



**ELISÂNGELA RIBEIRO SILVA COSTA**

**UMA PROPOSTA DE ENSINO DE ANÁLISE  
COMBINATÓRIA PARA ALUNOS DO ENSINO  
MÉDIO**

**LAVRAS- MG**

**2013**

**ELISÂNGELA RIBEIRO SILVA COSTA**

**UMA PROPOSTA DE ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA  
ALUNOS DO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, área de concentração em Matemática Profissional, para a obtenção do título de Mestre.

Orientador

Dr. Mario Henrique Andrade Claudio

**LAVRAS - MG**

**2013**

**Ficha Catalográfica Elaborada pela Coordenadoria de Produtos e  
Serviços da Biblioteca Universitária da UFLA**

Costa, Elisângela Ribeiro Silva.

Uma proposta de ensino de análise combinatória para alunos do  
Ensino Médio / Elisângela Ribeiro Silva Costa. – Lavras : UFLA,  
2013.

107 p. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2013.

Orientador: Mario Henrique Andrade Cláudio.

Mestrado Profissional em Matemática.

Bibliografia.

1. Análise combinatória - Resolução de problemas. 2. Análise  
combinatória - Ensino Médio. 3. Formação de professores. I.  
Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD – 373.112

**ELISÂNGELA RIBEIRO SILVA COSTA**

**UMA PROPOSTA DE ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA  
ALUNOS DO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, área de concentração em Matemática Profissional, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 09 de setembro de 2013.

Dr. Nilton Vieira Junior                      IFMG/Formiga

Dr. Ricardo Edem Ferreira                  UFLA

Dra. Ana Cláudia Pereira - Suplente      UFLA

Dr. Mario Henrique Andrade Claudio  
Orientador

**LAVRAS - MG**

**2013**

## AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida e sem o qual nada é possível.

Ao meu marido Francisco e minhas filhas Raquel e Mariana, que sempre estiveram ao meu lado, com carinho, amor e compreensão em minhas ausências.

A meus pais, José Aureliano e Rosa Adelina, pelo amor, dedicação e incentivo constante ao estudo.

Ao Prof. Dr. Mario Henrique Andrade Claudio, meu orientador, pelos ensinamentos, sugestões e comentários, que tornaram possível a conclusão deste trabalho.

À Universidade Federal de Lavras (UFLA) e ao Departamento de Ciências Exatas (DEX), pela oportunidade concedida para realização do Mestrado.

À Coordenação e Aperfeiçoamento de Pessoal em Nível Superior (CAPES), pela concessão de bolsa de estudos.

Aos professores do PROFMAT, turma 2011, UFLA, por partilharem seus conhecimentos.

Às minhas avós, Ruth e Dagmar pelo exemplo de vida.

Aos colegas de mestrado, especialmente Amanda, Lúcia, Gilberto e Maurício pelo companheirismo e apoio nos momentos de estudo.

À SBM, por me proporcionar esta oportunidade de crescimento acadêmico.

Aos meus irmãos, Paulo Aurélio e Ruthmara pelo incentivo.

Aos meus sobrinhos e afilhados, pelo carinho.

À minha cunhada Adriana, pela ajuda com o material didático e por ter cuidado da Mariana com tanto carinho nesses dois anos.

Aos demais familiares (sogra, sogra, cunhados, cunhadas, tios, tias, primos, primas,...) pelo incentivo e compreensão em minhas ausências.

Se eu vi mais longe, foi por estar de pé sobre ombros de gigantes.  
Isaac Newton

## RESUMO

Um dos conteúdos em que os alunos encontram mais dificuldade de entendimento na Matemática do Ensino Médio é a Análise Combinatória. Avaliações externas em larga escala, como Prova Brasil e Programa de Avaliação da Rede Pública de Educação Básica (PROEB), por exemplo, aplicadas pelos órgãos governamentais competentes, fornecem resultados que reforçam tal afirmação. Esta proposta apresenta o ensino da Análise Combinatória através de uma sequência de atividades que proporcionem ao discente uma aprendizagem gradativa e concreta do conteúdo. Todas as atividades foram elaboradas com base na proposta curricular do estado de Minas Gerais, tendo como objetivo principal desenvolver no aluno do Ensino Médio um raciocínio combinatório conciso, não privilegiando assim o uso de fórmulas. A metodologia usada para a elaboração das atividades foi a Resolução de Problemas. Os problemas aqui propostos estão em grau de dificuldade gradativo, possibilitando ao estudante construir conceitos mais complexos através de situações mais simples. Por se tratar de uma proposta de atividades, não faremos a análise de resultados. Esperamos, por outro lado, que esse trabalho ajude outros docentes, que almejam um aprendizado efetivo da Análise Combinatória no Ensino Médio.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Ensino Médio. Resolução de Problemas.

## **ABSTRACT**

One of the subjects of Mathematics at High School, which students find most difficult to understand, is Combinatorial Analysis. External evaluations in large scale such as Prova Brasil and the Programa de Avaliação da Rede Pública de Educação Básica (PROEB), applied by the competent governmental organs, provide results which reinforce such affirmation. Our proposal is the teaching of combinatorial analysis through a sequence of activities which provide the student gradual and concrete learning of the content. All the activities were elaborated based on the curriculum proposal of the State of Minas Gerais, Brazil, with the main objective of developing a concise combinatorial reasoning in the High School student, without privileging the use of formulas. The methodology used for the elaboration of the activities was Problem Solving. The problems proposed here present a gradual difficulty degree, allowing the student to construct more complex concepts through simpler situations. For consisting of an activity proposal, we will not perform result analysis. On the other hand, we expect that this work aid other teachers, who aim at an effective learning of Combinatorial Analysis in High School.

Keywords: Combinatorial Analysis. High School. Problem Solving.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Organograma do Simave .....	34
Figura 2	Escala de proficiência de Matemática para o Ensino Médio em Minas Gerais. ....	36
Figura 3	A escala de proficiência de Matemática para o Ensino Médio em Minas Gerais .....	37
Figura 4	Matriz de Referência de Matemática para o Ensino Médio .....	39
Figura 5	Domínios da escala de proficiência e os respectivos intervalos de gradação de complexidade da habilidade .....	43
Figura 6	Escala de Proficiência de Matemática da Escola Estadual Doutor Osmar Bicalho dos anos 2009, 2011 e 2012 .....	45
Figura 7	Exemplo do princípio fundamental da contagem. ....	61
Figura 8	Exemplos de problema envolvendo Arranjo simples e Combinação simples.....	63
Figura 9	Demonstração da fórmula dos Arranjos simples .....	66
Figura 10	Seção “Pesquise mais o assunto” do livro Matemática Aula por Aula. ....	69
Figura 11	O novo uniforme.....	71
Figura 12	A nova bandeira da escola.....	73
Figura 13	Árvore de possibilidades do exemplo 1 .....	77
Figura 14	Modelos de placas de automóveis brasileiros.....	82

## LISTA DE SIGLAS

ANATEL	Agência Nacional de Telecomunicações
CBC- MG	Proposta Curricular do Estado de Minas Gerais
DCNEM	Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
DEX	Departamento de Ciências Exatas
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PAAE	Programa de Avaliação da Aprendizagem Escolar
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PROALFA	Programa de Avaliação da Alfabetização
PROEB	Programa de Avaliação da Rede Pública de Educação Básica
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SAEB	Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
SEE – MG	Secretaria de Estado da Educação de Minas Gerais
SIMAVE	Sistema Mineiro de Avaliação da Educação Pública
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
UFLA	Universidade federal de Lavras
GTERP	Grupo de Trabalho e Estudos sobre Resolução de Problemas
Unesp	Universidade Estadual Paulista
NCTM	Conselho Nacional de Professores de Matemática

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	11
<b>2</b>	<b>A ANÁLISE COMBINATÓRIA</b> .....	14
<b>2.1</b>	<b>Definição</b> .....	14
<b>2.2</b>	<b>Aspectos históricos</b> .....	15
<b>2.3</b>	<b>A importância da Análise Combinatória na atualidade</b> .....	20
<b>2.4</b>	<b>O ensino-aprendizagem da Análise Combinatória</b> .....	21
<b>3</b>	<b>MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA PARA A ESCOLHA DO TEMA</b> .....	24
<b>3.1</b>	<b>A proposta curricular do Estado de Minas Gerais e a Análise Combinatória</b> .....	24
<b>3.1.1</b>	<b>Os eixos temáticos</b> .....	25
<b>3.1.2</b>	<b>A resolução de problemas</b> .....	27
<b>3.1.3</b>	<b>A avaliação</b> .....	28
<b>3.1.4</b>	<b>A questão da contextualização</b> .....	29
<b>3.1.5</b>	<b>Os pré-requisitos</b> .....	30
<b>3.1.6</b>	<b>A distribuição dos tópicos no CBC</b> .....	31
<b>3.2</b>	<b>As avaliações de larga escala e o Programa de Avaliação da Educação Básica (PROEB)</b> .....	33
<b>4</b>	<b>RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS</b> .....	47
<b>4.1</b>	<b>A Metodologia de “Resolução de Problemas”</b> .....	47
<b>4.2</b>	<b>O ensino e a aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas</b> .....	51
<b>4.3</b>	<b>O ensino de Análise Combinatória através da resolução de problemas</b> .....	55
<b>4.4</b>	<b>A proposta de resolução de problemas abordada neste trabalho</b> .....	57
<b>5</b>	<b>A ABORDAGEM DA ANÁLISE COMBINATÓRIA EM ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS</b> .....	58
<b>5.1</b>	<b>Forma de introdução do conteúdo</b> .....	59
<b>5.2</b>	<b>Apresentação dos conceitos de arranjo e combinação</b> .....	62
<b>5.3</b>	<b>Como e quando são introduzidas as fórmulas</b> .....	65
<b>5.4</b>	<b>Apresentação de problemas com enunciados diversificados</b> .....	67
<b>5.5</b>	<b>Ênfase na resolução com o auxílio da representação</b> .....	68
<b>5.6</b>	<b>Inclusão de fatos históricos</b> .....	68
<b>6</b>	<b>ATIVIDADES</b> .....	70
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	102
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	103

## 1 INTRODUÇÃO

Durante os dois anos do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), estudamos vários conteúdos e nos preparamos para a elaboração do Trabalho de Conclusão do Curso (TCC). De acordo com os objetivos e propostas dessa nova modalidade de Mestrado (semipresencial e direcionado principalmente a professores das redes públicas de ensino básico do país), esse deveria versar sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenham impacto na prática didática em sala de aula.

A Análise Combinatória sempre foi tema de meu interesse e como há muita dificuldade no processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo, principalmente no Ensino Médio, resolvi desenvolver meus estudos nessa área.

Estas dificuldades são evidenciadas informalmente através de trocas de experiências docentes e formalmente através dos resultados das avaliações nacionais e estaduais das escolas públicas. Essas avaliações ocorrem periodicamente em todo país e o estado de Minas Gerais também adota essa política educacional através do Sistema Mineiro de Avaliação (SIMAVE). As avaliações da Secretaria de Estado da Educação de Minas Gerais (SEE-MG) são feitas todos os anos, nos 5º e 9º anos do ensino fundamental e 3º ano do Ensino Médio, e contemplam toda a proposta curricular das escolas públicas do estado de Minas Gerais. No ano seguinte à prova, a escola recebe um boletim informativo referente ao desempenho de seus alunos na avaliação e um gráfico comparativo da sua nota com as das demais escolas do município, juntamente com a média do Estado.

Como, desde o ano 2000, data da primeira aplicação do Programa de Avaliação da Rede Pública de Educação Básica (PROEB), a grande maioria das escolas mineiras, inclusive a que leciono, não alcança níveis desejáveis no que

se refere à competência “utilizar procedimentos de combinatória e probabilidade”, meu interesse em desenvolver um estudo sobre esse tema foi reforçado.

Durante minha vida escolar, incluindo ensino básico e graduação, a Análise Combinatória sempre foi apresentada através de aulas que se baseavam apenas na aplicação de fórmulas e, em minha atuação como professora estava repetindo o mesmo processo.

Objetivou-se, nesta dissertação, trabalhar a Análise Combinatória no Ensino Médio de acordo com as orientações da Proposta Curricular para as Escolas Públicas do Estado de Minas Gerais (CBC-MG), de uma forma que leve o aluno a obter uma facilidade de compreensão de conceitos complexos a partir de outros de grau mais simples, dando significado aos conceitos que devem ser adquiridos e sem a necessidade de memorização de fórmulas.

A atividade desenvolvida será uma sequência de aulas que se iniciam com a resolução de problemas simples que utilizam o princípio fundamental da contagem, passando por arranjos, combinações e chegando até permutações cíclicas. Utilizou-se como principal material de apoio, o livro “Análise Combinatória e Probabilidade” da Coleção Do Professor de Matemática da SBM e alguns livros didáticos e paradidáticos. A construção de conceitos, através de problemas práticos e utilizando material concreto pelos alunos, será priorizada. Assim o trabalho não enfocará o uso de fórmulas prontas, o que acaba levando o aluno a uma memorização momentânea e não a uma aprendizagem efetiva.

As fórmulas serão sim apresentadas aos alunos, já que são ferramentas facilitadoras na resolução de exercícios. Porém, devem aparecer em decorrência das experiências dos alunos na resolução de problemas, sendo construídas e não como o elemento de partida para o ensino da Análise Combinatória.

Assim, todas estas motivações me fizeram efetivamente transformar todos os meus anseios iniciais em uma proposta de estudo mais sólida e

aprofundada, complementando e aprimorando minha própria prática didática e também a de colegas professores que, assim como eu, buscam novas alternativas para o ensino de Matemática.

Este trabalho está organizado em cinco capítulos. No capítulo 2, “A Análise Combinatória”, apresentamos a definição, os aspectos históricos, sua importância e o seu processo de ensino e aprendizagem. No capítulo 3, “Motivação e justificativa para a escolha do tema”, fizemos uma abordagem sobre a Proposta Curricular e Avaliações Externas da Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais. O baixo desempenho dos estudantes em Análise Combinatória nessas avaliações foi um dos fatores determinantes para a escolha do tema do trabalho. Já no capítulo 4, “A resolução de problemas”, é apresentada a metodologia de ensino utilizada na elaboração da sequência de atividades. O capítulo 5, “A análise de alguns livros didáticos” apresenta uma análise de como nosso objeto de estudo é abordada em cada livro escolhido e, finalmente, no capítulo 6, encontram-se as atividades, que são a parte mais importante deste trabalho e foram elaboradas com o propósito de contribuir para um processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória mais eficaz no Ensino Médio.

## 2 A ANÁLISE COMBINATÓRIA

A Análise Combinatória é um importante ramo da Matemática desde tempos remotos até os dias atuais, e surgiu por volta do século XVI devido à necessidade de calcular o número de possibilidades existentes nos chamados jogos de azar. Este capítulo discorre sobre a definição, o surgimento e seus principais autores, a evolução do processo de contagem e sua importância na Matemática atual.

### 2.1 Definição

Antes de aprender ou ensinar sobre qualquer conteúdo é importante saber o seu significado.

A partir da leitura de obras para a realização deste trabalho verificou-se que existem várias definições sobre o tema, entre as quais temos que, de acordo com Leibniz (1666, p. 4), na qual a combinatória é “o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos”. Já Berge (1971) afirmou que a definição de combinatória depende de conceitos de “configurações”, pois instintivamente os matemáticos acreditam que certos problemas são de natureza combinatória e que os métodos para resolvê-los devem ser estudados.

Pitombeira (1986, p. 21), afirma que “A ‘Análise Combinatória’ poderia ser chamada de ‘arte de contar’”. Desse modo, a Análise Combinatória está envolvida com o processo de contagem.

De acordo com Nicholson (1818 apud VAZQUEZ; NOGUTI, 2004, p. 4), combinatória é “o ramo da Matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado número de objetos podem ser associados e misturados entre si”.

Desta maneira, pode-se visualizar a Análise Combinatória como um apanhado de todas essas definições vistas anteriormente, ou seja, uma parte da Matemática que visa desenvolver métodos que permitam contar – de uma forma indireta – o número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sob certas condições.

De acordo com Ryser (1963), a Matemática Combinatória apresenta-se como um atalho para muitas subdivisões da Matemática e é isso que torna difícil uma definição formal para ela.

## 2.2 Aspectos históricos

Para compreender porque, e em que momentos surgiram os primeiros conceitos sobre este tema, far-se-á uma retrospectiva histórica.

O problema mais antigo relacionado com a Análise Combinatória é o da formação dos quadrados mágicos (WIELEITNER, 1932). Os quadrados mágicos (de ordem  $n$ ) são arranjos de números  $1, 2, 3, \dots, n$  em um quadrado de forma que cada linha, coluna ou diagonal possua a mesma soma. Um exemplo de um quadrado mágico  $3 \times 3$  cuja soma é 15, está representado a seguir.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Há relatos de que a ideia dos quadrados mágicos foi transmitida aos árabes pelos chineses e que o primeiro quadrado mágico, conhecido por LoShu, pode ter sido escrito por volta de 2000 a.C. (BERGE, 1971).



Existe também uma poesia infantil de 1730, que apesar de ser interpretada usualmente como uma brincadeira, ilustra bem os primeiros problemas combinatórios:

Quando eu estava indo para St. Ives,  
Eu encontrei um homem com sete mulheres,  
Cada mulher tem sete sacos,  
Cada saco tem sete gatos,  
Cada gato tem sete caixas,  
Caixas, gatos, sacos e mulheres,  
Quantos estavam indo para St. Ives?

(BIGGS, 1979 apud VAZQUEZ; NOGUTI, 2004, p. 3).

O problema, “Sete mulheres velhas estão indo para Roma; cada uma delas tem sete mulas; cada mula carrega sete sacos; cada saco contém sete pães; cada pão tem sete facas; e cada faca tem sete bainhas. Qual é o número total de coisas?”, escrito por Leonardo de Pisa no *Liber Abaci* mostra a semelhança entre o mesmo e a antiga poesia, em que ambos reforçam a adição e repetição do número sete e a memorização do mesmo (VAZQUEZ; NOGUTI, 2004).

No papiro egípcio de Rhind, escrito em 1650 a.C. o problema 79 que diz “Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido sete hekat de grãos; quantos itens têm ao todo?”<sup>1</sup> também observou-se que, desde as civilizações mais antigas, as regras básicas de contar eram enfatizadas por exemplos em que destacavam-se a propriedade da memorização (VAZQUEZ; NOGUTI, 2004).

Mas somente no final do século XVII, foi possível observar que a teoria combinatória apareceu como um novo capítulo da Matemática, época na qual foram escritos os livros:

---

<sup>1</sup> Hekat é uma unidade de medida de grãos utilizada no Egito Antigo que equivale a 4,8 litros.

- a) “*Traité de l'arithmétique triangulaire*” (escrito em 1654 e publicado em 1665) de Pascal;
- b) “*Dissertatio de arte combinatoria*” de Leibniz (1666);
- c) “*Ars magna sciendive combinatoria*” (1669) de Athanasius Kircher.

