

Suzane Braun Ramos da Silva

Cubagem de árvores para o Ensino Médio

Vitória

2024

Suzane Braun Ramos da Silva

Cubagem de árvores para o Ensino Médio

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



PROFMAT

Orientador: Prof. Dr. Moacir Rosado Filho

Vitória

2024

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

B825c BRAUN RAMOS DA SILVA, SUZANE, 1991-
Cubagem de árvores para o Ensino Médio / SUZANE
BRAUN RAMOS DA SILVA. - 2024.
72 f. : il.

Orientador: Moacir Rosado Filho.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Cubagem de Árvores. 2. Trigonometria no triângulo retângulo. 3. Área. 4. Volume. 5. Dendrometria. I. Rosado Filho, Moacir. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

“Cubagem de Árvores para o Ensino Médio”

Suzane Braun Ramos da Silva

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 24/04/2024 por:

Prof.(a) Dr.(a) Moacir Rosado Filho
Orientador(a) – UFES

Prof.(a) Dr.(a) Rosa Elvira Quispe Ccoyllo
Membro interno – UFES

Prof.(a) Dr.(a) Fidelis Zanetti de Castro
Membro Externo – IFES





Folha de Assinaturas Suzane Braun Ramos da Silva

Data e Hora de Criação: 23/04/2024 às 10:54:29

Documentos que originaram esse envelope:

- Folha de Assinaturas Suzane Braun Ramos da Silva.docx (Documento Microsoft Word) - 1 página(s)



Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: 9df7ff93e07a28c6cf28255a66d7696d88927cc10343602913e59b886f6c44be

[SHA512]: 6fe038ed7d86c0d3df7d76cedb07b05643134924f7818ce8d726189a534d24db82df4220b0720ec08f7d65ec88e7e208d94a242437f905c13377d00b238cda1b

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope



ASSINADO - Fidelis Zanetti de Castro (fidelis.castro@gmail.com)

Data/Hora: 25/04/2024 - 06:55:43, IP: 187.59.237.192, Geolocalização: [-20.1923, -40.26632]

[SHA256]: f387ede7cc08c3fbd0a5dee6cac1bceb06b61e3e68b81ab8d7d3e287572d1d8



ASSINADO - Moacir Rosado Filho (moacrosa@gmail.com)

Data/Hora: 24/04/2024 - 13:07:08, IP: 177.159.75.75, Geolocalização: [-20.299776, -40.294809]

[SHA256]: 222cd94fe50e5281c8423756ced453a06bbbec5ffc817b7420774ef87371d275



ASSINADO - Rosa Elvira Quispe Ccoyllo (rosa.ccoyllo@ufes.br)

Data/Hora: 24/04/2024 - 15:29:41, IP: 200.137.65.108

[SHA256]: ed9ace418fb2fdb42dbac3455c920595d4798cfd0241b60229759150807ee58a

Histórico de eventos registrados neste envelope

25/04/2024 06:55:43 - Envelope finalizado por fidelis.castro@gmail.com, IP 187.59.237.192

25/04/2024 06:55:43 - Assinatura realizada por fidelis.castro@gmail.com, IP 187.59.237.192

25/04/2024 06:55:24 - Envelope visualizado por fidelis.castro@gmail.com, IP 187.59.237.192

24/04/2024 15:29:41 - Assinatura realizada por rosa.ccoyllo@ufes.br, IP 200.137.65.108

24/04/2024 15:29:33 - Envelope visualizado por rosa.ccoyllo@ufes.br, IP 200.137.65.108

24/04/2024 13:07:08 - Assinatura realizada por moacrosa@gmail.com, IP 177.159.75.75

24/04/2024 13:06:42 - Envelope visualizado por moacrosa@gmail.com, IP 177.159.75.75

23/04/2024 11:02:51 - Envelope registrado na Blockchain por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.107

23/04/2024 11:02:50 - Envelope encaminhado para assinaturas por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.107

23/04/2024 10:54:33 - Envelope criado por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.107

Dedico ao meu marido Isaac Ramos da Silva por todo apoio em minha trajetória acadêmica.

Agradecimentos

A Deus pelo sopro da vida.

Ao meu esposo Isaac, e meus filhos, pelo apoio e compreensão nos momentos em que estive ausente devido aos estudos.

A meu pai Samuel Braun e minha mãe Neide Walcher Braun que sempre torceram e intercederam pela minha vida. Gratidão por cada oração.

Ao meu orientador Dr. Moacir Rosado Filho, pela orientação neste trabalho, pelas palavras de incentivo e por acreditar em mim.

A UFES e aos meus brilhantes professores Dr. Alancardek Pereira Araujo, Dr. Alcebiades Dal Col Júnior, Dr. Fábio Corrêa de Castro, Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho e Dr. Rosa Elvira Quispe Ccoyllo que me proporcionaram aquisição de novos conhecimentos.

Ao Dr. Gilson Fernandes da Silva por todas as orientações relacionadas a dendrometria.

Ao professor Edinho Edwin Hollunder, por ceder seu tempo para nos ajudar. Sua dedicação e experiência foram inestimáveis no desenvolvimento deste trabalho.

A Alésia Hollunder, esposa do professor Edinho, pela colaboração na biografia do professor.

A professora e amiga Joyce Klippel de Melo pelas contribuições a este trabalho e pelas palavras motivadoras.

A Escola Estadual de Ensino Médio e Fundamental Ponto do Alto por me apoiar na realização dos projetos.

Aos estudantes da terceira série do ensino médio 2023 por colaborarem na aplicação das atividades propostas.

À CAPES pelo apoio financeiro concedido para o desenvolvimento deste trabalho.

“E conhecereis a verdade, e a verdade vos libertará.”
(João 8:32)

Resumo

O objetivo dessa dissertação é relatar uma aula sobre cubagem de árvores ministrada pelo professor Edinho Edvim Hollunder e uma aula prática sobre métodos de cubagem para alunos da 3^a série do Ensino Médio. O trabalho visa propor atividades que envolvam os alunos e demonstrem a relação entre conceitos geométricos estudados na escola e situações práticas do dia a dia. Além disso, abordaremos definições de trigonometria, cálculos de áreas e volumes e o cálculo do volume de árvores por meio do método de Frankon, para servir como material de apoio aos professores interessados em aplicar as atividades propostas em suas aulas.

Palavras-chave: Cubagem de árvores, trigonometria no triângulo retângulo, lei dos senos, área, volume, volume do cilindro, Volume Francon.

Abstract

The aim of this dissertation is to report on a lesson taught by teacher Edinho Edvin Hollunder on the cubing of trees for students in the 3rd grade of secondary school. The work aims to propose activities that involve the students and demonstrate the relationship between geometric concepts studied at school and practical everyday situations. In addition, we will cover trigonometry definitions, area and volume calculations and the calculation of tree volume using Frankon's method, to serve as support material for teachers interested in applying the proposed activities in their classes

Keywords: Cubing of trees, trigonometry in the right triangle, law of sines, area, volume, cylinder volume, Volume Francon.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Triângulos Semelhantes	17
Figura 2 – Triângulo Retângulo	18
Figura 3 – Ângulos Complementares	19
Figura 4 – Ângulos notáveis de 30° e 60°	20
Figura 5 – Ângulos notáveis de 45°	21
Figura 6 – Lei dos Senos	22
Figura 7 – Quadrado de lado $n = 7$ com $7^2 = 49$ quadrados unitários	23
Figura 8 – Quadrado de lado $\frac{m}{n}$	24
Figura 9 – Quadrado de lado irracional	25
Figura 10 – Área de uma figura plana qualquer	26
Figura 11 – Aproximação por falta	26
Figura 12 – Círculos Semelhantes	27
Figura 13 – Comprimento da Circunferência	28
Figura 14 – Cubo Unitário	29
Figura 15 – Bloco Retangular	30
Figura 16 – Bloco Retangular e Proporcionalidade	32
Figura 17 – Aproximação por falta do Volume de um Sólido	33
Figura 18 – Princípio de Cavalieri	34
Figura 19 – Princípio de Cavalieri	34
Figura 20 – Paralelepípedos	35
Figura 21 – Cilindro	36
Figura 22 – Princípio de Cavalieri para o Cilindro	37
Figura 23 – Cone	37
Figura 24 – Pirâmides	38
Figura 25 – Volume da Pirâmide	39
Figura 26 – Tronco de Cone	39
Figura 27 – Componentes da Árvore	42
Figura 28 – Suta	43
Figura 29 – Esquema de cubagem por Smalian	43
Figura 30 – Esquema genérico para a curagem de uma árvore inteira por Smalian, Huber e Newton	44
Figura 31 – Esquema de cubagem por Huber	45
Figura 32 – Esquema de cubagem por Newton	46
Figura 33 – Xilômetro	47
Figura 34 – Volume pela Fórmula de Francon	48
Figura 35 – Professor Edinho Edwim Hollunder	50

Figura 36 – ENEM 2001	52
Figura 37 – Teodolito	55
Figura 38 – Teodolito do Professor Edinho	56
Figura 39 – Esquema de Medição da Altura - Terreno Plano	57
Figura 40 – Aula Prática	58
Figura 41 – Medida do Comprimento da Circunferência	59
Figura 42 – Árvore em aclave	60
Figura 43 – Aula Prática	61
Figura 44 – Árvore em declive	62
Figura 45 – Altura do palmito em Declive	63
Figura 46 – Aula Prática	65

Lista de tabelas

Tabela 1 – Tabela Ângulos Notáveis	21
--	----

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
2	TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO	17
2.1	O que é Seno, Cosseno e Tangente?	17
2.1.1	Relação Fundamental da Trigonometria	18
2.1.2	Relação entre $\operatorname{tg} \theta$, $\operatorname{sen} \theta$ e $\operatorname{cos} \theta$	19
2.1.3	Razões Trigonométricas do Complemento de um Ângulo	19
2.1.4	Funções Trigonométricas de alguns Ângulos	19
2.1.5	Lei dos Senos	21
3	ÁREA E VOLUME	23
3.1	Noção intuitiva de Área	23
3.1.1	Área do Quadrado	23
3.1.2	Definição Geral de Área	25
3.1.3	Área do Círculo	26
3.1.4	Comprimento da Circunferência	27
3.2	Noção intuitiva de Volume	28
3.2.1	Volume do Cubo	29
3.2.2	Volume do Paralelepípedo Reto Retângulo ou Bloco Retangular	30
3.2.3	Definição Geral de Volume	32
3.2.4	Princípio de Cavalieri	33
3.2.5	Volume do Paralelepípedo	34
3.2.6	Volume do Cilindro e do Prisma	35
3.2.7	Volume do Cone	36
3.2.7.1	Volume da Pirâmide	38
3.2.8	Volume do Tronco de Cone	39
4	DENDROMETRIA	41
4.1	Volumetria	41
4.2	Cubagem Rigorosa de Árvores por procedimentos Analíticos	42
4.2.1	Cubagem por Smalian	43
4.2.2	Cubagem por Huber	45
4.2.3	Cubagem por Newton	46
4.2.4	Volume da Árvore pelo Processo de Deslocamento de Água	46
4.3	Cubagem por Descontos	48
4.3.1	Volume Francon	48

5	O PROFESSOR EDINHO	50
6	RELATO	53
6.1	Materiais utilizados	53
6.1.1	Calculadora científica	53
6.1.2	Teodolito	54
6.2	Aula prática usando o método Francon e cálculo de alturas inacessíveis	56
6.3	Aula prática usando outros métodos de cubagem	63
7	CONCLUSÃO	66
	REFERÊNCIAS	67
	APÊNDICES	69
	APÊNDICE A – ATIVIDADE PRÁTICA SOBRE CUBAGEM DE ÁRVORES	70

1 Introdução

Apresentaremos nesse trabalho um relato de uma aula desenvolvida pelo professor Edinho Edvin Hollunder sobre cubagem de árvores aplicada na 3ª série do Ensino Médio da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Ponto do Alto. E em seguida, uma experiência prática sobre outros métodos de cubagem sugeridas pelo professor Doutor Gilson Fernandes da Silva.

Conheci o professor Edinho no ano de 2018, quando passei a atuar como professora de matemática na Escola de Ponto Alto. No ano de 2021 tive a oportunidade de participar de uma de suas aulas práticas lecionadas para a terceira série do Ensino Médio. Sua didática e aplicação dos conhecimentos matemáticos me encantaram de modo que, gostaria de registrar por escrito sua sólida bagagem de conhecimento, visto que o professor estava para se aposentar, e assim, poder dar continuidade ao trabalho que vinha desenvolvendo na escola.

Desta maneira, iniciei este trabalho com a temática, e no decorrer de minhas pesquisas, tive a oportunidade de conhecer o professor Dr. Gilson Fernandes da Silva, engenheiro florestal, que ministra aulas sobre Manejo Florestal, Inventário Florestal e Dendrometria na UFES, que colaborou imensamente no aprofundamento dos conhecimentos sobre dendrometria e sugeriu aplicar uma aula prática que envolvesse outros métodos de cubagem.

Essa abordagem colaborativa entre os professores Edinho Edvin Hollunder e Gilson Fernandes da Silva enriquece ainda mais nossa compreensão sobre cubagem e oferece uma perspectiva abrangente sobre o tema.

Além disso, a vivência educacional como professora de Matemática revelou que, tanto no Ensino Fundamental I quanto no II, a sobrecarga de conteúdo ao longo do ano letivo, aliada às dificuldades significativas que os estudantes enfrentam nas operações básicas, frequentemente resultam na falta de tempo para abordar adequadamente os tópicos de geometria, levando a sua postergação para o final do ano. No Ensino Médio, muitas vezes, os tópicos de geometria são abordados predominantemente através da memorização e da aplicação de fórmulas, negligenciando a ênfase em demonstrações e sua relevância nas situações práticas do dia a dia dos estudantes.

No contexto dos estudantes que frequentam escolas rurais, enfrentamos desafios adicionais, já que esses alunos muitas vezes têm dificuldade em reconhecer a relevância dos conteúdos para suas vidas diárias. Isso ocorre porque a maioria deles tem a intenção de concluir seus estudos para, posteriormente, contribuir com suas famílias nas atividades agrícolas.

Nesse sentido, o objetivo geral deste trabalho é propor atividades em que os estudantes tenham maior engajamento com os conteúdos de geometria estudados no Ensino Médio, mostrando a relação entre conceitos geométricos estudados na escola com situações práticas do cotidiano.

Faremos um estudo envolvendo definições de trigonometria no triângulo retângulo, cálculos de áreas e volumes, volume do cilindro e do cone, volume do tronco de um cone, utilizando como referências os livros escritos por [Carmo, Morgado e Wagner \(1992\)](#), [Lima \(2009\)](#) e [Dante \(2013\)](#). Este estudo servirá como material de apoio aos professores que queiram aplicar as atividades sugeridas.

Trataremos do cálculo do volume de uma árvore por meio do método de Frankon e também serão apresentados outros métodos de cubagem mais eficazes, com o mesmo propósito de contribuir para o conhecimento dos professores, a fim de que eles possam aplicar esse ensinamento em suas aulas.

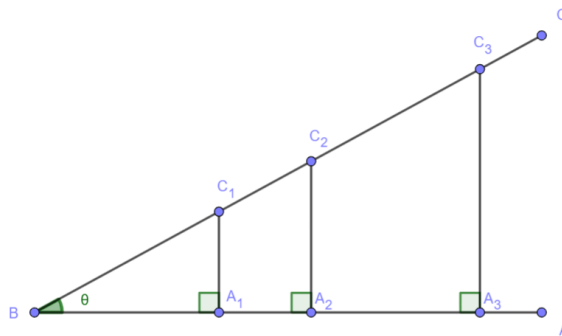
2 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RE- TÂNGULO

2.1 O que é Seno, Cosseno e Tangente?

Essa é uma pergunta que recebemos frequentemente em sala de aula. Mesmo na terceira série do ensino médio nos deparamos com estudantes que não compreendem de fato o significado dessas razões. Neste capítulo, iremos abordar as funções trigonométricas do ângulo agudo e os ângulos notáveis.

