UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Divisibilidade, uma atividade lúdica: O jogo "Avançando com o Resto".

Luís Ricardo Raphael Gaiardo

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Luís Ricardo Raphael Gaiardo

Divisibilidade, uma atividade lúdica: O jogo "Avançando com o Resto".

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *EXEMPLAR DE DEFESA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientadora: Profa. Dra. Ires Dias

USP – São Carlos
Dezembro de 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

G137d

Gaiardo, Luis Ricardo Raphael
Divisibilidade, uma atividade lúdica: O jogo "Avançando com o Resto". / Luis Ricardo Raphael Gaiardo; orientadora Ires Dias. -- São Carlos, 2023.
56 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2023.

1. Divisibilidade. 2. Jogos. I. Dias, Ires, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Luís Ricardo Raphael Gaiardo

Divisibility, a playful activity: The game "Advancing with the Rest".

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Professional Master's Program in Mathematics in National Network, for the degree of Master in Science. *EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Profa. Dra. Ires Dias

USP – São Carlos
December 2023

Este trabalho é dedicado à minha esposa, pois muitas vezes tive que deixá-la sozinha com uma criança pequena e grávida novamente.

AGRADECIMENTOS

Os agradecimentos principais são direcionados à Deus, aos meus pais, aos colegas da turma e aos mestres.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

GAIARDO, L. R. R. **Divisibilidade, uma atividade lúdica: O jogo "Avançando com o Resto".**. 2023. 56 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

A matemática é fundamental para o ser humano, ela se faz presente no dia a dia das pessoas, porém, mesmo sendo tão importante são muitos os que não gostam da mesma, talvez não goste porque não entende e através desse pensamento, buscou-se formas de tornar a matemática mais atraente para que se torne mais fácil de entender e aprender, pois o não saber pode gerar o não gostar e a partir do momento que o discente começa a entender ele automaticamente passa a gostar e se interessar cada vez mais. A inserção do lúdico foi um caminho encontrado para melhorar a aprendizagem e assim tornar a disciplina mais divertida sem perder o foco da matéria a ser ensinada. O jogo pode transformar a atividade aplicada numa atividade mais prazerosa de ser realizada e ao mesmo tempo em que se brinca, também se aprende e dessa forma o docente consegue atingir seu objetivo que é ensinar e o discente consegue aprender. A busca pela efetivação da aprendizagem é imprescindível, pois infelizmente os alunos estão a cada ano com uma defasagem descomunal e isso prejudica a sequência da disciplina que precisa ser desenvolvida com o educando, sendo assim a recuperação se torna frequente para que o aluno desenvolva o conhecimento necessário para o ciclo em que se encontra. Conhecer as quatro operações é importante para o dia a dia de uma pessoa e a dificuldade para realizar cálculos é impressionante, principalmente em relação à divisão, conhecer essas operações e seus passo a passo é imprescindível. Neste trabalho será realizado a análise da utilização do jogo avançando com o resto com a evolução da aprendizagem dos alunos e assim verificar se o lúdico pode ser eficaz como material de apoio durante a aula.

Palavras-chave: Jogo, Divisão, Resto.

ABSTRACT

GAIARDO, L. R. R. **Divisibility, a playful activity: The game "Advancing with the Rest".**. 2023. 56 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

Mathematics is fundamental for human beings, it is present in people's daily lives, however, even though it is so important, there are many who don't like it, perhaps they don't like it because they don't understand it and through this thought, ways were sought to make mathematics more attractive so that it becomes easier to understand and learn, as not knowing can lead to not liking it and from the moment the student begins to understand it, they automatically start to like it and become more and more interested. The inclusion of play was a way found to improve learning and thus make the subject more fun without losing focus on the subject to be taught. The game can transform the applied activity into a more pleasurable activity to be carried out and at the same time that one plays, one also learns and in this way the teacher can achieve his objective, which is to teach and the student can learn. The search for effective learning is essential, as unfortunately students lag behind each year enormously and this harms the sequence of the discipline that needs to be developed with the student, so recovery becomes frequent for the student to develop knowledge. necessary for the cycle you are in. Knowing the four operations is important for a person's daily life and the difficulty in carrying out calculations is impressive, especially in relation to division, knowing these operations and their step by step is essential. In this work, the analysis of the use of the game will be carried out, moving forward with the evolution of the students' learning and thus verifying whether the game can be effective as support material during the class.

Keywords: Game, Division, Rest.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

A matemática é importante em todas as áreas da vida de um ser humano, e na vida escolar do discente ela se faz presente por quase todos os dias, porém, não são muitos os que gostam dessa disciplina, a resistência em relação ao conteúdo dela é descomunal. Também não são poucos os alunos que apresentam dificuldades com as exatas, e é triste a quantidade de discentes que alegam que não gostam de cálculos.

Mas, com o passar do tempo, aula após aula, foi surgindo um questionamento e a seguinte dúvida: - *“Os alunos alegam que não gostam porque não sabem, ou por que realmente não gostam de matemática?”*

Ao parar para observar, quando os alunos conseguiam realizar as tarefas, eles sentiam júbilo por isso, mas quando não conseguiam, o desinteresse era claro e junto com o descaso vinha a famosa frase ouvida por diversas vezes: - *"Não gosto de matemática!”*. Assim criou-se a ligação de que eles, em sua grande maioria, dizem que não gostam porque não sabem. Mas descobrir isso não foi suficiente, pois, a batalha estava apenas começando, onde o grande adversário era o desinteresse, e a seguinte pergunta começou a ecoar: -*"Como atrair os alunos a prestarem atenção nas aulas para assim conseguirem começar a aprender?"*

A questão não é tão complicada, mas as vezes o novo gera um certo medo, a mudança as vezes pode ser assustadora ou simplesmente trabalhosa, mas a resposta já estava em mente, talvez modificar as aulas, torná-las mais atraentes e assim conseguir chamar a atenção dos educandos. Um método de se realizar isso é utilizando jogos, a parceria com o lúdico pode render muito sucesso educacional! Segundo Vygotsky (1989):

> O lúdico influencia enormemente o desenvolvimento da criança. Através do jogo, ela aprende a agir numa esfera cognitivista, sendo livre para determinar suas próprias ações. O brinquedo estimula a curiosidade, a iniciativa e a autoconfiança, proporcionando o desenvolvimento da linguagem, do pensamento, da concentração e da atenção. (PORTAL EDUCAÇÃO) [1]

Mas para a utilização de jogos é preciso verificar o tipo de jogo e como esse jogo vai ajudar no conhecimento do aluno, tudo tem que ter um peso educativo para valer a pena. Nada, durante uma aula, pode ser em vão, é preciso ponderar cada item no momento de preparar a aula para assim ter o melhor retorno possível em questão de aprendizagem.

Outro ponto importante, é tentar não fugir do tema a ser abordado utilizando qualquer jogo, pois ao lecionar na escola, tem-se um plano de aula a ser seguido, tem um calendário escolar e um planejamento das aulas a cumprir, então no momento de inserir um jogo para melhorar a atratividade das aulas é preciso verificar se o mesmo vai realmente ajudar no plano pedagógico, não é simplesmente aplicar qualquer atividade, é preciso pensar em um divertimento pertinente ao conteúdo que precisa ser apresentado. Jogos podem ser grandes aliados da aprendizagem, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propicia a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas. (BRASIL, 1998, p.46) [2]

Outro fator, é a questão do comportamento dos alunos diante dessa nova forma de se ensinar, sim, é preciso se preocupar com isso, hoje um dos grandes desafios em uma sala de aula, é infelizmente o mau comportamento, talvez seja esse o grande gerador do medo nos docentes diante da mudança de suas aulas. Mas acredita-se que diante de um modo diferente e divertido de ensinar, pode-se contar com a possibilidade de colaboração dos discentes.

É impressionante a dificuldade que os alunos sentem para fazer cálculos, chegam a primeira série do Ensino Médio com bastante defasagem, há uma desarmonia entre discentes e as quatro operações, algo que não deveria existir, principalmente em alunos do ensino médio, que precisam do domínio dessas operações para seguirem em frente com o conteúdo a ser realizado na atual etapa escolar. Diante da dificuldade para realizar contas, foi realizada uma pesquisa para identificar quais das quatro operações eles consideram mais difícil, constatou-se que 88% dos entrevistados, sentem mais dificuldade com a divisão e, devido a isso chegou-se à conclusão de trabalhar divisibilidade com este grupo entrevistado. Foi escolhida a primeira série do ensino médio para ser trabalhado, pois os alunos dessa etapa escolar chegam com uma defasagem descomunal em matemática. Infelizmente essa percepção da dificuldade com a disciplina não se resume ao grupo a ser trabalhado, segundo o site G1:

> Em matemática, $71,67\%$ dos alunos têm nível insuficiente de aprendizado. Desses, 23% estão no nível 0, o mais baixo da escala de proficiência. (...) a maioria dos estudantes não é capaz de resolver problemas

> com operações fundamentais com números naturais ou reconhecer o gráfico de função a partir de valores fornecidos em um texto. (FAJARDO; FOREQUE, 2018) [3]

É impressionante a quantidade de discentes que não conseguem obter um aprendizado satisfatório em relação a matemática, segundo o site G1, 7 em cada 10 alunos do ensino médio tem nível insuficiente em matemática e é imprescindível reverter tal situação, pois a matemática faz parte da vida de cada ser humano.

O objetivo deste trabalho é verificar se dificuldades com a operação matemática, em especial a divisão, podem ser sanadas ou diminuídas com a inserção do lúdico como material de apoio ao ensinar. Para isto, fizemos a leitura de diversos trabalhos sobre o assunto e a aplicação de uma atividade lúdica para analisar possível avanço de conhecimento com a mesma.

