



Josiani Aparecida de Oliveira

**TRABALHANDO A DIVISÃO
ATRAVÉS DE HISTÓRIAS:
a Matemática e a ludicidade**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção de grau de Mestre em Matemática pelo programa de Pós-graduação PROFMAT, ministrado pelo Departamento de Matemática da PUC-RIO.

Orientador: Prof. Dania González Morales

**Rio de Janeiro,
março de 2024.**



Josiani Aparecida de Oliveira

**TRABALHANDO A DIVISÃO
ATRAVÉS DE HISTÓRIAS:
a Matemática e a ludicidade**

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção de grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-graduação **PROFMAT** da PUC-RIO. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo.

Prof. Dania González Morales
Orientadora
PUC-Rio

Prof. Eduardo Barbosa Pinheiro
PUC-Rio

Prof. Luiza Cristina Gatti Peralta
Escola Dinâmica do Ensino Moderno

Prof. Renata Martins da Rosa
PUC-Rio

Prof. Sinesio Pesco
PUC-Rio

Rio de Janeiro, **20 de março de 2024.**

Todos os direitos reservados. A reprodução, total ou parcial, do trabalho é proibida sem autorização da universidade, da autora e do orientador.

Josiani Aparecida de Oliveira

Graduou-se na Universidade Federal do Rio de Janeiro em 2013. Coursou pós-graduação em Letramento e Alfabetização na Faculdade São Luís em 2017. Atua como Professora da Educação Básica no município de Paty do Alferes, desde 2008.

Ficha catalográfica

Oliveira, Josiani Aparecida de

Trabalhando a divisão através de histórias : a Matemática e a ludicidade / Josiani Aparecida de Oliveira ; orientador: Dania González Morales. – 2024.

56 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2024.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Divisão. 3. Resolução de problemas. 4. Sequências didáticas. 5. Interdisciplinaridade. 6. Divisão euclidiana. I. Gonzalez Morales, Dania. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

“O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.”

A minha Orientadora Dania González Morales por toda dedicação incansável e confiança.

À CNPq e à PUC-RIO pelo apoio concedido, pois, sem essas instituições, o trabalho teria sido impossível.

A Deus por me dar saúde necessária para realizar este sonho.

A meu marido Leopoldo por toda paciência e gesto de amor ao me levar à faculdade aos sábados, muitas vezes renunciando ao seu final de semana.

A minha mãe, que tão carinhosamente velava meus estudos e me ajudou até aqui.

A meus filhos por serem a razão da realização deste sonho tão almejado.

A todos os meus queridos colegas.

A todos os professores que, de alguma forma, fizeram parte desta empreitada.

A todos que fazem parte do Departamento de Matemática da PUC-Rio por toda disposição concedida a mim.

Aos professores que participaram da Comissão Organizadora.

A todos meus amigos que torceram e oraram por mim.

Resumo

Oliveira, Josiani aparecida de; Morales, Dania Moralez. **Trabalhando a divisão através de histórias: a Matemática e a Ludicidade**. Rio de Janeiro, 2024. 57p. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O aprendizado das quatro operações fundamentais, sobretudo a divisão, é um desafio para muitos educadores e estudantes na Educação Básica, a aquisição deste algoritmo muitas vezes é um processo mecânico e sem sentido. Este trabalho visa disponibilizar, instigar e oportunizar estratégias para auxiliar o processo de ensino-aprendizado, que muitas vezes se torna monótono e sem sentido, para que se torne algo prazeroso e significativo através de resoluções de problemas abordados através de sequências didáticas, nas quais o educando possa refletir sobre seu aprendizado e tornar-se agente ativo no seu processo de aprendizagem. Com esse intuito, fazemos um estudo de como a divisão é parte intuitiva do processo de aquisição do conhecimento humano, e que a seu modo o ser humano buscou estratégias para desenvolvê-la. Em seguida, fazemos um estudo das metodologias de George Pólya e Antoni Zabala, que tratam, respectivamente, de resoluções de problemas e de sequências didáticas. Além disso, propomos uma situação-problema abordando essas metodologias. Enfim, apresentamos um produto educacional que foi elaborado de maneira independente como fruto de todo o estudo desta dissertação. Ele tem como objetivo sugerir atividades que proporcionem aos seus educandos um momento lúdico, cercado de aventuras e de desafios na aprendizagem de Matemática.

Palavras-chave

Divisão; resolução de problemas; sequências didáticas; interdisciplinaridade; Divisão Euclidiana.

Abstract

Oliveira, Josiani aparecida de; Morales, Dania Gonzales (Advisor). **Working on division through stories: Mathematics and Playfulness.** Rio de Janeiro, 2024. 57p. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Learning the four fundamental operations, especially division, is a challenge for many educators and students in Basic Education, acquiring this algorithm is often a mechanical and meaningless process. This work aims to provide, instigate and provide opportunities for strategies to assist the teaching-learning process, which often becomes monotonous and meaningless, so that it becomes something pleasurable and meaningful through problem solving addressed through didactic sequences, in which the students can reflect on their learning and become an active agent in their learning process. With this aim, we study how division is an intuitive part of the process of acquiring human knowledge, and that in its own way, human beings have sought strategies to develop it. Next, we study the methodologies of George Pólya and Antoni Zabala, which deal, respectively, with problem solving and didactic sequences. Furthermore, we propose a problem situation addressing these methodologies. Finally, we present an educational product that was prepared independently as a result of the entire study of this dissertation. It aims to suggest activities that provide students with a playful moment, surrounded by adventures and challenges in learning Mathematics.

Keywords

Division; problem solving; didactic sequences; interdisciplinarity; Euclidean Division.

Sumário

1. Introdução	11
2. A divisão vista como um processo inato	14
2.1. Como os babilônios dividiam?	14
2.2. Será a ideia de divisão um conceito inato?	19
3. As sequências didáticas na aprendizagem, por Antoni Zabala	24
3.1. Atual cenário da Educação brasileira, em Matemática	24
3.2. Sequências didáticas	29
4. Resolução de Problemas utilizando a metodologia de Pólya	34
5. Divisão Euclidiana	41
6. Sugestão de uma situação-problema como parte de uma sequência didática	42
7. Produto educacional	47
7.1. Atividades relacionadas	48
8. Conclusão	54
9. Referências	56

Lista de tabelas

Tabela 01 – Exemplos de tipos de conteúdo	28
Tabela 02 – Sugestões de atividades de acordo com os tipos dos conteúdos.	33
Tabela 03 – Quantidade de pessoas representadas por meio de potência.	39
Tabela 04 – Quantidade de pessoas após as multiplicações.	39
Tabela 05 – Quantidade total de pessoas	39

Lista de figuras

Figura 01 – Tabela Plimpton 322	16
Figura 02 – Representação de uma parte da tabuada do 13, no sistema de numeração sexagesimal.	18
Figura 03 – Atividade de relação entre balões e crianças.	22
Figura 04 – Pisa 2018 revela baixo desempenho escolar em Leitura, Matemática e Ciências no Brasil.	26
Figura 05 – Possível representação visual para o problema.	37
Figura 06 – O sítio das galinhas	43
Figura 07 – Representação através do material dourado do número 293, respectivo à 4ª semana.	44
Figura 08 – Observação de uma solução possível, realizada através da troca das duas placas de centena, por 20 placas de dezenas, somadas às restantes e distribuídas igualmente entre as quatro lojas.	45
Figura 09 – Observação de uma solução encontrada a partir da visualização na qual percebemos que as placas foram divididas em quatro “lojas” e o restante foi distribuído igualmente.	46
Figura 10 – A família de lobos	48

*Quem passou pela vida em branca nuvem,
E em plácido repouso adormeceu;
Quem não sentiu o frio da desgraça,
Quem passou pela vida e não sofreu,
Foi espectro de homem, não foi homem,
Só passou pela vida, não viveu.*

Francisco Octaviano

1. Introdução

Há mais de 10.000 a.C., os hominídeos sobreviviam na natureza, através da caça, da pesca e da coleta de alimentos, enfrentando muitas intempéries por causa de seu estilo de vida nômade. Os mais fortes conseguiam se perpetuar, enquanto os mais debilitados tinham condições mínimas de sobrevivência. Porém, com a evolução de nossa espécie, o homem adquiriu a capacidade de pensar, gerir situações e, sobretudo, planejar.

A descoberta da agricultura é um grande exemplo da capacidade que temos de resolver problemas. Imagine como foi realizado o primeiro plantio. Será que o primeiro agricultor pegou uma semente e colocou-a em uma cova redonda de 10 cm de diâmetro e com 5 cm de profundidade? Será que ele observou uma semente soltando suas raízes? A planta cresceria melhor, se tivesse em um lugar úmido e adequado? Será que esse mesmo homem começou a observar que, em determinada época do ano, as sementes se desenvolviam mais?

Nesse ínterim não tenho a pretensão de responder a esses questionamentos, mas considerar que o que levou os primeiros plantadores a desenvolverem a agricultura foi a capacidade que a humanidade tem de evoluir, sendo a busca por maior conforto e sobrevivência o que norteou a raça humana a dedicar-se a encontrar soluções práticas para os problemas do dia a dia. Essa busca trouxe à humanidade progresso intelectual e, atualmente, essa progressão encontra-se em um momento áureo, especialmente no desenvolvimento tecnológico.

Inteligências artificiais capazes de interagir através de um celular, computadores que cabem na palma da mão, fotos com alta resolução que nos mostram o espaço sideral, modelagem climática garantindo e pautando soluções para o clima mundial e a economia que baseia a sociedade são exemplos de algumas conquistas que foram subsidiadas pelos avanços da inteligência humana. Especificamente, dentre elas, destacamos a Matemática. Segundo Rosamund Sutherland¹, em seu livro “Ensino eficaz de Matemática” (Sutherland, 2009, p. 16):

¹ SUTHERLAND, R., *Ensino eficaz de Matemática*, p. 16.

Ao longo dos séculos, os matemáticos desenvolveram novas ferramentas que sustentam a atividade matemática. Essas ferramentas inventadas incluem aqueles materiais, como a régua, o ábaco e a calculadora, e também inclui as simbólicas, como o sistema de coordenadas cartesianas e o algoritmo para multiplicações. O estudo da história de uma ferramenta sempre vai mostrar que essa ferramenta específica surgiu em um contexto cultural em que havia uma necessidade pragmática para um artefato desse tipo.

A evolução desta Ciência deu-se gradativamente através do tempo, com as mentes e as mãos de grandes pensadores e estudiosos que se dedicaram a analisar, pesquisar e discutir o fazer matemático. Preocupando-se em evitar ambiguidades e ser democrática, procurando padronizar terminologias e simbologias a partir de seus axiomas e teoremas, a Matemática foi sendo sistematizada.

Ressalta-se que o conhecimento matemático é adquirido de duas maneiras distintas. Existe a matemática informal dos centros de convivência social, dos vendedores ambulantes, dos pedreiros, entre outros, que utilizam diversas estratégias de cálculo adquiridas empiricamente especialmente no cotidiano, sem sistematização, havendo, evidentemente, contextualização, pois há a aplicação prática dos cálculos utilizados. Por outro lado, há a educação formal obtida nas escolas, nas universidades e em outros institutos de ensino e de pesquisa, ensinada de modo sistematizado. A integração dessas duas abordagens favorece a compreensão do conteúdo apresentado, tornando a sua aquisição mais relevante e significativa.

Em nossas salas de aula, devemos nos perguntar se o que estamos ensinando em Matemática tem relevância para a vida do nosso aluno, conscientizando-nos que devemos evitar ao máximo que nosso estudante memorize fórmulas e resultados teóricos como o principal método de apreensão matemática, pois essa abordagem tem raízes profundas no método tradicional e reflete a maneira de adquirir conhecimento matemático sem aprender como utilizá-lo. Pois, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular² (Brasil, 2018, p. 265):

A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas

² BRASIL, *BNCC*, p. 255.

Base Nacional Comum Curricular – Documento normativo que permeia a Educação Básica no Brasil.

abstratos, que organizam e interrelacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos.

Como o ensino da Matemática pode ser um tanto desafiador, as resoluções de situações-problemas são excelentes estratégias para instigar nossos alunos a desenvolverem o raciocínio lógico-matemático, pois envolve vários parâmetros, dentre eles, a motivação, a proficiência, as habilidades, entre outras. Portanto, cabe ao professor utilizar diversos recursos educacionais que envolvam e estimulem os alunos a serem protagonistas em seu processo de aprendizagem.

