UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS ARAPIRACA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Maria Eloisa Ferreira dos Santos

Números transcendentes e as equações da forma $x^n = n^x$

ARAPIRACA - AL
2023

MARIA ELOISA FERREIRA DOS SANTOS

Números transcendentes e as equações da forma $x^n = n^x$

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do *Campus* Arapiraca da Universidade Federal de Alagoas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do grau de Mestra em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alcindo Teles Galvão

ARAPIRACA - AL
2023

Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Campus Arapiraca
Biblioteca Setorial *Campus* Arapiraca - BSCA

S237n Santos, Maria Eloisa Ferreira dos
Números transcendentes e as equações da forma $x^n = n^x$ [recurso eletrônico] / Maria Eloisa Ferreira dos Santos. – Arapiraca, 2023.
34 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Alcindo Teles Galvão.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Alagoas, *Campus* Arapiraca, Arapiraca, 2023.
Disponível em: Universidade Digital (UD) – UFAL (*Campus* Arapiraca).
Referências: f. 34.

1. Matemática. 2. Números algébricos. 3. Potências transcendentes. I. Galvão, Alcindo Teles. II. Título.

CDU 51

Bibliotecário responsável: Márcio Thiago dos Santos Albuquerque
CRB - 4 / 2052

FOLHA DE APROVAÇÃO

NÚMEROS TRANSCENDENTES E AS EQUAÇÕES DA FORMA $x^n = n^x$

Maria Eloisa Ferreira dos Santos

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do *Campus* Arapiraca da Universidade Federal de Alagoas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do grau de Mestra em Matemática.

Aprovada em 22/12/2023

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br
ALCINDO TELES GALVAO
Data: 18/03/2024 20:15:33-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Alcindo Teles Galvão
(Presidente)

Documento assinado digitalmente
gov.br
MORENO PEREIRA BONUTTI
Data: 19/03/2024 09:50:31-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Moreno Pereira Bonutti - UFAL
(Avaliador interno)

Documento assinado digitalmente
gov.br
ARLYSON ALVES DO NASCIMENTO
Data: 18/03/2024 22:17:13-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Arlyson Alves do Nascimento - IFAL
(Avaliador externo)

Dedico este trabalho aos meus pais e meu irmão, a maior e melhor base que eu poderia ter. Ao meu noivo, por todo incentivo e apoio desde os meus primeiros passos na vida acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Os agradecimentos iniciais vão para Ele, o maior responsável por toda a minha força e persistência. Agradeço a Deus por sua infinita e inexplicável bondade.

Agradeço aos meus pais, Socorro e Edmilson, que são minha base, minhas principais inspirações como pessoas.

Agradeço ao meu querido irmão, Eduardo, por ser o melhor irmão que Deus poderia me dar. Sou grata pela parceria, pelas conversas, por todo amor e carinho.

Agradeço ao meu noivo e futuro esposo, Einstein, por seu companheirismo, apoio, paciência, amor, carinho e incentivo desde a graduação. Tê-lo comigo em cada conquista torna tudo mais belo e significativo.

Agradeço aos meus familiares, Gilberto Magno, Tia Edilza, Gardênia, Dário Júnior, João Guilherme e Tia Ednalva, que me acolheram e deram suporte durante a minha caminhada no mestrado.

Agradeço aos professores do curso, por todos os ensinamentos, em cada disciplina ministrada. Em especial, ao professor Dr. Alcindo Teles Galvão, meu orientador, por toda paciência e confiança durante todo o processo.

Agradeço aos membros da banca, os professores Dr. Moreno Pereira Bonutti e Dr. Arlyson Alves do Nascimento, pelas suas valiosas contribuições.

Agradeço aos amigos que o PROFMAT me presenteou. Mateus Rodrigues, por toda ajuda, conversas e companhia nas viagens. Tatiane, Audenir e Robério, minhas companhias durante o curso.

RESUMO

Dos diversos problemas ainda não resolvidos da Matemática, alguns tratam-se de conceitos e elementos advindos da Teoria dos Números Transcendentes, podendo citar como exemplo a dificuldade em demonstrar que a natureza de um número é transcendental. A partir dos avanços nessa teoria, um dos resultados que é de extrema importância para "construir" um número transcendente na forma de potência é o Teorema de Gelfond-Schneider. Inserido nesse cenário de potências transcendentes, é pouco conhecida a natureza de potências da forma n^T, com $n \in \mathbb{N}$ e T transcendente. A respeito dos números 2^π e 2^e, por exemplo, ainda não se sabe se são transcendentes ou não. Diante disso, neste trabalho realizamos um estudo sobre as soluções da equação $x^n = n^x$, com $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ e $x \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ e sua relação com números transcendentes da forma n^T, dentro das condições apresentadas. Com isso, definimos um critério de transcendência para tais potências e também destacamos que tal resultado não é único, existem outros números transcendentes que não atendem a esse critério, bem como existem números da forma n^T que são algébricos. Por fim, serão apresentadas duas sequências didáticas como incentivo à abordagem de números transcendentes no Ensino Médio e na formação de professores.

Palavras-chave: números transcendentes; potências transcendentes; teorema de Gelfond-Schneider; números algébricos.

ABSTRACT

Of the many unresolved problems in Mathematics, some are concepts and elements arising from the Theory of Transcendent Numbers, for example the difficulty in demonstrating that the nature of a number is transcendental. Based on the advances in this theory, one of the results that is extremely important for "constructing" a transcendent number in the form of a power is the Gelfond-Schneider Theorem. Inserted in this scenario of transcendent powers, the nature of powers of the form n^T, with $n \in \mathbb{N}$ and T transcendent, is little known. Regarding the numbers 2^π and 2^e, for example, it is not yet known whether they are transcendent or not. Therefore, in this work we carried out a study on the solutions of the equation $x^n = n^x$, with $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ and $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ and its relationship with transcendent numbers of the form n^T, within the conditions presented. With this, we define a transcendence criterion for such powers and also highlight that such a result is not unique, there are other transcendent numbers that do not meet this criterion, as well as there are numbers of the form n^T that are algebraic. Finally, two didactic sequences will be presented as an incentive to approach transcendent numbers in high school and teacher training.

Keywords: transcendent numbers; transcendent powers; Gelfond-Schneider theorem; algebraic numbers.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No decorrer da história da humanidade, os números foram surgindo das necessidades básicas de contar e medir. Do ponto de vista macroscópico, a infinidade dos números é algo evidente, seja para matemáticos ou não, principalmente com relação aos números naturais. Por outro lado, menos trivial, é olhar por um ponto de vista microscópico: imaginemos uma régua de 30 centímetros que possa ser ampliada tanto quanto se queira. Qual a natureza dos números observados?

Os números são classificados de acordo com as suas particularidades e um estudo detalhado sobre os conjuntos numéricos é realizado ainda na escola básica, destacando as características e propriedades que cada número real possui. No entanto, uma perspectiva diferente acerca dos números reais é menos conhecida, inclusive em cursos de Licenciatura Plena em Matemática: classificá-los de acordo com suas propriedades algébricas.

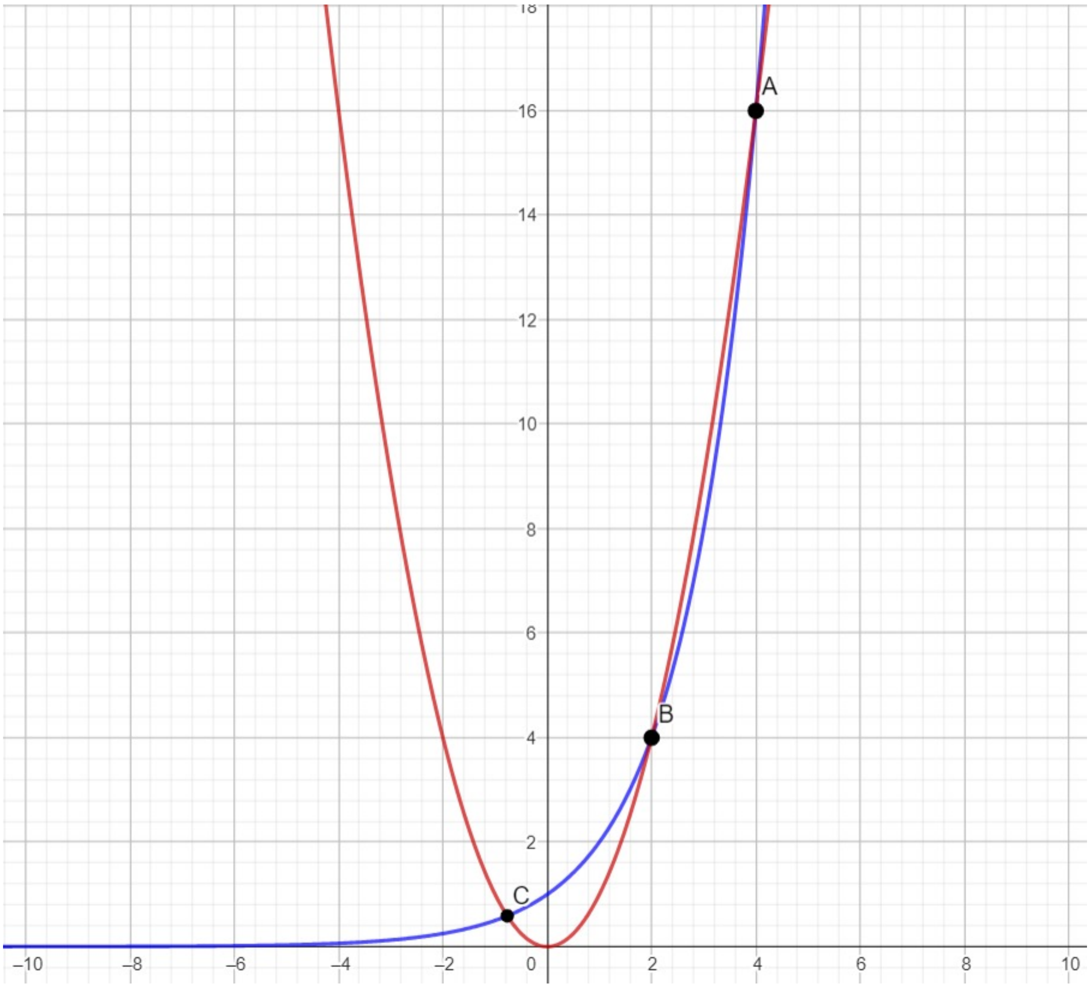
Nem todos os números reais satisfazem equações algébricas. De um modo geral, todo número que é solução de uma equação algébrica com coeficientes inteiros são chamados de *algébricos*, e aqueles que não satisfazem tais equações são chamados de *transcendentes*. Daí, podemos definir o conjunto dos números reais como a união disjunta entre números algébricos e transcendentes, diferente da forma convencional que é dada como a união de racionais e irracionais.