Anteriormente, no século XVI, na Itália, num período em que ocorrem dentre outros acontecimentos, a Reforma Protestante, a ascensão de Elizabeth I e o massacre de São Bartolomeu, viveu Niccolo Fontana (1500-1557), que segundo poucos relatos que existem a seu respeito, era oriundo de uma família muito pobre e só aos catorze anos aprendeu a escrever pelos próprios meios. Niccolo viveu seus primeiros anos de vida na Península Ibérica, que na época sofria constantes ataques das tropas francesas. Em 1512, quando Brescia, sua cidade natal, foi saqueada em uma invasão liderada pelo General Gaston de Foix, ele, sua mãe e sua irmã procuraram refúgio na igreja da cidade. Mas os soldados não poupavam nem esses locais e Niccolo foi gravemente ferido com golpes na cabeça e na face, o que o levaria à perda parcial da memória e a ter dificuldades para falar. Devido a isto, ele foi apelidado de Tartaglia, que significa gago. Tartaglia tornou-se engenheiro e professor na universidade de Veneza, onde foi gradualmente adquirindo uma reputação como promissor matemático devido às suas participações bem sucedidas num largo número de debates. Foi professor também em Verona, Piacenza, Vicenza, Milão e Brescia e um dos primeiros matemáticos a elaborar estudos sobre combinações possíveis no lançamento de dois dados. Fez trabalhos importantes em que demonstrou muitos conhecimentos de aritmética, geometria, álgebra, balística e estática.

O médico graduado na Universidade de Pádua, Gerolamo Cardano (1501-1576), aparece ainda nesse século e seus estudos deixaram importantes contribuições para a física, filosofia, astrologia e, principalmente, a matemática. Cardano gastava seu dinheiro em apostas, desenvolvendo assim, mais

profundamente, as técnicas de contagem e combinações, contribuindo principalmente para o cálculo das Probabilidades (ROSA, 1998). Cardano escreveu um livro sobre a teoria das probabilidades "*Liber de ludo aleae*", sobre os jogos de azar, (1550, mas publicado em 1663), contendo ironicamente conselhos sobre como trapacear no jogo.

Galileu Galilei (1564-1642) analisou problemas sobre os jogos de dados. Em um dos problemas de combinatória, datados do século XVI, Galileu questionou o porquê da soma dez aparecer tão frequentemente quando se jogam três dados distintos.

Já no século XVII, motivados por problemas ligados a jogos e loterias, Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre Fermat (1601-1665), sistematizaram a Análise Combinatória através de seus trabalhos. Diz-se que devido à curiosidade de um amigo, chamado Chevalier de Méré, jogador apaixonado, que discutia com Pascal, através de correspondências, problemas relativos à probabilidade de ganhar em certos jogos de cartas, esse descobriu seu interesse pelo assunto.

Em correspondência com Fermat, durante o verão de 1654, Pascal estabeleceu os fundamentos da Teoria das Probabilidades, que não despertou logo grande interesse entre os matemáticos que os seguiam, já que na época estavam atraídos pelas investigações relativas ao cálculo, criadas por Newton e Leibnitz.

Em meados do século XVIII, percebeu-se a utilidade da Teoria das Probabilidades para estudar situações como taxas de mortalidade, prêmios de seguros, estatísticas sobre impostos, doenças, condenações, etc. Surgiram, nesse período, grandes publicações e os trabalhos do suíço Jacques Bernoulli (1654-1705), do alemão Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) e do suíço Leonhard Euler (1707-1783) dedicados a problemas probabilísticos colaboraram para um grande desenvolvimento da Análise Combinatória.

Philippe Naudé, matemático francês, perguntou em carta a Euler, de quantas maneiras um número pode ser escrito como a soma de inteiros positivos distintos. Euler respondeu prontamente ao colega e conta-se que essa pergunta teria dado origem à “teoria das partições”, que foi uma das várias contribuições deixadas por ele à Análise Combinatória. Dentre suas várias obras, o enunciado e a solução do “Problema das sete Pontes de Königsberg”<sup>2</sup> destaca-se como um teorema da Teoria dos Grafos<sup>3</sup>, que na atualidade, representa uma parte muito importante na Análise Combinatória.

Segundo Rosa (1998, p. 4):

A partir de meados do século XVIII, a Análise Combinatória passou a ser utilizada em vários ramos da Matemática como Estatística, Álgebra, Probabilidade, Lógica, etc., e em outras áreas do conhecimento humano como Biologia Molecular, Programação de Computadores, Economia, Teoria da Programação para o Bom Funcionamento da Empresa, etc.

O desenvolvimento posterior da teoria das probabilidades teve também grande contribuição dos matemáticos franceses Abraham de Moivre (1667-1754), Pierre Simon de Laplace (1749-1827) com sua *Théorie analytique des probabilités*; entre outros, como Joseph Lagrange (1736-1813), Thomas Bayes (1702-1761), Bertrand, Poincaré e Borel.

---

<sup>2</sup> Conta-se que, no século XVIII, havia sete pontes cruzando o rio Pregel, que banhava a pequena cidade universitária prussiana de Königsberg, hoje Kaliningrad, Rússia. Quatro delas ligavam as margens opostas a uma pequena ilha formada nesse rio, outras duas ligavam as margens opostas a uma outra ilha, próxima à primeira, e a última ponte ligava as duas ilhas. Os habitantes de Königsberg costumavam passear na sua cidade nas tardes ensolaradas de domingo, mas nunca tinham conseguido dar um passeio especial: sair de casa, atravessar todas as pontes uma só vez e regressar a casa. No entanto a dúvida quanto à possibilidade persistia.

<sup>3</sup> A Teoria dos Grafos é um ramo da matemática que estuda as relações entre os objetos de um determinado conjunto. Para tal são empregadas estruturas chamadas de grafos,  $G(V, A)$ , onde  $V$  é um conjunto não vazio de objetos denominados vértices e  $A$  é um conjunto de pares não ordenados de  $V$ , chamado arestas.

Atualmente, a Análise Combinatória possui inúmeras aplicações em vários campos do conhecimento. Segundo Morgado et al. (1991) há um crescimento considerável, comprovado por exemplo, por problemas de armazenamento no banco de dados.

Assim, a Análise Combinatória não apenas permeia os distintos ramos da Matemática, como também as diversas ciências, como a física, química, biologia e economia.

### **2.3 A importância da Análise Combinatória na atualidade**

A Análise Combinatória é, atualmente, foco de muita atenção e serve de base para vários ramos da Matemática: teoria dos grupos, probabilidade, teoria dos números, topologia, probabilidade, etc. Mas apesar disso, não encontrou-se na literatura uma definição satisfatória dessa ciência e suas ramificações.

A combinatória moderna constitui-se em problemas de listar, contar, estimar e existir, sendo que a maioria desses pode ser resolvida utilizando-se o princípio multiplicativo. Acredita-se assim que a resolução de problemas combinatórios constitui um importante papel na aprendizagem de técnicas gerais de resolução de problemas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais enfatizam a importância do estudo combinatório pelos alunos do Ensino Médio, ponderando que:

As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas (BRASIL, 1998, p. 257).

A abordagem desvinculada da realidade, faz com que a maioria dos alunos classifique essa parte da Matemática como uma das mais difíceis de serem entendidas.

Silva, Fernandes e Soares (2004) afirmam que trazer a Matemática para próximo do aluno significa mostrar que ela é aplicável na sua vida, que aquilo que ele aprende na escola tem relação com seu dia a dia.

#### **2.4 O ensino-aprendizagem da Análise Combinatória**

A Análise Combinatória não é bem-vista pela grande maioria dos professores e alunos, pois normalmente é enfocada através de uma enorme quantidade de fórmulas e definições que os docentes usam mecanicamente. Além disso, fatores como a falta de conhecimento de alguns docentes e de exemplos concretos e aplicações na sala de aula, fazem com que os mesmos não consigam resolver nem mesmo problemas simples de contagem.

A maioria dos problemas de Análise Combinatória exige dos alunos muita flexibilidade de pensamento em suas resoluções e o ideal seria que o aluno tivesse contato com esse conteúdo desde os primeiros anos da escola básica, para que seu desenvolvimento cognitivo acontecesse de forma gradativa.

Quando o aluno tem oportunidade de interagir com um conteúdo através de situações significativas, ele certamente terá maior oportunidade de aprendê-lo. Este trabalho acredita que a construção do conceito por meio de materiais manipulativos, atividades com espaço para discussão de ideias e que possam ser representadas através de diagramas ou desenhos, criam no aluno um ambiente mais favorável ao entendimento da Análise Combinatória.

Segundo Piaget (1978), a representação é a reunião de um significante que permite a formação de um significado fornecido pelo pensamento. Sendo assim, de acordo com Vergnaud (1990), antes da sistematização do princípio

fundamental da contagem, o uso de diagramas, tabelas e árvore de possibilidades guardam relações privilegiadas com a combinatória.

Batanero et al. (1997) afirmam que a maior dificuldade dos alunos em Análise Combinatória deve-se ao fato de os mesmos não conseguirem identificar a operação combinatória correta que devem utilizar. Outro fator agravante é que além de não identificarem qual a fórmula correta a ser usada em cada problema, eles ainda erram as próprias fórmulas.

Acredita-se que esses erros apresentados pelos alunos acontecem principalmente devido à forma como o conteúdo lhes é apresentado. Frequentemente, as fórmulas lhes são apresentadas após uma rápida abordagem dos conceitos sobre cada tipo de agrupamento, induzindo assim o aluno ao domínio da técnica e não a uma interpretação do problema, o que é fundamental na Análise Combinatória.

Ainda segundo Batanero et al. (1997), uma das principais causas do fracasso dos alunos na resolução de problemas de Combinatória é a confusão sobre a relevância de ordem. Com relação a isso, o CBC-MG orienta os professores da rede pública de ensino a dedicarem uma parte do planejamento destinado ao ensino da Análise Combinatória, a reforçarem nos alunos os conceitos de sequências e subconjuntos, que estão intimamente relacionados ao conceito de ordem nos agrupamentos (CARNEIRO; SPIRA; SABATUCCI, 2007).

Observa-se que muitos livros didáticos mencionam os arranjos e as combinações separadamente e não fazem nenhuma relação entre eles, nos levando a acreditar que esse processo não contribui para que o aluno adquira o hábito de analisar e diferenciar problemas de arranjo e combinação.

Frente a essas considerações concluiu-se que o processo de ensino-aprendizagem da Análise Combinatória é deficitário e só sofrerá mudanças

significativas a partir do momento em que o aluno tiver condições de construir os conceitos necessários para a interpretação e resolução dos problemas.



### **3 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA PARA A ESCOLHA DO TEMA**

Neste capítulo, apresenta-se a Proposta Curricular do Estado de Minas Gerais (CBC-MG) e o Sistema Mineiro de Avaliação Escolar - SIMAVE. Como a sequência de atividades foi elaborada seguindo as orientações do CBC, julgou-se necessário fazer uma breve abordagem sobre o mesmo. Já a análise do SIMAVE foi apresentada porque uma das justificativas da escolha do tema do estudo foi o baixo desempenho dos alunos das escolas públicas mineiras, nas questões de Análise Combinatória.

#### **3.1 A proposta curricular do Estado de Minas Gerais e a Análise Combinatória**

O novo plano curricular para o Ensino Médio da SEE-MG foi criado, instituído e regulamentado pela Resolução n°. 753, de 06 de janeiro de 2006 (MINAS GERAIS, 2006), mas sua implantação foi feita de forma gradativa, iniciando-se pelas escolas participantes do projeto Escola-Referência<sup>4</sup>. Objetivou-se, sobretudo, assegurar aos alunos do Ensino Médio a capacitação para o exercício de atividades profissionais, bem como sua preparação para prosseguimento de estudos acadêmicos.

Segundo a SEE-MG (CARNEIRO; SPIRA; SABATUCCI, 2007), a proposta curricular não contempla todos os conteúdos a serem abordados na escola, mas sim os aspectos fundamentais de cada disciplina, que não podem deixar de ser ensinados e que os alunos não podem deixar de aprender. Esses

---

<sup>4</sup> O Projeto ER (Escola Referência) é uma política do governo de Minas Gerais, implantada a partir do ano de 2003, tendo como lema o “desenvolvimento de ações que buscam a reconstrução da excelência na rede pública”. Ele visa à superação do fracasso escolar por meio de uma educação de qualidade, que promova a inclusão do aluno na sociedade.

conteúdos vêm detalhados através de habilidades e competências. No Ensino Médio foram estruturados de forma que, no primeiro ano, sua abordagem seja mais geral e semiquantitativa, ao passo que no segundo ano ela se torne mais quantitativa e aprofundada e finalmente no terceiro ano, que é o ano da complementação da formação, a escola poderá eleger tópicos complementares, dentre os quais os sugeridos no CBC.

O CBC está fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM) e nas orientações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias). Os PCN+ estabelecem que:

No Ensino Médio, etapa final da escolaridade básica, a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional. Nessa etapa da escolaridade, portanto, a Matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de linguagem e com papel integrador importante junto às demais Ciências da Natureza (BRASIL, 2010, p. 111).

### **3.1.1 Os eixos temáticos**

O CBC-MG é organizado em eixos temáticos que têm o mesmo sentido de eixo estruturador, apresentado nos PCN+. Esses são “Um conjunto de temas que possibilitam o desenvolvimento das competências almejadas com relevância científica e cultural e com uma articulação lógica das ideias e conteúdos matemáticos” (CARNEIRO; SPIRA; SABATUCCI, 2007, p. 34).

Os eixos temáticos propostos são os seguintes:

- a) **Eixo Temático I:** Números, Contagem e Análise de Dados.
- b) **Eixo Temático II:** Funções Elementares e Modelagem.
- c) **Eixo Temático III:** Geometria e Medidas.

Esses eixos diferem um pouco da proposta do PCN+, em que são propostos três temas estruturadores:

- a) Álgebra: números e funções
- b) Geometria e medidas
- c) Análise de dados

O **Eixo Temático I:** Números, Contagem e Análise de Dados, que se constitui foco deste trabalho, vem definido pelos autores do CBC-MG, de forma sucinta, como apresenta-se abaixo.

Desde os primórdios da humanidade o ato de contar é um dos aspectos principais da Matemática, já que no cotidiano nos vemos constantemente envolvidos em situações que exigem resolver problemas dessa natureza. Possíveis resultados de uma experiência genética, armazenamento de dados em formato eletrônico, estimativas do tempo de execução de programas de computadores, dentre outros, são exemplos de problemas que dependem da formalização Matemática de técnicas de contagem, conhecida como Análise Combinatória.

No dia a dia, lida-se o tempo todo com problemas de contagem direta, em que normalmente é possível registrar todos os objetos envolvidos, um a um. Mas, é comum deparar-se com situações em que o número de objetos que se quer contar é tão grande a ponto de ser praticamente impossível, ou pelo menos, inconveniente listá-los. Nesse contexto, surgem os métodos e conceitos da Análise Combinatória, que permitem a transição imediata do pensamento cotidiano para o pensamento científico. Aqui, a Análise Combinatória se

restringe ao estudo de subconjuntos e sequências, que será pré-requisito importante para saber-se de quantas maneiras um determinado grupo de objetos pode ser escolhido, levando-se em conta ou não a ordem em que são selecionados.

Um dos grandes facilitadores do ensino-aprendizagem da Análise Combinatória é, sem dúvida, o fato de que além das operações serem elementares, só lidar-se com números naturais. Além disso, o conteúdo é desprovido de complicações teóricas, conceituais ou notacionais e os métodos de pensamento utilizados são de caráter geral e formativo, o que propicia ao aluno um maior desempenho na prática escolar global e cotidiana.

### **3.1.2 A resolução de problemas**

O CBC-MG privilegia, principalmente, a resolução de problemas em todos seus eixos temáticos como forma de levar o aluno a desenvolver a capacidade de abstração, bem como a habilidade de atribuir significado aos conceitos abstratos estudados.

De acordo com os autores do CBC-MG, situação-problema são problemas que envolvem o processo de tradução do enunciado, seja contextualizado ou não, em linguagem Matemática, e a tomada de decisão sobre quais ferramentas Matemáticas serão usadas em sua resolução (“modelagem”).

Ainda segundo o documento, um dos principais objetivos do ensino da Matemática é o de desenvolver nos alunos de qualquer nível escolar habilidades para a solução de problemas. Por outro lado, adverte que os mesmos não devem ser levados a resolver uma grande quantidade de exercícios repetidos como é comumente encontrado nos livros-textos atuais.

Os problemas a serem resolvidos devem ser amplamente variados para que o objetivo proposto, citado no primeiro parágrafo desta seção, seja alcançado.

A utilização de problemas ou de situações práticas deve ser explorada para a motivação, introdução de novos conceitos e ideias e também nas suas aplicações.

O documento contempla ainda o uso de algumas estratégias apresentadas, constantemente, para que os alunos habituem-se e desenvolvam concretamente habilidades para a resolução de problemas.

Ao elaborar as atividades propostas neste trabalho deu-se prioridade ao uso das estratégias: perceber padrões em situações aparentemente diversas; estudar casos especiais mais simples usando-os para elaborar estratégias de resolução de casos mais complexos ou gerais; fazer uso do método de tentativa e erro, elaborando novas estratégias de solução a partir da análise crítica dos erros e compartilhar e discutir observações e estratégias de outros estudantes, adquirindo assim experiência e novos “*insights*” para abordar um problema.

### **3.1.3 A avaliação**

Consta na proposta curricular que o professor deve fazer uma avaliação contínua de todo o processo de aprendizagem, usando para isto, as ações de planejar, observar, investigar, organizar e registrar as atividades em sala de aula.

É importante ressaltar que, além dos mencionados acima, os métodos tradicionais de verificação de aprendizagem como provas e listas de exercícios devem aparecer e seu propósito principal deve ser sempre a contribuição efetiva para o crescimento do aluno. Além disso, deve servir para que o professor possa reformular a cada momento suas práticas pedagógicas e melhor adaptá-las às condições de sala de aula.

Outro fator primordial é a observação e o registro do professor, durante as aulas, da participação dos alunos nas atividades propostas. Nas avaliações tradicionais deve ser cobrado do aluno os aspectos mais relevantes de cada unidade.

Sempre com o intuito de elevar a autoestima do educando, especialmente no caso de adolescentes, a avaliação deve ter um caráter positivo e construtivo e os erros devem ser encarados como uma oportunidade ideal de revisão de conceitos e estratégias de solução.

Os alunos devem ter espaço em sala de aula para expor suas observações, dificuldades e relatos sobre as atividades e conteúdos trabalhados. As tentativas de resolução de seus problemas devem ser valorizadas pelo professor, para que os mesmos adquiram autoconfiança, ao perceberem que, mesmo errando, seu esforço e trabalho são bem recebidos.

Por fim, ao se deparar com o erro de seus alunos, o professor deve assumir uma postura adequada de não criticá-los, mas sim de fazê-los expor claramente seu raciocínio e só depois esclarecer o que está errado. O ideal é que o professor obtenha uma solução correta da turma, sem intervir e, caso seja necessário, apresente soluções alternativas.

#### **3.1.4 A questão da contextualização**

A contextualização de acordo com o CBC – MG é um/ recurso para ampliar as possibilidades de interação entre os temas de uma mesma disciplina, disciplinas de uma determinada área ou entre disciplinas de áreas diversas.

De acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio – DCNEM - a contextualização é um dos princípios estruturadores do Ensino Médio e supera o distanciamento entre os conteúdos estudados e a experiência do aluno, criando assim condições para uma aprendizagem motivadora. Esse

recurso tira o aluno da condição de espectador passivo e mobiliza competências cognitivas já adquiridas para tratar de novas questões.

