Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Felipe da Costa Di Marco

Uma jornada histórica da meia e extrema razão

Rio de Janeiro

2024

Felipe da Costa Di Marco

Uma jornada histórica da meia e extrema razão

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Antonio de Araújo Carneiro

Coorientador: Prof. Dr. João Bosco Pitombeira de Carvalho

Rio de Janeiro

2024

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

D536 Di Marco, Felipe da Costa.
Uma jornada histórica da meia e extrema razão / Felipe da Costa Di Marco. – 2024.
170 f. : il.

Orientador: Fernando Antonio de Araújo Carneiro.
Coorientador: João Bosco Pitombeira de Carvalho.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Matemática - História - Teses. 2. Segmento áureo - Teses. I. Carneiro, Fernando Antonio de Araújo. II. Carvalho, João Bosco Pitombeira de. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Nome do Instituto de Matemática e Estatística. . IV. Título.
CDU 511

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte

______________________________ ______________________________
Assinatura Data

Felipe da Costa Di Marco

Uma jornada histórica da meia e extrema razão

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 05 de fevereiro de 2024.

Banca Examinadora

____
Prof. Dr. Fernando Antonio de Araújo CarneiroCarneiro (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

____
Prof. Dr. João Bosco Pitombeira de Carvalho (Coorientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

____
Prof.ª Dra. Patrícia Nunes da Silva
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

____
Prof. Dr. Leonardo Navarro de Carvalho
Universidade Federal Fluminense - UFF

Rio de Janeiro
2024

DEDICATÓRIA

Ao professor José Alves dos Santos Filho, “O Santos Filho” (in memorian), expresso minha eterna gratidão. Seu incomparável amor por ensinar, que transcedeu as paredes da sala de aula, continua inspirando cada passo do meu caminho acadêmico. Não há um único dia que não relembre com reverência e carinho todos os seus valiosos ensinamentos.

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos mais efusivos vão a meus pais, Benedita e Antonio, e ao meu irmão, Pedro - o amor de vocês, além do apoio inabalável, mantiveram-me vivo enquanto as duras provações insistiram no contrário.

A minha esposa, Debora, uma verdadeira guerreira, muito obrigado por compartilhar e nutrir meus sonhos. Sem sua presença, não teria alcançado nenhum dos lugares a que cheguei.

A minha filha, Sophia, além do agradecimento por me tornar um homem melhor todos os dias, expresso publicamente meu infinito amor.

A João Márcio Caetano e Luis Felippe Olimpio, que possibilitaram a trajetória da minha vida seguir este rumo, minha eterna gratidão.

Destaco e agradeço aqueles que me acompanharam por toda a jornada, seja ouvindo pacientemente, fornecendo estímulos em momentos de desânimo, ou fornencendo condições de continuar estudando e trabalhando, ou até mesmo com ajuda direta no curso: Carolina Barino, Matheus Freitas, Gabriel Marques, Tia Rosa, Tio Beto, Carmem Chiara e Miguel Willian.

A todos os companheiros de turma, em especial, Rodrigo, Ângelo, Thaís, Priscila, Isabele, André: nossos momentos de alegria e desespero estarão para sempre em minhas lembranças.

À Dra. Cristiane Gonçalves e ao Dr. Samuel Maulstach, meu profundo agradecimento!

Ao professor Fernando Carneiro, meu mais sincero reconhecimento. Sua atenção e preocupação foram fundamentais para que esse trabalho ganhasse forma.

Por fim, um agradecimento especial ao professor João Bosco Pitombeira de Carvalho, por ter aceitado a responsabilidade de ter orientar esta dissertação. Foi uma verdadeira honra ser seu orientando.