Na sala de aula podem surgir prováveis questionamentos a respeito da natureza de alguns números, desde os anos finais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio. Em uma aula de potenciação, por exemplo, um estudante que tenha conhecimento dos números π e $\sqrt{2}$ pode, naturalmente, perguntar se 2^{π} ou $2^{\sqrt{2}}$ são números racionais ou irracionais. Esses números "enigmáticos" também podem ser encontrados como soluções de equações exponenciais, como $\dfrac{\log 3}{\log 2}$ que é solução da equação $2^x = 3$.

Sob esta perspectiva, destacamos a importância de ter conhecimento do conceito de números transcendentes, em quais contextos podemos encontrá-los e até mesmo dos principais casos em aberto. Dessa forma, evitamos que possíveis dúvidas não sejam sanadas, além de incentivar estudo de uma matemática um pouco mais formal antes mesmo do ingresso do estudante na universidade, para aqueles que despertarem a curiosidade.

O ponto de partida para o desenvolvimento desta pesquisa foi a busca pelas soluções da equação $x^2 = 2^x$. Sabe-se que tais soluções podem ser observadas graficamente, pois são dadas pelas interseções dos gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2^x$ conforme é exibido abaixo.

Figura 1: Interseção das curvas x^2 e 2^x.



Fonte: Gráfico gerado no *software* Geogebra, pela própria autora (2023).

As soluções 2 e 4, representadas pelos pontos A e B, podem ser encontradas com facilidade, mesmo sem o auxílio do gráfico. No entanto, a solução representada pelo ponto C exige um trabalho um pouco mais árduo para ser encontrada. Isso se deve ao fato de que tal solução é transcendente.

O autor Elon Lages Lima, em sua obra "Meu Professor de Matemática e outras histórias" (1991), aborda essa questão em um dos seus capítulos, que por sua vez é intitulado "Quais são as raízes da equação $2^x = x^2$?". Tomando tal referência como motivação, o próximo passo foi verificar se, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e maior que 1, as equações da forma $x^n = n^x$, com $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ e $x \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ também teriam soluções transcendentes.

Diante disso, no capítulo 1 deste trabalho abordamos, de maneira breve, a história da Teoria dos Números Transcendentes, as definições e principais resultados tanto dos números algébricos quanto dos números transcendentes, além das propriedades aritméticas envolvendo esses conjuntos.

O capítulo 2 é introduzido com um dos teoremas mais importantes inseridos nessa teoria, o Teorema de Gelfond-Schneider, e algumas de suas consequências. Em seguida apresentamos o estudo feito em relação às soluções das equações da forma $x^n = n^x$, com $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ e $x \in \mathbb{R} - \{0,1\}$, onde apresentamos um dos principais resultados desta pesquisa.

Por fim, no capítulo 3, apresentamos duas sequências didáticas que tem como proposta a inserção do conjunto dos números transcendentes na educação básica e na formação de professores tratando, inclusive, dos resultados obtidos no capítulo 2.

2 NÚMEROS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES

2.1 Um pouco de história

Um número é dito *algébrico* se é raiz de um polinômio, não nulo, com coeficientes inteiros. Os números que não satisfazem essa condição são chamados de *transcendentes*. Essa definição é de meados do século XVIII, dada por Leonhard Euler, que foi o primeiro matemático a questionar sobre a existência de números reais que não são algébricos. A palavra *transcendente* é atribuída ao fato de que esses números transcendem as operações algébricas.

No entanto, a teoria dos números transcendentes teve seu início de fato apenas em 1844, quando o matemático Joseph Liouville estabeleceu a seguinte propriedade: para todo número α algébrico de grau $n \geqslant 2$, existe uma constante A maior que zero tal que $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{A}{q^n}$, para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Portanto, um número que não satisfaz tal propriedade é transcendente. Além disso, Liouville construiu e exibiu o primeiro transcendente, o número $\sum_{n>0} 10^{-n!} = 0,1100010...$, um dos poucos transcendentes que conhecemos a estrutura.

Os números π e e são os transcendentes mais populares, mas a prova deste fato veio apenas por volta de 100 anos após Euler. Em 1873 Charles Hermite provou a transcendência de e e, em 1874, o matemático George Cantor conseguiu provar que existem mais números reais transcendentes do que números reais algébricos, ou seja, que o conjunto dos números transcendentes é não enumerável. Alguns anos depois, em 1882, π teve sua transcendência confirmada por Ferdinand Von Lindemann.

Em 1900, o matemático David Hilbert listou, durante a realização do Congresso Internacional de Matemáticos, 23 problemas, todos sem solução até aquela data. O 7º problema questionava a respeito da natureza do número $2^{\sqrt{2}}$. Essa questão foi respondida em 1930, quando R. Kuzmin e C. L. Siegel provaram, de maneira independente, que qualquer número da forma $a^{\sqrt{n}}$ é transcendente, quando a é um algébrico não nulo e diferente de 1, e n é um inteiro positivo não quadrado.

Quatro anos depois, também de maneira independente, os matemáticos Alexander Gelfond e Theodor Schneider generalizaram esse resultado, confirmando mais uma infinidade de números transcendentes. Tal generalização afirma que os números da forma α^{β}, com α algébrico diferente de zero e um e β um algébrico a menos dos racionais, são transcendentes.

No ensino básico o conjunto dos números reais é tratado como a união disjunta entre racionais e irracionais. No que segue, veremos que $\mathbb{R}$ pode ser visto sob uma perspectiva diferente: a união disjunta entre algébricos e transcendentes.

2.2 Números algébricos

Definição 0.1. *Um número real é dito algébrico quando é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros, isto é, se dado $\alpha \in \mathbb{R}$, existe $P(x) \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $P(\alpha) = 0$. O conjunto dos números algébricos é denotado por $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Definição 0.2. *Seja α um número algébrico, e $P(x)$ o polinômio de menor grau que possui α como raiz. Dizemos que $P(x)$ é o polinômio minimal de α, e o grau de α é igual ao grau de seu polinômio minimal.*

Proposição 0.1. *Todo número racional é um número algébrico.*

Demonstração. De fato, todo racional $\frac{p}{q}$ é raiz do polinômio $R(x) = qx - p$. E em particular, todo racional é um número algébrico de grau 1. □

Exemplo 0.1. *Sejam $n, m \in \mathbb{N}$, com $n > 1$. Todos os números irracionais da forma $\sqrt[n]{m}$ são algébricos de grau n. Com efeito, considere o polinômio $F(x) = x^n - m$. Temos que $F(\sqrt[n]{m}) = (\sqrt[n]{m})^n - m = m^{\frac{n}{n}} - m =$ 0, portanto, todos os números $\sqrt[n]{m}$ são algébricos de grau n.*

Um conjunto é dito enumerável quando conseguimos definir uma bijeção entre esse conjunto e o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é enumerável. De fato, basta tomar a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, definida por partes:

$$f(x) = \begin{cases} -2x, \text{ se } x \leqslant 0 \\ 2x - 1, \text{ se } x > 0. \end{cases}$$

Lema 0.1. *Se o conjunto X é enumerável então $X \times X$ também é enumerável.*

Demonstração. Como X é enumerável, então existe uma bijeção $f : X \to \mathbb{N}$. Daí, considere a função $g : X \times X \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida como $g(x,y) = (f(x), f(y))$. Note que g é bijetiva, uma vez que f também o é. Assim, basta provar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. De fato, seja $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função que associa cada par ordenado (m,n) ao número $2^m.3^m$. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, h é injetiva. Assim, sendo $X \subset \mathbb{N}$ a imagem da função h, que por sua vez é um conjunto infinito e enumerável, concluímos que $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$ é bijetiva e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Portanto, $X \times X$ é enumerável, como queríamos demonstrar.