A pesquisa tem por objetivo trazer possíveis soluções e ideias para tornar o ambiente educacional lúdico e atrativo, oportunizando ao educando a aquisição de competências e habilidades que o farão exercer de maneira plena sua capacidade. Este estudo está embasado no livro “A arte de resolver problemas”, que foi escrito por George Pólya³ em 1945, mas continua muito atual. Nele o autor discorre sobre a resolução de problemas, sistematizando-a, criando um passo a passo para auxiliar o professor no processo de ensino-aprendizagem. Com sua metodologia, Pólya nos mostrou como auxiliar nossos estudantes a adquirirem conhecimento matemático e utilizá-lo na solução de problemas. Nesse contexto, utilizaremos a relevante pedagogia proposta por ele, para instigarmos uma reflexão sobre como abordar os conceitos de agrupamento e divisão euclidiana.

Todavia, podemos tornar o aprendizado ainda mais significativo e atraente, utilizando inúmeros recursos educacionais, dentre eles as sequências didáticas, que serão responsáveis pela contextualização das situações-problemas. Desse modo, vou apoiar meu produto educacional no livro “A prática educativa: como ensinar”, escrito em 1998, por Antoni Zabala⁴, visto que o método de sequência didática evidenciado por ele dialoga com a metodologia de sistematização da resolução de problemas apontadas por Pólya.

³ George Pólya, matemático húngaro, nasceu em 13 de dezembro de 1887 em Budapeste, de família judaica de origem polaca. Faleceu a 7 de Setembro de 1985 em Palo Alto, na Califórnia nos Estados Unidos. Escreveu o livro “A arte de resolver problemas”, que será abordado mais amplamente no capítulo 3.

⁴ Antoni Zabala é referência em educação, nasceu na Espanha, foi responsável pela transformação do ensino em seu país quando atuou como ministro da Educação. É escritor, e, dentre seus livros, daremos enfoque ao livro “A prática educativa: como educar”, no capítulo 2.

Assim, esta dissertação está organizada como se segue. No segundo capítulo, foi explorada a ideia de que a capacidade de divisão é inata, destacando a importância de seu desenvolvimento desde a infância e sua relação com o aprendizado formal da matemática.

No terceiro capítulo, são apresentadas as etapas de uma sequência didática conforme proposta por Zabala, incluindo introdução, desenvolvimento, atividades práticas, avaliação, síntese e generalização, aplicação, avaliação final e reflexão. Exemplos de atividades utilizando um livro paradidático são fornecidos para ilustrar a aplicação desses conceitos na prática pedagógica.

A seguir, no capítulo quatro, o texto apresenta a aplicação da pedagogia de George Pólya, conhecida por sua abordagem sistemática na resolução de problemas matemáticos. Pólya enfatiza a necessidade de orientação do professor para estimular o pensamento crítico dos alunos e promover a independência na resolução de problemas. Um exemplo prático é apresentado no capítulo cinco para ilustrar a aplicação do diálogo entre as metodologias entre Pólya e Zabala, destacando a importância de questionamentos, estratégias de resolução e reflexão sobre o processo.

Por fim, o produto educacional, no capítulo sete, tem por objetivo ir ao encontro desse diálogo trazendo propostas práticas para professores de modo a contribuir para a educação. Assim apresentado, podemos seguir com a pesquisa.

2. A divisão vista como um processo inato

Ao pararmos para observar crianças brincando, podemos vê-las dividindo seus brinquedos ou guloseimas com os seus amigos. Será que há um princípio lógico nisso? A evolução da humanidade, da inteligência, do raciocínio-lógico seria fruto desses conceitos matemáticos inatos? Será que podemos comprovar essa ideia?

A história de muitas civilizações, inclusive a babilônica, aponta que, mesmo sem o conceito de números, da forma como o conhecemos, os antigos já possuíam algoritmos para as operações matemáticas, inclusive, a divisão.

Neste capítulo, veremos como os matemáticos babilônicos efetuavam a divisão e vamos compreender um pouco mais sobre como crianças, desde pequenas, já possuem a capacidade de fazer divisões com aproximações acertadas de modo simbólico e não-simbólico.

2.1. Como os babilônios dividiam?

A Mesopotâmia, uma antiga região localizada no Oriente Médio, entre os rios Tigre e Eufrates, foi berço de uma das civilizações mais relevantes da história, a babilônica – uma grande civilização que floresceu e deixou um enorme legado para a Matemática e para outras áreas do conhecimento humano.

A Babilônia foi fundada pela civilização babilônica, também conhecida por Babel. Foi uma antiga cidade situada onde hoje está localizado o Iraque. Foi cenário do primeiro código que estabelecia leis e punições para quem o infringisse e recebeu o nome de Hamurábi. Muitos outros mistérios envolvem a Babilônia, entre eles as histórias de seus jardins suspensos, que foram considerados uma das sete maravilhas do mundo e a Torre de Babel, que, apesar de não haver sido comprovada por arqueólogos e historiadores, é utilizada metaforicamente para nos chamar atenção sobre a importância da comunicação entre as nações.

A sociedade babilônica era altamente estratificada, possuindo uma estrutura social e política bem definida, mesmo para a época. Seus conhecimentos foram registrados em tábuas de argila, que foram descobertas bem preservadas por arqueólogos. A escrita era chamada de cuneiforme, porque tinha o formato de uma cunha que cabia na palma da mão, revelando que a Babilônia possuía uma

organização social muito impressionante para a sua época. Os escribas babilônicos deixaram muitas contribuições para a Matemática, dentre elas o sistema numérico de base 60, que é utilizado ainda hoje na divisão das horas, minutos e segundos.

Das tabelas matemáticas, conhecidas como tabelas babilônicas, a mais famosa é a Tabela Plimpton 322⁵, que estão listadas as triplas pitagóricas. De acordo com Howard Eves⁶, em seu livro “Introdução à história da Matemática” (Eves, Howard, 2011, p. 63):

Talvez a mais notável das tábulas matemáticas babilônicas já analisadas seja aquela conhecida como Plimpton 322. O nome indica que se trata da tábula da coleção G. A. Plimpton da Universidade de Colúmbia, catalogada sob o número 322. A tábula foi escrita no período Babilônico Antigo (aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C.) e os primeiros a descrever seu conteúdo foram Neugebauer e Sachs em 1945.

Observe a Figura 01:

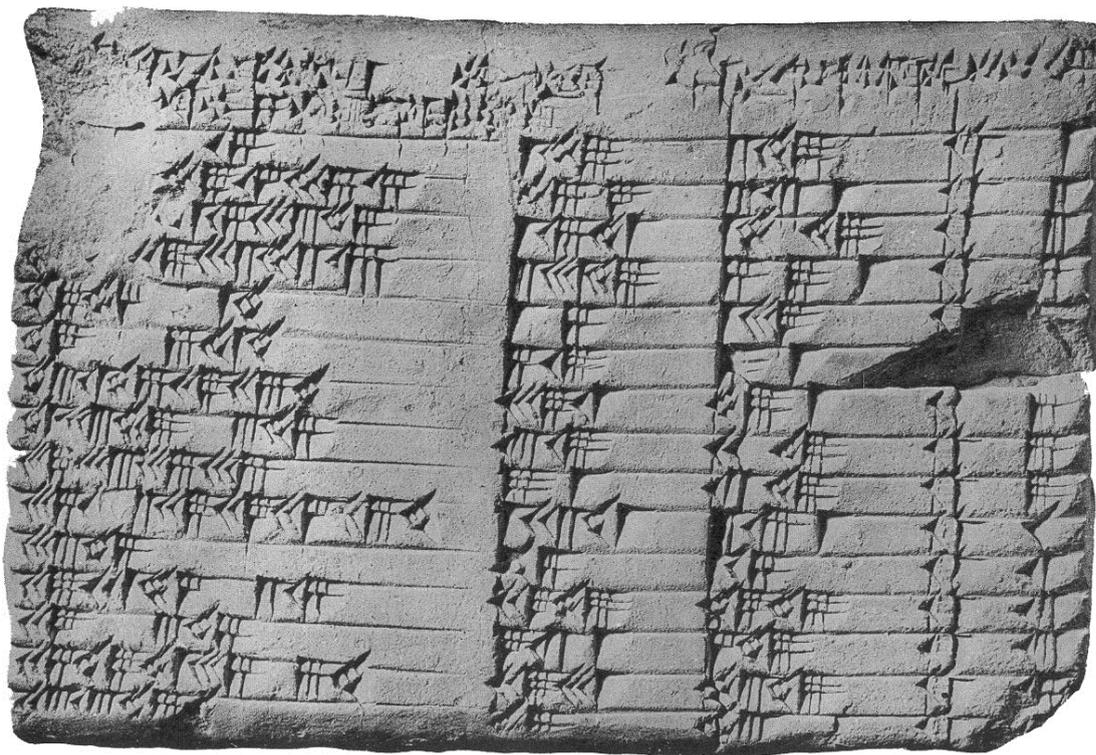


Figura 01: Tabela Plimpton 322

Fonte: <http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m446-03/pl322/pl322.html>

⁵ Plimpton 322 é uma tabela de argila em escrita cuneiforme com registros da matemática babilônica.

⁶ EVES, H., *Introdução à história da Matemática*, p. 63.

Os babilônios realizavam cálculo de áreas em campos agrícolas; possuíam método para resolução de equações quadráticas, tabelas de logaritmos que os auxiliavam nas operações de multiplicação e divisão, dentre muitas outras contribuições.

Em seu livro “Episódios da História Antiga da Matemática”, Asger Aaboe⁷ (2002) contribuiu com algumas ideias de como os babilônios faziam suas operações, inclusive as divisões.

O sistema numérico utilizado por essa civilização é posicional. Os babilônios utilizavam os símbolos para representar todos os números: o cravo e a asna, em que o cravo se referia à unidade, e a asna, às dezenas.

Como foi dito anteriormente, a base escolhida é a 60. Acredita-se que seja pela decomposição do número 60 ter uma considerável quantidade de divisores. Segundo Aaboe⁸ (2002, p.19):

Assim, como 2 já é primo, as únicas frações reduzidas que podem ser escritas como frações binárias finitas são aquelas cujos denominadores já são potência de 2. As que podem ser transformadas e, frações decimais finitas são aquelas cujos denominadores não possuem outros fatores primos além de 2 e 5, pois $10=2.5$. Mas como $60=2^2.3.5$, os fatores primos permissíveis para desenvolvimentos sexagesimais finitos são 2, 3 e 5. Assim, se considerarmos os denominadores 2, 3, 4... 20, somente quatro deles fornecerão frações binárias finitas, sete darão decimais finitas equivalentes, e treze terão desenvolvimentos sexagesimais finitos.

Um exemplo que ilustra como podemos escrever um número na base 60 é dado por: $(93)_{10} = (1;33)_{60}$, pois, $93 = 1 \times 60 + 33$.

Utilizando a notação com (;) de maneira análoga, podemos escrever as tabelas, pois, conforme o livro utilizado no curso do Profmat “Tópicos de História da Matemática”, de Tatiana Roque & João Bosco Pitombeira⁹ (Roque, Tatiana; Pitombeira, João Bosco, p.28):

Em primeiro lugar, eles dispunham de tabletes com a mesma função de nossas ‘tabuadas’. A maioria das operações realizadas pelos babilônios usava diretamente estes tabletes. No caso da multiplicação, elas eram fundamentais. Basta observar que os cálculos elementares, ou seja, aqueles que são os correspondentes à nossa tabuada, incluem multiplicações até 59×59 ! Isso torna

⁷ Asger Aaboe nasceu em Copenhague, na Dinamarca, graduou-se em Matemática, mas se interessava por outras áreas como Astronomia, Física e Química. Foi aluno do eminente historiador Otto Neugebauer. Recebeu seu título de doutor em 1957, atuando em diversas universidades, dentre elas a Universidade de Washington e a Universidade de Yale.

⁸ AABOE, A., *Episódios da História Antiga da Matemática*, p.19.

⁹ ROQUE, T., PITOMBEIRA, J. B., *Tópicos de História da Matemática*, p.28.

necessária a presença de tabletes com ‘tabuadas’, mesmo para os escribas mais experientes.

Observe a Figura 02:

$13 \times 1 = 13$	$13 \times 7 = 1; 31$
$13 \times 2 = 26$	$13 \times 8 = 1; 44$
$13 \times 3 = 39$	$13 \times 9 = 1; 57$
$13 \times 4 = 52$...
$13 \times 5 = 1; 5$	$13 \times 58 = 12; 34$
$13 \times 6 = 1; 18$	$13 \times 59 = 12; 47$

Figura 02: Representação de uma parte da tabuada do 13, no sistema de numeração sexagesimal

Fonte: De própria autoria (2023).