RESUMO

DI MARCO, Felipe da Costa. *Uma jornada histórica da meia e extrema razão.* 2023. 170 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

A matemática, entrelaçada à astronomia, filosofia e outras disciplinas, desempenhou um papel crucial, durante milênios, na resolução de questões essenciais à medida que a sociedade evoluía. E a Meia e Extrema Razão, epicentro desse trabalho, foi frequentemente estudada durante esse processo evolutivo. O objetivo desta pesquisa é transceder a simples apresentação das inúmeras propriedades da Meia e Extrema Razão, buscando aprofundar-se em sua concepção e desenvolvimento. No transcorrer do estudo, serão explorados diversos intervalos temporais em que a Meia e Extrema Razão foi foco de pesquisas, contando com a participação de figuras de grande relevância histórica. Ao final, busca-se desmistificar suas aparições em áreas aparentemente independentes da matemática, oferecendo uma compreensão mais clara do papel significativo que a Razão desempenhou na história, e que continua a influenciar diferentes esferas do conhecimento geral.

Palavras-chave: Meia e Extrema Razão. História da Matemática. Razão Áurea. Euclides e Os Elementos. Sequência de Fibonacci.

ABSTRACT

DI MARCO, Felipe da Costa. *A historical journey of the half and extreme ratio.* 2023.170 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

Mathematics, intertwined with astronomy, philosophy, and other disciplines, has played a crucial role for millennia in solving essential issues as society evolved. The half and Extreme Ratio, at the epicenter of this work, has been frequently studied throughout this evolutionary process. The aim of the research is to go beyond the mere presentation of the numerous proporties of the Half and Extreme Ratio, seeking to delve into its conception and development. Throughout the study, various temporal intervals will be explored when the Half and Extreme Raztio was the focus of research, involving figures of great historical relevance. Ultimately, the goal is to demystify its ocurrences in seemingly unrelated areas of mathematics, providing a clearer understanding of the significant role that the Ratio has played in history and continues to influence different spheres of general knowledge.

Keywords: Half and Extreme Ratio. History of Mathematics. Golden Ratio. Euclid and The Elements. Fibonacci Sequence.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Segmento de reta dividido em Meia e Extrema Razão........................... 23
Figura 2 – Construção geométrica da Proposição II, 6.. 25
Figura 3 – Construção geométrica da Proposição II, 11.. 26
Figura 4 – Desenvolvimento da Proposição II, 11.. 27
Figura 5 – Construção de um triângulo isósceles do tipo 36° - 72° - 72° (Parte 1).. 28
Figura 6 – Construção de um triângulo isósceles do tipo 36° - 72° - 72° (Parte 2).. 29
Figura 7 – Construção de um triângulo isósceles do tipo 36° - 72° - 72° (Parte 3).. 30
Figura 8 – Construção de um pentágono regular inscrito em uma circunferência (Parte 1).. 31
Figura 9 – Construção de um pentágono regular inscrito em uma circunferência (Parte 2).. 31
Figura 10 – Construção geométrica da Proposição VI, 29 (Parte 1)......................... 32
Figura 11 – Construção geométrica da Proposição VI, 29 (Parte 2)......................... 33
Figura 12 – Construção geométrica da Proposição VI, 29 (Parte 3)......................... 34
Figura 13 – Construção geométrica da Proposição VI, 29 (Parte 4)......................... 34
Figura 14 – Construção geométrica da Proposição VI, 29 (Parte 5)......................... 35
Figura 15 – Construção geométrica da Proposição VI, 29 (Parte 6)......................... 36
Figura 16 – Construção geométrica da Proposição VI, 30...................................... 37
Figura 17 – Construção geométrica da Proposição XIII, 1 (Parte 1)........................ 38
Figura 18 – Construção geométrica da Proposição XIII, 1 (Parte 2)........................ 38
Figura 19 – Construção geométrica da Proposição XIII, 1 (Parte 3)........................ 39
Figura 20 – Construção geométrica da Proposição XIII, 1 (Parte 4)........................ 40
Figura 21 – Construção geométrica da Proposição XIII, 8 (Parte 1)........................ 41
Figura 22 – Construção geométrica da Proposição XIII, 8 (Parte 2)........................ 41
Figura 23 – Segmento de reta unitário dividido em Meia e Extrema Razão............. 43
Figura 24 – Construção do retângulo áureo (Parte 1)... 48
Figura 25 – Construção do retângulo áureo (Parte 2)... 48
Figura 26 – Construção do retângulo áureo (Parte 3)... 49
Figura 27 – Construção do triângulo áureo (Parte 1)... 50
Figura 28 – Construção do triângulo áureo (Parte 2)... 51
Figura 29 – Construção do triângulo áureo (Parte 3)... 51
Figura 30 – Construção de um pentagrama.. 52