Considerando o ângulo agudo $\widehat{ABC} = \theta$, conforme Figura 1, a partir dos pontos C_1, C_2, C_3 , etc, da semirreta BC , traçamos retas perpendiculares A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3 , etc à semirreta AB . Os triângulos $A_1BC_1, A_2BC_2, A_3BC_3$, etc são semelhantes pelo caso de semelhança de triângulos ângulo-ângulo. A partir daí temos que

Figura 1 – Triângulos Semelhantes



Fonte: Autoria Própria (2024)

$$\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{BC_2}} = \frac{\overline{A_3C_3}}{\overline{BC_3}} = \dots$$

Podemos observar que a razão $\frac{\overline{A_iC_i}}{\overline{BC_i}}$, $i = 1, 2, \dots$, depende somente do ângulo θ e não dos comprimentos dos lados dos triângulos formados. Chamamos essa razão de *seno de θ* e a denotamos por $\text{sen } \theta$. Assim,

$$\text{sen } \theta = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{BC_1}}, \quad (0^\circ < \theta < 90^\circ).$$

Considerando o triângulo retângulo A_1BC_1 , temos que o cateto A_1C_1 é o cateto oposto ao ângulo θ , e o segmento BC_1 é a hipotenusa, assim escrevemos

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}.$$

Definimos o *coseno* de θ e a *tangente* de θ a partir das seguintes razões (para $0^\circ < \theta < 90^\circ$).

$$\cos \theta = \frac{\overline{A_1B}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{A_2B}}{\overline{BC_2}} = \frac{\overline{A_3B}}{\overline{BC_3}} = \dots,$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{A_1B}} = \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{A_2B}} = \frac{\overline{A_3C_3}}{\overline{A_3B}} = \dots$$

Essas razões também dependem somente do ângulo θ e não dos comprimentos dos lados dos triângulos formados. Em relação ao triângulo retângulo A_1BC_1 , o segmento de reta A_1B é o cateto adjacente ao ângulo θ e, assim, escrevemos

$$\cos \theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}.$$

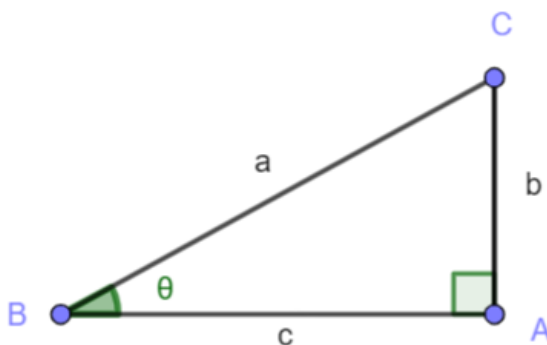
Essas razões são chamadas de *razões trigonométricas* e conforme descrito nas duas subseções seguintes.

2.1.1 Relação Fundamental da Trigonometria

A Relação Fundamental da Trigonometria estabelece que

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad (0^\circ < \theta < 90^\circ).$$

Figura 2 – Triângulo Retângulo



Fonte: Autoria Própria (2024)

Para explicar a validade da Relação Fundamental da Trigonometria, consideremos o triângulo retângulo representado na Figura 2, em que a hipotenusa é $BC = a$, o cateto oposto a θ é $AC = b$ e o cateto adjacente a θ é $AB = c$. Pelo Teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$ e, logo,

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

Assim, $\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$, ($0^\circ < \theta < 90^\circ$).

2.1.2 Relação entre $\text{tg } \theta$, $\text{sen } \theta$ e $\text{cos } \theta$

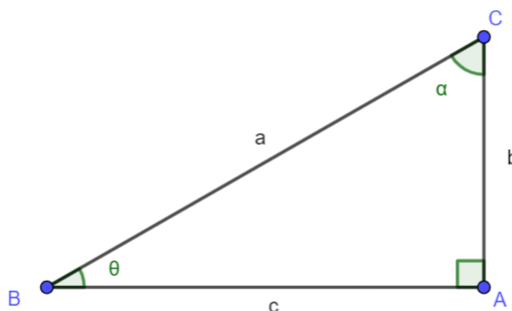
Da Figura 2, temos que

$$\frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} = \frac{b/a}{c/a} = \frac{b}{c} = \text{tg } \theta, \quad (0^\circ < \theta < 90^\circ).$$

2.1.3 Razões Trigonômicas do Complemento de um Ângulo

Se dois ângulos α e θ são complementares ($\alpha + \theta = 90^\circ$ e $\alpha, \theta \in (0^\circ, 90^\circ)$), então $\text{sen } \theta = \text{cos } \alpha$ (o cosseno de um ângulo é igual ao seno do seu complemento) e $\text{tg } \theta = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$.

Figura 3 – Ângulos Complementares



Fonte: Autoria Própria (2024)

De fato, observe da Figura 3 que

$$\text{sen } \theta = \frac{b}{a} = \text{cos } \alpha,$$

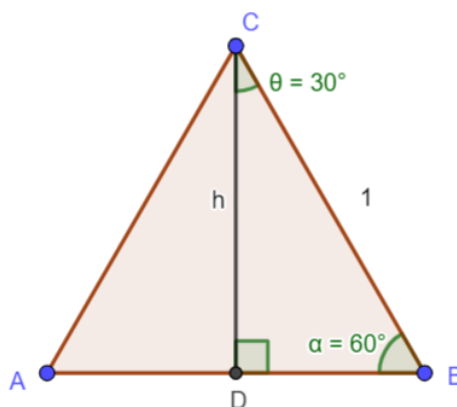
$$\text{tg } \theta = \frac{b}{c} = \frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{1}{\text{tg } \alpha}.$$

Assim, se conhecermos as funções trigonométricas de um ângulo, passamos a conhecer imediatamente as funções trigonométricas do seu complemento, e vice-versa.

2.1.4 Funções Trigonômicas de alguns Ângulos

Vamos agora calcular o seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30° e 60° por meio de um triângulo equilátero, e do ângulo de 45° por meio de um triângulo isósceles. Chamamos esses ângulos de *ângulos notáveis*, pela frequência que aparecem em problemas geométricos.

Considere o triângulo equilátero ABC de lado igual a 1 da Figura 4.

Figura 4 – Ângulos notáveis de 30° e 60° 

Fonte: Autoria Própria (2024)

Traçando a altura CD relativa à base AB (que também é mediana e bissetriz relativas à base) e aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo BCD , temos que

$$BC^2 = CD^2 + BD^2 \Rightarrow 1 = h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

logo,

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{cos} 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Como o ângulo de 60° é o complemento do ângulo de 30° , obtemos de imediato as razões trigonométricas para o ângulo de 60° .

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{cos} 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

O triângulo ABC da Figura 5 é isósceles de lados $AB = BC = 1$ e possui ângulos agudos de 45° . Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos que

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}.$$

Assim,

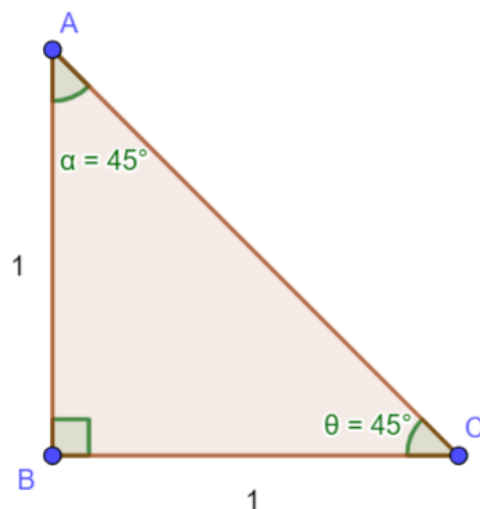
$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{cos} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

A partir dos valores encontrados, podemos construir a Tabela 1 utilizada no Ensino Fundamental e Médio.

Devido à ampla aplicação desses ângulos nos campos da Física, Química e Matemática, é comum utilizarmos essas razões na forma fracionária. Para os demais ângulos, os valores costumam ser fornecidos na forma decimal. Na resolução de problemas em sala de aula podemos ainda utilizar uma calculadora científica para calcular os valores de seno, cosseno ou tangente.

A seguir, vamos tratar de uma das aplicações das funções trigonométricas.

Figura 5 – Ângulos notáveis de 45°



Fonte: Autoria Própria (2024)

Tabela 1 – Tabela Ângulos Notáveis

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Autoria Própria (2024)

2.1.5 Lei dos Senos

A lei dos senos ou Teorema dos Senos estabelece uma relação métrica entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo qualquer.

Teorema 2.1.1. *Em qualquer triângulo ABC, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.*

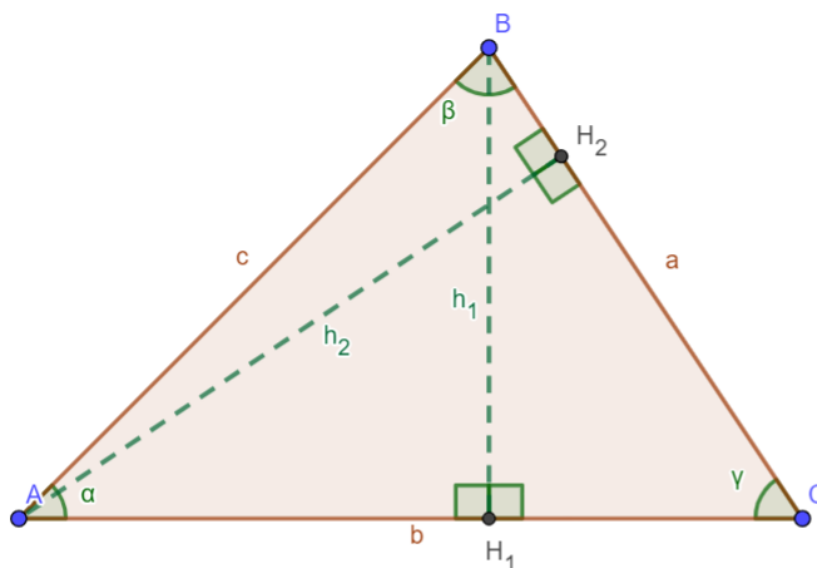
Faremos a seguir uma demonstração simples, para o caso de triângulo acutângulo, que pode facilmente ser aplicada em turmas do ensino médio. Considere o triângulo acutângulo ABC da Figura 6 em que o segmento BH_1 corresponde a altura relativa à base AC, e o segmento AH_2 corresponde a altura relativa a base BC, utilizando as relações métricas vistas anteriormente no triângulo BCH_1 e no triângulo ABH_1 temos que

$$\text{sen } \gamma = \frac{h_1}{a}, \quad \text{e} \quad \text{sen } \alpha = \frac{h_1}{c}.$$

Então,

$$h_1 = \text{sen } \gamma \cdot a \quad \text{e} \quad h_1 = \text{sen } \alpha \cdot c$$

Figura 6 – Lei dos Senos



Fonte: Autoria Própria (2024)

Igualando as duas expressões temos a seguinte razão,

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}$$

Utilizando o mesmo raciocínio nos triângulos AH_2B e AH_2C temos que,

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{h_2}{c}, \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \gamma = \frac{h_2}{b}$$

Assim,

$$h_2 = \operatorname{sen} \beta \cdot c \quad \text{e} \quad h_2 = \operatorname{sen} \gamma \cdot b$$

Igualando novamente as duas expressões temos a razão,

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}$$

E assim, podemos concluir que

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}$$

A demonstração da Lei dos Senos para um triângulo obtusângulo segue a mesma lógica e fundamentos da demonstração para o caso de um triângulo acutângulo, observando-se que o seno de um ângulo obtuso é, por definição, o seno do seu ângulo suplementar. Essa demonstração pode ser encontrada em (LIMA et al., 2000).

3 ÁREA E VOLUME

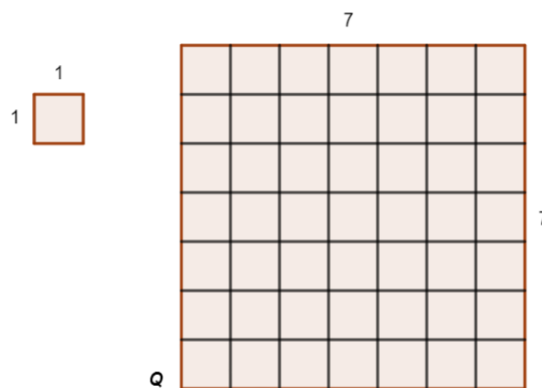
3.1 Noção intuitiva de Área

De acordo com NETO (2013), a área de uma região no plano é um número positivo que associamos à mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado. Para medir a área de uma região no plano de uma figura, que indicaremos por F , é necessário compará-la com uma unidade de área pré-definida. O número que resulta dessa comparação indica quantas vezes a figura F contém a unidade.

3.1.1 Área do Quadrado

Utilizaremos como unidade de área o quadrado, por ser um quadrilátero com quatro lados iguais e quatro ângulos iguais, e o chamaremos de quadrado unitário. Se quisermos calcular a área de um quadrado Q de lado medindo n , com $n \in \mathbb{N}$, podemos traçar retas paralelas aos lados do quadrado unitário, obtendo n^2 quadrados unitários justapostos, assim o valor numérico que representa a área do quadrado Q será n^2 . A Figura 7 a seguir mostra um exemplo para $n = 7$.

Figura 7 – Quadrado de lado $n = 7$ com $7^2 = 49$ quadrados unitários



Fonte: Autoria Própria (2024)

Para calcular a área de um quadrado cuja medida do lado é o número racional $\frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$ e $n \neq 0$, iremos primeiramente dividir o quadrado unitário de lado igual a 1 em n partes iguais, mediante retas paralelas a seus lados, de modo que o quadrado unitário será completamente coberto por n^2 quadradinhos com a medida do lado igual a $\frac{1}{n}$, como a área do quadrado unitário é igual a 1, temos que o produto entre a área de cada quadradinho e o número de quadradinhos, n^2 , deve ser 1, logo, a área de cada

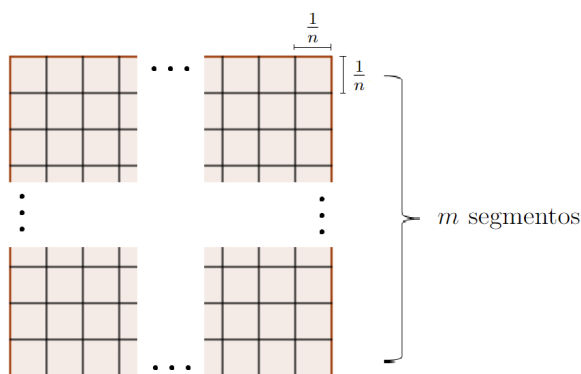
quadrado deverá ser $\frac{1}{n^2}$.

$$n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1$$

Conforme a Figura 8, iremos decompor Q em m segmentos iguais a $\frac{1}{n}$, traçando retas paralelas aos lados de Q , tendo como distância entre elas o comprimento $\frac{1}{n}$, obtendo m^2 quadrados com área igual $\frac{1}{n^2}$, logo a área do quadrado Q será

$$m^2 \cdot \frac{1}{n^2} = \left(\frac{m^2}{n^2}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

Figura 8 – Quadrado de lado $\frac{m}{n}$



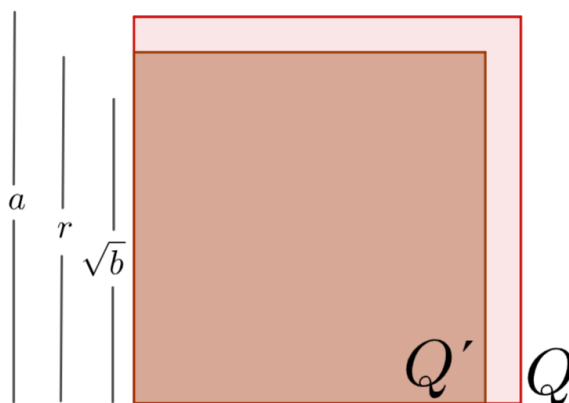
Fonte: Autoria Própria (2024)

E finalmente, se quisermos calcular a área de um quadrado com a medida do lado irracional, iremos considerar $a(Q)$ um valor numérico que representa a área de um quadrado de lado a , em que a é um número irracional. Queremos mostrar que $a^2 = Q$. Para isso, se tomarmos um número real positivo b , tal que $b < a^2$, implicar que $b < Q$, e de maneira análoga, se tomarmos um número real c , tal que $c > a^2$ implicar que $c > Q$, então, pelo método da exaustão atribuído a Eudócio, podemos concluir que $a^2 = Q$.