Utilizando tabelas que usavam para o produto faziam as divisões preparando os números a serem divididos. O processo envolvia subtrair repetidamente o divisor do dividendo, registrando quantas vezes o divisor cabia no dividendo, considerando os restos, que eram registrados através de frações sexagesimais.

Vamos fazer a divisão do número 328 por 4, na base 60.

- Passo 01: Representar o número 328 na base 60:
 $328 = 5;28$
- Passo 02: Dividir o 5 por 4, o resultado obtido é 1 restando 1;
- Passo 03: Transformar o 1 que sobrou de resto, em 60 “unidades” e logo a seguir juntar com o 28. Ou seja, $60 + 28 = 88$, que ao ser dividido por 4, obtém-se 22.

O resultado almejado é 1;22 que convertido na base 10 é o número 82, que facilmente pode ser verificado, como o resultado da divisão de 328 por 4.

Os babilônios não possuíam um símbolo específico para representar o zero. No entanto, eles utilizavam um espaço vazio para indicar a ausência de uma quantidade, evitando, assim, confusões ou ambiguidades na escrita.

Como vimos, os babilônios já possuíam a capacidade de dividir, mesmo não dominando o algoritmo de Euclides, já que nessa época ele ainda não teria sido desenvolvido. Os babilônicos tratavam a divisão como o inverso da multiplicação e utilizavam subtrações sucessivas para conseguirem atingir o objetivo. Como eles, muitos povos também dividiam, como, por exemplo, os chineses possuíam o Teorema Chinês dos Restos, os egípcios faziam subtrações sucessivas entre outros.

2.2. Será a ideia de divisão um conceito inato?

Crianças mais jovens geralmente têm dificuldades em entender o algoritmo da divisão euclidiana quando apresentado em sala de aula, especialmente ao diferenciar o dividendo, do quociente e do divisor. Por outro lado, quando observamos brincadeiras de crianças, usualmente, vemos-las repartindo pecinhas, massinhas, lápis de cor e até mesmo times para um jogo coletivo, revelando que a divisão partitiva baseada em estimativas pode ser um primeiro passo para entender a operação. Como fazem isso de maneira tão organizada, sendo que, muitas vezes, não conhecem as operações matemáticas?

O artigo científico, “*Young Children Intuitively Divide Before They Recognize the Division Symbol*”, escrito por Szkudlarek et al. (2022)¹⁰, do Departamento de Psicologia da Universidade da Pensilvânia, Filadélfia, Estados Unidos, concluiu que a capacidade que crianças e adultos têm de dividir intuitivamente, tanto em contextos não simbólicos, como objetos, brinquedos, imagens, dinheiro entre outros, quanto em contexto simbólico, representado por números indo-arábicos. Exatamente isso é dito no artigo, a seguir (Szkudlarek et al., 2022, p. 2):

Children have some basic intuitions about division before they formally learn how to divide. These basic intuitions may derive from insights into practical mathematics in the world around them, called intuitive action schemas.

¹⁰ Szkudlarek et al., *Young Children Intuitively Divide Before They Recognize the Division Symbol*, p. 2.

Essa capacidade se relaciona com a acuidade do Sistema Numérico Aproximado e o desempenho da Matemática formal. A acuidade matemática é um termo que se refere à habilidade de uma pessoa compreender e resolver problemas matemáticos com precisão e eficácia, envolvendo a capacidade de raciocinar, analisar informações numéricas, identificar padrões. Ter acuidade no Sistema Numérico Aproximado é a capacidade de fazer aproximações precisas do resultado. Portanto, os estudos nos sugerem que crianças possuem uma capacidade de fazer divisões de maneira justa, realizar atividades para separar uma pequena quantidade de objetos em uma quantidade pequena de recipientes e, por último, possuem a capacidade de retirada, comparação e adição de elementos no conjunto.

Além disso, foi observado que o desempenho na divisão intuitiva atua como um mediador na relação entre a precisão da acuidade do Sistema Numérico Aproximado fornecendo lampejos para o desenvolvimento da matemática simbólica, bastando ao professor oferecer ferramentas adequadas para que o aluno consolide seus conhecimentos, sistematizando-os.

Os experimentos foram realizados individualmente, com um mediador, em uma sala tranquila, depois da escola. As crianças primeiro completaram divisões não-simbólicas e simbólicas de maneira aleatória entre os participantes. As tarefas de divisão aproximada e a tarefa de comparação aconteceram no MATLAB¹¹ e na extensão Psychophysics Toolbox¹².

Os experimentos concluíram que tanto crianças de ensino fundamental, quanto adultos podem realizar divisões, em matrizes simbólicas e não-simbólicas, e que os resultados não dependem do conhecimento formal da divisão. Assim, destaca-se que, antes que a educação formal aconteça, há um conhecimento inato da divisão. Mais precisamente, segundo o artigo (Szkudlarek et al., 2022, p. 12):

Successful completion of the two division tasks was not dependent on formal knowledge of division. Children who could not recognize the division symbol nor solve simple division problems were nevertheless successful at performing non-symbolic division, and more surprisingly, they were also able to complete the division task when the dividend and target comparison number were represented symbolically with Arabic numerals.

¹¹ MATLAB (MATrix LABoratory) trata-se de um software interativo de alta performance voltado para o cálculo numérico.

¹² Psychophysics Toolbox Version 3 (PTB-3) é um conjunto gratuito de funções Matlab e GNU Octave para pesquisa em visão e neurociência.

Os resultados identificaram a possibilidade de introduzir o conceito de divisão o quanto antes na educação matemática, usando tanto quantidades não-simbólicas quanto pequenos numerais. Com isso, podemos verificar que alunos da Educação Infantil devem ser estimulados por seus professores a fazerem atividades de partição, organização da mesma quantidade de objetos em seções, gavetas ou estantes, atividades de seriação, entre outras que promovam a ideia de divisão e não nos esquecendo da importância das outras operações. Essa abordagem pode evitar que se forme uma lacuna de conhecimento quando a divisão for sistematizada pelo algoritmo da Divisão Euclidiana.

Segundo essa ideia, na Figura 03, temos um exemplo de como a divisão pode ser trabalhada em uma atividade que exercita a coordenação motora fina¹³, que é um trabalho cotidiano da educação infantil, conjugada à divisão e tem como objetivo:

- Fazer o traçado corretamente.
- Relacionar os balões às crianças igualmente.
- Observar que restou um balão após a divisão.
- Adquirir autonomia para escolher com o que fará com o balão excedente.

Outras atividades podem ser propostas. A Figura 03 a seguir ilustra que, através de uma atividade simples, o professor pode levar para sala de aula a sistemática da divisão, podendo enriquecer sua aula com diversos materiais e contextos, criando aulas divertidas e atraentes e, ao mesmo tempo, ricas e sistemáticas.

¹³ A coordenação motora fina refere-se à habilidade de coordenar movimentos musculares pequenos e precisos, geralmente envolvendo os músculos das mãos e dos dedos.



Figura 03: Atividade de relação entre balões e crianças.
Fonte: De própria autoria (2023)

Além disso, a pesquisa demonstrou que a acuidade do Sistema de Números Aproximados está correlacionada com as habilidades de divisão, desempenhando um papel de destaque na compreensão da matemática simbólica. Ter um modelo robusto de divisão mental, mesmo de forma aproximada, parece facilitar a apreensão de conceitos matemáticos abstratos. Na Revista Educação, na edição 241, datada no dia 21 de agosto de 2017, Mônica Cristina Andrade Weinstein

(2017)¹⁴ afirma que “em síntese, para que a criança avance na aprendizagem da matemática, é necessário garantir uma sólida representação numérica no ensino infantil e nos anos iniciais do ensino fundamental.”

Finalmente, o estudo enfatiza que crianças possuem habilidades matemáticas intuitivas e o quanto antes forem inseridas, mais eficiente será seu aprendizado.

¹⁴ Weinstein, M. C. A., Neurociência ajuda a ensinar matemática, *Revista Educação*.
Mônica Cristina Andrade Weinstein possui Mestrado e Doutorado em Distúrbios da Comunicação Humana pela Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP, 1998), pós-doutorado em Cognição no Departamento de Neurologia da Universidade McGill, no Canadá, e especialização em Estudos sobre o Desenvolvimento na London School of Economics (2011-2012).

3. As sequências didáticas na aprendizagem, por Antoni Zabala

O ambiente escolar é sempre desafiador, pois, possivelmente, a escola é o primeiro ambiente social em que a criança é inserida, desempenhando um papel fundamental na vida dos alunos, não sendo responsável somente pela transmissão de conteúdos formais, mas também por formar homens e mulheres dignas e aptas a desempenharem plenamente seu papel de cidadãos na sociedade.

O papel do professor, nesse contexto, é um importante ponto discutido por Antoni Zabala, em seu livro, “A prática educativa: Como ensinar”. Antoni Zabala é proveniente da Catalunha, Espanha, formou-se em Pedagogia e é escritor. Licenciado em Filosofia e Ciências da Educação, Doutor em Psicologia da Educação, atualmente é diretor do Instituto de Recursos e Investigação para a Formação, cofundador e membro do conselho e redação da revista Guix. Também é diretor do Campus Virtual da Educação da Universidade de Barcelona. Zabala é referência mundial em Educação, sendo requisito em provas para professores em concursos públicos, sendo suas contribuições indispensáveis para o atual cenário educacional.

Através de sua perspectiva, analisaremos a importância do papel do professor e a escolha das sequências didáticas para a obtenção do progresso do aluno.

3.1. Atual cenário da Educação brasileira, em Matemática

A educação brasileira passou por diversas transformações nas quais o método tradicional perdeu o enfoque. Esse método tem por características o professor estar no centro do aprendizado, como o detentor do conhecimento, transmitindo o conteúdo em forma de palestras, aulas expositivas, tendo os alunos como receptores passivos desse conhecimento. Essa proposta pedagógica foi objeto de críticas de muitos educadores brasileiros, entre eles Paulo Freire¹⁵, que definia a educação bancária como “um ato de depositar, em que os educandos são os depositários e o educador, o depositante” (Freire, 2019, p. 80).

¹⁵ FREIRE, P., *Pedagogia do oprimido*, p. 80.

Nesse método, o currículo é padronizado e uniforme para todos os alunos, considerando a sala de aula um ambiente homogêneo, onde a avaliação se baseia em provas e exames padronizados, que testam sobretudo a memorização e a reprodução do conteúdo. Os alunos desempenham um papel passivo, absorvendo informações sem ser agentes ativos na construção do seu conhecimento.

Nos últimos anos, a educação brasileira tem passado por mudanças significativas, com um crescente reconhecimento da necessidade de métodos mais inovadores e centrados no aluno. Abordagens mais construtivistas, em uma educação ativa e inclusiva, têm ganhado destaque, inclusive nos documentos, como a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018, p. 13), que norteiam a educação brasileira, nos tempos atuais.

Ao adotar esse enfoque, a BNCC indica que as decisões pedagógicas devem estar orientadas para o desenvolvimento de competências. Por meio da indicação clara do que os alunos devem “saber” (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem “saber fazer” (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho), a explicitação das competências oferece referências para o fortalecimento de ações que assegurem as aprendizagens essenciais definidas na BNCC.

Apesar da educação brasileira ter demonstrado avanços significativos, a Figura 04 revela um quadro angustiante, principalmente na disciplina de Matemática, pois mostra que muitos estudantes não possuem habilidades básicas para o exercício da cidadania, expondo-os à vulnerabilidade social e conseqüentemente às más condições de trabalho.



Figura 04: Pisa 2018 revela baixo desempenho escolar em Leitura, Matemática e Ciências no Brasil

Fonte: Ministério da Educação (2020)

Para melhor compreensão, vamos definir o que se entende por letramento matemático. De acordo com o Pisa¹⁶ (INEP, 2018, p. 100):

Letramento matemático é a capacidade de formular, empregar e interpretar a Matemática em uma série de contextos, o que inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticos para descrever, explicar e prever fenômenos. Isso ajuda os indivíduos a reconhecer o papel que a Matemática desempenha no mundo e faz com que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias.

Dentre as habilidades básicas consideradas, as quatro operações matemáticas – adição, subtração, multiplicação e divisão – têm lugar especial no letramento matemático, pois através delas podemos resolver problemas do nosso

¹⁶ INEP, *Relatório Brasil no Pisa 2018*, p. 100.