Como foi a divisão escolhida como sendo a mais difícil pelo grupo a ser trabalhado, buscou-se uma atividade propícia a esta operação matemática, devido a isso foi escolhido o jogo “Avançando com o Resto”.

Assim, no capítulo 2, devido ao jogo escolhido, apresentaremos uma introdução ao conteúdo matemático envolvido, ou seja, conceitos e propriedades de divisibilidade dos números inteiros.

O capítulo 3 traz um estudo sobre os critérios de divisibilidade, desde os mais comumente trabalhados na educação básica, até alguns pouco conhecidos, acompanhados de suas devidas demonstrações.

No capítulo 4 é feita uma análise da situação do Brasil em relação ao aprendizado matemático, com enfoque para os conhecimentos acerca da divisão e suas propriedades.

O capítulo 5 é composto pelo relato da aplicação do jogo "Avançando com o Resto"em uma sala de educação básica de uma escola pública do Estado de São Paulo. Aqui, apresentamos o jogo, suas regras, a confecção do mesmo por parte dos alunos, e relatos de como foram as atividades realizadas antes, durante e depois da aplicação do jogo.

No capítulo 6 fazemos uma análise dos resultados obtidos com o uso do jogo como recurso de aprendizagem com os alunos da sala em que o mesmo foi aplicado.

CAPÍTULO

2

DIVISIBILIDADE - NOÇÕES BÁSICAS

Dedicamos esse capítulo a apresentação da definição de divisibilidade nos números inteiros bem como as propriedades básicas que serão utilizadas no decorrer do trabalho.

Definição 1: Dados dois números inteiros a e b, diremos que *a divide b*, escrevendo $a \mid b$, quando existir um número inteiro c, tal que $b = ca$. Nesse caso, diremos também que *a é um divisor* ou *um fator de b* ou, ainda, que *b é um múltiplo de a* ou que *b é divisível por a*.

Observe que a notação $a \mid b$ não representa nenhuma operação em $\mathbb{Z}$, nem representa uma fração. Trata-se de uma sentença que diz ser verdade que existe um inteiro c tal que $b = ca$. A negação dessa sentença é representada por $a \nmid b$, significando que não existe nenhum número inteiro c tal que $b = ca$.

É fácil verificar pela definição que: $0 \mid 0$, $\pm 1 \mid 0$, $\pm 2 \mid 0$, $\pm 3 \mid 0$,...,ou seja, $a \mid 0$ para todo $a \in \mathbb{Z}$ pois existe $c = 0 \in \mathbb{Z}$ tal que $0 = 0 \cdot a$.

Também temos: $\pm 1 \mid 6$, $\pm 2 \mid 6$, $\pm 3 \mid 6$, $\pm 6 \mid 6$.

Note que: $0 \nmid 6$, $\pm 4 \nmid 6$, $\pm 5 \nmid 6$, $\pm 8 \nmid 6$.

2.1 Propriedades da Divisibilidade

A seguir, apresentamos as propriedades básicas da relação de divisibilidade.

Proposição 1*:* Para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$, temos que:

(i) $1 \mid a$, $a \mid a$ e $a \mid 0$.

(ii) $0 \mid a$ se, e somente se $a = 0$.

(iii) a divide b se, e somente se $|a|$ divide $|b|$, onde $|a|$ é o valor absoluto de a.

(iv) Se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$.

(v) Se $a \mid b$ e $b \mid a$, então $a = \pm b$.

(vi) Se $a \mid (b \pm c)$, então $a \mid b$ se, e somente se $a|c$.

Demonstração:

(i)
- $1 \mid a$, pois existe o inteiro $q = a$ tal que $a = 1q$;
- $a \mid a$, $(a \neq 0)$, pois existe o inteiro $q = 1$ tal que $a = aq$;
- $a \mid 0$, pois existe o inteiro $q = 0$ tal que $0 = aq$.

■

(ii) Suponhamos que $0 \mid a$, logo existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = c.0$, ou seja, $a = 0$. Para a recíproca basta observar que $0|0$. ■

(iii) Se a divide b, então existe c pertencente a $\mathbb{Z}$ tal que $b = ac$, o que implica dizer que exite $c \in \mathbb{Z}$ tal que $|b| = |ac| = |a||c|$, então $|c| \in \mathbb{Z}$ tal que $|b| = |c||a|$, o que implica dizer que $|a| \mid |b|$

Reciprocamente, se $|a| \mid |b|$, então existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $|b| = c|a|$.
Como $|a| = \pm a$ e $|b| = \pm b$, multiplicando por (-1), se necessário, temos que existe $d = \pm c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = da$,de maneira que $a \mid b$. ■

(iv) Se $a \mid b$ e $b \mid c$ então existem $d, e \in \mathbb{Z}$ tais que $b = da$ e $c = eb$. Substituindo o valor de b da primeira equação na outra, obtemos $c = eb = e(da) = (ed)a$, o que nos mostra que $a \mid c$. ■

(v) Se $a \mid b$ e $b \mid a$, então existem c e d em $\mathbb{Z}$, tais que $b = ca$ e $a = db$. Logo, $b = ca = c(db) = (cd)b$. Se $b = 0$, como $b \mid a$, teremos que $a = 0$ e $a = \pm b$. Se $b \neq 0$, da igualdade $b = (cd)b$ obtemos que $cd = 1$, com c e $d \in \mathbb{Z}$. Assim, $c = d = \pm 1$ e, consequentemente $a = \pm b$. ■

(vi) Suponhamos que $a \mid (b + c)$. Logo, existe $d \in \mathbb{Z}$ tal que $b + c = da$. Agora, se $a \mid b$ temos que existe $e \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ea$ e juntando as duas igualdades anteriores, temos $ea + c = da$ donde segue-se que $c = (d - e)a$, logo $a \mid c$. A prova da implicação contrária é análoga. Por outro lado, se $a \mid (b - c)$ e $a|b$, pelo caso anterior, temos que $a \mid -c$, o que implica que $a \mid c$. ■

Os itens (i) e (iii) da preposição acima nos dizem que todo número inteiros a é divisível por ± 1 e por $\pm a$.

Note também que de (i) obtemos que todo número inteiro divide 0. Assim, 0 tem infinitos divisores.

Suponha que $a \mid b$ e que $a \neq 0$. Seja $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ca$. O número inteiro c, univocamente determinado, é chamado de *quociente* de b por a e denotado por $c = \dfrac{b}{a}$.

Por exemplo, $\dfrac{0}{1} = \dfrac{0}{2} = 0$, $\dfrac{6}{1} = 6$, $\dfrac{6}{2} = 3$, $\dfrac{6}{-3} = -2$, $\dfrac{6}{3} = 2$, $\dfrac{6}{6} = 1$.

Uma observação importante é que $\dfrac{b}{a}$ só está definido em $\mathbb{Z}$ quando $a \neq 0$ e $a|b$, ou seja, a fração $\dfrac{b}{a} \in \mathbb{Z}$.

Proposição 2*:* Se $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ são tais que $a \mid b$ e $c \mid d$, então $ac \mid bd$.

Demonstração: Se $a \mid b$ e $c \mid d$, então existem $a', b' \in \mathbb{Z}$ tais que $b = a'a$ e $d = b'c$. Portanto $bd = (a'b')(ac)$, logo, $ac \mid bd$.

Em particular, se $a|b$, então $ac \mid bc$, para todo $c \in \mathbb{Z}$.

2.2 Divisão Euclideana

Sendo a e b dois números inteiros, com $b > 0$, então existem e são únicos os inteiros q e r que satisfazem às seguintes condições:

$a = bq + r$ e $0 \leqslant r < b$

Denominamos a de dividendo, b de divisor, q de quociente e r de resto.

Demonstração: Como $b > 0$ existe q satisfazendo à seguinte relação:

$bq \leqslant a < (q+1)b$

o que implica $0 \leqslant a - bq$ e $a - bq < b$. Desta forma, se definirmos $r = a - bq$, garantimos a existência de q e r.

Para demonstrar a unicidade, suponhamos a existência de outro par q_1 e r_1, obtendo:

$a = bq_1 + r_1$, com $0 \leqslant r_1 < b$.

Disto, temos $(bq+r)-(bq_1+r_1) = 0$, o que implica afirmar que $b(q-q_1) = r_1 - r$, que, por sua vez, implica dizer que $b \mid (r_1 - r)$. Mas, como $r_1 < b$ e $r < b$, temos $\mid r_1 - r \mid < b$ e, então, como $b \mid (r_1 - r)$, devemos ter $r_1 - r = 0$, o que implica em $r_1 = r$.

Sendo assim, $bq_1 = bq$, de onde obtemos que $q_1 = q$, uma vez que $b \neq 0$ ■.

2.3 Um Teorema Relevante

Para prosseguirmos com este trabalho, apresentaremos e demostraremos um teorema e uma proposição, que servem de base para um teorema que será bastante utilizado neste trabalho:

Teorema 1. Seja d o máximo divisor comum entre a e b. Então existem m e n, inteiros, tais que $d = ma + nb$.

Demonstração: Seja $\mathbb{B}$ o conjunto de todas as combinações lineares $ma+nb$, com m e n inteiros.

Escolhendo, em $\mathbb{B}$ dois números m_0 e n_0, tais que $c = m_0a + n_0b$ seja o menor *inteiro positivo* pertencente a $\mathbb{B}$, vamos provar que $c \mid a$ e $c \mid b$:

Suponhamos, inicialmente, por contradição, que $c \nmid a$. De acordo com o algoritmo de Euclides, devem existir q e r tais que $a = qc + r$, com $0 < r < c$. Sendo assim, temos que $a - qc = a - q(m_0a + n_0b) = (1 - qm_0)a + (-qn_0)b$.

Isto nos mostra que $r \in \mathbb{B}$, já que $(1 - qm_0)$ e $(-qn_0)$ são inteiros, o que é uma contradição, visto que $0 < r < c$ e c é o *menor elemento positivo* de $\mathbb{B}$.