Consideremos então b um número real positivo tal que $b < a^2$. Então, $\sqrt{b} < a$. Como todo intervalo aberto do conjunto dos números reais contém números racionais, existe um número racional r pertencente ao intervalo aberto (\sqrt{b}, a) . Assim, $\sqrt{b} < r < a$, e portanto, $b < r^2 < a^2$. No interior de Q , tomamos um quadrado Q' de lado r , conforme a Figura 9. Como r é um número racional, já foi mostrado que a área de Q' é igual a r^2 . Como Q' está contido no interior de Q , devemos ter que a área de Q' é menor que a área de Q , então temos que $r^2 < a(Q)$. Mas, como $b < r^2$, então $b < Q'$, e conseqüentemente, $b < a(Q)$.

De maneira análoga, mostra-se que, se c é um número real positivo tal que $a^2 < c$, então a área de Q é menor do que c . Concluimos assim, que a área de um quadrado de lado irracional é também o quadrado da medida do lado.

Figura 9 – Quadrado de lado irracional



Fonte: Autoria Própria (2024)

3.1.2 Definição Geral de Área

Para definir o conceito de área, iremos postular as seguintes propriedades, considerando P um valor numérico real positivo não nulo que associamos à área de um polígono.

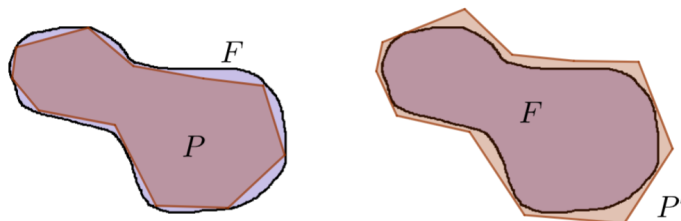
1. Polígonos congruentes possuem áreas iguais, ou seja, podemos deslocar um deles no plano, de maneira rígida, até coincidir com o outro.
2. Se P é um quadrado de lado unitário, então a área de $P = 1$.
3. Se um polígono P pode ser decomposto em n polígonos de áreas P_1, P_2, \dots, P_n , tais que dois quaisquer partilham no máximo alguns lados, a área do polígono P será igual a soma das áreas dos polígonos menores.
4. Se um polígono P contém em seu interior um polígono P' , então a área de P é maior que a área de P' .

O valor numérico que representa a área de uma figura F ficará bem determinado, se forem conhecidos seus valores por falta, ou por excesso. Indicaremos por $a(F)$ a área de uma figura plana F qualquer. A área de F é o valor cuja aproximação por falta corresponde a área do polígono P contido no interior de F , e cuja aproximação por excesso corresponde a área do polígono P' que contém a figura F , conforme indicado na Figura 10. Assim, para quaisquer polígonos no interior ou no exterior da figura F , vale a desigualdade,

$$a(P) \leq a(F) \leq a(P')$$

Quanto mais os perímetros dos polígonos P e P' se aproximam do perímetro de F , os valores correspondentes as suas áreas se aproximam de $a(F)$.

Figura 10 – Área de uma figura plana qualquer



Fonte: Autorial Própria (2024)

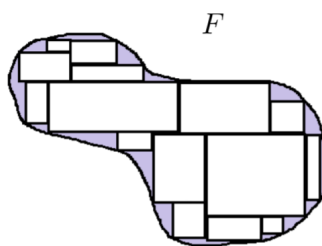
Considerando apenas polígonos retangulares justapostos no interior de F , pela simplicidade dos cálculos de suas respectivas áreas, a área de F corresponderá a soma das áreas dos retângulos que compõem a figura, por aproximação por falta. Assim, para todos os polígonos retangulares no interior de F temos que,

$$a(P) \leq a(F)$$

Inclusive, seja qualquer número $b < a(F)$, encontramos polígonos retangulares contidos no interior de F , de modo que,

$$b < a(P) \leq a(F)$$

Figura 11 – Aproximação por falta



Fonte: Autorial Própria (2024)

Analogamente, poderíamos definir a área de F por meio de polígonos retangulares justapostos que contém F , assim o valor numérico que representa a área dos polígonos retangulares corresponde por excesso ao valor de $a(F)$.

3.1.3 Área do Círculo

Faremos uma breve demonstração da área do círculo definindo π como a área de um círculo de raio igual 1.

Lima (2009) afirma que, dois círculos quaisquer são figuras semelhantes e a razão de semelhança é a razão entre seus raios. E também que, as áreas de duas figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança. Definindo π como a área de um círculo A' de raio 1, e considerando um círculo A de raio r (Figura 12), a razão entre as áreas é a razão entre os quadrados dos raios,

$$\frac{A}{A'} = \left(\frac{r}{1}\right)^2 \Rightarrow \frac{A}{\pi} = \frac{r^2}{1}$$

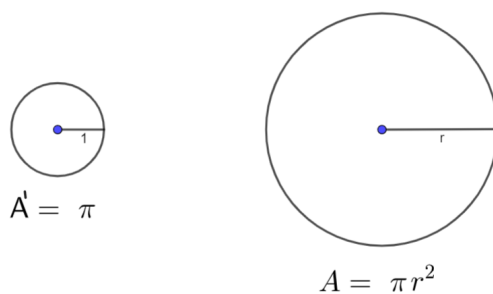
Daí, segue que a área do círculo de raio r é igual a

$$A = \pi r^2$$

Então, para calcular a área de um círculo basta encontrar o valor da constante π . Arquimedes encontrou valores bem próximos de π inscrevendo polígonos regulares em um círculo de raio 1 e calculando a área desse polígono regular.

Com o passar dos anos, várias foram as tentativas de encontrar com precisão o valor de π , até os dias atuais com o surgimento dos computadores e com a descoberta de algoritmos teóricos muito mais eficazes. A Universidade de Ciências Aplicadas de Graubünden conseguiu no dia 14 de agosto de 2021 o valor de π com 62,8 trilhões de casas decimais!(COMUNICAÇÃO, 2023)

Figura 12 – Círculos Semelhantes



Fonte: Autoria Própria (2024)

3.1.4 Comprimento da Circunferência

Definiremos o comprimento da circunferência, um número real cuja aproximação por falta corresponde ao perímetro de polígonos inscritos na circunferência, e cuja aproximação por excesso corresponde ao perímetro de polígonos circunscritos na circunferência.

Chamaremos de p o perímetro dos polígonos inscritos no círculo, a área do polígono inscrito será igual a soma das áreas dos triângulos que constituem esse polígono e tem o vértice no centro do círculo, como p é a soma das bases desses triângulos, logo a área do polígono é igual a

$$A = \frac{1}{2}ph$$

Fazendo a área do polígono se aproximar da área do círculo, o tamanho das bases dos triângulos será tão pequeno, que podemos tomar a medida da altura dos triângulos como o raio do círculo, assim a área do polígono será

$$A \approx \frac{1}{2}pr$$

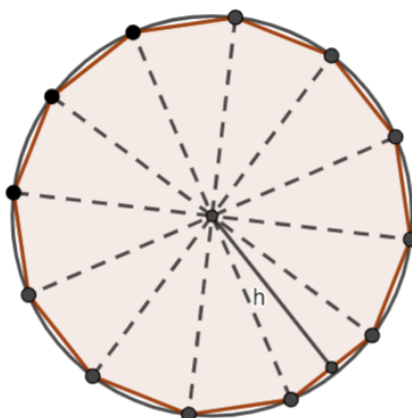
Considerando $p = C$ o comprimento da circunferência e tomando a área do círculo igual a $\pi.r^2$, encontramos

$$\pi r^2 = \frac{1}{2}Cr$$

$$C = 2\pi r$$

Analogamente, se tomarmos polígonos circunscritos na circunferência também concluiremos que o comprimento da circunferência é $C = 2\pi r$

Figura 13 – Comprimento da Circunferência



Fonte: Aatoria Própria (2024)

3.2 Noção intuitiva de Volume

De acordo com Lima (2009), o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupada. Essa ideia é intuitiva. Calcular volume é similar ao cálculo de área, iremos comparar o volume do sólido com uma unidade de volume pré-definido, o resultado dessa comparação corresponde ao valor numérico do volume.

Utilizaremos como unidade de volume um cubo unitário, cujas arestas medem uma unidade, e por definição seu volume será igual a 1.

Então, medir o volume de um sólido é preencher todo o espaço com cubos unitários, o número n de cubos que preenche o sólido representa seu volume. Porém, muitos sólidos possuem formato irregular, cabe utilizar essa ideia intuitiva como guia, e atribuir um significado preciso.

3.2.1 Volume do Cubo

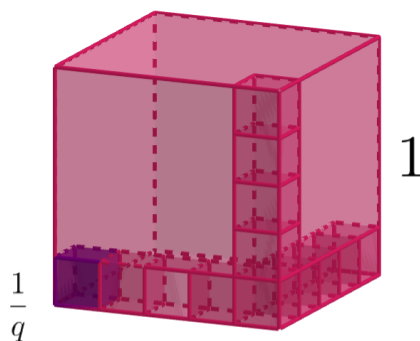
O cubo é um caso particular do paralelepípedo retângulo, também conhecido como bloco retangular. Um paralelepípedo retângulo é formado por 3 pares de retângulos congruentes dois a dois, os lados dos retângulos são chamados de arestas e, se conhecermos três de suas arestas que concorrem no plano, determinamos o bloco retangular. Assim, o cubo é um sólido que possui todas as suas arestas com a mesma medida, ou seja, todas as suas faces são quadrados.

Um cubo C cuja medida da aresta é um número inteiro positivo, pode ser preenchido por n^3 cubos unitários justapostos, logo n^3 é o valor numérico que representa o volume do cubo C .

Do mesmo modo, é possível preencher o cubo unitário com q^3 cubinhos de aresta medindo $\frac{1}{q}$ conforme ilustra a Figura 14, como o volume do cubo unitário é igual a 1, temos que o produto entre a volume de cada cubinho e a quantidade de cubinhos que o preenche q^3 deve ser 1, logo, o volume de cada cubinho deverá ser $\frac{1}{q^3}$.

$$q^3 \cdot \frac{1}{q^3} = 1$$

Figura 14 – Cubo Unitário



Fonte: Autoria Própria (2024)

Consequentemente, se um cubo C possui a medida de sua aresta um número racional $\frac{p}{q}$, em que $p, q \in \mathbb{N}$ e $q \neq 0$, podemos preenche-lo com p^3 cubinhos de aresta $\frac{1}{q}$. Sabemos que o volume de cada cubinho será igual a $\frac{1}{q^3}$, daí o volume do cubo C de aresta racional deve ser

$$p^3 \cdot \frac{1}{q^3} = \left(\frac{p^3}{q^3}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)^3$$

Ainda nos falta mostrar que o volume de um cubo de medida irracional também pode ser calculado elevando a medida de seu lado ao cubo. Para isso, usaremos novamente o método da exaustão, e sua demonstração é análoga ao que já foi demonstrado para o cálculo da área de um quadrado cuja medida do lado é irracional.

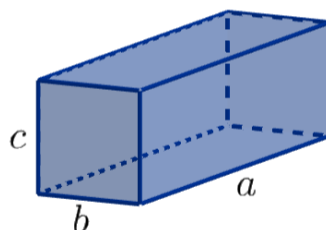
Seja b um número irracional, que expressa a medida da aresta de um cubo C , tomamos um número x de modo que $x < b^3$. É possível encontrar um número racional r tão próximo de b , em que $r < b$, e então $x < r^3 < b^3$, ou seja, o cubo C que possui a aresta uma medida irracional b contém um cubo D que possui a aresta uma medida racional r . Desta maneira, temos que o volume do cubo D é menor que o volume do cubo C , porém sabemos que o volume do cubo D é igual a r^3 , pois r é um número racional. Assim, podemos concluir que r^3 é menor que o volume de C , e como consequência x é menor que o volume de C . Utilizando o mesmo raciocínio para um número y maior que b^3 , podemos concluir que y é maior que o volume do cubo C . Então o volume do cubo C é dado pela expressão

$$V_c = b^3$$

3.2.2 Volume do Paralelepípedo Reto Retângulo ou Bloco Retangular

Um bloco retangular, também conhecido como paralelepípedo reto retângulo, é um sólido cujas as faces são retangulares. Um bloco retangular fica perfeitamente definido se conhecermos as medidas de três arestas que partem de um mesmo ponto. A Figura 15 a seguir representa um bloco retangular cujas as arestas são a , b , e c .

Figura 15 – Bloco Retangular



Fonte: Autoria Própria (2024)

Para calcular o volume de um bloco retangular cujas arestas são números naturais, podemos seguir o mesmo raciocínio utilizado no cubo de aresta com medida sendo um número natural, ou seja, preencher o bloco retangular com cubos unitários, dessa forma, teremos a cubinhos no comprimento, b cubinhos na largura e c cubinhos na altura, e o total de cubinhos é dado pelo produto das três arestas, isto é,

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Considerando agora, as arestas a , b e c do bloco retangular de medidas racionais. Sabemos que números racionais podem ser expressos em forma de fração, e podemos ainda reduzir cada um desses três números a um denominador comum, assim escrevemos,

$$a = \frac{x}{q}, \quad b = \frac{y}{q} \quad e \quad c = \frac{z}{q}$$

com x , y , z e q números naturais.

Podemos decompor o bloco retangular em x , y e z segmentos iguais de comprimento $\frac{1}{q}$, obtendo assim $x \cdot y \cdot z$ cubinhos de aresta $\frac{1}{q}$, e como foi visto anteriormente, o volume de um cubo de aresta $\frac{1}{q}$ é igual a $\frac{1}{q^3}$, então o volume do bloco retangular é dado por

$$V = x \cdot y \cdot z \cdot \frac{1}{q^3}$$

que podemos rescrever do seguinte modo

$$V = \frac{x}{q} \cdot \frac{y}{q} \cdot \frac{z}{q} \quad \Rightarrow \quad V = a \cdot b \cdot c$$

Também podemos demonstrar o volume de um bloco retangular utilizando o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, assim, mostraremos que mesmo quando algumas das medidas das arestas do bloco retangular for um número irracional, vale a expressão $V = a \cdot b \cdot c$.

Teorema 3.2.1. *Teorema Fundamental da Proporcionalidade*

As seguintes afirmações a respeito de $y = f(x)$ são equivalentes:

1. y é diretamente proporcional a x ;
2. Para todo número real $c > 0$, tem-se que $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$;
3. Existe um número k , chamado a “constante de proporcionalidade” entre x e y , tal que $f(x) = k \cdot x$ para todo x .

