não apenas explorar os fundamentos dessa geometria singular, mas também facilitar sua compreensão e aplicação em contextos educacionais e científicos.

Palavras-chave: Geometria Esférica, Triângulo Esférico, Trigonometria Esférica, Esfera Celeste, Coordenadas Astronômicas, Metodologias Ativas.

Abstract

This dissertation aims to deepen the understanding of Spherical Geometry, exploring its theoretical foundations and practical applications in various contexts. We commence our investigation by establishing the axioms of both plane and spherical geometry, highlighting Euclid's fifth postulate as the motivation for the creation of non-Euclidean geometries. We delve into the key adaptations for spherical geometry, such as the great circle of the sphere analogously representing a straight line in the plane.

Our exploration extends to the concepts of flat and curved surfaces, with a focus on the spherical surface. We define its primary elements, citing examples of their application to the Earth's surface and its imaginary lines. Subsequently, we introduce the concept of spherical triangles, emphasizing their peculiarities and similarities with planar triangles. We define spherical angles and "segments of lines" as geodesics, along with their metrics and the calculation of area in Spherical Geometry.

Spherical trigonometry emerges as a crucial tool for aiding in the resolution of problems involving distances, angles, and areas on spherical surfaces. We explore its main formulas and practical applications. Broadening our scope, we investigate the celestial sphere used in astronomy and discuss astronomical coordinates, establishing connections between Spherical Geometry and celestial analysis.

We also highlight the role of astronomical triangles as instruments for celestial analysis, providing methods of application in astronomy, navigation, and geolocation. Finally, we propose didactic sequences aimed at making Spherical Geometry accessible and engaging, promoting intuitive understanding through practical approaches.

This dissertation contributes to a comprehensive understanding of Spherical Geometry, recognizing its significance in various academic disciplines and its applicability in real-world situations. By bridging theory and practice, we seek not only to explore the fundamentals of this unique geometry but also to facilitate its comprehension and application in educational and scientific contexts.

Keywords: Spherical Geometry, Spherical Triangle, Spherical Trigonometry, Celestial Sphere, Astronomical Coordinates, Active Methodologies.

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Axiomas | 13 |
| 2 | Definições | 16 |
| 2.1 | A Superfície Esférica | 19 |
| 2.2 | O Planeta Terra | 27 |
| 2.3 | O Triângulo Esférico | 28 |
| 3 | Trigonometria Esférica | 40 |
| 4 | A Esfera Celeste | 54 |
| 4.1 | Coordenadas Astronômicas | 57 |
| 4.2 | Os Triângulos Astronômicos como Instrumentos de Análise Celestial | 62 |
| 5 | Sequências Didáticas Para um Trabalho Intuitivo Com a Geometria Esférica | 68 |
| 6 | Apêndice | 84 |
| 7 | Considerações Finais | 91 |
| | Referências | 93 |

Lista de Figuras

| | | |
|----|--|----|
| 1 | Reta s paralela a reta r passando por P | 12 |
| 2 | A e B separam C e D | 14 |
| 3 | Perspectiva de r para s com centro em O | 15 |
| 4 | Exemplo de superfície regular. | 17 |
| 5 | Ângulo diedro formado pelos planos θ e π | 18 |
| 6 | Triedro com vértice O e ângulos α , β e γ | 18 |
| 7 | Esfera e as parametrizações \mathbf{X}_i | 21 |
| 8 | Esfera de raio r com centro em O , corda PQ e diâmetro nos pontos P e P' , note que o ponto P' é antípoda do ponto P | 22 |
| 9 | Intersecção do Plano α com a Superfície esférica S | 23 |
| 10 | Elementos da superfície esférica, Polos P e P' , Equador, Paralelo e Meridianos. | 24 |
| 11 | Calota esférica, zona esférica e fuzo esférico. | 25 |
| 12 | Representação do Equador, Meridiano de Greenwich, os trópicos e a origem das coordenadas geográficas no planeta terra. | 28 |
| 13 | Diferentes caminhos que ligam os pontos A e B cujo menor é o menor arco do círculo máximo. | 29 |
| 14 | Ângulo esférico α com vértice no ponto P formado pela intersecção de dois círculos máximos. | 30 |
| 15 | Triângulo esférico formado pelos pontos A , B e C | 30 |
| 16 | Triângulo esférico ABC , de lados a , b e c e o triedro associado $O - ABC$ | 32 |
| 17 | $A'B'C'$ é triângulo polar do triângulo esférico ABC | 34 |
| 18 | Triângulo esférico polar ABC do triângulo esférico $A'B'C'$ | 34 |
| 19 | Relações entre o triângulo esférico ABC e o seu triângulo polar $A'B'C'$ | 36 |
| 20 | Dedução da primeira fórmula fundamental da Trigonometria Esférica. | 41 |
| 21 | Quadrilátero Mu na superfície terrestre. | 47 |
| 22 | Esfera Celeste com centro C e os principais pontos, círculos e planos. | 57 |

| | | |
|----|--|----|
| 23 | Observador da Esfera Celeste no hemisfério sul do planeta terra. Fonte: https://www.if.ufrgs.br/~fatima/fis2016/aulas/aula2.htm . Acesso em Janeiro de 2024. | 58 |
| 24 | Eclíptica e os quatros pontos principais. | 61 |
| 25 | Ascensão Reta e a Declinação de um astro na Esfera Celeste. | 62 |
| 26 | Altura e Azimute de um astro na Esfera Celeste. | 63 |
| 27 | Triângulo Astronômico <i>PAZ</i> do astro <i>A</i> na Esfera Celeste e o seu correspondente na superfície terrestre. | 64 |
| 28 | Triângulo astronômico formado pela estrela Betelgeuse <i>A</i> | 65 |
| 29 | Encontrando o resultado da equação através da intersecção das funções $f(x)$ e $g(x)$ | 66 |
| 30 | Caminho em vermelho de Nova York - EUA a Madrid - Espanha localizados próximos ao paralelo $40^{\circ}N$ feito com o “Google Earth”. | 72 |
| 31 | Janela de visualização - Passo 1. | 73 |
| 32 | Janela de visualização - Passo 2. | 74 |
| 33 | Janela de visualização - Passo 3. | 75 |
| 34 | Janela de visualização - Passo 4. | 76 |
| 35 | Janela de visualização da atividade 3 - Passo 1. | 77 |
| 36 | Janela de visualização da atividade 3 - Passo 2. | 79 |
| 37 | Mapa do Brasil destacando as cidades de Chuí-RS, Oiapoque-AP e Natal-RN sob os pontos <i>A</i> , <i>B</i> e <i>C</i> respectivamente. Fonte: www.ibge.gov.br , acesso em Janeiro de 2024. | 81 |
| 38 | Mapa do Brasil no “Google Earth” ligando Chuí-RS a Oiapoque-AP. | 82 |
| 39 | Mapa do Brasil no “Google Earth” formando um triângulo esférico com vértices nas cidades de Chuí-RS, Oiapoque-AP e Natal-RN. | 83 |

Introdução

Os axiomas da geometria desempenham um papel crucial para o desenvolvimento desta teoria, os sistemas axiomáticos estabelecem os princípios que governam não só a geometria, mas também toda a matemática. O sistema mais conhecido é o sistema de axiomas de Euclides de Alexandria no século III a.C., descritos em seu livro Os Elementos.

De acordo com Silva (2015, p. 19) um sistema de axiomas surge quando uma afirmação A_1 é provada verdadeira decorrendo de outra afirmação A_2 verdadeira que por sua vez é provada de outra afirmação e assim por diante. Entretanto esse processo não ocorre indefinidamente, sendo assim, haverá uma afirmação trivial que não poderá ser provada de outra, logo ela deverá ser tomada como verdade, tal afirmação é denominada de *axioma* ou *postulado*.

A seguir apresentamos os cinco postulados de Euclides descritos em sua obra “Os Elementos” e traduzido por Irineu Bicudo (p. 98, 2009). [3]

1. *Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.*
2. *Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.*
3. *E, com todo centro e distância, descrever um círculo.*
4. *E, serem iguais entre si todos os ângulos retos.*
5. *E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.*

Note que, no quinto postulado as retas são consideradas coplanares. De acordo com Barbosa (2017, p. 22) esse postulado pode ser reescrito de forma equivalente e mais clara pelo que ficou conhecido como Axioma de Playfair:

5. *Dado um ponto P não pertencente a reta r , existe uma única reta s que contém P e é paralela a r .*

Pataki (2003, p. 22) afirma em seu trabalho que “Dos cinco postulados, apenas o quinto não possui uma evidência intuitiva, [...]”. Por centenas de anos os matemáticos

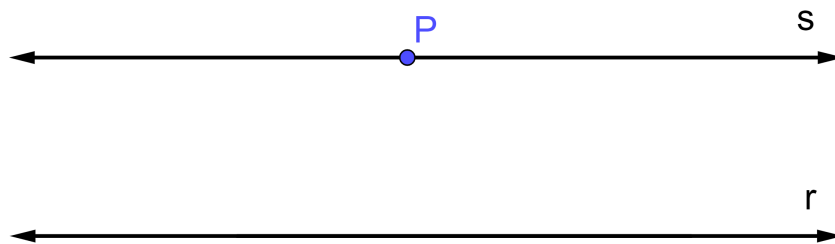


Figura 1: Reta s paralela a reta r passando por P .

procuraram maneiras de se obter a afirmação do quinto postulado através dos outros quatro, porém, sem sucesso. Outros tentaram provar o contrário, que a geometria não poderia ser construída sem esse postulado.

Kline (1990) descreve em seu livro que um dos métodos utilizados, foi de se provar por absurdo, negando o quinto postulado com o objetivo de chegar em uma afirmação verdadeira e falsa ao mesmo tempo (um paradoxo), o que provaria que a geometria não poderia ser construída sem esse postulado. Entretanto, ao negá-lo, observou-se a construção de novas geometrias não euclidianas bem estruturadas.

No ano de 1868, conforme destacado por Barbosa (p.26, 2027), o matemático italiano Beltrami (1835-1900) conseguiu chegar a um resultado para a prova do quinto postulado. Ele demonstrou que nenhuma prova seria possível exibindo um modelo de Euclides da geometria não euclidiana. Em 1854, Bernhard Riemann (1826-1866) inventou o conceito de uma superfície geométrica abstrata, baseado nos estudos de Friedrich Gauss (1777-1855). Ela não precisa ser plana no espaço euclidiano tridimensional, mas as retas podem ser interpretadas como geodésica e as superfícies intrinsecamente curvas podem ser compreendidas e definidas como geometria Riemanniana.

A geometria elíptica (que inclui a esférica) se aplica a superfícies com curvatura positiva constante, enquanto a geometria hiperbólica de Bolyai (1802-1860) e Lobachevsky (1792-1856) se aplica a superfícies com curvatura negativa constante. Assim o universo matemático pôde conceber novas geometrias que surgem além dos axiomas de Euclides. Cada uma dessas geometrias tem seus próprios conjuntos de axiomas que levaram a novas conclusões e propriedades. Neste trabalho daremos enfoque na geometria esférica.

A dissertação está estruturada em sete capítulos, os quais exploram uma variedade de temas que vão desde os fundamentos matemáticos teóricos até suas aplicações na astronomia, culminando em estratégias didáticas para a integração dessa teoria no ensino regular. Os dois primeiros capítulos concentram-se nos axiomas e definições da geometria esférica, detalhando o estudo do triângulo esférico e analisando suas propriedades. Além disso, são exploradas analogias e diferenças em relação ao triângulo plano.

No terceiro capítulo, aborda-se a trigonometria esférica, destacando as principais fórmulas utilizadas para a resolução de problemas envolvendo triângulos esféricos. No quarto capítulo, concentra-se na aplicação da geometria esférica na esfera celeste, explorando a posição dos objetos celestes e métodos para determinar a localização dos astros ou do observador por meio do Triângulo Astronômico.

Ainda, no quinto capítulo, é trabalhado sequências didáticas que tornam o estudo da geometria esférica mais concreto e contextualizado aos estudantes do ensino regular. Já no sexto capítulo, é incluído um apêndice que explora o conceito de geodésica e descreve como obter essa curva através do cálculo variacional, justificando a ideia de uma reta na superfície esférica. Por fim, no sétimo e último capítulo, o trabalho é concluído com as considerações finais.

1 Axiomas

A geometria esférica surge com a negação do quinto postulado de Euclides, trocando-o pela afirmação de que em um ponto fora da reta, não existe nenhuma outra reta paralela à reta dada. Entretanto, ao substituir o quinto axioma pelo citado anteriormente é necessário fazer algumas adaptações, conforme é exposto por Silva (2015, p. 30) “[...] para ver quais modificações precisam ser feitas, deve-se pensar na geometria da superfície esférica e interpretar a reta como um círculo máximo.”

Sendo assim, consideramos que uma reta nessa superfície é o círculo máximo da esfera, esse fato será justificado posteriormente. Desta maneira, o segundo axioma de euclides que trata da existência de um ponto entre outros dois na reta, perde o sentido no círculo, assim esse axioma é substituído por outros sete de separação. [12]

Para representar que dois pontos A e B separam outros dois pontos C e D será utilizado a seguinte notação $(A, B|C, D)$. A seguir descrevemos os sete axiomas de separação:

1. Se $(A, B|C, D)$, então os pontos A, B, C e D são colineares e distintos.

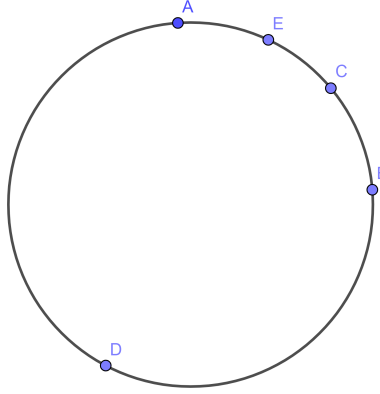


Figura 2: A e B separam C e D .

2. Se $(A, B|C, D)$, então $(C, D|A, B)$ e $(B, A|C, D)$.
3. Se $(A, B|C, D)$, então não é verdade que $(A, C|B, D)$.
4. Se os pontos A, B, C e D são colineares e distintos, então $(A, B|C, D)$ ou $(A, C|B, D)$ ou $(A, D|B, C)$.
5. Se os pontos A, B e C são colineares e distintos, então existe um ponto D tal que $(A, B|C, D)$.
6. Para cada cinco pontos A, B, C, D e E , colineares e distintos, se $(A, B|D, E)$, então $(A, B|C, D)$ ou $(A, B|C, E)$.

Antes de enunciar o sétimo axioma, é preciso estabelecer a noção de perspectiva entre duas retas.

Definição 1. *Sejam r e s duas retas euclidianas quaisquer e O um ponto não pertencente a elas. Para cada ponto A em r , a reta \overleftrightarrow{OA} intercepta s em um único ponto A' . A correspondência um-a-um que associa A' a partir de A , para todo A em r , é chamada de perspectiva de r para s com centro O .*

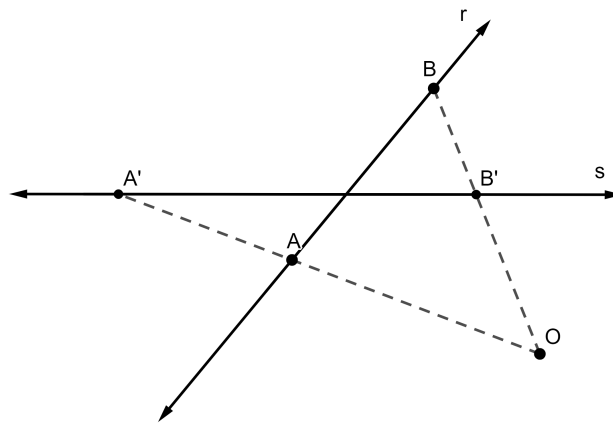


Figura 3: Perspectiva de r para s com centro em O .

7. A perspectiva preserva a separação, ou seja, se $(A, B|C, D)$ com r a reta passando por A, B, C e D , e se A', B', C' e D' são os pontos correspondentes em s sob uma perspectiva, então $(A', B'|C', D')$.

2 Definições

Será tratado neste momento as definições que serão utilizadas na geometria esférica que aplicaremos no decorrer deste estudo. Essas definições são em maioria empregados na geometria euclidiana, analítica e outras similares com algumas adaptações para a geometria esférica. Além disso, trataremos a geometria esférica através de uma imersão no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 .

Definição 2. *Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, $\forall p \in S$, \exists uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $\mathbf{X} : U \rightarrow V \cap S$ de um aberto U de \mathbb{R}^2 sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que*

1. \mathbf{X} é diferenciável. Ou seja, se escrevemos

$$\mathbf{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

as funções $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U .

2. \mathbf{X} é um homeomorfismo dos conjuntos U e $V \cap S$. Como \mathbf{X} é contínua pela condição 1, isto significa que \mathbf{X} tem inversa $\mathbf{X}^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ contínua. Cujos \mathbf{X}^{-1} é a restrição de uma aplicação contínua e diferenciável $\psi : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $V \cap S \subset W \subset \mathbb{R}^3$.
3. Para todo $q \in U$, a diferencial $d\mathbf{X}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

Veja a figura 4.

Alguns exemplos de superfícies são o plano, a superfície esférica, a superfície cilíndrica, o toróide, o parabolóide hiperbólico, a faixa de Möbils e a garrafa de Klein.

Definição 3. *Plano: é a superfície em que qualquer uma de suas retas euclidianas está toda contida nele.*

Um plano no espaço tridimensional pode ser representado pela equação geral do plano:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

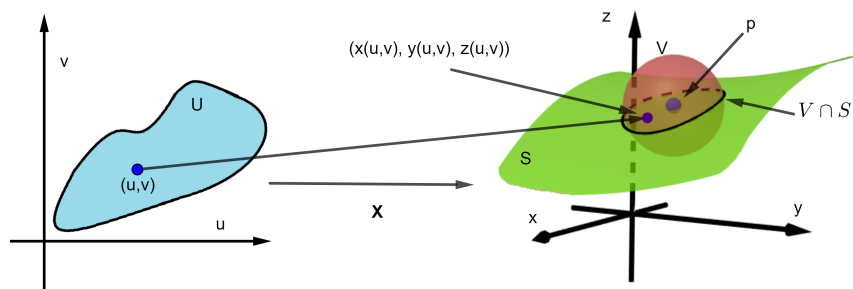


Figura 4: Exemplo de superfície regular.

Podemos considerar também que o plano descrito como o gráfico da função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por

$$f(u, v) = \left(u, v, -\frac{Au + Bv + D}{C} \right),$$

onde (u, v) são as coordenadas paramétricas do plano. É possível verificar que essa função atende aos três requisitos da Definição 2

Considerando as retas como as curvas definidas por Euclides, o plano também pode ser definido pela geometria euclidiana por:

1. Uma reta e um ponto fora dessa reta;
2. Duas retas que se intersectam;
3. Duas retas paralelas;
4. Três pontos não pertencentes à mesma reta.

Definição 4. *Os ângulos formados por dois planos que se intersectam são denominados ângulos diedros. Veja a figura 5.*

Esse ângulo é o menor possível determinado pelas retas euclidianas contidas nesses planos, estas duas retas são perpendiculares à reta gerada pela interseção das duas superfícies.

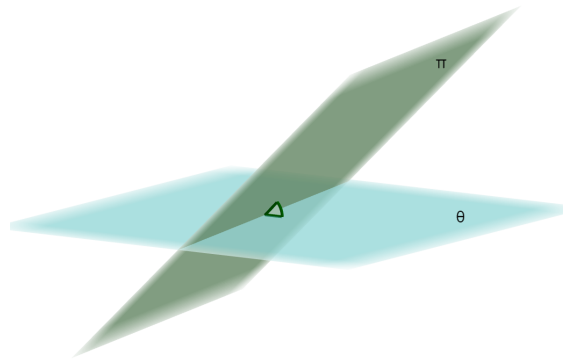


Figura 5: Ângulo diedro formado pelos planos θ e π .

Uma forma de calcular o ângulo diedro pode ser feito da seguinte maneira: Dados dois planos $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ e $\theta : A'x + B'y + C'z + D' = 0$ e o ângulo α determinados por eles, os coeficientes A, B e C é o vetor normal (A, B, C) ao plano π e A', B' e C' é o vetor normal (A', B', C') ao plano θ . Na geometria analítica, é fácil verificar que o ângulo diedro α é congruente ao ângulo formado pelos vetores normais, assim esse ângulo pode ser calculado por:

$$\cos(\alpha) = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

Definição 5. *Dados três planos que se intersectam, possuindo no máximo um ponto em comum, formam o objeto denominado triedro. Veja a figura 6.*

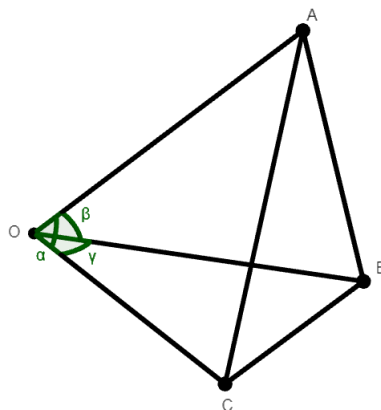


Figura 6: Triedro com vértice O e ângulos α, β e γ .

Uma forma de calcular os valores destes ângulos é obtendo os vetores normais aos planos a partir da equação paramétrica, depois calculando o produto vetorial, dois a dois dos vetores normais, para obter a direção das retas geradas pela interseção das superfícies. Por fim obter o ângulo formado por esses vetores.

2.1 A Superfície Esférica

Será tratado neste momento da superfície esférica bidimensional, faremos a definição desta superfície e ressaltamos suas principais características. As esferas bidimensionais são descritas como esfera S^2 , das quais serão tratadas. Uma esfera S^n é formalmente definida por:

Definição 6. *Seja $r \in \mathbb{R}_+^*$ e $n \in \mathbb{N}$, a esfera S^n de raio r , é superfície de dimensão n descrita pelo conjunto*

$$S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = r^2\}$$

em outras palavras, a definição acima é equivalente a

Definição 7. *Denomina-se superfície esférica o lugar geométrico cujos pontos estão a uma mesma distância de um ponto dado chamado de centro, essa distância é denominada raio. Veja a figura 8.*

A Esfera de raio r , $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$, é uma superfície regular. Esse fato é verificado mostrando primeiramente que $\mathbf{X}_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{X}_1(u, v) = (u, v, \sqrt{r^2 - (u^2 + v^2)})$ e $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u^2 + v^2 < r^2\}$ é uma parametrização de S^2 e satisfaz todas as condições da Definição 2. Note que a imagem de $\mathbf{X}_1(U)$ é a parte superior aberta ao plano xy de S^2 .

Como $u^2 + v^2 < r^2$, então as funções coordenadas $x = u$, $y = v$, $z = \sqrt{r^2 - (u^2 + v^2)}$ tem derivadas parciais de todas as ordens, assim, a condição 1 é verificada.

É fácil observar que \mathbf{X}_1 leva um ponto (x, y) no plano (dentro da região $x^2 + y^2 < r^2$) na “altura” $z = \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)} \in S^2$, assim $\mathbf{X}_1^{-1}(x, y, z) = (x, y)$ temos u e v bem definidos de maneira única por $u = x$ e $v = y$, logo \mathbf{X}_1 é bijetiva. \mathbf{X}_1^{-1} é a projeção de $\mathbf{X}_1(U)$ em U , que é uma aplicação contínua. Portanto a condição 2 está verificada.

Para verificar a condição 3, primeiramente a diferencial dX_q é dada por:

$$dX_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Para que a diferencial seja injetiva, exige-se que os dois vetores colunas sejam linearmente independentes. Para isso é só calcularmos o determinante Jacobiano da matriz menor de ordem 2, tal que, pelo menos um seja diferente de zero. Assim, é possível verificar que

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Em seguida, parametriza-se a parte inferior da superfície por $\mathbf{X}_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{X}_2 = (u, v, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)})$, $(u, v) \in U$, note que $\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{X}_2$ cobre S^2 a menos do equador, ou seja $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1 \text{ e } z = 0\}$. Para cobrirmos toda superfície procedemos com as seguintes parametrizações:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_3 &= (u, \sqrt{r^2 - (v^2 + u^2)}, v), \\ \mathbf{X}_4 &= (u, -\sqrt{r^2 - (v^2 + u^2)}, v), \\ \mathbf{X}_5 &= (\sqrt{r^2 - (v^2 + u^2)}, u, v), \\ \mathbf{X}_6 &= (-\sqrt{r^2 - (v^2 + u^2)}, u, v). \end{aligned}$$

Para \mathbf{X}_3 e \mathbf{X}_4 a superfície é coberta a menos do plano xz , para \mathbf{X}_5 e \mathbf{X}_6 ela é coberta a menos do plano yz , veja na figura 7. Portanto S^2 é uma superfície regular.

Definição 8. *Chama-se corda o segmento de reta euclidiana com extremidades em dois pontos distintos na superfície esférica. Veja a figura 8.*

Definição 9. *Chama-se diâmetro toda corda que contém o centro da esfera e dois pontos são ditos diametralmente opostos se forem extremos de um mesmo diâmetro.*

Definição 10. *Seja o ponto P pertencente a esfera e o diâmetro com extremidades em P e P' , o ponto P' é denominado antípoda de P .*

Proposição 1. *O ponto antipodal a P é único. Veja a figura 8.*

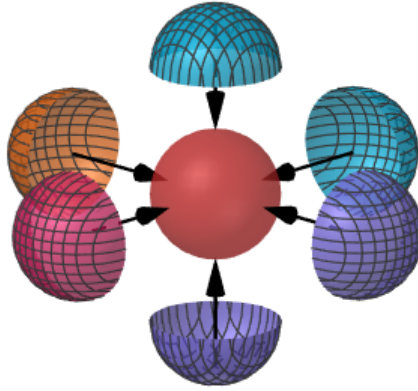


Figura 7: Esfera e as parametrizações \mathbf{X}_j .