No que se refere ao tema contagem, fica clara a facilidade da utilização do recurso da contextualização, já que a maioria das situações faz parte do cotidiano da mídia e da linguagem coloquial.

A interdisciplinaridade, outro princípio estruturador proposto nas DCNEM, que consiste em utilizar conhecimentos de várias disciplinas para resolver um problema ou compreender um determinado fenômeno sob diferentes pontos de vista, também figura com ferramenta importante e facilitadora ao desenvolvimento de habilidades Matemáticas.

Para utilização desse recurso, porém, é necessário que o professor esteja preparado para reconhecer as oportunidades de trabalho em conjunto com outras disciplinas, faça um planejamento comum das atividades com outros professores participantes do projeto e também enriqueça suas aulas com exemplos de aplicações de Matemática em outras áreas.

### **3.1.5 Os pré-requisitos**

Outra orientação importante e constante no CBC é relativa à questão dos conhecimentos prévios dos alunos, que são úteis ou necessários para uma boa compreensão dos tópicos tratados em cada eixo temático.

Principalmente na Matemática, o conhecimento é construído de forma gradativa, em que a aprendizagem de um tópico depende de uma boa base de conhecimentos adquiridos em anos anteriores. Com isso, é de fundamental importância que ao iniciar o estudo de um novo assunto o professor tenha uma boa ideia do nível de preparação de seus alunos.

Avaliações denominadas diagnósticas são comumente aplicadas nas escolas públicas, sob orientação da SEE-MG para que o professor tenha

registrado a verificação de domínios de conteúdos e, assim, o planejamento de suas aulas seja mais eficaz.

Em muitos exames e avaliações, como o Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM, vestibulares e avaliações em larga escala, é comum constatarem-se falhas elementares de formação de muitos alunos, mesmo daqueles que já concluíram o Ensino Médio.

Técnicas simples como uma revisão de conteúdo ou resolução de uma lista de exercícios suplementares seguida de sessões de discussões de problemas podem ser usadas para a superação dos problemas dos pré-requisitos. Por outro lado, em casos de deficiências mais generalizadas, a atitude a ser tomada por parte da escola deve ser mais decisiva.

### **3.1.6 A distribuição dos tópicos no CBC**

No que se refere ao conteúdo Análise Combinatória, os tópicos do CBC ficam assim divididos:

#### **a) Tópicos do CBC para o 1º ano:**

- Eixo Temático I: Números, Contagem e Análise de Dados.
- Tema 2: Contagem
- Tópico 4: Princípio Multiplicativo
- Habilidade 4.1: Resolver problemas elementares de contagem, utilizando o princípio multiplicativo.

#### **b) Tópicos do CBC para o 2º ano: Conteúdos de Aprofundamento.**

- Eixo Temático IV: Números, Contagem e Análise de Dados.
- Tema 9: Contagem



- Tópico 17: Contagem do número de elementos de uma união de conjuntos
  - Habilidade 17.1: Resolver problemas que envolvam o cálculo do número de elementos da união de conjuntos.
  
  - Tópico 18: Conjuntos e sequências.
  - Habilidade 18.1: Reconhecer a diferença entre conjuntos e sequências.
  - Habilidade 18.2: Identificar, em situações-problema, agrupamentos associados a conjuntos e sequências.
  
  - Tópico 19: Princípio Multiplicativo.
  - Habilidade 19.1: Resolver problemas utilizando o princípio multiplicativo.
  
  - Tópico 20: Arranjos, Combinações e permutações sem repetição.
  - Habilidade 20.1: Reconhecer situações em que os agrupamentos são distinguíveis pela ordem de seus elementos ou não.
  - Habilidade 20.2: Resolver problemas que envolvam arranjos, combinações e/ou permutações sem repetição.
- c) Sugestões de tópicos complementares para o 3º ano: Eixo temático VII: Números, Contagem e Análise de Dados.**
- Tema 16: Contagem
  - Tópico38: Arranjos, Combinações com repetições e permutações cíclicas.

- Habilidade 38.1: Resolver problemas que envolvam arranjos, combinações e permutações com repetições e permutações cíclicas.

### **3.2 As avaliações de larga escala e o Programa de Avaliação da Educação Básica (PROEB)**

As avaliações dos sistemas educacionais ou avaliações de larga escala são ações políticas que visam tomadas de decisões a partir dos resultados e propiciem uma melhoria do ensino-aprendizagem.

Os motivos que fundamentam a opção por este tipo de avaliação são, dentre outros, econômico, político e social. A justificativa econômica é o fato de a educação estar inserida na ordem econômica mundial por apresentar-se como condição de estabilidade social, que é requisito de investimento em um país, por parte do Banco Mundial.

Politicamente, as avaliações de larga escala figuram com a finalidade de garantir um padrão de qualidade da educação ministrada no Brasil. Já no âmbito social, essas avaliações têm relação direta com a qualidade de vida da população. A Organização das Nações Unidas (ONU), por exemplo, considera a educação como um dos determinantes dessa qualidade.

A educação pública do estado de Minas Gerais está inserida num programa de avaliação externa de larga escala denominado SIMAVE (Sistema Mineiro de Avaliação da Educação Pública) que, segundo a SEE-MG (CARNEIRO; SPIRA; SABATUCCI, 2007), foi instituído como objetivo de fazer diagnósticos para entender as muitas dimensões do sistema público do Estado e buscar seu aperfeiçoamento e eficácia.

Os resultados dessas avaliações oferecem medidas acerca do progresso do sistema de ensino como um todo e de cada escola. Os propósitos principais

desses resultados são o de prestar contas à sociedade sobre a eficácia dos serviços educacionais oferecidos à população e o de fornecer subsídios para o planejamento das escolas em suas atividades de gestão e de intervenção pedagógica.

O CBC é tomado como referência para elaboração das avaliações do SIMAVE que, no caso do Ensino Médio, é denominado PROEB. Esse acontece, anualmente, nos meses de outubro ou novembro, no 3º ano do Ensino Médio, contemplando apenas os conteúdos de Matemática e Português. Já o Programa de Avaliação da Aprendizagem Escolar (PAAE), está direcionado a alunos do 1º ano do Ensino Médio e acontece em até três etapas, durante o ano letivo. O SIMAVE desenvolve atualmente os programas:

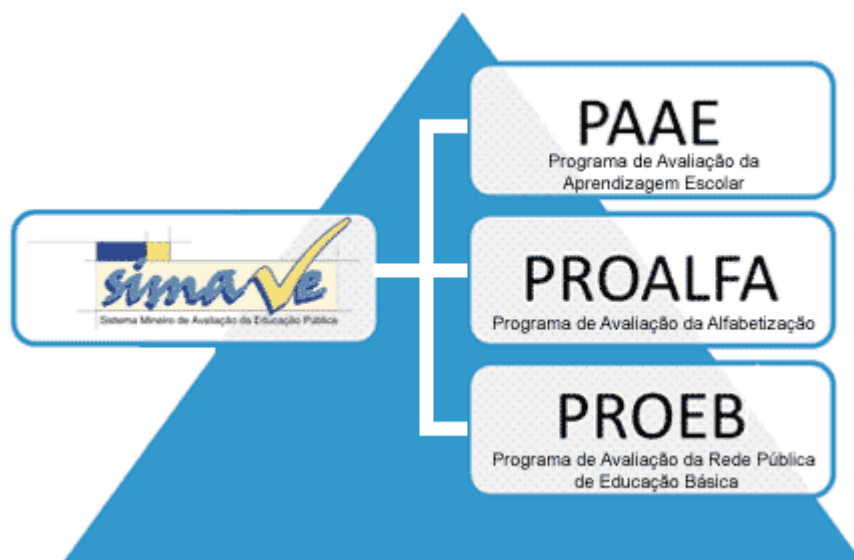


Figura 1 Organograma do Simave

Fonte: Minas Gerais (2010, p. 8).

O PROEB é elaborado de acordo com a Matriz de Referência para Avaliação, que surge do CBC e contempla apenas aquelas habilidades consideradas fundamentais e possíveis de serem alocadas em testes de múltipla escolha.

O Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) define uma escala de proficiência que dispõe o resultado dos alunos. Como uma escala é a expressão da medida de uma grandeza e também uma forma de apresentar resultados com base em uma espécie de régua em que os valores são ordenados e categorizados, as escalas do SAEB permitem ordenar os resultados de desempenho dos alunos do nível mais baixo ao mais alto.

Estas escalas apresentam para cada intervalo, as habilidades presentes naquele ponto e a grande vantagem da adoção de uma escala de proficiência é sua capacidade de traduzir as medidas obtidas em diagnósticos qualitativos do desempenho escolar.

Os resultados insuficientes obtidos nas provas do PROEB, referentes ao conteúdo de Análise Combinatória, conforme colocações feitas no início deste capítulo, serviram como uma motivação a mais para a realização dessa proposta de atividades. Assim, nas próximas páginas será apresentado o PROEB, sua estrutura e resultados referentes ao domínio das habilidades relacionadas à Análise Combinatória.

A escala de proficiência de Matemática para o Ensino Médio em Minas Gerais se estrutura conforme o esquema abaixo.

Domínios	Competências	Descritores
Espaço e Forma	Localizar objetos em representações do espaço.	*
	Identificar figuras geométricas e suas propriedades.	D1
	Reconhecer transformações no plano.	*
	Aplicar relações e propriedades.	D2, D3, D4 e D5.
Grandezas e Medidas	Utilizar sistemas de medidas.	*
	Medir grandezas.	D06, D07, D08 e D09.
	Estimar e comparar grandezas.	*
Números e Operações/ Álgebra e Funções	Conhecer e utilizar números.	D11
	Realizar e aplicar operações.	D10 e D14.
	Utilizar procedimentos algébricos.	D12, D13, D15, D16, D17, D18, D19, D20, D21, D22, D23, D24, D25, D26, D27, D28, D29, D30, D33, D34, D35, D36, D37 e D40.
Tratamento da informação	Ler, utilizar e interpretar informações apresentadas em tabelas e gráficos.	D38 e D39.
	Utilizar procedimentos de combinatória e probabilidade.	D31 e D32.

\* As habilidades relativas a essas competências não são avaliadas nesta etapa de escolaridade.

Figura 2 Escala de proficiência de Matemática para o Ensino Médio em Minas Gerais

Fonte: Minas Gerais (2011a, p. 14).

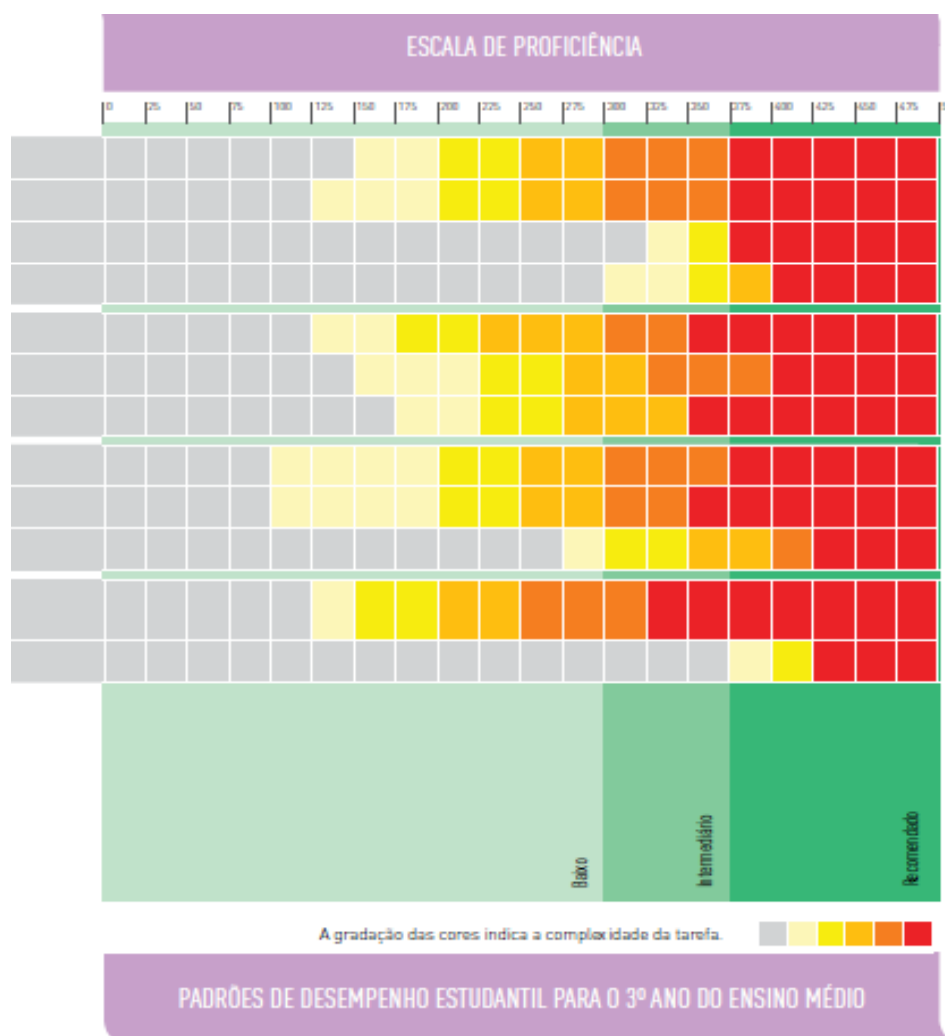


Figura 3 A escala de proficiência de Matemática para o Ensino Médio em Minas Gerais

Fonte: Minas Gerais (2011a, p. 15).

Os quatro grandes domínios do conhecimento em Matemática para toda a educação básica, agrupados por competências são apresentados na primeira coluna. Essas competências agregam as habilidades presentes na Matriz de

Referência de Matemática e a relação entre a escala e a matriz, para cada competência com seus respectivos descritores que aparecem nas colunas seguintes.

De acordo com Cleuza Lourenço Linhares, diretora de uma escola da rede pública de Minas Gerais, em uma entrevista publicada no Boletim do PROEB 2011, uma Matriz de referência é “Um conjunto de descritores com a função de focalizar dois pontos básicos: conteúdo programático a ser avaliado em cada período de escolarização e o nível de operação mental necessária para a realização de determinadas tarefas” (MINAS GERAIS, 2011b, p. 15).

A Figura a seguir representa a Matriz de Referência de Matemática para o Ensino Médio.

MATRIZ DE REFERÊNCIA DE MATEMÁTICA – SIMAVE/PROEB  
TEMAS E SEUS DESCRITORES – 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

TEMAS	DESCRITORES
I. Espaço e Forma	D1 Reconhecer a planificação de figuras tridimensionais mais usuais (prismas, pirâmides, paralelepípedo, cubo, cilindro e cone).
	D2 Resolver situações-problema, no plano, que envolvam razão trigonométrica no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).
	D3 Calcular a distância entre dois pontos no plano cartesiano.
	D4 Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.
	D5 Construir a equação da reta que passa por dois pontos dados.
II. Grandezas e Medidas	D6 Utilizar o cálculo de perímetro de figuras planas.
	D7 Utilizar o cálculo de áreas de figuras planas.
	D8 Resolver situações-problema envolvendo a área total de figuras tridimensionais (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera, paralelepípedo).
	D9 Resolver situações-problema envolvendo o volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera, paralelepípedo).
III. Números e Operações/Álgebra e Funções	D10 Estimar raiz quadrada não exata de um número natural, tendo como referência um intervalo de dois inteiros consecutivos.
	D11 Localizar números racionais na reta numérica.
	D12 Diferenciar as variações proporcionais das não proporcionais.
	D13 Resolver situações-problema, envolvendo duas grandezas direta ou inversamente proporcionais.

Figura 4 Matriz de Referência de Matemática para o Ensino Médio

(... continua...)



TEMAS	DESCRITORES
III. Números e Operações/Álgebra e Funções	D14 Resolver situações-problema, envolvendo o cálculo de porcentagens.
	D15 Resolver situações-problema, envolvendo equação de 2º grau.
	D16 Resolver inequação de 2º grau.
	D17 Resolver situações-problema, envolvendo inequação de 2º grau.
	D18 Representar graficamente uma função do 2º grau.
	D19 Reconhecer uma função do 2º grau a partir de seu gráfico.
	D20 Reconhecer um polinômio do 2º grau através de sua fatoração em fatores do 1º grau.
	D21 Calcular os pontos de máximo ou mínimo de uma função de 2º grau.
	D22 Resolver situações-problema que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo de uma função do 2º grau.
	D23 Construir, a partir de uma situação-problema, um sistema linear com três equações e três incógnitas.
	D24 Resolver um sistema de equações lineares com três equações e três incógnitas.
	D25 Analisar crescimento/decrescimento, zeros e funções reais apresentadas em gráficos.
	D26 Resolver situações-problema, envolvendo progressão aritmética.

Figura 4 Matriz de Referência de Matemática para o Ensino Médio

(... continua...)

TEMAS	DESCRITORES	
III. Números e Operações/Álgebra e Funções	D27	Resolver situações-problema, envolvendo progressão geométrica.
	D28	Identificar arcos no círculo trigonométrico.
	D29	Relacionar medidas em graus e em radianos.
	D30	Aplicar relações entre as razões trigonométricas no círculo trigonométrico.
	D31	Resolver problema de contagem, utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples ou combinação simples.
	D32	Calcular a probabilidade de um evento.
	D33	Reconhecer a representação gráfica de uma função exponencial ( $y = a^x$ ).
	D34	Resolver equações exponenciais.
	D35	Reconhecer a representação gráfica de uma função logarítmica ( $y = \log_a x$ ).
	D36	Utilizar as propriedades operatórias da função logarítmica.
IV. Tratamento da Informação	D37	Calcular as raízes de uma equação polinomial dada por um produto de fatores do 1º e/ou 2º grau.
	D38	Interpretar e utilizar dados apresentados em tabelas e/ou gráficos (segmentos, colunas, setores).
	D39	Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa.
	D40	Utilizar as médias aritmética e ponderada.

Figura 4 Matriz de Referência de Matemática para o Ensino Médio

(... conclusão)

Fonte: Minas Gerais (2011b, p. 39-41).

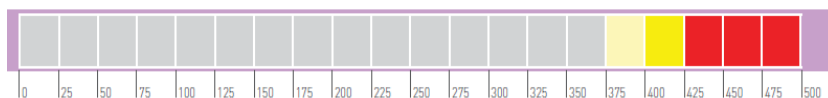
Na escala de proficiência, as habilidades são representadas por cores que vão do amarelo-claro ao vermelho, que por sua vez indicam a gradação de complexidade das habilidades pertinentes a cada competência. Os intervalos da escala estão representados na primeira linha e estão divididos em intervalos iguais de 25 pontos, de modo que o valor mínimo é zero e o máximo é 500 pontos. Na parte inferior da escala, representados em tons de verde, estão os padrões de desempenho para o 3º ano do Ensino Médio, definidos pela Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais e seus limites cortam a escala da primeira à última linha no sentido vertical.

Os domínios da escala de proficiência agrupam as competências básicas ao aprendizado da Matemática, para toda a educação básica.

O domínio da Escala de Proficiência no qual se fundamenta este trabalho é o Tratamento da Informação e a competência relativa a esse domínio é: Utilizar procedimentos de combinatória e Probabilidade. O descritor 31 da Matriz de Referência (p. 40), relacionado ao domínio e competência supracitados discorre que o professor ao trabalhar o mesmo em sala de aula deve objetivar que, ao concluir seu trabalho, o aluno adquira a habilidade de resolver problema de contagem, utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples ou combinação simples.