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) é um estudo comparativo internacional realizado a cada três anos pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE).

dia a dia. Geralmente, o aluno que não possui essas habilidades, pode não apresentar a proficiência adequada para executar tarefas indispensáveis para sua vida econômica e social, não havendo equidade para a promoção de oportunidades, pois dificilmente esse jovem terá as mesmas oportunidades de avançar na vida acadêmica.

Os resultados do Pisa 2018 também mostram as desigualdades entre alunos de escolas particulares e alunos das redes públicas, tendo índices ainda mais graves nas Regiões Norte e Nordeste. Fatores econômicos, culturais e sociais são associados a esse resultado, não sendo a escola a principal fonte do fracasso escolar. Contudo, o professor tem um papel fundamental na recuperação desses dados, sendo crucial a busca de estratégias por parte da escola para tentar minimizar os danos.

Segundo Zabala, “educar quer dizer formar cidadãos e cidadãs, que não estão parcelados em compartimentos estanques, em capacidades isoladas”. (1998, p. 24). Com essa afirmação, Zabala nos chama atenção para a educação integrada, ou seja, a escola tem um papel social, devendo possibilitar condições necessárias, para formar cidadãos plenos e capazes de serem inseridos na sociedade e que possam gozar de maneira equânime de seus direitos, sendo sabedores de seus deveres. Nesse contexto escolar, o professor deve, ao planejar, conhecer a diversidade encontrada em sua sala de aula, buscando as práticas educativas condizentes com a realidade e vivência de seus educandos, lembrando-se sempre que nenhum deles é um quadro branco a ser pintado.

Zabala¹⁷ (1998, p. 10) também nos escreve a respeito da importância do comprometimento do professor no processo de ensino-aprendizagem:

Um dos objetivos de qualquer bom profissional consiste em ser cada vez mais competente em seu ofício. Geralmente se consegue esta melhora profissional mediante o conhecimento e a experiência: o conhecimento das variáveis que intervêm na prática e a experiência para dominá-las. A experiência, a nossa e a dos outros professores.

Segundo o autor, o professor deve buscar atualização e conhecimento, para melhor adequar a sua prática às mudanças da sociedade, pois os alunos estão inseridos em diversos contextos culturais e sociais, fazendo da sala de aula um

¹⁷ ZABALA, A., *A prática educativa: como ensinar*, p. 10.

ambiente rico em diversidade. Portanto, o educador deve mostrar flexibilidade ao planejar, para que o que seja ensinado tenha fundamentação e objetividade. Para Zabala, planejar é um ato complexo que não está desvinculado da avaliação tendo por objetivo muito claro em sua proposta diagnosticar, para que o professor possa encontrar soluções, estratégias e conteúdos necessários para maximizar o aprendizado e sobretudo sanar as dificuldades apresentadas.

De acordo com Zabala (1998) em seu livro “A prática educativa: Como ensinar”, é importante sabermos quais conteúdos utilizar, além de sabermos diferenciá-los.

- Conteúdos procedimentais: é um conjunto de ações, com a finalidade de resolver uma tarefa, que pode ser generalizada.
- Conteúdos atitudinais: é um conjunto de valores, condutas, regras de convivência, para o exercício da cidadania.
- Conteúdos factuais: é um conjunto de conteúdos, baseados em fatos, acontecimentos reais.

Na Tabela 01, estão representados alguns exemplos desses conteúdos:

Conteúdos factuais	Conteúdos procedimentais	Conteúdos atitudinais
Dados numéricos	Resolução de Problemas	Ética
Eventos históricos	Comunicação	Empatia
Notícias	Pesquisa	Autoestima
Dados científicos	Leitura e escrita	Cidadania
Informações geográficas	Realizar operações	Responsabilidade
Documentos legais	Habilidades manuais	Solidariedade
Biografias, entre outros	Pintura, entre outros	Respeito, entre outros

Tabela 01: Exemplos de tipos de conteúdos
Fonte: De própria autoria (2023)

Quanto aos educadores, é muito importante compreender que planejar não é uma simples escolha de conteúdo. O professor deve ter intencionalidade ao fazer suas escolhas, pautando-os em: como fazer? Quando fazer? Por que fazer? Para quem fazer?

Quando respondemos a essas perguntas, podemos verificar se nossos educandos possuem proficiência necessária para adquirir o conhecimento, quais

recursos serão utilizados, quais estratégias e sobretudo a metodologia necessária para que o aluno com dificuldade também seja atingido pela prática educativa.

3.2. Sequências didáticas

Buscar possíveis soluções para as dificuldades apresentadas no atual cenário educacional brasileiro é um dos objetivos deste trabalho, visto que é papel do docente buscar estratégias para ampliar condições de aprendizado para que todos os nossos alunos alcancem os objetivos propostos.

Uma das práticas pedagógicas descritas por Zabala (2018, p. 14) são as sequências didáticas, que desempenham um papel fundamental na contextualização do conteúdo apresentado, gerando um ambiente de aprendizagem mais eficaz.

Se realizamos uma análise destas sequências buscando os elementos que as compõem, nos daremos conta de que são um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos.

Sendo assim, para a elaboração de uma sequência didática, é fundamental que haja uma avaliação dos conhecimentos prévios de cada aluno em relação ao conteúdo que será apresentado.

Além disso, os conteúdos devem ser escolhidos de modo a serem significativos e funcionais para os estudantes, apresentando aplicabilidade prática e relevante, tornando a aprendizagem mais lúdica, envolvente e útil em situações cotidianas. Cada atividade escolhida deve respeitar o nível de desenvolvimento, levando em consideração as habilidades, conhecimentos e maturação de cada aluno, devendo ser ajustada, caso seja necessário, garantindo que os objetivos propostos possam ser atingidos.

Para que os alunos possam avançar, devemos assegurar desafios que sejam alcançáveis, criando zonas de desenvolvimento proximal que sejam pertinentes ao seu nível de aprendizado, fazendo inferências necessárias para que o aluno avance em seu próprio ritmo, incentivando, assim, o crescimento intelectual.

Todavia, para que possamos compreender as intenções de Zabala, vamos tratar de uma importante contribuição da teoria interacionista desenvolvida pelo

psicólogo russo Lev Vygotsky¹⁸, que revela que há em nós habilidades inatas que estão presentes em muitos animais vertebrados, mas somente através da interação com outros seres humanos é que podemos adquirir conhecimentos mais profundos. Vygotsky (2015) introduziu o conceito fundamental da “zona de desenvolvimento proximal”, que se refere à distância entre o nível de desenvolvimento real da criança e seu potencial de desenvolvimento com a ajuda de um adulto ou colega mais competente.

A zona de desenvolvimento proximal nos fala a respeito da prontidão necessária para a aquisição de uma nova habilidade. Nesse contexto, Vygotsky destaca a importância das interações sociais, instrução e mediação no processo de aprendizado. Ele defende que a aprendizagem é um processo social e que a cultura desempenha um papel fundamental na formação do conhecimento. Portanto, é por meio da colaboração com outros indivíduos que as crianças e adultos podem internalizar informações, adquirir novas habilidades e alcançar níveis mais avançados de desenvolvimento.

Vygotsky também enfatiza a importância da linguagem no desenvolvimento cognitivo, considerando-a uma ferramenta crucial para a comunicação e a transmissão de conhecimento. Assim, a teoria interacionista de Vygotsky ressalta a interconexão entre interações sociais, linguagem e o processo de aprendizado, enfatizando que o desenvolvimento humano é fortemente influenciado pelo contexto cultural e pelas relações interpessoais.

Outra característica necessária para promover uma aprendizagem eficaz deve ser a promoção de conflitos cognitivos, incentivando os discentes a engajarem-se mentalmente, estabelecendo conexões entre os novos conteúdos e os seus conhecimentos prévios, facilitando uma compreensão mais duradoura e profunda.

Nessa escolha de conteúdo, Zabala também nos fala que as atividades devem ser motivadoras, promovendo uma atitude favorável em relação à aprendizagem, contribuindo para o desenvolvimento da autoestima, para que o aluno sinta que seu esforço está valendo a pena e que está progredindo em direção aos objetivos estabelecidos.

¹⁸Levy Vygotsky foi um pensador importante em sua área e época. Foi pioneiro no conceito de que o desenvolvimento intelectual das crianças ocorre em função das interações sociais e condições de vida.

Finalmente, o aluno deve ser incentivado a “aprender a aprender”, favorecendo a autonomia e a capacidade de gerenciar sua própria aprendizagem. Para Zabala (1998, p. 171):

Uma das conclusões da análise dos recursos didáticos e de sua utilização é a necessidade da existência de materiais curriculares diversificados que, como peças de uma construção, permitam que cada professor elabore seu projeto de intervenção específico, adaptado às necessidades de sua realidade educativa e estilo profissional. Quanto mais variados sejam os materiais, mais fácil será a elaboração de propostas singulares. Portanto, em vez de propor unidades didáticas fechadas, os projetos de materiais curriculares para os alunos têm que oferecer uma grande variedade de recursos. Recursos que possam se integrar em unidades construídas pelos próprios professores, enraizando-se nas demandas específicas de seu contexto educativo.

Os passos que devem ser seguidos pelo professor, segundo a metodologia de Zabala para o planejamento e execução de uma sequência didática, são:

- i) **Introdução:** Apresentar o tópico da sequência didática de maneira envolvente, usando estratégias que despertem o interesse mostrando a relevância do que estão prestes a aprender. Utilizar recursos visuais, áudios-visuais, sinestésicos para enriquecer a experiência.
- ii) **Desenvolvimento:** Fornecer informações e conceitos-chave de modo estruturado e organizado, utilizando métodos de ensino como: leituras, vídeos, discussões em grupo, seminários, rodas de conversas etc.
- iii) **Atividades práticas:** As atividades práticas são imprescindíveis, pois, neste momento, o aluno é capaz de colocar em prática aquilo que aprendeu. Podem ser incluídos projetos, resoluções de problemas, simulações, experiências etc.
- iv) **Avaliação:** Ao longo da sequência didática, é importante que o professor faça avaliações formativas para sondar o desenvolvimento do aluno. A avaliação diagnóstica contribui para maiores condutas a respeito da aprendizagem do aluno. Isso quer dizer que as avaliações têm papel significativo em uma sequência didática, pois é a partir dela que o professor pode buscar novas estratégias e recursos ou prosseguir com seu planejamento. As avaliações podem ser feitas através de questionários, autoavaliações, exercícios práticos, avaliações quantitativas. Inclusive, há

aplicativos como o Kahoot!¹⁹ que podem favorecer e dinamizar o ambiente de sala de aula, através de um quiz.

v) Síntese e generalização: No final da sequência, o professor deve auxiliar os alunos a generalizarem e sintetizarem o que foi aprendido. As estratégias utilizadas nos passos anteriores podem e devem ser utilizadas, mas o objetivo neste passo é o incentivo aos alunos a refletirem e analisarem o que aprenderam.

vi) Aplicação: Incentivar os alunos a aplicarem o que aprenderam no contexto real, quando for apropriado. Por exemplo, ao falar sobre alimentação saudável, fica muito mais palpável com visitas ao mercado de frutas e legumes, entrevistas com responsáveis pela merenda escolar, plantio de uma horta, entre outros. Empreender, planejar, realizar benfeitorias tornam a possibilidade maior do aluno ampliar seus conhecimentos e se desenvolver.

vii) Avaliação final: O aluno deve passar por um processo de avaliação de modo a mensurar o que foi aprendido.

viii) Reflexão: Zabala e Pólya convergem nesta etapa, pois refletir sobre o que foi aprendido é essencial também na sequência didática, visto que a reflexão gera um aprendizado efetivo e significativo ao aluno.

Um livro paradidático²⁰, por exemplo, pode se revelar um excelente pano de fundo para apoiarmos nossos conteúdos, além de trazermos uma diferenciada gama de gêneros textuais; podemos desenvolver a imaginação, favorecer a oralidade e sobretudo apoiar nossas situações-problemas em um pano de fundo, transformando o conteúdo.

Na Tabela 02 abaixo, vamos dar um exemplo de como podemos trabalhar os conteúdos mencionados acima utilizando o livro “O Patinho Feio”, de Hans Christian Andersen (1843).

¹⁹ Kahoot! é uma plataforma de aprendizado baseada em jogos, usada como tecnologia educacional em escolas e outras instituições de ensino.

²⁰ Um livro de histórias que auxilia educadores em salas de aula.