Demonstração. Suponha que existam dois pares diferentes de pontos antipodais em S^2 e centro O , digamos P e P'_1 , e P e P'_2 . Como P e P'_1 são antipodais, eles devem estar em hemisférios (Confira a Definição 11) opostos da esfera e à mesma distância do centro, o mesmo vale para P e P'_2 . Se P'_1 e P'_2 estiverem no mesmo hemisfério da esfera, então eles coincidem pois a reta que passa por P e O é única, sendo assim, a única possibilidade é que $P'_1 = P'_2$, por outro lado, se P'_1 e P'_2 estão em hemisfério opostos ocorre que $P = P'_1$ ou $P = P'_2$, o que contradiz a hipótese de que P é antipodal a estes dois pontos.

Portanto, concluímos que não podem existir dois pares diferentes de pontos antipodais em S^2 , demonstrando assim a unicidade de pontos antipodais.

□

Proposição 2. *Se um plano euclidiano intersecta uma esfera em mais de um ponto, a intersecção é sempre um círculo.*

Demonstração. Seja a esfera S^2 de raio r e centro O e o plano π secante à esfera, consideramos o ponto H a projeção ortogonal do ponto O no plano π e os pontos $P, Q \in S^2 \cap \pi$.

Note que os ângulos $\widehat{PHO} = \widehat{QHO} = 90^\circ$ assim os triângulos OHP e OHQ são retângulos em H , $OP = OQ = r$ pois são o raio da esfera e OH é comum aos dois triângulos. Por conseguinte, pelo teorema de Pitágoras,

$$OP^2 = OH^2 + HP^2 \Leftrightarrow HP = \sqrt{OP^2 - OH^2}.$$

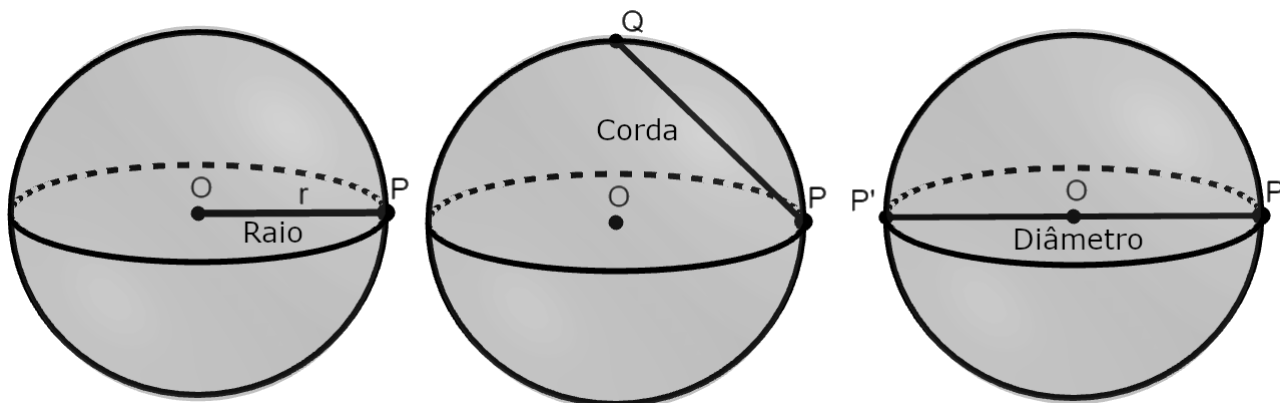


Figura 8: Esfera de raio r com centro em O , corda PQ e diâmetro nos pontos P e P' , note que o ponto P' é antípoda do ponto P .

Assim como $HQ = \sqrt{OQ^2 - OH^2}$ ou seja $HP = HQ$ para quaisquer pontos pertencentes a intersecção, o que mostra que a distância dos pontos pertencentes a curva gerada pela intersecção é constante em relação ao ponto $H \in \pi$, ou seja, essa curva é um círculo c , além disso, quando $OH = 0$ o raio do círculo é máximo. Logo $S^2 \cap \pi \subset c$.

Por outro lado, seja c um círculo pertencente a esfera que passe pelos pontos P e Q dessa superfície, o centro do círculo será um ponto H , tal que OH é ortogonal a HP e HQ , Portanto c também estará contido em um plano π definido por HPQ , ainda, se $H = O$, então o plano passa pelo centro da esfera. Assim c pertence a esfera e ao plano, ou seja $S^2 \cap \pi \supset c$. Portanto a intersecção do plano com a esfera é um círculo.

□

Na demonstração acima, observamos que a intersecção do plano com a esfera, quando o plano contém o centro dela, determina o círculo cujo o raio é congruente ao da esfera, define-se assim esse círculo como:

Definição 11. *Chama-se círculo máximo, o círculo resultante da intersecção do plano com a esfera passando pelo centro dela.*

Proposição 3. *Dados dois pontos não antipodais em uma superfície esférica, por eles passam no máximo um círculo máximo.*

Demonstração. Sejam A e B dois pontos não antipodais pertencentes à esfera S^2 com

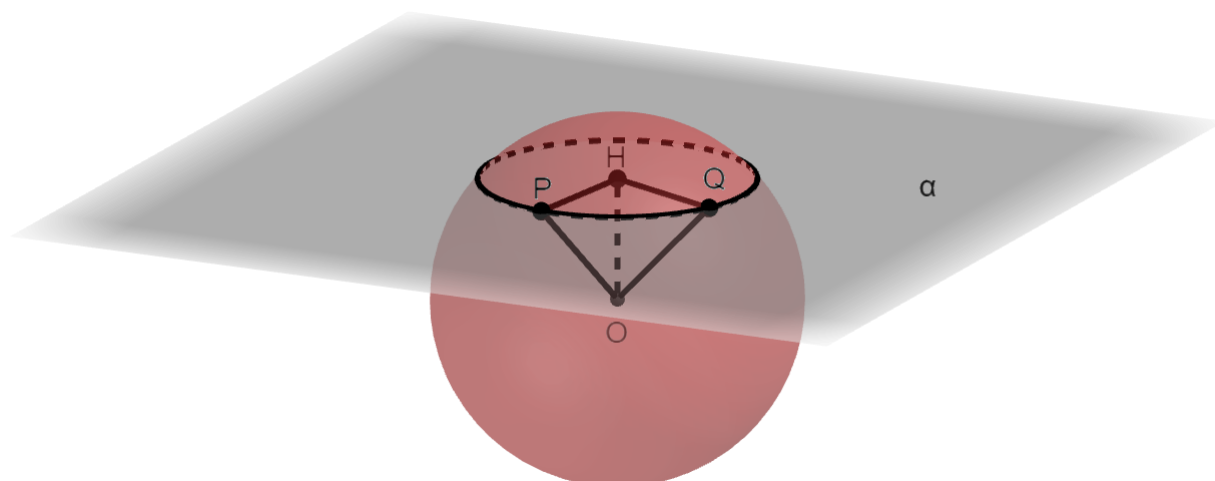


Figura 9: Intersecção do Plano α com a Superfície esférica S .

centro O , assim o círculo máximo c_1 que contém esses dois pontos está contido no plano definido pelos pontos OAB . Suponha que exista outro círculo máximo c_2 contendo A e B , assim, O é o centro de c_2 e o plano OAB também contém c_2 . No entanto, como $c_1 \neq c_2$, deverá existir $P \in c_1$ e $P \notin c_2$. Por conseguinte, P pertence ao plano que contém c_1 mas não pertence ao plano que contém c_2 , o que é uma contradição, pois c_1 e c_2 estão contidos no plano OAB . Ou seja, $c_1 \neq c_2$ é falso, portanto existe apenas um círculo máximo passando por A e B . \square

Por outro lado, em três pontos colineares, passam infinitos planos, por conseguinte, na superfícies esférica, dois pontos antipodais passam infinitos círculos máximos.

Outros elementos notáveis da superfície esférica será destacado a seguir:

Definição 12. *Denomina-se:*

1. *Eixo toda reta que contenha o centro da esfera;*
2. *Equador o círculo máximo perpendicular a um eixo dado;*
3. *Paralelo o círculo determinado pela intersecção do plano paralelo ao equador com a superfície esférica;*

4. *Polo* os pontos de intersecção do eixo com a superfície esférica. Quando o eixo for orientado, podemos distinguir eles como *Polo Norte* e *Polo Sul*;
5. *Meridiano* o semicírculo resultante da intersecção do plano com a esfera que contém o centro dela e perpendicular ao equador, cujas extremidades são os polos.

Veja a figura 10.

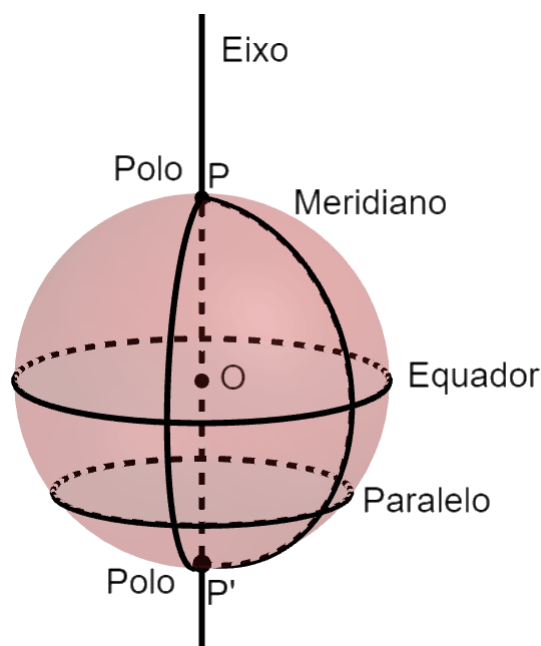


Figura 10: Elementos da superfície esférica, Polos P e P' , Equador, Paralelo e Meridianos.

Definição 13. Quando a intersecção de um plano com uma superfície esférica é uma circunferência, temos que essa superfície foi dividida em duas partes, cada uma destas partes é denominada *calota esférica*. Veja a figura 11.

Definição 14. Chama-se *zona esférica* a parte da superfície esférica delimitada por dois planos distintos paralelos não tangentes à superfície esférica, mas que a intersectam. Veja a figura 11.

Definição 15. *Fuso esférico*, também conhecido como *biângulo esférico*, é a região compreendida entre dois meridianos. Veja a figura 11.

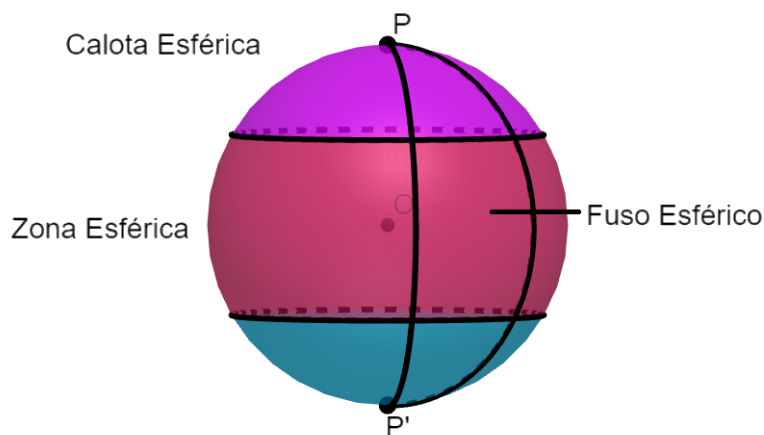


Figura 11: Calota esférica, zona esférica e fuso esférico.

Pelo fato da terra ter o formato muito próximo ao da esfera, essas definições e nomenclaturas são utilizadas para determinar os polos do nosso globo e as linhas imaginárias que determinam não só os fuso-horários, mas também as coordenadas geográficas através da latitude (paralelos) e longitude (meridianos). Daremos um foco nestas aplicações na próxima seção deste capítulo.

A seguir apresentaremos alguns resultados a respeito da métrica de volume e área da esfera.

Teorema 1. *Seja a esfera de raio r , seu volume é dado por:*

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Demonstração. Dada a função $f : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, seu gráfico descreve um semicírculo no plano xy , que ao rotacionar no eixo Ox obtemos a esfera de raio r considerando $f(x) \leq r$, assim calculamos o volume deste sólido por

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx,$$

com $a = -r$ e $b = r$.

Substituindo $f(x)$ na integral acima teremos

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r \pi (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx \\ &= \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right) \\ &= \frac{4\pi r^3}{3}. \end{aligned}$$

□

Teorema 2. *Seja a esfera de raio r , sua área é dada por:*

$$A = 4\pi r^2.$$

Demonstração. Dada a função $f : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, seu gráfico descreve um semicírculo no plano xy , que ao rotacionar no eixo Ox obtemos a esfera de raio r , dessa forma, como f é diferenciável com derivada

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Assim, a área da superfície de revolução é dada por

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

com $a = -r$ e $b = r$.

Substituindo $f(x)$ e $f'(x)$ na integral acima, obtemos

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right)^2} dx \\ &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= 2\pi r \int_{-r}^r dx = 2\pi r(x) \Big|_{-r}^r \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r^2 = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

□

O ângulo entre dois fusos é dado pelo ângulo diedro dos planos que contém os fusos, ou ainda, pelo menor arco de círculo máximo com extremidades nos pontos da interseção do equador (perpendicular aos polos do meridiano) com os meridianos.

Corolário 3. *Seja a superfície esférica S de raio r , a área A_f de um fuso esférico é calculado por*

$$A_f = 2\alpha r^2,$$

onde α é o ângulo do fuso.

Demonstração. Dado a esfera S , para determinar a área do fuso, basta fazer uma regra de três simples: A área ($A = 4\pi r^2$) da esfera está para a área do fuso esférico A_f , assim como 2π está para o ângulo α (em radianos).

$$\begin{aligned}\frac{4\pi r^2}{A_f} &= \frac{2\pi}{\alpha} \\ 4\pi r^2 \cdot \alpha &= A_f \cdot 2\pi \\ A_f &= \frac{4\pi r^2 \alpha}{2\pi} = 2\alpha r^2\end{aligned}$$

□

2.2 O Planeta Terra

O planeta terra possui montanhas e irregularidades além de ser achatado nos polos, assim sua forma física é denominada Geóide. Por outro lado, o fato do diâmetro da terra ser grande e as deformações serem irrelevantes em comparação com o seu diâmetro (em média 12.742 km), a superfície terrestre tem a forma muito próxima com o da esfera (cujo raio é aproximadamente 6.371 km), permitindo assim aplicar nela a geometria esférica para mensurar distâncias e realizar medidas para navegação, aviação, áreas de regiões, localização de pontos em coordenadas geográficas, etc.

Para fazer a localização de qualquer posição na superfície da terra, foi necessário criar o sistema de duas coordenadas, denominadas latitude e longitude. Desta maneira os referenciais deste sistema é a Linha do Equador e o Meridiano de Greenwich onde a interseção destes dois círculos máximos no Oceano Atlântico marcam o ponto de coordenadas $(0^\circ, 0^\circ)$.

Assim, a Linha do Equador faz a divisão da terra nos hemisférios norte (N) e sul (S), enquanto o Meridiano de Greenwich faz a divisão da terra nos hemisférios leste (L) e oeste (O). As coordenadas são medidas em graus e seus submúltiplos onde a latitude é marcada a partir do Equador variando de 0° a 90° para o norte e 0° a -90° para o sul.

Já a longitude parte da Linha de Greenwich variando de 0° a 180° para o leste e 0° a -180° para oeste. A longitude também pode ser medida em horas, minutos e segundos de tempo.

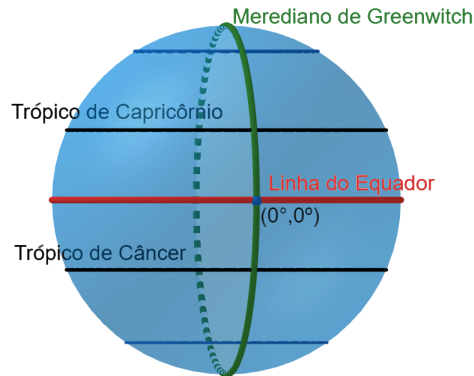


Figura 12: Representação do Equador, Meridiano de Greenwich, os trópicos e a origem das coordenadas geográficas no planeta terra.

2.3 O Triângulo Esférico

No estudo das geometrias não-euclidianas convencionou-se a reta neste espaço como a curva que minimiza a distância que liga quaisquer dois pontos. Essa curva é formalmente definida da seguinte maneira:

Definição 16. *A geodésica é caracterizada como a curva que minimiza a distância entre os pontos em relação a todas as outras possíveis trajetórias.*

Na esfera, a geodésica é o menor arco de círculo máximo que liga dois pontos de sua superfície. Veja o exemplo na figura 13, vários caminhos ligam os pontos A e B , porém o menor deles está no círculo máximo, essa afirmação é justificada no Apêndice 6. Note que o círculo máximo tem comprimento finito igual a $2\pi r$ onde r é o raio da esfera.

Podemos concluir com a definição anterior e a Proposição 3 que o círculo máximo está para a esfera assim como a reta está para o plano. Entretanto, dois círculos máximos na superfície esférica sempre se encontram em dois pontos antipodais, o que é equivalente

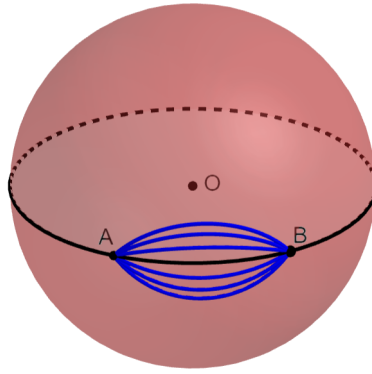


Figura 13: Diferentes caminhos que ligam os pontos A e B cujo menor é o menor arco do círculo máximo.

a dizer que não existem círculos máximos paralelos. Ressalta-se com esse fato que a geometria esférica não é euclidiana.

Com um conceito de reta definida na superfície esférica, faremos agora a definição do ângulo esférico. Primeiramente, na geometria euclidiana, se uma reta intersecta a esfera em um único ponto, ela é denominada reta tangente a esfera. Desta forma, a reta também será tangente ao círculo máximo que contém o ponto de tangência e está em um mesmo plano com a reta.

Definição 17. *A intersecção de dois círculos máximos define um ângulo esférico com vértice no ponto de intersecção, cujo valor é o do ângulo plano estabelecido pelas tangentes aos círculos máximos.*

O ângulo esférico poderá ser indicado com uma letra grega, por exemplo α , ou com um acento circunflexo na letra que nomeia o vértice do ângulo, por exemplo \hat{A} .

Com a definição de reta na esfera e de ângulo esférico, podemos construir o triângulo esférico, o qual faremos um estudo aprofundado neste momento.

Definição 18. *Se A , B e C são pontos de uma esfera, não situados no mesmo círculo máximo, então os arcos de círculo máximo AB , AC e BC formam a figura denominada triângulo esférico. Veja a figura 15.*

Ou seja, a intersecção de três círculos máximos distintos formam o triângulo esférico. Note que dois círculos máximos se intersectam em dois pontos antipodais, desta forma,

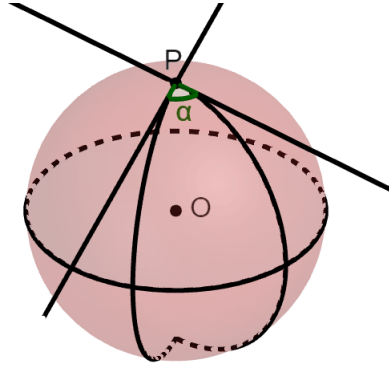


Figura 14: Ângulo esférico α com vértice no ponto P formado pela interseção de dois círculos máximos.

três círculos máximos distintos formam 8 triângulos esféricos. Seja A_1 , B_1 e C_1 os pontos antipodais de A , B e C respectivamente, veja na figura 15, temos os triângulos esféricos ABC , $A_1B_1C_1$, AB_1C_1 , ABC_1 , AB_1C , A_1BC_1 , A_1BC e A_1B_1C .

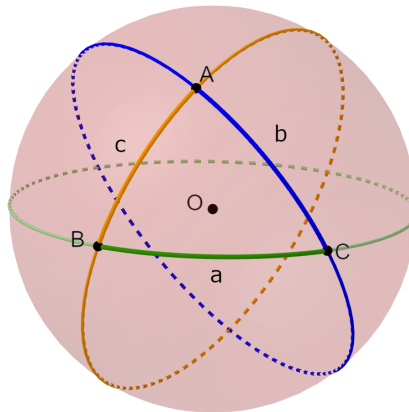


Figura 15: Triângulo esférico formado pelos pontos A , B e C .

Proposição 4. *Se A , B e C são três pontos na esfera não pertencentes a um mesmo círculo máximo, então os arcos AB , AC e BC que formam os lados do triângulo esférico ABC , possuem a seguinte relação:*

$$AB + AC > BC.$$

Demonstração. Para fazer essa demonstração consideramos a esfera de raio unitário, para o caso de o raio da esfera for $r \neq 1$ é análogo.

Seja S a superfície esférica de raio unitário e centro O e o triângulo esférico ABC , seja a o lado do triângulo formado pelo arco BC , b o lado do triângulo formado pelo arco AC e c o lado do triângulo formado pelo arco AB , veja a figura 16. Note que a medida dos lados a , b e c é equivalente ao ângulo central, em radianos, dos arcos BC , AC e AB respectivamente.

Caso o triângulo esférico for equilátero, ou seja $a = b = c$, então a proposição é verdadeira.

Por outro lado, se o triângulo esférico não for equilátero, considere o triedro $OABC$, consideraremos os segmentos como segmentos de retas euclidianas. Seja X um ponto pertencente ao segmento OA , Y um ponto pertencente ao segmento OB e P sobre o segmento XY , tal que $X\hat{O}P = A\hat{O}C$. Seja Z pertencente ao segmento OC de maneira que $OZ = OP$. Assim, formamos o triângulo XYZ , como os triângulos XOZ e XOP são congruentes (pelo caso LAL) temos $XP = XZ$.

Pela desigualdade triangular da geometria plana, temos

$$XZ + ZY > XY \quad \Rightarrow \quad XZ + ZY > XP + PY,$$

como $XP = XZ$, então $ZY > PY$. Por consequência, $Z\hat{O}Y > P\hat{O}Y$. Então

$$X\hat{O}Z + Z\hat{O}Y > X\hat{O}P + P\hat{O}Y = X\hat{O}Y \quad \Rightarrow \quad b + c > a.$$

E portanto, como queríamos provar $AB + AC > BC$. □

A proposição anterior reforça a relação que o triângulo esférico tem com o triângulo plano preservando a desigualdade triangular.

Na geometria euclidiana, dois triângulos são congruentes quando é possível estabelecer uma correspondência de igualdade entre os lados e ângulos entre os dois triângulos. Estendemos esta definição para a geometria esférica.

Lema 1. *O triângulo esférico ABC e o triângulo formado pelos pontos antipodais $A_1B_1C_1$ são congruentes.*

Demonstração. Seja a esfera S de raio r e o triângulo esférico ABC , temos os pontos A_1 antípoda de A , B_1 antípoda de B e C_1 antípoda de C , note que os arcos AB , AC e

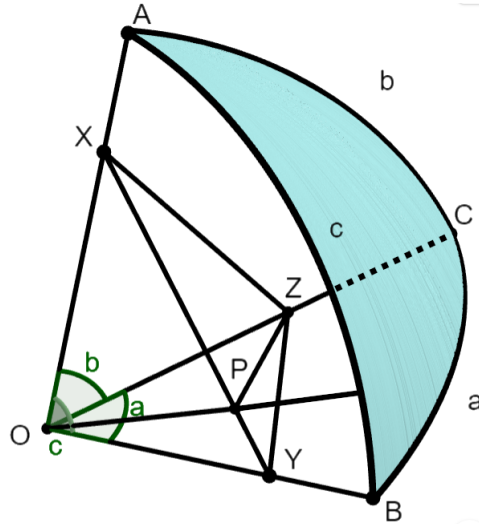


Figura 16: Triângulo esférico ABC , de lados a , b e c e o triedro associado $O - ABC$.

BC são congruentes com A_1B_1 , A_1C_1 e B_1C_1 respectivamente, pois os arcos são opostos pelo vértice. Note também que os ângulos diedros dos planos formados pelos pontos OAB e OBC são equivalentes ao ângulo diedro OA_1B_1 e OB_1C_1 pois novamente são ângulos opostos pelo vértice, isso ocorre para os outros pares de planos, ou seja, os ângulos internos dos triângulos esféricos também são equivalentes. Portanto temos que $ABC \equiv A_1B_1C_1$. \square

Teorema 4. *Seja S a superfície esférica de raio r e o triângulo esférico ABC com os respectivos ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} dados em radianos, então a área a_{ABC} do triângulo esférico é calculado por*

$$a_{ABC} = r^2(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi)$$

Demonstração. Ao prolongar os lados do triângulo esférico até o ponto antipodal do vértice do triângulo formamos três fusos esféricos, com os mesmos ângulos internos desse triângulo. O valor da área de cada fuso é dado por $2\hat{A}r^2$, $2\hat{B}r^2$ e $2\hat{C}r^2$, confira o Corolário 3.