□

Proposição 0.2. *O conjunto dos números algébricos é enumerável.*

Demonstração. Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau n em $\mathbb{Z}[x]$ e R_P o conjunto das raízes de P. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, P possui n raízes complexas, o que implica que R_P é um conjunto finito. Denotando por P_n o conjunto de todos os polinômios em $\mathbb{Z}[x]$ e definindo-o pelo conjunto dos vetores $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$, temos que P_n é enumerável, o que segue do fato de $\mathbb{Z}$ ser enumerável e do Lema 0.1.Assim, definimos

$$\overline{\mathbb{Q}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{R_{P_n}}$$

e concluímos que $\overline{\mathbb{Q}}$ é enumerável, pois está escrito como uma união enumerável de enumeráveis.

□

Vale a pena ressaltar que a notação $\overline{\mathbb{Q}}$ utilizada para representar o conjunto dos números algébricos não possui relação com o complementar de um conjunto.

2.3 Números transcendentes

Definição 0.3. *Um número real é transcendente quando não é algébrico.*

Exemplo 0.2. *Os números* e, π *e* $\dfrac{\log 3}{\log 2}$ *são exemplos de números transcendentes.*

Não existe um algoritmo para demonstrar que um número é transcendente. Cada demonstração utiliza resultados e argumentos distintos, o que contribui para a dificuldade de provar a transcendência de um número. As provas de que e e π são transcendentes podem ser encontradas em [2] e a do número $\dfrac{\log 3}{\log 2}$ será feita no capítulo seguinte.

Proposição 0.3. *O conjunto dos números transcendentes é não enumerável.*

Demonstração. O conjunto dos números reais é não enumerável e pode ser definido como a união disjunta de entre números algébricos e transcendentes. Todavia, $\overline{\mathbb{Q}}$ é enumerável, pela Proposição 0.2, logo, se o conjunto dos números transcendentes fosse enumerável, $\mathbb{R}$ também seria. □

2.4 Propriedades aritméticas

Em [5] é tratado com detalhes que o conjunto dos números irracionais não é fechado em relação às operações ariméticas, no entanto, esse contexto muda quando tratamos do conjunto $\overline{\mathbb{Q}}$. Nesta seção iremos explorar as propriedades aritméticas do conjunto dos números algébricos, bem como as propriedades entre algébricos e transcendentes.

2.4.1 Aritmética dos algébricos

Proposição 0.4. *Sejam* α, β, *números algébricos não nulos. Temos:*

(i) $\alpha \pm \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$;

(ii) $\alpha\beta \in \overline{\mathbb{Q}}$;

(iii) $\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha^{-1} \in \overline{\mathbb{Q}}$;

(iv) $\alpha^m \in \overline{\mathbb{Q}}$ *para todo* $m \in \mathbb{Z}$.

As demonstrações dos itens (i) e (ii) estão presentes em (Torres, p. 41). Entre as ferramentas utilizadas para a demonstração desses itens, são utilizados os conceitos de espaço vetorial, base e dimensão, presentes na Álgebra Linear.

Demonstração. (i) Sejam $P(x), Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$, de grau n e m nas indeterminadas a_i e b_j, respectivamente. Façamos $\dfrac{P(x)}{a_n}$ e $\dfrac{Q(x)}{b_n}$. Obtemos seus polinômios equivalentes mônicos com coeficientes racionais, a saber

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$
$$Q(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0$$

tais que $P(\alpha) = 0$ e $Q(\beta) = 0$. Daí,

$$\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0 \tag{1}$$

e

$$\beta^m + b_{m-1}\beta^{m-1} + \cdots + b_1\beta + b_0 = 0 \tag{2}$$

isto é,

$$\alpha^n = -a_{n-1}\alpha^{n-1} - \cdots - a_1\alpha - a_0 \tag{3}$$

e

$$\beta^m = b_{m-1}\beta^{m-1} - \cdots - b_1\beta - b_0. \tag{4}$$

Multiplicando a equação (1) por α, temos

$$\alpha^{n+1} + a_{n-1}\alpha^n + \cdots + a_1\alpha^2 + a_0\alpha = 0$$

e substituindo α^n pela expressão obtida em (3), obtemos

$$\alpha^{n+1} = -a_{n-1}(-a_{n-1}\alpha^{n-1} - \cdots - a_1\alpha - a_0) - a_{n-2}\alpha^{n-1} - \cdots - a_0\alpha.$$

Assim, obtemos α^{n+1} escrito como combinação linear de $1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1}$ com coeficientes racionais. Diante disso, note que, repetindo tal operação sucessivas vezes, concluímos que todas as potências α^i, para $i \geq n$, são expressas como combinações lineares de $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$ com coeficientes racionais.

Assim, realizando as mesmas operações entre as equações (2) e (4), conclui-se que β^j pode ser escrito como combinação linear dos números $1, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^{m-1}$, para todo $j \geq m$.

Consideremos os $mn+1$ números $1, \alpha+\beta, (\alpha+\beta)^2, \ldots, (\alpha+\beta)^{mn}$ e o espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ gerado pelos elementos $B = \{1, \alpha, \beta, \alpha^2, \beta^2, \alpha\beta, \ldots, \alpha^{n-1}\beta^{m-1}\}$.

Como B é um conjunto de geradores de mn elementos, então possui uma base com cardinalidade menor ou igual a mn. Então a dimensão deste espaço é menor ou igual a mn, logo, os $mn+1$ números acima são linearmente dependentes. Portanto, existem racionais $r_0, r_1, \ldots, r_{mn}$, não todos nulos, tais que $r_0 + r_1(\alpha+\beta) + r_2(\alpha+\beta)^2 + \cdots + r_{mn}(\alpha+\beta)^{mn} = 0$. O que mostra que $\alpha+\beta$ é raiz de um polinômio de grau menor ou igual a mn.

(ii) De modo análogo ao raciocínio do item (i), considere agora o conjunto $C = \{1, \alpha\beta, (\alpha\beta)^2, \ldots, (\alpha\beta)^{mn}\}$. Pelos mesmos argumentos utilizados anteriormente, os elementos de C são combinações lineares finitas sobre $\mathbb{Q}$ das mn parcelas $\alpha^k\beta^l$, com $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ e $l \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Assim, os elementos de C são linearmente dependentes sobre $\mathbb{Q}$, o que implica que existem racionais $s_0, s_1, \ldots, s_{mn}$, não todos nulos, tais que $s_0 + s_1(\alpha\beta) + s_2(\alpha\beta)^2 + \cdots + s_{mn}(\alpha\beta)^{mn} = 0$. Logo, $\alpha\beta$ é algébrico.

(iii) Por hipótese, existe $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grau n, tal que $P(\alpha) = 0$. Daí,

$$P(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0 \tag{5}$$

Considere o polinômio $P_1(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$. Multiplicando a equação (5) por $\dfrac{1}{\alpha^n}$, obtemos

$$a_n + a_{n-1}\alpha^{-1} + \cdots + a_1\alpha^{1-n} + a_0\alpha^{-n} = 0$$

e portanto

$$a_0(\alpha^{-1})^n + a_1(\alpha^{-1})^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(\alpha^{-1}) + a_n = 0. \tag{6}$$

Logo, pela equação (6), α^{-1} é raiz de $P_1(x)$, isto é, $P_1(\alpha^{-1}) = 0$, o que implica que α^{-1} é algébrico.

(iv) Inicialmente, note que, se $m = 0$, não há nada a demonstrar. Do mesmo modo, nos casos $m^1 = m$ e $m^{-1} = \dfrac{1}{m}$, que são ambos racionais. Consideremos, então, os casos em que $m > 1$ e $m < -1$. A demonstração será feita utilizando o Princípio de Indução Finita, em ambos os casos.

Seja $m > 1$. Para $m = 2$, basta fazer $\beta = \alpha$ em (ii) e obtemos $\alpha\alpha = \alpha^2 \in \overline{\mathbb{Q}}$. Suponha que α^m é um número algébrico, e provemos que α^{m+1} também o é. De fato, note que $\alpha^{m+1} = \alpha\alpha^m$. Daí, pela hipótese de indução, $\alpha^m \in \overline{\mathbb{Q}}$, assim, por (ii), o produto de algébricos também é um número algébrico, logo, $\alpha^{m+1} \in \overline{\mathbb{Q}}$ e, pelo Princípio de Indução Finita, $\alpha^m \in \overline{\mathbb{Q}}$, $\forall\, m \in \mathbb{Z}, m > 0$.