Logo, $c \mid a$ e, *de forma análoga* pode-se provar que $c \mid b$.

Como d é um divisor comum de a e b, existem k_1 e k_2, inteiros, tais que $a = k_1d$ e $b = k_2d$ e, portanto, $c = m_0a + n_0b = m_0k_1d + n_0k_2d = d(m_0k_1 + n_0k_2)$, ou seja, $d \mid c$ e, assim, $d \leqslant c$, já que c e d são números inteiros positivos, e, como não é possível que $d < c$, já que d é o máximo divisor comum, concluímos que $d = c = m_0a + n_0b$ ■.

Proposição 1. Se a, b, c, m, n são inteiros e, também, $c \mid a$ e $c \mid b$, então, $c \mid (ma + mb)$.

Demonstração: Se $c \mid a$ e $c \mid b$, então existem inteiros k_1 e k_2 tais que $a = k_1c$ e $b = k_2c$.

Multiplicando as duas equações acima, respectivamente, por m e n, teremos $ma = mk_1c$ e $nb = nk_2c$.
Somando-se as expressões acima membro a membro obtemos $ma + nb = (mk_1 + nk_2)c$, o que nos permite afirmar que $c \mid (ma + nb)$. $\blacksquare$.

De posse do *Teorema 1* e da *Proposição 1*, podemos, agora, enunciar e demonstrar o seguinte Teorema que, como afirmado acima, será bastante utilizado neste trabalho:

Teorema 2. Se $a \mid bc$ e a e b são primos entre si, então $a \mid c$.

Demonstração: Como a e b são primos entre si, então, pelo *Teorema 1*, existem inteiros m e n tais que $ma + nb = 1$.
Multiplicando-se ambos os lados da igualdade acima por c, obtemos $mac + nbc = 1$. Mas, como $a \mid ac$ e, por hipótese, $a \mid bc$, então, pela *Proposição 1*, temos que $a \mid c$, $\blacksquare$.

CAPÍTULO

3

CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

Para entender os critérios de divisibilidade, é essencial conhecer a operação de divisão. Essa operação faz parte do nosso dia a dia, como quando saímos com os amigos e dividimos a conta do restaurante, quando fazemos uma receita de brigadeiro e dividimos nas forminhas, dividimos o salário pela quantidade de dias trabalhados, entre outras aplicações.

Na matemática, a operação de divisão é a base para a resolução de vários problemas. A fim de facilitar sua resolução existem alguns critérios com os quais podemos "cortar caminhos" para uma divisão mais rápida, já que esses critérios de divisibilidade nos ajudam a saber antecipadamente quando um número natural é divisível por um outro.

Para apresentarmos tais "caminhos", ou seja, tais critérios, precisamos saber escrever um número inteiro em sua expansão decimal.

3.1 Expansão Decimal

A *expansão numa dada base b*, onde b é um número inteiro maior que 1, fornece-nos um método para representar os números naturais.

Teorema 3. Seja b um inteiro positivo maior do que 1. Então, todo inteiro positivo n pode ser representado de maneira única da seguinte forma:

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \ldots + a_1 b + a_0,$$

onde $k \geq 0$, $a_k \neq 0$ e $0 \leq a_i < b$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Demonstração:

Para mostrar a existência, iniciamos com a divisão euclideana de n por b, obtendo um quociente q_0 e um resto r_0.
Em seguida, continuamos utilizando o algoritmo da divisão, dividimos q_0 por b, obtendo um quociente q_1 e um resto a_1, e, prosseguindo desta forma, obtemos a sequinte sequência de igualdades:

$$\begin{aligned}
n &= bq_0 + a_0, \\
q_0 &= bq_1 + q_1, \\
q_1 &= bq_2 + a_2 0 \\
q_2 &= bq_3 + a_3 0 \\
&\vdots \\
q_{k-2} &= bq_{k-1} + a_{k-1}, \\
q_{k-1} &= b \cdot 0 + a_k
\end{aligned}$$

onde $0 \leq a_j < b$, $j = 0, 1, 2, \ldots, k$.

Agora na primeira destas equações, substituímos o valor de q_0 dado na segunda. Em seguida, substituímos, nesta expressão, o valor de q_1 dado na terceira, e assim sucessivamente, obtendo:

$$\begin{aligned}
n = bq_0 + a_0 = \\
= b(bq_1 + a_1) + a_0 = \\
= b^2 q_1 + a_1 b + a_0 = \\
= b^2(bq_2 + a_2) + a_1 b + a_0 = \\
= b^3 q_2 + a_2 b^2 + a_1 b + a_0 = \\
= b^3(bq_3 + a_3) + a_2 b^2 + a_1 b + a_0 = \\
= b^4 q_3 + a_3 b^3 + a_2 b^2 + a_1 b + a_0 = \\
\vdots \\
= b^k q_{k-1} + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + _2 b^2 + a_1 b + a_0 = \\
= a_k b^k a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b + a_0.
\end{aligned}$$

Para mostrarmos a unicidade da representação denotaremos por $d_b(n)$ o número de representações de n na base b. Queremos, agora, mostrar que $d_b(n)$ é igual a 1. Como alguns dos coeficientes a_j podem ser nulos podemos supor, por exclusão de tais termos, que n possa ser representado na forma:

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_s b^s$$

onde a_k e a_s são nulos. Logo

$$n - 1 = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_s b^s - 1 =$$

$$= a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + (a_s - 1) b^s + b^s - 1 =$$

$$= a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + (a_s - 1) b^s + (b-1) \sum_{j=0}^{s-1} b^j.$$

Isto nos diz que para cada representação de n na base b é possível encontrar uma representação, na base b, para $n-1$. Logo $d_b(n) \leq d_b(n-1)$. Tal desigualdade nos diz que, para $m \geq n$, temos:

$$d_b(m) \leq d_b(m-1) \leq d_b(m-2) \leq \cdots \leq d_b(n+1) \leq d_b(n).$$

Sendo assim, como $n > 1$ e $d_b(n) \geq 1$, obtemos $1 \leq d_b(n) \leq d_b(1) = 1$.
Com base nesta última sequência das desigualdades acima obtemos que $d_b(n) = 1$, concluindo, assim, a demonstração. ■

Dessa forma temos a expansão de um número natural a na base decimal como $a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$,para algum inteiro positivo n, onde $0 \leq a_i \leq 9$ são os dígitos de a.

Por exemplo, 148 na sua forma expandida, é $148 = 8 + 4.10 + 1.10^2$.

3.2 Conhecendo Alguns Critérios de Divisibilidade

Iremos agora descrever e demonstrar alguns critérios de divisibilidade para números naturais. Alguns muito úteis e de fácil descrição e uso, outros não muito usados, pois são de memorização mais complicada, mas decidimos apresentá-los para melhor completude do conteúdo e para conhecimento de professores e alunos que possam se interessar.

Para todos os critérios apresentados, consideraremos a um número natural da forma $a = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0 = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq a_i \leq 9$, para todo $i = 0, 1, \ldots, n$.

Porém, antes de passarmos às apresentações e demonstrações dos critérios de divisibilidade selecionados, faz-se necessária a apresentação da seguinte proposição:

Proposição 2. Dado $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então existe um $k \in \mathbb{Z}$, tal que vale a equação $(a+1)^n = ak+1$.

Demonstração: Vamos demonstrar por indução sobre n.

Para $n = 1$, temos que: $(a+1)^1 = a \cdot 1 + 1$.

Como hipótese de indução, vamos considerar que a proposição $P(n) : (a+1)^n = a \cdot k + 1$ seja válida.

Desta forma, queremos demonstrar que $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$

Façamos, então:

$$(a+1)^{n+1} = (a+1)^n(a+1)^1 =$$
$$= (ak+1)(a+1) =$$
$$= a^2k + ak + a + 1 = a(ak+k+1) + 1 \blacksquare$$

3.2.1 Critério de divisibilidade por 2

Um número natural a é divisível por 2, ou seja, $2|a \Leftrightarrow 2|a_0$, ou seja, um número natural a é divisível por 2 se, e somente se, o seu algarismo da unidade a_0 é divisível por 2.

Demonstração: Note que se $2|a$ então existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $10^n a_n + 10^{n-1}a_{n-1} + ... + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0 = 2q \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 10(10^{n-1}a_n + 10^{n-2}a_{n-1} + ... + 10a_2 + a_1) + a_0 = 2q \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a_0 = 2q - 10(10^{n-1}a_n + 10^{n-2}a_{n-1} + ... + 10a_2 + a_1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a_0 = 2[q - 5(10^{n-1}a_n + 10^{n-2}a_{n-1} + ... + 10a_2 + a_1)] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a_0 = 2q'$, com $q' = [q - 5(10^{n-1}a_n + 10^{n-2}a_{n-1} + ... + 10a_2 + a_1)]$ e $q' \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2|a_0$. $\blacksquare$

Exemplo: O número 1548713984 é divisível por 2, pois o algarismo da unidade é 4 e 4 é divisível por 2. Além disso podemos escrever que $1548713984 = 2 \cdot 774356992$.

3.2.2 Critério de divisibilidade por 3

Um número é divisível por 3 se, e somente se, a soma de seus algarismos é divisível por 3, ou seja, $3|a \Leftrightarrow 3|(a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0)$.