Conteúdos procedimentais	Conteúdos atitudinais	Conteúdos factuais
Interpretação de texto	Trabalho da oralidade através da emissão de opiniões sobre a moral da história	Promover pesquisas sobre os familiares e confeccionar uma árvore genealógica
Análise do vocabulário	Debater sobre a importância do respeito às diferenças	Sequência temporal dos fatos
Situações problemas baseadas no contexto da história	Confecção de cartazes para prevenção ao Bullying	Pesquisar notícias sobre patos
Classificação dos animais presentes na história	Escrever uma carta para o “Patinho feio”, demonstrando empatia	

Tabela 02: Sugestões de atividades de acordo com os tipos dos conteúdos

Fonte: De própria autoria (2023)

Como vimos acima, a sequência didática gera uma sistematização para o conhecimento, pois possibilita a interação entre as disciplinas, além de favorecer um ambiente lúdico, rico em estímulos, capazes de desenvolver habilidades e competências no educando.

4. Resolução de Problemas utilizando a metodologia de Pólya

A prática educativa na visão de Zabala deve fornecer ao educando um ambiente rico em estímulos, no qual o aluno desenvolva autonomia e proatividade. Para dialogar com essa proposta no ambiente da Matemática, elegi a pedagogia de Pólya para a resolução de problemas.

George Pólya, matemático húngaro, nasceu em 13 de dezembro de 1887, em uma família judia de origem polaca. Licenciou-se em 1905, passou por diversos cursos, como Direito, Latim, Física, Filosofia e finalmente por Matemática, concluindo seu doutorado, em 1912. Com receio de uma possível invasão alemã à Suíça, Pólya mudou-se para os Estados Unidos, aceitando o cargo de professor na Universidade de Stanford, permanecendo lá de 1942 até 1953. Pólya contribuiu significativamente para a análise combinatória, teoria dos números, análise numérica e teoria da probabilidade.

George Pólya escreveu diversos livros, dentre eles “How to solve it”, que foi traduzido para o Português e ficou assim intitulado como: “A arte de resolver problemas”, destacando-se pelo trabalho em heurística e educação matemática, considerado um marco na resolução de problemas.

É importante compreendermos que há diferenças entre exercícios e situações-problemas. Exercícios geralmente são utilizados para a fixação de conteúdos, possuindo uma linguagem direta na qual facilmente o aluno pode compreender o que é para ser feito. Já as situações-problemas são atividades mais elaboradas, em que a informação solicitada está rodeada de alegorias e pano de fundo, cabendo ao aluno concatená-las, para a extração correta das variáveis e parâmetros a serem utilizados.

No livro “A Arte de resolver problemas”, George Pólya destaca a importância do papel do professor na vida do estudante, ressaltando que a influência dos educadores é essencial no processo de ensino-aprendizado. As inferências feitas pelos professores devem ser orientadas para instigar a reflexão dos alunos a respeito do que está sendo aprendido, especialmente na solução de problemas que foram apresentados, por meio de indagações e questionamentos, a fim de estimular o desenvolvimento do raciocínio do estudante, capacitando-o para a resolução de problemas futuros.

Segundo Pólya (1945, p. 1):

O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajuda demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho.

Em seu trabalho, Pólya dividiu o processo de resolução de problemas em quatro fases. A seguir descreveremos sucintamente cada uma delas: compreensão de problema, elaboração do plano, execução do plano e retrospecto.

Fase 01: Compreensão do problema

Na fase inicial da resolução de problemas, reside a necessidade de uma compreensão absoluta do problema. Isso envolve uma análise do problema, que implica uma leitura atenta e minuciosa da situação-problema, com o objetivo de identificar e compreender todos os elementos do contexto, incluindo variáveis e parâmetros relevantes. É fundamental que os alunos compreendam claramente o que é solicitado, considerando especialmente que muitos problemas matemáticos possuem termos técnicos com conceitos específicos.

Incentivar os alunos a desenharem e a fazerem tabelas pode ser estratégias úteis para auxiliá-los na formulação de conjecturas apropriadas. Nesta fase, o professor desempenha um papel fundamental, ao guiar o aluno por meio de perguntas perspicazes, estimulando a curiosidade e o interesse do estudante. Segundo o mesmo Pólya (1945, p.2):

Há dois objetivos que o professor pode ter em vista ao dirigir a seus alunos uma indagação ou uma sugestão da lista: primeiro, auxiliá-lo a resolver o problema que lhe é apresentado; segundo, desenvolver no estudante a capacidade de resolver futuros problemas por si próprio.

Além disso, é importante contextualizar os problemas, ampliando os cenários para que haja generalização no processo de resolução, ou seja, para que o estudante utilize os mesmos passos de resolução em cenários futuros.

No que segue, vamos ilustrar a pedagogia de Pólya com a resolução de um problema destinado a alunos do 6º ano do Ensino Fundamental que estejam assimilando o conteúdo de potenciação. Seja o problema de minha autoria:

Em uma escola há jovens dispostos a fazer uma viagem de formatura. O grêmio estudantil, para tornar os dias os mais prazerosos possíveis, começou a organização do evento planejando gincanas comunitárias, esquetes, festivais de talento e muito mais.

Algumas condições para a viagem foram estabelecidas e equipes foram montadas. Para fomentar a competição, os estudantes seriam organizados em filas com seis, e cada fila teria uma cor de camisa diferente, sendo elas: vermelhas, amarelas, pretas, azuis, verdes e rosas.

A cada seis filas, os estudantes seriam encaminhados para um ônibus, pois já garantiria sua lotação. Para a satisfação do Grêmio, a divulgação do evento foi mostrando-se promissora havendo muita adesão e teve de ser contratada uma empresa aérea a cada 6 ônibus lotados.

Ao final, foram contratados: cinco aviões, três ônibus e três carros de seis lugares (lotados).

Um desafio foi lançado: quantos estudantes foram ao evento?

Primeiramente, espera-se que o aluno leia atentamente o que está sendo pedido e consiga retirar do contexto as variáveis que o farão alcançar o objetivo. Neste momento podemos incentivá-los a desenhar e construir tabelas.

Observe a Figura 05:

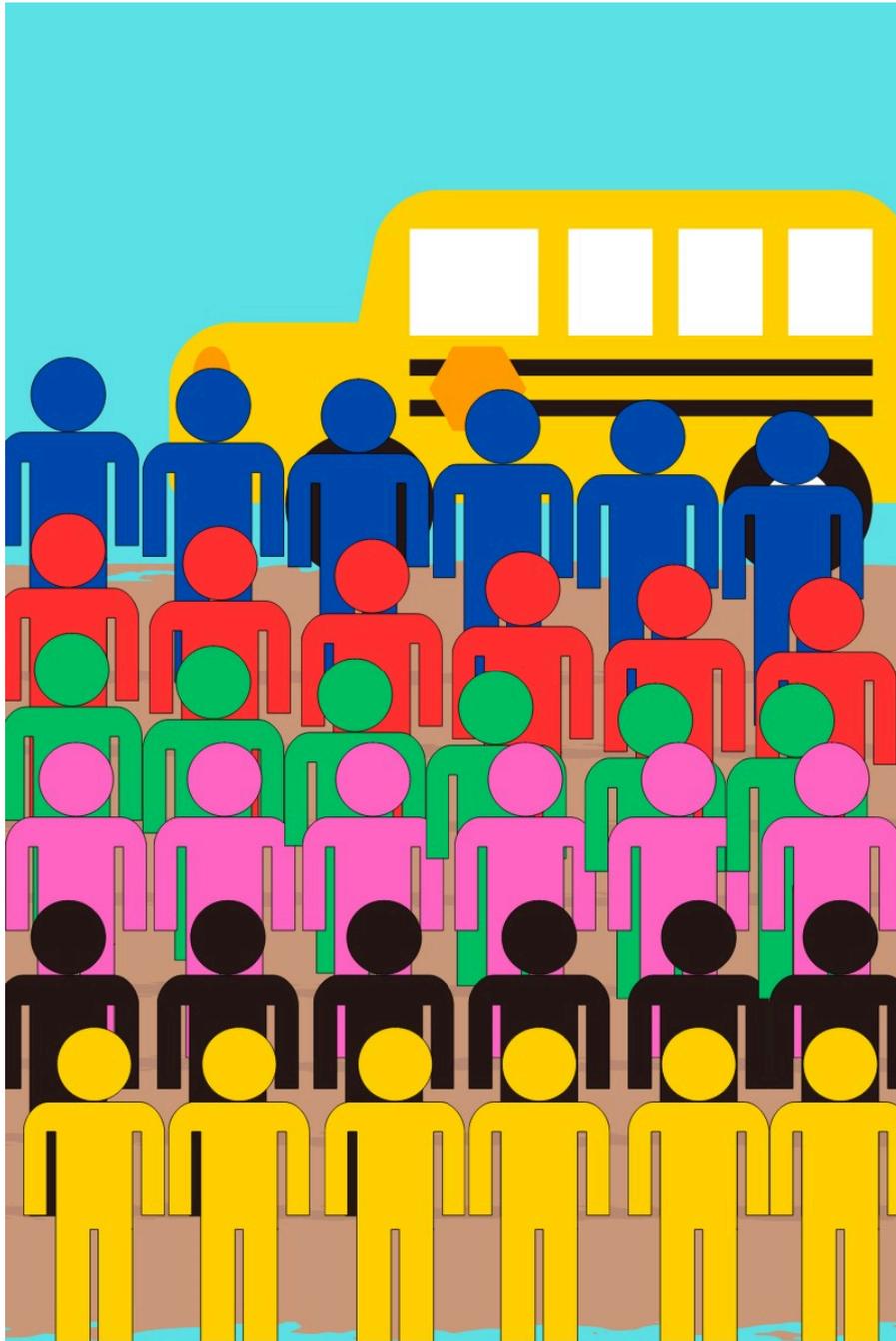


Figura 05: Possível representação visual para o problema.
Fonte: De própria autoria (2023)

A Figura 05 é uma representação adequada para ajudá-los a organizar os pensamentos. Perguntas que poderiam ser feitas aos estudantes: como podemos representar matematicamente essa imagem? Qual figura geométrica representa essa imagem? Desta forma podemos saber rapidamente quantos alunos foram acomodados nos ônibus? Quando multiplicamos inúmeras vezes o número por ele

mesmo, qual é o conceito que utilizamos? Para descobrir quantas pessoas estão no total, qual é a operação matemática que podemos utilizar?

Tendo os alunos compreendido o que foi pedido, é hora de elaborar um plano de ação, traçando as operações que serão utilizadas.

Fase 02: Elaboração de um plano

Neste ponto, o aluno deve organizar suas ideias, traçando uma melhor estratégia para atacar o problema, enunciando teoremas e fórmulas que podem ser aplicadas de modo pertinentes. É fundamental que o aprendiz organize seus pensamentos, sistematizando-os para conseguir traçar um bom plano para a resolução.

Em nosso problema, claramente podemos utilizar a ideia de potência para resolvermos a questão, mas nem sempre o aluno chegará a essa conclusão sem o auxílio do professor. De acordo com Pólya, “ para sentir a posição do estudante, o professor deve pensar na sua própria experiência, nas dificuldades e sucessos que ele mesmo encontrou ao resolver problemas” (1945, p. 6).

Ao fazermos as perguntas adequadas na fase da compreensão do problema, os estudantes foram conduzidos à ideia de multiplicação, evidenciando que a figura geométrica é um quadrado e, com isso, pôde ser construída a ideia da área e, conseqüentemente, consolidando o conhecimento de quadrado perfeito.

Por outro lado, para descobrir quantas pessoas estão no avião, é preciso que os alunos identifiquem que é preciso multiplicar novamente pela base, ou seja, teremos a quantidade de alunos na fila, elevadas ao cubo.

Neste momento, espera-se que os alunos utilizem a ideia de potência. Dado que:

- Em um ônibus cabem: 6^2 , pois são 6 filas com 6 pessoas cada. Logo, cada ônibus comporta 36 pessoas.
- Em cada avião cabem: 6^3 , pois em cada avião cabem 6 ônibus. Daí, em cada avião cabem 216 pessoas.

Fazendo uma recapitulação dos passos que os estudantes devem seguir para esta resolução de problema, cômico de cada parte de sua missão, o aluno deverá executar seu plano.

Fase 03: Execução do plano

Nesta fase, o aluno deve colocar em prática as técnicas que planejou anteriormente, pois, quando o planejamento foi realizado, é provável que o aluno siga a rota de resolução de forma mais adequada, minimizando desvios. Em particular, no problema que estamos tratando:

Passo 01: Completar a tabela abaixo, utilizando as potências.