Pelo Lema 1, a área e os ângulos internos do triângulo esférico ABC é igual a área e os ângulos internos do triângulo esférico formado pelos pontos antipodais $A_1B_1C_1$. Por

consequente

$$2\hat{A}r^2 + 2\hat{A}_1r^2 + 2\hat{B}r^2 + 2\hat{B}_1r^2 + 2\hat{C}r^2 + 2r^2\hat{C}_1 = 4\hat{A}r^2 + 4\hat{B}r^2 + 4\hat{C}r^2.$$

A soma das áreas dos fusos obtidos do triângulo ABC e $A_1B_1C_1$ resulta na área da superfície esférica acrescido quatro vezes a área do triângulo ABC . Isto ocorre pois, ao contar a área de cada fuso, contamos três vezes a área do triângulo esférico ABC e três vezes a área do triângulo esférico $A_1B_1C_1$ que é equivalente a área de ABC , logo para fechar a superfície esférica, contamos os 6 fusos que contêm os dois triângulos, entretanto, ao fazer isto, esses triângulos são contados mais quatro vezes. Desta forma obtemos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} 4\hat{A}r^2 + 4\hat{B}r^2 + 4\hat{C}r^2 &= 4\pi r^2 + 4a_{ABC} \\ 4r^2(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) &= 4r^2\left(\pi + \frac{a_{ABC}}{r^2}\right) \\ \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &= \pi + \frac{a_{ABC}}{r^2} \\ \Rightarrow a_{ABC} &= r^2(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi) \end{aligned}$$

□

Uma vez construído o triângulo esférico, ele determina outro triângulo denominado triângulo polar, o qual podemos extrair algumas propriedades e resultados muito importantes.

Definição 19. *Se arcos de círculos máximos são descritos, tendo como polos os vértices de um triângulo esférico, esses círculos máximos se interceptam dois a dois, formando um segundo triângulo esférico, denominado triângulo polar do primeiro. Veja a figura 17.*

Por convenção os ângulos esféricos de um triângulo é designado por $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, enquanto os lados do triângulo esférico opostos aos ângulos por a, b e c respectivamente. Desta forma o triângulo polar é representado pelos ângulos $\hat{A}', \hat{B}', \hat{C}'$ e lados a', b' e c' .

Teorema 5. *Se $A'B'C'$ é o triângulo polar de ABC , então ABC é o triângulo polar de $A'B'C'$.*

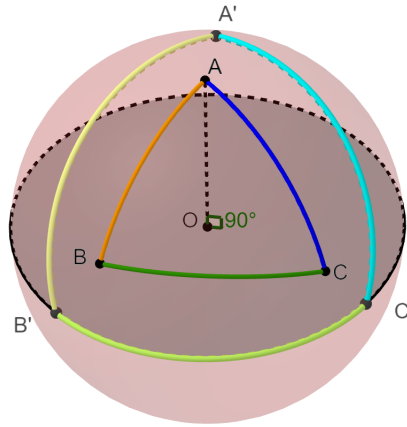


Figura 17: $A'B'C'$ é triângulo polar do triângulo esférico ABC .

Demonstração. Seja ABC um triângulo esférico e $OABC$ o triedro associado. Suponha A, B e C , os vértices do triângulo esférico, onde A é o polo do círculo máximo $B'C'$; B o polo de $A'C'$; e C o polo de $A'B'$, veja a figura 18. Desta forma, AO é perpendicular ao plano $B'C'O$, por conseguinte, à reta $C'O$. Da mesma maneira, BO é perpendicular ao plano $A'C'O$ e à reta $C'O$. Então C' é o polo do arco AB . Prova-se da mesma maneira que B' e A' são os polos dos arcos AC e BC , respectivamente. Portando ABC é o triângulo polar de $A'B'C'$. \square

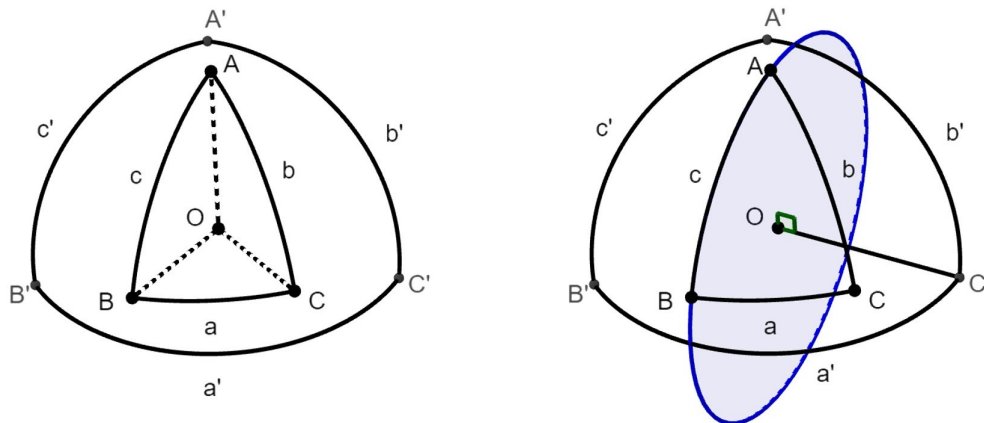


Figura 18: Triângulo esférico polar ABC do triângulo esférico $A'B'C'$.

Na proposição a seguir, as medidas dos ângulos do triângulo esférico ABC e do seu

triângulo polar $A'B'C'$ são dados em radianos, considerando que o raio da superfície esférica S^2 em que estão situados seja r .

Proposição 5. *Se ABC e $A'B'C'$ são dois triângulos esféricos polares, um do outro, existem entre ambos as relações.*

$$\hat{A} + \frac{a'}{r} = \pi; \quad \hat{B} + \frac{b'}{r} = \pi; \quad \hat{C} + \frac{c'}{r} = \pi$$

e as relações recíprocas:

$$\hat{A}' + \frac{a}{r} = \pi; \quad \hat{B}' + \frac{b}{r} = \pi; \quad \hat{C}' + \frac{c}{r} = \pi,$$

onde a, b, c dão os lados do triângulo esférico ABC opostos aos ângulos internos \hat{A}, \hat{B} e \hat{C} respectivamente e a', b', c' são os lados do triângulo polar de ABC opostos aos ângulos \hat{A}', \hat{B}' e \hat{C}' .

Demonstração. Seja ABC um triângulo esférico e $A'B'C'$ o seu triângulo polar, veja na figura 19. Seja também os pontos P e Q a interseção do prolongamento dos arcos AB e AC com o arco $B'C'$ respectivamente, os pontos M e S a interseção do prolongamento dos arcos CB e CA com o arco $A'B'$ respectivamente e os pontos T e N a interseção do prolongamento dos arcos BC e BA com o arco $A'C'$ respectivamente. Dado que A é o polo do arco $B'PQC'$, o arco PQ tem medida angular \hat{A} . Assim, é possível escrever

$$\frac{B'P + PQ + QC'}{r} = \frac{a'}{r} = \frac{B'Q + QC'}{r}.$$

Observe que, pelo Teorema 5, B' é polo do arco AC da mesma forma C' é polo do arco AB , logo $B'Q/r = \pi/2$ e $PC'/r = \pi/2 = (PQ + QC')/r$. Substituindo na equação acima, obtemos

$$\frac{a'}{r} = \frac{B'Q + QC'}{r} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \hat{A} = \pi - \hat{A},$$

que resulta:

$$\hat{A} + \frac{a'}{r} = \pi.$$

Ainda, aplicando o mesmo raciocínio e o Teorema 5,

$$\frac{MB + BC + CN}{r} = \frac{\pi}{2} - \frac{a}{r} + \frac{a}{r} + \frac{\pi}{2} - \frac{a}{r} = \hat{A}' \Rightarrow \hat{A}' + \frac{a}{r} = \pi.$$

Com o mesmo raciocínio encontramos as demais relações. □

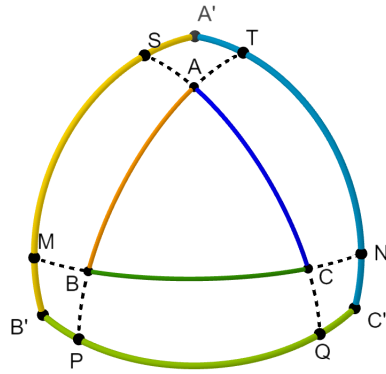


Figura 19: Relações entre o triângulo esférico ABC e o seu triângulo polar $A'B'C'$.

Segue agora alguns dos principais resultados que obtemos a partir das relações do triângulo esférico e o seu respectivo triângulo polar.

Proposição 6. *Nenhum triângulo esférico possui um ângulo maior que π rad.*

Demonstração. Pela Proposição 5,

$$\hat{A} + \frac{a'}{r} = \pi;$$

$$\hat{B} + \frac{b'}{r} = \pi;$$

$$\hat{C} + \frac{c'}{r} = \pi,$$

assim, fica evidente que cada ângulo do triângulo esférico tem medida menor ou igual a π . □

Proposição 7. *Seja um triângulo esférico ABC , contido na esfera S^2 de raio r , com lados a , b e c , a soma dos seus lados está entre 0 e $2\pi r$, isto é,*

$$0 < a + b + c < 2\pi r.$$

Demonstração. Seja a superfície esférica S^2 de centro O e raio r e o triângulo esférico ABC , consideramos também seu triângulo polar $A'B'C'$. Pelo Teorema 4, a área do triângulo $A'B'C'$ é dada por

$$a_{A'B'C'} = r^2(\hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}' - \pi),$$

onde \hat{A}' , \hat{B}' e \hat{C}' são os ângulos internos de $A'B'C'$.

Pela Proposição 5, é possível estabelecer as relações

$$\hat{A}' = \pi - \frac{a}{r}; \quad \hat{B}' = \pi - \frac{b}{r}; \quad \hat{C}' = \pi - \frac{c}{r}.$$

Substituindo essas relações no cálculo da área de $A'B'C'$ teremos

$$\begin{aligned} a_{A'B'C'} &= r^2\left(\pi - \frac{a}{r} + \pi - \frac{b}{r} + \pi - \frac{c}{r} - \pi\right). \\ &= r[2\pi r - (a + b + c)]. \end{aligned}$$

Assim é possível ver que a área do triângulo polar e por consequência sua existência e a existência do triângulo esférico ABC será possível quando $0 < a + b + c < 2\pi r$. \square

Proposição 8. *A soma dos ângulos de um triângulo esférico é maior que π rad e menor que 3π rad.*

Demonstração. Sejam \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} os ângulos do triângulo esférico e a' , b' , c' os lados do seu triângulo polar. Pela Proposição 7,

$$0 < \frac{a' + b' + c'}{r} < 2\pi. \quad (1)$$

Entretanto pela Proposição 5 temos

$$\frac{a'}{r} = \pi - \hat{A}; \quad \frac{b'}{r} = \pi - \hat{B}; \quad \frac{c'}{r} = \pi - \hat{C}, \quad (2)$$

substituindo as igualdades (2) na equação (1) teremos

$$0 < \pi - \hat{A} + \pi - \hat{B} + \pi - \hat{C} < 2\pi.$$

Por fim, fazendo as simplificações obtemos

$$\pi < \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 3\pi.$$

\square

Definido os triângulos esféricos, assim como na geometria plana, podemos classificar esses triângulos de acordo com seus ângulos e com a medida de seus lados.

Desta forma, temos as seguintes nomenclaturas para os triângulos esféricos quanto aos seus ângulos:

1. Retângulo: um único ângulo reto;
2. Birretângulo: dois ângulos retos;
3. Trirretângulo: três ângulos retos;
4. Obliquângulo ou oblíquo: Todos os três ângulos com valores diferentes de 90° .

Quanto aos lados:

1. Retilátero: possui um lado de medida $\pi r/2$;
2. Birretilátero: possui dois lados de medidas $\pi r/2$;
3. Trirretilátero: possui três lados de medidas $\pi r/2$;
4. Isóceles: possui dois lados e dois ângulos iguais;
5. Equilátero: possui os três ângulos e três lados iguais.

Os triângulos esféricos e euclidianos possuem ambos os seis elementos principais: três lados e três ângulos, as bissetrizes, alturas e medianas são elementos secundários os triângulos esféricos. O objetivo de resolver um problema envolvendo triângulos (euclidianos ou não euclidianos) é determinar os seus elementos desconhecidos através do conhecimento de outros elementos sendo necessário algumas condições. Na geometria plana, pode-se resolver um triângulo conhecendo três das suas partes, onde uma delas é necessário que seja um lado, uma bissetriz, ou outra parte linear. Por outro lado, nos triângulos esféricos, com o conhecimento dos seus três ângulos internos já o determina, pois os triângulos são formados por arcos de círculo, e a curvatura da esfera faz com que os ângulos internos do triângulo sejam maiores do que os correspondentes em um triângulo plano. Quando você considera triângulos semelhantes na esfera, fazendo uma analogia

a semelhança de triângulos planos, os lados permanecem proporcionais, mas os ângulos internos dos triângulos são afetados pela curvatura da superfície, ou seja, essa analogia perde o sentido na geometria esférica.

Segue alguns exemplos de aplicação do triângulo esférico.

Exemplo 1. Retirado do livro [1]. Sabe-se que a terra é dividida em 24 fusos horários, medindo 15° cada um deles, sabendo que o raio da terra tem aproximadamente 6.371 km, um navio em alto mar navegando sobre a linha do equador percorre qual distância para trafegar de um fuso a outro?

Resolução: Note que $15^\circ = \pi/12 \text{ rad}$ e o equador é um círculo máximo de raio 6.371 km, assim o comprimento de arco percorrido pelo navio é .

$$l = \frac{\pi}{12} \cdot 6.371 \text{ km} \cong 1762,1718 \text{ km}.$$

Exemplo 2. Retirado do livro [5] [Adaptado]. De um ponto da superfície esférica de raio unitário, traçam-se dois círculos máximos perpendiculares a um terceiro círculo máximo (assim o ponto é o polo deste terceiro círculo máximo). Se o menor dos ângulos diedros formado pelos planos dos dois primeiros círculos máximos é 72° , calcule a área do menor, ou de um dos menores triângulos esféricos formados.

Resolução: Seja A o ponto da esfera em que os dois círculos máximos, que chamaremos de c_1 e c_2 respectivamente, se intersectam. Seja também c_3 o terceiro círculo perpendicular a c_1 e c_2 , onde B é o ponto de interseção de c_1 com c_3 e C é o ponto de interseção de c_2 com c_3 . Para que c_3 seja perpendicular a c_1 e a c_2 nos pontos B e C , o ponto A deverá estar situado no polo de c_3 . Supomos ainda que o ângulo esférico composto por $B\hat{A}C$ seja de 72° , isto é, correspondente ao ângulo diedro formado pelos planos que contém c_1 e c_2 . Assim, temos o triângulo esférico ABC cujos ângulos internos dele são $\hat{A} = 72^\circ = 72 \cdot \pi/180 = 2\pi/5 \text{ rad}$, $\hat{B} = 90^\circ = \pi/2 \text{ rad}$ e $\hat{C} = 90^\circ = \pi/2 \text{ rad}$. Pelo Teorema 4 temos:

$$\begin{aligned} a_{ABC} &= r^2(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi) \\ a_{ABC} &= 1^2\left(\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi\right) \\ a_{ABC} &= \frac{2\pi}{5} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

3 Trigonometria Esférica

Este capítulo será dedicado aos principais resultados da trigonometria esférica com a finalidade de determinar as fórmulas que relacionam seus ângulos e seus lados para aplicar na resolução de problemas. As expressões envolvem principalmente o seno e o cosseno da medida dos arcos que compõem os lados e os ângulos internos do triângulo esférico.

A primeira fórmula fundamental é o ponto de partida para as demais fórmulas da trigonometria esférica, ela é apresentada pela proposição a seguir.

Proposição 9. *Dada uma superfície esférica de raio r , sejam a , b e c os lados de um triângulo esférico ABC e \hat{A} o ângulo oposto ao lado a , \hat{B} o ângulo oposto ao lado b e \hat{C} o ângulo oposto ao lado c deste triângulo, seguem as seguintes relações:*

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{a}{r}\right) &= \cos\left(\frac{b}{r}\right)\cos\left(\frac{c}{r}\right) + \sin\left(\frac{b}{r}\right)\sin\left(\frac{c}{r}\right)\cos(\hat{A}); \\ \cos\left(\frac{b}{r}\right) &= \cos\left(\frac{a}{r}\right)\cos\left(\frac{c}{r}\right) + \sin\left(\frac{a}{r}\right)\sin\left(\frac{c}{r}\right)\cos(\hat{B}); \\ \cos\left(\frac{c}{r}\right) &= \cos\left(\frac{a}{r}\right)\cos\left(\frac{b}{r}\right) + \sin\left(\frac{a}{r}\right)\sin\left(\frac{b}{r}\right)\cos(\hat{C}).\end{aligned}$$

Demonstração. Faremos a demonstração desta proposição através da geometria vetorial, provando a primeira relação, os outros casos são feitos de maneira similar.

Dada a superfície esférica de centro O e raio r e o triângulo esférico ABC contido nela de lados a , b e c . Pode-se interpretar os segmentos OA , OB e OC como os vetores \vec{OA} , \vec{OB} e \vec{OC} de norma r , veja a figura 20. Considere as medidas angulares em radianos.

O ângulo entre os vetores \vec{OB} e \vec{OC} mede a/r , entre os vetores \vec{OA} e \vec{OC} mede b/r e entre os vetores \vec{OB} e \vec{OA} mede c/r .

Seja P a projeção na reta OA passando por B e Q a projeção na reta OA passando por C . Desta forma, podemos escrever os vetores \vec{OB} e \vec{OC} como:

$$\begin{aligned}\vec{OB} &= \vec{OP} + \vec{PB} \\ \vec{OC} &= \vec{OQ} + \vec{QC}\end{aligned}$$

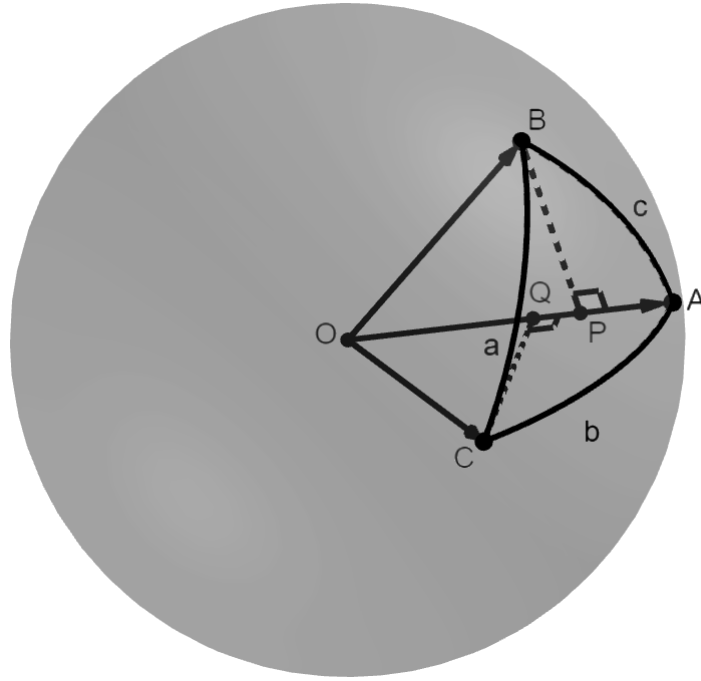


Figura 20: Dedução da primeira fórmula fundamental da Trigonometria Esférica.

Fazendo a multiplicação escalar dos vetores \vec{OB} e \vec{OC} obtemos

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{OB}, \vec{OC} \rangle &= \langle \vec{OP} + \vec{PB}, \vec{OQ} + \vec{QC} \rangle \\
 &= \langle \vec{OP}, \vec{OQ} \rangle + \langle \vec{OP}, \vec{QC} \rangle + \langle \vec{PB}, \vec{OQ} \rangle + \langle \vec{PB}, \vec{QC} \rangle \\
 &= |\vec{OP}||\vec{OQ}| \cos(0) + |\vec{OP}||\vec{QC}| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
 &\quad + |\vec{PB}||\vec{OQ}| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + |\vec{PB}||\vec{QC}| \cos(\hat{A})
 \end{aligned}$$

Reescrevendo o primeiro membro da equação acima substituindo o produto escalar pela norma dos vetores vezes o cosseno de seu ângulo, e ainda aplicando as razões trigonométricas na norma dos vetores do segundo membro para obter as seguintes identidades $|\vec{OP}| = |\vec{OC}| \cos(b/r)$, $|\vec{OQ}| = |\vec{OB}| \cos(c/r)$, $|\vec{PB}| = |\vec{OB}| \sin(c/r)$ e $|\vec{QC}| = |\vec{OC}| \sin(b/r)$ e substituindo na equação acima, teremos:

$$\begin{aligned}
 |\vec{OB}||\vec{OC}| \cos\left(\frac{a}{r}\right) &= |\vec{OC}| \cos\left(\frac{b}{r}\right) |\vec{OB}| \cos\left(\frac{c}{r}\right) + |\vec{OB}| \sin\left(\frac{c}{r}\right) |\vec{OC}| \sin\left(\frac{b}{r}\right) \cos(\hat{A}) \\
 r^2 \cos\left(\frac{a}{r}\right) &= r^2 \cos\left(\frac{b}{r}\right) \cos\left(\frac{c}{r}\right) + r^2 \sin\left(\frac{b}{r}\right) \sin\left(\frac{c}{r}\right) \cos(\hat{A}) \\
 \cos\left(\frac{a}{r}\right) &= \cos\left(\frac{b}{r}\right) \cos\left(\frac{c}{r}\right) + \sin\left(\frac{b}{r}\right) \sin\left(\frac{c}{r}\right) \cos(\hat{A}).
 \end{aligned}$$

Assim, fica demonstrado a primeira fórmula fundamental para o lado a do triângulo esférico, para demonstrar as outras relações para o lado b e c basta tomar os pontos P e Q , sobre a reta OB e OC respectivamente.

□

Outra fórmula que resulta da fórmula fundamental é a proporcionalidade dos senos, conhecida originalmente por “analogia dos senos”, a qual estabelece uma igualdade entre as razões dos senos dos três lados (onde é considerado a medida em radianos do arco) do triângulo esférico pelo seno do seu respectivo ângulo oposto.

Proposição 10. *Dada uma superfície esférica de raio r , sejam a , b e c os lados de um triângulo esférico ABC e \hat{A} o ângulo oposto ao lado a , \hat{B} o ângulo oposto ao lado b e \hat{C} o ângulo oposto ao lado c deste triângulo, segue a seguinte relação:*

$$\frac{\sin \hat{A}}{\sin \frac{a}{r}} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin \frac{b}{r}} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin \frac{c}{r}}.$$

Demonstração. Seja r o raio da superfícies esférica e o triângulo esférico ABC contido nela de lados a , b e c . Pela lei fundamental dada na Proposição 9, temos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{a}{r}\right) &= \cos\left(\frac{b}{r}\right)\cos\left(\frac{c}{r}\right) + \sin\left(\frac{b}{r}\right)\sin\left(\frac{c}{r}\right)\cos(\hat{A}) \\ \Rightarrow \cos(\hat{A}) &= \frac{\cos\left(\frac{a}{r}\right) - \cos\left(\frac{b}{r}\right)\cos\left(\frac{c}{r}\right)}{\sin\left(\frac{b}{r}\right)\sin\left(\frac{c}{r}\right)}. \end{aligned}$$

Da última equação elevamos os dois membros ao quadrado e subtraímos de 1, obtendo

$$\begin{aligned} 1 - \cos(\hat{A})^2 &= 1 - \left(\frac{\cos\left(\frac{a}{r}\right) - \cos\left(\frac{b}{r}\right)\cos\left(\frac{c}{r}\right)}{\sin\left(\frac{b}{r}\right)\sin\left(\frac{c}{r}\right)} \right)^2 \\ &= 1 - \left(\frac{\cos^2\left(\frac{a}{r}\right) + \cos^2\left(\frac{b}{r}\right)\cos^2\left(\frac{c}{r}\right) - 2\cos\left(\frac{a}{r}\right)\cos\left(\frac{b}{r}\right)\cos\left(\frac{c}{r}\right)}{\sin^2\left(\frac{b}{r}\right)\sin^2\left(\frac{c}{r}\right)} \right) \\ &= \frac{\sin^2\left(\frac{b}{r}\right)\sin^2\left(\frac{c}{r}\right) - \cos^2\left(\frac{a}{r}\right) - \cos^2\left(\frac{b}{r}\right)\cos^2\left(\frac{c}{r}\right) + 2\cos\left(\frac{a}{r}\right)\cos\left(\frac{b}{r}\right)\cos\left(\frac{c}{r}\right)}{\sin^2\left(\frac{b}{r}\right)\sin^2\left(\frac{c}{r}\right)}. \end{aligned}$$

Tomamos as seguintes identidades trigonométricas:

$$\sin^2 \hat{A} = 1 - \cos^2 \hat{A}, \quad \sin^2(b/r) = 1 - \cos^2(b/r) = X \quad \text{e} \quad \sin^2(c/r) = 1 - \cos^2(c/r) = Y,$$

em seguida, substituímos essas identidades no primeiro e no segundo membro, desenvolvendo-os para obter

$$\begin{aligned} \sin^2 \hat{A} &= \frac{X \cdot Y - \cos^2 \left(\frac{a}{r}\right) - \cos^2 \left(\frac{b}{r}\right) \cos^2 \left(\frac{c}{r}\right) + 2 \cos \left(\frac{a}{r}\right) \cos \left(\frac{b}{r}\right) \cos \left(\frac{c}{r}\right)}{\sin^2 \left(\frac{b}{r}\right) \sin^2 \left(\frac{c}{r}\right)} \\ &= \frac{1 - \cos^2 \left(\frac{b}{r}\right) - \cos^2 \left(\frac{c}{r}\right) - \cos^2 \left(\frac{a}{r}\right) + 2 \cos \left(\frac{a}{r}\right) \cos \left(\frac{b}{r}\right) \cos \left(\frac{c}{r}\right)}{\sin^2 \left(\frac{b}{r}\right) \sin^2 \left(\frac{c}{r}\right)} \\ \Rightarrow \sin \hat{A} &= \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \left(\frac{b}{r}\right) - \cos^2 \left(\frac{c}{r}\right) - \cos^2 \left(\frac{a}{r}\right) + 2 \cos \left(\frac{a}{r}\right) \cos \left(\frac{b}{r}\right) \cos \left(\frac{c}{r}\right)}{\sin^2 \left(\frac{b}{r}\right) \sin^2 \left(\frac{c}{r}\right)}} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \left(\frac{b}{r}\right) - \cos^2 \left(\frac{c}{r}\right) - \cos^2 \left(\frac{a}{r}\right) + 2 \cos \left(\frac{a}{r}\right) \cos \left(\frac{b}{r}\right) \cos \left(\frac{c}{r}\right)}}{\sin \left(\frac{b}{r}\right) \sin \left(\frac{c}{r}\right)}. \end{aligned}$$

Dividindo os dois membros da última equação por $\sin \left(\frac{a}{r}\right)$, teremos

$$\frac{\sin \hat{A}}{\sin \left(\frac{a}{r}\right)} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \left(\frac{b}{r}\right) - \cos^2 \left(\frac{c}{r}\right) - \cos^2 \left(\frac{a}{r}\right) + 2 \cos \left(\frac{a}{r}\right) \cos \left(\frac{b}{r}\right) \cos \left(\frac{c}{r}\right)}}{\sin \left(\frac{a}{r}\right) \sin \left(\frac{b}{r}\right) \sin \left(\frac{c}{r}\right)}.$$

Partindo das expressões

$$\cos \left(\frac{b}{r}\right) = \cos \left(\frac{a}{r}\right) \cos \left(\frac{c}{r}\right) + \sin \left(\frac{a}{r}\right) \sin \left(\frac{c}{r}\right) \cos(\hat{B});$$

$$\cos \left(\frac{c}{r}\right) = \cos \left(\frac{a}{r}\right) \cos \left(\frac{b}{r}\right) + \sin \left(\frac{a}{r}\right) \sin \left(\frac{b}{r}\right) \cos(\hat{C}),$$

e aplicando o mesmo raciocínio, conseguimos as seguintes igualdades:

$$\frac{\sin \hat{B}}{\sin \left(\frac{b}{r}\right)} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \left(\frac{b}{r}\right) - \cos^2 \left(\frac{c}{r}\right) - \cos^2 \left(\frac{a}{r}\right) + 2 \cos \left(\frac{a}{r}\right) \cos \left(\frac{b}{r}\right) \cos \left(\frac{c}{r}\right)}}{\sin \left(\frac{a}{r}\right) \sin \left(\frac{b}{r}\right) \sin \left(\frac{c}{r}\right)};$$

$$\frac{\sin \hat{C}}{\sin \left(\frac{c}{r}\right)} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \left(\frac{b}{r}\right) - \cos^2 \left(\frac{c}{r}\right) - \cos^2 \left(\frac{a}{r}\right) + 2 \cos \left(\frac{a}{r}\right) \cos \left(\frac{b}{r}\right) \cos \left(\frac{c}{r}\right)}}{\sin \left(\frac{a}{r}\right) \sin \left(\frac{b}{r}\right) \sin \left(\frac{c}{r}\right)}.$$

Por conseguinte, concluímos que

$$\frac{\sin \hat{A}}{\sin \frac{a}{r}} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin \frac{b}{r}} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin \frac{c}{r}}.$$

□

Além destas fórmulas, podemos obter uma para o caso especial do triângulo esférico retângulo, dado o triângulo esférico ABC de lados a (hipotenusa), b e c e com ângulo $\hat{A} = \pi/2$ oposto ao lado a , cuja a fórmula fica expressa por:

$$\cos\left(\frac{a}{r}\right) = \cos\left(\frac{b}{r}\right)\cos\left(\frac{c}{r}\right) + \sin\left(\frac{b}{r}\right)\sin\left(\frac{c}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (3)$$

$$\cos\left(\frac{a}{r}\right) = \cos\left(\frac{b}{r}\right)\cos\left(\frac{c}{r}\right). \quad (4)$$

A fórmula acima é equivalente ao teorema de pitágoras na geometria plana, além disso, para uma esfera com raio R , fazendo R tender ao infinito, encontramos o famoso teorema de pitágoras a partir da expressão 4.