Demonstração: Escrevendo $10 = (9+1)$ temos:

$$a = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = a_n(9+1)^n + \cdots + a_2(9+1)^2 + a_0.$$

Usando a proposição anterior, temos que existem inteiros $k_1, \cdots, k_n$ tais que

$$a = a_n(k_n 9 + 1) + \cdots + a_2(k_2 9 + 1) + a_1(9+1) + a_0 =$$

$$= 9(a_n k_n + \cdots + a_2 k_2 + a_1) + a_n + \cdots + a_2 + a_1 + a_0.$$

Na expressão acima, o termo $9(a_n k_n + \cdots + a_2 k_2 + a_1)$ é divisível por 3. Logo $3|a$ se e somente se $3|(a_n + \cdots + a_2 + a_1 + a_0)$ ■

Exemplo: O número 128715489 é divisível por 3, pois a soma de seus algarismos é $1+2+8+7+1+5+4+8+9 = 45$, que é divisível por 3. Note que $128715489 = 3 \cdot 42905163$.

3.2.3 Critério de divisibilidade por 4

Um número é divisível por 4 se, e somente se, o número formado por seus dois últimos algarismos for divisível por 4, ou seja, $4|a \Leftrightarrow 4|10a_1 + a_0$.

Demonstração: Para o número natural a escrevemos:

$$a = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 =$$

$$= 100(a_n 10^{n-2} + \cdots + a_2) + a_1 10 + a_0.$$

Como $4|100(a_n 10^{n-2} + \cdots + a_2)$, então $4|a$ sem e somente se, $4|(a_1 0 + a_0)$. ■

Exemplo: O número 46548413728 é divisível por 4, pois o número formado pelo seus dois últimos algarismos é igual a 28 que é divisível por 4. Além disso podemos escrever que $46548413728 = 4 \cdot 11637103432$.

3.2.4 Critério de divisibilidade por 5

Um número natural a é divisível por 5 se, e somente se, o seu último algarismo é também divisível por 5, isto é, se $a_0 = 0$ ou $a_0 = 5$, ou seja, $5|a \Leftrightarrow 5|a_0 = 0$ *ou* $a_0 = 5$.

Demonstração: Podemos escrever

$$a = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 =$$

$$= 10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1) + a_0.$$

Como $5|10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1)$, temos que $5|a \Leftrightarrow 5|a_0$. Como 5 é um número primo e a_0 está entre 0 e 9,temos que $a_0 = 0$ ou $a_0 = 5$. ■

Exemplo: O número 15487953045 é divisível por 5, pois o último algarismo é 5 que é divisível por 5 Além disso podemos escrever que $15487953045 = 5 \cdot 3097590609$.

3.2.5 Critério de divisibilidade por 6

Um número é divisível por 6 se, e somente se, for divisível 2 e 3 simultaneamente.

Demonstração: Nesta demonstração não utilizaremos a representação de a no sistema decimal.

Suponhamos que a seja divisível por 6. Assim, existe um $q \in \mathbb{N}$ tal que $a = 6.q$. Observe que $a = 6 \cdot q = 2 \cdot (3 \cdot q)$. Tomando $x = 3q$, temos que $a = 2x$, com $x \in \mathbb{N}$, ou seja, a é divisível por 2. Por outro lado, $a = 6 \cdot q = 3 \cdot (2 \cdot q)$. Se fizermos $y = 2 \cdot q$, então $a = 2 \cdot y$, com $y \in \mathbb{N}$, ou seja, a é divisível por 3.

Dessa maneira, se a for divisível por 6, então a será divisível por 2 e por 3.

Suponhamos, agora, que a seja divisível por 2 e por 3. Como $2|a$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a = 2.k$. Mas, note que $3 - 2 = 1$, assim $3 \cdot k - 2 \cdot k = k$, donde $3 \cdot k - a = k$. Por outro lado, existe também $q \in \mathbb{N}$ tal que $a = 3 \cdot q$, pois $3|a$. Assim, temos que $k = 3 \cdot k - a = 3 \cdot k - 3 \cdot q = 3 \cdot (k - q)$. Como $k \in \mathbb{N}$, e tomando $z = k - q$, temos $k - q \geq 0$ e $k = 3 \cdot z$, com $z \in \mathbb{N}$. Logo, $a = 2 \cdot k = 2 \cdot (3 \cdot z) = 6 \cdot z$, com $z \in \mathbb{N}$, o que garante que a é divisível por 6. Portanto, $6|a$ se e somente se $2|a$ e $3|a$. ■

Exemplo: O número 912157842 é divisível por 6, pois o último algarismo é 2 que é par, então o número é divisível por 2, e também é divisível por 3, pois a soma dos algarismos é $9+1+2+1+5+7+8+4+2 = 39$ que é divisível por 3 dessa forma o número dado é divisível por 6. Além disso podemos escrever que $912157842 = 6 \cdot 152026307$.

3.2.6 Critério de divisibilidade por 7

O número $a = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 = 10b + a_0$ é divisível por 7 se, e somente se, $b + 5 \cdot a_0$ também for divisível por 7, ou seja, se o quíntuplo do seu algarismo da unidade somado com o número formado pelos outros algarismos também for divisível por 7.

Demonstração: Supondo que $b + 5a_0$ seja múltiplo de 7, temos que existe $q \in \mathbb{N}$ tal que:

$b + 5a_0 = a_n 10^{n-1} + a_{n-1}10^{n-2} \cdots + a_2 10 + a_1 + 5a_0 = 7q$,

Então, $b = a_n 10^{n-1} + a_{n-1}10^{n-2} + \cdots + a_2 10 + a_1 = 7q - 5a_0$ (I).

Assim, $a = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = 10b + a_0$

$a = 10(a_n 10^{n-1} + a_{n-1 10^{n-2}} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) + a_0$ (II).

Substituindo (I) em (II), temos:

$a = 10(7q - 5a_0) + a_0 = 70q - 49a_0 = 7(10q - 7a_0) = 7q'$.

Supondo, agora, que a seja múltiplo de 7:

$a = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = 10b + a_0 = 7q$.

Então, $10b + a_0 + 49a_0 = 7q + 49a_0 = 7(q + 7a_0)$. Assim, $10(b + 5a_0)$ é múltiplo de 7 e, como 5 e 7 são primos entre si, obtemos que $b + 5a_0$ é múltiplo de 7, como queríamos demonstrar.

Exemplo: O número 4587919 é divisível por 7, aplicando o critério acima temos:
$4587919 \Rightarrow 458791 + 5.9 = 458836$. Perceba que ainda é dificíl de saber se esse número é divisível por 7, então continuaremos a aplicar o critério tantas vezes quantas forem necessárias para chegar a um número menor. Obtemos, então $45883 + 5.6 = 45913 \Rightarrow 4591 + 5.3 = 4606 \Rightarrow 460 + 5.6 = 490 \Rightarrow 49 + 5.0 = 49$ observe que o 49 é divisível por 7, dessa forma o número 4587919 é divisível por 7. Além disso podemos escrever que $4587919 = 7.655417$.

3.2.7 Critério de divisibilidade por 8

Um número é divisível por 8 se, e somente se, o número formado por seus três últimos algarismos for divisível por 8, ou seja, $8|a \Leftrightarrow 8 \mid 100a_2 + 10a_1 + a_0$.

Demonstração: Note que $8 \mid a \Leftrightarrow$ existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $10^n a_n + 10^{n-1}a_{n-1} + \ldots + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0 = 8q \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1000(10^{n-3}a_n + 10^{n-4}a_{n-1} + \ldots + a_3) + 100a_2 + 10a_1 + a_0 = 8q \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 100a_2 + 10a_1 + a_0 = 8q - 1000(10^{n-3}a_n + 10^{n-4}a_{n-1} + \ldots + a_3) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 100a_3 + 10a_1 + a_0 = 8[q - 125(10^{n-3}a_n + 10^{n-4}a_{n-1} + \ldots + a_3)] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 100a_2 + 10a_1 + a_0 = 8q'$, com $q' = [q - 125(10^{n-3}a_n + 10^{n-4}a_{n-1} + \ldots + a_3)]$, ou seja, se, e

somente se, $8 \mid 100a_2 + 10a_1 + a_0$. ■

Exemplo: O número 464811231568 é divisível por 8, pois o número formado pelo seus três últimos algarismos é igual a 528 que é divisível por 8, visto que $528 = 8 \cdot 66$. Além disso podemos escrever que $464811231568 = 8.58101403946$.

3.2.8 Critério de divisibilidade por 9

Um número natural a é divisível por 9 se, a soma de seus algarismos formar um número que seja divisível por 9, ou seja, $9 \mid a \Leftrightarrow 9 \mid a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0$.

Demonstração: Se $9|a$, então existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $10^n a_n + 10^{n-1}a_{n-1} + ... + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0 = 9q \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10^n a_n + 10^{n-1}a_{n-1} + ... + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0 - (a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0) = 9q - (a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (10^n - 1)a_n + (10^{n-1} - 1)a_{n-1} + ... + (10^2 - 1)a_2 + (10 - 1)a_1 = 9q - (a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1) \Leftrightarrow$

Como $9 \mid (10^n - 1)a_n + (10^{n-1} - 1)a_{n-1} + ... + (10^2 - 1)a_2 + (10 - 1)a_1$, então $9 \mid a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9 \mid (a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1)$. ■

Exemplo: O número 778145931 é divisível por 9, pois o número formado pela soma de seus algarismos é igual a $7 + 7 + 8 + 1 + 4 + 5 + 9 + 3 + 1 = 45$ que é divisível por 9, visto que $45 = 9 \cdot 5$. Além disso podemos escrever que $778145931 = 9.86460659$.

3.2.9 Critério de divisibilidade por 10

Um número natural a é divisível por 10 se, e somente se, o seu algarismo da unidade for 0, ou seja, $10 \mid a \Leftrightarrow 10 \mid a_0$.

Demonstração: Note que $10 \mid a$ se, e somente se, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $10^n a_n + 10^{n-1}a_{n-1} + ... + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0 = 10q$.