Figura 31 – Auto-propagação de um pentagrama (Parte 1)...................................... 53
Figura 32 – Auto-propagação de um pentagrama (Parte 2)...................................... 54
Figura 33 – Construção de um decágono regular.. 55
Figura 34 – Relacionando o decágono regular à Meia e Extrema Razão (Parte 1).... 56
Figura 35 – Relacionando o decágono regular à Meia e Extrema Razão (Parte 2).... 57
Figura 36 – Definição do ângulo áureo.. 58
Figura 37 – Apótema de um pentágono regular... 60
Figura 38 – Construção de triângulos retângulos do tipo 36° - 54° - 90°................. 60
Figura 39 – Demonstração da área de um pentágono regular.................................. 62
Figura 40 – Dodecaedro vazado.. 64
Figura 41 – Dodecaedro separado em alguns sólidos para cálculo do volume.......... 65
Figura 42 – Icosaedro com um dodecaedro inscrito, para cálculo do volume........... 66
Figura 43 – Comparação entre um pentagrama e a representação da deusa Hygeia.. 73
Figura 44 – Divisão de um segmento em Meia e Extrema Razão por Heron (Parte 1)... 90
Figura 45 – Divisão de um segmento em Meia e Extrema Razão por Heron (Parte 2)... 90
Figura 46 – Construção geométrica da Proposição II, 6 do *Almagesto*.................... 93
Figura 47 – Construção geométrica da Proposição I, 10 do *Almagesto* (Parte 1)..... 94
Figura 48 – Construção geométrica da Proposição I, 10 do *Almagesto* (Parte 2)..... 94
Figura 49 – Construção geométrica da Proposição I, 10 do *Almagesto* (Parte 3)..... 94
Figura 50 – Mapa do reino de Frederico II... 110
Figura 51 – Retângulo dividido segundo a sequência de Fibonacci......................... 119
Figura 52 – Logomarca do periódico *The Fibonacci Association*........................... 124
Figura 53 – Ilustração de um dodecaedro em *De Divina Proportione*..................... 127
Figura 54 – Ilustração de um hexaedro em *De Divina Proportione*......................... 127
Figura 55 – O homem vitruviano... 129
Figura 56 – *Mysterium Cosmographicum*... 134
Figura 57 – Triângulo retângulo com segmentos proporcionais à Meia e Extrema Razão... 135
Figura 58 – Paradoxo de Sam Loyde (Parte 1).. 139
Figura 59 – Paradoxo de Sam Loyde (Parte 2).. 140
Figura 60 – *Tiling* formado por pentágonos, pentagramas e decágonos................... 141

Figura 61 –	Retângulo áureo sobreposto ao Frontispício do Partenon	145
Figura 62 –	Representação de uma pirâmide e alguns elementos.............................	148
Figura 63 –	Retângulo áureo sobreposto a uma motocicleta...................................	150
Figura 64 –	Construção de uma espiral logarítmica (Parte 1)..................................	155
Figura 65 –	Construção de uma espiral logarítmica (Parte 2)..................................	156
Figura 66 –	Construção de uma espiral logarítmica (Parte 3)..................................	156
Figura 67 –	Espirais logarítmicas de raios distintos..	157
Figura 68 –	Retângulo áureo sobreposto à concha do Nautillus	158
Figura 69 –	Demonstração do ângulo divergente áureo na filotaxia..........................	159
Figura 70 –	Árvore genealógica do zangão...	160
Figura 71 –	O Sacramento da Última Ceia, de Salvador Dalí..................................	162
Figura 72 –	Modulor..	165