	AVIÃO	ÔNIBUS	CARRO
Meios de transporte	5	3	3
Quantidade de Pessoas	$6^3 = 216$	$6^2 = 36$	$6^1 = 6$

Tabela 03: Quantidade de pessoas representados por meio de potência
Fonte: De própria autoria (2023)

Passo 02: Nesta etapa da resolução, devemos multiplicar a quantidade de pessoas por meio de transporte.

	AVIÃO	ÔNIBUS	CARRO
Total de pessoas por meio de transporte	1.080	108	18

Tabela 04: Quantidade de pessoas após as multiplicações
Fonte: De própria autoria (2023)

Passo 03: Basta somar as quantidades para obtermos o total de alunos que irão à viagem.

$$1.080 + 108 + 18 = 1.206 \text{ pessoas}$$

Tabela 05: Quantidade total de pessoas
Fonte: De própria autoria (2023)

i) Retrospecto

Além de verificar a adequação de sua solução, o aprendiz deve realizar uma revisão de sua solução. Isso implica não apenas verificar se a solução está correta, mas refletir sobre o processo de resolução em si, identificando lições e estratégias que podem ser aplicadas em problemas futuros, que sejam semelhantes. Pólya nos escreve (1945, p.10):

Até mesmo alunos razoavelmente bons, uma vez chegados à solução do problema e escrita a demonstração, fecham os livros e passam a outro assunto. Assim fazendo, eles perdem uma fase importante e instrutiva do trabalho da resolução. Se fizerem um retrospecto de resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas.

Em nosso exemplo, o aluno pode verificar que, mesmo que aumente ou diminua a quantidade de meios de transporte, devemos proceder da mesma maneira, seguindo os mesmos passos, levando-o à generalização do que foi aprendido.

Portanto, o método de Pólya, conforme delineado, proporciona uma estratégia sistemática e consistente na resolução de problemas, ao mesmo tempo que realça a importância do professor no desenvolvimento das habilidades analíticas dos alunos.

5. Divisão Euclidiana

A divisão euclidiana está baseada no resultado conhecido como Teorema da Divisão Euclidiana, que é conhecido como um princípio fundamental da Aritmética e Teoria dos Números.

A divisão recebe esse nome em homenagem ao grande matemático grego que viveu por volta do século III, a.C., Euclides em sua obra “Os Elementos”, que contribuiu de maneira significativa para a Matemática. Contudo, a divisão euclidiana não foi fruto de uma só pessoa, sendo um conceito que foi desenvolvido através do tempo, com a contribuição de inúmeros matemáticos.

Para maior compreensão do leitor, a seguir iremos enunciar o Teorema da Divisão Euclidiana:

Teorema: Sejam a e b dois números inteiros com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r , tais que:

$$a = bq + r, \text{ com } 0 \leq r < |b|.$$

Esse teorema nos dá um algoritmo para a divisão. Para facilidade do leitor, veja alguns exemplos:

- 1) Considere os números 83 e 6. Dado que a representação da divisão de dois números inteiros é única, utilizando o algoritmo da divisão euclidiana:

$$83 = 6 \times 13 + 5$$

- 2) Considere os números 65 e 5. Dado que a representação da divisão de dois números inteiros é única, utilizando o algoritmo da divisão euclidiana:

$$65 = 5 \times 13 + 0$$

- 3) Considere os números 856 e 7. Dado que a representação da divisão de dois números inteiros é única, utilizando o algoritmo da divisão euclidiana:

$$856 = 7 \times 122 + 2$$

- 4) Considere os números 589 e 56. Dado que a representação da divisão de dois números inteiros é única, utilizando o algoritmo da divisão euclidiana:

$$589 = 56 \times 10 + 29$$

6. Sugestão de uma situação-problema como parte de uma sequência didática

Baseada nas metodologias de Zabala e Pólya, desenvolvemos uma aplicação de suas teorias na resolução do problema a seguir, que tem por ênfase introduzir a divisão euclidiana a alunos do Ensino Fundamental dos anos iniciais. A aplicação tem por objetivo garantir que o estudante compreenda adequadamente o porquê de cada passo na aplicação do algoritmo. Primeiramente, faremos o passo a passo utilizando o material dourado para finalmente utilizar a operação da divisão com o algoritmo.

Sequência didática 01: O Sítio das Galinhas

Público-alvo²¹: estudantes do 4º ano do Ensino Fundamental.

Objetivos Gerais:

Ao final desta sequência didática, o estudante deverá ser capaz de:

- Apreciar a contação da história;
- Desenvolver a oralidade;
- Reconhecer que as pessoas são diferentes;
- Conscientizar os discentes sobre o bullying e preveni-los da prática ;
- Classificar os animais;
- Ler tabelas;
- Representar os números da tabela através do material dourado;
- Ler a tabela dada, identificando os dados corretamente;
- Reconhecer em situações-problemas as ideias de divisão;
- Compreender a Divisão Euclidiana através de material dourado;
- Sistematizar o algoritmo de Euclides;
- Utilizar o método de Pólya para a resolução do problema.

1º momento: Contação da história do livro paradidático “A Galinha Ruiva”²², de André Koogan Breitman (2004), e roda de conversa para o desenvolvimento da oralidade.

²¹ O público-alvo foi escolhido de modo a contemplar as habilidades regulamentadas pela BNCC (EF04MA02), (EF04MA05), (EF04MA07), (EF04MA27), (EF35LP11), (EF35LP15), (EF15AR04).

²² A escolha do livro deu-se por ser consonante à situação apresentada, já que no problema os alunos deveriam distribuir os ovos entre as lojas.

2º momento: Trabalhar as diferenças em uma atividade artística produzida com a foto do aluno. A atividade consiste na ideia de dividir uma foto da criança ao meio, recortando-a e colando-a em outro papel, pedindo ao aluno para desenhar o outro lado. Depois do trabalho concluído, haverá uma exposição para incentivar o respeito às diferenças.

3º momento: Explicar a classificação dos animais vertebrados, propondo a confecção de uma tabela com o nome dos animais do sítio, estimulando a torrente de palavras. Propor a seguir a leitura da tabela.

4º momento: Mostrar as peças do Material dourado, deixando que os alunos manuseiem as peças, levando-os a perceberem as quantidades, explicando sobre a base 10.

5º momento: Introduzir a situação-problema explicando que deverá ser resolvida utilizando o conceito matemático de Divisão:

A Galinha Ruiva morava no Sítio das Galinhas. Lá, havia muitos animais, inclusive uma criação de galinhas poedeiras, que era a principal fonte de subsistência daquele lugar.

O dono do sítio era conhecido como seu José Pereira e fornecia os ovos para quatro lojas.

Veja na Figura 06 a produção do mês de outubro:



Figura 06: O sítio das galinhas
Fonte: De própria autoria (2023)

Seu José armazenava 10 ovos em 1 caixa pequena e 10 caixas pequenas em uma caixa maior e as mantinha em um ambiente refrigerado.

Na 4ª semana, seu José estava com um novo ajudante que não conseguiu fazer a divisão de ovos entre as lojas. Vamos ajudá-lo, mas não podemos utilizar o algoritmo!

Para a realização de problemas, utilizaremos os passos da metodologia de Pólya (1945):

- i) Compreensão do problema: Neste momento, espera-se que os alunos compreendam que o problema consiste em dividir os ovos e para isso eles devem utilizar o material dourado e fazer as devidas trocas;
- ii) Estabelecer um plano: é importante que os alunos manuseiem o material dourado e representem o número desejado. Neste momento, pode-se organizar o espaço para que haja a distribuição das peças, como se fossem as lojas.

Observe as Figuras 07, 08 e 09 e suas respectivas legendas:

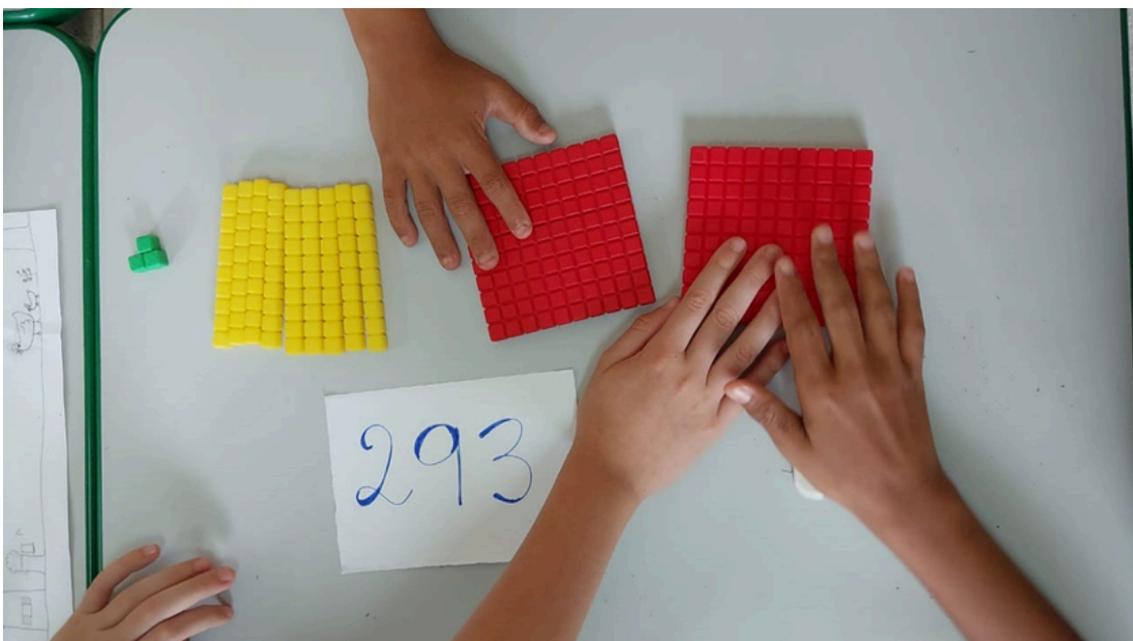


Figura 07: Representação através do material dourado do número 293, respectivo à 4ª semana.

Fonte: De própria autoria (2023)

- iii) Executar o plano: a execução dependerá de como o aluno organiza seu espaço e distribui as lojas. Não existe uma forma correta, porém devemos estabelecer e respeitar os objetivos.

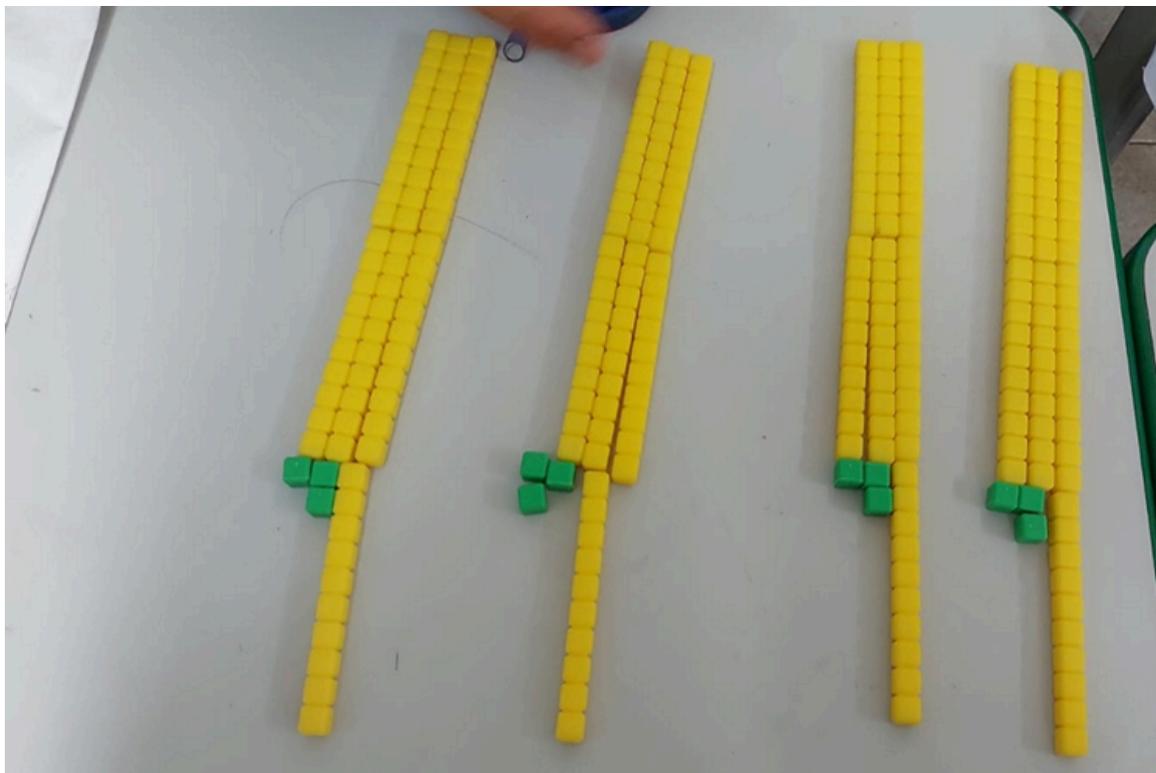


Figura 08: Observação de uma solução possível, realizada através da troca das duas placas de centena, por 20 placas de dezenas, somadas às restantes e distribuídas igualmente entre as quatro lojas.