Agora, considere $m < -1$, e seja $m = -2$ o caso inicial. Temos $\alpha^{-2} = \alpha^{-1}\alpha^{-1}$. Por (iii), α^{-1} é algébrico e, portanto, por (ii), o produto $\alpha^{-1}\alpha^{-1}$ também o é. Logo, $\alpha^{-2} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Suponhamos $\alpha^m \in \overline{\mathbb{Q}}$, e demonstremos que α^{m-1} também é um número algébrico. Note que $\alpha^{m-1} = \alpha^m\alpha^{-1}$. Mais uma vez, por (iii), $\alpha^{-1} \in \overline{\mathbb{Q}}$, e pela hipótese de indução, $\alpha^m \in \overline{\mathbb{Q}}$. Finalmente, por (ii), α^{m-1} é algébrico e $\alpha^m \in \overline{\mathbb{Q}}$, $\forall\, m \in \mathbb{Z}$.

□

Diante do que foi discutido no Capítulo 1, podemos concluir que todo número transcendente é irracional. Com isso, como os irracionais não são fechados em relação à adição, subtração, multiplicação e divisão, não apresentamos uma proposição apenas com a aritmética dos transcendentes. Assim, no que segue, enunciaremos a proposição que determina as propriedades aritméticas entre transcendentes e algébricos.

2.4.2 Aritmética entre transcendentes e algébricos

Proposição 0.5. *Sejam $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} - \{0\}$ e $T \notin \overline{\mathbb{Q}}$. Então,*

(i) $\alpha \pm T \notin \overline{\mathbb{Q}}$;

(ii) $\alpha T \notin \overline{\mathbb{Q}}$;

(iii) $T^{-1} \notin \overline{\mathbb{Q}}$;

(iv) $T^{n} \notin \overline{\mathbb{Q}}$, *qualquer que seja* $n \in \mathbb{N}$;

(v) $T^{\frac{p}{q}} \notin \overline{\mathbb{Q}}$, *qualquer que seja* $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Demonstração. (i) Suponha que $\alpha \pm T \in \overline{\mathbb{Q}}$. Considere que $\alpha + T = K_1$, e $\alpha - T = K_2$ onde K_1 e K_2 são números algébricos. Segue disso que $K_1 - \alpha = K_1 + (-\alpha) = T$ e $\alpha + (-K_2) = T$, contradizendo o fato de que $T \notin \overline{\mathbb{Q}}$, pela proposição anterior. Logo, $\alpha \pm T \notin \overline{\mathbb{Q}}$.

(ii) Suponhamos que $\alpha T \in \overline{\mathbb{Q}}$. Daí, $\alpha T = K$, com K algébrico. Multiplicando ambos os membros da última igualdade por α^{-1}, obtemos:

$$\alpha\alpha^{-1}T = K\alpha^{-1} \Leftrightarrow T = K\alpha^{-1}.$$

Mas α^{-1} é algébrico, e portanto, $K\alpha^{-1}$ também o é, o que implica que T seria algébrico, uma contradição. Portanto, $\alpha T \notin \overline{\mathbb{Q}}$.

(iii) Suponha que T^{-1} fosse um número algébrico K. Então $T^{-1} = K$ e multiplicando essa igualdade por T, teríamos

$$T^{-1} = K \Leftrightarrow TT^{-1} = KT \Leftrightarrow 1 = KT.$$

Assim, por (ii), concluiríamos que 1 é transcendente, um absurdo. Logo, $T^{-1} \notin \overline{\mathbb{Q}}$.

(iv) Suponha, por absurdo, que $T^{n} \in \overline{\mathbb{Q}}$. Então existe um polinômio $P(x)$, de grau m, com coeficientes racionais $a_0, a_1, ..., a_m$ tal que $P(T^n) = 0$. Daí,

$$P(T^n) = a_m(T^n)^m + a_{m-1}(T^n)^{m-1} + \cdots + a_1T^n + a_0 = 0.$$

Considere o polinômio $R(x) = a_m x^{mn} + a_{m-1}x^{mn-n} + \cdots + a_1x^n + a_0$, de grau mn. Desenvolvendo $P(T^n)$, obtemos

$$P(T^n) = a_mT^{mn} + a_{m-1}T^{mn-n} + \cdots + a_1T^n + a_0 = R(T) = 0$$

isto é, T é raiz de $R(x)$, contradizendo o fato de que $T \notin \overline{\mathbb{Q}}$. Portanto, $T^n \notin \overline{\mathbb{Q}}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

(v) Suponhamos $T^{\frac{p}{q}} \in \overline{\mathbb{Q}}$ e considere, sem perda de generalidade, $q > 0$. Assim, existe $K \in \overline{\mathbb{Q}}$ tal que $T^{\frac{p}{q}} = K$. Elevando ambos os membros dessa igualdade ao expoente q, obtemos:

$$(T^{\frac{p}{q}})^q = K^q \Leftrightarrow T^p = K^q.$$

Todavia, pelo item (iv) da proposição anterior, $K^q \in \overline{\mathbb{Q}}$, e pelo item (iv) desta proposição, $T^p \notin \overline{\mathbb{Q}}$, uma contradição. Portanto, $T^{\frac{p}{q}} \notin \overline{\mathbb{Q}}$, qualquer que seja $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

□

Corolário 0.1. *Sejam* $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ *e* $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. *Então* $\alpha^{\frac{p}{q}} \in \overline{\mathbb{Q}}$, *qualquer que seja* $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Demonstração. Suponhamos que $\alpha^{\frac{p}{q}} \notin \overline{\mathbb{Q}}$ e consideremos, sem perda de generalidade, $q > 1$. Pelo item (iv) da Proposição 0.5

$$(\alpha^{\frac{p}{q}})^q \notin \overline{\mathbb{Q}}, \text{ qualquer que seja } q \in \mathbb{N}.$$

Entretanto, pelo item (iv) da Proposição 0.4

$$(\alpha^{\frac{p}{q}})^q = \alpha^p \in \overline{\mathbb{Q}}, \text{ para todo } p \in \mathbb{Z}$$

uma contradição. Portanto, $\alpha^{\frac{p}{q}} \in \overline{\mathbb{Q}}$. □

3 POTÊNCIAS TRANSCENDENTES

É pouco conhecida a natureza de potências da forma n^T, com $n \in \mathbb{N}$ e T transcendente. A respeito dos números 2^π e 2^e, por exemplo, ainda não se sabe se são transcendentes ou não. Neste capítulo, iremos expor alguns resultados acerca da natureza de potências com base natural e expoente transcendente. Dentro de tal discussão, o teorema de Gelfond-Schneider é o resultado que nos dará suporte para provar os resultados que serão exibidos.

3.1 Teorema de Gelfond-Schneider

Na Seção 1.1 do Capítulo 1 foi mencionado o sétimo problema de Hilbert, solucionado em 1934. Conhecido como o teorema de Gelfond-Schneider, este resultado possui uma beleza peculiar pela simplicidade de seu enunciado, e nos permite finalizar as propriedades aritméticas de potenciação de dois algébricos, abordadas na Proposição 0.4.

Teorema 0.1. *(Teorema de Gelfond-Schneider) Sejam $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$, diferentes de 0 e 1. Se $\beta \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}$, então $\alpha^\beta \notin \overline{\mathbb{Q}}$.*

Segue imediatamente desse resultado que $2^{\sqrt{2}}$ e $\sqrt{5}^{\sqrt[2]{3}}$, por exemplo, são números transcendentes. Em particular, uma consequência desse resultado é a transcendência de e^π, conhecido como *constante de Gelfond*. Antes de demonstrar tal fato, é importante ressaltar que a Definição 0.1 pode ser expandida para os números complexos. Inclusive, i é algébrico, pois é raiz do polinômio $P(x) = x^2 + 1$. A demonstração desse teorema foge do escopo deste trabalho, mas pode ser encontrada em [1].