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DMER	Divisão em Meia e Extrema Razão
MER	Meia e Extrema Razão
aEC	Antes da Era Comum
EC	Era Comum

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO..	17
1	**EUCLIDES, OS ELEMENTOS E A MEIA E EXTREMA RAZÃO**..	20
1.1	**Euclides de Alexandria**..	20
1.2	**Os 13 livros que formam *Os Elementos***..	21
1.3	**A Divisão de um segmento em Meia e Extrema Razão**............................	23
1.3.1	A definição..	23
1.3.2	Proposições euclidianas anteriores à concepção formal da DMER..	24
1.3.3.	O uso explícito da DMER em *Os Elementos*..	32
1.4	**A DMER sob uma perspectiva moderna**..	42
1.4.1	O valor numérico da DMER: Phi (Φ)..	43
1.4.2	Algumas curiosas propriedades algébricas de Φ..	44
1.4.3	A progressão aritmética/geométrica áurea..	47
1.4.4	O retângulo áureo..	47
1.4.5	O triângulo áureo..	50
1.4.6	O pentagrama..	52
1.4.7	O decágono regular..	54
1.4.8	O ângulo áureo..	57
1.4.9	O seno e cosseno de 54° e a área do pentágono regular................................	59
1.4.10	O dodecaedro..	63
1.4.11	O icosaedro..	65
2	**MEIA E EXTREMA RAZÃO ANTES DE EUCLIDES? UMA INCURSÃO NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA GRÉCIA ANTIGA**..	67
2.1	**A Escola Pitagórica: o pentagrama, o dodecaedro e os incomensuráveis**..	68
2.1.1.	Pitágoras e seus discípulos: uma breve história..	68
2.1.2	Pitágoras e o pentagrama..	70
2.1.3	Hipaso de Metaponto: o dodecaedro e a incomensurabilidade........................	73
2.2	**Platão e os sólidos: um ensaio para a concepção da DMER**.....................	76
2.2.1	Breve Biografia de Platão..	76

2.2.2	A Academia	78
2.2.3	Platão, a Geometria e a DMER	79
2.2.4	As obras de Platão sob a perspectiva da DMER	80
2.2.4.1	A República	81
2.2.4.2.	*Timaeus* (Timeu)	82
2.2.4.3.	*Hippias Meizon* (Hipias Maior)	84
2.2.4.4	*Phaedo* (Fedão)	85
3	**DA ANTIGUIDADE AO RENASCIMENTO**	86
3.1	**Ainda na Antiguidade (de c. -300 a c. 500)**	86
3.1.1	Heron	87
3.1.1.1	*Metrica*	88
3.1.1.2	A DMER em outras obras de Heron	89
3.1.2	Ptolomeu	91
3.1.2.1	*Almagesto*: Livro II, Proposição 6	92
3.1.3	Pappus de Alexandria	95
3.1.4	Proclo	97
3.1.4.1	Breve biografia	98
3.1.4.2	Comentários a Euclides, Livro I: O Catálogo dos Geômetras	99
3.2	**A DMER no mundo árabe**	101
3.2.1	al-Khwarismi	103
3.2.2	Abu Kamil	105
3.3	**O Renascimento**	107
3.3.1	Leonardo Pisanus - A Sequência de Fibonacci	107
3.3.1.1	*Liber Abaci*	112
3.3.1.2	*Practica Geometriae*	116
3.3.1.3	A Sequência de Fibonacci e suas conexões com a DMER	117
3.3.1.4	Principais proposições que associam F_n e Φ	119
3.3.1.5	*Fibonacci Quartely*	124
3.3.2	A Proporção Divina: Luca Pacioli	125
3.3.3	Kepler	130
3.3.3.1	Infância e formação universitária: O despertar para o cosmos	131
3.3.3.2	A dualidade de Kepler	133
3.3.3.3	Praga: As leis que mudaram a Astronomia	137