(LIMA et al., 1991)

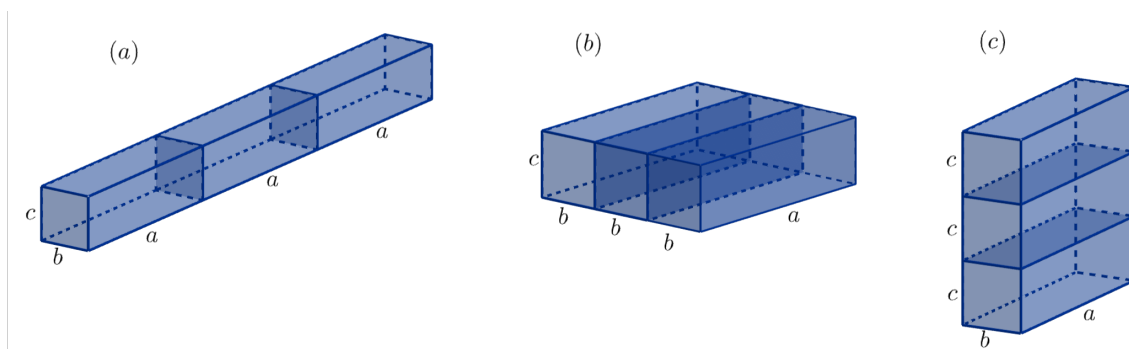
Sejam a , b e c números reais positivos, iremos assumir a partir de agora que o volume está em função das medidas de suas respectivas arestas e indicaremos, $V = f(a, b, c)$. Ou seja, podemos perceber na Figura 16 que se dobrarmos, triplicarmos, etc., a medida de uma das arestas do bloco retangular, seu volume também irá dobrar, triplicar, etc. Em outras palavras, se multiplicarmos umas das arestas por um número natural n , o volume também será multiplicado por esse número n .

Então, para todo número natural n temos

$$V = f(n \cdot a, b, c) = f(a, n \cdot b, c) = f(a, b, n \cdot c) = n \cdot f(a, b, c)$$

Podemos concluir que o volume é uma função crescente de cada uma das variáveis a , b e c , e é diretamente proporcional às arestas a , b e c , isto é, para todo número real positivo k , tem-se que

Figura 16 – Bloco Retangular e Proporcionalidade



Fonte: Autoria Própria (2024)

$$V = f(k \cdot a, b, c) = f(a, k \cdot b, c) = f(a, b, k \cdot c) = k \cdot f(a, b, c)$$

Então,

$$\begin{aligned} V &= f(a, b, c) = f(a \cdot 1, b, c) = a \cdot f(1, b, c) = a \cdot f(1, b \cdot 1, c) = \\ &= a \cdot b \cdot f(1, 1, c) = a \cdot b \cdot f(1, 1, c \cdot 1) = a \cdot b \cdot c \cdot f(1, 1, 1) \end{aligned}$$

Concluimos assim que o volume do bloco retangular é o produto das arestas multiplicado ainda pelo volume de um bloco retangular cujas arestas possuem uma unidade de medida. Iremos convencionar esse bloco retangular como o cubo unitário, cujo volume é 1. Assim, fica demonstrado que o volume do bloco retangular é dado pelo produto de suas arestas, isto é,

$$V = a \cdot b \cdot c$$

3.2.3 Definição Geral de Volume

Como vimos anteriormente, a ideia intuitiva de volume é, encontrar um número que represente quantas vezes um cubo unitário pode preencher o sólido. Assim, encontramos uma maneira de calcular o volume de um bloco retangular. Iremos agora, calcular o volume de sólidos geométricos mais irregulares.

Para isso, chamaremos de *poliedro retangular* a todo sólido formado pela união de um número finito de blocos retangulares justapostos. (LIMA et al., 2010)

O volume desse poliedro retangular será igual a soma dos volumes dos blocos retangulares que o formam. Consideremos S um sólido qualquer, e que $v(S)$ represente o seu volume. Podemos preencher o sólido S com poliedros retangulares P , os quais sabemos calcular seu volume e representaremos por $v(P)$, então para todos os poliedros retangulares contidos em S temos que $v(P) < v(S)$, ou seja, $v(P)$ representa um valor numérico inferior ao volume do sólido S . Se continuarmos a preencher o sólido S com poliedros retangulares

cada vez menores, com o cuidado de não ultrapassar os limites do sólido, encontraremos um poliedro P' cujo seu valor numérico se aproxima ainda mais do volume de S .

Figura 17 – Aproximação por falta do Volume de um Sólido



Fonte: Autorial Própria (2024)

Então, o volume de S é um *número real cujas aproximações por falta são os volumes dos poliedros contidos em S* . Assim, para qualquer número real r tal que $r < v(S)$, podemos encontrar um poliedro retangular Q contido em S , de modo que $r < v(Q) \leq v(S)$.

De maneira análoga, podemos calcular o volume de um sólido S por meio um poliedro retangular Q que contém o sólido S , assim o volume de Q será um número real cuja aproximação por excesso representa o volume do sólido contido em Q , então temos que $v(S) \leq v(Q)$, para todo poliedro retangular Q que contém o sólido S . Quanto menor for o poliedro retangular Q , o valor numérico que representa o volume de Q se aproxima ainda mais do volume do sólido S . Sendo assim, para quaisquer poliedros retangulares P contidos no sólido S , e quaisquer poliedros retangulares Q que contém o sólido S , podemos afirmar que:

$$v(P) \leq v(S) \leq v(Q)$$

Em outras palavras, $v(S)$ é o único número real que satisfaz a condição acima, representando o volume de um sólido geométrico qualquer.

3.2.4 Princípio de Cavalieri

Para dar sequência ao cálculo do volume de sólidos geométricos, iremos recorrer a um teorema muito importante, cuja demonstração não será objetivo deste trabalho, visto que é tratado como um axioma no estudo de volume no Ensino Médio, e por envolver conhecimentos mais avançados da Teoria da Medida.

(Princípio de Cavalieri) Sejam dois sólidos A e B. Se qualquer plano horizontal secciona A e B formando figuras planas com áreas iguais, então os volumes dos sólidos A e B também serão iguais.

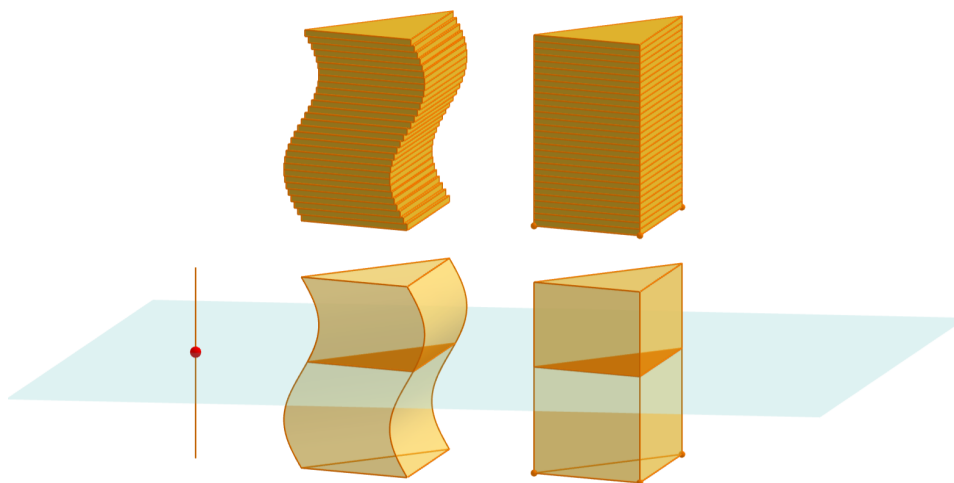
Figura 18 – Princípio de Cavalieri



Fonte: Autoria Própria (2024)

Podemos observar na Figura 18 três montes de cartas, todos com a mesma quantidade de cartas de baralho. Considerando que cada carta do baralho possui mesma área, e que todas têm a mesma espessura, é fácil concluir que todos os montes possuem o mesmo volume. Ou seja, se considerarmos dois sólidos quaisquer, de modo que possamos cortar cada sólido em diversas “fatias” cada vez mais finas, e obtivermos seções de áreas iguais, então o volume destes sólidos será o mesmo. Essa explicação não é válida como demonstração, mas dá uma boa ideia de que o Princípio de Cavalieri é verdadeiro.

Figura 19 – Princípio de Cavalieri



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/b6utazvg>

3.2.5 Volume do Paralelepípedo

Como vimos anteriormente, o volume de um bloco retangular ou paralelepípedo reto retângulo é dado pela expressão $V = a \cdot b \cdot c$, o que também pode ser expresso da

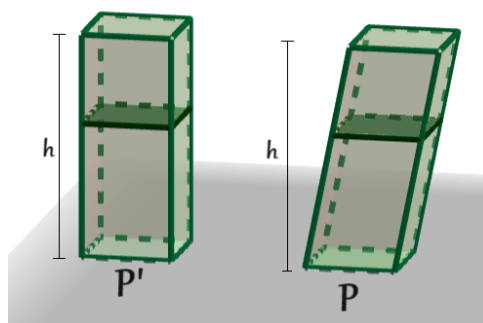
seguinte forma:

$$V = A_b \cdot h$$

Em que, A_b é a área de umas das faces do paralelepípedo e será a base do sólido. Iremos mostrar por meio do Princípio de Cavalieri que o volume do paralelepípedo é $V = A_b \cdot h$.

Definição de Paralelepípedo. Um paralelepípedo é um sólido formado por seis faces, essas faces são 3 pares de paralelogramos. Cada par de faces são paralelas, congruentes e opostas. Caso as faces forem retângulos, temos o bloco retangular.

Figura 20 – Paralelepípedos



Fonte: Autoria Própria (2024)

Considere uma das faces do paralelepípedo P apoiada sobre um plano horizontal. No mesmo plano, construímos um retângulo cuja área possui o mesmo valor numérico da face do paralelepípedo P apoiada sobre o plano. Traçamos retas perpendiculares ao plano partindo dos vértices do retângulo, construímos o paralelepípedo reto retângulo P' de mesma altura h do paralelepípedo P . Então, traçamos planos paralelos ao plano horizontal, cortando os paralelepípedos em várias “fatias” de espessura menor possível. Cada “fatia” no paralelepípedo P será um polígono congruente ao polígono da base do paralelepípedo, e cada “fatia” do paralelepípedo P' será um retângulo congruente ao retângulo da base. Todas as “fatias” terão o mesmo valor numérico correspondente a área, logo pelo Princípio de Cavalieri, os paralelepípedos P e P' terão volumes iguais. Sendo assim, para todo paralelepípedo vale a expressão $V = A_b \cdot h$.

3.2.6 Volume do Cilindro e do Prisma

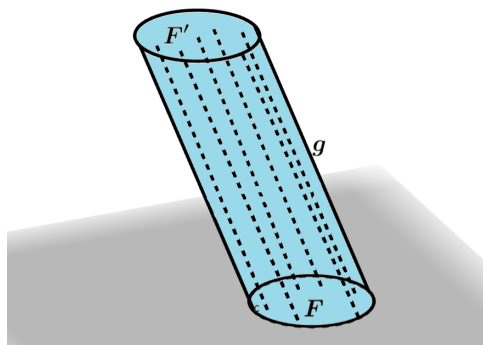
De acordo com Lima, temos a seguinte definição para cilindro.

Definição de Cilindro. Num plano, que iremos considerar horizontal, temos uma figura plana F , que chamaremos de base do cilindro, traçamos um segmento de reta g não paralelo ao plano horizontal, ao qual iremos chamar de *geratriz*, de modo que, por cada ponto de F , será levantado um segmento paralelo a g e do mesmo comprimento de

g. A reunião desses segmentos e da figura F formam o cilindro C . A figura plana F' é composta pelas extremidades que não pertencem à base F dos segmentos, e é paralela à figura F . A distância entre F e F' é a altura do cilindro, conforme vemos na Figura 21.

No Ensino médio, tratamos em particular do cilindro cuja base é o círculo.

Figura 21 – Cilindro



Fonte: Autoria Própria (2024)

Definição de Prisma. É um cilindro cujas bases são polígonos.

Para calcular o volume do cilindro, independente de qual forma geométrica plana é sua base, vamos utilizar o Princípio de Cavalieri.

No plano que contém a base do cilindro C , construímos um retângulo R com a mesma área A da base F do cilindro, conforme Figura 22. Sobre esse retângulo, construímos um bloco retangular de mesma altura do cilindro. Se traçarmos planos paralelos ao plano horizontal da base, obteremos figuras congruentes às figuras da base, e portanto, de mesma área das figuras F e R , logo, pelo Princípio de Cavalieri, temos que seus volumes são iguais, ou seja,

$$V = A_b \cdot h$$

No caso em que o cilindro possui a base circular temos,

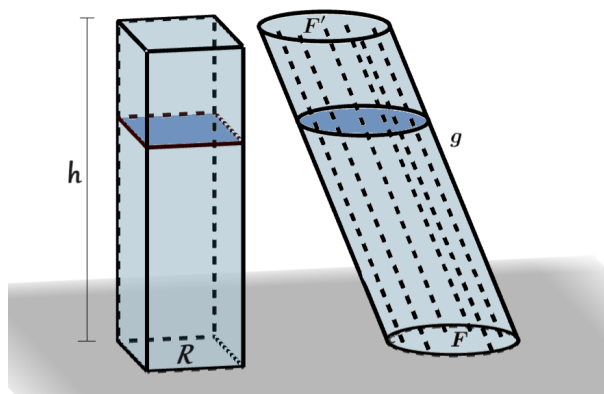
$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

3.2.7 Volume do Cone

Definição de Cone. Seja uma figura F sobre um plano horizontal, que chamaremos de base do cone, e um ponto V fora do plano, que chamaremos de *vértice*, um cone é a reunião de todos os segmentos que partem de V com extremidade em F .

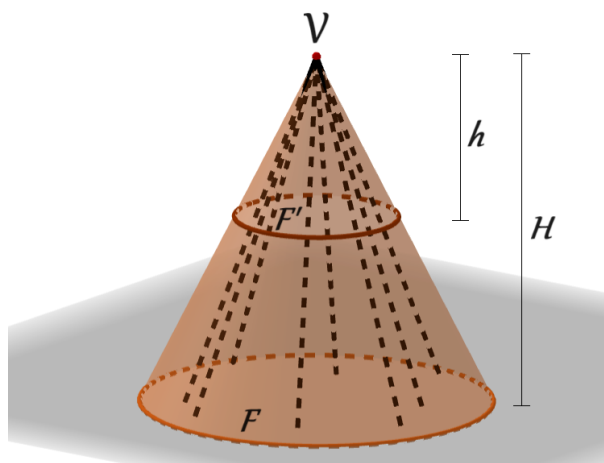
Definição de Pirâmide. Pirâmide é um cone cuja base é um polígono.

Figura 22 – Princípio de Cavalieri para o Cilindro



Fonte: Autoria Própria (2024)

Figura 23 – Cone



Fonte: Autoria Própria (2024)

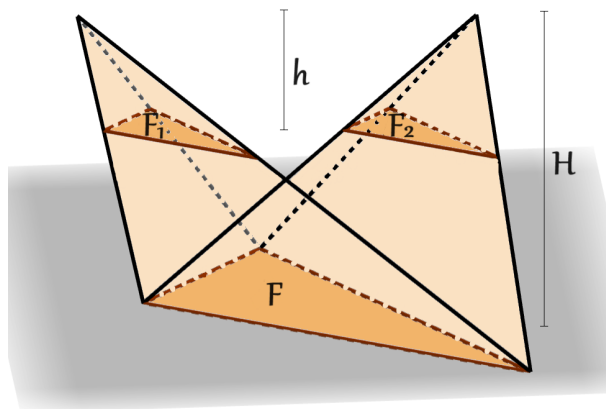
Em um cone, temos o seguinte lema, se passarmos planos horizontais paralelos ao plano da base do cone, iremos formar seções de áreas semelhantes a base do cone, pois existe uma *homotetia*, ou seja, tomando V como centro da *homotetia* que leva cada ponto de F' à figura F , temos que a razão dessa *homotetia* é $\frac{h}{H}$. Assim vale a seguinte relação

$$\frac{A'}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$$

Onde A' é a área da seção formada pelo plano distante do vértice na altura h , e A é a área da base do cone de altura H , conforme Figura 23. Do mesmo modo, sabendo que a pirâmide é um caso particular do cone, por meio desse resultado, temos que se duas pirâmides possuem bases de mesma área e a mesma altura, então seus volumes serão iguais. Podemos observar na Figura 24 duas pirâmides de mesma base F de área A e mesma altura H , e temos um plano paralelo ao plano da base da pirâmide que dista h do vértice da pirâmide, formando duas seções F_1 e F_2 de áreas A_1 e A_2 . Pelo lema anterior, temos

que,

Figura 24 – Pirâmides



Fonte: Autoria Própria (2024)

$$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_2}{A}$$

Assim, podemos concluir que $A_1 = A_2$, e pelo Princípio de Cavalieri, as duas pirâmides possuem volumes iguais. Ou seja, podemos mover o vértice de uma pirâmide em um plano paralelo ao plano da base, sem que seu volume se altere. (SANTANA, 2014)

A partir dos conceitos abordados, iremos encontrar uma expressão para calcular o volume de uma pirâmide, visto que a pirâmide é um caso particular do cone, então utilizaremos o Princípio de Cavalieri para encontrar o volume do cone.