Este domínio pode ser desenvolvido, entre outras áreas da Matemática, pela Combinatória, pois ela nos permite determinar o número de possibilidades de ocorrência de algum acontecimento. A Competência referente a esse domínio que interessa a esse trabalho com sua respectiva escala de proficiência está anexada a seguir.

## UTILIZAR PROCEDIMENTOS DE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE



Um dos objetivos do ensino do Tratamento de Informação em Matemática é propiciar ao estudante o desenvolvimento da competência: utilizar procedimentos de combinatória e probabilidade. Esta competência deve ser desenvolvida desde os anos iniciais do Ensino Fundamental por meio da resolução de problemas de contagem simples e a avaliação das possibilidades de ocorrência ou não de um evento. Algumas habilidades vinculadas a esta competência no Ensino Fundamental são exploradas juntamente com o domínio Números e Operações/Álgebra e Funções. Quando tratamos essa habilidade dentro do *Tratamento de Informação*, ela se torna mais forte no sentido do professor perceber a real necessidade de trabalhar com ela. O professor deve resolver problemas simples de possibilidade de ocorrência, ou não, de um evento ou fenômeno, do tipo "Qual é a chance?" Apesar desse conhecimento intuitivo ser muito comum na vida cotidiana, convém trabalhar com os estudantes a diferença entre um acontecimento natural, que tem um caráter determinístico, e um acontecimento aleatório, cujo caráter é probabilístico. Também é possível trabalhar em situações que permitam avaliar se um acontecimento é mais ou menos provável. Não se trata de desenvolver com os estudantes as técnicas de cálculo de probabilidade, mas de explorar a ideia de possibilidade de ocorrência ou não de um evento ou fenômeno. Intuitivamente, compreenderão que alguns acontecimentos são possíveis, isto é, "têm chance" de ocorrer (eventos com probabilidades não nulas). Outros acontecimentos são certos, "garantidos" (eventos com probabilidade de 100%) e há aqueles que nunca poderão ocorrer (eventos com probabilidades nulas). As habilidades associadas a esta competência são mais complexas, por isso começam a ser desenvolvidas em níveis mais altos da escala de proficiência.





-  Os estudantes cuja proficiência se encontra na faixa cinza, de 0 a 375 pontos, ainda não desenvolveram as habilidades relacionadas a esta competência.
-  No intervalo representado pelo amarelo-claro, de 375 a 400 pontos, os estudantes começam a desenvolver esta competência, calculando a probabilidade de um evento acontecer no lançamento de um dado, bem como a probabilidade de ocorrência de dois eventos sucessivos como, por exemplo, ao se lançar um dado e uma moeda.
-  O amarelo-escuro, 400 a 425 pontos, indica uma complexidade maior nesta competência. Neste intervalo, os estudantes conseguem resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo sem repetição de elementos e calculam a probabilidade de ocorrência de um evento simples.
-  No intervalo representado pela cor vermelha, acima de 425 pontos, habilidade mais complexa do que a anterior, os estudantes resolvem problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo com repetição de elementos e resolvem problemas de combinação simples.

Figura 5 Domínios da escala de proficiência e os respectivos intervalos de gradação de complexidade da habilidade

Fonte: Minas Gerais (2011a, p. 31).

Segundo dados do Boletim do PROEB (SISTEMA MINEIRO DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO PÚBLICA - SIMAVE, 2012), que é publicado e enviado todos os anos para cada uma das escolas públicas de Minas Gerais, o resultado do desempenho dos alunos nesta avaliação, na grande maioria das escolas tem sido insatisfatório desde a sua implantação. Esse dado, na verdade, é uma constante em todas as avaliações em larga escala no Brasil. Segundo dados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica - SAEB (2011), em 2009, da amostra dos alunos avaliados em Matemática, apenas 11% apresentaram aprendizado adequado ao terceiro ano do Ensino Médio.

Há uma grande defasagem entre o que se espera de desenvolvimento de habilidades na área da Matemática e o que efetivamente os alunos demonstram ter consolidado. Esse fato torna-se ainda mais gritante quando são analisados os resultados da grande maioria das escolas públicas de Minas Gerais, do PROEB, referentes à competência: Utilizar Procedimentos de Combinatória e Probabilidade. O que se pode observar é que, quase a totalidade dos alunos se encontra localizado no padrão baixo ou intermediário da escala de proficiência, ou seja, sua pontuação varia de 0 a 375 pontos, o que significa que os mesmos ainda não desenvolveram as habilidades relativas a essa competência.

Para ilustrar tal realidade, seguem-se as escalas de proficiência de 2009, 2011 e 2012 respectivamente, da escola em que leciono, sendo que a linha preta na vertical indica a pontuação média dos alunos nesses anos.

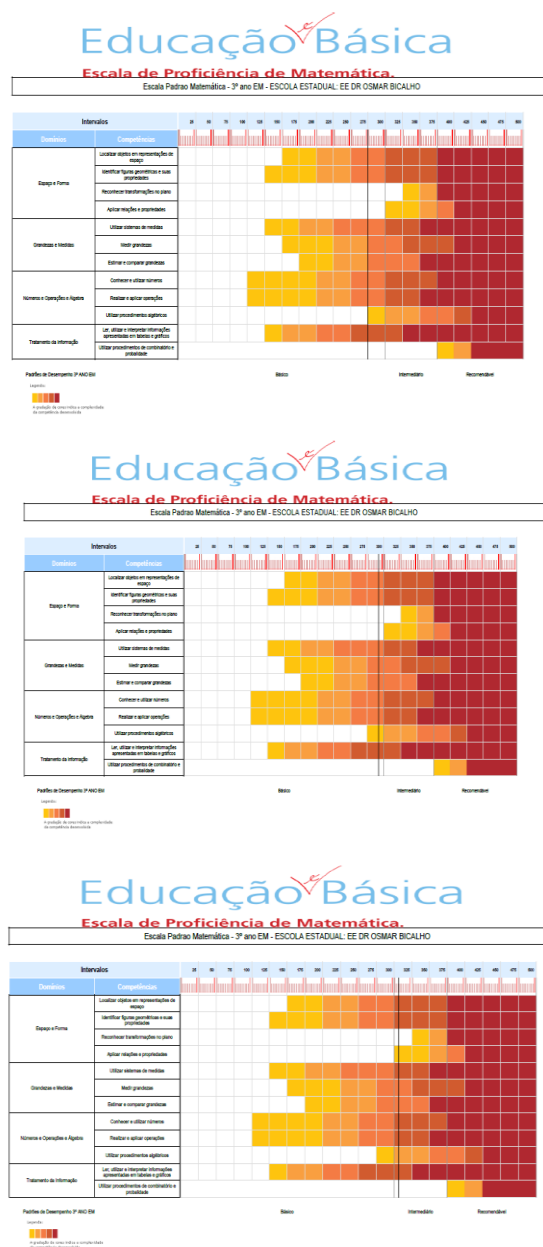


Figura 6 Escala de Proficiência de Matemática da” Escola Estadual Doutor Osmar Bicalho” dos anos 2009, 2011 e 2012

Fonte: SIMAVE (2013)

Os resultados do PROEB servem como parâmetro para que os educadores percebam que o processo de ensino e aprendizagem da Análise Combinatória é deficitário, e que mudanças significativas precisam acontecer para que essa realidade seja revertida.

## **4 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

Estamos o tempo todo vivenciando situações cotidianas que envolvem a resolução de problemas, ou seja, resolver problemas faz parte da natureza humana. Desde os primórdios da humanidade, bem antes da invenção dos números, problemas de localizar-se no tempo e no espaço, por exemplo, já faziam parte do cotidiano dos homens.

Segundo Carneiro, Spira e Sabatucci (2007) um dos principais objetivos do ensino de Matemática, em qualquer nível, é o de desenvolver habilidades para a resolução de problemas.

Huanca (2006, p. 20) comenta que, “ao longo da história, matemáticos, filósofos, psicólogos, educadores e pesquisadores têm reconhecido a importância da resolução de problemas e da existência de diferenças pessoais na capacidade de se chegar a uma solução”.

### **4.1 A Metodologia de “Resolução de Problemas”**

Como uma das grandes dificuldades dos alunos nas várias áreas do conhecimento, principalmente em Matemática, está em resolver problemas, sua utilização na prática educativa é uma metodologia que deve ter papel de destaque na sala de aula.

George Polya, autor do livro “A Arte de Resolver Problemas” cuja primeira edição data de 1945, influenciou as primeiras pesquisas sobre o ensino de Matemática através da resolução de problemas.

Atualmente, no Brasil, merecem destaque as pesquisas desenvolvidas pelo Grupo de Trabalho e Estudos sobre Resolução de Problemas (GTERP), coordenado pela professora Lourdes de La Rosa Onuchic, na Universidade Estadual Paulista (Unesp) de Rio Claro.



Segundo Souza e Nunes (2008), a proposta de resolução de problemas vem passando por várias modificações. Nos anos 80, o Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM), uma entidade norte americana, a resolução de problemas deveria ser foco da Matemática escolar. Já, na década de 90, no Brasil e no Mundo, a resolução de problemas figurou como um ponto de partida e um meio de se ensinar Matemática.

Mas Zuffi e Onuchic (2007), alertam que, mesmo o tema continuando atual nas discussões junto a pesquisadores da área, no que diz respeito a real capacidade da metodologia de resolução de problemas provocar mudanças de longo prazo nas salas de aula de Matemática, ainda há investigações a se fazer.

Segundo Onuchic (2008), em seu blog:

A metodologia de Ensino de Matemática através da Resolução de Problemas” constitui-se num caminho para se ensinar matemática e não apenas para se ensinar a resolver problemas. Nela, o problema é um ponto de partida e os professores, através da resolução do problema, devem fazer conexões entre os diferentes ramos da matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos. Numa sala de aula onde o trabalho é feito com a abordagem de ensino de matemática através da resolução de problemas, busca-se usar tudo o que havia de bom nas reformas anteriores: repetição, compreensão, o uso da linguagem matemática da teoria dos conjuntos, resolver problemas e, às vezes, até a forma de ensino tradicional.

Por outro lado Onuchic e Alevatto (2004) afirmam não haver formas rígidas para a utilização da metodologia de resolução de problemas em sala de aula. Em 1998, construíram uma proposta de resolução de problemas que já sofreu modificações, sendo revista e aprimorada 10 anos depois.

Em um mini-curso proposto por Souza e Nunes (2008) é apresentado o roteiro a seguir, elaborado por Onuchic (1999), com o intuito de dinamizar a metodologia de trabalho ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através

da resolução de problemas. Este roteiro foi utilizado no desenvolvimento deste trabalho e contém a seguinte sequência de atividades:

a) Formar grupos – entregar uma atividade (problema)

Processo compartilhado, cooperativo dando a oportunidade de aprender uns com os outros.

b) O papel do professor

Muda de comunicador do conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador, incentivador da aprendizagem.

c) Resultados na lousa

Anotar os resultados obtidos pelos grupos quer sejam certo ou errado e aqueles feitos por diferentes caminhos.

d) Plenária

Assembleia com todos os alunos. Como todos trabalham sobre o problema dado, estão ansiosos quanto a seus resultados, dessa forma, participam.

e) Análise dos resultados

Nesta fase são trabalhados os pontos de dificuldade (problemas secundários). O aspecto exploração é bastante considerado nesta análise.

f) Consenso

Consenso sobre o resultado pretendido.

g) Formalização

Faz-se uma síntese daquilo que se objetivava “aprender” a partir do problema.

São colocadas as devidas definições, identificadas as propriedades, feitas as demonstrações.

Conclui-se assim que na maior parte do desenvolvimento da proposta acima, o papel do professor ocupa lugar de destaque. Ele deve ser um facilitador do processo, encorajando o aluno a explorar, questionar e compartilhar sucessos e fracassos, e, para isso, deve estar preparado para enfrentar diversas situações com segurança e criatividade.

Porém, em muitos casos o que se percebe, segundo Onuchic (1999), futuros professores de matemática encontram dificuldades, entre outras razões, porque vivenciaram e receberam uma formação deficitária.

Onuchic (1999 apud HUANCA, 2006) enfatiza o trabalho de Felix Klein que, em 1892, se interessou pelo professor que deveria trabalhar Matemática com seus alunos, nas escolas. Começou a escrever monografias em que trabalhava a matemática elementar sob um ponto de vista avançado e, nelas, deixava aos professores a responsabilidade de desenvolver caminhos por ele sugeridos. Klein já sentia a preocupação com um ensino de matemática envolvendo a necessidade de professores melhor preparados.

Fica claro, através de todas as considerações acima, que a utilização da metodologia de resolução de problemas no ensino de Matemática em sala de aula com resultados satisfatórios, ainda está em constante aprimoramento.

## **4.2 O ensino e a aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas**

O desenvolvimento nos alunos da capacidade de aprender a aprender, aliado ao conhecimento vigente é tema de grande parte das pesquisas recentes em educação, principalmente em Matemática.

Segundo Dante (2005), um problema, de maneira geral, pode ser entendido como sendo um obstáculo a ser superado, algo a ser resolvido e que exige o pensar consciente do indivíduo para solucioná-lo.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais valorizam o enfoque feito à Matemática através da metodologia de resolução de problemas, afirmando que “A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios” (BRASIL, 2006, p. 112).

Mas o que se vê em sala de aula são problemas matemáticos trabalhados como exercícios repetitivos e padronizados, em que o aluno identifica a operação utilizada na resolução através de palavras-chave nos enunciados. Isso gera no aluno insatisfação e o leva a ter muitas dificuldades ao tentar resolver problemas sem a intervenção do professor.

Espera-se que durante a resolução de situações-problema o aluno tenha condições para investigar, explorar ideias e procedimentos matemáticos que o levem a novos conhecimentos.

Conforme aponta Charnay (1996, p. 30), “só existe aprendizagem quando o aluno percebe que existe um problema para resolver, quer dizer, quando reconhece o novo conhecimento como meio de resposta a uma pergunta”.

É importante salientar-se a diferença entre exercício e problema. No primeiro, os alunos utilizam um processo mecânico para se chegar à solução, sem reflexões e tomada de decisões.

Os PCN's colocam como forma repreensiva a prática pura e simples de resolução de exercícios como objetivo de desenvolver nos alunos a habilidade de resolver problemas. Segundo o documento:

Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas Matemáticas, pois, nesse caso o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações mais complexas (BRASIL, 2006, p. 112).

Dewey (1910 apud HUANCA, 2006), alerta que, nestes casos, o que os alunos fazem é uma imitação pura, ditado de passos a serem tomados, mantidos em pura repetição de certos atos até que eles se tornem automáticos.

Já os problemas desenvolvem nos alunos a capacidade de gerenciar as informações explícitas e implícitas, enfrentar situações novas, interessantes e desafiadoras, e principalmente a habilidade de desenvolver estratégias que auxiliam na solução dos mesmos.

Com relação à metodologia de resolução de problemas os PCN's de Matemática determinam que as finalidades do ensino dessa disciplina, dentre outras são:

- a) analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas Matemáticas para formar, no aluno, uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
- b) desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- c) utilizar, com confiança, procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos.

Tomando como base as instruções contidas nos PCN, os autores da proposta curricular de Matemática para o Ensino Médio, no Estado de Minas Gerais, enumeram as seguintes estratégias que o professor deve usar em sala de aula, com o objetivo de desenvolver nos alunos as habilidades para a solução de problemas:

- a) usar figuras, diagramas e gráficos, tanto de forma analítica quanto intuitiva;
- b) expressar, oralmente ou por escrito, com suas próprias palavras, propriedades Matemáticas, atribuindo significado aos conceitos abstratos e formulando por meio do uso da linguagem simbólica, questões expressas verbalmente;
- c) perceber padrões em situações aparentemente diversas;
- d) estudar casos especiais mais simples, usando-os para elaborar estratégias de resolução de casos mais complexos ou gerais;
- e) fazer uso do método de tentativa e erro, elaborando novas estratégias de solução a partir da análise crítica dos erros;

- f) usar a simbologia Matemática (sentenças) com variáveis e equações;
- g) usar a analogia como ferramenta de trabalho, recorrendo a métodos já utilizados e adaptando-os para a resolução de novos problemas;
- h) trabalhar de trás para diante, supondo conhecida a solução de um problema e deduzir suas propriedades para obter um caminho para encontrá-la;
- i) compartilhar e discutir observações e estratégias de outros estudantes, adquirindo assim experiência e novos “*insights*” para abordar um problema.

É importante, porém, que o professor, munido dessas ferramentas citadas acima, planeje muito bem suas aulas, propondo sempre problemas que despertem o interesse e a curiosidade dos alunos, ou seja, problemas desafiadores, reais e interessantes. Caso contrário o mesmo se tornará desmotivado.

Segundo Dante (1998), um bom problema deve:

- a) ser desafiador para o aluno;
- b) ser real;
- c) ser interessante;
- d) ser o elemento de um problema realmente desconhecido;
- e) não consistir na aplicação evidente e direta de uma ou mais operações aritméticas;
- f) ter um nível adequado de dificuldade.

Quando um problema não é interessante e criativo, ele não é capaz de instigar o aluno a resolvê-lo e assim sendo, tornará o mesmo desmotivado.

Dante (1998), afirma que, embora tão valorizada, a resolução de problemas é um dos tópicos mais difíceis de serem trabalhados em sala de aula.

Assim, é de suma importância o papel do professor no trabalho com essa metodologia. Seu objetivo principal ao propor situações-problema deve ser a produção do conhecimento, proporcionando ao aluno uma aprendizagem com significado e compreensão.

Além de ensinar a resolver problemas, o educador deve incentivar o aluno a propor situações-problema, questionando, partindo sempre da realidade que o cerca. Esse hábito levará o educando a uma nova forma de aprender, implicando num processo de reflexão e tomada de decisões.

Pozo e Echeverría (1998) apresentam algumas técnicas que ajudam a resolver melhor os problemas. Segundo os autores, o aluno deve primeiramente compreender o problema e em seguida elaborar um plano que permita a sua resolução. A execução do plano elaborado, seguindo-o passo a passo, constitui a terceira etapa do processo. A finalização então se constitui de um retrospecto, em que o objetivo é rever todo o caminho percorrido para se chegar à solução detectando, se existirem, possíveis erros.

#### **4.3 O ensino de Análise Combinatória através da resolução de problemas**

Batanero et al. (1997) afirmam que a atividade de resolver problemas de Análise Combinatória constitui um dos pilares da aprendizagem significativa da Matemática.

Mas acredita-se que a Matemática ensinada de forma tradicional, totalmente desvinculada da realidade do estudante deva ser banida do meio educacional. É comum encontrar-se professores que, ao abordarem o tema



Análise Combinatória, fazem uso frequente de exercícios do tipo “Calcule  $P_3 + 2 \cdot C_{8,3}$ .”<sup>5</sup>

Acredita-se que uma proposta de introdução do conteúdo, utilizando problemas combinatórios simples é estratégia eficaz para o bom desenvolvimento do tema.

Considera-se aqui, problemas combinatórios simples, como sendo aqueles que podem ser resolvidos mediante a aplicação de apenas uma operação combinatória, conforme Almeida (2010).

Batanero et al. (1997) classificam os problemas combinatórios simples em problemas de partição, de colocação e de seleção.