3.3.3.4 Linz.. 141
4 **MITOS E VERDADES ENVOLVENDO A RAZÃO ÁUREA**................ 143
4.1 **Mitos**.. 143
4.1.1 Partenon.. 143
4.1.2 Pirâmide de Quéops.. 146
4.1.3 Retângulo áureo é esteticamente o mais agradável...................................... 149
4.1.4 A origem da utilização da letra *phi* (Φ)... 152
4.1.5 A concha do *Nautillus*.. 154
4.2 **Verdades**... 158
4.2.1 Na natureza.. 158
4.2.2 Na arte: *O Sacramento da Última Ceia*... 161
4.2.3 Na arquitetura... 163
REFERÊNCIAS.. 166
APÊNDICE - Origem da utilização do adjetivo áureo 168

INTRODUÇÃO

Quando questionados sobre a Divisão de um segmento em Meia e Extrema Razão (DMER), é comum notar que muitos professores e estudiosos da matemática estranham a nomenclatura. No entanto, essa estranheza geralmente desaparece quando a divisão citada é redefinida como "razão áurea", e seu valor numérico como "número de ouro". Diversos outros nomes são atribuídos à DMER, como "proporção ou seção áurea (ou dourada)", e, ocasionalmente, "divina proporção". A letra grega *phi* (Φ) também é frequentemente adotada para expressar seu valor numérico.

A pesquisa que se seguirá abordará predominantemente a história relacionada à Meia e Extrema Razão, abrangendo diversas épocas ao longo dos últimos milênios e destacando os personagens que se inserem nesse contexto.

Embora existam conjecturas acerca da sua origem, a oficialização é pacífica: a Divisão de um segmento em Meia e Extrema Razão (DMER) foi definida por aquele que primeiramente orientou os estudos geométricos - Euclides de Alexandria. Quando ele a enunciou em sua obra, *Os Elementos*, desencadeou uma cadeia revolucionária de pesquisas que culminou nesta dissertação.

Enquanto algumas dessas pesquisas se concentram nas diversas propriedades da Razão Áurea e adotam abordagens históricas mais superficiais, a perspectiva adotada nos capítulos que se seguirão trilha um caminho distinto. Nossa prioridade é aprofundar-se na história da DMER, trazendo à luz detalhes menos conhecidos de sua jornada milenar até os dias atuais. Este enfoque representa uma verdadeira imersão na história da matemática associada a essa definição, a qual está intrinsicamente ligada a outros campos científicos.

Obviamente, a apresentação das proposições euclidianas, juntamente com as implicações matemáticas pertinentes, desempenha papel fundamental para a compreensão histórica da DMER. O Capítulo 1 assume a responsabilidade de examinar a obra de Euclides com concentração na Meia e Extrema Razão, analisando definições e teoremas, e, ao final, examinando as figuras geométricas e os resultados algébricos derivados sob uma linguagem mais moderna.

Ademais, nesse capítulo, também será debatida a utilização implícita da DMER por Euclides antes de sua definição oficial, encontrada nos primeiros livros de *Os Elementos*, e as prováveis razões que motivaram Euclides a adotar esse emprego antecipado.

O segundo capítulo mergulha na sociedade grega dos séculos IV e V aEC., dando ênfase a dois dos mais importantes personagens históricos do período: Pitágoras e Platão. Tais figuras foram tão influentes, que seus ensinamentos, princípios filosóficos e modos de vida foram seguidos de modo devoto por discípulos ao longo de séculos, mesmo após suas mortes.

A Escola Pitagórica e a Academia de Platão tiveram participação direta na evolução da matemática, moldando a maneira como a estudamos atualmente, e, concernente ao tema, estruturando a concepção da DMER. O Capítulo 2 não apenas exporá o contexto histórico de ambas, mas também descreverá como seus membros transformaram a matemática em uma ciência presente em outras áreas, condição *sine qua non* para se chegar à compreensão da Meia e Extrema Razão. Há, ainda, uma discussão sobre as conjecturas que cercam a possível ciência da proporção áurea entre seus integrantes (anteriores a Euclides).