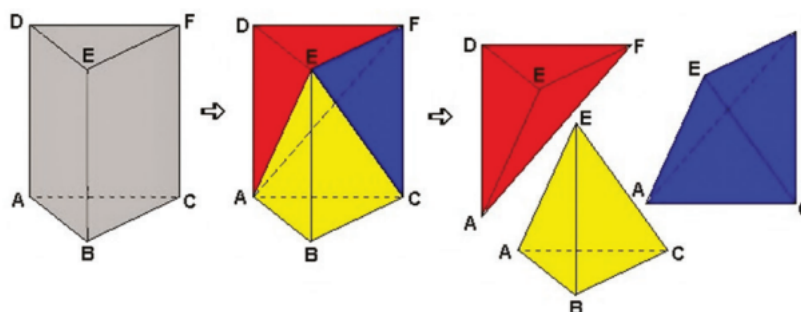
3.2.7.1 Volume da Pirâmide

Para calcular o volume da pirâmide, vamos considerar um prisma reto de base triangular conforme a Figura 25. Observe que podemos repartir o prisma em três pirâmides de mesmo volume. Para isto, basta perceber que as pirâmides $ADEF$ e $ABCE$ possuem a mesma base do prisma e mesma altura, como vimos anteriormente, seus volumes são iguais. Para perceber que a terceira pirâmide possui o mesmo volume das demais, iremos considerar as pirâmides $ADEF$ e $ACEF$, de bases ADF e ACF , respectivamente, é fácil ver que as duas bases são congruentes, e que a altura da primeira a partir do vértice E é igual a altura da segunda, partindo também do vértice E , logo, as três pirâmides possuem volumes iguais, e o volume de cada uma será um terço do volume do prisma.

Sabendo que o volume do prisma é $V = A_b \cdot h$, temos que o volume da pirâmide será

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

Figura 25 – Volume da Pirâmide



Fonte: <https://proenem.com.br/enem/matematica/geometria-espacial-piramides/>

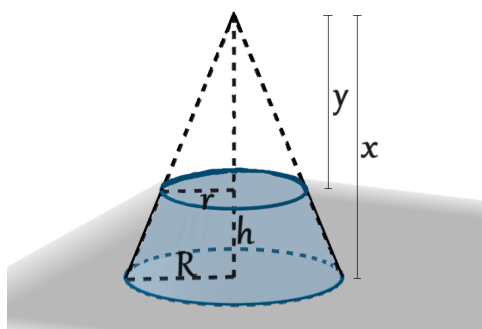
Seguindo o mesmo raciocínio feito anteriormente para o cilindro e o paralelogramo, pelo Princípio de Cavalieri, um cone e uma pirâmide de mesma altura e mesma área da base, terão volumes iguais, portanto o volume do cone é dado por $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$, no caso em que a base do cone é um círculo, temos,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

3.2.8 Volume do Tronco de Cone

Um tronco de cone é um sólido geométrico que resulta da remoção de um cone menor de um cone maior por meio de um corte paralelo à base, como mostra a Figura 26.

Figura 26 – Tronco de Cone



Fonte: Autoria Própria (2024)

O volume desse tronco será dado pela diferença entre o cone maior, de raio R e altura x , e o cone menor, de raio r e altura y . Assim,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot x - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot y \\ &= \frac{\pi}{3} (R^2 \cdot x - r^2 \cdot y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi}{3} [R^2 \cdot (y + h) - r^2 \cdot y] \\ &= \frac{\pi}{3} [R^2 \cdot h + (R^2 - r^2) \cdot y] \end{aligned} \quad (3.1)$$

No interior do cone, podemos observar dois triângulos semelhantes formados pelas alturas e pelos raios dos dois cones. Escrevendo a razão de semelhança entre os lados dos triângulos, temos

$$\frac{r}{y} = \frac{R}{x} = \frac{R}{y + h} \quad \Leftrightarrow \quad R \cdot y = r \cdot y + r \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad (R - r) \cdot y = r \cdot h$$

Ou seja, $y = \frac{r \cdot h}{R - r}$, substituindo em (3.1), temos

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi}{3} \left[R^2 \cdot h + (R - r)(R + r) \cdot \frac{r \cdot h}{R - r} \right] \\ &= \frac{\pi}{3} [R^2 \cdot h + R \cdot r \cdot h + r^2 \cdot h] \\ &= \frac{\pi \cdot h}{3} [R^2 + R \cdot r + r^2] \end{aligned}$$

Dessa forma, a fórmula para o volume de um tronco de cone circular, cujas bases são paralelas, com raio da base maior R , raio da base menor r e altura h , é expressa por:

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3} [R^2 + R \cdot r + r^2]$$

4 DENDROMETRIA

Neste capítulo, iremos tratar brevemente da Dendrometria, destacando especialmente a volumetria, uma vez que é o ponto central para o desenvolvimento da aula prática sobre cubagem de árvores. O PROFMAT já possui um trabalho bem completo sobre cubagem de árvores escrito pelo professor Oswaldo Joaquim de Campos, que inclusive oferece uma proposta de aula relacionada ao tema. Podemos considerar assim este trabalho uma sequência do trabalho mencionado.

De acordo com Machado, a dendrometria é uma parte importante e fundamental da ciência florestal. É composta por duas palavras: *dendron* do Grego, que significa árvore e *metria* do Latim, que significa medida. Então, a dendrometria é o estudo das medidas das árvores. A dendrometria abrange a mensuração das dimensões, volume ou peso de todos os tipos de produtos florestais, incluindo árvores derrubadas ou em pé, assim como aspectos relacionados ao crescimento e produção das árvores, dos povoamentos florestais, e de suas interações dendrométricas. (MACHADO; FILHO, 2003)

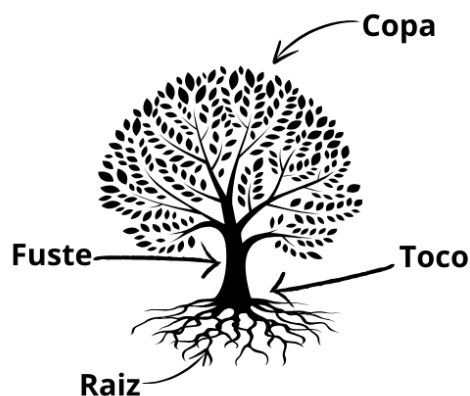
4.1 Volumetria

Determinar o volume das árvores destaca-se como um dos principais propósitos nos levantamentos florestais, sobretudo quando se refere a áreas destinadas a atividades comerciais. Porém, encontrar a medida que representa o volume de todas as árvores de uma floresta é um trabalho inatingível. Por isso, na maioria das vezes, se faz o inventário florestal por meio de amostragem. Para isso, é feita a medida de uma parte da população, ou seja, uma amostra que contenha a maioria das características da floresta. Quanto mais significativa for a amostra, melhor será a estimativa do volume total das árvores da floresta.

Podemos afirmar que a árvore é constituída por quatro componentes em sua estrutura física: raiz, toco, fuste e copa, conforme a Figura 27. O fuste é frequentemente a parte mais comercializada, mas devido à sua escassez, outras partes, como a copa, vêm ganhando destaque e atraindo atenção. Assim, grande parte dos estudos para determinar o volume é voltado para o tronco principal. Como a árvore pode ser considerada um sólido irregular, podemos determinar seu volume através da cubagem rigorosa, ou seja, dividindo o tronco da árvore em pequenas toras, por meio do deslocamento de água, ou pelo seu peso, e ainda, graficamente.

Vários são os fatores que influenciam na forma e características dos troncos das árvores, assim, algumas delas podem assumir uma forma muito próxima das figuras

Figura 27 – Componentes da Árvore



Fonte: Autoria Própria - Gerado usando a plataforma Canva (2024)

geométricas conhecidas, enquanto outras se tornam tão tortuosas e irregulares, que dificultam ainda mais a aplicação dos conhecimentos matemáticos para determinar com precisão seu volume.

Sendo assim, as pesquisas sobre a forma dos troncos foram conduzidas às árvores consideradas mais regulares, em que se poderia comparar a sólidos geométricos de revolução como figuras geométricas definidas, conhecidos como *protótipos dendrométricos*. E ainda assim, é do consenso de vários autores, que o tronco de uma árvore pode assumir vários sólidos geométricos em seu comprimento total, e se utiliza fórmulas truncadas para calcular o volume das toras.

4.2 Cubagem Rigorosa de Árvores por procedimentos Analíticos

Embora certas partes do tronco de árvores se assemelhem a protótipos dendrométricos e existam pesquisas na área, na prática, a aplicação do conhecimento teórico sobre a forma dos troncos nem sempre é uma tarefa viável. Dessa maneira, outras metodologias foram desenvolvidas para atender às necessidades práticas do cálculo do volume *real* dos fustes.

O volume verdadeiro do fuste é obtido por meio do Deslocamento da Água, conhecido como Xilômetro, assim, foram sendo desenvolvidas fórmulas e métodos que dão uma boa estimativa do valor real do volume, também chamados de volume rigoroso.

Sabendo que a forma das árvores não é totalmente regular, para se utilizar as fórmulas e métodos de cubagem, é necessário dividir o fuste das árvores em seções (toras). Conseqüentemente são realizadas várias medidas dos diâmetros ao longo do tronco, obtendo o volume de todas as seções por meio da aplicação das fórmulas. O volume do Fuste será o resultado da soma dos volumes das seções. É certo que se forem feitas seções de menor

comprimento, o valor do volume calculado terá maior precisão. Para realizar esse trabalho de medição dos diâmetros em árvores derrubadas utiliza-se a suta conforme Figura 28.

Figura 28 – Suta



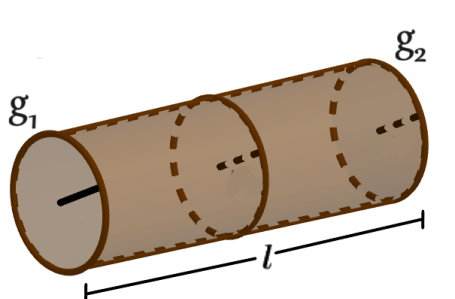
Fonte: <https://www.ibflorestas.org.br/conteudo/o-que-e-dap-de-uma-arvore>

Entretanto, nos inventários em florestas naturais, essa medida é feita com as árvores em pé. Desse modo, são utilizados instrumentos para medir diâmetros à distância. Ou ainda, subir nas árvores para realizar a medida com equipamentos específicos, porém, realizar essas medidas demanda tempo e muitas vezes os resultados não são os mais precisos, assim, as medidas com as árvores em pé são consideradas estimativas, que podem conter alguns erros.

4.2.1 Cubagem por Smalian

Já afirmamos anteriormente que, para calcular o volume por meio de métodos de cubagem, é necessário dividir a árvore em seções (toras) e realizar as medidas e calcular o volume em cada uma dessas seções. O volume total será o somatório dos volumes das seções. A fórmula de Smalian utiliza as medidas dos diâmetros ou das circunferências nas extremidades de cada seção (ou tora) para calcular o volume.

Figura 29 – Esquema de cubagem por Smalian



Fonte: Autoria Própria (2024)

$$v = \left(\frac{g_1 + g_2}{2} \right) l$$

Onde:

v = volume da tora (seção)

g_1 = área transversal na base da tora

g_2 = área transversal no topo da tora

l = comprimento da tora

$$g_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{c_1^2}{4\pi} \qquad g_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{c_2^2}{4\pi}$$

d_1 = diâmetro na base da tora

c_1 = comprimento da circunferência na base da tora

d_2 = diâmetro no topo da tora

c_2 = comprimento da circunferência no topo da tora

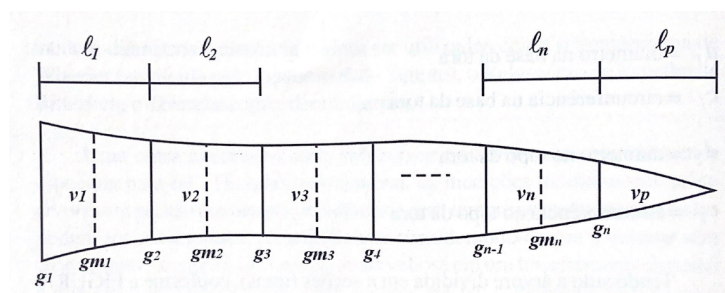
Após dividir a árvore em n seções (toras), conforme Figura 30, obtém-se o volume total por meio da soma:

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + v_p$$

Em que v_p representa o volume da ponta considerado como um cone, e seu volume é calculado pela expressão:

$$v_p = \frac{g_n l_p}{3}$$

Figura 30 – Esquema genérico para a curagem de uma árvore inteira por Smalian, Huber e Newton



Fonte: Machado e Figueiredo (2003)

Para as aulas no ensino médio, iremos fazer uma pequena mudança nas fórmulas para que fiquem mais simples ao entendimento dos estudantes, assim a fórmula de Smalian que apresentaremos será:

$$v = \left(\frac{A_b + A_t}{2} \right) l$$

Onde:

v = volume da tora (seção)

A_b = área transversal na base da tora

A_t = área transversal no topo da tora

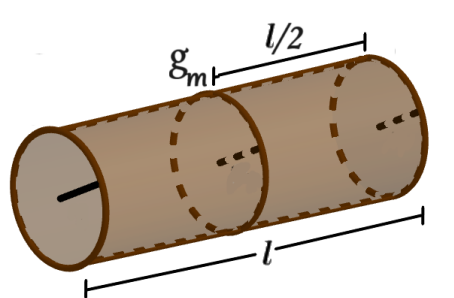
l = comprimento da tora

A área de cada seção transversal será calculada utilizando a fórmula da área do círculo, e para obter o raio, os estudantes são instruídos a calcular por meio do comprimento da circunferência.

4.2.2 Cubagem por Huber

A fórmula de Huber utiliza a medida do diâmetro ou da circunferência no meio da seção (tora), de acordo com a Figura 31.

Figura 31 – Esquema de cubagem por Huber



Fonte: Autoria Própria (2024)

$$v = g_m l$$

Onde:

g_m = área transversal no meio da tora (seção)

O volume inteiro da árvore é calculado da mesma forma que pelo método de Smalian, por meio do somatório:

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + v_p$$

Em que v_p representa o volume da ponta. Observe a Figura 30 novamente. Mais uma vez, para as aulas no ensino médio iremos modificar a fórmula:

$$v = A_m l$$

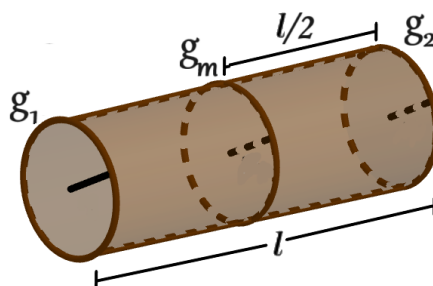
Onde:

A_m = área transversal no meio da tora (seção)

4.2.3 Cubagem por Newton

A fórmula de Newton utiliza três medidas para calcular o volume da seção, são elas a do diâmetro ou circunferência na base, no topo e no meio da seção. Por ser um método que requer três medições, é o método mais trabalhoso, e também, na maioria das vezes, o mais preciso.