De uma forma sucinta define-se os problemas de partição como aqueles que são resolvidos dividindo grupos em subgrupos, por exemplo: “De quantos modos diferentes podemos repartir 5 figurinhas diferentes entre dois amigos, de modo que cada um deles receba no mínimo uma?”. Já os problemas classificados como sendo de colocação abordam situações nas quais  $p$  elementos devem ocupar  $n$  posições. O problema que se segue é um exemplo de problema de colocação: “De quantos modos diferentes podemos colocar 3 carros em quatro garagens, sabendo que cada garagem só pode ser ocupada por apenas um carro?”

Os problemas de seleção são os mais utilizados no Ensino Médio, devido ao menor grau de complexidade que sua resolução envolve. Esses abordam situações em que os elementos de um conjunto são agrupados ordenadamente ou não. Um exemplo clássico de problema de seleção é o do tipo “Quantas comissões contendo um presidente, um vice-presidente e um tesoureiro podemos eleger dispendo de quatro candidatos.”

---

<sup>5</sup> Esta expressão significa a permutação de 3 elementos somada com o dobro da combinação de 8 elementos tomados 3 a 3.

Estes problemas de seleção são subdivididos, no Ensino Médio, em problemas de arranjos simples, arranjos com repetição, combinações simples e combinações com repetição. Além desses temos também os problemas de permutação, que nada mais são do que casos especiais de arranjos.

Com relação à resolução desses problemas acreditamos que o uso de estratégias, como o diagrama de possibilidades e a observação de padrões, no decorrer do trabalho, leva o aluno a obter o significado da ação utilizada. Naturalmente o discente utilizará operações em suas resoluções sem a necessidade de utilização de fórmulas decoradas e que não representam para eles sentido algum.

#### **4.4 A proposta de resolução de problemas abordada neste trabalho**

Acredita-se que, na resolução de problemas de Análise Combinatória, o uso do raciocínio recursivo deve prevalecer frente a aspectos algorítmicos.

A utilização de materiais manipulativos, situações do cotidiano dos discentes e discussões que propiciem a construção de conjecturas foram contempladas na elaboração das atividades.

Outro aspecto importante observado nos problemas propostos foi o grau de complexidade de cada um. Optou-se sempre por iniciar sempre por questões mais simples, com o objetivo de motivar os discentes a resolver a atividade.

Tempo suficiente para a resolução dos problemas e oportunidade para que cada estudante exponha seu raciocínio também foram contemplados nas orientações de cada uma das atividades.

## **5 A ABORDAGEM DA ANÁLISE COMBINATÓRIA EM ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS**

Aqui será feita uma análise de quatro livros didáticos de Ensino Médio, que fazem parte da lista do PNLD (Programa Nacional do Livro Didático). Estes livros são distribuídos às escolas públicas do Estado de Minas Gerais e sua escolha é feita pela equipe de professores da cada escola. O critério adotado para a seleção desses quatro exemplares para análise foi simplesmente a questão da acessibilidade e intimidade com o material, visto que todos eles foram adotados nas escolas públicas em que trabalhei. É importante salientar que essa análise tem por objetivo apenas mostrar como é abordado o tema Análise Combinatória, em alguns livros didáticos distribuídos pelo governo federal às escolas públicas do Estado de Minas Gerais.

Os livros analisados serão:

- a) Barroso, J. M. Conexões com a matemática: ensino médio. São Paulo: Moderna, 2010. v. 2, 440 p.
- b) Dante, L. R. Matemática: ensino médio, volume único. São Paulo: Ática, 2005. 504 p.
- c) Iezzi, G. et al. Matemática: ciência e aplicações, ensino médio. São Paulo: Saraiva, 2010. v. 2, 320 p.
- d) Silva, C. X. da; Barreto Filho, B. Matemática aula por aula: ensino médio. São Paulo: FTD, 2005. v. 2, 400 p.

Como não tem-se o objetivo de fazer um estudo aprofundado sobre abordagem do conteúdo Análise Combinatória, nos livros de Ensino Médio fornecidos às escolas públicas do Estado de Minas Gerais através do PNLD, julga-se a amostragem suficiente para esta análise.

Utilizou-se os mesmos critérios adotados por Esteves (2001), por julgar-se estarem de acordo com essa proposta de estudo. Segundo a mesma, as variáveis escolhidas, seguindo orientações do MEC serão:

- a) forma de introdução do conteúdo;
- b) apresentação dos conceitos de arranjo e combinação;
- c) como e quando são introduzidas as fórmulas;
- d) apresentação de problemas com enunciados diversificados;
- e) ênfase na resolução com auxílio de diagramas;
- f) inclusão de fatos históricos.

Essas variáveis escolhidas, representam apenas uma parcela das possibilidades de análise do instrumento didático, no que se refere à abordagem da Análise Combinatória no Ensino Médio. Mas acredita-se que são uma boa amostragem de nossas concepções sobre o objeto de estudo.

### **5.1 Forma de introdução do conteúdo**

Julga-se fato fundamental para construção de conceitos de Análise Combinatória, a forma com que o conteúdo é introduzido ao discente. Para que esse aprendizado não se fundamente em mera memorização e cálculo mecânico de cada tipo de agrupamento, se faz necessária a utilização de estratégias que levem o discente a adquirir, por si só, um sentido para o que está aprendendo.

Na análise dos quatro exemplares, observou-se que, em três deles: “Conexões com a Matemática”, “Matemática volume único” e “Matemática: Ciência e Aplicações”, o conteúdo é introduzido com situações do dia a dia dos alunos que recaem em problemas de contagem. No livro “Matemática: Ciência e Aplicações” são propostas na verdade, quatro questões de contagem. Esses

problemas têm a finalidade de fazer com que os discentes discutam as situações apresentadas e proponham maneiras de solucioná-las.

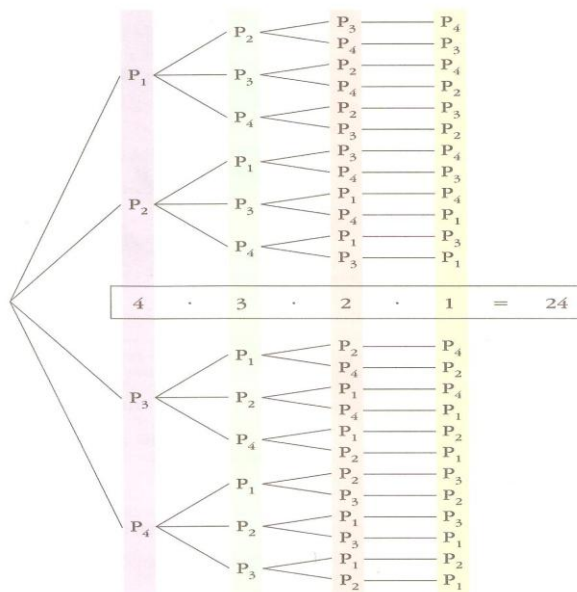
Nos livros “Matemática: Ciência e Aplicações” e “Matemática, volume único” a situação-problema é apenas enunciada, sem nenhuma proposta de resolução prévia, deixando assim, espaço para uma discussão inicial entre docente e discentes. No exemplar “Conexões com a Matemática”, as duas situações enunciadas já vêm resolvidas, sem a proposta de um questionamento aos estudantes. Nessa resolução é utilizada uma árvore de possibilidades no problema 1 e uma tabela de dupla entrada no problema 2.

Já no livro “Matemática Aula por Aula”, dois exemplos são apresentados aos estudantes de forma direta, sem qualquer oportunidade de participação e familiarização dos mesmos com o conteúdo. Essas duas situações apresentadas já vêm resolvidas, também utilizando uma árvore das possibilidades e uma tabela de dupla entrada. A definição do princípio fundamental da contagem é definido depois da apresentação do primeiro problema resolvido, como mostrado abaixo:

O exemplo abaixo mostra todas as possibilidades de ocorrer um experimento.

Em quantas ordens diferentes 4 pessoas podem se sentar num sofá de 4 lugares?

Vamos descrever a árvore de possibilidades:



A árvore mostra todos os modos possíveis de as 4 pessoas se sentarem num sofá de 4 lugares, ou seja:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \Rightarrow 24 \text{ possibilidades}$$

O princípio fundamental da contagem diz que um acontecimento ocorre em duas situações sucessivas e independentes, sendo que a 1ª situação ocorre de  $a$  maneiras e a 2ª situação ocorre de  $b$  maneiras, então o número total de possibilidades de ocorrência desse acontecimento é dado pelo produto  $a \cdot b$ .

Exemplo:

Um rapaz possui 4 bermudas e 3 camisas. De quantos modos diferentes ele pode se vestir com essas roupas?

Vamos indicar bermuda com a letra  $b$  e camisa com a letra  $c$  e dispor as maneiras possíveis no quadro:

bermuda camisa	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$
$c_1$	$c_1 \cdot b_1$	$c_1 \cdot b_2$	$c_1 \cdot b_3$	$c_1 \cdot b_4$
$c_2$	$c_2 \cdot b_1$	$c_2 \cdot b_2$	$c_2 \cdot b_3$	$c_2 \cdot b_4$
$c_3$	$c_3 \cdot b_1$	$c_3 \cdot b_2$	$c_3 \cdot b_3$	$c_3 \cdot b_4$

O quadro mostra que existem  $3 \cdot 4 = 12$  modos distintos.

Figura 7 Exemplo do princípio fundamental da contagem.

Fonte: Silva e Barreto Filho (2005, p. 244-245).

Acredita-se que, a utilização de atividades que não promovam a participação do aluno, ou seja, aquelas que trazem textos prontos e formais, como as acima, não contribuem para que o mesmo construa de maneira gradativa os conceitos a serem adquiridos. E o Princípio Fundamental da Contagem, base do estudo da Análise Combinatória, deve ser apresentado após uma efetiva familiarização do discente com situações-problema propostas, o que também não acontece.

## **5.2 Apresentação dos conceitos de arranjo e combinação**

Considera-se que a dificuldade de considerar se a ordem dos objetos é ou não importante num agrupamento, é sem dúvida o maior causador dos erros na resolução de problemas de Análise Combinatória. Segundo Batanero et al. (1997) esse tipo de erro consiste em confundir os critérios de arranjo e combinação.

Nos quatro livros didáticos analisados, os conceitos de arranjo e combinação são expostos de forma direta e isolada, sem apresentar nenhuma abordagem que confronte os dois tipos de agrupamentos.

Apenas no livro “Matemática Aula por Aula”, há uma seção enfatizando problemas de arranjo e combinação. Após cada agrupamento ter sido exposto de maneira isolada, os autores apresentam uma seção, com um problema de arranjo simples e um de combinação simples resolvidos. Segundo os autores, o objetivo é enfatizar os conceitos e tornar mais clara as diferenças entre esses dois tipos de agrupamentos, como pode-se observar:

### Problemas envolvendo arranjo e combinação

Com os problemas a seguir procuramos enfatizar os conceitos de arranjo simples e de combinação simples e tornar mais clara a diferença entre eles.

Exemplos:

- a) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?

Considerando o conjunto dos algarismos  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , inicialmente aplicamos a fórmula do arranjo simples, ou seja,  $A_{10, 3}$ .

$$A_{10, 3} = \frac{10!}{(10 - 3)!} = \frac{10!}{7!}$$

$$A_{10, 3} = 720$$

A seguir, vamos calcular os arranjos cujos números possuem o zero como primeiro algarismo, ou seja,  $A_{9, 2}$ , e subtrair do total de arranjos.

$$A_{9, 2} = \frac{9!}{(9 - 2)!} = \frac{9!}{7!}$$

$$A_{9, 2} = 72$$

$$A_{10, 3} - A_{9, 2} = 720 - 72 = 648 \text{ números}$$

- b) (Unicamp-SP) Uma Câmara Municipal é composta de vereadores de 3 partidos —  $A, B$  e  $C$  —, assim distribuídos: 3 do partido  $A$ , 6 do partido  $B$  e 9 do partido  $C$ .

I. Qual a menor comissão (em número de vereadores) que se pode formar nessa Câmara, mantendo-se a mesma proporcionalidade partidária?

Considerando a distribuição  $\rightarrow$  partido  $A$ : 3; partido  $B$ : 6; partido  $C$ : 9, a menor distribuição que mantém a proporcionalidade é partido  $A$ : 1; partido  $B$ : 2; partido  $C$ : 3.

II. Quantas comissões diferentes com essa característica podem ser formadas?

O número de comissões diferentes, que corresponde à característica do item I, é calculado pelo produto das combinações

$$C_{3, 1} \cdot C_{6, 2} \cdot C_{9, 3} = 3 \cdot 15 \cdot 84 = 3\,780 \text{ comissões.}$$

Figura 8 Exemplos de problema envolvendo Arranjo simples e Combinação simples

Fonte: Silva e Barreto Filho (2005, p. 257).



Acredita-se que a apresentação dos conceitos no início, sem antes propor problemas onde o aluno tenha a oportunidade de analisar as diferenças entre os dois tipos de agrupamentos, simultaneamente, dificultam a compreensão sobre a questão da ordem.

Segundo a proposta curricular do estado de Minas Gerais, trabalhar com o aluno conceitos e situações-problema que envolvam subconjuntos e sequências irá ajudá-los no momento da decisão sobre a questão da ordem. Sendo assim, acreditamos que se problemas sobre esses dois tipos de agrupamentos forem apresentados aos alunos, simultaneamente, sua compreensão e interpretação em situações posteriores ocorrerá de forma efetiva (CARNEIRO; SPIRA; SABATUCCI, 2007).

Observamos também que, nos livros “Conexões com a Matemática”, “Matemática: ciência e aplicações” e “Matemática: volume único”, os termos sequências e subconjuntos estão presentes nas definições dos agrupamentos, estando portanto de acordo com o CBC-MG. O termo agrupamento ordenado também está presente na definição de arranjos simples dos três exemplares acima.

No livro “Matemática Aula por Aula” não encontrou-se abordagem desses agrupamentos, utilizando definições de sequências e de subconjuntos. Apenas na seção de apresentação da fórmula de combinação simples, os autores utilizam o termo “sequências”.

Atividades envolvendo situações-problema simples, onde o aluno é questionado a decidir se um agrupamento representa uma sequência ou um subconjunto, antes de se enunciar o conceito de arranjo e combinação não são observadas em nenhum dos quatro livros.

Acredita-se assim, que essa forma de abordagem não gera no aluno um hábito de diferenciar com segurança problemas de arranjo e combinação.

### 5.3 Como e quando são introduzidas as fórmulas

A análise desta variável que representa o objeto deste trabalho, reforçou a frustração. Observou-se que o ensino da Análise Combinatória, nos quatro exemplares analisados, baseia-se em resolução de problemas com a aplicação mecânica de fórmulas, que não fazem sentido algum para os discentes.

Todos os quatro livros didáticos analisados introduzem as fórmulas logo após a definição de cada tipo de agrupamento. Na sequência são apresentados 1 ou 2 exercícios resolvidos e uma série de exercícios propostos onde as fórmulas apresentadas inicialmente, são utilizadas de forma técnica, sem nenhum tipo de raciocínio combinatório.

Segundo Sabo (2010), grande maioria dos professores valoriza a memorização e a aplicabilidade das fórmulas na resolução de problemas. Isso talvez seja um reflexo, do que propõem os próprios livros didáticos disponibilizados aos docentes.

Em todos os exemplares, os autores apresentam a dedução das fórmulas de arranjos simples e combinações simples. A figura abaixo ilustra esse fato:

## 4.2 Cálculo do número de arranjos simples

Vamos calcular o número total de agrupamentos simples de  $n$  elementos, arranjados  $p$  a  $p$ , com  $p \leq n$ , indicado por  $A_{n,p}$ .

Existem  $n$  possíveis escolhas para o primeiro elemento do agrupamento,  $n - 1$  possíveis escolhas para o segundo elemento,  $n - 2$  para o terceiro elemento, ...,  $n - (p - 1)$  possíveis escolhas para o  $p$ -ésimo elemento do agrupamento.

Então, aplicando o princípio multiplicativo, o número de arranjos simples de  $n$  elementos  $p$  a  $p$  é:

$$A_{n,p} = \underbrace{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot [n - (p - 1)]}_{p \text{ fatores}}, 0 < p \leq n$$

Desenvolvendo a expressão do 2º membro e multiplicando-o por  $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$ , temos:

$$A_{n,p} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - p + 1) \cdot (n - p)!}{(n - p)!} = \frac{n!}{(n - p)!}$$

Então:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n - p)!}$$

Figura 9 Demonstração da fórmula dos Arranjos simples

Fonte: Barroso (2010, p. 313)

De acordo com a concepção apresentada, uma proposta de aprendizagem que valorize a investigação, o debate e socialização de ideias, frente a situações –problema de Análise Combinatória, favorecem um ensino e aprendizagem efetivos.

#### 5.4 Apresentação de problemas com enunciados diversificados

Fundamentados em na experiência docente, acredita-se que uma grande quantidade de exercícios que são resolvidos com a aplicação de fórmulas, de maneira mecânica e utilizando palavras-chave para decidir o tipo de agrupamento a ser considerado, não contribuem para uma efetiva aprendizagem da Análise Combinatória.

É constante, nos quatro exemplares analisados, a grande quantidade de exercícios disponibilizados para a resolução por parte dos alunos. Em contrapartida os problemas apresentados no início de cada seção, como modelo, aparecem em menor número e vêm com a resolução. Isso faz com que os alunos não sejam capazes de resolver com certa facilidade, o que lhes é proposto.

Outro fato interessante é que, novamente em todos os exemplares, os exercícios propostos são todos agrupados por tema, ou seja, o aluno percebe que naquele bloco só resolverá problemas de arranjo e no outro só de combinação e assim sucessivamente. Essa proposta de ensino não desenvolve no aluno o raciocínio combinatório e quando o mesmo se vê em uma avaliação por exemplo, onde há várias tipos de agrupamentos, o resultado geralmente não é satisfatório.

Nos quatro livros há um uma seção no final do capítulo Análise Combinatória, contendo uma série de exercícios complementares envolvendo todos os tipos de agrupamentos abordados anteriormente.

No livro “Matemática volume único”, de Luiz Roberto Dante, existe uma seção com questões do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) de anos anteriores.

### **5.5 Ênfase na resolução com o auxílio da representação**

Julga-se ser esta, a ferramenta fundamental no desenvolvimento do raciocínio combinatório. Porém percebe-se que os quatro volumes analisados utilizam árvore de possibilidades e tabelas somente na introdução do conteúdo, principalmente ao falar sobre o princípio fundamental da contagem. Ao longo do capítulo, durante a apresentação dos outros agrupamentos esses esquemas caem em desuso.

Segundo Almeida e Ferreira (2010, p. 16):

A enumeração sistemática e o uso do diagrama de possibilidades são métodos que auxiliam na compreensão da Análise Combinatória. Entretanto, após algum tempo utilizando esses métodos, é comum que os alunos os substituam pelas operações.

Contrariando a opinião da autora acima, os autores dos quatro livros, utilizam em suas obras exercícios propostos que não induzem em nenhum momento, ao uso desses métodos por parte dos alunos.

Concluí-se assim, que nenhum dos livros analisados apresenta uma proposta efetiva de resolução de problemas utilizando tabelas, árvore de possibilidades e diagramas. Ou seja, a estratégia de resolução de problemas combinatórios é de apenas a utilização mecânica de fórmulas.