O Capítulo 3 contempla o mais amplo intervalo temporal nesta dissertação, começando na Grécia Antiga, após a época de Euclides, passando pelo mundo árabe durante a Idade Média, e chegando à Europa no Renascimento. Por quase 2000 anos, a Divisão em Meia e Extrema Razão foi estudada e aprimorada por inúmeras mentes geniais, a ponto de sua história se confundir com a própria história da matemática como um todo.

A primeira parte do terceiro capítulo se concentra na Antiguidade Clássica, inquirindo registros de importantes publicações matemáticas que forneceram teoremas tradicionais e novas formas de demonstrar as proposições de *Os Elementos*. A Meia e Extrema Razão assume destaque nesses estudos, conforme será detalhado. Além disso, a contextualização histórica dos personagens explorados nesse período é mencionada.

Saindo do cenário ocidental, direcionaremos nosso centro de atenção para a matemática árabe, exibindo figuras proeminentes que acabaram sendo os precursores do que viria a aflorar no Renascimento, em consonância com a matemática, e, em particular, com a razão áurea. A ruptura da exploração histórico-matemática da DMER sob o ponto de vista unicamente europeu é de suma importância para o desenvolvimento do tema.

No terceiro e último subtítulo, exploraremos o personagem mais icônico da história da DMER: Leonardo Pisanus, ou simplesmente, Fibonacci. A sequência numérica que carrega seu nome é, sem dúvida, a representação mais famosa da razão áurea nos dias de hoje, e é a responsável por elevar a notoriedade desse estudo nos séculos posteriores a sua vida.

Ainda neste trecho, é destacado que quando se fala sobre o caráter divino incorporado pela DMER, muito é devido a Luca Pacioli e sua obra *La Divina Proportione* (A Divina Proporção). Há, ainda, uma porção considerável do texto dedicada a Johannes Kepler, astrônomo alemão cuja biografia é obrigatória no terreno pesquisado, uma vez que contribuiu ativamente para o refinamento das propriedades que envolvem a seção áurea.

O quarto capítulo não se concentra especificamente em um personagem, mas sim em enquadrar várias narrativas equivocadas que se desenrolaram ininterruptamente ao longo da história moderna da DMER. O objetivo da primeira parte desse capítulo é exatamente o processo de desmistificação de algumas teorias relacionados à proporção áurea, citando pessoas e publicações que foram responsáveis por gerar esse entusiasmo exacerbado.

Encerrando, são apresentadas algumas manifestações verdadeiras da DMER na natureza, na arte e na arquitetura.

Ao final, é exposto um apêndice que investiga a origem da utilização do termo "áureo" associado à Meia e Extrema Razão, incluindo uma incursão na matemática alemã do século XIX.

É de se destacar as principais referências que utilizamos na pesquisa que será apresentada a seguir: do pesquisador canadense Roger Herz-Fischler, o livro *A Mathematical History of the Golden Number* (Uma História Matemática do Número de Ouro), e do astrofísico Mario Livio, *Razão Áurea: A história de fi, um número surpreendente*. Evidentemente, várias outras fontes foram utilizadas para a construção desta dissertação, fornecendo a arquitetura que julgamos ser compatível com os principais tópicos relativos à história da Divisão em Meia e Extrema Razão.

1 **EUCLIDES, OS ELEMENTOS E A MEIA E EXTREMA RAZÃO**

Este Capítulo inicial será dedicado à figura de Euclides e sua obra, *Os Elementos*, onde se encontra a inscrição oficial da Meia e Extrema Razão na literatura geométrica.

De concreto, *Os Elementos* expõe a DMER em vários de seus livros, definições e proposições, e nem sempre explicitamente. A abordagem que se segue mostrará como Euclides já utilizara a DMER antes mesmo de defini-la de modo convencional, convidando-nos à reflexão sobre o porquê desse ordenamento.

Incluiremos também a apresentação das proposições e definições contidas na obra euclidiana e que serão citadas nos capítulos subsequentes, inclusive suas respectivas demonstrações.