Corolário 0.2. *O número e^π é transcendente.*

Demonstração. Note que $e^{\pi i}$ é algébrico, pois, pela equação de Euler, $e^{\pi i} = -1$. Daí, $(e^{\pi i})^{-i} = (-1)^{-i}$ e concluímos, pelo teorema de Gelfond-Schneider, que $e^\pi = (-1)^{-i}$ é transcendente . □

Proposição 0.6. *Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ números algébricos, não nulos, com $\log \alpha_1$ e $\log \alpha_2$ linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Então*

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \beta_2 \log \alpha_2 \neq 0.$$

Demonstração. Suponha, por absurdo, que

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \beta_2 \log \alpha_2 = 0. \tag{7}$$

Daí

$$\beta_1 \log \alpha_1 = -\beta_2 \log \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\log \alpha_2}{\log \alpha_1} \quad \Rightarrow \quad \log_{\alpha_1} \alpha_2 = -\frac{\beta_1}{\beta_2}$$

o que implica que $\alpha_2 = \alpha_1^{-\frac{\beta_1}{\beta_2}}$. Logo, pelo Teorema de Gelfond-Schneider, $-\dfrac{\beta_1}{\beta_2} \in \mathbb{Q}$ e existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que $\beta_1 = p\beta_2$. Substituindo na equação (7), obtemos

$$p \log \alpha_1 + \log \alpha_2 = 0,$$

contradizendo o fato de que $\log\alpha_1$ e $\log\alpha_2$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Logo,

$$\beta_1\log\alpha_1+\beta_2\log\alpha_2\neq 0.$$

$\square$

Corolário 0.3. *Sejam $a,b\in\mathbb{N}$ números maiores que 1 e primos entre si. O número $\dfrac{\log a}{\log b}$ é transcendente.*

Demonstração. Inicialmente, note que $\log a$, e $\log b$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Suponha que não fossem. Existiriam $p,q\in\mathbb{Z}$ de modo que

$$\log a=\frac{q}{p}\log b \quad\Rightarrow\quad p\log a=q\log b \quad\Rightarrow\quad \log a^p=\log b^q$$

isto é, teríamos $a^p=b^q$, contradizendo o Teorema Fundamental da Aritmética. Assim, se $\dfrac{\log a}{\log b}=\alpha\in\overline{\mathbb{Q}}$, teríamos $\log a-\alpha\log b=0$, contrariando a proposição anterior. Logo, $\dfrac{\log a}{\log b}\notin\overline{\mathbb{Q}}$, como queríamos demonstrar. $\square$

Exemplo 0.3. *Decorre do corolário anterior que o número $\dfrac{\log 3}{\log 2}$, citado no Exemplo 0.2, é transcendente.*

3.2 Natureza das potências n^T, com $n\in\mathbb{N}$ e $T\notin\overline{\mathbb{Q}}$

Vamos iniciar esta seção com o seguinte questionamento:

Questão 1: Dados $n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$ e $T\notin\overline{\mathbb{Q}}$, sob quais condições $n^T\notin\overline{\mathbb{Q}}$?

3.2.1 Equação $x^n=n^x$, com $n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$ e $x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$

Para responder tal questão, vamos analisar as soluções da equação $x^n=n^x$, para $n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$ e $x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$. Note que, para todo $n\in\mathbb{N}$, tal equação admite a solução $x=n$, que trataremos como *solução trivial*. No que segue, o lema abaixo será uma ferramenta essencial.

Lema 0.2. *(Teorema de Bolzano) Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a)f(b)<0$, então existe $a<c<b$ tal que $f(c)=0$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponhamos $f(a)<0<f(b)$, e seja $A=\{x\in[a,b]\mid f(x)<0\}$. Como $a\in A$, então $A\neq\emptyset$. Além disso, A é limitado, pois $A\subset[a,b]$ e daí, A possui um supremo c, isto é, $sup\ A=c$.

Temos $f(a)<0$, daí, a continuidade de f implica que existe $\delta>0$ tal que f ainda é negativa em $(a,a+\delta)$. Então, se $f(x)<0$ temos que $x\in(a,a+\delta)$ e $c\geqslant a+\delta$.

Suponhamos que tivéssemos $f(c)<0$. Então $c<b$ (uma vez que $f(b)>0$) e existiria $\delta>0$ tal que f seria negativa em $(c-\delta,c+\delta)$. Mas daí teríamos $f<0$ em $A\cup(c-\delta,c+\delta)=[a,c+\delta)$, contradizendo o fato de que c é o supremo de A.

Por fim, suponha que $f(c) > 0$. Então existe $\delta > 0$ tal que $f > 0$ em $(c-\delta, c+\delta)$. Em particular, $A \cap (c-\delta, c] = \emptyset$ e teríamos *sup* $A = c \leqslant c - \delta$, uma contradição. Logo, $f(c) = 0$, como queríamos demonstrar. $\square$

Antes de enunciar o caso geral, consideremos a função $f(x) = x^n - n^x$. Inicialmente, vejamos, com mais detalhes, as soluções para $n = 2$, isto é, $f(x) = x^2 - 2^x$.

Note que

$$f(-1) = (-1)^2 - 2^{-1} = \frac{1}{2} > 0$$

e

$$f(0) = 0^2 - 2^0 = -1 < 0.$$

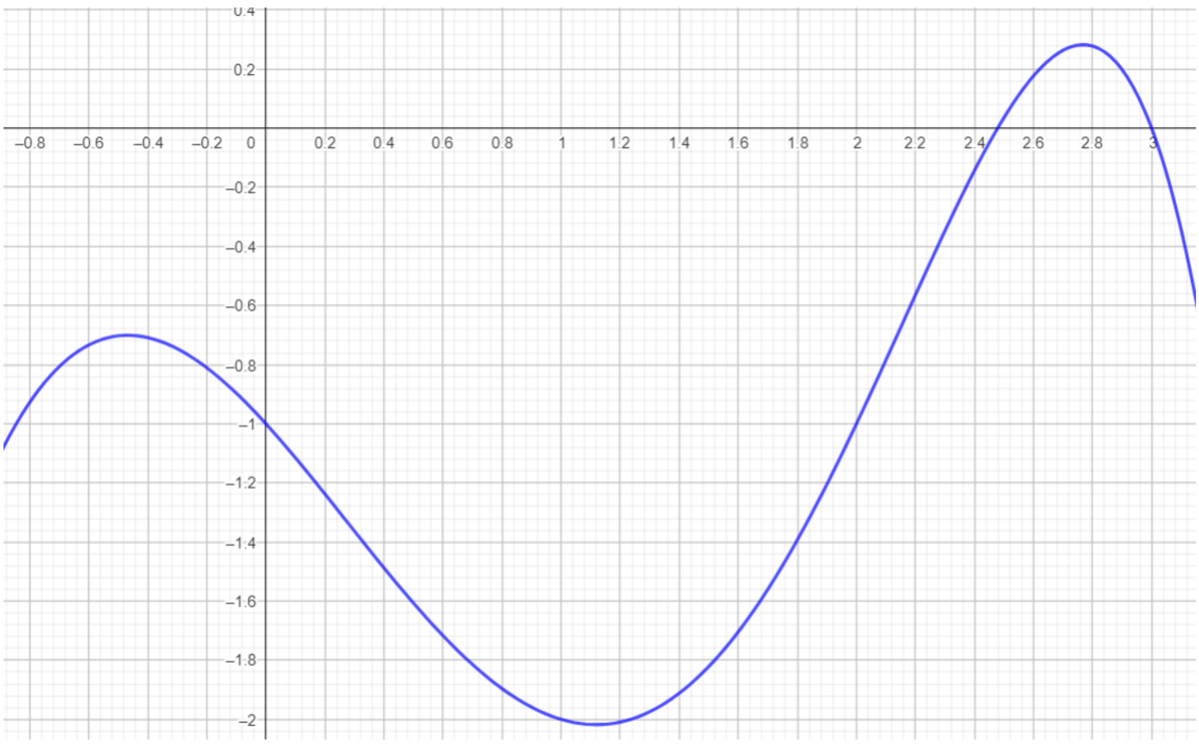
Portanto, pelo Lema 0.2, como $f(-1)f(0) < 0$, existe uma raiz entre os números -1 e 0. Note que o número 4 também é raiz de f, pois

$$f(4) = 4^2 - 2^4 = 0.$$

Doravante, analisemos as soluções quando $n = 3$, isto é, $f(x) = x^3 - 3^x$.

Para $n = 3$ não há raízes negativas (será demonstrado mais adiante), mas existe uma raiz entre 0 e 3, que é o número $2,4780526802882985...$. Podemos visualizar tal fato a partir do gráfico da função $f(x) = x^3 - 3^x$ exibido a seguir:

Figura 2: Gráfico da função $f(x) = x^3 - 3^x$.



Fonte: Gráfico gerado no *software* Geogebra, pela própria autora (2023).

Antes de seguir para o caso geral, destacaremos dois casos de soluções inteiras: para $n = 2$ temos a solução $x = 4$ e para $n = 4$ temos a solução $x = 2$. Isto é, 4 é solução de $x^2 = 2^x$ e 2 é solução de $x^4 = 4^x$. Denotaremos tais soluções por *casos especiais*.

No que segue, mostraremos o caso geral.

Proposição 0.7. *Toda equação do tipo $x^n = n^x$ tem solução além da solução trivial.*

Demonstração. Como o casos $n = 2$ e $n = 3$ já foram expostos anteriormente, vamos provar tal afirmação para todo $n > 3$. Para tanto, faremos dois casos para analisar as soluções negativas: quando n for um número par e quando for um número ímpar.

Dada a função $f(x) = x^n - n^x$, consideremos n um número natural par qualquer, maior que 3. Da mesma maneira que fizemos anteriormente, temos

$$f(-1) = (-1)^n - n^{-1} = 1 - \frac{1}{n} > 0$$

e

$$f(0) = 0^n - n^0 = 0 - 1 < 0,$$

portanto, toda equação $x^n = n^x$ possui solução entre -1 e 0, para todo $n \in \mathbb{N}$, com n maior que 3 e par. Agora, seja $n \geqslant 3$ um número ímpar. Nesse caso, a função não admite raízes negativas. De fato, note que, se $x < 0$ e n é ímpar, então o termo $x^n < 0$. E ainda, $n^x = \dfrac{1}{n^{-x}} > 0$. Assim, $f(x) = x^n - \dfrac{1}{n^{-x}} < 0$, qualquer que seja $x < 0$ e n ímpar, maior ou igual a 3.