### **5.6 Inclusão de fatos históricos**

A abordagem de fatos históricos relacionados com os conteúdos matemáticos a serem ensinados é, hoje em dia, defendida pela maioria dos estudiosos em educação Matemática. Porém o que se percebe é que a maioria dos autores de livros didáticos, não tem essa preocupação.

Neste quesito observamos que, apenas o “Livro Matemática Aula por Aula”, traz uma introdução história da Análise Combinatória, dando ênfase à biografia e algumas contribuições do matemático francês Blaise Pascal (1623-1662).

O livro sugere ainda um estudo mais aprofundado sobre a história da Análise Combinatória através da seção “Pesquise mais o assunto”, conforme apresentamos:

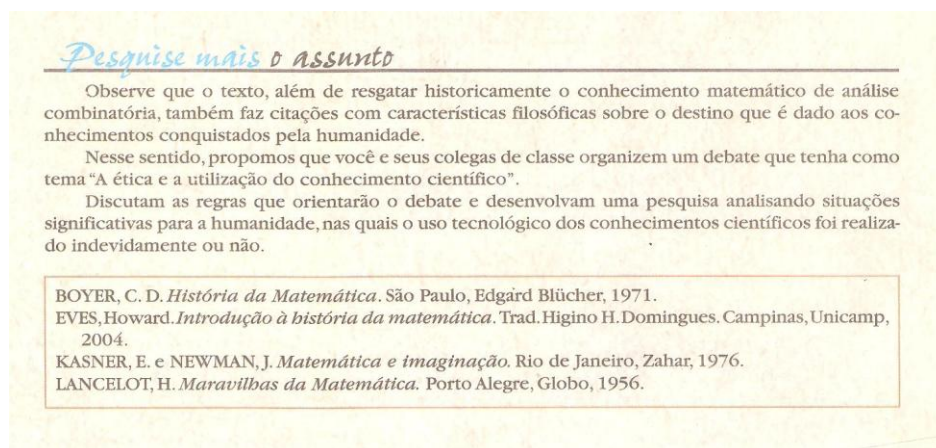


Figura 10 Seção “Pesquise mais o assunto” do livro “Matemática Aula por Aula”.

Fonte: Silva e Barreto Filho (2005, p. 243).

Nos demais exemplares não foram encontrados, em nenhum momento, referências sobre o surgimento ou a história da Análise Combinatória.

## 6 ATIVIDADES

Nesta parte serão apresentadas oito propostas de atividades que poderão ser trabalhadas por professores de Ensino Médio. Elas apresentam uma abordagem da Análise Combinatória onde o uso das fórmulas não é o elemento principal na resolução dos problemas propostos.

Nas atividades que se seguem considera-se no item “tempo previsto” cada módulo como uma aula de 50 minutos.

### ATIVIDADE 1– O NOVO UNIFORME E A NOVA BANDEIRA DA ESCOLA

**Tema:** Contagem

**Público-alvo:** Alunos do 1º ano do Ensino Médio.

**Objetivos e habilidades:** Capacitar o aluno para que ele possa resolver problemas elementares de contagem utilizando o princípio multiplicativo.

**Pré-requisitos:** Algum conhecimento prévio de Análise Combinatória, apresentado no Ensino Fundamental.

**Tempo previsto:** 3 módulos.

**Material utilizado:** Folha com atividades disponibilizada pelo professor, lápis e borracha, cola lápis de cor, recortes de cartolina colorida, quadro e giz.

**Desenvolvimento:**

**1º momento:**

Inicialmente será proposta aos alunos a resolução de dois problemas, utilizando-se material concreto.

O professor iniciará a atividade distribuindo a cada aluno uma folha com o seguinte problema:

Problema 1: A diretora da escola quer trocar o uniforme dos alunos, que já está bem antigo, e para esta escolha ela gostaria da opinião dos mesmos através de uma votação. Como a professora de Matemática comentou que seus alunos estavam estudando Análise Combinatória ela resolveu pedir à turma que elaborasse um cartaz com todas as possibilidades de escolha do novo uniforme para que o restante da escola possa decidir. Quais serão essas possibilidades, já que a diretora informou aos discentes que a fábrica disponibilizou 3 modelos de camisa e 2 modelos de calça?

Em seguida, será distribuída mais uma folha em branco onde serão feitas as colagens dos possíveis uniformes, utilizando os seguintes recortes de 2 modelos de calça e 3 modelos de blusa.



Figura 11 O novo uniforme



Os recortes serão colocados em uma caixa no meio da sala de aula de modo que cada aluno utilize a quantidade que julgar necessária para realizar sua atividade.

Depois de entregar o material necessário para a execução da atividade, o professor deverá orientar os discentes de que a tarefa de cada um será montar todas as combinações de calças e blusas possíveis, usando para isso os recortes disponibilizados, a folha em branco e cola.

Assim que o professor verificar que todos os trabalhos estão concluídos, ele deverá pedir para que cada discente compare sua atividade com as dos colegas próximos e discutam os resultados.

Como a quantidade de maneiras de montar os uniformes com 2 calças e 3 blusas é propositalmente pequena, espera-se que todos, ou pelo menos a grande maioria dos alunos, consiga determiná-las.

Antes de fazer qualquer comentário ou mesmo explicar aos alunos a resolução do primeiro problema, o professor passa para uma segunda atividade que tem por objetivo reforçar a ideia do princípio multiplicativo que, até o momento, os alunos não conhecem formalmente.

Novamente é distribuída a cada aluno uma folha de papel onde estarão impressas 20 bandeirinhas compostas por três faixas horizontais cada uma. Será disponibilizada também uma caixa com vários lápis de colorir, contendo apenas as cores azul, amarela e preta, que novamente será colocada no centro da sala, facilitando assim o acesso de todos.

Problema 2: Como o uniforme da escola será renovado, a direção da escola resolveu também criar uma nova bandeira. Esta será composta por 3 faixas horizontais nas cores azul, amarela e preta, que são as cores da instituição, e no centro será bordado o emblema da escola. Quantas bandeiras são possíveis de se obter, de modo que faixas vizinhas tenham cores diferentes?

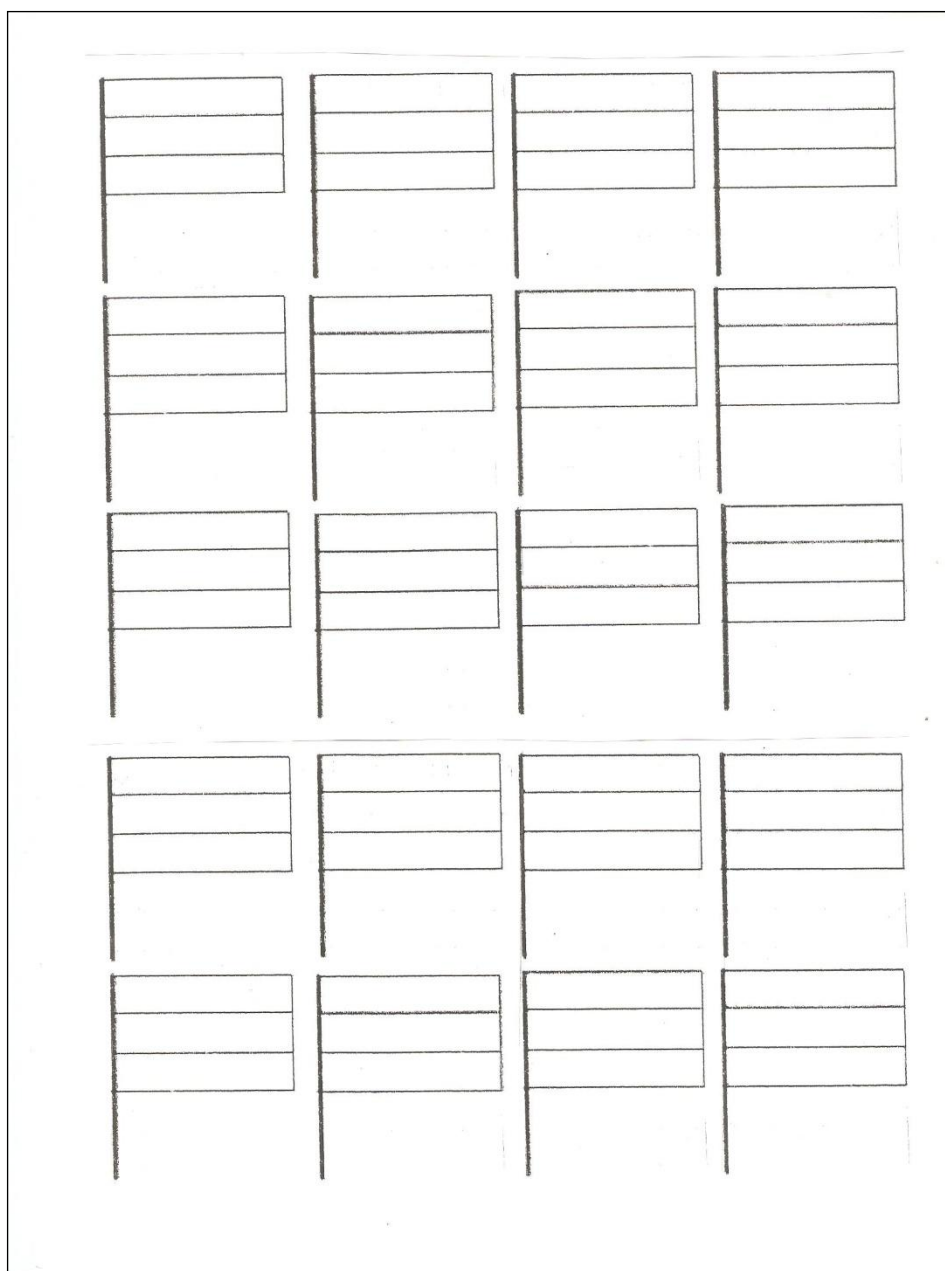


Figura 12 A nova bandeira da escola

O professor justifica a escolha do tema para a atividade argumentando que times, países, cidades, estados e escolas têm uma bandeira como um de seus símbolos.

Em seguida, orienta os alunos a colorirem as bandeiras usando apenas os lápis disponíveis na caixa, para que não apareçam cores diferentes das pré-definidas. A única regra que devem obedecer é não pintar listras vizinhas com a mesma cor.

Novamente, como a quantidade de maneiras de se pintar a bandeira com as cores dadas é relativamente pequena, espera-se que todas as possibilidades apareçam.

Os alunos devem ser alertados a fazerem a atividade com calma. De maneira análoga ao que foi proposto no primeiro problema os alunos devem ser orientados a socializar sua atividade com os colegas mais próximos, fazendo uma comparação e discutindo os resultados encontrados.

### **2º momento:**

Terminada a parte prática da atividade, o professor dispõe em seu material das 12 bandeiras possíveis em tamanhos maiores para facilitar a visualização e apresentará aos alunos, fazendo aos alunos os possíveis questionamentos: há alguma possibilidade diferente? Porque o resultado foi 12? Se pudéssemos usar 4 cores o resultado seria diferente? E se fossem 4 listras? e ainda, se não houvesse a regra de não podermos pintar listras vizinhas com a mesma cor, também encontraríamos o resultado 12? O professor vai conduzindo uma pequena discussão, incentivando a participação de todos os alunos.

Passado esse momento de discussão, o professor repete a mesma estratégia, agora utilizando os resultados da atividade 1, ou seja, questiona os alunos com perguntas do tipo: se a fábrica de uniformes disponibilizasse 3 modelos de camisa e 3 modelos de calça, ou mesmo, 3 modelos de camisa e 4

modelos de calça, qual seria o número de uniformes? E se tivéssemos que escolher a blusa de cor diferente da calça?.

Ainda sem comentar ou explicar as respostas obtidas através das indagações levantadas nos problemas 1 e 2, o professor passa então para a parte teórica e formal da aula.

Isto se inicia com a definição do tema Análise Combinatória e suas principais aplicações na vida cotidiana dos alunos, como forma de motivação. O professor pode usar como exemplos a quantidade de números de telefone possíveis, de placas de automóveis, de maneiras de se vestir, de possibilidades de montar um sanduíche dispondo de vários recheios, etc. Em seguida, o professor enuncia formalmente o Princípio Multiplicativo e volta aos problemas propostos no início da aula, para que o aluno perceba a aplicabilidade do mesmo.

É oportuno neste momento que o professor retome aqueles questionamentos feitos durante a exposição dos trabalhos dos alunos e agora sim, comente, corrija e esclareça sobre as respostas dos mesmos.

Com isso, a compreensão do Princípio Multiplicativo e das circunstâncias em que se aplica, é o ponto fundamental e a utilização das duas atividades práticas torna-se ponto primordial para que a fórmula seja vista como uma síntese de raciocínios e não como uma definição sem motivação.

Uma comparação entre a resolução dos problemas 1 e 2 também deve feita pelo professor a fim de levar o aluno a perceber que na resolução de problemas, em alguns casos, há algumas condições iniciais que devem ser observadas no momento de se tomarem as decisões.

Para finalizar esse segundo momento, o professor deve trabalhar os dois exemplos abaixo, apresentando as estratégias de árvore de possibilidades e tabela de dupla entrada, para mostrar outras formas de raciocínio e reforçar os conceitos ensinados.

**Exemplo 1:**

Chegam a uma danceteria 7 amigos: Jeferson, Fabrício, Rodrigo, Cláudia, Natália, Andreza e Carolina. Quantos casais (homem e mulher) é possível formar?

Para formar os casais é necessário escolher um homem e uma mulher. A escolha do homem pode ser feita de três maneiras diferentes: Jeferson ou Fabrício ou Rodrigo e da mulher, de quatro maneiras distintas: Cláudia ou Natália ou Andreza ou Carolina.

Assim, temos  $3 \times 4 = 12$  maneiras diferentes de compor os casais.

Um possível diagrama de árvore para esse problema segue abaixo:

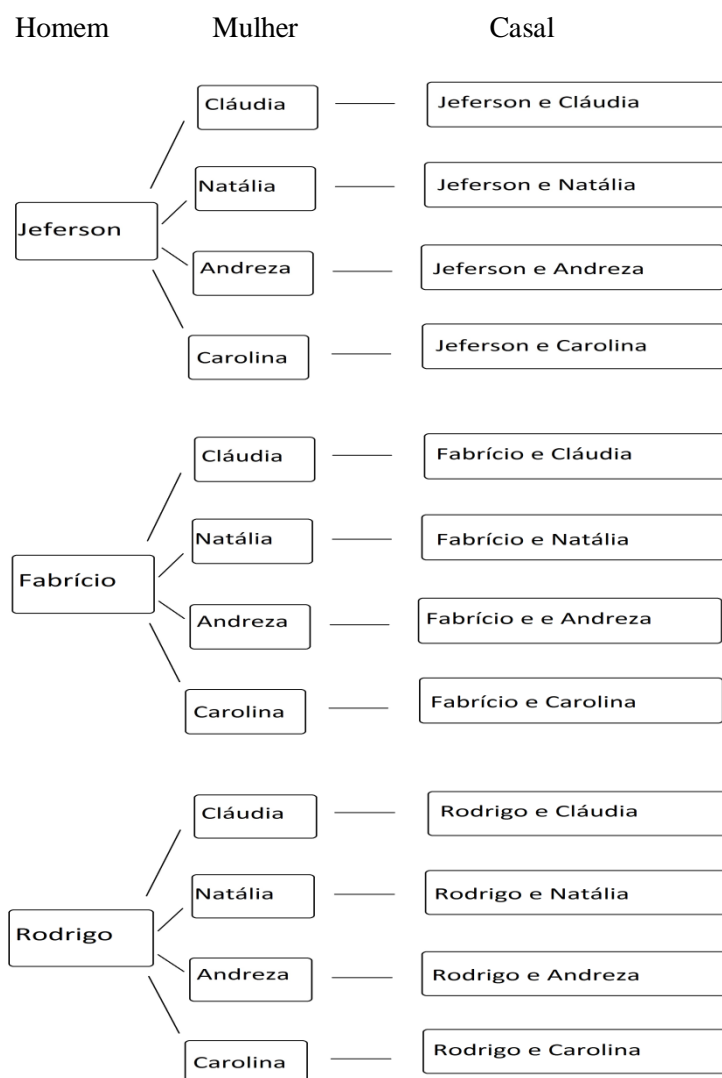


Figura 13 Árvore de possibilidades do exemplo 1

**Exemplo 2:**

Para fazer uma viagem de Vitória para Belo Horizonte e retornar a Vitória, posso usar como transporte o trem, o ônibus ou o avião. De quantos

modos posso escolher os transportes se não desejo usar na volta o mesmo meio de transporte usado na ida?

Uma outra estratégia de resolução onde os alunos conseguem visualizar os resultados possíveis é a construção de uma tabela de dupla entrada.

Ida/volta	Trem	Ônibus	Avião
Trem	_	Trem – ônibus	Trem –avião
Ônibus	Ônibus-trem	_	Ônibus–avião
Avião	Avião-trem	Avião-ônibus	_

Novamente, o professor deverá mostrar aos estudantes a aplicação do princípio multiplicativo, explicando que a escolha do transporte de ida poderá ser feito de 3 modos diferentes. Depois dessa decisão, a escolha do transporte da volta, respeitando-se a restrição proposta no enunciado do problema, far-se-á de 2 modos. Assim pelo princípio multiplicativo, a resposta é  $3 \times 2 = 6$ , conforme demonstrado na tabela acima.

### 3º momento:

O próximo passo será a aplicação de uma lista de problemas. Os alunos deverão sentar-se em duplas, a fim de trocarem experiências e opiniões sobre as estratégias de resolução, e deverão registrar todos os passos utilizados.

A lista de exercícios que se segue foi elaborada utilizando-se problemas contextualizados, com o propósito de levar o aluno a desenvolver estratégias de resolução.

**Lista de problemas:**

1) A cantina da escola oferece 5 tipos de salgados ( empada, pastel, coxinha, quibe e esfiha) e 3 tipos de bebida ( refrigerante, suco e chá gelado). De quantas maneiras diferentes um aluno pode fazer um lanche contendo um salgado e uma bebida?
2) A sorveteria Sabor de Verão disponibiliza a seus clientes 10 sabores diferentes de sorvete e 4 de coberturas. De quantas maneiras diferentes é possível escolher um sorvete com duas bolas e uma cobertura de modo que os sabores sejam diferentes?
3) Juliana quer organizar seus livros de Matemática, História, Geografia, Química e Física em uma estante. De quantas maneiras ela poderá fazê-lo?
4) Quantos são os números naturais que se escrevem com três algarismos distintos?
5) Uma loja de artigos masculinos oferece a seus clientes 5 modelos de camisa, 3 modelos de calça e 2 modelos de sapato. De quantos modos distintos um homem pode comprar um traje completo?
6) Cada turma do Ensino Médio da escola escolherá um presidente e um vice-presidente, para representar os alunos perante a direção da escola. De quantas maneiras diferentes essa escolha pode ser feita no 2º ano A que possui 30 alunos?
7) As cidades de Céu Azul e Felicidade são ligadas por 4 rodovias e as cidades de Felicidade e Morro Alto por 3 rodovias. De quantos modos diferentes uma pessoa pode ir de Céu Azul até Morro Alto passando por Felicidade?
8) Uma moeda é lançada três vezes consecutivas. Representando cara por c e coroa por k, monte uma árvore de possibilidades para mostrar os possíveis resultados dos lançamentos.