Como $a = 10k + a_0$, com $k = a_n.10^{n-1} + a_{n-1}.10^{n-2} + \cdots + a_2.10 + a_1$, $k \in \mathbb{N}$ temos que $10 \mid 10k + a_0$, o que implica que $a_0 = 0$, pois $0 \leqslant a_0 < 9$ ■

Exemplo: O número 479611589796120 é divisível por 10, pois o algarismo das unidades é zero. Além disso podemos escrever que $479611589796120 = 10 \cdot 47961158979612$.

3.2.10 Critério de divisibilidade por 11

Um número $a = a_n 10^n + a_{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$ é divisível por 11 se e somente se, $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n$ for divisível por 11.

Demonstração: Podemos escrever $a = a_0 + (11-1)a_1 + (99+1)a_2 + (1001-1)a_3 + (999+1)a_4 + (10001-1)a_5 + \cdots + (100\cdots 00\pm)^n a_n =$

$= 11[a_1 + 9a_2 + 91a_3 + 999a_4 + 9091a_5 + \cdots +] + a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \cdots + (-1)^n a_n$.

Como o primeiro termo é múltiplo de 11, para que a seja múltiplo de 11 devemos ter que a expressão $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \cdots + (-1)^n a_n$ seja múltiplo de 11. ■

Exemplo: O número 987404 é divisível por 11, pois $11 \mid 4 - 0 + 4 - 7 + 8 - 9 = 0$.

3.2.11 Critério de divisibilidade por 12

Um número é divisível por 12, se, e somente se, o número for divisível por 3 e por 4 ao mesmo tempo.

Demonstração:Queremos demonstrar que $12 \mid a$ se e somente se $3 \mid a$ e $4 \mid a$.

Se $12 \mid a$ então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a = 12k = 3 \cdot 4k$, ou seja, $3 \mid a$ e $4 \mid a$.

Por outro lado, se $3 \mid a$ e $4 \mid a$ então existem $k, k' \in \mathbb{N}$ tais que $a = 3k = 4k' = 3k' + k'$. Como 3 divide a obtemos que $3 \mid k'$ e, portanto, $12 \mid a$.

Exemplo: O número 1248784128 é divisível por 12, pois é divisivel por 3 pois a soma dos algarismos é igual a $1+2+4+8+7+8+4+1+2+8 = 45$ e $3 \mid 45$, além disso esse número é divisível por 4, pois os dois últimos algarimos são divisiveís por 4, $4 \cdot 7 = 2)$. Além disso podemos escrever que $1248784128 = 12 \cdot 104065344$.

3.2.12 Critério de divisibilidade por 13

Um número $a = 10b + a_0$, onde $b = (a_n 10^{n-1} + a_2 10^1 + a_1) + 4a_0$ é divisível por 13 se, e somente se, $b + 4a_0$ for divisível por 13, ou seja, um número natural a é divisível por 13 se, e somente se, a soma do quádruplo do algarismo da unidade somado com o número formado pelos outros algarismos, for divisível por 13.

Demonstração: Supondo que $13 \mid b + 4a_0$, ou seja, que $a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1 + 4a_0 = 13k$, multiplicando por 10 obtemos:

$a_n 10^n + \cdots + a + 210^2 + a_1 10 + 40a_0 = 130k$, então,

$a = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = 130k - 39a_0 =$

$13(10k - 3a_0)$, logo, 13 divide a.

Por outro lado, se $a = 13k$ para algum k em $\mathbb{N}$, então:

$a = 10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1) + a_0 = 13k$, somando $39a_0$ em ambos os lados obtemos:

$a + 39a_0 = 10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1) + a_0 + 39a_0 = 13k + 39a_0$

$a + 39a_0 = 10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1 + 4a_0) = 13(k + 3a_0)$.

Assim temos que 13 divide $10(b + 4a_0)$ e, como 13 e 10 são primos entre si, obtemos que $13 \mid b + 4a_0$. ■

Exemplo: O número 3055 é divisível por 13:

$13 \mid 305 + 4 \cdot 5 = 325$

$13 \mid 32 + 4 \cdot 5 = 52$

$13 \mid 5 + 4 \cdot 2 = 13$.

3.2.13 Critério de divisibilidade por 17

Um número $a = 10b + a_0$, onde $b = (a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) - 5a_0$ é divisível por 17 se, e somente se, b for divisível por 17, ou seja, um número natural a é divisível por 17 se, e somente se, o quintuplo do algarismo da unidade, subtraído do número formado pelos outros algarismos for divisível por 17.

Demonstração: Supondo que $17 \mid b - 5a_0$, ou seja, $b = (a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) - 5a_0 = 17k$. Multiplicando por 10, obtemos:

$10(b - 5a_0) = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 - 50a_0 = 170k$. Logo,

$a = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = 170k + 51a_0 = 17(10k + 3a_0)$.

Ou seja, 17 divide a.

Suponhamos agora que a seja múltiplo de 17, ou seja,

$a = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = 10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1) + a_0 = 17k$, para algum $k \in \mathbb{N}$.

Subtraindo $51a_0$ de ambos os lados obtemos:

$a - 51a_0 = 10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1) + a_0 - 51a_0 = 17k - 51a_0 =$

$= 10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1 - 5a_0) = 10(b - 5a_0) = 17(k - 3a_0)$.

Como 17 divide $a - 51a_0$, e 10 e 17 são primos entre si, obtemos que $17 \mid b - 5a_0$. ∎

Exemplo: O número 2632943 é divisível por 17, aplicando o critério acima, quantas vezes forem necessárias, temos:
$26329430263294 - 5.3$, $263294 - 15 = 263279$,
263279, $26327 - 5.9$, $26327 - 45 = 26282$,
26282, $2628 - 5.2$, $2628 - 10 = 2618$,
2618, $261 - 5.8$, $261 - 40 = 221$,
221, $22 - 5.1$, $22 - 5 = 17$.

Portanto, o número inicial é divisível por 17. Além disso podemos escrever que $2632943 = 17.154879$.

3.2.14 Critério de divisibilidade por 19

Um número $a = 10b + a_0$ é divisível por 19 se, e somente se, o número $b + 2a_0$ for divisível por 19, ou seja, um número natural a é divisível por 19 se, e somente se, o dobro do algarismo da unidade, somado ao número formado pelos outros algarismos for divisível por 19.

Demonstração: Note que $19|p$ se e somente se existe $q \in \mathbb{N}$ tal que

$a = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + ... + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0 = 19q.$

Somando $19a_0$ em ambos os lados da igualdade, obtemos:

$10(b + 2a_0) = 19(q + a_0).$

Como 10 e 19 são primos entre si, temos que $19 \mid b + 2a_0$.

Por outro lado, se $19 \mid b + 2a_0$, então $19 \mid 10(b + 2a_0)$, ou seja, $19 \mid (a + 19a_0)$ e, consequentemente, $19 \mid a. \blacksquare$.

Exemplo: O número 6817124 é divisível por 19, aplicando o critério acima várias vezes temos:
$6817124 = 681712 + 2.4 = 681712 + 8 = 681720 =$
$681720 = 68172 + 2.0 = 68172 + 0 = 68172$
$68172 = 6817 + 2.2 = 6817 + 4 = 6821$
$6821 = 682 + 2.1 = 682 + 2 = 684$
$684 = 68 + 2.4 = 68 + 8 = 76.$

Portanto, como $19 \mid 76$, $(76 = 19.4)$, temos que $19 \mid 6817124$. Além disso podemos escrever que $6817124 = 19.358796$.

3.2.15 Critério de divisibilidade por 23

Um número $a = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = 10b + a_0$ é divisível por 23 se, e somente se, $b + 7a_0$ for divisível por 23, ou seja, um número natural p é divisível por 23 se, e somente se, o héptuplo (7 vezes) o algarismo da unidade, somado ao número formado pelos outros algarismos, for um número divisível por 23.

Demonstração: Suponha que $23 \mid b + 7a_0$,ou seja, $b + 7a_0 = 23k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Multiplicando por 10 em ambos os lados da igualdade, temos:

$10(b+7a_0) = 230k$, ou seja, $a+69a_0 = 230k$.

Assim, $a = 23(10k-3a_0)$ e, consequentemente, $23 \mid a$.

Por outro lado, se $23 \mid a$, então: $10b+a_0 = 23k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Somando $69a_0$ em ambos os lados da igualdade, obtemos:

$a+69a_0 = 10(b+7a_0) = 23(k+3a_0)$.

Como 10 e 23 são primos entre si, temos que $23 \mid b+7a_0$.■

Exemplo: O número 1122285 é divisível por 23, aplicando o critério acima quantas vezes forem necessárias, obtemos:
$1122285 = 112228+7.5 = 112228+35 = 112263$
$112263 = 11226+7.3 = 11226+21 = 11247$
$11247 = 1124+7.7 = 1124+49 = 1173$
$1173 = 117+7.3 = 117+21 = 138$
$138 = 13+7.8 = 13+56 = 69$.

O que mostra que o número dado é divisível por 23. Além disso podemos escrever que $1122285 = 23.48795$.

3.2.16 Critério de divisibilidade por 29

Um número $a_n = a_n 10^n + \cdots + \_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 = 10b + a_0$ é divisível por 29 se, e somente se, o número $b+3a_0$ for divisível por 29, ou seja, um número natural a é divisível por 29 se, e somente se, o triplo do algarismo da unidade, somado ao número formado pelos outros algarismos, for um número divisível por 29.

Demonstração: Se $29 \mid b+3a_0$, ou seja, $b+3a_0 = 29k$ para algum $k \in \mathbb{N}$, multiplicando os dois lados da igualdade por 10, temos $a+29a_0 = 290k$. Logo, $a = 29(10k-a_0)$, ou seja, $29 \mid a$

Por outro lado, se $a = 29k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, $10b+a_0 = 29k$. Somando $29a_0$ em ambos os lados da igualdade, obtemos:

$a = 10(b+3a_0) = 29(k+a_0)$.