Para finalizar, provaremos que, para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n > 3$, a função $f(x) = x^n - n^x$ possui pelo menos uma raiz entre 0 e 3.

Vimos que $f(0) = -1, \forall\, n \in \mathbb{N}$ com $n > 3$. Para concluir a demonstração, basta mostrar que $f(3) > 0$ e aplicar o Lema 0.2.

Mostrar que

$$f(3) = 3^n - n^3 > 0, \tag{8}$$

é equivalente a mostrar que $3^n > n^3$, qualquer que seja $n > 3$.

Afirmação 1: Dado $n \in \mathbb{N}$ temos que $3^n > n^3$, qualquer que seja $n > 3$.

Demonstração. Vamos provar tal resultado por indução. Veja que, para $n = 4$, temos $81 = 3^4 > 4^3 = 64$. Agora, suponha que existe algum $n > 3$ tal que $3^n > n^3$. Daí, $3^{n+1} = 3^n \cdot 3$, e pela hipótese de indução, $3^n \cdot 3 > 3n^3$. Para concluir a demonstração, basta mostrar que $3n^3 > (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, isto é, $2n^3 > 3n^2 + 3n + 1$. De fato,

$$n > 3 \quad \Rightarrow \quad n^3 > 3n^2 \;\text{ e }\; n^3 > 3n + 1,$$

isto é, as duas últimas desigualdades mostram que $2n^3 > 3n^2 + 3n + 1$. Logo, concluímos que $3^{n+1} > (n+1)^3$ e, pelo Princípio de Indução Matemática, temos o resultado que queríamos. □

Assim, $f(3) > 0$ implica que $f(0)f(3) < 0$ e, por (0.2), as funções $f(x) = x^n - n^x$ admitem uma raiz entre 0 e 3, qualquer que seja n natural maior que 3. □

Diante do que foi discutido concluímos que, além da solução trivial:

(i) se n é par, a equação possui pelo menos 2 soluções (uma positiva e uma negativa);

(ii) se n é ímpar, a equação possui pelo menos 1 solução positiva.

Lema 0.3. *(Irracionalidade das soluções): Todas as soluções não triviais de uma equação da forma $x^n = n^x$ são irracionais, a menos dos casos especiais em $n = \{2,4\}$.*

Demonstração. Suponha que $x^n = n^x$ admite apenas soluções racionais. Segue disso que, dado $n \in \mathbb{N}$, existe $x = \dfrac{p}{q}$ com $p,q \in \mathbb{Z}, q > 1$ e $mdc(p,q) = 1$, tais que:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n = n^{\frac{p}{q}}.$$

Elevando ambos os membros da última igualdade ao expoente q, obtemos

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{nq} = n^p.$$

Vamos considerar dois casos:

1) Seja $p > 0$. Como $n^p \in \mathbb{N}$, a última igualdade indica que $\dfrac{p}{q}$ é inteiro, logo, temos $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Z}$, o que implica que q divide p, contradizendo a hipótese.

2) Agora, suponhamos $p < 0$. Temos:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{nq} = n^p = \frac{1}{n^{|p|}} \;\Rightarrow\; p^{nq}n^{|p|} = q^{nq} \;\Rightarrow\; n^{|p|} = \left(\frac{q}{p}\right)^{nq}.$$

Daí, pelo mesmo argumento utilizado no item (1), concluímos que tal afirmação também contradiz a hipótese de que $mdc(p,q) = 1$. Portanto, as soluções da equação $x^n = n^x$, a menos da solução trivial, são irracionais, para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema 0.2. *(Transcendência das soluções): Toda solução das equações $x^n = n^x$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$, a menos da solução trivial, é transcendente, salvo os casos especiais descritos anteriormente para $n = 2$ e $n = 4$.*

Demonstração. Seja x_0 uma solução não trivial. Suponha, por absurdo, que x_0 é algébrico. Pelo Lema 0.3 e pelo teorema de Gelfond-Schneider, n^{x_0} é transcendente, uma contradição, pois temos ${x_0}^n = n^{x_0}$ e ${x_0}^n$, por hipótese, seria algébrico. Logo, x_0 é transcendente. □

A seguir, apresentaremos uma consequência dos resultados apresentados sobre a equação $x^n = n^x$ e uma proposição que garante que o conjunto das soluções de tais equações é limitado.

Corolário 0.4. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, existe $T \notin \overline{\mathbb{Q}}$ tal que n^T é transcendente.*

Demonstração. Pelo Teorema 0.2, para todo $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, existe $T \notin \overline{\mathbb{Q}}$ tal que $T^n = n^T$. Assim, pelo item (iv) da Proposição 0.5, T^n é transcendente, e portanto n^T também é transcendente, como queríamos demonstrar. □

Proposição 0.8. *Seja t_n a sequência de números transcendentes T que são soluções das equações $x^n = n^x$. Então $\lim\limits_{n\to\infty} |t_n| = 1$.*

Demonstração. Se T é solução da equação $x^n = n^x$, então

$$T^n = n^T \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[n]{T^n} = \sqrt[n]{n^T} \Leftrightarrow \quad |T| = n^{\frac{T}{n}}.$$

Fazendo $n \to \infty$, temos $\dfrac{T}{n} \to 0$ e assim $n^{\frac{T}{n}} = |T| \to 1$. Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} |t_n| = 1$.

□

3.2.2 Algumas considerações sobre as potências n^T

Diante do que foi discutido na seção anterior, obtemos uma resposta para a **questão 1** apresentada no início da seção 2.2 deste capítulo: um critério de transcendência.

Critério de transcendência: Dados $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ e $T \notin \overline{\mathbb{Q}}$, se $n^T = T^n$ então n^T é transcendente.

Pelo Corolário 0.4, existem infinitos transcendentes dessa forma. Entretanto, essa condição não é única: o número $2^{\frac{\sqrt{2}\log 3}{\log 2}} = 3^{\sqrt{2}}$ é transcendente, mas temos $2^{\frac{\sqrt{2}\log 3}{\log 2}} \neq \left(\dfrac{\sqrt{2}\log 3}{\log 2}\right)^2$. Além disso, nem todo número da forma n^T nas condições apresentadas é transcendente, como por exemplo, o número $2^{\frac{\log 3}{\log 2}} = 3$.

Diante disso, nada pode ser concluído sobre os números 2^e e 2^π, uma vez que $2^e \neq e^2$ e $2^\pi \neq \pi^2$. Mais ainda, nenhum dos números n^e e n^π, com $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, tem sua transcendência confirmada pelo critério aqui estabelecido.

Note que, para $n = 3$, $3^e \neq e^3$ e $3^\pi \neq \pi^3$. Da mesma forma, para $n = 4$, temos $4^e \neq e^4$ e $4^\pi \neq \pi^4$. No entanto, quando $n > 4$, se x_0 é uma solução de $x^n = n^x$, esta está contida no intervalo $(-1,2)$. Para mostrar tal fato, basta utilizar o lema 0.2 e mostrar que $f(0)f(2) < 0$ dada a função $f(x) = x^n - n^x$ com $n > 4$.

Vimos que $f(0) < 0$, portanto, basta mostrar que $f(2) = 2^n - n^2 > 0$. Veja que se tomarmos $n = 5$, a desigualdade é verdadeira: $2^5 = 32 > 5^2 = 25$. Suponha que existe algum $n > 4$ tal que a desigualdade seja válida. Temos

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2$$

e pela a hipótese

$$2^n \cdot 2 > 2n^2.$$

Então, basta mostrar que $2n^2 > (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$, isto é, $n^2 > 2n + 1$. Como $n > 4$, temos $n^2 > 4n = 2n + 2n > 2n + 1$. Logo, $2^{n+1} > (n+1)^2$, e pelo Princípio de Indução Matemática, concluímos que $2^n - n^2 > 0$. Assim, $f(2) > 0$, o que verifica que queríamos.

4 UMA ABORDAGEM ALGÉBRICA E TRANSCENDENTE DOS NÚMEROS REAIS NO ENSINO MÉDIO

A prática pedagógica exige uma organização de modo que seja feita uma ordenação dos passos a serem realizados, e um meio para realizar essa organização é a utilização de sequências didáticas. Uma sequência didática é um conjunto de atividades ordenadas a serem realizadas em uma ou mais aulas. Essas atividades podem ser uma leitura, uma anotação, uma pesquisa, um debate ou um exercício, e são definidas, por Zabala (1998, p. 17), como "uma unidade básica do processo de ensino/aprendizagem", pois são esses elementos que norteiam o andamento da aula.

No ensino básico, um estudo mais detalhado sobre polinômios é comumente realizado no 3º ano do Ensino Médio, abordando desde a definição e operações, até o Teorema Fundamental da Álgebra. Aqui iremos apresentar propostas de sequências didáticas que tem o objetivo de distender esses conceitos com a apresentação de números algébricos e transcendentes.