Proposição 11. *Seja o triângulo esférico ABC retângulo em A , contido na esfera de raio R , então*

$$\cos\left(\frac{a}{R}\right) = \cos\left(\frac{b}{R}\right)\cos\left(\frac{c}{R}\right) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

quando $R \rightarrow \infty$.

Demonstração. Dada a relação $\cos(a/R) = \cos(b/R)\cos(c/R)$, cada um dos termos podem ser desenvolvidos em séries de Taylor da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{a}{R}\right) &= 1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} - \dots; \\ \cos\left(\frac{b}{R}\right) &= 1 - \frac{b^2}{2R^2} + \frac{b^4}{24R^4} - \dots; \\ \cos\left(\frac{c}{R}\right) &= 1 - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{c^4}{24R^4} - \dots. \end{aligned}$$

Substituindo o segundo membro das equações acima na relação (4) teremos

$$\begin{aligned} 1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} - \dots &= \left(1 - \frac{b^2}{2R^2} + \frac{b^4}{24R^4} - \dots\right) \left(1 - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{c^4}{24R^4} - \dots\right) \\ &= 1 - \frac{b^2}{2R^2} - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{b^2c^2}{4R^4} - \dots \\ \Rightarrow -\frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} - \dots &= -\frac{b^2}{2R^2} - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{b^2c^2}{4R^4} - \dots \end{aligned}$$

Multiplicando os dois membros da última equação por $2R^2$ ficará

$$\begin{aligned} -a^2 + \frac{a^4}{12R^2} - \dots &= -b^2 - c^2 + \frac{b^2c^2}{2R^2} - \dots \\ \Rightarrow a^2 - \frac{a^4}{12R^2} + \dots &= b^2 + c^2 - \frac{b^2c^2}{2R^2} + \dots \end{aligned}$$

Dada a expressão acima, note que o raio R encontra-se no denominador de cada parcela a menos de a^2 , b^2 e c^2 , quando R tende ao infinito, essas parcelas se anulam, restando apenas os quadrados de a , b e c , ou seja a expressão do teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

□

Da primeira forma fundamental da trigonometria esférica, podemos tirar uma expressão que relaciona quatro elementos consecutivos dos seis do triângulo esférico. Essa expressão é denominada por “fórmula das quatro partes”.

Proposição 12. *Dada uma superfície esférica de raio r , sejam a , b e c os lados de um triângulo esférico ABC e \hat{A} o ângulo oposto ao lado a , \hat{B} o ângulo oposto ao lado b e \hat{C} o ângulo oposto ao lado c deste triângulo, é possível estabelecer a seguinte relação:*

$$\cos\left(\frac{a}{r}\right) \cos(\hat{C}) = \sin\left(\frac{a}{r}\right) \cot\left(\frac{b}{r}\right) + \sin(\hat{C}) \cot(\hat{B}).$$

Demonstração. Partindo das fórmulas fundamentais

$$\cos\left(\frac{b}{r}\right) = \cos\left(\frac{a}{r}\right) \cos\left(\frac{c}{r}\right) + \sin\left(\frac{a}{r}\right) \sin\left(\frac{c}{r}\right) \cos(\hat{B});$$

$$\cos\left(\frac{c}{r}\right) = \cos\left(\frac{a}{r}\right) \cos\left(\frac{b}{r}\right) + \sin\left(\frac{a}{r}\right) \sin\left(\frac{b}{r}\right) \cos(\hat{C}).$$

Substituindo o segundo membro da segunda equação por $\cos(c/r)$ no segundo membro da primeira teremos

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{b}{r}\right) &= \cos\left(\frac{a}{r}\right) \left(\cos\left(\frac{a}{r}\right) \cos\left(\frac{b}{r}\right) + \sin\left(\frac{a}{r}\right) \sin\left(\frac{b}{r}\right) \cos(\hat{C}) \right) \\ &\quad + \sin\left(\frac{a}{r}\right) \sin\left(\frac{c}{r}\right) \cos(\hat{B}) \\ &= \cos^2\left(\frac{a}{r}\right) \cos\left(\frac{b}{r}\right) + \sin\left(\frac{a}{r}\right) \cos\left(\frac{a}{r}\right) \sin\left(\frac{b}{r}\right) \cos(\hat{C}) \\ &\quad + \sin\left(\frac{a}{r}\right) \sin\left(\frac{c}{r}\right) \cos(\hat{B}). \end{aligned}$$

Dada a identidade trigonométrica $\cos^2(a/r) = 1 - \sin^2(a/r)$ substituindo no segundo membro da equação, teremos:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{b}{r}\right) &= \left(1 - \sin^2\left(\frac{a}{r}\right)\right) \cos\left(\frac{b}{r}\right) + \sin\left(\frac{a}{r}\right) \cos\left(\frac{a}{r}\right) \sin\left(\frac{b}{r}\right) \cos(\hat{C}) \\ &\quad + \sin\left(\frac{a}{r}\right) \sin\left(\frac{c}{r}\right) \cos(\hat{B}) \\ &= \cos\left(\frac{b}{r}\right) - \sin^2\left(\frac{a}{r}\right) \cos\left(\frac{b}{r}\right) + \sin\left(\frac{a}{r}\right) \cos\left(\frac{a}{r}\right) \sin\left(\frac{b}{r}\right) \cos(\hat{C}) \\ &\quad + \sin\left(\frac{a}{r}\right) \sin\left(\frac{c}{r}\right) \cos(\hat{B}).\end{aligned}$$

Simplificando $\cos(b/r)$ dos dois lados da igualdade e somando $\sin^2(a/r) \cos(b/r)$ e depois dividindo por $\sin(a/r) \sin(b/r)$ obtemos

$$\begin{aligned}\sin^2\left(\frac{a}{r}\right) \cos\left(\frac{b}{r}\right) &= \sin\left(\frac{a}{r}\right) \cos\left(\frac{a}{r}\right) \sin\left(\frac{b}{r}\right) \cos(\hat{C}) + \sin\left(\frac{a}{r}\right) \sin\left(\frac{c}{r}\right) \cos(\hat{B}) \\ \Rightarrow \sin\left(\frac{a}{r}\right) \cot\left(\frac{b}{r}\right) &= \cos\left(\frac{a}{r}\right) \sin\left(\frac{b}{r}\right) \cos(\hat{C}) + \frac{\sin\left(\frac{c}{r}\right)}{\sin\left(\frac{b}{r}\right)} \cos(\hat{B}).\end{aligned}$$

Conforme a Proposição 10, podemos estabelecer a seguinte igualdade

$$\frac{\sin\left(\frac{c}{r}\right)}{\sin\left(\frac{b}{r}\right)} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}}.$$

Substituindo a igualdade acima na equação anterior resulta em

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{a}{r}\right) \cot\left(\frac{b}{r}\right) &= \cos\left(\frac{a}{r}\right) \cos(\hat{C}) + \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}} \cos(\hat{B}) \\ &= \cos\left(\frac{a}{r}\right) \cos(\hat{C}) + \sin \hat{C} \cot \hat{B} \\ \Rightarrow \cos\left(\frac{a}{r}\right) \cos(\hat{C}) &= \sin\left(\frac{a}{r}\right) \cot\left(\frac{b}{r}\right) - \sin \hat{C} \cot \hat{B}.\end{aligned}$$

□

Segue um exemplo de aplicação da trigonometria esférica.

Exemplo 3. (Extraído e adaptado de [5]) Calcule a área do território de Mu, cuja forma é um quadrilátero esférico com os seus vértices, os dois primeiros no paralelo de $60^\circ N$ e nas longitudes $70^\circ L$, $100^\circ L$, respectivamente e os outros dois no paralelo de $50^\circ N$ e nas respectivas longitudes dos dois primeiros. Raio da Terra: 6371 km.

Resolução: Dadas as informações do enunciado, podemos construir esse quadrilátero nas coordenadas cartográficas

$$A(60^\circ N, 70^\circ L), B(60^\circ N, 100^\circ L), C(50^\circ N, 70^\circ L), D(50^\circ N, 100^\circ L).$$

Note que os arcos \widehat{AC} e \widehat{BD} estão sobre os meridianos e portanto são arcos de círculos máximos da superfície esférica cuja medida angular são ambos 10° . Por outro lado, os arcos \widehat{AB} e \widehat{CD} não estão explícitos (não correspondem aos arcos dos paralelos), sendo assim, precisaremos determiná-los. Após isso, dividimos o quadrilátero esférico pela diagonal determinando dois triângulos esféricos, encontramos seus ângulos internos para, enfim, aplicar a fórmula da área do triângulo esférico. Veja a figura 21.

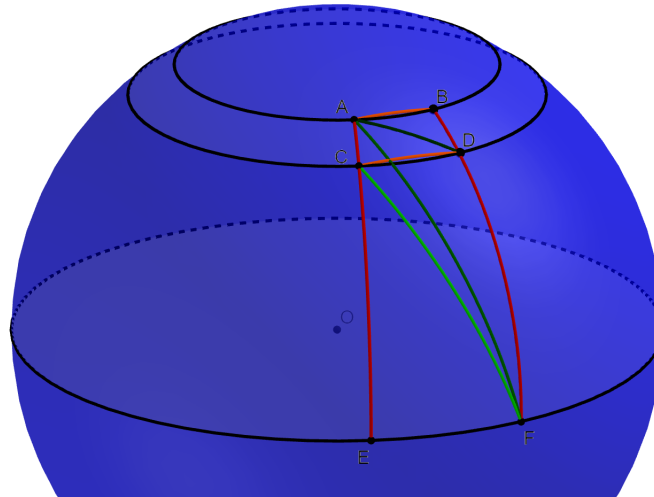


Figura 21: Quadrilátero Mu na superfície terrestre.

Considere inicialmente a esfera de raio unitário, e as medidas dos arcos dadas em graus, para posteriormente converter em radianos e aplicar a medida do raio da superfície terrestre para encontrar as medidas lineares desses arcos, note que todos os arcos que trabalharemos neste problema estão no intervalo de $(0^\circ, 90^\circ)$.

Primeiramente determinaremos a medida angular do arco \widehat{AB} , sejam os pontos sobre a linha do equador $E(0^\circ, 70^\circ L)$ e $F(0^\circ, 100^\circ L)$, ou seja, é a intersecção do prolongamento dos arcos \widehat{AC} e \widehat{BD} com a linha do equador (único paralelo que é um círculo máximo), desta maneira, temos que $\widehat{EF} = 30^\circ$, $\widehat{AE} = \widehat{BF} = 60^\circ$, $\widehat{CE} = \widehat{DF} = 50^\circ$ e os ângulos esféricos $\widehat{AEF} = \widehat{EFB} = 90^\circ$. Dividindo o quadrilátero esférico $ABEF$ em dois triângulos pela

diagonal \widehat{AF} , vamos determinar a medida da diagonal para depois resolver o triângulo esférico ABF e determinar o arco \widehat{AB} .

Pela Proposição 9 temos

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{AF}) &= \cos(\widehat{AE}) \cos(\widehat{EF}) + \sin(\widehat{AE}) \sin(\widehat{EF}) \cos(\widehat{AEF}) \\ \cos(\widehat{AF}) &= \cos(60^\circ) \cos(30^\circ) + \sin(60^\circ) \sin(30^\circ) \cos(90^\circ) \\ \cos(\widehat{AF}) &= \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \widehat{AF} = 64,3410\dots^\circ.\end{aligned}$$

Precisamos encontrar agora o ângulo esférico \widehat{AFB} , que é o complementar do ângulo esférico \widehat{EFA} . Utilizando a Proposição 12 temos

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{EF}) \cos(\widehat{AEF}) &= \sin(\widehat{EF}) \cot(\widehat{AE}) - \sin(\widehat{AEF}) \cot(\widehat{EFA}) \\ \cos(30^\circ) \cos(90^\circ) &= \sin(30^\circ) \cot(60^\circ) - \sin(90^\circ) \cot(\widehat{EFA}) \\ \tan(\widehat{EFA}) &= 2\sqrt{3} \Rightarrow \widehat{EFA} = 73,8978\dots^\circ.\end{aligned}$$

Por conseguinte, $\widehat{AFB} = 90^\circ - \widehat{EFA} = 16,1021\dots^\circ$. Com esses valores é possível aplicar novamente a Proposição 9 no triângulo esférico ABF para encontrar o arco \widehat{AB}

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{AB}) &= \cos(\widehat{AF}) \cos(\widehat{BF}) + \sin(\widehat{AF}) \sin(\widehat{BF}) \cos(\widehat{AFB}) \\ \cos(\widehat{AB}) &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin(64,3410\dots^\circ) \cos(16,1021\dots^\circ) \\ \cos(\widehat{AB}) &= 0,9665\dots \Rightarrow \widehat{AB} = 14,8709\dots^\circ.\end{aligned}$$

Com o mesmo raciocínio podemos encontrar o arco \widehat{CD} , traçamos a diagonal do quadrilátero esférico $CDEF$ obtendo o arco \widehat{CF} . Vamos encontrar a medida desse arco

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{CF}) &= \cos(\widehat{CE}) \cos(\widehat{EF}) + \sin(\widehat{CE}) \sin(\widehat{EF}) \cos(\widehat{CEF}) \\ \cos(\widehat{CF}) &= \cos(50^\circ) \cos(30^\circ) + \sin(50^\circ) \sin(30^\circ) \cos(90^\circ) \\ \cos(\widehat{CF}) &= 0,5566\dots \Rightarrow \widehat{CF} = 56,1741\dots^\circ.\end{aligned}$$

Encontrando o ângulo esférico \widehat{CFD} , que é o complementar do ângulo esférico \widehat{CFE}

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{EF}) \cos(\widehat{CEF}) &= \sin(\widehat{EF}) \cot(\widehat{CE}) - \sin(\widehat{CEF}) \cot(\widehat{CFE}) \\ \cos(30^\circ) \cos(90^\circ) &= \sin(30^\circ) \cot(50^\circ) - \sin(90^\circ) \cot(\widehat{CFE}) \\ \tan(\widehat{CFE}) &= 2 \tan(50^\circ) \Rightarrow \widehat{CFE} = 67,2395\dots^\circ.\end{aligned}$$

Por conseguinte, $C\widehat{F}D = 90^\circ - C\widehat{F}E = 22,7604\dots^\circ$. Com esses valores resolveremos o triângulo esférico CDF para encontrar o arco \widehat{CD}

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{CD}) &= \cos(\widehat{CF}) \cos(\widehat{DF}) + \sin(\widehat{CF}) \sin(\widehat{DF}) \cos(C\widehat{F}D) \\ \cos(\widehat{CD}) &= \cos(56,1741\dots^\circ) \cos(50^\circ) + \sin(56,1741\dots^\circ) \sin(50^\circ) \cos(22,7604\dots^\circ) \\ \cos(\widehat{CD}) &= 0,9446\dots \Rightarrow \widehat{CD} = 19,1531\dots^\circ.\end{aligned}$$

Encontradas as medidas dos lados do quadrilátero esférico $ABCD$, podemos dividi-lo em dois triângulos esféricos (ABD e ACD) pelo arco \widehat{AD} e determinar esta medida. Mas antes, precisamos determinar a medida do ângulo esférico $A\widehat{B}D = A\widehat{B}F$.

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{AF}) &= \cos(\widehat{AB}) \cos(\widehat{BF}) + \sin(\widehat{AB}) \sin(\widehat{BF}) \cos(A\widehat{B}F) \\ \frac{\sqrt{3}}{4} &= \frac{1}{2} \cos(14,8709\dots^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(14,8709\dots^\circ) \cos(A\widehat{B}F) \\ \cos(A\widehat{B}F) &= -0,2260\dots \Rightarrow A\widehat{B}F = 103,0643\dots^\circ.\end{aligned}$$

Logo, $A\widehat{B}D = A\widehat{B}F = 103,0643\dots^\circ$, determinando o arco \widehat{AD}

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{AD}) &= \cos(\widehat{AB}) \cos(\widehat{BD}) + \sin(\widehat{AB}) \sin(\widehat{BD}) \cos(A\widehat{B}F) \\ \cos(\widehat{AD}) &= \cos(14,8709\dots^\circ) \cos(10^\circ) + \sin(14,8709\dots^\circ) \sin(10^\circ) \cos(103,0643\dots^\circ) \\ \cos(\widehat{AD}) &= 0,9417\dots \Rightarrow \widehat{AD} = 19,6525\dots^\circ.\end{aligned}$$

Uma vez encontrado a medida de todos os lados dos triângulos esféricos, basta determinar os seus ângulos internos. Assim, começaremos pelo triângulo ABD :

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{BD}) &= \cos(\widehat{AB}) \cos(\widehat{AD}) + \sin(\widehat{AB}) \sin(\widehat{AD}) \cos(B\widehat{A}D) \\ \cos(10^\circ) &= \cos(14,8709\dots^\circ) \cos(19,6525\dots^\circ) + \sin(14,8709\dots^\circ) \sin(19,6525\dots^\circ) \cos(B\widehat{A}D) \\ \cos(B\widehat{A}D) &= 0,8643\dots \Rightarrow B\widehat{A}D = 30,1960\dots^\circ.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{AB}) &= \cos(\widehat{BD}) \cos(\widehat{AD}) + \sin(\widehat{BD}) \sin(\widehat{AD}) \cos(A\widehat{D}B) \\ \cos(14,8709\dots^\circ) &= \cos(10^\circ) \cos(19,6525\dots^\circ) + \sin(10^\circ) \sin(19,6525\dots^\circ) \cos(A\widehat{D}B) \\ \cos(A\widehat{D}B) &= 0,6689\dots \Rightarrow A\widehat{D}B = 48,0174\dots^\circ.\end{aligned}$$

Para determinar a área do triângulo esférico ABD é preciso transformar a medida de graus em radianos nos seguintes ângulos esféricos $A\widehat{B}D = 1,79881\dots rad$, $B\widehat{A}D =$

$0,52702...rad$ e $\widehat{ADB} = 0,83806...rad$ e considerando o raio da terra sendo $r = 6.371$, assim podemos aplicar o Teorema 4:

$$\begin{aligned} a_{ABD} &= r^2(\widehat{ABD} + \widehat{BAD} + \widehat{ADB} - \pi) \\ a_{ABD} &\cong 6.371^2(1,7988 + 0,5270 + 0,8381 - \pi) \\ a_{ABD} &\cong 6.371^2(0,0223) \\ a_{ABD} &\cong 905.148,9943km^2 \end{aligned}$$

Basta encontrar agora as medidas dos ângulos internos de ACD para encontrar sua área.

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{AD}) &= \cos(\widehat{AC}) \cos(\widehat{CD}) + \sin(\widehat{AC}) \sin(\widehat{CD}) \cos(\widehat{ACD}) \\ \cos(19,6525...^\circ) &= \cos(10^\circ) \cos(19,1531...^\circ) + \sin(10^\circ) \sin(19,1531...^\circ) \cos(\widehat{ACD}) \\ \cos(\widehat{ACD}) &= 0,2010... \Rightarrow \widehat{ACD} = 78,4005...^\circ. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{CD}) &= \cos(\widehat{AC}) \cos(\widehat{AD}) + \sin(\widehat{AC}) \sin(\widehat{AD}) \cos(\widehat{CAD}) \\ \cos(19,1531...^\circ) &= \cos(10^\circ) \cos(19,6525...^\circ) + \sin(10^\circ) \sin(19,6525...^\circ) \cos(\widehat{CAD}) \\ \cos(\widehat{CAD}) &= 0,2945... \Rightarrow \widehat{CAD} = 72,8682...^\circ. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{AC}) &= \cos(\widehat{CD}) \cos(\widehat{AD}) + \sin(\widehat{CD}) \sin(\widehat{AD}) \cos(\widehat{ADC}) \\ \cos(10^\circ) &= \cos(19,1531...^\circ) \cos(19,6525...^\circ) + \sin(19,1531...^\circ) \sin(19,6525...^\circ) \cos(\widehat{ADC}) \\ \cos(\widehat{ADC}) &= 0,8626... \Rightarrow \widehat{ADC} = 30,3831...^\circ. \end{aligned}$$

Para determinar a área do triângulo esférico ACD é preciso transformar a medida de graus em radianos nos seguintes ângulos esféricos $\widehat{ACD} = 1,36864...rad$, $\widehat{CAD} = 1,27179...rad$ e $\widehat{ADC} = 0,53028...rad$ e considerando o raio da terra sendo $r = 6.371$, assim podemos aplicar o Teorema 4:

$$\begin{aligned} a_{ACD} &= r^2(\widehat{ACD} + \widehat{CAD} + \widehat{ADC} - \pi) \\ a_{ACD} &\cong 6.371^2(1,3686 + 1,2718 + 0,5303 - \pi) \\ a_{ACD} &\cong 6.371^2(0,0291) \\ a_{ACD} &\cong 1.181.158,5531km^2. \end{aligned}$$

Por fim, para encontrar a área do Quadrilátero Mu, somamos as duas áreas encontradas acima:

$$a_{ABCD} \cong a_{ABD} + a_{ACD}$$

$$a_{ABCD} \cong 905.148,9943km^2 + 1.181.158,5531km^2 = 2.086.307,5474km^2$$

Observação: Por conta das aproximações, o erro da área real da superfície em relação ao encontrado é menor que $5,964 \cdot 10^2 km^2$.

O exemplo acima mostra um método para calcular a área de quadriláteros esféricos cujos dois lados opostos têm medidas congruentes. De modo geral, uma forma de encontrar áreas de quadriláteros esféricos ou de outros polígonos esféricos é dividi-los em triângulos esféricos cujos vértices coincidem com os vértices dos polígonos, descobrir a medida do ângulo interno de cada triângulo através da trigonometria esférica e assim aplicar o Teorema 4.

Exemplo 4. (Extraído e adaptado do livro [5]). O Triângulo das Bermudas é famoso pelas notícias de ser uma área do Oceano Atlântico, onde frequentemente desaparecem, sem deixar vestígios, navios, aeronaves e outras coisas mais. Essa parte misteriosa do oceano tem seus vértices, o primeiro, na ponta sul da Flórida ($25^\circ N, 80, 5^\circ O$); o segundo, em Porto Rico ($18, 5^\circ N, 66^\circ O$); e o terceiro, no arquipélago das Bermudas ($32, 3^\circ N, 64, 9^\circ O$). Calcule sua superfície, com o raio da terra medindo $6371km$.