Como 10 e 29 são primos entre si, obtemos que $29 \mid b+3a_0$.■

Exemplo: O número 1414098 é divisível por 29, aplicando o critério acima quantas vezes forem necessárias, obtemos:
$1414098 = 141409+3.8 = 141409+24 = 141433$
$141433 = 14143+3.3 = 14143+9 = 14152$
$14152 = 1415+3.2 = 1415+6 = 1421$
$1421 = 142+3.1 = 142+3 = 145$
$145 = 14+3.5 = 14+15 = 29$

Sendo assim, podemos afirmar que $29 \mid 1414098$. Além disso podemos escrever que $1414098 = 29.48762$.

3.2.17 Critério de divisibilidade por 31

O número $a = a_n 10^n + \cdots + \_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = 10b + a_0$ é divisível por 31 se, e somente se, o número $b-3a_0$ for divisível por 31, ou seja, um número natural a é divisível por 31 se, e somente se, o triplo do algarismo da unidade, subtraído do número formado pelos outros algarismos, for um número divisível por 31.

Demonstração: Se $31 \mid b-3a_0$, ou seja $b-3a_0 = 31k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, multiplicando ambos os lados da igualdade por 10 obtemos:

$a - 30a_0 = 310k.$

Logo, $a = 31(10k+a_0)$, ou seja, 31 divide a.

Por outro lado, se $a = 31k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então $10b + a_0 = 31k$, para algum $k \in \mathbb{N}$.

Subtraindo $31a_0$ em ambos os lados da igualdade, obtemos:

$10b + a_0 - 31a_0 = 31k - 31a_0 = 10(b-3a_0) = 31(k-a_0).$

Como 10 e 31 são primos entre si, obtemos que 31 divide $b-3a_0$■.

Exemplo: O número 1140459 é divisível por 31. Aplicando o critério acima quantas vezes forem

necessárias, obtemos:
$1140459 = 114045 - 3.9 = 114045 - 27 = 114018 =$
$114018 = 11401 - 3.8 = 11401 - 24 = 11377$
$11377 = 1137 - 3.7 = 1137 - 21 = 1116$
$1116 = 111 - 3.6 = 111 - 18 = 93.$

Desta forma, podemos afirmar que o número 1140459 é divisível por 31. Além disso podemos escrever que $1140459 = 31.36789$.

3.2.18 Critério de divisibilidade por 37

Escrevendo $a = 10b + a_0$, como nos critérios acima, temos que $37 \mid a$ se, e somente se $37 \mid b - 11a_0$, ou seja, um número natural a é divisível por 37 se, e somente se, o algarismo da unidade multiplicado por -11, e somado ao número formado pelos outros algarismos, for um número divisível por 37.

Demonstração: Se $37 \mid b - 11a_0$, ou seja $b - 11a_0 = 37k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, multiplicando ambos os lados da igualdade por 10, obtemos:

$a - 111a_0 = 370k$. Logo, $a = 37(10k + 3a_0)$, ou seja, 37 divide a.

Por outro lado, se $a = 37k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, temos $10b + a_0 = 37k$ e, subtraindo $111a_0$ em ambos os lados da igualdade, obtemos $10(b - 11a_0) = 37(k - 3a_0)$.

Como 10 e 37 são primos entre si, obtemos que 37 divide $b - 11a_0$. ■

Exemplo: O número 11053602 é divisível por 37, aplicando o critério acima quantas vezes forem necessárias, obtemos:
$11053602 = 1105360 - 11.2 = 1105360 - 22 = 1105338$
$1105338 = 110533 - 11.8 = 110533 - 88 = 110445$
$110445 = 11044 - 11.5 = 11044 - 55 = 10989$
$10989 = 1098 - 11.9 = 1098 - 99 = 999.$

Como 999 é divisível por $37(999 = 37.27)$, podemos afirmar que 11053602 é divisível por 37. Além disso podemos escrever que $11053602 = 37.298746$.

3.2.19 Critério de divisibilidade por 41

Escrevendo $a = 10b + a_0$, como nos critérios anteriores, temos que $41 \mid a$ se, e somente se $41|b - 4a_0$, ou seja, um número natural a é divisível por 41 se, e somente se, o algarismo da unidade multiplicado por -4 e somado ao número formado pelos outros algarismos, for um número divisível por 41.

Demonstração: Se $41|b - 4a_0$ ou seja, $b - 4a_0 = 41k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, multiplicando ambos os lados da igualdade por 10, obtemos $a - 40a_0 = 410k$. Logo, $a = 41(10k - a_0)$, ou seja, 41 divide a.

Por outro lado, se $a = 41k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então $10b + a_0 = 41k$ e, subtraindo $41a_0$ de ambos os lados da igualdade, obtemos $10(b - 4a_0) = 41(k - a_0)$. Como 10 e 41 são primos entre si, obtemos que $41 \mid b - 4a_0$. ■

Exemplo: O número 9714827 é divisível por 41. Aplicando o critério acima quantas vezes forem necessárias, obtemos:
$9714827 = 971482 - 4.7 = 971482 - 28 = 971454$
$9714827 = 971482 - 4.7 = 971482 - 28 = 971454$
$971454 = 97145 - 4.4 = 97145 - 16 = 97129$
$97129 = 9712 - 4.9 = 9712 - 36 = 9676$
$9676 = 967 - 4.6 = 967 - 24 = 943$
$943 = 94 - 4.3 = 94 - 12 = 82.$

Como 82 é divisível por $41(82 = 41.2)$, podemos afirmar que 9714827 é divisível por 41. Além disso podemos escrever que $9714827 = 41.236947$.

CAPÍTULO

4

APLICAÇÃO DA ATIVIDADE E DO JOGO

Com a intenção de verificar se a atividade lúdica pode realmente ajudar a melhorar o conhecimento, foi trabalhado o jogo Avançando com o Resto, com o primeiro ano do ensino médio.

4.1 Confecção do Jogo

Inicialmente, numa aula dialogada, os alunos foram informados que, nas aulas seguintes, iriam trabalhar de maneira diferenciada, por meio de um jogo e que, para isso, eles deveriam se organizar em grupos de 4 alunos para a próxima aula. Foram indicados os materiais que os grupos deveriam providenciar e se organizarem para que cada aluno trouxesse o que pudesse para colaborar com o grupo.

Chegando na aula seguinte, os alunos, em sua maioria, já tinham se organizado nos grupos solicitados, de acordo com afinidade, sendo necessários apenas alguns ajustes com alunos que não estavam presentes na aula anterior.

Feito isso, foi apresentado o jogo, que consiste em um tabuleiro, dois dados de 6 faces e quatro marcadores no formato de fichas, e os alunos foram orientados a reproduzí-lo em suas cartolinas. Essa confecção durou uma aula de 50 minutos. Ao final da aula, os alunos foram orientados a trazer os tabuleiros na aula seguinte, onde conheceriam as regras do jogo e poderiam começar a jogá-lo.

A seguir, algumas imagens, obtidas em sala de aula, da confecção do jogo:

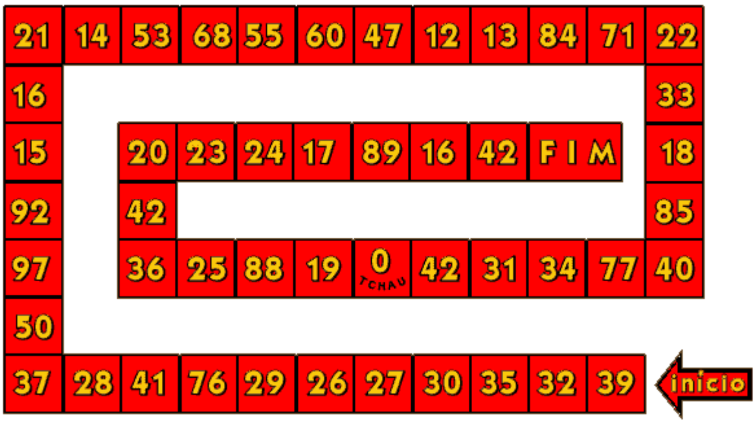


Figura 1 – Tabuleiro do jogo "Avançando com o Resto"

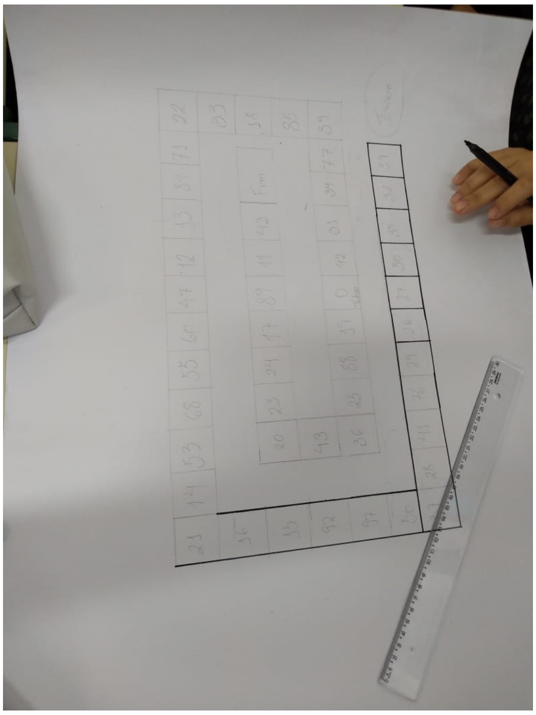


Figura 2 – Construção do jogo

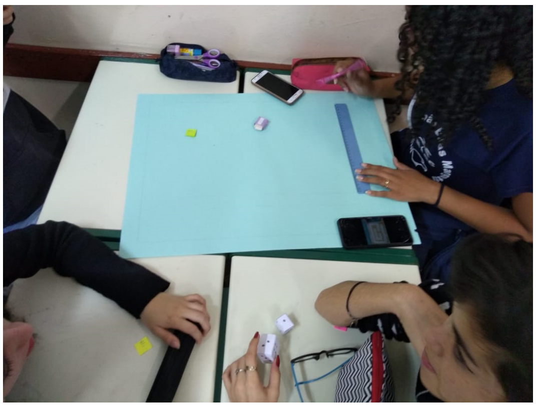


Figura 3 – Alunos construindo o jogo

Figura 4 – Alunos construindo o jogo

Figura 5 – Construção do jogo pelos alunos

4.2 As Regras do Jogo

Os materiais utilizados por grupo foram: um tabuleiro apropriado, dois dados e fichas de jogos para marcação no tabuleiro de cada equipe, papel e caneta para registrar as contas realizadas por cada jogador.