A primeira proposta é expor os números reais como a união disjunta de números algébricos e transcendentes e explorar alguns resultados acerca desses números. Essa primeira abordagem será realizada tanto por uma perspectiva algébrica quanto geométrica, com o uso da metodologia de resolução de problemas. O matemático George Pólya (1887 - 1985) discorre sobre essa metodologia em sua obra "A arte de resolver problemas", que, em suma, propõe a introdução de um conceito matemático a partir da resolução de um problema, desenvolvendo, no estudante, um trabalho cada vez mais independente, tornando a aprendizagem mais significativa.

O ponto de partida para a abordagem algébrica será a busca por um polinômio que tenha um número dado como raiz. No ponto de vista geométrico, será a partir da apresentação de dois problemas clássicos: a duplicação do cubo e a quadratura do círculo. A justificativa para a escolha de tais problemas é a natureza e a popularidade dos números π e $\sqrt[3]{2}$ e o fato de que problemas geométricos facilitam na visualização do que está sendo proposto.

Por outro lado, a segunda abordagem poderá ser trabalhada como continuação da primeira, ou até mesmo, de maneira independente, com apresentações para eventos voltados a cursos de Licenciatura em Matemática ou a contextos olímpicos. A proposta trata-se do que foi discutido no Capítulo 2 deste trabalho: a análise das soluções das equações $x^n = n^x$ e a conclusão de que todas elas admitem pelo menos uma solução transcendente.

Para isso, será proposta a utilização do *sofware* Geogebra, uma ferramenta que auxilia a visualização de elementos gráficos e geométricos, e que pode ser utilizada tanto no navegador quanto pelo aplicativo. Além disso, também será necessária a utilização de uma ferramenta de compilação online da sua preferência, para compilar códigos escritos na linguagem Python. Uma sugestão é a *Online GDB*, que pode ser utilizada no navegador.

Estas sequências podem ser inseridas, quando possível, no planejamento de aulas como uma sequência do estudo de polinômios, como um minicurso ou oficina em eventos que possuam estudantes do ensino básico e/ou estudantes de graduação em matemática como público alvo ou como uma disciplina eletiva para o ensino médio.

Dependendo da disponibilidade do ministrante para a aplicação destas sequências didáticas, sugere-se uma abordagem do Método Iterativo Linear (ou do ponto fixo) para a aproximação de raízes de funções, bem como de uma introdução à linguagem Python, pois são ferramentas utilizadas para a execução das propostas.

4.1 Sequência didática - Proposta 1

Objetivos

- Deduzir, a partir dos problemas propostos, a existência de números transcendentes.
- Apresentar o conjunto dos números reais como união disjunta de algébricos e transcendentes;
- Expor a definição de número construtível;
- Associar a transcendência de um número ao fato de que tais números não são construtíveis;
- Conhecer alguns transcendentes a partir do Teorema de Gelfond-Schneider.

Conteúdos

- Números algébricos: definição, polinômio minimal, e grau de um número algébrico;
- Números transcendentes: definição e Teorema de Gelfond-Schneider.

Pré-requisitos

- Polinômios: definição, operações e Teorema Fundamental da Álgebra.

Desenvolvimento

Inicialmente trataremos sobre a relação entre as raízes de uma equação polinomial de coeficientes inteiros e os números irracionais. Para tanto, utilizaremos os resultados que seguem, conforme é exposto e demonstrado em [4].

Proposição 0.9. *Seja $R(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio com coeficientes inteiros. Assim, se $R(x)$ possui uma raiz racional $\frac{p}{q}$, com $mdc(p,q) = 1$, então p será um divisor de a_0 e q será um divisor de a_n.*

Demonstração. Seja $\frac{p}{q}$ uma raiz racional de $R(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Daí,

$$R\left(\frac{p}{q}\right) = a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0 \tag{9}$$

isolando o termo $a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n$, obtemos

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n = -a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} - \cdots - a_1\left(\frac{p}{q}\right) - a_0$$

e multiplicando por q^n

$$\begin{aligned} a_n p^n &= -a_{n-1}p^{n-1}q - \cdots - a_1 pq^{n-1} - a_0 q^n \\ &= q(-a_{n-1}p^{n-1} - \cdots - a_1 pq^{n-2} - a_0 q^{n-1}). \end{aligned}$$

Note que a última igualdade implica que q divide $a_n p^n$. Mas como, por hipótese, $mdc(p,q) = 1$, então q divide a_n.

Do mesmo modo, multipliquemos a equação 9 por q^n e isolemos, desta vez, o termo $a_0 q^n$. Temos

$$\begin{aligned} a_0 q^n &= -a_n p^n - a_{n-1}p^{n-1}q - \cdots - a_1 pq^{n-1} \\ &= p(-a_n p^{n-1} - a_{n-1}p^{n-2}q - \cdots - a_1 q^{n-1}) \end{aligned}$$

o que implica que p divide $a_0 q^n$, isto é, p divide a_0, pois $mdc(p,q) = 1$. □

Corolário 0.5. *Consideremos uma equação da forma*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

com coeficientes inteiros. Se essa equação possuir uma raiz racional, ela será um inteiro; além do mais, essa raiz inteira será um divisor de a_0.

Demonstração. Seja $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e $\frac{p}{q}$ uma raiz racional. Pela Proposição 0.9, p divide a_0 e q divide a_n. Como, neste caso, $a_n = 1$, temos $q = \{-1, 1\}$ o que indica que $\frac{p}{q}$ é um número inteiro igual a p (caso em que $q = 1$) ou $-p$ (caso em que $q = -1$). Logo, a raiz inteira divide a_0. □

Exemplo 0.4. *$\sqrt{2}$ é irracional. De fato, note que $\sqrt{2}$ é raiz de $x^2 - 2 = 0$, onde, pela notação utilizada, temos $a_2 = 1$ e $a_0 = -2$. Pela Proposição 0.5 , se essa equação admite uma solução racional, então ela será igual a $-2, 2, 1$ ou -1. Substituindo cada um desses valores, verificamos que nenhum deles é raiz de $x^2 - 2 = 0$. De fato, temos*

$$(-2)^2 - 2 \neq 0, \quad 2^2 - 2 \neq 0, \quad 1^2 - 2 \neq 0 \quad e\ (-1)^2 - 2 \neq 0$$

Logo, $x^2 - 2 = 0$ não possui solução racional, de modo que $\sqrt{2}$ é irracional.

Com base nisso, serão expostos os seguintes problemas: encontrar cada polinômio com coeficientes inteiros que possui um dos seguintes números como uma de suas raízes: $\sqrt{7}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{2} - \sqrt{3}, \sqrt{\sqrt{3} - 8}$ e $\sqrt[3]{\sqrt{2} + 1}$. Durante o processo, como forma de motivação para resolução do problema, uma estratégia seria definir uma incógnita, igualar o número proposto a ela, e realizar operações aritméticas até encontrar um polinômio que satisfaça tal condição.

Exemplo: Seja $\sqrt{\sqrt{6} - 1}$ o número proposto. Faça $x = \sqrt{\sqrt{6} - 1}$. Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$
\begin{aligned}
x = \sqrt{\sqrt{6}-1} \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 = \left(\sqrt{\sqrt{6}-1}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 = \sqrt{6}-1 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2+1 = \sqrt{6} \\
&\Leftrightarrow \quad (x^2+1)^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x^4+2x^2+1 = 6 \\
&\Leftrightarrow \quad x^4+2x^2-5 = 0
\end{aligned}
$$

Portanto, $x^4+2x^2-5=0$ é o polinômio que possui o número $\sqrt{\sqrt{6}-1}$ como uma de suas raízes. Feito isso, utilizando o argumento da Proposição 0.5, verificar que cada número desse é irracional.

Depois desse processo, será realizada uma discussão sobre a impossibilidade de realizar o processo com os números e e π. Feito isso, os conceitos a serem trabalhados devem ser definidos formalmente, a saber, a definição de números algébricos como todo número que é raiz de um polinômio de coeficientes inteiros, e de números transcendentes como aqueles que não satisfazem essa condição. Concluindo, com isso, que todo número transcendente é irracional, no entanto, a recíproca não é verdadeira.

Além disso, expor também as definições de polinômio minimal e de grau de um número algébrico, bem como as operações aritméticas realizada entre elementos desses conjuntos, conforme foi exibido no Capítulo 1.

Conhecendo potências transcendentes

Inserido na formalização do conteúdo, deve ser enunciado o Teorema de Gelfond-Schneider, incluindo o seu contexto histórico. Essa abordagem permitirá que os estudantes construam infinitos transcendentes com base em seus conhecimentos prévios.

Os estudos sobre potenciação passam a fazer parte da vida do estudante desde o 6º ano do Ensino Fundamental. No decorrer dos estudos acerca dos conjuntos numéricos é totalmente plausível o surgimento de perguntas sobre os resultados de potências como $2^{\sqrt{2}}$ ou 5^{π}, por exemplo. Diante dessa situação, justifica-se a exposição do Teorema de Gelfond-Schneider, permitindo que o estudante saiba a qual conjunto tais potências pertencem.