Resolução: Para resolver este exercício, faremos uso da geometria vetorial para encontrar os arcos que compõem os lados do Triângulo das Bermudas. Primeiro consideremos os vetores em coordenadas esféricas de comprimento unitário.

Seja o sistema de coordenadas esférica (ρ, θ, φ) , onde ρ é a medida da origem ao ponto, θ é o ângulo formado no plano xy pelo semieixo OX e a projeção do segmento OA neste plano em sentido anti-horário e φ é o ângulo formado pelo semieixo OZ com o próprio segmento. Em coordenadas cartesianas ficará $x = \rho \cos(\theta) \sin(\varphi)$, $y = \rho \sin(\theta) \sin(\varphi)$, $z = \rho \cos(\varphi)$.

Desta forma, consideramos O o centro da terra, o equador situado no plano xy , onde o eixo OX parte da origem e vai de encontro com a interseção do Meridiano de Greenwich

e o eixo y é a rotação de 90° do eixo OX no sentido anti-horário. Para facilitar as contas, consideramos o raio da esfera sendo unitário, para facilitar as contas, pois estamos interessados apenas nos ângulos dos vetores. Desta forma, as coordenadas esféricas serão: o sul da Flórida $A = (1; -80, 5^\circ; 65^\circ)$; Porto Rico $B = (1; -66^\circ; 71, 5^\circ)$; arquipélago das Bermudas $C = (1; -64, 9^\circ; 57, 7^\circ)$.

Podemos então construir os vetores em coordenadas cartesianas:

$$\vec{OA} = (\cos(-80, 5^\circ) \sin(65^\circ); \sin(-80, 5^\circ) \sin(65^\circ); \cos(65^\circ)) \approx (0, 1496; -0, 8939; 0, 4226)$$

$$\vec{OB} = (\cos(-66^\circ) \sin(71, 5^\circ); \sin(-66^\circ) \sin(71, 5^\circ); \cos(71, 5^\circ)) \approx (0, 3857; -0, 8663; 0, 3173)$$

$$\vec{OC} = (\cos(-64, 9^\circ) \sin(57, 7^\circ); \sin(-64, 9^\circ) \sin(57, 7^\circ); \cos(57, 7^\circ)) \approx (0, 3586; -0, 7654; 0, 5344)$$

Para calcular o ângulo α entre dois vetores \vec{u} e \vec{v} , usamos a fórmula:

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}| |\vec{v}|}.$$

Desta maneira, determinaremos primeiro o ângulo entre \vec{OA} e \vec{OB} , note que o módulo desses vetores é igual a 1, pois estão contidos na esfera unitária:

$$\begin{aligned} \cos(\gamma) &\approx \frac{\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle}{|\vec{OA}| |\vec{OB}|} \\ \cos(\gamma) &\approx \frac{0, 1496 \cdot 0, 3857 + (-0, 8939) \cdot (-0, 8663) + 0, 4226 \cdot 0, 3173}{1 \cdot 1} \\ \cos(\gamma) &\approx 0, 96617727 \\ \Rightarrow \gamma &\approx 0, 26082612 \text{ rad.} \end{aligned}$$

Agora calculando o ângulo entre \vec{OB} e \vec{OC} :

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\langle \vec{OB}, \vec{OC} \rangle}{|\vec{OB}| |\vec{OC}|} \\ \cos(\alpha) &= \frac{0, 3857 \cdot 0, 3586 + (-0, 8663) \cdot (-0, 7654) + 0, 3173 \cdot 0, 5344}{1 \cdot 1} \\ \cos(\alpha) &\approx 0, 97094316 \\ \Rightarrow \alpha &\approx 0, 24165536 \text{ rad.} \end{aligned}$$

Por fim calculando o ângulo entre \vec{OA} e \vec{OC} :

$$\begin{aligned}\cos(\beta) &= \frac{\langle \vec{OA}, \vec{OC} \rangle}{|\vec{OA}| |\vec{OC}|} \\ \cos(\beta) &= \frac{0,1496 \cdot 0,3586 + (-0,8939) \cdot (-0,7654) + 0,4226 \cdot 0,5344}{1 \cdot 1} \\ \cos(\beta) &\approx 0,96385384 \\ \Rightarrow \beta &\approx 0,26968886 \text{ rad}\end{aligned}$$

Ainda trabalhando com a esfera unitária, teremos o triângulo esférico ABC cujos lados são $a = \alpha$, $b = \beta$ e $c = \gamma$. Para encontrar a área do triângulo, precisamos encontrar seus ângulos internos, aplicando a fórmula fundamental da trigonometria temos para o ângulo \hat{A} oposto ao lado a :

$$\begin{aligned}\cos(\hat{A}) &= \frac{\cos(a) - \cos(b) \cos(c)}{\sin(b) \sin(c)} \\ \cos(\hat{A}) &= \frac{\cos(0,24165536) - \cos(0,26968886) \cos(0,26082612)}{\sin(0,26968886) \sin(0,26082612)} \\ \cos(\hat{A}) &\approx 0,5776625 \\ \Rightarrow \hat{A} &\approx 0,95493416 \text{ rad.}\end{aligned}$$

Para o ângulo \hat{B} oposto ao lado b :

$$\begin{aligned}\cos(\hat{B}) &= \frac{\cos(b) - \cos(a) \cos(c)}{\sin(a) \sin(c)} \\ \cos(\hat{B}) &= \frac{\cos(0,26968886) - \cos(0,24165536) \cos(0,26082612)}{\sin(0,24165536) \sin(0,26082612)} \\ \cos(\hat{B}) &\approx 0,417267 \\ \Rightarrow \hat{B} &\approx 1,14036041 \text{ rad.}\end{aligned}$$

Para o ângulo \hat{C} oposto ao lado c :

$$\begin{aligned}\cos(\hat{C}) &= \frac{\cos(c) - \cos(a) \cos(b)}{\sin(a) \sin(b)} \\ \cos(\hat{C}) &= \frac{\cos(0,26082612) - \cos(0,24165536) \cos(0,26968886)}{\sin(0,24165536) \sin(0,26968886)} \\ \cos(\hat{C}) &\approx 0,47636343 \\ \Rightarrow \hat{C} &\approx 1,07428226 \text{ rad.}\end{aligned}$$

Por fim, aplicamos o Teorema 4, considerando o raio da terra:

$$a_{ABC} = 6371^2(0,95493416 + 1,14036041 + 1,07428226 - \pi)$$

$$a_{ABC} \approx 40.589.641 \cdot 0,02798418$$

$$a_{ABC} \approx 1.135.867,67 \text{ km}^2.$$

Portanto, a área do Triângulo das Bermudas compreende aproximadamente $1.135.867,67 \text{ km}^2$.

4 A Esfera Celeste

Ao observarmos o céu, principalmente em uma noite de poucas nuvens, podemos imaginar que estamos contidos em uma esfera celeste concêntrica ao planeta Terra cujo o raio é imenso e indeterminado, além disso, os objetos celestes, ou seja, os astros estão fixados na sua superfície. A esfera celeste é dividida em constelações, e as coordenadas celestes (como ascensão reta e declinação) são usadas para especificar a posição dos objetos no céu em relação a essa esfera fictícia.

Descrever os movimentos dos astros na esfera celeste é uma forma simples de compreender as posições dos objetos celestes e suas trajetórias, porém, não foi uma tarefa fácil desenvolver métodos precisos para identificar as posições exatas e os movimentos reais dos corpos no universo, conforme descreve Neves (p. 140, 2006) em seu trabalho [9].

Assim, na história da Astronomia, é muito comum encontrarmos autores que afirmam que o sistema copernicano era mais simples que o ptolomaico (por uma suposta simplificação do número de círculos que definiam os movimentos planetários) e apresentava melhores argumentos físicos que aqueles derivados da física sublunar de Aristóteles e subjacente à representação geométrica de mundo de Ptolomeo. Nada mais irreal que isso! O desenvolvimento da noção de Terra como corpo cósmico, suas dimensões e sua exata posição no universo foi tarefa árdua, construída por pacientes e quase anônimos observadores dos céus ao longo dos séculos e que encontraram em alguns poucos nomes os idealizadores de modelos geométricos, astronômicos e físicos, necessários para

descrever os intrincados movimentos dos corpos celestes: estrelas, Sol, Lua, cometas e planetas.

O deslocamento dos astros durante a noite, ao longo de um período de 24 horas, ocorre com o surgimento no leste ao ocaso no oeste. Esse movimento é resultado da rotação da Terra. No entanto, segundo as concepções de Ptolomeu (90-168 d.C.) e Aristóteles (384-322 a.C.), que defendiam o geocentrismo, a Terra permanece fixa no centro do universo, enquanto os astros realizam movimentos orbitais ao seu redor. Ainda que a visão de Ptolomeu e Aristóteles não condiz com a realidade, interpretar o céu desta maneira torna mais simples a descrição dos movimentos desses objetos celestes e nas aplicações que ajudam no conhecimento de Geolocalização e a passagem do tempo.

Destá forma, fica definido a Esfera Celeste como:

Definição 20. *A Esfera Celeste é uma esfera ideal de raio arbitrário, com centro em um ponto qualquer do espaço, sobre uma superfície da qual estão projetadas as posições relativas dos astros.*

Certos planos e pontos na esfera celeste, estabelecidos pelos gregos na antiguidade, desempenham um papel relevante na determinação da posição dos astros no céu. Assim seguem as definições dos principais entes geométricos da esfera celeste. Veja a figura 22. [1]

Definição 21. *Os principais pontos, círculos e planos da esfera celeste são:*

- *Eixo Celeste ou Eixo do Mundo: reta imaginária resultante do prolongamento do eixo terrestre, em torno do qual a esfera celeste executa movimento aparente de rotação. Reta $\overleftrightarrow{P_N P_S}$.*
- *Polo Norte Celeste e Polo Sul Celeste: pontos imaginários diametralmente opostos, em que o eixo celeste intersecta a esfera celeste. São as projeções dos polos terrestres sobre a esfera celeste, já que o eixo celeste coincide com o eixo de rotação da Terra. Pontos P_N e P_S*

- *Equador Celeste: círculo máximo que divide a esfera celeste nos hemisférios norte e sul. O equador celeste coincide com o plano equador da terra. Círculo que contém os pontos QNQ' .*
- *Plano do Horizonte: Plano tangente à Terra no lugar em que se encontra o observador. Sendo o raio da Terra desprezível em comparação com o raio da Esfera Celeste, considera-se que o horizonte é um círculo máximo da Esfera Celeste, ou seja, passa pelo seu centro. Plano perpendicular à reta $\overleftrightarrow{P_N P_S}$ e contém o ponto C .*
- *Paralelo Celeste: qualquer círculo menor que resulta da interseção da esfera celeste com um plano paralelo ao plano do equador celeste.*
- *Linha do Horizonte ou Horizonte Astronômico ou Horizonte Celeste: círculo máximo resultante da interseção do plano do horizonte com a esfera celeste. A parte visível da esfera celeste é o hemisfério que está acima do plano do horizonte e o hemisfério invisível localiza-se abaixo do plano do horizonte com relação ao observador.*
- *Zênite e Nadir: pontos, diametralmente opostos, da esfera celeste resultado da interseção da vertical do lugar em que se encontra o observador com a esfera celeste. O zênite está situado no hemisfério visível, enquanto o nadir corresponde ao ponto diametralmente oposto ao zênite. Pontos Z e Z'*
- *Círculo Vertical: qualquer semicírculo máximo da esfera celeste que possui extremidades no zênite e no nadir. Por exemplo, o semicírculo ZAZ' . Os círculos verticais são usados para medir a altura dos astros na Esfera Celeste.*
- *Ponto Cardeal Norte: ponto da esfera celeste em que o círculo vertical que passa pelo polo norte celeste intersecta a linha do horizonte.*
- *Ponto Cardeal Sul: ponto da esfera celeste em que o círculo vertical que passa pelo polo sul celeste intersecta a linha do horizonte.*
- *Linha Norte-Sul: reta no plano do horizonte que passa pelos pontos geográficos norte e sul. Segmento de reta \overline{NS} .*

- *Linha Leste-Oeste: reta perpendicular à linha norte-sul, sobre o plano do horizonte. Segmento de reta \overline{LO} .*
- *Círculo Horário ou Meridiano Celeste: qualquer semicírculo da esfera celeste que contém os dois polos celestes. O círculo horário que contém o zênite chama-se meridiano local. Exemplos: Círculo horário de um astro A (figura 22) é o semicírculo $\widehat{P_NAP_S}$, já o meridiano local é dado pelo semicírculo $\widehat{P_NZP_S}$.*

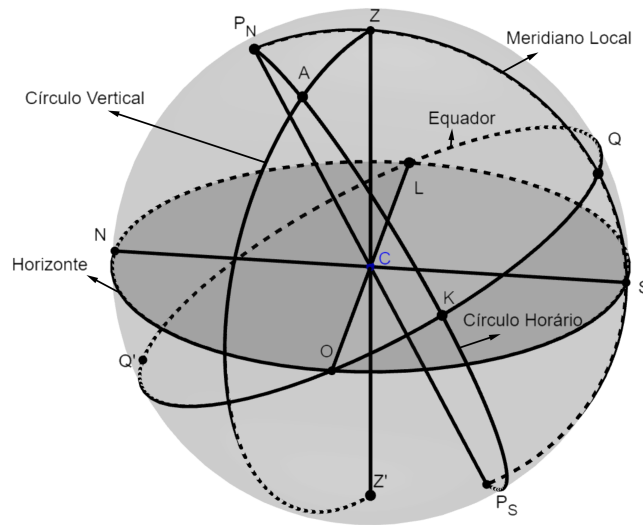


Figura 22: Esfera Celeste com centro C e os principais pontos, círculos e planos.

Dados os pontos, planos e círculos de referência na esfera celeste, podemos fazer a localização dos astros.

Definição 22. *A altura de um astro ou um ponto qualquer P na esfera celeste é medido sobre um círculo vertical que passa por P , com 0° quando está sobre a linha do horizonte e varia até 90° coincidindo com Zênite ou -90° no Nadir.*

4.1 Coordenadas Astronômicas

As coordenadas astronômicas oferecem um sistema de referência preciso para localizar estrelas, planetas, galáxias e outros corpos celestes no espaço. Os astrônomos levam em consideração a observação a partir da Terra, fornecendo uma perspectiva singular que

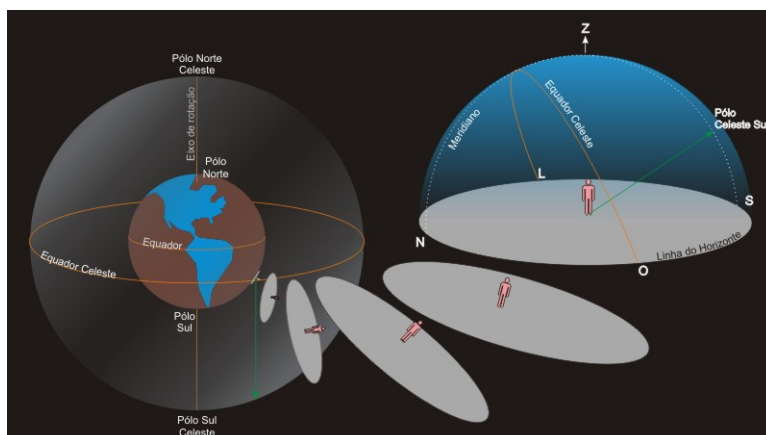


Figura 23: Observador da Esfera Celeste no hemisfério sul do planeta terra. Fonte: <https://www.if.ufrgs.br/~fatima/fis2016/aulas/aula2.htm>. Acesso em Janeiro de 2024.

incorpora elementos cruciais como a eclíptica, declinação e ascensão reta. Trataremos a seguir alguns dos principais sistemas de coordenadas utilizados por eles.

Sistema de Coordenada Equatorial Local ou Horária

Neste sistema o plano horizontal de referência é o Equador Celeste, já o eixo perpendicular é o meridiano do astro. Portanto, as coordenadas são dadas pelo ângulo horário e a declinação. Desta maneira, a definição para estes eixos é dada a seguir.

Definição 23. *O Ângulo Horário de um astro ou de um ponto qualquer A na Esfera Celeste em um dado momento e um dado observador é o ângulo de vértice em P (o polo do hemisfério do observador) contado a partir do meridiano local do observador no sentido horário até o círculo horário do astro. O ângulo horário varia de 0° a 360° ou de $-12 h$ a $12 h$.*

Exemplo 5. O sol, quando está em cima do meridiano local do observador, possui o ângulo horário igual a 0° ou 360° , conforme passa o tempo o astro desloca-se na esfera celeste aumentando assim seu ângulo horário. Ao deslocar-se 15° , corresponde a 1 h, $15'$ corresponde a 1 min e $15''$ corresponde a 1 seg.

Definição 24. *Declinação é o ângulo medido sobre o meridiano de um astro, com origem*

no equador estendendo-se até o próprio astro. A declinação varia entre -90° a 90° sendo positiva se o astro estiver no hemisfério norte e negativa se estiver no sul.

Definição 25. Chama-se *Distância polar* o complemento da declinação.

Exemplo 6. Na figura 22, a Declinação do Astro A é dada pelo arco \widehat{AK} . Enquanto que o ângulo horário é dado pelo arco \widehat{QK} , onde Q é o ponto dado pela interseção do meridiano local com o Equador Celeste, já o ponto K é a intersecção do Círculo Horário do astro A com o Equador Celeste.

Exemplo 7. No hemisfério norte encontra-se a Estrela Polar, também conhecida como Polaris ou Alpha Ursae Minoris, e está localizada muito próxima ao Polo Norte Celeste. Devido a essa proximidade, sua coordenada horária é aproximadamente constante ao longo do tempo, e é bastante próxima a 0 horas e sua declinação é de $89,5^\circ$, ou seja o seu ângulo horário e a sua declinação respectivamente, coincide assim quase com a coordenada do Polo Norte o que a torna praticamente fixa no céu.

Exemplo 8. No hemisfério sul encontra-se a constelação Cruzeiro do Sul, sendo o objeto mais próximo do polo sul celeste, ao prolongar a haste maior da cruz cinco vezes o seu tamanho encontrará o polo sul celeste. A coordenada horária da Alpha Crucis (Acrux), a estrela mais brilhante que localiza-se na haste inferior da cruz tem uma declinação de $-63^\circ 05' 56,7''$.

A fim de visualizar um astro na Esfera Celeste, é necessário que o observador na terra esteja no mesmo hemisfério que o astro, ou ainda, se estiverem em hemisférios opostos, é possível visualizar o astro se a declinação do objeto celeste for menor que o complemento da latitude do observador. A seguir é apresentado outro sistema de coordenadas que utiliza a declinação do astro e o equador celeste, no entanto, a referência no equador é dada pela interseção da trajetória do sol com o equador.

Sistema Equatorial ou Uranográfico

Neste sistema, leva em consideração a Declinação (Definição 24) e a Ascensão Reta que será definido logo mais. Antes é importante fazer uma análise a respeito da Eclíptica

(Trajetória do sol durante o ano na Esfera Celeste), este efeito se dá pelo movimento de translação da terra, porém não o sentimos dando a impressão de que o sol está se movimentando no decorrer do ano.

Definição 26. *Eclíptica: é o caminho aparente do sol na esfera celeste ao longo de um ano. Essa trajetória é um círculo máximo que faz um ângulo de $23^{\circ} 27'$ com o equador celeste. Confira a figura 24.*

Os quatro pontos mais importantes na eclíptica é o Ponto Vernal ou Equinócio de Março (γ), Ponto Libra ou Equinócio de Setembro (Ω), Solstício de Dezembro e Solstício de Junho. No Solstício de Dezembro, no hemisfério sul, tem maior incidência solar do ano tornando assim o dia mais longo, por outro lado, quando está no Solstício de Junho, há menor incidência de luz solar neste hemisfério tornando assim a noite mais longa do ano. O ponto Libra e Ponto Vernal são os pontos de interseção da Eclíptica com o Equador Celeste, falaremos um pouco mais do Ponto Vernal.

Definição 27. *Denomina-se Ponto Vernal ou Ponto γ o ponto da esfera celeste onde se situa o sol no equinócio de março (entre 21 e 22 de março). É um ponto sobre o equador celeste e, ao passar por ele, o sol sai do hemisfério sul celeste e entra no hemisfério norte celeste.*

Conforme definimos a Eclíptica, e seus principais pontos, podemos agora fazer a definição de Ascensão Reta.

Definição 28. *Denomina-se Ascensão Reta o arco do Equador Celeste, contado no sentido anti-horário quando observado do Polo Norte, de 0° a 360° do Ponto Venal (γ) até o ponto de intersecção do meridiano do astro com o Equador Celeste. Em geral a Ascensão Reta é dada em horas, minutos e segundos.*

O Sol passa pelo γ uma vez a cada ano (365 dias e $1/4$ de dia). Assim, é possível afirmar que a sua Ascensão Reta tem uma variação de 1° por dia aproximadamente. Com isso, da para estimar a posição dessa coordenada através do ano. Por outro lado, com uma bússola e um calendário é possível determinar a posição do Ponto Vernal (de forma pouco precisa).

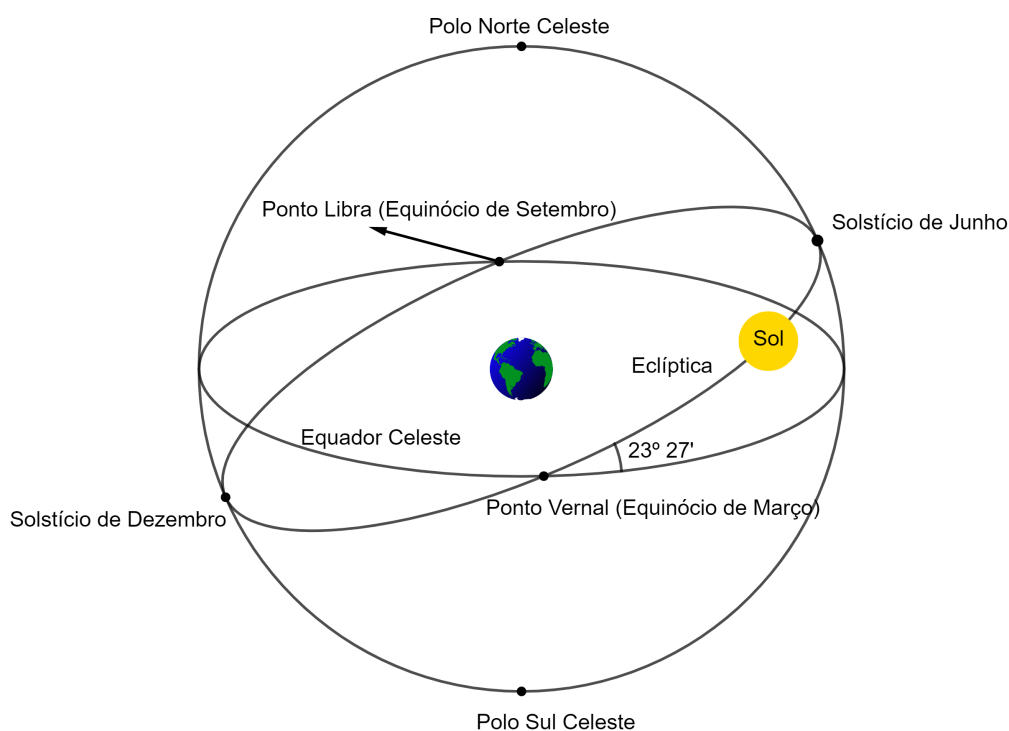


Figura 24: Eclíptica e os quatro pontos principais.

Enfim, as coordenadas no Sistema Equatorial são fixas na esfera celeste, não dependendo da posição ou do instante em que o observador se encontra. Elas são dadas pela Ascensão Reta e a Declinação conforme vemos na figura 25.

Ambos os sistemas de coordenadas tratados acima se baseiam na Declinação do astro e o ângulo no Equador Celeste a partir do meridiano local no Sistema Horário ou do ponto Vernal no Sistema Equatorial. A seguir veremos um sistema dinâmico de coordenadas que depende da posição do observador.

Sistema Horizontal

Os planos de referência para este sistema são o Horizonte Celeste e o círculo vertical do astro. As coordenadas são a Altura (Definição 22) e o Azimute do astro. Nesta última será feita a definição.

Definição 29. *Chama-se Azimute o ângulo contado ao longo do horizonte, desde a direção norte, no sentido leste (sentido horário) até a vertical do astro. O azimute varia*

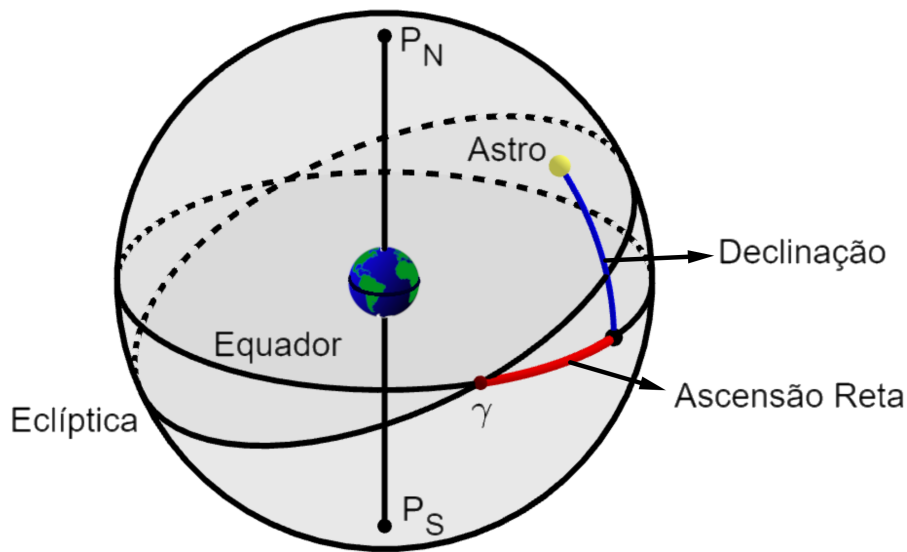


Figura 25: Ascensão Reta e a Declinação de um astro na Esfera Celeste.

de 0° a 360° . Veja a figura 26.