Cada grupo reproduziu seu próprio tabuleiro.

1. Os jogadores alternam as jogadas. A ordem dos jogadores deve ser combinada no início do jogo. Cada jogador, escolhe um marcador e inicia o jogo com o dividendo 39 (número da primeira casa) e procedendo como indicado a seguir.

2. Cada jogador, na sua vez, joga os dados, soma os pontos obtidos, e efetua uma divisão onde o dividendo é o número da casa onde seu marcador se encontra, e o divisor é a soma obtida no jogo dos dados. Em seguida, movimenta seu marcador para frente tantas casas quanto o resto da divisão efetuada.

3. O jogo prossegue com o jogador seguinte, na ordem combinada.

4. O jogador que, na sua vez, efetuar um cálculo errado e o erro for denunciado por um dos oponentes, perde a sua vez de jogar na próxima rodada, e o marcador permanece na

posição, sem avançar.

5. Ganha o jogador que primeiro alcançar a casa com *FIM*.

6. Para alcançar a casa marcada com fim, o jogador deve obter o número exato de resto que corresponde ao número de casas que faltam até a casa com fim, sem ultrapassá-la. Se houver excesso, após avançar para a casa com fim, deve retroceder o número de casas que excede o movimento necessário.

4.3 Atividade Preparatória

Para averiguar essa possível melhora no desempenho escolar, foi aplicada uma atividade com dez questões de múltipla escolha e abertas pertinente a divisibilidade antes da aplicação do jogo e após foi aplicada a mesma atividade para verificar o possível progresso.

A atividade aplicada antes do jogo foi realizada por cada aluno individualmente.

Segue o questionário aplicado aos alunos:

1. Roberto e João são amigos de infância e, sempre que podem, saem para pedalar juntos. Um dia, empolgados com a ideia de saberem mais sobre o desempenho da dupla, resolveram cronometrar o tempo que gastavam andando de bicicleta. Para tanto, decidiram pedalar numa pista circular, próxima a casa deles. Constataram, então, que Roberto dava uma volta completa em 24 segundos, enquanto João demorava 28 segundos para fazer o mesmo percurso. Diante disso, João questionou: - *Se sairmos juntos de um mesmo local e no mesmo momento, em quanto tempo voltaremos a nos encontrar, pela primeira vez, neste mesmo ponto de largada?*

2. Verifique se o número 152489476250 é divisível por 6.

3. Uma pessoa tem massa corporal de 167 kg. Sob orientação de um nutricionista, submeteu-se a um regime alimentar, em que se projeta que a perda de quilos mensais seja inferior a 5 kg. Após iniciar o regime, observou-se, nos três primeiros meses, uma perda de 4 kg por mês, e nos quatro meses seguintes, uma perda mensal de 3 kg. Daí em diante, segundo as recomendações do nutricionista, deveria haver uma perda mensal fixa em cada um dos meses subsequentes, objetivando alcançar a massa corporal de 71 kg ao final do regime. Segundo as projeções e recomendações do nutricionista, para alcançar seu objetivo, a duração mínima, em mês, que essa pessoa deverá manter o seu regime será de:

   a) 15

b) 20

c) 21

d) 22

e) 25

4. Usando a capacidade máxima de carga do caminhão de uma loja de materiais de construção, é possível levar 60 sacos de cimento, ou 90 sacos de cal, ou 120 latas de areia. No pedido de um cliente, foi solicitada a entrega de 15 sacos de cimento, 30 sacos de cal e a maior quantidade de latas de areia que fosse possível transportar, atingindo a capacidade máxima de carga do caminhão. Nessas condições, qual a quantidade máxima de latas de areia que poderão ser enviadas ao cliente?

   a) 30

   b) 40

   c) 50

   d) 80

   e) 90

5. Alguns automóveis estão estacionados na rua. Se você contar as rodas dos automóveis, o resultado pode ser 42? Pode ser 72? Por quê?

6. Escreva os 5 primeiros múltiplos comuns de 8 e de 12.

7. Um serralheiro precisa cortar duas barras de ferro, uma com 180 centímetros de comprimento e outra com 150 centímetros de comprimento, e em pequenos pedaços, todos do mesmo tamanho e do maior comprimento possível. Qual deve ser o comprimento de cada pedaço?

8. Dadas as afirmativas:

   I - *Se um número termina em zero e a soma dos seus algarismos é múltiplo de* 3*, então ele é divisível simultaneamente por* 2*,* 3 *e* 5*.*

   II - *Não existe número par divisível por* 2*.*

   III - *O número* 3765 *é divisível por* 15*.*

   É correto dizer que:

   a) Somente I e III são verdadeiras

   b) I, II e III são falsas

   c) Somente III é verdadeira

d) Somente I e II são verdadeiras

e) I, II e III são verdadeiras

9. Na fila da bilheteria de um teatro há menos de 50 pessoas. Contando essas pessoas de 6 em 6 sobram 5. Contando de 7 em 7 sobram 5. Quantas pessoas estão na fila nesse momento?

10. No alto da torre de uma emissora de televisão, duas luzes “piscam” com frequências diferentes. A primeira “pisca” 15 vezes por minuto e a segunda “pisca” 10 vezes por minuto. Se num certo instante, as luzes piscam simultaneamente, após quantos segundos elas voltarão a “piscar simultaneamente”?

4.4 Aplicando o Jogo

Na aplicação do jogo, foram criados sete grupos de cinco alunos, na qual trabalhar em grupo também contribui em outras áreas de conhecimento, segundo Parâmetros Curriculares Nacionais:

> "A participação em jogos de grupo também representa uma conquista cognitiva, emocional, moral e social para o estudante e um estímulo para o desenvolvimento de sua competência matemática. Além de ser um objeto sociocultural em que a Matemática está presente, o jogo é uma atividade natural no desenvolvimento dos processos psicológicos básicos; supõe um fazer sem obrigação externa e imposta, embora demande exigências, normas e controle. (BRASIL, 1998, p.47)."

Sendo assim, após a construção dos tabuleiros por parte dos grupos, o jogo foi iniciado, como pode ser visto nas imagens abaixo:

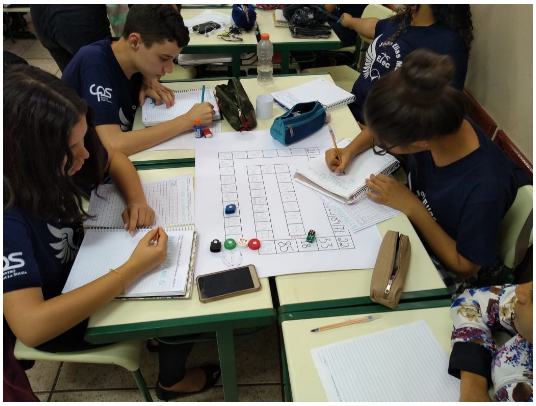


Figura 6 – Alunos jogando

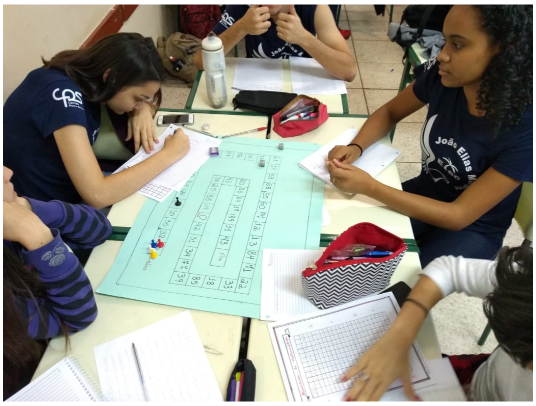


Figura 7 – Alunos jogando

Figura 8 – Alunos jogando

Junto com o jogo foi apresentado um questionário sobre divisibilidade. Ele foi realizado pelos alunos com o auxilio do professor, depois de terem jogado. Após a aplicação do lúdico foi aplicado novamente a atividade que os alunos realizaram antes, para assim conseguir verificar se houve avanço ou não na aprendizagem. Percebeu-se que o jogo animou bastante os discentes, o interesse se tornou bem maior e embora a dificuldade existisse era driblada com mais facilidade, o lúdico abre um leque de possibilidades para o crescimento e conhecimento do aluno.

Segundo Miranda (2001),

> mediante o jogo didático, vários objetivos podem ser atingidos, relacionados à cognição (desenvolvimento da inteligência e da personalidade, fundamentais para a construção de conhecimentos); afeição (desenvolvimento da sensibilidade e da estima e atuação no sentido de estreitar laços de amizade e afetividade); socialização (simulação de vida em grupo); motivação (envolvimento da ação, do desfio e mobilização da curiosidade) e criatividade.(CAMPOS, BORTOLOTO, FELÍCIO)

Sem dúvidas o jogo didático é um grande aliado para a educação, sendo bem planejado pode trazer grandes frutos para a aprendizagem.