Números construtíveis

Aqui trataremos a definição de um número construtível e o teorema das construções geométricas.[1]

Definição 0.4. *Um número real k é dito construtível quando conseguimos construir um segmento de reta com essa medida, utilizando apenas um compasso e uma régua não graduada, fazendo apenas uma sequência finita dos seguintes passos:*

- *Interseção de duas retas;*
- *Interseção de uma reta e uma circunferência;*

[1]Neste ponto, é importante tratar com clareza que nem todo número algébrico é construtível, mas que todo transcendente não o é.

- *Interseção de duas circunferências.*

Teorema 0.3. *(Teorema das construções geométricas) Começando com um segmento de comprimento unitário, qualquer comprimento que possa ser constuído com régua e compasso é um número algébrico de grau igual a uma potência de 2.* [2].

Para melhor visualização desses conceitos e suas relações com os números algébricos e transcendentes, segue a exposição de dois problemas geométricos clássicos: a duplicação do cubo e a quadratura do círculo.

Duplicação do cubo

Também conhecido por *problema de Delos*, a duplicação do cubo consiste em, dado um cubo de aresta a e volume V, encontrar a aresta x do cubo cujo volume é $2V$, utilizando apenas uma régua não graduada e um compasso.

Tal problema é impossível de ser resolvido dadas as suas limitações. O cubo existe, e o valor de x pode ser encontrado a partir de outros métodos. A impossibilidade dessa construção é a seguinte:

Sejam C_1 e C_2 os cubos de arestas a e x, respectivamente. Temos:

$$V = a^3$$

para o cubo C_1 e

$$2V = x^3$$

para o cubo C_2. Portanto,

$$x^3 = 2a^3 \quad \Leftrightarrow \quad x = a\sqrt[3]{2}.$$

Note que $\sqrt[3]{2}$ é algébrico, pois é raiz do polinômio $p(x) = x^3 - 2$, porém, não é construtível, pelo teorema das construções geométricas, o que torna o problema impossível.

Quadratura do círculo

A quadratura do círculo foi um dos problemas que marcou a matemática grega. Trata-se da obtenção de um quadrado com área igual à de um círculo dado, utilizando como ferramenta para construção apenas régua e compassso.

Sejam Q a área de um quadrado de lado l e C a área de um círculo de raio 1. Temos:

$$Q = l^2$$

e

$$C = \pi 1^2 = \pi.$$

[2] A demonstração deste fato não será realizada neste texto por fugir do escopo da proposta didática, mas pode ser encontrada em [1].

Assim,

$$Q = C \quad \Leftrightarrow \quad l^2 = \pi \quad \Leftrightarrow \quad l = \sqrt{\pi}.$$

Segue disso que, para resolver o problema, seria necessário construir um quadrado de lado $\sqrt{\pi}$. Porém, o fato de π ser um número transcendente, implica na transcendência de $\sqrt{\pi}$ (pela Proposição 0.5). Logo, esse número também não é construtível, o que torna o problema sem solução.

Tempo de execução

- Abordagem do problema de encontrar polinômios que possuem determinados números como raízes e discussão sobre a existência de números transcendentes (4 a 6 aulas);
- Definições formais sobre números algébricos e transcendentes, juntamente com as propriedades aritméticas desses conjuntos e a apresentação do Teorema de Gelfond-Schneider como o 7º problema de Hilbert (2 a 4 aulas);
- Tratamento sobre números construtíveis e os problemas geométricos (2 a 4 aulas).

4.2 Sequência didática - Proposta 2

Objetivos

- Aplicar o Teorema de Gelfond-Schneider;
- Utilizar recursos tecnológicos como objeto facilitador da aprendizagem.

Conteúdos

- Teorema de Gelfond-Schneider;

Pré-requisitos

- Números transcendentes (definição);
- Raízes de funções.

Recursos didáticos

- Geogebra;

- Online GDB (plataforma online de programação).

Desenvolvimento

Esta segunda proposta pode ser aplicada no Ensino Médio como continuidade da primeira sequência didática, ou até mesmo, independentemente da primeira, como uma apresentação em eventos voltados a cursos de Licenciatura em Matemática. Neste último caso, sugere-se uma breve apresentação dos conceitos de números algébricos e transcendentes feitos na proposta 1.

A ideia é trabalhar com casos particulares da equação $x^n = n^x$, com $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Inicialmente, deve ser feita uma apresentação do Teorema de Gelfond-Schneider, conforme foi sugerido na primeira proposta. Em seguida, ainda sem recorrer à utilização dos recursos tecnológicos, sugira aos estudantes que analisem as soluções das equações para os casos iniciais: $x^2 = 2^x, x^3 = 3^x, x^4 = 4^x$ e $x^5 = 5^x$.

Após esse momento, confirme com os estudantes a existência da solução trivial para cada uma das equações e verifique se outras soluções foram encontradas. No que segue, com a utilização do *software* Geogebra exponha os gráficos de cada uma das equações dadas na forma de função, conforme foi abordado no Capítulo 2. Assim, a visualização das raízes ficará mais clara e o próximo passo é aproximar essas raízes.

Para tal feito, será utilizada a plataforma de compilação para linguagem Python, onde serão colados os códigos abaixo. Para aproximar as raízes estão sendo utilizados métodos do cálculo numérico: o método de Newton-Raphson e o método do Ponto Fixo, respectivamente. Tais métodos fornecerão aproximações das raízes com até 16 casas decimais.

Códigos para obtenção das raízes negativas (n par)

```
import math

x_inicial = 1

raizes = [x_inicial]

for i in raizes:
    x_atual = i - (i**n - n**i)/(n*i - (n**i) * math.log(n))
    raizes.append(x_atual)
    if len(raizes) == 500:
    break

print(raizes)
```

Códigos para obtenção das raízes positivas (caso geral)

$x\_inicial = 1$

$raizes = [x\_inicial]$

$for\ i\ in\ raizes:$
    $x\_atual = (n^{**}i)^{**}(1/n)$
    $raizes.append(x\_atual)$
    $if\ len(raizes) == 400:$
    $break$

$print(raizes)$

Nos códigos acima, antes de compilar, o n deve ser substituído pelo número natural do caso que você está analisando. Durante essa exposição é interessante associar as aproximações obtidas com a visualização dos gráficos das funções que estão sendo consideradas.

Feito isso, a discussão parte para a justificativa de que tais soluções são transcendentes, o que justifica a dificuldade de encontrar essas raízes "manualmente".

Tempo de execução

- Exposição do Teorema de Gelfond-Schneider e a busca por soluções das equações do tipo $x^n = n^x$, com $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ (3 aulas);
- Aproximação de raízes e visualização dos gráficos das funções (2 aulas).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos a relação entre as soluções das equações da forma $x^n = n^x$, com $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ e $x \in \mathbb{R} - \{0,1\}$, e os números transcendentes. Para tal feito, foram expostos os conceitos iniciais da Teoria dos Números Transcendentes, a saber, as definições dos conjuntos dos números algébricos e dos números transcendentes, bem como suas propriedades aritméticas. Além disso, uma ferramenta essencial para a construção dos resultados é Teorema de Gelfond-Schneider, que determina a transcendência de potências de base e expoente algébricos.

Com isso, definimos, para as equações $x^n = n^x$, as soluções $x = n$ como *soluções triviais* e mostramos que, além destas, toda equação da forma aqui mencionada possui solução. No que segue, provamos que todas as soluções dessas esquações, além das triviais e casos especiais mencionados, são transcendentes. Em decorrência disso, definimos um critério de transcendência para potências da forma n^T com T transcendente e $n > 1$.

A partir dos resultados obtidos, apresentamos duas propostas de sequências didáticas tendo a 3ª série do Ensino Médio como público alvo. Tais sequências tem o objetivo de introduzir os conceitos de números algébricos e transcendentes na educação básica. Essas propostas podem ser trabalhadas uma seguida da outra, na ordem que estão expostas, ou de maneira independente, no caso em que o público alvo seja expandido para discentes de cursos de Licenciatura Plena em Matemática, com o objetivo de incentivar a busca e aplicação desses conceitos discutidos na formação de professores e, consequentemente, na sala de aula.

REFERÊNCIAS

[1] MARQUES, Diego. **Teoria dos Números Transcendentes.** Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[2] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Números Irracionais e Transcendentes.** Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[3] TORRES, Mário Sérgio Rebouças. **Números algébricos e transcendentes**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017.

[4] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Fundamentos de Cálculo.** Rio de Janeiro: SBM, 2022.

[5] NIVEN, Ivan. **Números:** Racionais e Irracionais. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[6] POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas:** um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: interciência, 1995.

[7] LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias.** Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[8] RIPOLL, Jaime Bruck; RIPOLL, Cydara Cavedon e SILVEIRA, José Francisco Porto da. **Números Racionais, Reais e Complexos.** Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2011.

[9] ZABALA, Antoni. **A Prática Educativa Como Ensinar**. Porto Alegre : ArtMed, 1998.