Dado que o sistema horizontal é um sistema local, mantendo-se fixo na Terra, as coordenadas azimute, altura e distância zenital são variáveis dependentes do local e do momento da observação. Essas coordenadas não são características constantes do astro, sendo influenciadas pela posição específica do observador na Terra e pelo instante preciso em que a observação é realizada.

4.2 Os Triângulos Astronômicos como Instrumentos de Análise Celestial

Na astronomia, a análise das relações geométricas e angulares entre os corpos celestes é muito útil para a determinação precisa de posições, movimentos e distâncias no universo. Um componente essencial para explorar tais complexidades é a utilização do Triângulos Astronômico, também chamado de Triângulo de Posição ou Triângulo Náutico.

O triângulo esférico PAZ na Esfera Celeste (figura 27) é composta pelos vértices: P , o polo do hemisfério do observador, A o astro e Z o Zênite representando o observador. Os lados do Triângulo Astronômico são: a colatitude do observador ($90^\circ - \varphi$), onde φ é a latitude local do observador; a codeclinação ou distância polar do astro ($90^\circ \pm |\delta|$), com

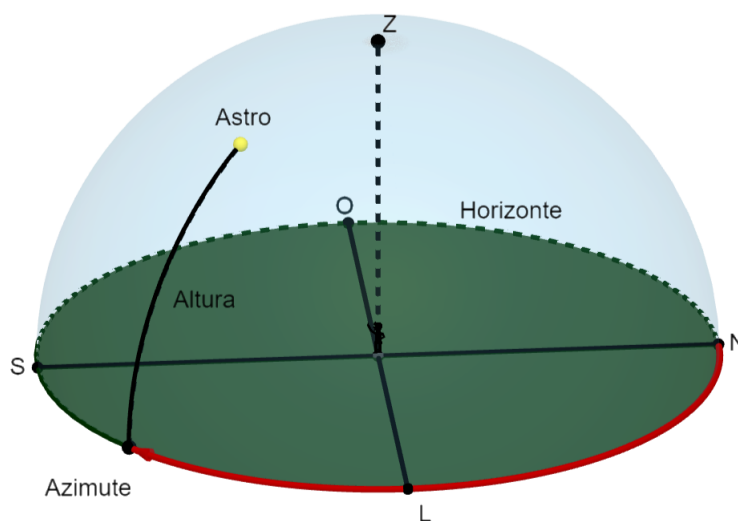


Figura 26: Altura e Azimute de um astro na Esfera Celeste.

δ representando a declinação de A , o sinal \pm é dado pois caso o astro esteja no mesmo hemisfério do polo do triângulo a declinação deverá ser subtraída e caso ao contrário, será somada; a coaltura ou distância zenital do astro ($90^\circ - a$), com a representando a altura de A .

Também destaca-se os ângulos internos do Triângulo de Posição: \hat{Z} é o ângulo zenital com vértice no Zênite e da origem ao Azimute; \hat{A} o ângulo paralático com vértice no astro; \hat{P} o ângulo no polo cuja medida é igual a H , ou seja o ângulo horário do astro.

Trabalhando com o triângulo esférico, podemos aplicar a fórmula fundamental, Proposição 9, no Triângulo Astronômico a fim de relacionar o ângulo horário H , altura a , declinação δ do astro e a latitude φ .

$$\cos(90^\circ - a) = \cos(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ \pm |\delta|) + \sin(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ \pm |\delta|) \cos H.$$

Primeiro desenvolvemos esta fórmula para $-|\delta|$:

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - a) &= \cos(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - |\delta|) + \sin(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ - |\delta|) \cos H, \\ \sin(a) &= \sin(\varphi) \sin(|\delta|) + \cos(\varphi) \cos(|\delta|) \cos(H). \end{aligned}$$

Obtendo a altura do astro em função das outras variáveis, podemos desenvolver essa

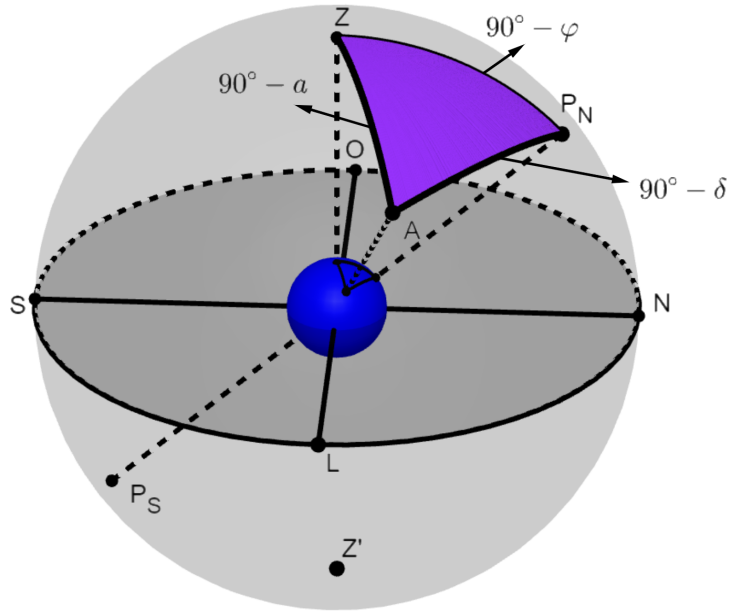


Figura 27: Triângulo Astrônomico PAZ do astro A na Esfera Celeste e o seu correspondente na superfície terrestre.

equação para isolar o ângulo horário e obter:

$$\begin{aligned}\cos(H) &= \frac{\sin(a) - \sin(\varphi) \sin(|\delta|)}{\cos(\varphi) \cos(|\delta|)} \\ \cos(H) &= \sin(a) \sec(\varphi) \sec(|\delta|) - \tan(\varphi) \tan(|\delta|).\end{aligned}$$

Agora desenvolvendo para o caso $+\delta$:

$$\begin{aligned}\cos(90^\circ - a) &= \cos(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ + |\delta|) + \sin(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ + |\delta|) \cos H, \\ \sin(a) &= -\sin(\varphi) \sin(|\delta|) + \cos(\varphi) \cos(|\delta|) \cos(H).\end{aligned}$$

Obtendo a altura do astro em função das outras variáveis, podemos desenvolver essa equação para isolar o ângulo horário e obter:

$$\begin{aligned}\cos(H) &= \frac{\sin(a) + \sin(\varphi) \sin(|\delta|)}{\cos(\varphi) \cos(|\delta|)} \\ \cos(H) &= \sin(a) \sec(\varphi) \sec(|\delta|) + \tan(\varphi) \tan(|\delta|).\end{aligned}$$

De acordo com as propriedades estudadas nos capítulos anteriores a respeito de triângulos esféricos, dados três elementos do Triângulo Astrônomico, é possível obter os outros três.

Uma boa aplicação naval do triângulo astronômico é a localização do observador no planeta terra, ou seja, sua latitude e longitude. Estas duas coordenadas estão ligadas com o lado $\widehat{PZ} = 90^\circ - \varphi$ e o ângulo horário em $\hat{P} = H$, conhecendo as coordenadas do astro na esfera celeste e resolvendo o Triângulo Astronômico para obter as coordenadas de Z , conseqüentemente obtendo as coordenadas do observador, embarcação ou aeronave.

Exemplo 9. Suponha que um observador no hemisfério sul esteja interessado em determinar sua posição exata em latitude e longitude a partir da observação de um objeto celeste, como referência, ele utilizará a estrela Betelgeuse situada na constelação de Orion, cujas coordenadas equatoriais são: Ascensão Reta $5h\ 55'$ e Declinação $\delta = 7^\circ\ 24' = 7,4^\circ$, supondo que a distância zenital do observador para a estrela seja de $43,6852^\circ$, ou seja, a altura do astro será $a = 46,3148^\circ$ e que o ângulo horário da estrela para este dado observador seja $H = 2h\ 16'48'' = 2,28h = 34,2^\circ$ (equivalente a afirmar que o meridiano local do observador está a $3h\ 47'$ de γ). Veja a figura 28.

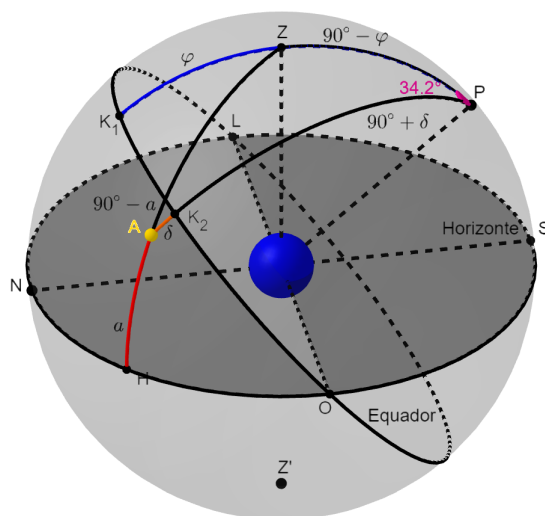


Figura 28: Triângulo astronômico formado pela estrela Betelgeuse A.

Primeiramente, vamos determinar a latitude φ do observador, sabendo que a latitude do Zênite que representa o observador na esfera celeste corresponde a sua latitude no planeta terra, note também que a declinação da estrela é positiva, enquanto que o polo elevado do observador é o sul, logo aplicaremos a fórmula:

$$\begin{aligned}\sin(a) &= -\sin(\varphi)\sin(|\delta|) + \cos(\varphi)\cos(|\delta|)\cos(H) \\ \sin(46,3148^\circ) &= -\sin(\varphi)\sin(7,4^\circ) + \cos(\varphi)\cos(7,4^\circ)\cos(34,2^\circ).\end{aligned}$$

Utilizando os recursos computacionais do “Geogebra” para resolver a equação acima, criando duas funções $f(x) = \sin(\varphi)\sin(7,4^\circ) + \cos(\varphi)\cos(7,4^\circ)\cos(34,2^\circ)$ e $g(x) = \sin(46,3148^\circ)$ e restringindo a análise para o intervalo de $[0, \pi/2]$ (a latitude varia apenas neste intervalo no Triângulo Astronômico) para obter a intersecção delas e assim poder visualizar o resultado da equação. Desta forma, a intersecção das duas funções são os pontos $A \approx (0,3578; 0,7231)$, conforme vemos na figura 29.

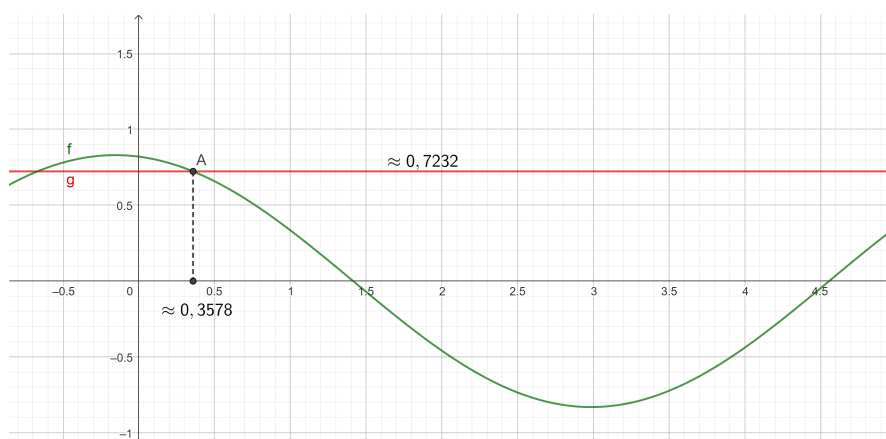


Figura 29: Encontrando o resultado da equação através da intersecção das funções $f(x)$ e $g(x)$.

Destarte, obtemos a solução da equação em radianos, $0,3578$, em graus temos $20,5^\circ$, como o observador está no hemisfério Sul, então esse valor será negativo. Logo, podemos afirmar que a sua latitude na terra é de $-20,5^\circ$.

Nos resta agora determinar a longitude do observador, para isso basta analisar o Ângulo Horário e a Ascensão Reta da estrela. Como a Betelgeuse está a $5h\ 55'$ do ponto vernal (sua ascensão reta), e que o meridiano de Greenwich corresponde ao mesmo círculo horário que o círculo horário que contém γ . Por outro lado, considerando que a hora que está sendo feita a observação é a meia noite e a estrela tem o ângulo horário em relação

ao observador de $2,28h$. Logo, podemos determinar a Ascensão Reta (AR) do observador

$$AR(Observador) = H - AR(Estrela) = 2h\ 16,8' - 5h\ 55' = -3h\ 38,2' \approx -3,64h = -54,6^\circ.$$

Concluimos então que a Longitude do observador é de $-54,6^\circ$. Como a Latitude é de $-20,5^\circ$, utilizando o “google maps” por exemplo, podemos colocar estas coordenadas e ver que o observador estará localizado em Campo Grande, a capital de Mato Grosso do Sul no Brasil.

Outra aplicação interessante da fórmula que obtemos do Triângulo Astronômico, é a determinação do Ângulo Horário de um astro no ocaso, isto é $a = 0^\circ$, dadas a declinação e a latitude do objeto celeste. Assim, aplicando a fórmula para o caso $-|\delta|$

$$\cos(H) = \sin(a) \sec(\varphi) \sec(|\delta|) - \tan(\varphi) \tan(|\delta|)$$

$$\cos(H) = \sin(0^\circ) \sec(\varphi) \sec(|\delta|) - \tan(\varphi) \tan(|\delta|)$$

$$\cos(H) = -\tan(\varphi) \tan(|\delta|).$$

Agora para o caso $+|\delta|$

$$\cos(H) = \sin(a) \sec(\varphi) \sec(|\delta|) + \tan(\varphi) \tan(|\delta|)$$

$$\cos(H) = \sin(0^\circ) \sec(\varphi) \sec(|\delta|) + \tan(\varphi) \tan(|\delta|)$$

$$\cos(H) = +\tan(\varphi) \tan(|\delta|).$$

Por conseguinte, sabendo o ângulo horário no ocaso, podemos saber quanto tempo o astro permanecerá visível para o observador, para isso, o ângulo horário encontrado deverá ser o dobro para a permanência no céu, pois o ângulo horário do astro até o ocaso é o tempo que ele leva para sair da altura máxima até ele se pôr no horizonte.

Exemplo 10. Utilizando o exemplo anterior, vamos determinar o ângulo horário da estrela Betelgeuse com coordenadas equatoriais: Ascensão Reta $5h\ 55'$ e Declinação $\delta = 7^\circ\ 24' = 7,4^\circ$, conhecendo a latitude em que ela é observada encontrada anteriormente com o valor de $\varphi = 20,5^\circ$. Vamos aplicar a fórmula acima para determinar seu ângulo

horário no ocaso. E conforme o exemplo anterior, utilizaremos o caso $+|\delta|$

$$\begin{aligned}\cos(H) &= +\tan(20,5^\circ)\tan(7,4^\circ) \\ H &= \arccos(\tan(20,5^\circ)\tan(7,4^\circ)) \\ H &\approx \arccos(0,37388 \cdot 0,12987) \\ H &\approx \arccos(0,0485557956) \\ H &\approx 87,2169^\circ.\end{aligned}$$

Agora duplicamos o ângulo horário:

$$2H = 2 \cdot 87,2169^\circ = 174,4338^\circ.$$

Para converter em hora basta fazer uma regra de três: onde 360° está para $24h$ e $174,4338^\circ$ está para x :

$$x = \frac{174,4338^\circ \cdot 24h}{360^\circ} = 11,62892h,$$

que é aproximadamente 11 horas e 37 minutos que a estrela ficará visível no céu.

Os Triângulos Astronômicos é uma ferramenta poderosa no estudo de posições dos astros com inúmeras aplicações além dos exemplos expostos acima.

5 Sequências Didáticas Para um Trabalho Intuitivo Com a Geometria Esférica

A geometria esférica, na educação básica, não é um tema abordado diretamente, como observamos na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [4], (Ministério da Educação, p 533, 2017), cuja a habilidade da qual chega mais próximo desta abordagem é EM13MAT509 que diz:

“Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.”

No Currículo de Referência de Mato Grosso do Sul para o ensino médio [7] (Secretaria de Estado de Educação, p.254, 2021) indica os seguintes objetos de conhecimentos a ser trabalhado com a habilidade citada acima

“Áreas de polígonos; Ângulos internos e externos aos polígonos; Superfície esférica; Transformações geométricas (isometrias e homotetias); Posição de figuras geométricas (tangente, secante, externa); Inscrição e circunscrição de sólidos geométricos. Noções básicas de cartografia (projeção cilíndrica e cônica).”

Podemos observar que a criação de mapas no planeta terra gera uma dificuldade pois temos uma superfície esférica que deverá ser projetada em uma superfície plana ou que seja isomorfa ao plano. Isomorfismo é um conceito matemático que descreve uma correspondência biunívoca entre dois conjuntos que preserva a estrutura entre eles. No contexto da cartografia, isso significa que a projeção de uma superfície esférica em outra superfície, como o plano, deve preservar as propriedades geométricas importantes, como ângulos, áreas ou distâncias, na medida do possível. Diferentes projeções cartográficas foram desenvolvidas ao longo do tempo para mitigar essas distorções, cada uma equilibrando compromissos entre preservar diferentes propriedades geométricas.

Além de trabalhos com mapas, ainda é possível encontrar a geometria esférica no estudo da astronomia, conforme é sugerido no documento de catálogo curriculares dos Itinerários Formativos de Ciências da Natureza e Suas Tecnologias produzido pela Secretaria de Estado de Educação do Mato Grosso do Sul, p.37, 2022. Neste documento é feito a seguinte sugestão didática

“O aplicativo Google Sky Maps permite visualizar, gratuitamente, a Lua, estrelas, constelações, galáxias e planetas, transformando o aparelho celular em uma janela para observar e conhecer o Cosmos, de forma fascinante, explorando, inclusive, o céu noturno. Orientados pelo professor, os estudantes devem direcionar o celular para o céu para que o Google Sky Maps mostre os objetos celestes daquela localização em tempo real. E é possível, ainda, usar a opção de zoom, permitindo que aproxime a imagem e chegue virtualmente bem perto dos planetas.”

Conforme Zabala (p. 198, 1998) expõe em seu livro a respeito de avaliação formativa:

O conhecimento que temos sobre como se produzem as aprendizagens revela a extraordinária singularidade destes processos, de tal maneira que cada vez é mais difícil estabelecer propostas universais que vão além da constatação destas diferenças e singularidades. O fato de que as experiências vividas constituam o valor básico de qualquer aprendizagem obriga a levar em conta a diversidade dos processos de aprendizagem e, portanto, a necessidade de que os processos de ensino, e especialmente os avaliadores, não apenas os observem, como os tomem como eixo vertebrador.

A fim de dar uma noção e despertar a curiosidade dos estudantes a respeito do funcionamento das projeções cartográficas e da determinação de posições dos astros na esfera é importante apresentar uma ideia da existência de outras geometrias além da euclidiana. Desta forma, será apresentado aqui uma sequência didática que poderá ser aplicada com os estudantes partindo de uma atividade intuitiva até a determinação das curvas geodésicas e da criação de triângulos esféricos.

Atividade 1: Qual a cor do Urso?

Duração: 1 aula.

Objetivo Específico: Apresentar uma situação problema que introduza a noção de uma Geometria não Euclidiana através do diálogo e interação entre professor e alunos para a resolução da atividade.

Desenvolvimento: A primeira atividade começará por uma situação problema.

Problema: Iniciando de uma determinada localização na Terra, um caçador percorreu 10 quilômetros para o sul, seguido por 10 quilômetros para o leste e, finalmente, 10 quilômetros para o norte, retornando ao ponto de origem. Nesse ponto, deparou-se com um urso. Qual é a cor do urso?

Os alunos poderão sentar-se em grupos e receberão um transferidor, tesoura, lápis, papel (o aluno poderá receber também uma bússola ou uma rosa dos ventos impressa no papel para ajudá-lo a se orientar) e uma bexiga. Assim, após apresentar a situação

problema, o professor irá sugerir aos estudantes fazerem um esboço no papel do caminho percorrido pelo caçador usando a escala de um centímetro para cada quilômetro percorrido.

Com o esboço feito, espera-se que a conclusão dos estudantes seja de que não foi possível chegar ao mesmo ponto de partida para encontrar o urso. Desta forma, o professor deverá sugerir aos estudantes fazer um recorte contornando o caminho do caçador e unir as pontas de partida com a chegada formando um caminho curvo que não está mais contido em um plano. Os estudantes debaterão sobre o que se parecerá este caminho, e conforme encaminhar o debate, o professor pedirá para encherem a bexiga e posicionarem o caminho sobre a bexiga e assim perceberem que a curva se encaixa naquela superfície.

Fazendo a analogia da bexiga com o planeta terra, os alunos deverão concluir que o caçador se encontra no polo norte e que a cor do urso deverá ser branca pois é um urso polar. De uma forma sutil, deverão concluir também, que dependendo da superfície, ao andar em uma determinada direção “reta”, o caminho percorrido poderá não estar contido em uma reta, caso a superfície em que se encontra o andarilho não seja plano.

Material utilizado: Transferidor, tesoura, lápis, papel (O aluno poderá receber também uma bússola ou uma rosa dos ventos impressa no papel para ajudá-lo a se orientar) e uma bexiga.

A próxima atividade é feita sobre a seguinte reflexão: qual a distância entre Nova York e Madrid? Ainda é possível indagar aos estudantes, de que maneira é feita essa medida? De acordo com Mühlbauer (2014) [8] “ Para o aluno usual do ensino básico esta última pergunta sequer faz sentido, uma vez que seus conhecimentos de Geometria costumam ater-se à chamada Geometria Euclidiana”. Sendo assim, a próxima atividade é feita pensando em como proporcionar essa resposta aos estudantes.

Atividade 2: O caminho mais curto entre duas cidades.

Duração: 2 aulas.

Objetivo Específico: Utilizar o software “Geogebra” para construir uma superfície esférica, círculos máximos, arcos de círculo e assim determinar uma geodésica nesta superfície.

Desenvolvimento: Na segunda atividade será realizado por meio de softwares como “Geogebra” e o “Google Earth” para os alunos visualizarem através da geometria dinâmica a construção de Geodésicas como o caminho mais curto entre dois pontos em uma superfície.

O professor iniciará apresentando o planeta terra no “Google Earth” ou com um globo terrestre questionando qual seria o menor caminho que um avião poderia viajar entre duas cidades situadas sobre um mesmo paralelo, como por exemplo Nova York - EUA e Madrid - Espanha localizados próximos ao paralelo $40^{\circ}N$. Utilizando o “Google Earth” ainda é possível criar um caminho entre essas duas cidades usando o recurso caminho. É importante deixar evidente as linhas imaginárias, assim ao questionar os estudantes qual o caminho seria o mais curto, normalmente a resposta será o caminho percorrido em cima do paralelo e não o que o software sugere, como vemos na figura 30.

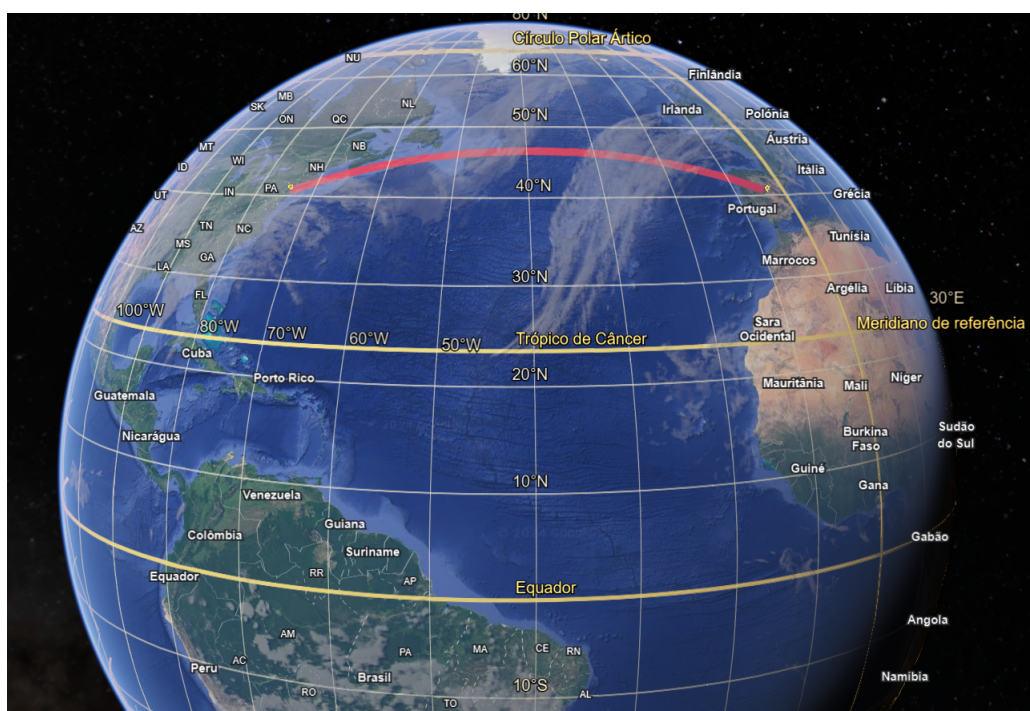


Figura 30: Caminho em vermelho de Nova York - EUA a Madrid - Espanha localizados próximos ao paralelo $40^{\circ}N$ feito com o “Google Earth”.