Fonte: De própria autoria (2023)

- iv) Retrospecto: Podemos permitir que os alunos contem aos outros como chegaram ao resultado. Essa prática enriquecerá o que foi aprendido e através dela os estudantes poderão verificar se suas estratégias de resolução foram eficientes.

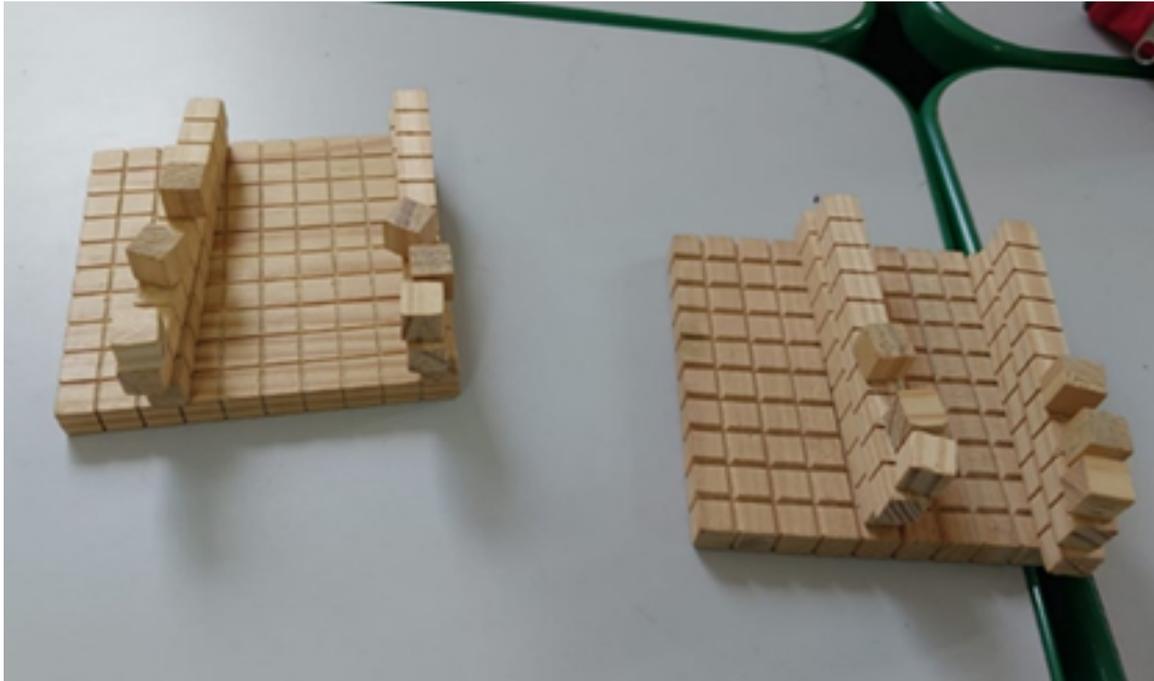


Figura 09: Observação de uma solução encontrada a partir da visualização, na qual percebemos que as placas foram divididas em quatro “lojas” e o restante foi distribuído igualmente.

Fonte: De própria autoria (2023)

Como podemos observar nas figuras acima, é possível obter várias estratégias de solução para o mesmo problema, cabendo ao aluno estabelecer as possíveis soluções a adotar. Ao promover o compartilhamento do retrospecto, cada um poderá analisar não somente sua escolha, mas a escolha do colega, permitindo uma maior reflexão a respeito do que foi pedido.

7. Produto educacional

Com base nas metodologias de Antoni Zabala e George Pólya abordadas nos capítulos anteriores e na análise da dificuldade no aprendizado de Matemática dos alunos apresentada aos educadores brasileiros por meio da avaliação do Pisa, e com a intenção de oferecer uma contribuição significativa aos meus colegas, elaborei um conjunto de atividades. Essas atividades se desenrolam por meio de uma sequência didática, utilizando como pano de fundo a narrativa das aventuras de uma família de lobos.

A escolha da fábula em torno de uma família de lobos é uma singela homenagem ao movimento escoteiro. O ramo lobinho é uma partição do método educativo do movimento, em que são aceitas crianças entre seis anos e meio e dez anos e meio. Sou escotista há quatro anos e vejo com muita alegria e entusiasmo a contribuição na educação informal do jovem. O movimento escoteiro foi fundado por Robert Baden-Powell²³ em 1907 e até hoje atrai milhares de pessoas pelo mundo inteiro.

A história de minha autoria, que é o enredo das atividades propostas, propõe ao aluno desafios e tarefas atraentes que têm por objetivos principais a contextualização e motivação através da ludicidade. Além de contemplar principalmente a operação matemática da divisão, o produto traz contextos interdisciplinares nos quais o professor vai expandindo as possibilidades de trabalhar com diversos conteúdos e inúmeras abordagens.

As habilidades contempladas da Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) são do 4º ano do Ensino Fundamental, pois nesta fase de ensino os alunos consolidam o algoritmo da divisão euclidiana.

O caderno de atividades é composto por:

- i) Uma parte teórica que descreve de maneira resumida o método de resolução de problemas estabelecido por Pólya e as sequências didáticas abordadas por Antoni Zabala.
- ii) Um manual de instruções com respostas das atividades apresentadas, assim como outras sugestões de atividades, além das habilidades contempladas pela Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018).

²³ Robert Stephenson Smyth Baden-Powell, o Barão de Gilwell, foi um tenente-general do Exército Britânico, fundador do escotismo e do Movimento Bandeirante juntamente com sua irmã Agnes Baden-Powell e a esposa Olave Baden-Powell em 1909.

- iii) Atividades prontas para serem impressas e disponibilizadas para os alunos.

7.1. Atividades relacionadas

O título escolhido para história é “Uma história de lobinhos para lobinhos”, que conta a história de uma família composta pelo Papai Dad, Mamãe Carminha, Alvim, Aninha e Popo. A Figura 10 ilustra a família:

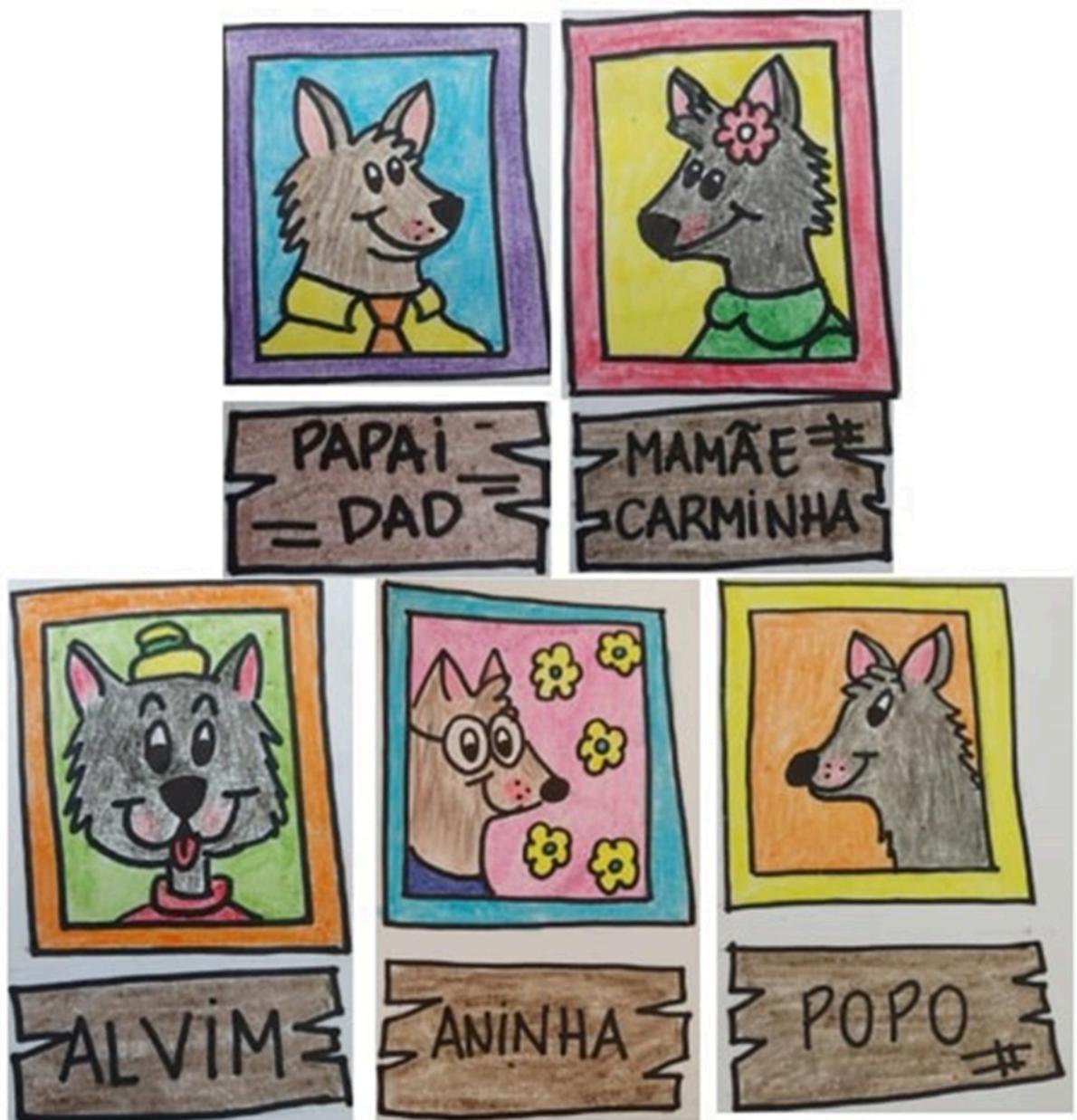


Figura 10: A família de lobos
Fonte: De própria autoria (2023)

As atividades são diversificadas e abordam as habilidades contempladas no 4º ano da BNCC (Brasil, 2018).

Como se trata de uma sequência didática, a sua duração na aplicação pode se estender por duas a seis semanas. As atividades contemplarão outros conteúdos além da operação da divisão euclidiana.

- Atividade 01: A família

Objetivo Geral: Apresentar a família. Neste momento, a intenção é agregar o valor de cada estudante à aula. Ser ouvido, ser percebido é fundamental no desenvolvimento cognitivo. *“A participação e o engajamento dos estudantes animam as discussões, tornando a aula muito mais produtiva do que aquelas em que só se ouve a voz do professor.”*, diz Felipe Bandoni (2017), professor de Ciências na Educação de Jovens e Adultos (EJA) do Colégio Santa Cruz, em São Paulo, num artigo escrito para a Revista Nova Escola.

Habilidades BNCC: (EF15AR05) Experimentar a criação em artes visuais de modo individual, coletivo e colaborativo, explorando diferentes espaços da escola e da comunidade.

- Atividade 02: Idade dos pais

Objetivo geral: Propor um desafio matemático para que o aluno siga os comandos para encontrar a idade dos pais. Os comandos são explícitos, porém estimulam o desenvolvimento do raciocínio lógico.

Habilidade BNCC: (EF04MA05) Utilizar as propriedades das operações para desenvolver estratégias de cálculo.

- Atividade 03: Uma carta para Popo

Objetivos gerais: Buscar trabalhar nos alunos empatia para com os outros, buscando desenvolver conteúdos atitudinais;

Expandir a produção textual com o gênero textual carta.

Habilidade BNCC: (EF04LP11) Planejar e produzir, com autonomia, cartas pessoais de reclamação, dentre outros gêneros do campo da vida cotidiana, de acordo com as convenções do gênero carta e com a estrutura própria desses

textos (problema, opinião, argumentos), considerando a situação comunicativa e o tema/assunto/finalidade do texto.