**Comentários:** Acreditamos que os primeiros contatos com o raciocínio combinatório deverão ser intuitivos, com discussões livres, proporcionando ao aluno oportunidade de apontar caminhos para solucionar os problemas, que o



motive a desenvolver técnicas sistematizadas para a descrição dos casos possíveis, bem como para sua contagem. Por isso, a proposta é iniciar a sequência de atividades com problemas simples, com pouco número de casos. Essa primeira atividade prática pode ser trabalhada com alunos de ensino fundamental.

**Avaliação:** A avaliação dessa atividade deverá ser feita através da observação por parte do professor do envolvimento dos alunos na resolução dos dois problemas iniciais e também através da correção da lista de exercícios com a participação oral da turma e uma prova escrita, e tem por objetivo verificar se a habilidade do aluno de aplicar o Princípio Multiplicativo à contagem de objetos, que podem ser descritos como sequências de eventos independentes, foi adquirida e desenvolvida.

## **ATIVIDADE 2 – AS PLACAS DE VEÍCULOS E OS NÚMEROS DE CELULARES**

**Tema:** Contagem

**Público-alvo:** Alunos do 2º ano do Ensino Médio.

**Objetivo:** Capacitar o aluno a resolver problemas combinatórios, com um grau de complexidade um pouco maior do que os da atividade 1, utilizando o princípio multiplicativo.

**Pré-requisitos:** Conhecimento prévio de problemas simples resolvidos usando princípio multiplicativo.

**Tempo previsto:** 2 módulos, o primeiro dividido em 30 minutos para a resolução dos problemas propostos e 20 minutos para a plenária, e o segundo para a resolução dos problemas complementares.

**Possíveis dificuldades:** Necessidade de rever o conceito de Princípio Multiplicativo, visto no 1º ano do Ensino Médio.

**Material utilizado:** Folha com problemas, lápis e borracha, folha em branco, quadro e giz.

**Desenvolvimento:**

Com o intuito de fazer os alunos perceberem que o raciocínio de resolução nessa atividade será o mesmo que eles utilizavam na resolução de problemas simples de contagem, o professor recordará com eles problemas mais simples e de resultados menores como os que seguem:

- a) Quantas placas contendo uma letra e um algarismo é possível formar? Enumere-as.
- b) E se as mesmas tiverem apenas uma letra, que só poderá ser A ou B, seguidas de três algarismos?
- c) Quantas são as possibilidades de placas com duas letras seguidas de quatro algarismos que só podem ser selecionados entre os algarismos 1,3, 4, 5 e 8.

Após as discussões das resoluções desses problemas, o professor pedirá a seus alunos que formem duplas e entregará uma folha com dois problemas impressos e mais uma folha em branco.

<p>Problema 1: As placas de carros: As placas dos veículos automotivos brasileiros são compostas, além do nome da cidade e do estado brasileiro em sua parte superior, por três letras seguidas de quatro algarismos. De acordo com esses dados, quantas placas diferentes podem ser confeccionadas?</p>
--



Figura 14 Modelos de placas de automóveis brasileiros

Fonte: Carros na Web (2013)

Problema 2 – Os números de celulares: Hoje em dia a maioria das pessoas possui um ou mais aparelhos de celular. Sem considerarmos o DDD, a maioria dos números de celulares em nosso país são formados por oito algarismos. Com base nessa informação, quantos números de celulares de oito algarismos podem, teoricamente, ser criados?

Com os alunos já de posse do material, o professor instruirá os mesmos a lerem os problemas e antes de pedir para tentarem resolvê-los, questionar os alunos sobre a quantidade possível de casos em cada situação e se é viável enumerá-los diretamente.

Com a finalidade de motivar os alunos, o professor poderá citar algumas curiosidades sobre as placas de veículos brasileiros tais como:

- a) a placa com todos os quatro algarismos zero precedida de qualquer combinação de três letras não existe;
- b) as placas de duas letras e quatro números foram substituídas pelo modelo atual com três letras e quatro números em 1990, primeiramente no estado do Paraná e só depois de 9 anos foi totalmente implantada em todos os Estados brasileiros. Aproveitando

essa informação o professor comenta sobre qual a quantidade de novas placas que ocorreu com essa mudança;

- c) cada Estado tem uma combinação específica para o primeiro emplacamento. Por exemplo, em Minas Gerais, só existem as combinações de GKJ 0001 a HOK 9999;
- d) as placas dos veículos são como seu RG, portanto não existem placas iguais.

Com o mesmo propósito explicitado anteriormente, o professor fará alguns comentários sobre a importância da posição dos algarismos num número de telefone celular, usando para isso a seguinte situação hipotética: Carlos quer ligar para sua amiga Flávia cujo número do telefone celular é 9125-3245. Se ele discar 9125-3254 ele conseguirá falar com sua amiga?

Outro fato interessante que o professor poderá colocar em discussão é sobre o acréscimo do dígito 9 à frente dos números dos celulares atuais de área DDD 11 (São Paulo), a partir de 29/07/2012. Perguntas do tipo “qual o número de novas linhas que serão disponibilizadas com esse acréscimo?” deverão ser propostas à turma. Segundo a Agência Nacional de Telecomunicações (Anatel), a inclusão de mais um dígito vai permitir o uso de numerações atualmente iniciadas por 2, 3, 4 e 5, que hoje só são utilizadas na telefonia fixa. Nos últimos 12 meses, houve um crescimento de 17% no número de telefones móveis na região, com a habilitação de cerca de 5 milhões de novas linhas. Usando essa informação, o professor novamente poderá fazer questionamentos aos alunos.

Nesta atividade 2 a importância ou não da ordem dos elementos em cada agrupamento não é explicitada pelo professor, mas já é dominada de forma intuitiva pelos alunos e esse fato é fundamental para execução de atividades futuras, em que o objetivo será a resolução de problemas que envolvam arranjos e combinações simples.

Passado o tempo previsto para a resolução dos problemas, o professor solicitará que cada dupla exponha suas ideias para o restante dos alunos. Em seguida fará comparações entre os resultados obtidos e formalizará a definição do Princípio Multiplicativo.

Para reforçar ainda mais a construção dos conceitos pelos estudantes, achamos interessante o professor propor a resolução e discussão de mais alguns problemas sobre quantidade de números de identidades, senhas de banco e de cartão de crédito, sendo elas alfabéticas, numéricas ou alfanuméricas.

Sugestões de problemas:

- a) Julia foi tirar seu documento de identidade pela primeira vez. Como ela está cursando o Ensino Médio e aprendendo Análise Combinatória, resolveu investigar quantos documentos diferentes é possível emitir no Estado, já que o RG em Minas Gerais atualmente possui 7 dígitos. Qual foi o resultado encontrado por Júlia?
- b) As senhas fazem parte do nosso dia a dia. Seja no banco, no e-mail, nas redes sociais e até em modernas fechaduras residenciais estamos o tempo todo rodeados por essas combinações. Elas podem ser alfabéticas, numéricas ou alfanuméricas. Vamos fazer algumas investigações:
  - Quantas senhas alfabéticas de 4 letras podemos obter usando nosso alfabeto de 26 letras?
  - E se as senhas do problema anterior não puderem ter letras repetidas?
  - Em alguns bancos, as senhas possuem 6 dígitos numéricos precedidos por três letras do nosso alfabeto. Quantas senhas diferentes é possível obter fazendo essa combinação sem nenhum tipo de restrição?
- c) As redes sociais são febre entre os adolescentes. Determine a quantidade de senhas de acesso a essas redes são possíveis em cada situação abaixo:

- quatro letras do nosso alfabeto;
- seis dígitos;
- duas letras seguidas de três dígitos sem repetição;
- cinco letras distintas alternadas por quatro números também distintos;
- seis números seguidos de quatro letras.

**Comentários:** Observemos que a escolha do tema dos dois problemas foi baseada em situações do cotidiano do aluno, com o intuito de facilitar sua interpretação e conseqüentemente sua resolução.

Como esses alunos possivelmente já tiveram um contato com conceitos introdutórios de Análise Combinatória em anos anteriores, através resolução de problemas elementares de contagem utilizando o princípio multiplicativo, seguindo orientações do CBC, pressupõe-se que não vão ocorrer grandes dificuldades na resolução dos mesmos. Acreditamos que a maioria já tem um conceito consolidado do Princípio Multiplicativo e, aqui nessa fase do estudo da Análise Combinatória, o único diferencial é o grau de dificuldade dos problemas, principalmente no que se refere à quantidade de resultados obtidos.

**Avaliação:** Deverá ser feita durante uma plenária através da participação e apresentação dos resultados obtidos.

### **ATIVIDADE 3 – CONJUNTOS E SEQUÊNCIAS**

**Tema:** Contagem

**Público-alvo:** Alunos do 2º ano do Ensino Médio.

**Objetivo:** Capacitar o aluno a identificar, em situações-problema, agrupamentos associados a conjuntos e sequências.

**Tempo previsto:** Um módulo dividido em 20 minutos para que os alunos respondam as questões e 30 minutos para que apresentem suas respostas e justificativas das mesmas para o restante da turma.

**Possíveis dificuldades:** Pouca familiaridade dos alunos com a linguagem elementar de conjuntos, em particular o conceito de subconjunto.

**Material utilizado:** Folha com problemas, lápis e borracha, transparências, canetas para transparências e retroprojektor.

**Desenvolvimento:**

Esta atividade será feita em grupos de 4 alunos, com o objetivo de otimizar o tempo e principalmente promover a troca de experiências.

O professor deverá acompanhar as discussões em cada grupo e no momento da apresentação fará um papel intermediador com questionamentos dirigidos.

Logo após determinar os grupos, o professor deverá fazer indagações da forma: “Considere os números 1, 3, 4 e 7. Organizando-os em forma de conjuntos que resultados podemos obter? Esses resultados representam o mesmo conjunto? Usando os mesmos algarismos, agora para formar numerais de quatro dígitos, cite alguns deles. Apesar de todos os exemplos serem compostos pelos mesmos algarismos, podemos dizer que os números formados são iguais ou representam a mesma quantidade?”

Depois desses questionamentos, o professor deixa que os estudantes discutam entre si e tirem suas próprias conclusões sobre a relevância ou não da ordem dos elementos em cada tipo de agrupamento.

O objetivo desta etapa é que os alunos construam os conceitos de subconjuntos ou sequências.

Em seguida, professor deverá entregar a folha com os problemas e uma transparência e instruirá os alunos para que respondam às questões propostas e registrem suas respostas na transparência recebida.

Os problemas propostos serão os seguintes:

- 1) Responda as questões a seguir identificando quais situações abaixo os objetos envolvidos podem ser descritos por subconjuntos ou sequências.
  - a) Um pódio de uma corrida de Fórmula 1 com 1º, 2º e 3º colocados de um grupo de 25 competidores pode ser descrito com um subconjunto ou como uma sequência?
  - b) Um número de celular formado a partir dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 pode ser descrito como um subconjunto ou como uma sequência?
  - c) Um time de futebol de salão com 6 componentes escolhidos num grupo de 40 alunos pode ser descrito como um subconjunto ou como uma sequência?



- 2) Exemplifique as situações abaixo onde os objetos representam subconjuntos ou sequências:
- a) Placas de carros com três letras seguidas de 4 algarismos, como modelos de sequências.
  - b) Escolha de 3 frutas diferentes para se fazer uma vitamina representando conjuntos.
  - c) A fila do lado das janelas da sala, através dos nomes dos alunos, representando sequências.
  - d) Possíveis conjuntos de apostas na mega sena.
  - e) Organização, lado a lado, de 5 livros numa estante, sendo um de matemática, um de química, um de física, um de português e um de biologia, como modelos de sequências.

Passado o tempo programado para a resolução dos problemas, o próximo passo será a apresentação e discussão das soluções através dos registros feitos nas lâminas, com o auxílio de um retroprojeter.

O professor poderá pedir a alguns alunos que comentem as respostas obtidas por outros grupos.

**Avaliação:** Deverá ser feita através da observação do envolvimento e dos registros de cada grupo, durante a resolução dos problemas. A verificação da habilidade do aluno em distinguir situações em que os objetos envolvidos podem ser descritos por subconjuntos ou sequências deverá acontecer no momento da plenária.

#### **ATIVIDADE 4 – ARRANJOS e COMBINAÇÕES**

**Tema:** Contagem

**Público-alvo:** Alunos do 2º ano do Ensino Médio.

**Objetivo:** Capacitar o aluno para comparar a quantidade de agrupamentos ordenados com a quantidade de agrupamentos não ordenados e encontrar a quantidade de agrupamentos possíveis.

**Tempo previsto:** Um módulo.

**Possíveis dificuldades:** Decidir se a ordem é relevante ou não, em cada problema proposto.

**Material utilizado:** Lápis, papel e borracha.

**Desenvolvimento:**

O professor deverá selecionar cinco alunos da classe, que ficarão de pé na frente da turma, ao lado do quadro. Esse será dividido ao meio e em cada parte serão registradas as respostas dos alunos frente aos questionamentos do professor.

Em seguida, o docente explica à classe que dois desses cinco alunos que estão na frente serão escolhidos para representar os colegas de sala, em duas situações diferentes.

Na primeira, os dois alunos serão escolhidos como presidente e vice-presidente da turma na composição de uma chapa do grêmio estudantil da escola.

Já na segunda situação hipotética, os dois alunos serão escolhidos para fazer parte do colegiado da escola representando aquela turma.

Já com os dois problemas anotados em cada metade do quadro, o professor deverá pedir que os alunos respondam oralmente as possibilidades possíveis e simultaneamente deverá registrá-las.

Durante a participação da turma, o professor não deverá fazer nenhum tipo de comentário ou questionamento sobre a questão da importância ou não da ordem dos elementos, em cada tipo de agrupamento.

A quantidade pequena de resultados a ser obtida é fator importante para que seja razoavelmente fácil para os alunos enumerarem todas as possíveis soluções.

É provável que a quantidade de respostas para a segunda situação seja a mesma da primeira, ou seja, alguns alunos não perceberão que, nesse caso, o agrupamento não é ordenado e que portando contou possibilidades a mais.

Como a ideia é o professor anotar fielmente as respostas dadas pelos alunos, somente no final do registro ele deverá mostrar que, algumas duplas foram contadas duas vezes e aproveitar esse momento para conceituar os agrupamentos denominados arranjos simples e combinações simples.

**Avaliação:** O professor deverá pedir a cada aluno que registre, numa folha em branco, os eventos ocorridos na aula e deem uma explicação detalhada do porquê, em cada situação, a quantidade de resultados ser diferente. Essa folha deverá ser entregue no final da aula.

## **ATIVIDADE 5 – APRESENTAÇÃO DOS MODELOS MATEMÁTICOS**

**Tema:** Contagem

**Público-alvo:** Alunos do 2º ano do Ensino Médio.

**Objetivo:** Capacitar o aluno a reconhecer e utilizar as fórmulas necessárias para cada tipo agrupamento (arranjos, combinações e permutações sem repetição).

**Tempo previsto:** Dois módulos.

**Possíveis dificuldades:** Pouca familiaridade dos alunos com a notação fatorial.

**Material utilizado:** Lápis, papel, borracha e folha com problemas.

**Desenvolvimento:**

Nesta atividade o professor formaliza, através de três problemas, os conhecimentos de arranjos, combinações e permutações simples, apresentando suas fórmulas.

Ele distribuirá a cada aluno uma folha contendo três problemas que envolvem agrupamentos diferentes.

Folha de exercícios da atividade 5:

- |   |
|---|
| 1) Anagramas são o conjunto de "palavras" distintas que você pode formar com um determinado grupo de letras. Quantos são os anagramas da palavra ALUNO?   |
| 2) O corpo administrativo de uma escola é formado pelo Diretor, Vice-diretor e Secretário. A escola possui 20 funcionários interessados em fazer parte dessa administração. Determine de quantas formas diferentes pode ser formada uma chapa para concorrer a estes cargos, lembrando que um será diretor, o outro vice-diretor e um terceiro será o secretário. |
| 3) Durante a aula de Educação Física do 2º ano A, a professora propõe uma atividade conhecida como Jogo de Queimada. Participam do jogo dois times de 6 pessoas em cada time. De quantas maneiras a professora poderá escolher cada time, se nessa turma estudam 20 alunos?   |

O primeiro é um problema de arranjo simples, o segundo de permutação simples e o terceiro de combinação simples.

Antes de apresentar fórmulas e resolver cada problema utilizando-as, o professor deve interagir com a turma pedindo sugestões de resolução.

Em seguida, considerando todos os conhecimentos prévios dos alunos professor deverá apresentar as fórmulas.

### **Apresentação das fórmulas:**

O professor coloca, inicialmente, para os alunos que os arranjos simples são agrupamentos em que a ordem dos elementos é importante no resultado. Os arranjos denominados simples são aqueles em que os elementos não se repetem.

A fórmula geral utilizada no cálculo da quantidade de arranjos simples é:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Onde  $n$  representa o número de elementos do conjunto considerado e  $p$  o número de elementos a serem agrupamentos.

Nos casos onde  $n=p$  obtemos agrupamentos denominados permutações simples e a fórmula anterior se resume a:

$$P_n = n!$$

No caso das combinações simples, o professor deve reforçar com os alunos que elas são agrupamentos com elementos distintos, que não se alteram mudando-se apenas a ordem de posicionamento dos elementos no grupo, observando que a diferenciação ocorre apenas quanto à natureza dos elementos, quando há mudança de elementos.

A fórmula da combinação simples é:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Com  $n$  sendo o número total de elementos disponíveis e  $p$  os elementos que serão agrupados.

**Avaliação:** Acontecerá através da resolução de uma lista de problemas elaborada pelo próprio professor usando o livro didático como apoio. Os alunos deverão resolvê-la em casa e entregar ao professor na próxima aula.

## **ATIVIDADE 6 – PERMUTAÇÃO CÍCLICA**

**Tema:** Contagem

**Público-alvo:** Alunos do 3º ano do Ensino Médio.

**Objetivos:** Capacitar o aluno a resolver problemas que envolvam permutações cíclicas.

**Tempo previsto:** 2 módulos .

**Possíveis dificuldades:** Se o professor tiver dificuldade de levar as cadeiras para a quadra ou para o lugar onde a atividade dança das cadeiras será realizada, o mesmo poderá substituí-las por sinais feitos de giz no chão.

**Material utilizado:** Cadeiras em número suficiente para a turma, aparelho de som, máquina fotográfica digital ou aparelho de celular com câmera, data-show, livro didático, caderno, folha em branco, caneta e borracha.

**Desenvolvimento:**

**1º momento:** A dança das cadeiras.

O professor deverá levar seus alunos para a quadra ou pátio da escola e dividir sua turma em grupos de 6 alunos cada. No local escolhido para a realização da atividade já deverão estar preparados um aparelho de som e vários círculos com 5 cadeiras numeradas em cada um. As cadeiras deverão ser numeradas para que nenhuma saia do seu lugar de origem.

É interessante e motivador que as músicas escolhidas, sejam adequadas ao ambiente escolar e ao mesmo tempo ao cotidiano dos alunos.

Cada grupo terá um fiscal e cinco participantes que se sentarão nas cadeiras cada vez que a música parar. O professor explicará aos alunos que a

brincadeira funcionará de forma semelhante à brincadeira tradicional, porém ninguém ficará de pé e nenhuma cadeira será retirada.

Deve ficar claro para os alunos que toda vez que a música parar eles terão que trocar de posição dentro do grupo antes de se sentarem nas cadeiras.