O professor poderá utilizar uma corda esticando em cima do paralelo e outra em cima do círculo máximo para mostrar que um é mais curto que o outro, ou ainda mais

interessante, utilizar o software “Geogebra”, para criar arcos e assim medir sobre uma esfera os possíveis caminhos que ligam dois pontos, até encontrar o menor deles. Segue assim o passo a passo para criar a geodésica na esfera pelo “Geogebra”.

Passo 1:

Com a ferramenta *Ponto* crie dois pontos, O na origem e R em $(4, 0, 0)$, em seguida, com a ferramenta *Esfera: Centro e Ponto* crie uma esfera com centro em O e raio OR .

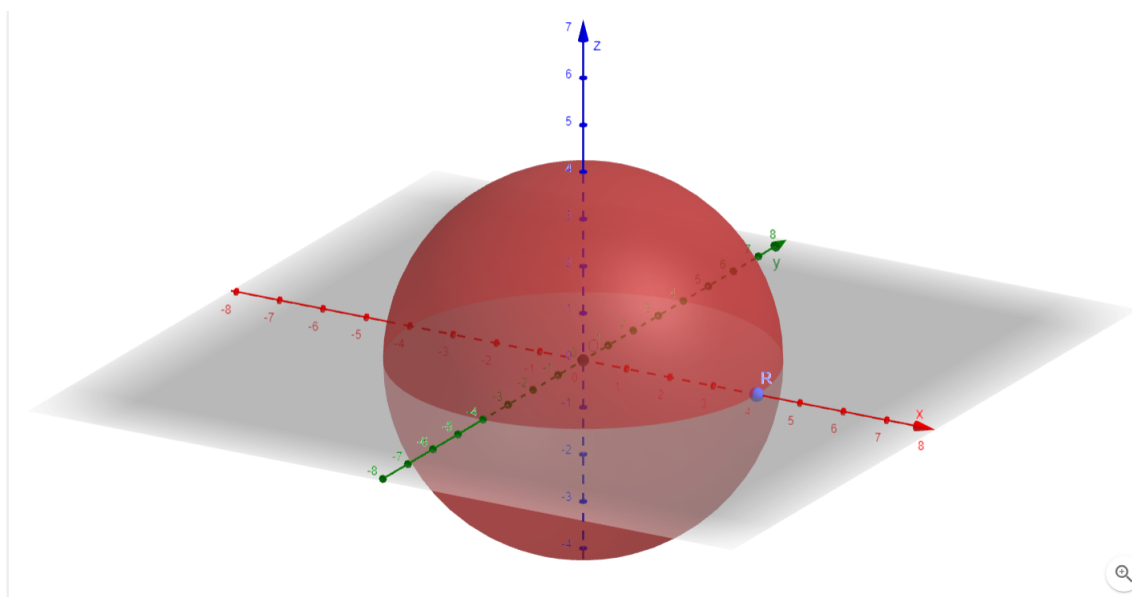


Figura 31: Janela de visualização - Passo 1.

Na janela de entrada aparecerá:

1^o linha: $O = \text{Interseção}(\text{EixoZ}, \text{EixoX});$

2^o linha: $R = (4, 0, 0);$

3^o linha: $a: \text{Esfera}(O, R).$

Passo 2:

Com a ferramenta *Ponto* crie dois pontos, A e B na esfera, de preferência na mesma altura, por exemplo $z = 2$, em seguida, com a ferramenta *Plano por três pontos* crie um plano p que contém os pontos O , A e B . Por fim usando a ferramenta *Interseção de Duas*

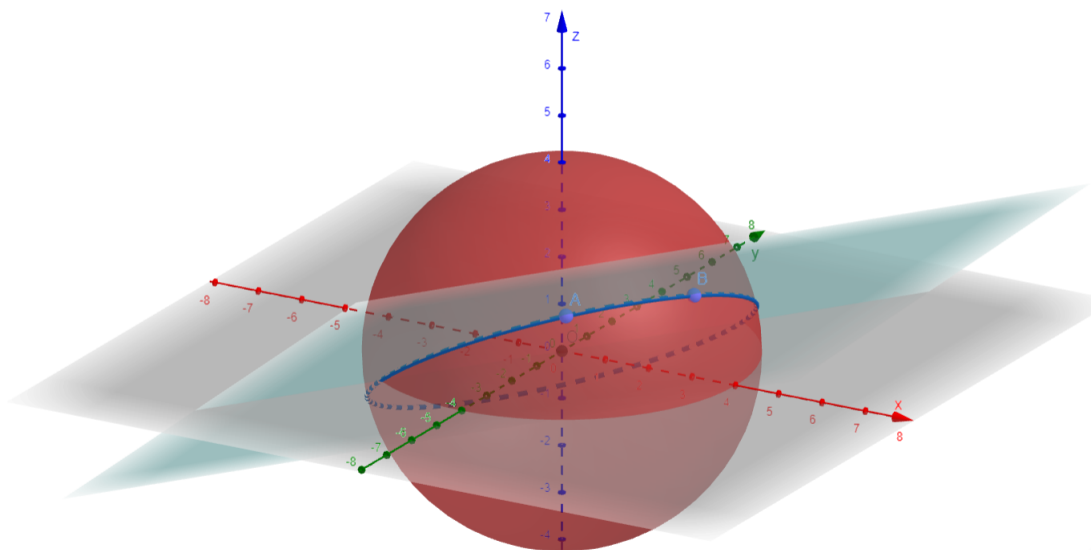


Figura 32: Janela de visualização - Passo 2.

Superfícies e selecione a Esfera a e o plano p criado para gerar a intersecção das duas superfícies.

Na janela de entrada aparecerá:

4^o linha: $A=\text{PontoEm}(a)$ saída = $(1.8, -2.96, 2)$;

5^o linha: $B=\text{PontoEm}(a)$ saída = $(3.41, -0.62, 2)$;

6^o linha: $p:\text{Plano}(O,A,B)$;

7^o linha: $c:\text{InterseçãoGeométrica}(a,p)$.

Passo 3:

Com a ferramenta *Arco Circular* selecione os pontos, O , A e B para criar um arco circular; com a ferramenta *Ponto* crie o ponto C no *eixo* z na mesma altura dos pontos A e B , por exemplo $z = 2$; em seguida, com a ferramenta *Plano por três pontos* crie um plano q que contém os pontos C , A e B . Por fim usando a ferramenta *Interseção de Duas Superfícies* e selecione a Esfera a e o plano q criado para gerar a intersecção das duas superfícies.

Na janela de entrada aparecerá:

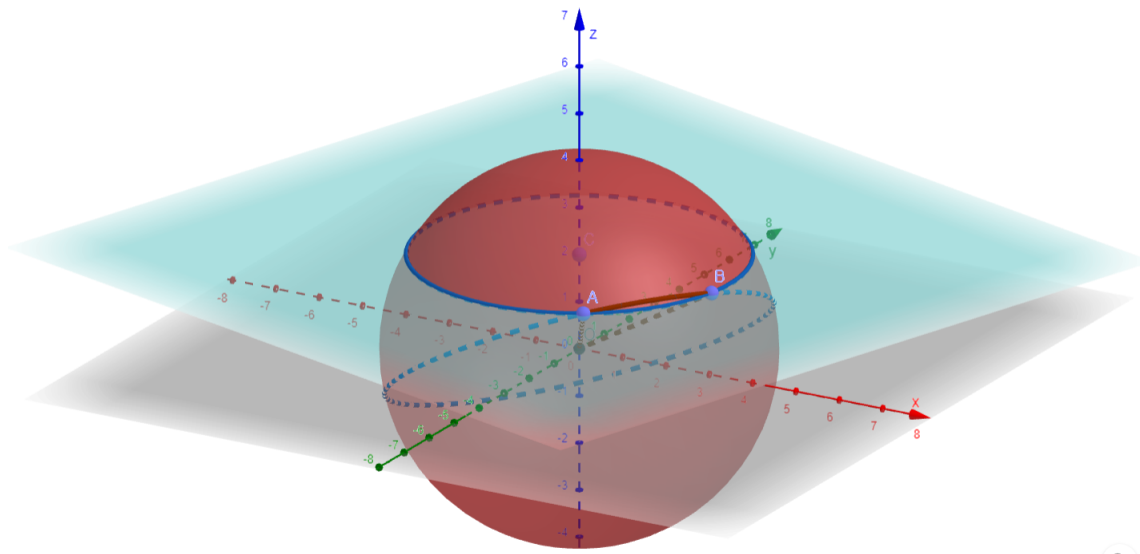


Figura 33: Janela de visualização - Passo 3.

8º linha: $d:\text{ArcoCircular}(O,A,B)$ saída = 2.9.

9º linha: $C=\text{PontoEixoZ}$ saída = (0, 0, 2).

10º linha: $q:\text{Plano}(C,A,B)$;

11º linha: $e:\text{InterseçãoGeométrica}(a,q)$.

Passo 4:

Oculte os planos p , q e o ponto R ; com a ferramenta *Arco Circular* selecione os pontos, C , A e B para criar um arco circular; Após isso você verá a medida do arco na janela de entrada, se possível entre nas configurações e aumente o número de casas decimais após a virgula; por fim compare a medida dos arcos \widehat{AB} com centro em O e \widehat{AB} com centro em C , varie o ponto C no *eixo - z* sem ultrapassar os limites da esfera e observe os valores assumidos no arco.

Na janela de entrada aparecerá:

12º linha: $f:\text{ArcoCircular}(C,A,B)$ saída = 2.92.

Os estudantes verão que quando o ponto C está na mesma altura que os ponto A e B , eles formam um plano paralelo com o plano formado pelos eixos xy , assim a interseção com a esfera é um círculo paralelo se considerarmos o equador da esfera o círculo

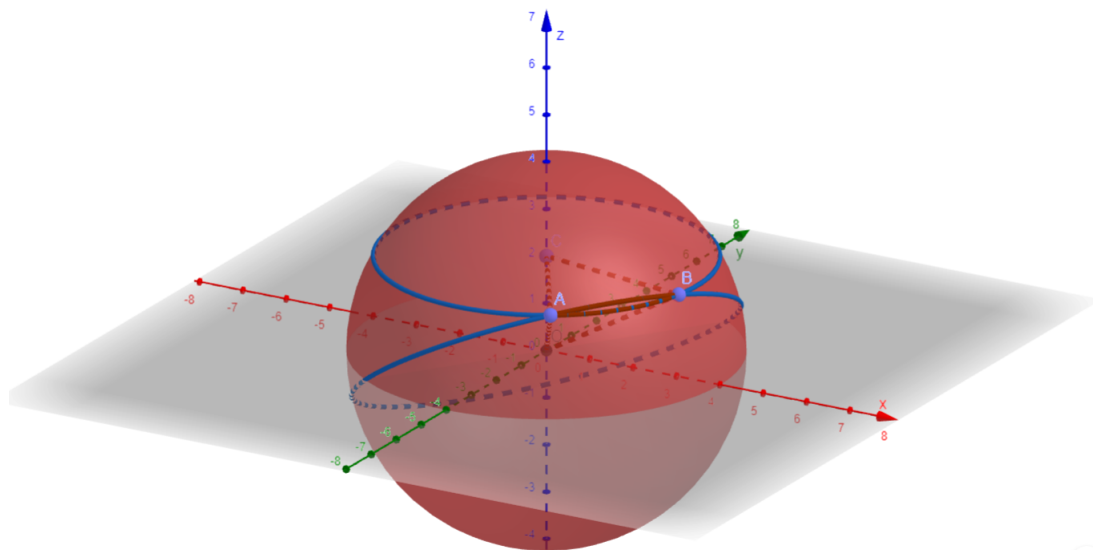


Figura 34: Janela de visualização - Passo 4.

máximo formado pela interseção do plano xy com a esfera. Notarão também que o círculo com centro em C na esfera é menor que o círculo com centro em O , a menos que C esteja sobreposto a O , essa é a oportunidade do professor introduzir o conceito de círculo máximo. Assim, se A e B forem duas cidades, ficará fácil notar que o caminho de A a B pelo paralelo é maior que pelo arco contido no círculo máximo que passa por AB . Com isso, o professor poderá definir aos estudantes a geodésica, ou seja, o conceito de reta na superfície esférica.

Ao final da aula os alunos salvarão os arquivos no botão gravar ou salvar no computador, com o nome *Superfície Esférica*. Caso o download seja feito sem uma extensão, o estudante deverá acrescentar *.ggb* no nome do arquivo para que o programa abra posteriormente este trabalho.

Material utilizado: Computadores ou smartphones que possuem os softwares “Geogebra Calculadora 3D” e “Google Earth”, Globo terrestre e barbante.

Atividade 3: Construindo ângulos e triângulos esféricos.

Duração: 1 aula.

Objetivo Específico: Utilizar o software “Geogebra” para construir uma superfície esférica, círculos máximos, arcos de círculo, triângulo esférico e ângulo esférico.

Desenvolvimento: Na terceira atividade será realizado por meio do software “Geogebra” para os alunos visualizarem através da geometria dinâmica a construção de retas e ângulos em uma superfície esférica.

Os estudantes abrirão o arquivo *Geometria Esférica.ggb* salvo na última aula e seguirão os seguintes passos:

Passo 1:

Oculte o plano q , o ponto C e o círculo gerado pela interseção de q com a esfera. Com a ferramenta *Ponto*, crie um ponto na superfície esférica próximo aos pontos A e B e dê o nome de P , com a ferramenta *Plano por três pontos* crie os planos r (passando pelos pontos O , A e P) e p_1 (passando pelos pontos O , B e P), após isso marque a interseção deles com a esfera com a ferramenta *Interseção de Duas Superfícies*.

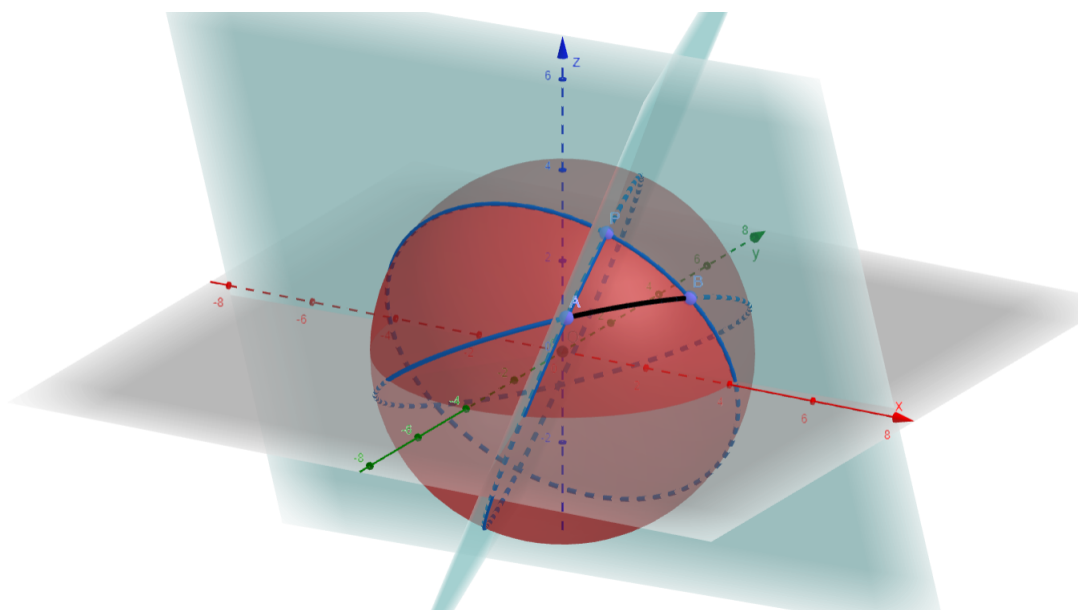


Figura 35: Janela de visualização da atividade 3 - Passo 1.

Na janela de entrada aparecerá:

13^o linha: $P = \text{PontoEm}(a)$ saída = $(1.8, -1.28, 3.34)$;

14^o linha: $r : \text{Plano}(O, A, P)$;

15^o linha: $p_1 : \text{Plano}(O, B, P)$;

16^o linha: g:InterseçãoGeométrica(a,r);

17^o linha: h:InterseçãoGeométrica(a,p₁).

Observe com os estudantes que os círculos máximos que passam pelos pontos A , B e P dividem a esfera em oito regiões, e que isso ocorre pois cada par de círculos máximos se intersectam em dois pontos antipodais. Um fato importante de ressaltar, é que se considerarmos o círculo máximo análoga a reta da geometria euclidiana, então o axioma 1 de euclides precisa ser modificado, para quaisquer dois pontos antipodais na esfera, passam apenas um único círculo máximo (“reta”), assim, precisa-se excluir os pontos que são diametralmente opostos na hora de definir uma reta.

Passo 2:

Oculte os planos r e p_1 . Com a ferramenta *Arco Circular* crie os arcos \widehat{AP} e \widehat{BP} com centro em O . Com a ferramenta *Reta Tangente*, selecione o arco \widehat{AP} e o ponto A em seguida, com a mesma ferramenta selecione \widehat{AB} e A criando as retas i e j . Faça o mesmo com no ponto B criando as retas l e m . Após isso, utilize a ferramenta *Ângulo* e selecione as reta i e j para criar o ângulo α , depois com o mesmo processo crie o ângulo β nas reta l e m (caso o ângulo não seja voltado para o interior do triângulo crie um ponto sobre l e outro sobre m para auxiliar, e depois selecione os três pontos no sentido horário). Com isso, estarão criados um triângulo esférico ABP e dois ângulos esféricos internos desse triângulo.

Na janela de entrada aparecerá:

18^o linha: k:ArcoCircular(O,A,P);

19^o linha: s:ArcoCircular(O,B,P);

20^o linha: Tangente(A,k) saída: i;

21^o linha: Tangente(A,d) saída: j;

22^o linha: Tangente(B,s) saída: l;

23^o linha: Tangente(B,d) saída: m;

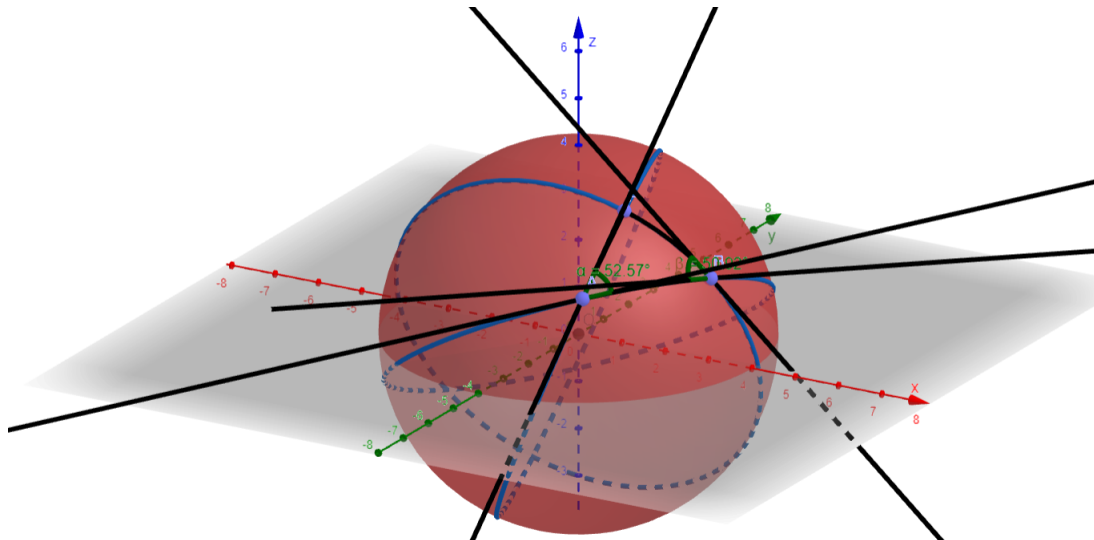


Figura 36: Janela de visualização da atividade 3 - Passo 2.

24^o linha: $\alpha: \hat{\text{Ângulo}}(i,j)$;

25^o linha: $D=\text{Ponto}(l)$;

26^o linha: $E=\text{Ponto}(m)$;

27^o linha: $\beta: \hat{\text{Ângulo}}(D,B,E)$.

Após ter criado os ângulos, oculte as retas auxiliares. O professor poderá, então, definir o que são ângulos esféricos como o ângulo da reta tangente aos arcos de círculo máximo no ponto de interseção deles. Ainda poderá ser mencionado que este ângulo corresponde ao ângulo diedro dos planos que contém esses círculos máximos.

O professor instruirá os estudantes a mover o ponto P até posicioná-lo no polo do círculo máximo que passa por AB , para que notem que os ângulos esféricos terão 90° , (caso não consiga posicionar, poderá ser criado uma reta perpendicular ao plano que contém os pontos ABO que passa por O , a interseção da reta com a esfera serão os polos procurados). Neste momento, deverá ser apontado o fato da geometria plana, que se uma transversal intersecta um par de retas em um ângulo de 90° , esse par de retas serão paralelas, o que não é verdade na geometria esférica, dada essa informação, o quinto axioma de euclides poderá ser mencionado e o professor poderá apontar a motivação da criação das geometrias não euclidianas.

Material utilizado: Computadores ou smartphones que possuem os softwares “Geogebra Calculadora 3D”.

Atividade 4: Diferenças e distorções na representação de mapas planos em comparação à superfície esférica.

Duração: 2 aulas.

Objetivo Específico: Utilizar o software “Geogebra” e o “Google Earth” para medir as distâncias entre duas cidades em um mapa plano e depois medir a distância destas mesmas duas cidades no globo terrestre para concluir que as representações planas do globo terrestre carregam algum erro de distorção.

Desenvolvimento: Na quarta atividade será realizado por meio do software “Geogebra” e o “Google Earth” para os alunos visualizarem as distorções de medidas causadas na representação de um mapa plano em comparação a distância real no globo terrestre.

O professor poderá utilizar um mapa impresso, ou baixar um mapa do site do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística IBGE e abrir no “Geogebra Geometria”, posicione a escala do mapa para que corresponda a unidade de medida do plano cartesiano em que o mapa está acima. Veja a figura 37

Note que no mapa estão destacadas as cidades de Chuí-RS, Oiapoque-AP e Natal-RN sob os pontos A , B e C respectivamente. Utilizando uma régua no mapa, ou pelo “Geogebra” o botão *Segmento*, ligue os três pontos. Note que no “Geogebra”, a escala está $1 u.m. : 240 km$.

Primeiramente vamos estimar a distância de Chui ao Oiapoque utilizando o mapa da seguinte maneira: note que o tamanho do segmento AB é igual a 17 unidades, ou seja convertendo pela escala utilizada teremos $17 \cdot 240 km = 4.080 km$, assim conclui-se que em linha reta, deverá ser percorrido aproximadamente $4080 km$. Agora verificaremos essa distância no “Google Earth”.

Conforme vemos na figura 38, a distância sobre o globo terrestre é de $4.159,12339 km$, maior do que o medido sobre um mapa plano, conforme é esperado, pois o caminho percorrido por um arco é maior que o caminho em linha reta, assim já notamos uma distorção que o mapa plano causa em relação ao real representação no globo.

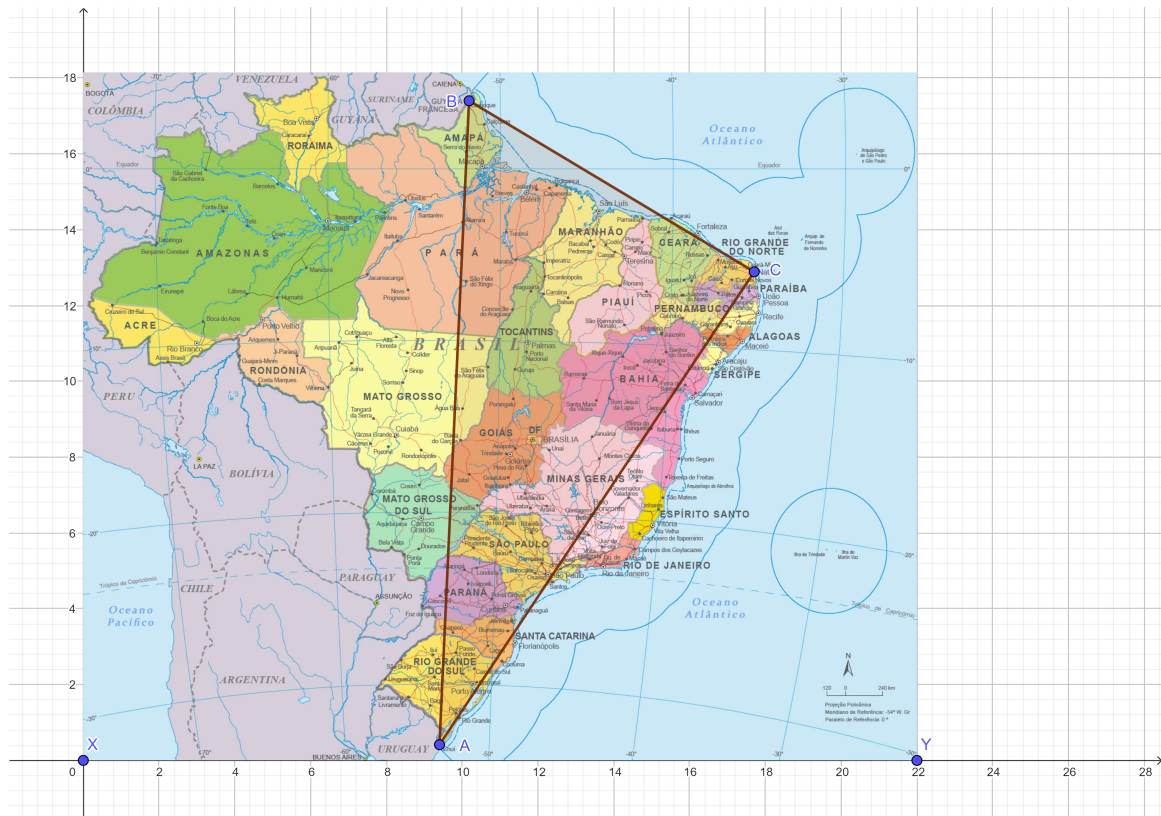


Figura 37: Mapa do Brasil destacando as cidades de Chuí-RS, Oiapoque-AP e Natal-RN sob os pontos A, B e C respectivamente. Fonte: www.ibge.gov.br, acesso em Janeiro de 2024.