CAPÍTULO 5

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Na primeira aplicação da atividade estavam presentes 33 alunos, e na segunda vez em que foi aplicada a lista de exercícios estavam presentes 31 alunos. Na primeira aplicação, antes da realização do jogo, a média da nota da sala foi deplorável, os alunos obtiveram média $2,18$. Depois da aplicação da atividade, aplicou-se o jogo, foi bem interessante pois, analisou-se um interesse maior em aprender em relação as aulas convencionais, houve por parte dos alunos questionamentos relacionadas ao jogo, embora os discentes tenham se mostrados bem animados, infelizmente tiveram bastante dificuldade em realizar as divisões.

O maior objetivo do jogo, que é trabalhar divisões exatas e inexatas, principalmente quando o dividendo possuía dois algarismos, dando atenção a essa dificuldade deles se trabalhou novamente a divisão com mais de um algarismo na chave, outra parte que pesou bastante foi com a operação inversa da divisão, a multiplicação, peça chave no momento de realizar as contas, percebeu-se grande dificuldade dos alunos com a tabuada, em especial, as tabuadas do seis, sete e oito.

Foi-se instigando os alunos a pensarem sobre a divisibilidade, na qual, os discentes começaram a fazer colocações pertinentes ao conteúdo trabalhado. Perceberam que quando estavam na casa do 60 ou do 30 dificilmente se deslocavam, pois ambos tem bastante divisores, também notaram que os números 17, 19, 23, 31, 41, 43, e 71 não tinham divisores, pois nenhuma soma adquirida com os dados satisfaziam. Compreenderam também que todos os pares eram divisíveis por 2, e que os números primos tem apenas dois divisores, o 1 e o próprio número, repararam que o número 2 não era divisor de nenhum número ímpar.

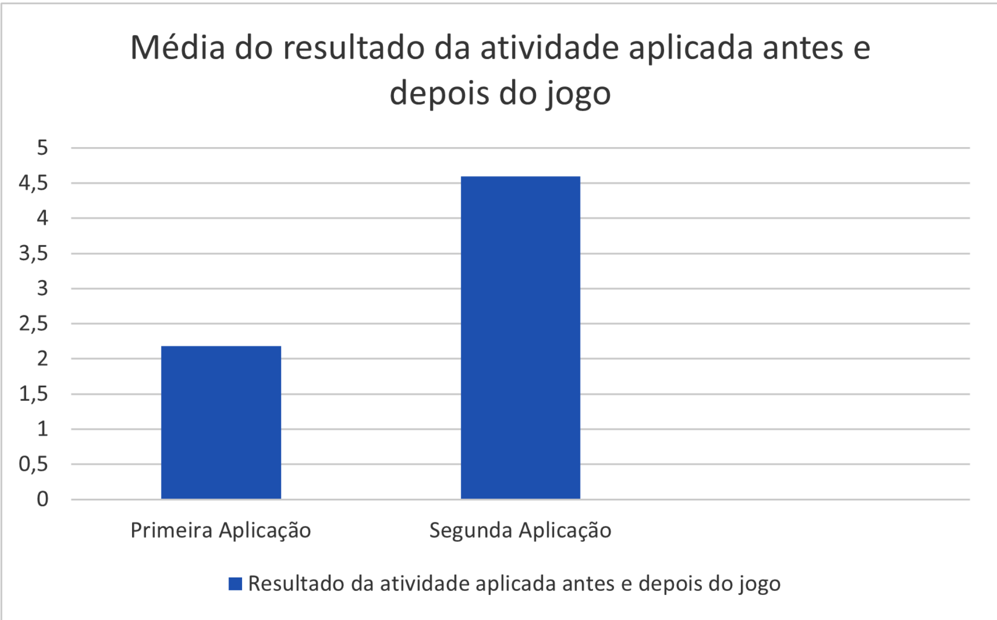
Após a aplicação do jogo, foi novamente aplicada a atividade, e desta vez a média da sala passou para $4,6$. Houve de certa forma uma melhora, na qual a média subiu $2,42$, mas ainda não se pode considerar o suficiente, porém de forma alguma pode-se descartar esse avanço, onde com a aplicação do jogo conseguiu-se melhorar a média da sala em relação a atividade aplicada.

Percebe-se que a atividade lúdica ajudou tendo como exemplo a questão 10 referente as questões realizadas pelos alunos, da primeira vez que foi aplicada nenhum aluno conseguiu resolvê-la, já da segunda vez, foi para 13 o número de alunos que conseguiram resolver a questão que envolvia conhecimentos em mínimo múltiplo comum, que nada mais é que uma sucessão de divisões.

Na questão 2 o avanço foi bem sucedido também, o conteúdo da mesma envolvia os critérios de divisibilidade e a realização da divisão, na qual apenas 8 acertaram na primeira aplicação, e esse número número subiu para 27 na segunda aplicação.

Abaixo, temos uma tabela que representa o avanço dos alunos:

Figura 9 – Média dos alunos referentes as duas aplicações da mesma atividade.



CAPÍTULO

6

CONCLUSÃO

Infelizmente cada vez mais alunos passam ano a ano escolar levando consigo grandes defasagens, motivo esse de notas baixas e desinteresse, pois, o não saber gera a falta de vontade de fazer, tendo esse atraso dos alunos em relação a matéria verifica-se a necessidade de realizar revisões com os mesmos, buscando resgatar conhecimentos para assim conseguir efetivação da aprendizagem correspondente ao ano escolar que se encontra o discente.

Como visto acima foi aplicada uma atividade envolvendo divisão ao primeiro colégio, matéria essa que não é compatível ao ano escolar vigente desses alunos, porém esse resgate foi necessário para conseguir dar sequência ao conteúdo programático, pois não é possível realizar uma função sem os conhecimentos da divisão.

Partindo da questão do interesse dos alunos, diversificar as aulas pode ser muito proveitoso referente a aprendizagem, sair da zona de conforto pode ser em primeira mão um pouco assustador, mas se faz necessário novos métodos para conseguir obter sucesso ao ensinar, estamos lidando com uma geração cada vez mais atualizada e precisa-se acompanhar com métodos diferenciados. O governo está se atualizando dia após dia, buscando apoiar o professor no momento de ensinar. Um dos exemplos, pode ser a plataforma digital Currículo Mais, composta por recursos digitais articulados com o Currículo do Estado de São Paulo, envolvendo todas as áreas de conhecimento, um site completo e pronto para ser utilizado como um curinga durante as aulas.

Com esse trabalho conseguiu-se verificar que uma atividade lúdica pode contribuir para o avanço do conhecimento, claro que sozinha não será suficiente, é necessário um conjunto didático para ajudar no avanço escolar, aulas bem preparadas e diferenciadas, quando for possível, anexar ao conteúdo alguma atividade extracurricular, podendo assim colaborar para melhorar o aprendizado.

CAPÍTULO

7

BIBLIOGRAFIA

A, Filipe. **Como fazer "contas"de dividir - passo a passo.** Disponível em: <http://www.estudarmatematica.pt/2013/11/como-fazer-contas-de-dividir-passo-passo.html>, 2013. Acesso em: 20 jul. 2019.

L, Cristiane Alexandra; R, Tatiana Miguel; S, Ana Beatriz Alves Ribeiro da; R, Laís Fernanda Macedo **Aplicando o jogo "Avançando com o resto"no ensino de matemática**, ISSN: 2316-9664, Páginas: 110-117, Volume: 2, DOI: 10.21167/cqdvol22201323169664abarscallfmrtmr110117. Disponível em: <https://www.ibilce.unesp.br/index.php#!/departamentos/matematica/eventos/2-cejta/regras-dos-jogos/5-ano---avancando-com-o-resto>, Acesso em: 27 jul. 2019.

P, Iara Glória Areias; F, Virgínia Zélia de Azevedo Rebeis; L, Maria Inês **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**, 1998. DOI: 10.15628/holos.2007.100. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>, Acesso em: 28 jul. 2019.

Colunista Portal Educação, **Educação ludica - Lúdico Piaget x Vygotsky**. Disponível em: <https://www.portaleducacao.com.br/conteudo/artigos/nutricao/educacao-ludica-ludico-piaget-x-vygots 35704>, Acesso em: 16 jul. 2019.

F, Vanessa; F, Flavia **7 de cada 10 alunos do ensino médio têm nível insuficiente em português e matemática, diz MEC**, Jornal G1, 2018. Disponível em: <https://g1.globo.com/educacao/noticia/2018/08/30/7-de-cada-10-alunos-do-ensino-medio-tem-nivel-insuficiente-em-portugues-e-ghtml>, Acesso em: 24 jul. 2019. [3]

H, Abramo. **Aritmética** Editor: SBM, 2016, Coleção PROFMAT, ISBN:978-85-8337-105-2. Acesso em: 18 jul. 2019.

INEP. **Alfabetização no sistema de Avaliação da Educação Básica- SAEB**. Disponível em: <https://medium.com/@inep/a-alfabetizaç~ao-no-sistema-nacional-de-avaliaç~ao-da-educaç~ao-básica 2018. Acesso em: 20 jul. 2019.

L, Robson. **Divisão** Jornal: Mundo Educação. Disponível em: <https://mundoeducacao.

bol.uol.com.br/matematica/divisao.htm>. Acesso em: 20 jul. 2019.

M, Geliaine Teixeira; C. Vítor Martins do **Utilizando o jogo "Avançando com o resto" para identificar as dificuldades com a divisão** Jornal: VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/1222/274>. Acesso em: 20 jul. 2019. [2]

O, Gabriel Alessando de. **A importância do resto da divisão** Disponível em: <https://escolakids.uol.com.br/matematica/a-importancia-do-resto-da-divisao.htm>, Jornal: Equipe Escola Kids. Acesso em: 28 jul. 2019.

S, Marcos Noé Pedro da. **Regras de Divisibilidade** Disponível em: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/regras-divisibilidade.htm>, Jornal Mundo Educação. Acesso em: 20 ago. 2019.

ICMC USP
SÃO CARLOS