Cada aluno que foi escolhido como fiscal tem uma máquina fotográfica em mãos e ficará num grupo diferente do seu.

A função do aluno escolhido como fiscal é registrar cada configuração formada quando a música cessa. Caso a quantidade de alunos não seja múltipla de 6, o professor designa mais de um fiscal em cada grupo.

Como a permutação circular de 5 elementos é 24, a música será interrompida 24 vezes e a cada interrupção os alunos se sentam em posições diferentes. A cada momento desses o fiscal anota em sua folha a configuração obtida pelo grupo.

Fora de seu horário de aula na turma, o professor deverá solicitar a 5 alunos de outra turma ou mesmo colegas docentes, que se posicionem no círculo de cadeiras, nas cinco configurações iguais. Cada configuração será fotografada.

**2º momento:** A análise dos resultados.

De volta à sala de aula, usando um data-show, o professor explica à turma que o objetivo da atividade é entender a permutação cíclica. Ele utiliza um dos grupos selecionados para mostrar que, quando os objetos distintos estão dispostos em círculo, só conseguiremos uma nova configuração se os objetos forem permutados entre si, pois se apenas deslocarmos os objetos no sentido horário ou anti-horário, a configuração continua a mesma.

Em seguida, o professor socializa com a turma as 24 fotos de cada grupo. Nesse momento, os alunos identificarão se algum grupo conseguiu formar todas as configurações possíveis.

A cada grupo analisado, o professor deverá anotar no canto do quadro a quantidade de configurações diferentes obtidas, para que, no final, seja identificado o grupo campeão.

Para reforçar o conceito de permutação cíclica o professor, nesse momento, irá projetar as 5 fotos feitas de uma possível configuração com os alunos voluntários.

**Comentários:** É interessante que, ao final dessa atividade, o professor utilize os exercícios sobre permutação cíclica do livro didático adotado em sua escola, com a finalidade de fixar o aprendizado dos alunos.

Um fator motivante para a atividade é o formato de jogo, disputa.

**Avaliação:** Participação dos alunos na execução da atividade. Entrega de uma lista de exercícios propostos.

## **ATIVIDADE 7 – AS PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÃO**

**Tema:** Contagem

**Público-alvo:** Alunos do 3º ano do Ensino Médio.

**Objetivos:** Capacitar o aluno para resolver problemas de permutação com repetição.

**Tempo previsto:** 1 módulo.

**Pré-requisitos:** Conhecimento prévio de problemas de permutação simples.

**Possíveis dificuldades:** Alunos que não dominem a resolução de problemas de permutação simples, surgindo assim a necessidade de uma breve revisão.

**Material utilizado:** Folha contendo problemas de permutações com repetição, caderno, lápis, caneta e borracha.



**Desenvolvimento:**

Esta atividade poderá ser feita em dupla ou individual.

O professor distribui a folha com os problemas e pede que os alunos resolvam em seu caderno.

Os problemas serão os seguintes:

- |   |
|---|
| 1) A mãe de Marina trabalha fora e para controlar melhor os horários da filha fez a seguinte recomendação: Marina deve ocupar suas tardes com as atividades- duas horas para estudar, uma hora livre e uma hora para ajudar nos afazeres da casa. Sendo essas duas horas de estudo divididas em dois módulos de uma hora. De quantas maneiras diferentes Marina pode organizar suas tardes? Dica: faça a enumeração das possibilidades usando para isso canetas de cores diferentes para representar os dois módulos de uma hora de estudo. |
| 2) Como Marina está se saindo muito mal na escola, sua mãe resolveu trocar a hora livre por mais uma hora de estudos. E agora, quantas são as maneiras de Marina realizar suas tarefas? Novamente enumere os casos.   |
| 3) Com pena de Marina, sua mãe pensou melhor e resolveu permitir a hora livre que foi retirada, mas com a condição de que os três módulos de estudo de uma hora permanecessem. Nesse caso, quais serão as possibilidades? Atenção: a enumeração nesse caso é inviável.  |

**Comentários:** Considerando-se que todos os outros conteúdos já foram trabalhados em anos anteriores, espera-se que a maior parte dos alunos já tenha capacidade de perceber a mudança de padrão na resolução de problemas de permutação simples para os de permutação com repetição.

**Avaliação:** Observação do envolvimento e desenvoltura de cada aluno na resolução dos problemas.

## ATIVIDADE 8–LISTA DE EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

**Tema:** Contagem

**Público-alvo:** Alunos do 3º ano do Ensino Médio.

**Objetivos:** Capacitar o aluno a identificar e resolver os diferentes tipos de problemas de Análise Combinatória trabalhados no Ensino Médio.

**Tempo previsto:** 2 módulos.

**Possíveis dificuldades:**

Pode ser que alguns alunos ainda não tenham adquirido todas as habilidades trabalhadas nas atividades anteriores.

**Material utilizado:** Folha com uma lista de exercícios complementares, caneta, lápis, borracha, caderno de matemática, livro didático.

**Desenvolvimento:**

O professor deverá entregar uma folha para cada aluno e pedir que os mesmos resolvam os problemas. Será informado também que essa folha será recolhida no final da atividade para ser corrigida e valorizada.

Lista de problemas da atividade 8:

1) OBMEP (2008) - <i>Amigo Oculto</i> - Um grupo de 5 amigos decide brincar de “ amigo oculto”. Para isso, cada um dos 5 amigos compra um presente para seu amigo oculto. Pelas regras do jogo cada um troca exatamente um presente com um único amigo. De quantas maneiras os presentes podem ser trocados?
2) Banco de Questões do PROEB- MG. (M120234A8) Numa escola, foram adotados como uniforme: três camisetas com o logotipo da escola, nas cores branca, azul e cinza; dois tipos de calça comprida, jeans escuro e preta; e o tênis deve ser todo preto ou branco. Considerando-se todas essas variações no uniforme, de quantas maneiras distintas o aluno pode estar uniformizado? a) 7b) 8c) 10d) 12 e) 36
3) Banco de Questões do PROEB-MG. (M11023MG). Sr. Mário ganhou na

loteria um carro novo. Na hora de receber o prêmio ficou sabendo que poderia fazer sua escolha entre 4 modelos diferentes: Gol, Fiesta, Palio ou Corsa e também poderia escolher uma das 6 cores: azul, amarelo, verde, preto cinza ou vermelho. De quantas maneiras diferentes, o Sr. Mário poderá escolher o seu carro?

- a) 10 b) 24 c) 34 d) 36

4) Banco de Questões do PROEB – MG (CE\_JAAF3M26) Um restaurante oferece em seu cardápio, 2 saladas distintas, 4 tipos de pratos de carne, 5 variedades de bebidas e 3 sobremesas diferentes. Uma pessoa deseja uma salada, um prato de carne, uma bebida e uma sobremesa. O número de maneiras para fazer o seu pedido é:

- a) 40 b) 60 c) 80 d) 100 e) 120

5) ENEM (2010) - Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante. A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de:

- A) uma combinação e um arranjo, respectivamente.  
B) um arranjo e uma combinação, respectivamente.  
C) um arranjo e uma permutação, respectivamente.  
D) duas combinações.  
E) dois arranjos.

6) ENEM (2004)-No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura.



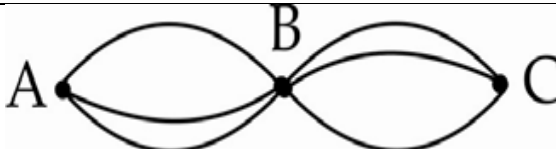
O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é:

- a) 6.
- b) 7.
- c) 8.
- d) 9.
- e) 10.

7) OBMEP (2007) - *Quatro passageiros* - Em um táxi podem se sentar um passageiro na frente e três atrás. De quantas maneiras podem se sentar os quatro passageiros, se um deles quer ficar na janela?

8) OBMEP (2009) - **Jogos de futebol** – Os doze alunos de uma turma de olimpíada saíam para jogar futebol todos os dias após a aula de matemática, formando dois times de 6 jogadores cada e jogando entre si. A cada dia, eles formavam dois times diferentes dos times formados em dias anteriores. Ao final do ano, eles verificaram que cada 5 alunos haviam jogado juntos num mesmo time exatamente uma vez. Quantos times diferentes foram formados ao longo do ano?

9) OBMEP (2006) - Uma formiguinha vai caminhar de A até C passando por B, podendo passar apenas uma vez por esses pontos e pelos caminhos indicados na figura.



Qual o número de maneiras diferentes que ela pode escolher para ir de A até C?

A) 3 B) 5 C) 7 D) 8 E) 9

10) De quantos modos distintos Lucas pode escolher quatro entre as nove camisetas regata que possui para levar em uma viagem?
11) Marcam-se dez pontos em uma circunferência. Quantos polígonos de, pelo menos, seis lados podem ser construídos com vértices nesses pontos?
12) De quantos modos podemos estacionar 20 automóveis em 3 garagens, sabendo que, na primeira, cabem 10 automóveis; na segunda, 6; e na terceira, 4?
13) Num ônibus há 5 lugares. Duas pessoas entram no ônibus. De quantas maneiras diferentes elas podem se sentar?
14) Sobre uma reta marcam-se 4 pontos e sobre uma outra reta, paralela à primeira, marcam-se 5 pontos. Quantos triângulos obteremos unindo 3 quaisquer desses 9 pontos?
15) Tenho 6 livros diferentes de português e 6 diferentes de matemática. Quero colocar 4 livros de português e 3 de matemática na prateleira de uma estante. De quantas maneiras posso fazer isso de modo que livros da mesma matéria fiquem juntos?

**Comentários:** Foram colocados nesta lista exercícios do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) de anos anteriores, dos livros didáticos analisados neste trabalho e também problemas do banco de questões do PROEB.

**Avaliação:** Com o intuito de promover um amadurecimento da aprendizagem do estudante, propomos uma análise através de um estudo de erros, assim o docente deverá corrigir os exercícios de cada aluno fazendo anotações dos erros mais comuns. Na aula seguinte, comentará os erros encontrados sem identificar os alunos que os cometeram. Terminada essa primeira discussão, o professor deverá propor uma nova lista de exercícios para verificar se os conceitos foram realmente aprendidos.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acredita-se que uma aprendizagem significativa em Matemática só acontece através de aulas que utilizam estratégias de investigação, discussão e trabalho em grupo.

No que se refere à Análise Combinatória não é diferente. A comunicação oral ou escrita entre os alunos e professor promove o desenvolvimento de capacidades e a construção de conhecimentos.

Neste trabalho, foi elaborada uma sequência de atividades destinadas a alunos dos três anos do Ensino Médio.

Nessa proposta, o professor assume um papel importante de mediador frente às inúmeras discussões que aparecerão durante a execução das atividades. Essas atividades foram elaboradas utilizando temas do cotidiano e do interesse dos discentes e promovem, durante sua execução, momentos de debate e argumentação em grupo.

Este aspecto interativo proposto em cada atividade, acredita-se ser capaz de colaborar para que os alunos adquiram um conhecimento com significado. Por outro lado, esse modelo pode gerar indisciplina e aí a postura do professor se torna fundamental.

É consenso entre os professores de Matemática que, conseguir uma educação de qualidade através de um conhecimento concreto não é tarefa fácil e depende de estudo, pesquisa e aprimoramento constante. Esperamos, portanto que esta proposta de ensino contribua, de alguma forma, para esse ideal.

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, A. L. de. **Ensinando e aprendendo análise combinatória com ênfase na comunicação matemática**: um estudo de caso com o 2º ano do ensino médio. 2010. 166 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.
- ALMEIDA, A. L. de; FERREIRA, A. C. **Ensinando e aprendendo análise combinatória com ênfase na comunicação matemática**. Ouro Preto: UFOP, 2010. Disponível em:  
<[http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/livreto\\_Adriana\\_Luzie.pdf](http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/livreto_Adriana_Luzie.pdf)>. Acesso em: 12 dez. 2012.
- BARROSO, J. M. **Conexões com a matemática**: ensino médio. São Paulo: Moderna, 2010.v. 2, 440 p.
- BATANERO, C. et al. Estrategias em la resolución de problemas combinatorios por estudiantes com preparación matemática avanzada. **Epsilon**, Sevilla, v. 36, p. 433-446, 1997.
- BERGE, C. **Principles of combinatorics**. New York: Academic, 1971. 111 p.
- BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 1998. 58 p. Disponível em:  
<<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em: 12 mar. 2013.
- BRASIL. **PCN+ ensino médio**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília, 2010. 144 p.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília, 2006. 137 p.
- CARNEIRO, M. J. D.; SPIRA, M.; SABATUCCI, J. **Matemática**: ensinos fundamental e médio. Belo Horizonte: Secretaria de Estado de educação de Minas Gerais, 2007. 80 p. Disponível em:  
<[http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema\\_crv/banco\\_objetos\\_crv/%7B4DA513B4-3453-4B47-A322-13CD37811A9C%7D\\_Matem%C3%A1tica%20final.pdf](http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/banco_objetos_crv/%7B4DA513B4-3453-4B47-A322-13CD37811A9C%7D_Matem%C3%A1tica%20final.pdf)>. Acesso em: 10 mar. 2013.



CARROS NA WEB. Disponível em: <<http://www.carrosnaweb.com.br>>. Acesso em: 10 mar. 2013.

CHARNAY, R. Aprendendo (com) a resolução de problemas. In: PARRA, C. (Org.). **Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artmed, 1996. p. 30-35.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática**. São Paulo: Ática, 1998. 176 p.

DANTE, L. R. **Matemática: ensino médio, volume único**. São Paulo: Ática, 2005. 504 p.

ESTEVES, I. **Investigando fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos: 8ª série do ensino fundamental**. 2001. 203 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

HUANCA, R. R. H. **A resolução de problemas no processo ensino aprendizagem: avaliação de matemática na e além da sala de aula**. 2006. 247 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

IEZZI, G. et al. **Matemática: ciência e aplicações, ensino médio**. São Paulo: Saraiva, 2010. v. 2, 320 p.

LEIBNIZ, G. W. **Dissertatio de arte combinatorial**. Berlin: AkademieVerlag, 1666. 163 p.

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado de Educação. **Boletim pedagógico da escola**. Juiz de Fora: UFJF, 2010. v. 3, 60 p.

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado de Educação. **Resolução nº 753**, de 6 de janeiro de 2006. Institui e regulamenta a organização curricular a ser implementada nos cursos de Ensino Médio das unidades de ensino integrantes do Projeto Escolas-Referência. Belo Horizonte, 2006. Disponível em: <[http://www.educacao.mg.gov.br/index.php?option=com\\_gmg&controller=document&id=1180-resolucao-see-n%C3%82%C2%BA-753-de-06-de-janeiro-de-2006](http://www.educacao.mg.gov.br/index.php?option=com_gmg&controller=document&id=1180-resolucao-see-n%C3%82%C2%BA-753-de-06-de-janeiro-de-2006)>. Acesso em: 12 fev. 2013.

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado de Educação. **SIMAVE/PROEB - 2011**. Juiz de Fora: UFJF, 2011a. v. 1, 51 p.

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado de Educação. **SIMAVE/PROEB - 2011**: matemática: 3º ano do ensino médio. Juiz de Fora: UFJF, 2011b. v. 3, 59 p.

MORGADO, A. C. O. et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991. 343 p. (Coleção do Professor de Matemática).

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999. p. 190-215.

ONUCHIC, L. R. **O ensino de matemática: mudanças no ensino, na aprendizagem, na avaliação e no uso da tecnologia**. Rio Claro: UNESP, 2008. Disponível em: <<http://lourdesonuchic.blogspot.com/2008/07/o-ensino-de-matematica-mudanas-no-ensino.html>>. Acesso em: 2 out. 2013.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). **Educação matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004. p. 212-241.

PIAGET, J. **A formação do símbolo na criança**. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1978. 376 p.

PITOMBEIRA, J. B. Princípio da casa dos pombos. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v. 8, p. 21-23, 1986.

POZO, J. I.; ECHEVERRÍA, M. D. P. P. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, J. I. (Ed.). **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver a aprender**. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 37-41.

ROSA, M. Desmistificando a análise combinatória. In: ENCONTRO NACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 6., 1998, São Leopoldo. **Anais...** São Leopoldo: ENEN, 1998. 1 CD-ROM.

RYSER, H. J. **Combinatorial mathematics: the carus mathematical monograph**. New York: Mathematical Association of America, 1963. 178 p.

SABO, R. D. **Saberes docentes: a análise combinatória no ensino médio.** 2010. 210 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

SILVA, C. X. da; BARRETO FILHO, B. **Matemática aula por aula: ensino médio.** São Paulo: FTD, 2005. v. 2, 400 p.

SILVA, D. N.; FERNANDES, J. A.; SOARES, A. J. Intuições de alunos de 12º ano em combinatória: um estudo exploratório. In: ENCONTRO DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA NA ESCOLA, 1., 2004, Braga. **Anais...** Braga: Universidade do Minho, 2004. 1 CD-ROM.

SISTEMA MINEIRO DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO PÚBLICA. **PROEB.** Disponível em: <<http://www.simave.caedufjf.net/proeb/colecao/>>. Acesso em: 10 dez. 2012.

SISTEMA MINEIRO DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO PÚBLICA. **Programa de avaliação da rede pública de educação básica.** Disponível em: <<http://www.simave.caedufjf.net/proeb/resultadosescala/>>. Acesso em: 10 mar. 2013.

SISTEMA NACIONAL DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA. **SIMAVE PROEB 2011 matemática: 3º ano do ensino médio.** Brasília, 2011. 59 p.

SOUZA, A. C. P. de; NUNES, C. B. A resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática em sala de aula. In: SEMINÁRIO EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, 1., 2008, Jaboticabal. **Anais...** Jaboticabal: UNESP, 2008. 1 CD-ROM.

VAZQUEZ, C. M. R.; NOGUTI, F. C. H. Análise combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais...** Recife: UFPE, 2004. Disponível em: <<http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf>>. Acesso em: 10 mar. 2013.

VERGNAUD, G. La teoria de loscampos conceptuales. **Recherches em Didáctique des Mathématiques**, La Rioja, v. 10, n. 2, p. 133-170, 1990. Disponível em: <[http://ipes.anep.edu.uy/documentos/curso\\_dir\\_07/modulo2/materiales/didactica/campos.pdf](http://ipes.anep.edu.uy/documentos/curso_dir_07/modulo2/materiales/didactica/campos.pdf)>. Acesso em: 10 abr. 2013.

WIELEITNER, H. **Historia de la matemática**. Barcelona: Labor, 1932. 134 p.

ZUFFI, E. M.; ONUCHIC, L. de la R. O ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas e os processos cognitivos superiores. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, Cali, n. 11, p. 79-97, sept. 2007.

Disponível em:

<[http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/educacion/concepciones/O%20Ensinno-Aprendizagem%20de%20matem%C3%A1tica%20atrav%C3%A9s%20da%20resolucao%20de%20problemas%20e%20os%20procesos%20cognitivos%20superiores.\\*Zuffi%20Maura,%20Edna.\\*Union\\_011\\_009.pdf](http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/educacion/concepciones/O%20Ensinno-Aprendizagem%20de%20matem%C3%A1tica%20atrav%C3%A9s%20da%20resolucao%20de%20problemas%20e%20os%20procesos%20cognitivos%20superiores.*Zuffi%20Maura,%20Edna.*Union_011_009.pdf)>.

Acesso em: 18 set. 2013.