Em seguida podemos ainda analisar a área, formando um triângulo com essas duas cidades e Natal-RN, com a ferramenta *Polígono* no “Geogebra” crie o polígono *ABC*, caso o professor esteja utilizando um mapa, precisará calcular a área do triângulo fazendo as medidas. Lembre-se, cada unidade de medida quadrada no “Geogebra” corresponde a uma área no mapa de $240^2 = 57.600 \text{ km}^2$, assim o polígono no “Geogebra” apresentará como saída a área de 65,67 unidades de medida quadrada, convertendo pela escala, obtemos $65,67 \cdot 57.600 \text{ km}^2 = 3.787.592 \text{ km}^2$. Agora utilizando o “Google Earth”, com a ferramenta caminho selecionada, crie um polígono ligando essas três cidades para visualizar a área e o perímetro deste triângulo esférico conforme vemos na figura 39.

No globo terrestre, o triângulo esférico possui uma área de $4.018.177,478451 \text{ km}^2$, novamente, verificamos uma distorção onde o triângulo esférico é uma superfície maior que o triângulo plano construído através do mapa.

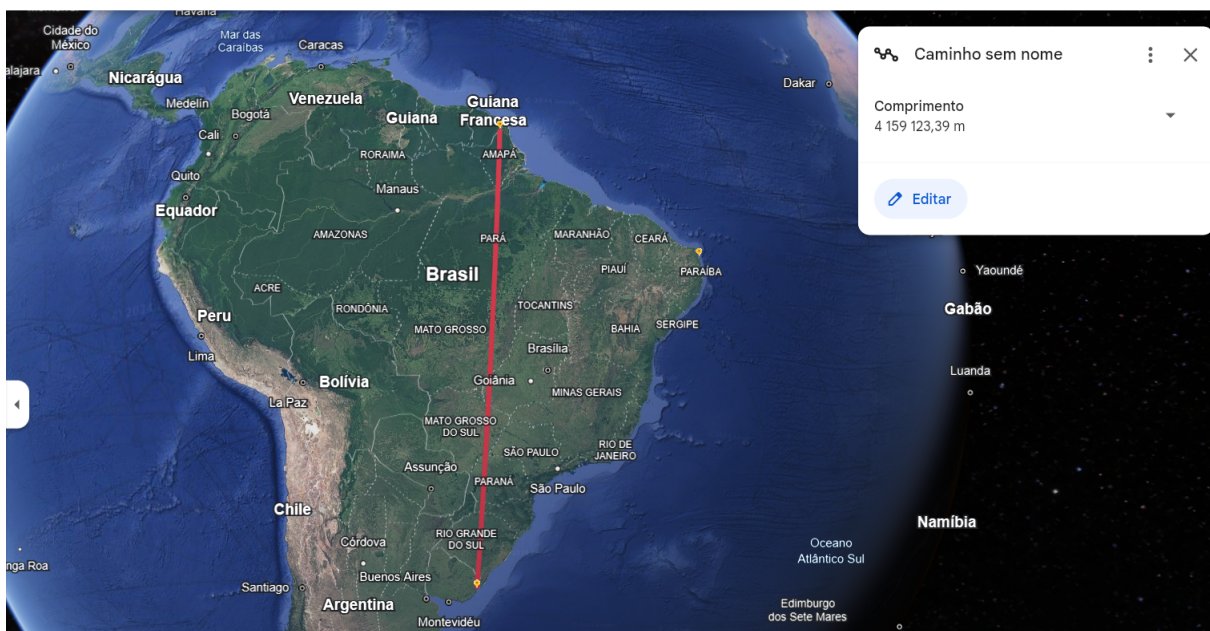


Figura 38: Mapa do Brasil no “Google Earth” ligando Chuí-RS a Oiapoque-AP.

Assim, com esta atividade, os estudantes poderão ter uma noção mais intuitiva de que os mapas em papel, especialmente aqueles que são planos ou representações bidimensionais de uma superfície tridimensional como a Terra, geralmente contêm distorções. Isso ocorre porque na topologia diferencial, o Teorema de Gauss-Bonnet estabelece uma relação entre a curvatura total de uma superfície e a soma dos ângulos de um triângulo formado nessa superfície. Isso impõe restrições à representação precisa de triângulos em superfícies curvas, como a esférica.

Esta aula poderá ser feita de maneira interdisciplinar com a disciplina de Geografia podendo se aprofundar sobre os tipos de representações cartográficas, ou ainda, dependendo do nível das turmas, poderá ser apresentado a relação trigonométrica dos triângulos esféricos e a área do triângulo esférico para que os cálculos acima sejam feitos a mão, dependendo da disponibilidade de tempo e interesse da turma.

Material utilizado: Computadores ou smartphones que possuem os softwares “Geogebra” e “Google Earth”, mapa do Brasil, régua e calculadora.

Atividade 5: Conhecendo a Esfera Celeste e encontrando a posição dos astros.

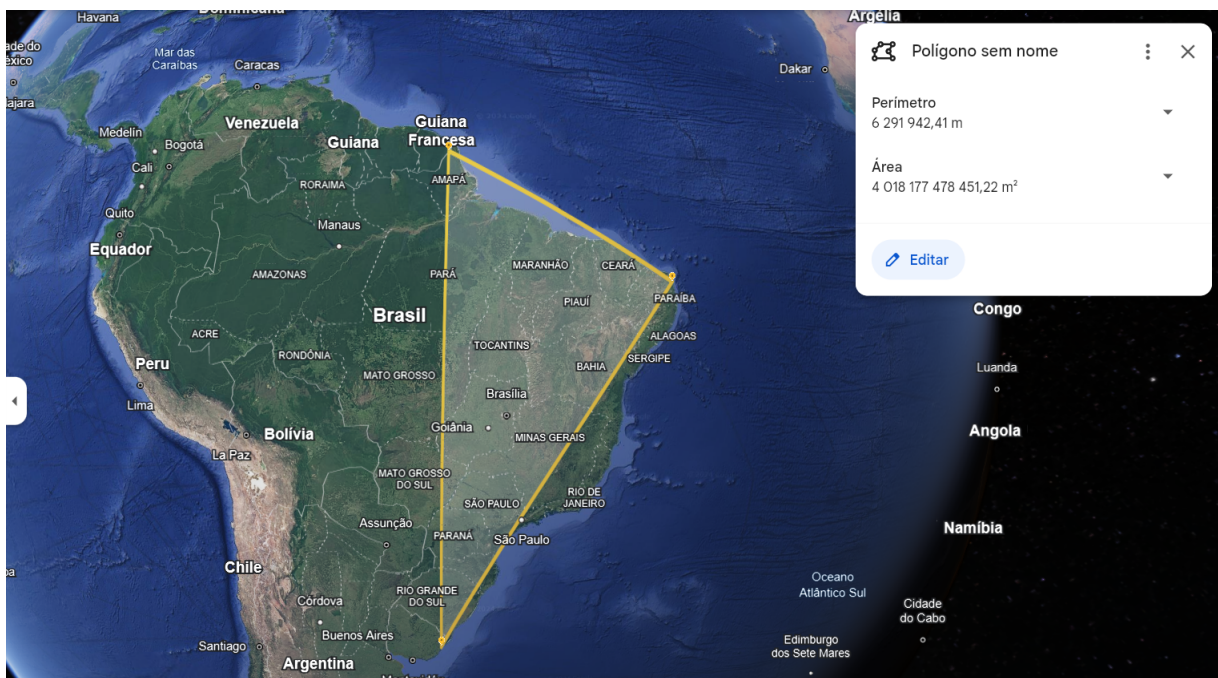


Figura 39: Mapa do Brasil no “Google Earth” formando um triângulo esférico com vértices nas cidades de Chuí-RS, Oiapoque-AP e Natal-RN.

Duração: 4 aulas.

Objetivo Específico: Utilizar o software “Sky Map” para conhecer a esfera celeste e medir a posição de astros através de um sistema de coordenadas esféricas.

Desenvolvimento: Nesta última atividade, poderá ser trabalhada em um itinerário formativo ou em um projeto interdisciplinar de astronomia em conjunto com a disciplina de Física. Assim, no primeiro momento, será feita uma análise histórica sobre o modelo de Ptolomeu até os dias de hoje a respeito da posição e movimento dos astros no universo. Após isso, será feita a definição de esfera celeste e os principais pontos, planos e círculos.

Em seguida, será apresentado o Software de smartphone “Sky Map”, onde será instalado nos dispositivos dos estudantes e calibrado para assim poder ter uma visão na tela do celular das constelações, galáxias, planetas, estrelas, do sol e da lua, e o mais incrível, na direção em que o astro se encontram no céu. Analisando mais profundamente o aplicativo, também é possível “viajar no tempo” e visualizar a posição dos astros em outros dias do calendário.

Após os estudantes estarem familiarizados com o software, será possível apresentar

o conceito de coordenadas esféricas, e o Sistema Horizontal de localização dos astros na esfera celeste. O professor poderá utilizar ferramentas como bússola (pode ser encontrado no próprio smartphone), astrolábio (ou até mesmo fabricar um com materiais acessíveis) ou ainda improvisar com um transferidor.

Material utilizado: Smartphones que possuem o software “Sky Map”, bússola, astrolábio ou transferidor.

6 Apêndice

Ao trabalhar com a geometria esférica, é necessário criar uma curva que se comporte como uma reta nesta superfície. Por conseguinte definimos que tal curva é o círculo máximo da esfera, que é justificado pela definição de geodésica. Sabemos que o menor caminho entre dois pontos é o segmento de reta, isto é, o segmento de reta atende àquela definição no plano. Por outro lado, na superfície esférica, o menor caminho entre dois pontos é o menor arco de círculo máximo que os liga, este fato é bem justificado pelo cálculo variacional.

Pereira, Miranda, Carrasco (2019) afirma que:

Os problemas de máximo e mínimo são corriqueiros na vida cotidiana, por exemplo, quando se quer encontrar o caminho com menor distância entre dois lugares para se caminhar uma menor distância, dentre vários outros problemas mais elaborados. Para esse exemplo específico não é necessário o uso de matemática avançada, porém, quanto mais complexidades são adicionadas aos problemas, mais ferramentas matemáticas são necessárias para a resolução, exata ou aproximada. Para simplificar estes processos, surgem os métodos para o cálculo de máximos e mínimos das funções.

Iniciamos com um teorema que será importante para determinar uma equação que resolve o problema de achar curvas mínimas em superfícies, que é conhecido como a equação de Euler-Lagrange.

Teorema 6. *Considere uma função $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ e suponha que a derivada*

parcial

$$\frac{\partial f}{\partial p}(x, p)$$

existe e é contínua no domínio de f e se, para todo $p \in [c, d]$, existe a integral

$$F(p) = \int_a^b f(x, p) dx,$$

então $F(p)$ é diferenciável e

$$F'(p) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial p}(x, p) dx.$$

Demonstração. Iniciamos com a seguinte igualdade:

$$\frac{F(p+h) - F(p)}{h} = \int_a^b \frac{f(x, p+h) - f(x, p)}{h} dx.$$

Subtraímos de ambos os lados

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial p}(x, p) dx$$

ficando:

$$\frac{F(p+h) - F(p)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial p}(x, p) dx = \int_a^b \left(\frac{f(x, p+h) - f(x, p)}{h} - \frac{\partial f}{\partial p}(x, p) \right) dx. \quad (5)$$

Pelo Teorema do Valor Médio para funções reais, nos garante que existe $\theta \in (0, 1)$ (o que garante que $\theta h \in (0, h)$), tal que:

$$\frac{f(x, p+h) - f(x, p)}{h} = \frac{\partial f}{\partial p}(x, p + \theta h).$$

Substituindo a igualdade acima na equação (5), obtemos

$$\frac{F(p+h) - F(p)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial p}(x, p) dx = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial p}(x, p + \theta h) - \frac{\partial f}{\partial p}(x, p) \right) dx. \quad (6)$$

Como $\partial f/\partial p$ é contínua e $[a, b] \times [c, d]$ é compacto, isso nos garante que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, de modo que

$$|h| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial p}(x, p + \theta h) - \frac{\partial f}{\partial p}(x, p) \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \quad (7)$$

Dado também o fato que, para quaisquer $x \in [a, b]$,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

é verdadeiro, então podemos escrever

$$\left| \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial p}(x, p + \theta h) - \frac{\partial f}{\partial p}(x, p) \right) dx \right| \leq \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial p}(x, p + \theta h) - \frac{\partial f}{\partial p}(x, p) \right| dx,$$

e utilizando 7, resulta na inequação

$$\left| \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial p}(x, p + \theta h) - \frac{\partial f}{\partial p}(x, p) \right) dx \right| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx < \varepsilon. \quad (8)$$

Desta forma, de (6) e (8), podemos concluir que

$$|h| < \delta \Rightarrow \left| \frac{F(p+h) - F(p)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial p}(x, p) \right| < \varepsilon.$$

Isto equivale a definição formal de limite e portanto

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{F(p+h) - F(p)}{h} \right) = F'(p) = \int_a^b \frac{\partial f(x, p)}{\partial p} dx.$$

□

A equação de Euler-Lagrange surge como resposta da seguinte questão: suponha a existência de um função $y = y(x)$ duas vezes diferenciável, e satisfaz as condições $y(a) = y_1$, $y(b) = y_2$ e que minimiza a integral

$$I = \int_a^b f(x, y, y') dx,$$

qual equação diferencial que $y(x)$ satisfaz essa integral?

Dada a função f , duas vezes diferenciável com respeito às variáveis x , y e y' ou a quaisquer combinações delas. Define-se a família de funções de um parâmetro,

$$Y(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x),$$

$$Y'(x) = y'(x) + \varepsilon \eta'(x),$$

onde $\eta(x)$ é uma função arbitrária, diferenciável e satisfaz $\eta(a) = \eta(b) = 0$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}$. A função $Y(x)$ é usada para criar uma família de funções em torno de $y(x)$.

Podemos observar, que dadas as condições anteriores, nos garante que $Y(a) = y(a)$ e $Y(b) = y(b)$, ou seja, todas as funções $Y(x)$ possuem os mesmos extremos que $y(x)$. Além disso, $Y(x)$ coincide com $y(x)$ se tomarmos $\epsilon = 0$. Desta forma, escolhida uma função $\eta(x)$, tomamos uma vizinhança do parâmetro ϵ , seja $-\epsilon_0 < \epsilon < \epsilon_0$, cujo módulo $|\epsilon\eta(x)|$ é arbitrariamente pequeno para qualquer x entre a e b .

Escolhendo uma função $\eta(x)$ e trocando $Y(x)$ e $Y'(x)$ em f , teremos

$$I(\epsilon) = \int_a^b f(x, Y, Y') dx.$$

Essa integral é claramente uma função de ϵ , uma vez que o parâmetro se torna arbitrário. Além disso, a escolha de $\eta(x)$ não importa, pois se $\epsilon = 0$, $Y(x)$ coincide com $y(x)$.

Uma condição necessária para que $I(\epsilon)$ seja a curva que minimiza a distância entre os dois pontos quando $\epsilon = 0$ é que o resultado da derivada de I em relação a ϵ para $\epsilon = 0$ seja nulo, isto é $I'(0) = 0$.

Desta maneira, utilizaremos o Teorema 6 obtendo o seguinte resultado

$$I'(\epsilon) = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \epsilon} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{\partial Y'}{\partial \epsilon} \right) dx = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \eta + \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta' \right) dx.$$

Trocando ϵ por zero (lembrando que $\epsilon = 0 \Rightarrow Y(x) = y(x)$), o resultado acima se torna a equação:

$$I'(0) = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' \right) dx = 0. \quad (9)$$

Integrando por partes a segunda parcela da integral acima, lembrando que $\eta(a) = \eta(b) = 0$,

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} dx = \left[\frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \right]_a^b - \int_a^b \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx \quad (10)$$

$$= - \int_a^b \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx. \quad (11)$$

Assim, substituindo (11) em (9) obtemos

$$I'(0) = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta dx = 0.$$

Devido a $\eta(a) = \eta(b) = 0$ e que a integral acima precisa valer para toda a função η escolhida, para que isso ocorra, será necessário que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (12)$$

Enfim, encontrando a Equação (12), conhecida como a equação Euler-Lagrange. Deve-se observar que a condição de que $I'(0) = 0$ não é o suficiente para termos um mínimo de $I(\epsilon)$, pois, além do mínimo, podemos ter um ponto de máximo ou de inflexão. Desta forma, chamamos de extremo o valor de $I(0)$ e a função $y(x)$ que fornece o extremo é a função extremal.

Agora que encontramos o método para determinar curvas em superfícies que produzem um valor estacionário para a distância percorrida (a função extremal), podemos aplicá-lo na superfície esférica para achar um candidato a curva mínima entre dois pontos

Exemplo 11. *Seja a esfera de raio r , determinar o menor caminho entre dois pontos contidos nesta superfície.*

Resolução:

O elemento de curva no espaço \mathbb{R}^3 é dado por $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, considerando o sistema de coordenadas esféricas onde $x = r \cos(\theta) \sin(\varphi)$, $y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$ e $z = r \cos(\varphi)$. Podemos reescrever o elemento de linha como

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Como, na superfície esférica $dr = 0$, então, podemos escrever

$$ds = r d\theta \sqrt{1 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\theta} \right)^2}.$$

Desta forma, o comprimento da curva será

$$L = \int_s ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} r \sqrt{1 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\theta} \right)^2} d\theta.$$

Seja $d\varphi/d\theta = \varphi'$ e $f = r \sqrt{1 + \sin^2 \theta (\varphi')^2}$.

Aplicando a Equação de Euler-Lagrange (12)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi'} \right) &= 0 \\ \frac{d}{d\theta} \left(r \frac{1}{2} \cdot \frac{2\varphi' \sin^2 \theta}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta \varphi'^2}} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\sin^2 \theta \varphi'}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta \varphi'^2}} &= k \text{ constante} \\ \Rightarrow \sin^2 \theta \varphi'^2 (\sin^2 \theta - k^2) &= k^2\end{aligned}$$

Desta forma, obtemos a expressão

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{d\theta} &= \frac{k}{\sin \theta \sqrt{\sin^2 \theta - k^2}} \\ \int d\varphi &= \int \frac{k}{\sin \theta \sqrt{\sin^2 \theta - k^2}} d\theta \\ \Rightarrow \varphi &= \int \frac{k \csc^2 \theta d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \csc^2 \theta}} + \bar{k}.\end{aligned}$$

Fazendo uma troca de variável

$$\begin{aligned}u &= \frac{k}{\sqrt{1 - k^2}} \cot \theta \\ du &= -\frac{k}{\sqrt{1 - k^2}} \csc^2 \theta d\theta\end{aligned}$$

e substituindo (lembrando que $\csc^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$), teremos

$$\begin{aligned}\varphi &= -\sqrt{1 - k^2} \int \frac{du}{\sqrt{1 - k^2} \sqrt{1 - u^2}} + \bar{k} \\ \Rightarrow \varphi &= \arccos u + \bar{k} \\ \Rightarrow \varphi &= \arccos \left(\frac{k}{\sqrt{1 - k^2}} \cot \theta \right) + \bar{k}.\end{aligned}$$

Por fim, é possível escrever

$$\begin{aligned}\frac{k}{\sqrt{1 - k^2}} \cot \theta &= \cos(\varphi - \bar{k}) \\ \frac{k}{\sqrt{1 - k^2}} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} &= \cos \varphi \cos \bar{k} + \sin \varphi \sin \bar{k} \\ \Rightarrow R \sin \theta \frac{\cos \theta}{\sin \theta} &= R \sin \theta \frac{\sqrt{1 - k^2}}{k} (\cos \varphi \cos \bar{k} + \sin \varphi \sin \bar{k}) \\ R \cos \theta &= AR \sin \theta \cos \varphi + BR \sin \theta \sin \varphi.\end{aligned}$$

Portanto, é possível reescrever a equação acima como $z = Ax + By$ fazendo a troca de variáveis esféricas para a cartesiana. Por conseguinte, esta equação descreve um plano que passa pela origem, e como a interseção deste plano com a esfera gera um círculo máximo, então o menor caminho estará contido nesta curva, basta tomar o menor arco de círculo máximo que liga os dois pontos.

7 Considerações Finais

Ao longo deste trabalho, desenvolveu-se uma compreensão da Geometria Esférica, Trigonometria Esférica e a Esfera Celeste, além de uma aplicação pedagógica em trabalhos interdisciplinares e contextualizados. A interconexão desses conceitos revelou não apenas a complexidade da geometria em uma superfície esférica, mas também a sua importância nas ciências astronômicas e em diversas outras aplicações.

Vemos que no decorrer da história, em uma tentativa de tornar a Geometria Euclidiana baseada em um sistema de axiomas mais trivial, negando o quinto postulado, resultou na criação de novas geometrias como a esférica (dadas algumas adaptações), que nos aprofundamos e vislumbramos o quanto é presente, seja na terra, na superfície do nosso planeta, seja no céu pela observação de astros. Ainda por cima, analisamos o comportamento de entes geométricos como o triângulo esférico, que não só possuem peculiaridades, mas também carregam similaridades com a geometria plana, como a desigualdade triangular por exemplo.

A Trigonometria Esférica emergiu como uma ferramenta poderosa para descrever e analisar relações angulares em superfícies curvas, resolver problemas que envolvam triângulos esféricos, ou até mesmo outros polígonos desta superfície. As aplicações da geometria esférica revelaram-se indispensáveis em áreas como navegação, cartografia, astronomia e até mesmo em atividades do dia a dia que envolvem a compreensão de direções e distâncias em superfícies esféricas.

A elaboração da sequência didática sobre geometria esférica buscou criar um ambiente de aprendizagem envolvente, oferecendo aos alunos as ferramentas necessárias para desvendar os segredos da geometria em um espaço não convencional como a esfera. A abordagem prática e contextualizada adotada na sequência não apenas estimula a intuição dos alunos, mas também destaca as aplicações práticas da geometria esférica em nosso cotidiano e na exploração do cosmos.

Em última análise, esta dissertação não apenas abordou conceitos teóricos, mas também delineou estratégias pedagógicas que buscam tornar a geometria esférica mais acessível e envolvente para os estudantes do ensino médio. A integração de abordagens práticas,

exemplos do mundo real e a compreensão profunda da trigonometria esférica formam a base para uma educação matemática mais significativa e aplicável.

Concluimos, assim, que a Geometria Esférica não é apenas uma área de estudo abstrata, mas uma disciplina vibrante que desempenha um papel crucial na compreensão e exploração do nosso mundo e do universo que o cerca. Ao adotarmos uma abordagem inovadora e centrada no aluno, estamos pavimentando o caminho para a formação de mentes críticas e curiosas, capazes de enfrentar os desafios com uma base sólida e aplicável em geometria além da Euclidiana.

Referências

- [1] ABREU, S. M., *Geometria Esférica e Trigonometria Esférica Aplicadas à Astronomia de Posição*. São João del-Rei, 2015. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ - PROFMAT, Campus Alto Paraopeba - CAP, 2015.
- [2] BARBOSA, L. S., *Investigando com o GeoGebra 3D: o método axiomático em atividades de geometria espacial e esférica*. Rio Grande, 2017, 143 f.. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande - FURG, Programa de Pós-graduação em Matemática, Rio Grande/RS, 2017.
- [3] BICUDO, I., *Os elementos/Euclides; tradução e introdução de Irineu Bicudo*, São Paulo, UNESP, 2009.
- [4] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2017.
- [5] COUTINHO, L., *Trigonometria esférica; a matemática de um espaço curvo*, 1.ed, Rio de Janeiro: Interciência, 2015.
- [6] KLINE, M. *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*. [S.l.]: Oxford University Press USA, 1990. v. 3
- [7] MATO GROSSO DO SUL. Secretaria de Estado de Educação. *Currículo de Referência de Mato Grosso do Sul: Ensino Médio e Novo Ensino Médio*. Campo Grande, MS: SED, 2021.
- [8] MÜLHBAUER, M., *Cartografia: uma introdução aos conceitos de geometria não euclidiana na educação básica*. Curitiba, 2014, 70 f.. Dissertação (mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná - PROFMAT, 2014.
- [9] NEVES, M. C. D., *Do Mundo Fechado da Astronomia na Antiguidade à Cosmologia do Universo Fechado do Big Bang: Revisitando velhos e novos dogmas da ciência astronômica*. In: Cibelle Celestino Silva. (Org.). *Estudos de história e filosofia das ciências: subsídios para aplicação no ensino*. 1.ed, São Paulo: Livraria da Física, 2006, v. 1, p. 139-166.

- [10] PATAKI, I. Geometria esférica para a formação de professores: uma proposta interdisciplinar. São Paulo, 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.
- [11] PEREIRA, T. L. B.; MIRANDA, F. B.; CARRASCO, C. G.. *Uma introdução ao Cálculo Variacional e ao Método de Rayleigh-Ritz com aplicações em Python*. 2019. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual de Goiás.
- [12] SILVA, W. D.. *Uma introdução à Geometria Esférica*. Rio Claro 2015, 47 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Departamento de Matemática - IGCE/UNESP, 2015.
- [13] ZABALA, Antoni. *A Prática Educativa - Como ensinar*. Porto Alegre - RS: Artmed, 1998.