Figura 32 – Esquema de cubagem por Newton



Fonte: Autoria Própria (2024)

$$v = \left(\frac{g_1 + 4g_m + g_2}{6} \right) l$$

Novamente, o volume inteiro da árvore é calculado por meio da soma dos volumes das seções (toras):

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + v_p$$

Em que v_p representa o volume da ponta. Observe mais uma vez a Figura 30. Para as aulas no ensino médio iremos adotar a fórmula:

$$v = \left(\frac{A_b + 4A_m + A_t}{6} \right) l$$

4.2.4 Volume da Árvore pelo Processo de Deslocamento de Água

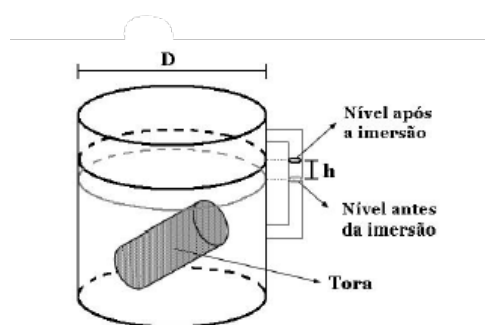
É possível calcular o volume de um sólido qualquer por meio do deslocamento de água, ao submergir completamente o sólido em um recipiente com água e observar o volume de água deslocado. Esse método é conhecido como *Xilômetro*.

O Xilômetro é um recipiente cilíndrico, que é preenchido com água até determinada altura, em que podemos calcular o volume de água (V_A). Para encontrar o volume de uma seção (tora) de árvore ou torete (pequeno tronco), mergulha-se o torete dentro do Xilômetro, o nível de água será elevado até outra altura, em que podemos calcular o volume de água mais o volume do torete ($V_A + T$), assim o volume do torete será a diferença entre o volume final dentro do recipiente ($V_A + T$) e o volume inicial de água (V_A).

O Xilômetro pode ser construído de acordo com o tamanho dos toretes que se quer obter o volume, podendo ser feita uma graduação simples nas laterais, ou com o uso de

um tubo externo com as graduações, como mostra a Figura 33. Obviamente, troncos de árvores muito grandes tornam esse processo inviável, caso contrário, seria necessário um recipiente muito grande para submergir os troncos. Podemos levar em consideração também o alto custo para construção e locomoção dos troncos ou do Xilômetro. Assim, este método é utilizado com maior frequência para fustes muito tortuosos e curtos, ou ainda para avaliar a eficiência de outros métodos de cubagem, pela possibilidade de sofrer poucas alterações nos resultados do volume dos troncos.(CAMPOS, 2014)

Figura 33 – Xilômetro



Fonte: Oswaldo Joaquim de Campos (2014)

Utilizar este método para obter o volume real exclui duas fontes de erros dos métodos analíticos:

1. Independe da forma do tronco;
2. Não há necessidade de realizar medidas de diâmetros ou comprimentos, eliminando assim erros de medida.

Porém, o Xilômetro pode demonstrar erros quando:

1. A água penetra na tora;
2. A tora não fica totalmente submersa.

Dentre todos os métodos de cubagem, o Xilômetro mostra-se o mais eficaz, e portanto, tem sido utilizado para verificar a eficiência dos outros métodos. Porém, a maioria das pesquisas na área da dendrometria tem considerado o Método de Smalian como padrão, sendo este realizado com seções de pequenos tamanhos (20, 30 cm, etc). Existem ainda, outros métodos de cubagem, entretanto os métodos de Smalian, Huber e Newton tem sido os mais utilizados devido a sua praticidade e aplicabilidade. No Brasil, o método de Smalian é o mais empregado nos levantamentos florestais, com seções curtas de 1 ou 2 metros.

4.3 Cubagem por Descontos

No passado, a maioria dos madeireiros não tinham preocupação com o volume total das árvores que eram comercializadas, então utilizavam métodos de cubagem bem simples que calculava o volume de madeira que seria comercializado, descontando as costaneiras, considerando que naquela época, os recursos florestais eram mais abundantes.

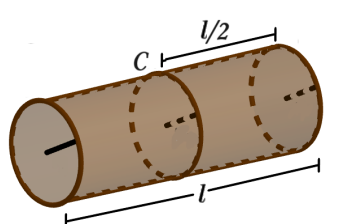
Existem diversas fórmulas empíricas para o cálculo do volume de madeira por descontos, neste trabalho iremos abordar somente a Fórmula de Francon, visto que era a mais utilizada na região, e até nos dias atuais algumas serrarias ainda a utilizam, por ser de simples compreensão e uso.

4.3.1 Volume Francon

Também conhecido como volume Hoppus ou volume ao 4º reduzido, é um método de cubagem de tronco de árvores utilizado comercialmente pelos madeireiros em diversas regiões brasileiras, especialmente em serrarias. Com este método é possível encontrar o volume de madeira aproveitável, considerando a parte de maior valor comercial, em que os descontos representam o percentual de madeira que é perdido por meio dos cortes e das costaneiras que não são utilizadas. São métodos muito práticos, porém baseados em fórmulas empíricas. (SILVA, 2023)

Para calcular o volume Francon, faz-se a medição do comprimento da circunferência na metade do tronco, conforme Figura 34.

Figura 34 – Volume pela Fórmula de Francon



Fonte: Autoria Própria (2024)

$$V = \left(\frac{C}{4}\right)^2 \cdot l$$

Em que:

V = volume de Francon em m^3

C = comprimento da circunferência na metade do tronco

l = comprimento do tronco

Podemos relacionar o volume Francon com o volume de um cilindro, assim temos o fator de dedução ou redução.

$$F_d = \frac{V_f}{V_c} = \frac{\left(\frac{C}{4}\right)^2 \cdot l}{\pi r^2 l} = \frac{(2\pi r)^2}{\pi r^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854$$

Ou seja, o volume Francon representa 78,54% do volume de um cilindro.

5 O PROFESSOR EDINHO

Edinho Edwim Hollunder nasceu em 31 de maio de 1958, no município de Domingos Martins. Filho de Adelina Ribett Hollunder e Edwin Hollunder, uma família dedicada às atividades agrícolas e pecuárias. Com 6 anos de idade, Edinho já ajudava a família no trabalho no campo. No ano de 1966 é matriculado na Escola Estadual de Ponto Alto, onde sempre foi um aluno dedicado e com bons desempenhos nos estudos.

Figura 35 – Professor Edinho Edwim Hollunder



Fonte: <https://www.montanhascapixabas.com.br/professor-edinho-edvin-hollunder-se-aposenta-e-deixa-legado-na-educacao-de-domingos-martins/>

No final do ano de 1968, quando Edinho ainda tinha 10 anos de idade, sua irmã o procurou para construírem juntos uma estrela natalina de cinco pontas em uma placa de isopor, em que ele, com o auxílio de um transferidor, divide a circunferência em cinco pontos equidistantes e constrói a estrela de Natal tão desejada.

Aproximadamente aos 12 anos, Edinho conhece a fórmula de Francon para cálculo de volume de troncos de árvores. Nessa época, seu pai era madeireiro e possuía um engenho, em que comprava e vendia madeira, e apresentou para Edinho a expressão, caso ele tivesse interesse no futuro de trabalhar no mesmo ramo do pai.

Em 13 de dezembro de 1974, Edinho conclui seus estudos do 1º grau e em julho de 1975 é convidado para lecionar matemática a uma turma da 3ª série ginásial de Ponto Alto. Além de dar aula de matemática sem contrato formalizado, Edinho também desenvolvia projetos agrícolas. Então teve a oportunidade de continuar seus estudos no Colégio Agrícola

de Santa Tereza, onde em 8 de dezembro de 1978 concluiu o 2º grau profissionalizante, formando assim em técnico agrícola.

Nesse período, em que Edinho cursava o ensino médio em Santa Tereza, teve a oportunidade de conhecer uma serraria onde se confirmou o uso da fórmula de Francon para o cálculo de cubagem de troncos pelos madeireiros da região.

No ano de 1979, Edinho foi convidado para dar aula de matemática na única turma de 8ª série que acontecia nas dependências da Igreja Batista no turno noturno. No início de 1982, a SEDU passa a ofertar o Ensino Fundamental II na escola de Ponto Alto, onde Edinho é convidado para lecionar matemática pela diretora da escola. Mesmo indeciso e receoso, Edinho aceita o convite com a condição de que seria apenas por alguns meses. Porém, em abril de 1982, seu contrato é formalizado com a SEDU.

Então, no ano de 1984, Edinho inicia o curso de magistério na sede de Domingos Martins, e na década de 80, a SEDU faz um convênio com a UFES e passa a oferecer o Curso de Licenciatura em Matemática para uma turma de professores atuantes na rede estadual. O curso era semipresencial, então Edinho trabalhava de segunda a sexta, e aos finais de semana e nas férias frequentava o curso.

Durante esse curso de licenciatura, Edinho apresentou para seus professores a fórmula de Francon, como acreditamos estar relatado na Revista do Professor de Matemática, 9ª edição ¹.

No ano de 1988, Edinho concluiu seu curso de Licenciatura em Matemática e participou do concurso público realizado pela SEDU, e sendo aprovado, assume a vaga de professor de matemática na Escola de Ponto Alto. Mais tarde, em 1996, a SEDU realiza mais um concurso e Edinho toma posse do seu 2º vínculo como professor na Escola de Ponto Alto.

Em 2001, na prova do ENEM, Edinho encontrou uma questão que envolvia a Fórmula de Francon, como podemos ver na figura 36, a partir de então, passou a desenvolver uma aula prática sobre cubagem de madeira relacionando a conhecimentos matemáticos do currículo escolar. (BRASIL, 2001)

Quando completou mais de 31 anos de trabalho no primeiro vínculo, no dia 26 de dezembro de 2013, Edinho aposenta e passa a trabalhar apenas no seu segundo vínculo. Ao completar 40 anos de serviço público ao estado, no final de 2021 Edinho aposenta em seu 2º vínculo.

E ainda continua atuando como professor voluntário desenvolvendo suas aulas práticas durante as aulas lecionadas por mim na Escola de Ponto Alto, mantendo um comprometimento constante com os estudantes, compartilhando seus valiosos conhecimentos.

¹ <https://rpm.org.br/cdrpm/9/3.htm>

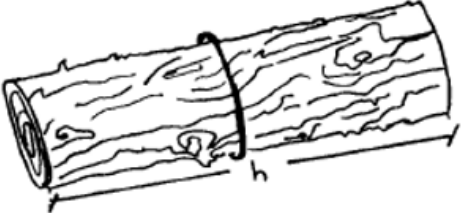
Edinho sempre foi um professor extremamente comprometido com seu trabalho, com isso obteve durante sua carreira diversas premiações e honrarias. Seu compromisso com a educação reflete-se no sucesso profissional de muitos de seus alunos, que conquistaram carreiras promissoras e garantiram vagas concorridas em universidades. Além disso, vários estudantes da escola destacaram-se com medalhas e menções em avaliações como a OBMEP. O impacto positivo de seu compromisso com a educação é evidente no sucesso alcançado pelos estudantes em seu desempenho em avaliações nacionais e externas. Um verdadeiro exemplo a ser seguido.

Figura 36 – ENEM 2001

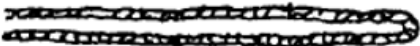
ENEM 2001.1 – Questão 9 da Prova Amarela

Em muitas regiões do Estado do Amazonas, o volume de madeira de uma árvore cortada é avaliado de acordo com uma prática dessas regiões:


I - Dá-se uma volta completa em torno do tronco com um barbante.



II - O barbante é dobrado duas vezes pela ponta e, em seguida, seu comprimento é medido com fita métrica.



1ª dobra



2ª dobra

III - O valor obtido com essa medida é multiplicado por ele mesmo e depois multiplicado pelo comprimento do tronco. Esse é o volume estimado de madeira.

Outra estimativa pode ser obtida pelo cálculo formal do volume do tronco, considerando-o um cilindro perfeito.

A diferença entre essas medidas é praticamente equivalente às perdas de madeira no processo de corte para comercialização.

Pode-se afirmar que essas perdas são da ordem de

(A) 30%.
(B) 22%.
(C) 15%.
(D) 12%.
(E) 5%.

6 RELATO

Neste capítulo, iremos descrever o relato do desenvolvimento das aulas práticas realizadas com a terceira série do Ensino Médio da Escola de Ponto Alto. Inicialmente, queremos listar os materiais utilizados nas aulas, bem como explicar conceitos que acreditamos serem relevantes sobre alguns destes materiais.

6.1 Materiais utilizados

A primeira aula foi realizada em campo, nela utilizamos uma trena de 40 metros, uma mesa de estudante para apoiar o teodolito, a calculadora científica, o teodolito e materiais escolares para registrar os dados e os cálculos.

A segunda aula foi desenvolvida nos espaços da escola, e os materiais utilizados foram um aquário, fita métrica, calculadora científica e dos smartphones, troncos de árvores e o roteiro da atividade, disponível no apêndice [A](#).

6.1.1 Calculadora científica

Pesquisas e trabalhos apontam o quanto alguns professores de matemática são resistentes quanto ao uso da calculadora em sala de aula. O receio de que os estudantes percam a capacidade de fazer cálculos manuscritos ou passem a adquirir algum tipo de vício na máquina leva os professores a proibirem o uso da máquina em todas as aulas de matemática, alegando que vestibulares, concursos e o ENEM não permitem o uso em suas avaliações. ([SILVA, 2017](#)) e ([MATOS, 2016](#))

De acordo com [Santana e Medeiros \(2019\)](#),

O uso da calculadora em sala de aula permite criar situações para que os alunos desenvolvam estratégias de resolução, interpretação de resultados, percepção dos conceitos matemáticos aplicados nas situações vivenciadas, desenvolvendo também a pesquisa, a discussão de resultados, ou seja, o uso da calculadora oferece inúmeras contribuições importantes para o ensino da Matemática, desde que haja sempre um bom planejamento das aulas para que a aprendizagem realmente ocorra.

Nesse sentido, é possível utilizar a calculadora como um instrumento de construção do conhecimento, associada a resolução de problemas, ou para agilizar estratégias, potencializar cálculos mentais, fazendo com que os estudantes tenham mais tempo para refletir sobre os resultados encontrados. Desde que as atividades com o uso da calculadora sejam planejadas a fim de proporcionar aprendizagens significativas, levando em conta as potencialidades dos recursos tecnológicos. Portanto, no decorrer das aulas práticas

desenvolvidas, utilizamos com os estudantes a calculadora científica e dos smartphones, já que possuem os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos. E devido também ao cansaço excessivo associado ao manuseio de números com maior quantidade de casas decimais, buscando obter resultados mais precisos nos cálculos.

6.1.2 Teodolito

Ao longo da evolução da humanidade, as pessoas sentiram a necessidade de desenvolver medidas e criar instrumentos para satisfazer as demandas de sua época. Com o objetivo de marcar territórios e estudar o solo, surge a topografia, quando o homem criou os primeiros instrumentos para medir ângulos. (SOUZA, 2015)

O teodolito é um dispositivo de medição empregado principalmente em estudos topográficos ou na análise de dimensões de locais de difícil acesso. Ele é capaz de realizar medições tanto de ângulos horizontais quanto verticais.

Sendo assim, busca-se gerar figuras geométricas por meio da utilização de pontos de referência, considerando distâncias ou ângulos conhecidos e aplicando princípios matemáticos. Dessa maneira, é possível calcular as dimensões inacessíveis utilizando o teodolito, por meio das relações presentes em triângulos. (AMORIM, 2016)

O primeiro teodolito foi construído por Jonathan Sisson, em 1720, mais tarde, Ignácio Porro, aperfeiçoou o teodolito acoplando o telescópio. E com o passar dos anos foi sendo cada vez mais aprimorado, possibilitando medidas e resultados mais precisos. (ZILKHA, 2014)

O teodolito utilizado nesta aula foi construído pelo professor Marcos Antônio Schwanz inspirado no teodolito que o professor Edinho construiu. Para a sua construção, ele utilizou duas tábuas de MDF, em uma delas ele anexou um nível de bolha, para que fosse possível nivelar o teodolito de acordo com o plano utilizado e uma tabela trigonométrica completa, em que é possível utilizar os valores correspondentes de seno, cosseno ou tangente dos ângulos encontrados conforme figura 37b.