- Atividade 04: Confeção de panfletos

Objetivos gerais: Pesquisar sobre doenças transmitidas por micro-organismos; confeccionar panfletos para informar à população sobre a prevenção e profilaxia dessas patologias; manifestar a criatividade no projeto artístico do panfleto.

Habilidade BNCC: (EF04CI08) Propor, a partir do conhecimento das formas de transmissão de alguns micro-organismos (vírus, bactérias e protozoários), atitudes e medidas adequadas para a prevenção de doenças a eles associadas.

- Atividade 05: Popo vai à feira

Objetivos gerais: Promover uma atividade financeira; desenvolver o consumo consciente; fazer combinações de cédulas; realizar operações envolvendo pagamento e troco.

Habilidade BNCC: (EF04MA25) Resolver e elaborar problemas que envolvam situações de compra e venda e formas de pagamento, utilizando termos como troco e desconto, enfatizando o consumo ético, consciente e responsável.

- Atividade 06: Mapa do tesouro

Objetivo geral: Trabalhar a lateralidade e localização espacial.

Habilidade BNCC: (EF04MA16) Descrever deslocamentos e localização de pessoas e de objetos no espaço, por meio de malhas quadriculadas e representações como desenhos, mapas, planta baixa e croquis, empregando termos como direita e esquerda, mudanças de direção e sentido, intersecção, transversais, paralelas e perpendiculares.

- Atividade 07: O tesouro

Objetivo geral: Representar o número através da divisão euclidiana compreendendo que a divisão é a operação inversa da multiplicação.

Habilidade BNCC: (EF04MA06) Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais,

organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

- Atividade 08: O tatu e o sabiá

Objetivos gerais: Compreender que a operação matemática adequada neste caso é a divisão; utilizar estratégias para a partição, seja utilizando material concreto, seja utilizando o algoritmo da divisão.

Habilidades BNCC: (EF04MA07) Resolver e elaborar problemas de divisão cujo divisor tenha no máximo dois algarismos, envolvendo os significados de repartição equitativa e de medida, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos. (EF04LP11) Planejar e produzir, com autonomia, cartas pessoais de reclamação, dentre outros gêneros do campo da vida cotidiana, de acordo com as convenções do gênero carta e com a estrutura própria desses textos (problema, opinião, argumentos), considerando a situação comunicativa e o tema/assunto/finalidade do texto.

- Atividade 09: Adedanha

Objetivos gerais: Organizar e participar de um jogo respeitando as regras e mantendo o espírito esportivo; produzir um jogo criando manuais e regras; escrever corretamente as palavras do jogo.

Habilidades BNCC: (EF04LP01) Grafar palavras utilizando regras de correspondência fonema-grafema regulares diretas e contextuais. (EF04LP13) Identificar e reproduzir, em textos injuntivos instrucionais (instruções de jogos digitais ou impressos), a formatação própria desses textos (verbos imperativos, indicação de passos a serem seguidos) e formato específico dos textos orais ou escritos desses gêneros (lista/ apresentação de materiais e instruções/passos de jogo).

- Atividade 10: As bolas de gude

Objetivo geral: Identificar e reproduzir o padrão utilizado em cada atividade.

Habilidades BNCC: (EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural. (EF04MA06) Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

- Atividade 11: A estante de Alvim

Objetivos gerais: Conhecer o método de Pólya; desenvolver estratégias adequadas para solucionar a situação-problema.

Habilidade BNCC: (EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.

- Atividade 12: A Festa do tio Astolfo

Objetivos gerais: Proporcionar um momento lúdico e fraterno na cozinha experimental; trabalhar as porções dos ingredientes; resolver os problemas utilizando os algoritmos corretos.

Habilidades BNCC: (EF04MA05) Utilizar as propriedades das operações para desenvolver estratégias de cálculo. (EF04LP09) Ler e compreender, com autonomia, boletos, faturas e carnês, dentre outros gêneros do campo da vida cotidiana, de acordo com as convenções do gênero (campos, itens elencados, medidas de consumo, código de barras) e considerando a situação comunicativa e a finalidade do texto.

- Atividade 13: O convite

Objetivo geral: Realizar corretamente as operações, resolvendo o desafio.

(EF04MA05) Utilizar as propriedades das operações para desenvolver estratégias de cálculo.

- Atividade 14: A roupa da Aninha

Objetivo Geral: Contar corretamente o número de combinações utilizando corretamente o princípio multiplicativo.

Habilidade BNCC: (EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do

número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.

- Atividade 15: Divisão na berlinda

Objetivos gerais: Identificar os erros nas divisões apresentadas; fazer as correções necessárias explicando corretamente cada passo utilizado na divisão.

Habilidade BNCC: (EF04MA07) Resolver e elaborar problemas de divisão cujo divisor tenha no máximo dois algarismos, envolvendo os significados de repartição equitativa e de medida, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

- Atividade 16: A história da professora Jojo

Objetivo geral: Resolver adequadamente a divisão.

Habilidade BNCC: (EF04MA07) Resolver e elaborar problemas de divisão cujo divisor tenha no máximo dois algarismos, envolvendo os significados de repartição equitativa e de medida, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

- Atividade 17: A feira de Matemática

Objetivos gerais: Utilizar adequadamente a ideia de múltiplos; identificar o múltiplo comum; realizar as divisões adequadas.

Habilidades BNCC: (EF04MA07) Resolver e elaborar problemas de divisão cujo divisor tenha no máximo dois algarismos, envolvendo os significados de repartição equitativa e de medida, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos. (EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural. (EF04MA17) Associar prismas e pirâmides a suas planificações e analisar, nomear e comparar seus atributos, estabelecendo relações entre as representações planas e espaciais.

8. Conclusão

O presente trabalho realizou uma pesquisa no campo da operação matemática da divisão, aplicando o método de resolução de problemas proposta por George Pólya, atrelado à metodologia de sequências didáticas de Zabala, visando provocar no professor uma reflexão da abordagem utilizada na realização das atividades, de modo que haja uma finalidade e/ou utilidade na aquisição do conteúdo. Em outras palavras, este trabalho buscou instigar o professor a realizar um trabalho que proporcione ao aluno compreensão e prática de como utilizar a divisão em todas as situações de seu cotidiano.

George Pólya emprega na resolução de problemas uma partição por etapas para ilustrar ou até mesmo guiar o educando até a resposta desejada. Essas etapas consistem desde a compreensão do problema, elaboração e execução do plano até o retrospecto de modo a incentivar o educando a analisar não somente a resposta, mas os passos que seguiu até encontrá-la. Por outro lado, Zabala nos mostra como adequar o conteúdo de modo a torná-lo mais acessível, atraente e significativo, aliando o conteúdo desenvolvido a outras disciplinas.

O público-alvo do 4º ano do Ensino Fundamental foi escolhido, pois é nesta série que se consolida o algoritmo da divisão euclidiana, e a dissertação teve como objetivo apoiar os professores que lecionam nesse segmento, já que muitos não possuem formação acadêmica em Matemática. As habilidades da BNCC contempladas nesta etapa consolidam não somente a operação de divisão, mas também a multiplicação, adição e subtração. A todo tempo, a Base Nacional Comum Curricular aborda os conteúdos matemáticos através das habilidades de modo a incentivar os educandos à reflexão, à autonomia e à aplicação do que foi aprendido.

A abordagem lúdica no processo de aprendizagem, aliada à abordagem sistemática de Pólya, foi eleita para a minha pesquisa, pois proporciona uma estrutura sólida para a resolução de problemas, incentivando os estudantes a desenvolverem habilidades de pensamento crítico, criativo e perseverante, pois podem participar ativamente na realização das atividades elaboradas.

Diante do exposto, as sequências didáticas baseadas na metodologia de Zabala proporcionam uma abrangência maior para a escolha das atividades que

tenham um diálogo umas com as outras. O produto educativo é uma sequência didática que estabelece conexões entre o aprendizado da divisão euclidiana e contextos de situações-problemas derivadas da história: “Uma história de lobinhos para lobinhos” (Oliveira, 2024).

O produto educativo foi estruturado de modo a fornecer ao educador todo apoio necessário para aplicação do produto, ou seja, foram expostos de maneira resumida a teoria apresentada na dissertação, além de oferecer uma versão pedagógica, objetivos gerais, atividades complementares e as habilidades selecionadas para o trabalho em cada atividade proposta. O material é aplicável no 4º ano de Ensino Fundamental, podendo o professor flexibilizar as atividades, sem tirar delas a originalidade.

O planejamento elaborado neste trabalho oferece não apenas uma estrutura sólida para futuras intervenções pedagógicas, mas também destaca a importância de estratégias inovadoras e envolventes para o ensino de matemática. A combinação de métodos consagrados, como o de Pólya, com a metodologia de Zabala e a inclusão de elementos lúdicos em conjunto com a criação de um livro didático representam uma abordagem promissora para estimular o interesse e a aprendizagem efetiva dos alunos.

Por fim, este trabalho contribui para o campo da educação matemática, ressaltando a importância da integração de estratégias pedagógicas que promovam a participação ativa dos estudantes, o desenvolvimento de habilidades cognitivas e a conexão entre conceitos teóricos e práticos. Com o acréscimo da constatação sobre a intuição da divisão nas crianças e a criação do produto educacional, destaca-se a abordagem abrangente e inovadora adotada para aprimorar a qualidade do ensino e despertar o interesse duradouro dos estudantes pela matemática.

Portanto, todo trabalho desenvolvido tem a humilde pretensão de ser relevante para todos professores que principalmente não possuem especialização em Matemática tentando trazer para a pesquisa uma leitura acessível a todos aqueles dispostos a aplicarem e desenvolverem as propostas a, esperando que sejam úteis não só para a Matemática, mas para a interdisciplinaridade existente no 4º ano do Ensino Fundamental.

9. Referências

1. AABOE, Asger. **Episódios da História da Matemática**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002. ISBN: 85-85818-07-7.
2. ANDERSEN, Hans Christian. **O Patinho Feio**. 1843.
3. BANDONI, Felipe. O trabalho na Educação requer postura profissional. **Revista Nova Escola**, 17 ago. 2025. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/8351/o-trabalho-na-educacao-requer-postura-profissional>. Acesso em: 1 dez. 2023.
4. BANDONI, Felipe. Saber ouvir é a grande questão. **Revista Nova Escola**, 9 abr. 2017. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/8770/saber-ouvir-e-a-grande-questao>. Acesso em: 1 dez. 2023.
5. BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2017.
6. BREITMAN, André Koogan. **A Galinha Ruiva**. São Paulo: FTD, 2004.
7. EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora UNICAMP, 2011.
8. FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido**. São Paulo: Paz e Terra, 2019.
9. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Brasil no Pisa 2018** [recurso eletrônico]. – Brasília : Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2020, p. 185. Disponível em: https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/avaliacoes_e_exames_da_educacao_basica/relatorio_brasil_no_pisa_2018.pdf Acesso em: 15 out. 2023.
10. OLIVEIRA, Josiani Aparecida de. **Uma História de Lobinhos para Lobinhos**. Produto educacional, Rio de Janeiro: PUC-Rio, 2024.
11. PÓLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas: Um Novo Aspecto do Método Matemático**. Princeton: Princeton University Press, 1975.
12. ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos da História da Matemática**. Rio de Janeiro: Profmat/Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
13. SILVA, Ícaro do Nascimento. George Pólya. **Clube da Matemática OBMEP: Disseminando o Estudo da Matemática**, 2023. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/b_bgpolya/. Acesso em: 24 nov. 2023.
14. SUTHERLAND, Rosamund. **Ensino eficaz da Matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2009. ISBN 978-85-363-1853-0.

15. SZKUDLAREK, E.; ZHANG, H.; DEWIND, N. K.; BRANNON, E. M. Young Children Intuitively Divide Before They Recognize the Division Symbol. **Frontiers in Human Neuroscience**, Departamento de Psicologia, Universidade da Pensilvânia, Filadélfia, Estados Unidos, v. 15, p. 1-15, fev. 2022.
16. WEINSTEIN, Mônica Cristina Andrade. Neurociência ajuda a ensinar matemática. **Revista Educação**, edição 241, 21 ago. 2017.
17. ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**. Tradução de Ernani F. da F. Rosa. Revisão técnica de Nalú Farenzena. Porto Alegre: Penso, 2014. ISBN 978-85-8429-018-5.