Na outra placa de MDF o professor utilizou uma folha de papel com a imagem de um transferidor de 360° , um cano de inox de uma polegada, um rolamento que foi soldado no cano de inox e fixado na madeira com um parafuso, e dois tubos de antena, um com diâmetro maior com o objetivo de realizar a observação dos pontos por dentro dele e outro mais fino para indicar o ângulo formado de acordo com a figura 37a.

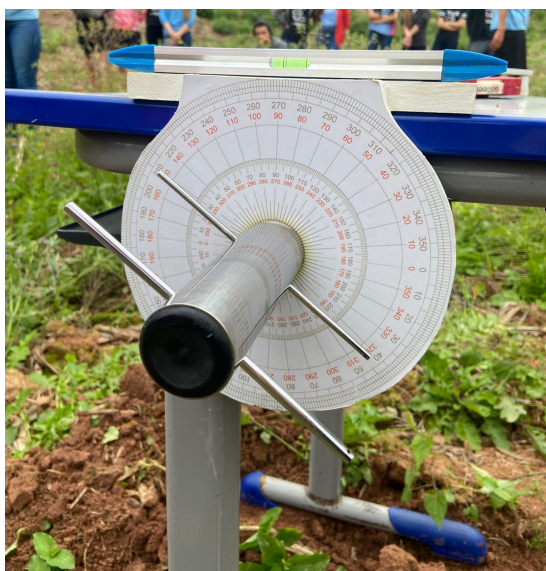
As figuras 38a e 38b demonstram o teodolito construído pelo professor Edinho utilizando madeira. Ele pode ser utilizado de duas maneiras distintas. Para medir alturas e distâncias na vertical, posicionamos o teodolito conforme a figura 38a, observamos por dentro do tubo do teodolito na direção do topo da altura que desejamos calcular. Em seguida, realizamos a leitura do ângulo formado indicado pelo arame linear na base do

teodolito, e assim, construímos no papel os triângulos para calcular as medidas desejadas. É importante lembrar que, se o teodolito não estiver nivelado no solo com a parte inferior da medida que queremos calcular, é necessário acrescentar ao resultado final a altura do objeto que estivermos utilizando para apoiar o teodolito, que no nosso caso é a mesa de um estudante.

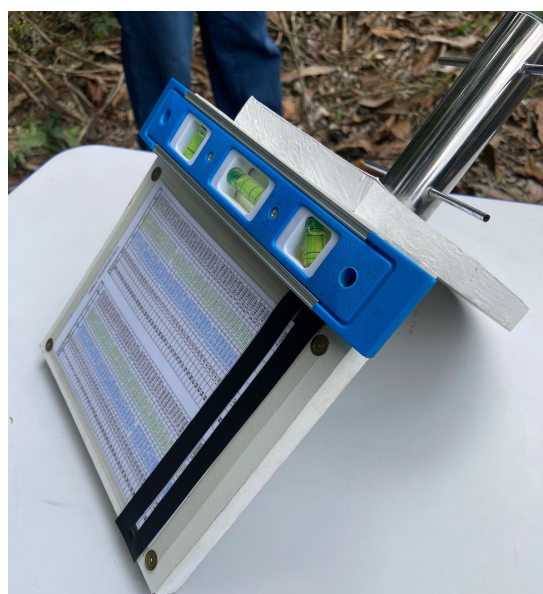
Se quisermos calcular distâncias na horizontal, posicionamos o teodolito conforme a figura 38b, é necessário imaginar uma reta paralela ao arame da base do teodolito alinhada com o ângulo de 0° , assim iremos observar dois pontos do segmento que queremos calcular a medida, o ponto inicial deve estar alinhado com a medida do ângulo de 0° e sobre a reta paralela imaginária, o outro ponto deverá estar no final do segmento e iremos observá-lo por meio do tubo girando o teodolito, observado o ângulo formado e com alguma das medidas realizadas, é possível calcular a outra medida desejada.

Para o desenvolvimento da aula proposta, não há necessidade do professor construir um teodolito como o que utilizamos, existem outros modelos de teodolitos que podem ser construídos de maneira bem mais simples e utilizando até materiais recicláveis, o objetivo da pesquisa é apresentar mais um modelo que pode ser reproduzido. O PROFMAT possui diversas dissertações sobre uso do teodolito, sua construção com diversos materiais, alguns mais simples, outros mais elaborados.

Figura 37 – Teodolito



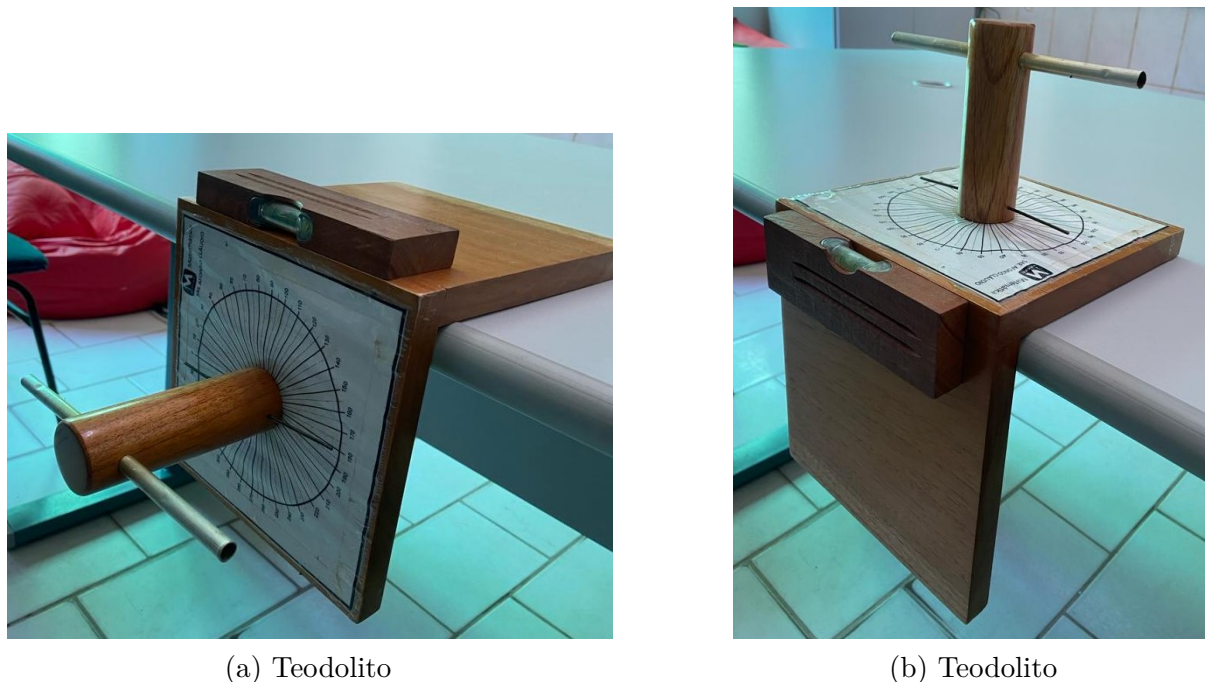
(a) Teodolito



(b) Teodolito

Fonte: Autoria Própria (2024)

Figura 38 – Teodolito do Professor Edinho



Fonte: Autoria Própria (2024)

6.2 Aula prática usando o método Francon e cálculo de alturas inacessíveis

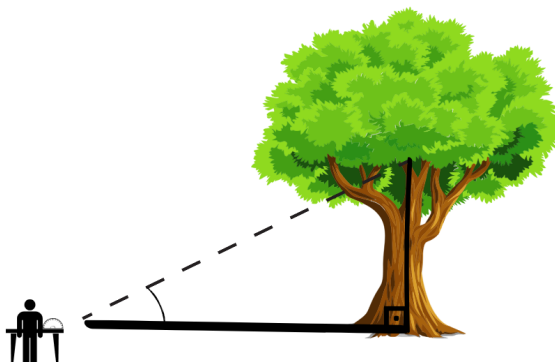
No dia 05 de setembro de 2023, levamos os estudantes da terceira série do Ensino Médio da EEEFM Ponto do Alto ao sítio Vale Verde, onde fomos gentilmente recepcionados pelo professor Edinho para o desenvolvimento da aula prática. A primeira atividade realizada foi o cálculo do volume de madeira de um Ipê Roxo, que possui aproximadamente 500 anos, de acordo com o IBAMA. Infelizmente a árvore já foi condenada, possui uma parte oca em seu interior e mesmo ainda dando algumas folhas, futuramente, deverá ser derrubada para evitar possíveis acidentes.

O primeiro passo foi calcular a altura do Ipê, para isso utilizamos o teodolito devidamente nivelado, na direção da base da árvore, com o objetivo de formarmos um triângulo retângulo conforme a Figura 39 a seguir.

Utilizamos a trena para medir a distância entre o pé da árvore e a mesa com o teodolito, a medida encontrada foi de 40 metros. Enquanto um estudante observa o ponto mais alto da última bifurcação do Ipê por meio do teodolito, anotamos o ângulo de 35° formado entre linha horizontal perpendicular ao eixo do tronco da árvore e a linha que visa o topo da árvore. As figuras 40a, 40b, 40c e 40d ilustram a situação descrita acima.

Por meio das razões trigonométricas vistas anteriormente, calculamos a altura do

Figura 39 – Esquema de Medição da Altura - Terreno Plano



Fonte: Autoria Própria - Gerado usando a plataforma Canva (2024)

Ipê.

$$\operatorname{tg} 35^{\circ} = \frac{x}{40} \Rightarrow x = 28,00830153.$$

Convencionamos arredondar a altura do Ipê para 28 metros. O próximo passo foi calcular o volume em metros cúbicos de madeira que poderia ser utilizado para comércio. Para isso, utilizamos novamente a trena para medir a circunferência da base do tronco do Ipê. A medida encontrada foi de 2,90 metros. Como utilizaremos o método Francon de cálculo de volume de madeira, precisamos encontrar a medida da circunferência da árvore na altura de 14 metros, que é o meio da árvore.

Assim, o próximo passo, foi medir o comprimento da circunferência do Ipê, para isso, utilizamos novamente a trena, passando-a em torno da base do tronco da árvore, conforme ilustra a Figura 41.

A medida encontrada no pé da árvore foi de aproximadamente 2,9 metros de comprimento. Para calcular o comprimento da circunferência no meio da árvore, ou seja, há 14 metros de altura, utilizamos a seguinte expressão, que foi desenvolvida pelo professor Edinho por meio de experiências pessoais de maneira empírica. O resultado desse cálculo representará um valor numérico próximo da medida que estamos buscando.

Vale ressaltar aqui, que o cálculo para fins de comércio do volume de madeira, em sua maioria é feito após a derrubada da árvore, logo a medida da do comprimento da circunferência no meio da árvore é feito na prática com o uso de uma trena, porém, este não é o objetivo da aula, por isso iremos utilizar medidas aproximadas, mostrando aos estudantes os procedimentos práticos para o cálculo, sem intenção de corte da árvore.

A expressão que utilizamos para calcular a medida do comprimento da circunferência no meio do tronco é

$$c \cdot 0,965^n$$

onde c é o comprimento da circunferência na base do tronco e n a altura mediana do tronco, ou seja, o meio do tronco.

Figura 40 – Aula Prática



(a) Ipê Roxo



(b) Nivelando o Teodolito



(c) Medindo a Distância no Plano



(d) Utilizando o Teodolito

Fonte: Autoria Própria (2024)

Figura 41 – Medida do Comprimento da Circunferência



Fonte: Autoria Própria (2024)

Na nossa aula, a medida para o valor de c é 2,9 metros e a medida para o valor de n é 14 metros, assim o comprimento da circunferência que procuramos é

$$2,9 \cdot 0,965^{14} = 1,76108527\dots$$

Para desenvolver esse cálculo, utilizamos a calculadora científica e convencionamos arredondar a medida para 1,76 metros.

Dando sequência, precisamos descontar a casca do tronco, para isso, é comum os madeireiros utilizarem como regra o desconto de 10%, então o comprimento da circunferência do tronco sem a casca será

$$10\% \text{ de } 1,76 = 1,58$$

A partir dos valores obtidos, iremos utilizar a Regra de Francon para calcular o volume de madeira do Ipê que poderia ser comercializado.

$$V_t = \left(\frac{C}{4}\right)^2 \cdot l$$

$$V_t = \left(\frac{1,58}{4}\right)^2 \cdot 28$$

$$V_t = 4,3687$$

Obtemos assim, aproximadamente $4,4 \text{ m}^3$ de madeira do Ipê. Em seguida, fizemos o cálculo do volume geométrico do tronco, utilizando a expressão para cálculo de volume do cilindro. Para isso, primeiramente precisamos calcular o raio da circunferência que

contorna o tronco por meio da expressão:

$$C = 2\pi r$$

$$1,58 = 2 \cdot 3,14 \cdot r$$

$$r = 0,25159235\dots$$

Convencionamos utilizar a medida do raio igual a 0,25 metros. O volume geométrico do tronco se dá pela expressão:

$$V = \pi r^2 h$$

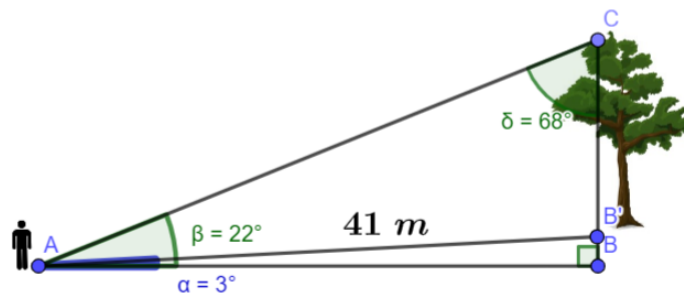
$$V = 3,14 \cdot 0,25^2 \cdot 28$$

$$V = 5,565$$

Ou seja, o volume de tronco, quando consideramos sua forma cilíndrica é de aproximadamente $5,565 \text{ m}^3$. Podemos observar que o volume de um tronco cubado pela regra de Francon tem uma redução de aproximadamente 21,5 % quando comparado com o volume cilíndrico do tronco, conforme visto anteriormente em 4.3.1.

A segunda atividade proposta foi calcular a altura de um cedro em aclave, ou seja, nessa situação o observador fica abaixo do nível do pé do tronco, como ilustra a figura 42.

Figura 42 – Árvore em aclave



Fonte: Autoria Própria (2024)

Para isso, novamente posicionamos o teodolito e medimos a distância do pé da árvore até a mesa, distância representada pelo segmento AB' da figura 42, cuja medida é igual a 41 metros. Com o teodolito observamos a medida do ângulo $\widehat{CAB} = 22^\circ$ e $\widehat{B'AB} = 3^\circ$. O objetivo desta atividade foi calcular a altura da árvore utilizando a lei dos Senos, para isso, iremos considerar o triângulo ACB' .

No triângulo ABC , temos o ângulo reto e o ângulo $\widehat{CAB} = 22^\circ$, então a medida do ângulo $\widehat{ACB'} = 68^\circ$, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .

Figura 43 – Aula Prática



(a) Cedro em aclave



(b) Visualização do topo do Cedro

Fonte: Autoria Própria (2024)

Considerando o triângulo ACB' , o ângulo $C\hat{A}B' = C\hat{A}B - B'\hat{A}B = 22^\circ - 3^\circ = 19^\circ$, assim aplicando a lei dos Senos temos que,

$$\frac{AB'}{\text{sen}(A\hat{C}B')} = \frac{CB'}{\text{sen}(C\hat{A}B')}$$

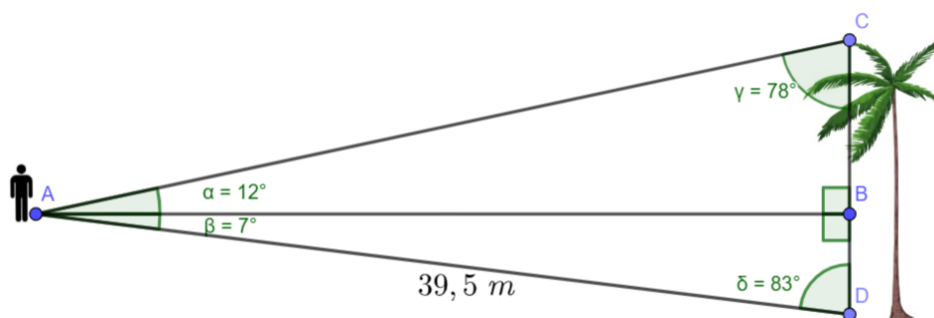
$$\frac{41}{\text{sen}(68^\circ)} = \frac{h}{\text{sen}(19^\circ)}$$

$$\frac{41}{0,927} = \frac{h}{0,325} \Rightarrow h = 14,374m$$

As imagens 43a e 43b mostram os estudantes medindo a distância do teodolito ao pé da árvore e a visualização do topo do Cedro por meio do teodolito.

Para finalizar a atividade prática desenvolvida nesse dia, realizamos a terceira atividade em que calculamos a altura de um palmito nativo agora em declive, ou seja, o observador está posicionado acima do nível da árvore, conforme ilustra a figura 44.

Figura 44 – Árvore em declive



Fonte: Autoria Própria (2024)

Uma vez mais, nivelamos o teodolito e medimos a distância entre o pé da árvore e a mesa, representado pelo segmento AD na figura 44 cuja medida foi de 39,5 metros. Utilizando o teodolito, observamos os ângulos $C\hat{A}B = 12^\circ$ e $B\hat{A}D = 7^\circ$. Assim a medida do ângulo $A\hat{C}B = 78^\circ$, pois o triângulo ABC possui um ângulo reto e um ângulo de 12° e a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .

Aplicando a Lei dos Senos no triângulo ACD , temos

$$\frac{AD}{\text{sen}(A\hat{C}D)} = \frac{CD}{\text{sen}(C\hat{A}D)}$$

$$\frac{39,5}{\text{sen}(78^\circ)} = \frac{h}{\text{sen}(19^\circ)}$$

$$\frac{39,5}{0,978} = \frac{h}{0,325} \Rightarrow h = 13,126m$$

As imagens 45a e 45b mostram a situação representada. O teodolito foi nivelado de maneira que fosse possível observar o topo e o pé do palmito, assim quando deixamos a mira no ângulo de 0° visualizamos uma região no meio do tronco, formando assim o segmento AB da figura 44 perpendicular ao tronco da árvore.

Durante as aulas práticas em campo, foi evidente o envolvimento dos estudantes com os conhecimentos compartilhados. A maioria participou ativamente, realizando cálculos, efetuando medições e estimativas, além de esclarecer dúvidas junto ao professor. Ao término da aula, o professor Edinho dedicou um momento para abordar com os alunos a relevância do reflorestamento. Lamentavelmente, no passado, a falta de fiscalização resultou na descoberta de muitas áreas de mata, acarretando em consequências que enfrentamos atualmente.

Entretanto, o professor mencionou um exemplo positivo: uma área de sua propriedade, anteriormente destinada ao cultivo de café, foi abandonada devido à sua inclinação

Figura 45 – Altura do palmito em Declive



(a) Teodolito nivelado



(b) Medindo a distância

Fonte: Autoria Própria (2024)

acentuada e difícil manejo. Essa área foi deixada para a natureza, permitindo que, ao longo de 40 anos, uma densa floresta se formasse, representada na parte direita das figuras 45a e 45b. Demonstrando, dessa forma, como a natureza pode se regenerar por si só, contanto que o ser humano não intervenha.

6.3 Aula prática usando outros métodos de cubagem

No dia 1º de dezembro, realizamos a atividade prática sugerida pelo Dr. Gilson Fernandes da Silva para os alunos da terceira série do ensino médio. Decidimos conduzir uma aula prática abordando medidas, cálculos de volume e cubagem, utilizando um tronco de madeira como foco de estudo. A estratégia consistiu em dividir a turma em grupos e disponibilizar para cada equipe uma fita métrica, um roteiro da aula e um tronco de madeira.

Cada tronco entregue aos grupos apresentava variações tanto em forma quanto em comprimento. Alguns troncos ainda mantinham a casca, enquanto outros não a possuíam. Além disso, a irregularidade no comprimento era evidente, com alguns se aproximando de uma forma cilíndrica, enquanto outros demonstravam características mais irregulares.

Cada grupo recebeu a tarefa de realizar medições específicas no tronco de madeira, incluindo o comprimento total, bem como o comprimento da circunferência em três regiões distintas: base maior, base menor e meio do tronco. Em seguida, os alunos calcularam o raio em cada uma dessas regiões, visando posteriormente determinar a área transversal em cada uma delas, o que pode ser observado nas figuras 46a e 46b.

O passo seguinte consistiu no cálculo do volume de madeira em centímetros cúbicos, utilizando os três métodos de cubagem vistos anteriormente: método de Smalian, método de Hubber e método de Newton. Esta abordagem prática permitiu que os estudantes aplicassem conceitos teóricos de forma concreta, desenvolvendo habilidades de cálculo e interpretação de resultados.

Em seguida, os alunos mergulharam o tronco de madeira em um aquário de dimensões conhecidas (49,2 cm x 24,3 cm), observando o deslocamento do nível de água. Eles calcularam o volume da água deslocada, considerando-a como um paralelepípedo, e utilizaram garfos para manter o tronco submerso, minimizando a flutuação, conforme figuras 46c e 46d.

Ao comparar os resultados obtidos por meio dos cálculos com os dados do mergulho na água, os estudantes notaram uma proximidade surpreendente. Esta observação levou a uma reflexão sobre a precisão dos métodos de cubagem em situações práticas.

Além dos cálculos, promovemos discussões enriquecedoras. Os alunos converteram medidas de centímetros cúbicos para litros, relacionando os conceitos matemáticos com situações do cotidiano. Propusemos ainda um desafio: calcular as dimensões de um aquário de modo que, ao despejar 1 litro de água, o nível subisse 1 centímetro.

A aula promoveu uma interação intensa entre os estudantes, que trabalharam colaborativamente em seus grupos para realizar a atividade da maneira mais precisa possível. Observamos engajamento e participação, indicando que a abordagem prática despertou o interesse dos alunos.

Contudo, identificamos algumas dificuldades básicas durante a aula, como dúvidas na realização das medidas e problemas ao utilizar calculadoras científicas. Esses desafios ofereceram oportunidades de aprendizado adicional, incentivando os alunos a buscar compreensão e correção.

Diante do sucesso da atividade, consideramos que esta abordagem prática é altamente positiva para ser implementada nos anos seguintes, especialmente como preparação para o ENEM. A aula não apenas envolve conceitos matemáticos avançados, mas também promove habilidades essenciais para enfrentar desafios práticos, algo crucial para o sucesso em avaliações como o ENEM.

Figura 46 – Aula Prática



(a) Comprimento do Tronco



(b) Comprimento do contorno



(c) Tronco Submerso 1



(d) Tronco Submerso 2

Fonte: Autoria Própria (2024)

7 Conclusão

Um dos maiores desafios do professor consiste em explorar estratégias pedagógicas que despertem o desejo do aluno pelo conhecimento. Uma das opções para estimular esse desejo é oferecer aulas mais envolventes, onde o estudante seja capaz de construir seu próprio entendimento, enquanto o professor assume o papel de mediador, orientando-o nesse processo.

Neste trabalho, abordamos conteúdos específicos de geometria, como trigonometria do triângulo retângulo, áreas e volumes e relacionamos esses conteúdos com o estudo da cubagem de madeira.

Por meio do aprofundamento dos conteúdos específicos, fica evidente a importância do professor estar sempre em busca de ampliar seus conhecimentos sobre os assuntos que são abordados em sala de aula. Mais do que fazer os estudantes memorizar fórmulas, mostrar como elas surgiram e apresentar algumas de suas aplicações torna seu estudo mais significativo para o estudante.

Desenvolvemos a aula prática calculando o volume de madeira de uma árvore em metros cúbicos, e percebemos que ao propor momentos em que os estudantes saem das quatro paredes da sala de aula para ampliar seu conhecimentos de maneira prática relacionando à saberes do seu cotidiano, a aquisição dos conteúdos se torna mais atrativa e eficaz. Podemos perceber a interação dos estudantes engajados em tirar as medidas e realizar os cálculos, compreendendo seus significados, sem fazer o questionamento comum que recebemos em sala de aula: “Onde vou usar isso na minha vida?”

Ao explorar técnicas de medição e cálculo aplicadas ao contexto das florestas, os estudantes são capacitados a desenvolver habilidades de análise crítica, pensamento espacial e raciocínio quantitativo. Além disso, ao fornecer uma visão direta do processo de avaliação e manejo de recursos florestais, tais aulas despertam o interesse dos jovens pela conservação ambiental e pela importância da preservação dos ecossistemas florestais.

Referências

- AMORIM, J. A. D. A geometria plana no ensino fundamental: estudo prático sobre o teodolito. *Dissertação do PROFMAT*, 2016. Disponível em: <https://sca.profmatsbm.org.br/profmatsbm_tcc.php?id1=2669&id2=82200>. Citado na página 54.
- BRASIL. Caderno de questões amarelo do enem. *Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira*, 2001. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2001/2001_amarela.pdf>. Citado na página 51.
- CAMPOS, O. J. D. Cubagem de Árvores. *Dissertação do PROFMAT*, 2014. Disponível em: <https://sca.profmatsbm.org.br/profmatsbm_tcc.php?id1=1073&id2=1211>. Citado na página 47.
- CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. Trigonometria números complexos. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1992. Citado na página 16.
- COMUNICAÇÃO, A. de. Instituto de física de são carlos. 2023. Disponível em: <<https://www2.ifsc.usp.br/portal-ifsc/o-numero-pi-com-628-trilhoes-de-casas-decimais/#:~:text=O%20n%C3%BAmero%20%CF%80%20foi%20calculado,Book%20a%20valida%C3%A7%C3%A3o%20do%20recorde.>> Citado na página 27.
- DANTE, L. R. Matemática: contexto e aplicações. *São Paulo: Ática*, v. 3, 2013. Citado na página 16.
- LIMA, E. L. Medida e forma em geometria: comprimento, área, volume e semelhança. Sociedade Brasileira de Matemática, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 16, 27 e 28.
- LIMA, E. L. et al. A matemática do ensino médio. *REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA*, v. 44, p. 51, 2000. Citado na página 22.
- LIMA, E. L. et al. *Temas e problemas*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010. Citado na página 32.
- LIMA, E. L. et al. Meu professor de matemática e outras histórias. Sociedade Brasileira de Matemática, 1991. Citado na página 31.
- MACHADO, S. d. A.; FILHO, A. F. Dendrometria. *Curitiba*, 2003. Citado na página 41.
- MATOS, C. M. O uso da calculadora nas aulas de matemática: O que pensam os professores de matemática de conceição do araguaia - pa. *Dissertação do PROFMAT*, 2016. Disponível em: <https://sca.profmatsbm.org.br/profmatsbm_tcc.php?id1=2657&id2=94290>. Citado na página 53.
- NETO, A. C. M. Geometria. *Rio de Janeiro: SBM*, 2013. Citado na página 23.
- SANTANA, J. E. B.; MEDEIROS, K. M. de. O uso da calculadora científica nas aulas de matemática do ensino médio: explorando a resolução de problemas. *Revemop*, v. 1, n. 3, p. 345–360, 2019. Citado na página 53.

- SANTANA, M. S. O volume dos principais poliedros: Metodologia e atividades no esquema de resolução de problemas. *Dissertação do PROFMAT*, 2014. Disponível em: <https://sca.profmatsbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=1493&id2=1145>. Citado na página 38.
- SILVA, G. F. d. Volumes comerciais. 2023. Disponível em: <https://www.labmmfufes.com/_files/ugd/000883_52b955fa4c89435ea07d81dc878f34ef.pdf>. Citado na página 48.
- SILVA, J. R. D. A utilização da calculadora hp 12c em problemas de matemática financeira. *Dissertação do PROFMAT*, 2017. Disponível em: <https://sca.profmatsbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=3747&id2=150090239>. Citado na página 53.
- SOUZA, I. D. S. Cálculo nas alturas: Trigonometria e o uso do teodolito caseiro. *Dissertação do PROFMAT*, 2015. Disponível em: <https://sca.profmatsbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=1747&id2=80841>. Citado na página 54.
- ZILKHA, E. Utilização do geogebra na construção de instrumentos teodolito. *Dissertação do PROFMAT*, 2014. Disponível em: <https://sca.profmatsbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=891&id2=493>. Citado na página 54.

Apêndices

APÊNDICE A – ATIVIDADE PRÁTICA SOBRE CUBAGEM DE ÁRVORES

Nas páginas seguintes temos um roteiro das atividades desenvolvidas na aula prática sobre métodos de cubagem de árvores apresentados no texto.



ROTEIRO DA ATIVIDADE PRÁTICA SOBRE CUBAGEM DE ÁRVORES

Grupo:

Turma: 3º EM

PROFESSORA: Suzane Braun Ramos da Silva

❖ **Conteúdos:**

- Comprimento da circunferência
- Área do círculo
- Volume
- Média aritmética e média ponderada
- Métodos de cubagem

❖ **Objetivo:**

Calcular o volume de troncos de árvores por meio dos métodos de cubagem e comparar os resultados por meio do deslocamento de água.

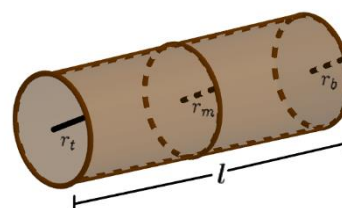
❖ **Materiais:**

- Aquário
- Troncos de árvore
- Fita métrica
- Calculadora científica

ATIVIDADES

1. Utilize a fita métrica para medir o comprimento l do tronco.

$$l = \underline{\hspace{2cm}}$$



*Faça uma marcação no meio do tronco, ou seja, na medida $\frac{l}{2}$.

2. Complete a tabela com as informações relacionadas a área transversal do tronco. Considere C_b o comprimento da circunferência do tronco no lado maior (base), C_m o comprimento da circunferência no meio do tronco e C_t o comprimento da circunferência no lado menor (topo):

Medida utilizando a fita métrica	C_b	C_m	C_t
Cálculo do Raio da área transversal Use: $C = 2\pi r$	r_b	r_m	r_t
Cálculo da área transversal Use: $A = \pi r^2$	A_b	A_m	A_t

3. Calcule o volume do tronco da árvore por meio dos três métodos de cubagem a seguir:

• **MÉTODO DE SMALIAN**

Fórmula	Cálculo
$V = \left(\frac{A_b + A_t}{2} \right) \cdot l$	

• **MÉTODO DE HUBBER**

Fórmula	Cálculo
$V = A_m \cdot l$	

• **MÉTODO DE NEWTON**

Fórmula	Cálculo
$V = \left(\frac{A_b + 4A_m + A_t}{6} \right) \cdot l$	

• **MÉTODO DE FRANCON**

Fórmula	Cálculo
$V = \left(\frac{C_m}{4} \right)^2 \cdot l$	

4. Mergulhe o tronco no aquário e observe o deslocamento vertical de água em centímetros.

Deslocamento: _____

Calcule o volume de água deslocada sabendo que as dimensões do aquário são 49,2 cm de comprimento e 24,3 cm de largura.

5. Quantos litros de água foram deslocados pelo tronco?

6. Compare o volume por deslocamento com os volumes obtidos pelas fórmulas.

7. Quais poderiam ser as dimensões do aquário para que, ao despejar 1 litro de água em seu interior, obtivéssemos 1 cm de altura?