Para concluir, realizaremos um estudo adotando uma terminologia atual no estudo de figuras que fazem uso da proporção áurea, algumas das quais não catalogadas na obra euclidiana. Esta adição visa completar a análise temática do trabalho, sob o ponto de vista histórico-matemático.

1.1. **Euclides de Alexandria**

Determinar o tamanho de Euclides de Alexandria para a Matemática, e, em particular, para a Geometria, parece uma tarefa relativamente simples, quando consideramos que seu nome virou adjetivo comum (geometria euclidiana) no estudo clássico de figuras geométricas.

Pode não ter sido o maior da história entre seus pares, mas foi o responsável pela primeira grande compilação organizada de pesquisas matemáticas, causando uma revolução nos estudos da disciplina após sua publicação. Além disso, também é responsável por determinar axiomas e documentar definições e teoremas até então inéditos em seu tempo.

Sobre sua vida, só há poucos recortes. Os principais encontram-se no *Catálogo dos Geômetras*, uma pesquisa realizada pelo filósofo e historiador grego Proclo Lício (412 - 485), baseando-se nos manuscritos de outro filósofo e historiador da matemática, Eudoxo de Cnido (408 aEC - 355 aEC), a qual descreve Euclides brevemente.

> (...) E não muito mais jovem do que esses é Euclides, o que reuniu os *Elementos*, tendo também, por um lado, arranjado muitas das coisas de Eudoxo e tendo, por

> outro lado, aperfeiçoado muitas das coisas de Teeteto, e ainda tendo conduzido as coisas demonstradas frouxamente pelos predecessores a demonstrações irrefutáveis. E esse homem floresceu no tempo do primeiro Ptolomeu; pois, também Arquimedes, tendo vindo depois do primeiro, menciona Euclides, e, por outro lado, também dizem que Ptolomeu demandou-lhe uma vez se existe algum caminho mais curto que os *Elementos* para a geometria e ele respondeu não existir atalho real na geometria (Bicudo, I. Os elementos. São Paulo: Editora da UNESP, 2009. p.41)

Através dessa passagem de Proclo, deduz-se o período de vida de Euclides, embora sem precisão nas datas de nascimento e morte.

Proclo ainda utiliza como referência temporal o discípulo platônico Teeteto (417 aEC - 369 aEC), que, entre outros citados, fornece uma ideia do período produtivo de Euclides, por volta de 300 aEC. A indicação da contemporaneidade com o Primeiro Ptolomeu[1] (c. 367 aEC. - c. 283 aEC) reforça essa data.

Além de *Os Elementos*, Euclides é autor de outros tratados de expressão dentro da matemática. *Óptica*, por exemplo, concentra-se na visão humana a partir de uma perspectiva geométrica, enquanto o tratado *Phaenomena* documenta observações astronômicas a partir de um olhar geométrico. Não pode ser considerada uma exímia obra da antiga astronomia grega, mas tornou-se conhecida por conta da fama e importância do autor.

Pode-se argumentar que *Conicas* seja o trabalho desenvolvido por Euclides que apresenta uma matemática mais aprofundada, oferecendo um estudo sobre curvas matemáticas com um zelo inexistente até então.

Assim, Euclides e a Matemática acabam sendo indissociáveis, e, quando observamos *Os Elementos,* essa conexão acaba se estendendo principalmente até à geometria.

1.2. **Os 13 livros que formam Os Elementos**

Antes de avançarmos na discussão do subtítulo, fazemos constar em assentamento a referência bibliográfica adotada para trechos retirados de *Os Elementos* neste trabalho: Tradução e Introdução de Irineu Bicudo, São Paulo: Editora UNESP, 2009.

Ao longo dos milênios, *Os Elementos* acabou sendo objeto de diversas traduções e edições, tornando desafiador encontrar alguma edição verdadeiramente fiel à original de

[1] General macedônio que lutou junto às fileiras do Exército de Alexandre, o Grande, e que em 305 aEC. se auto-proclamou rei da Macedônia. Foi responsável por elevar a cidade de Alexandria à capital de seu Império.

Euclides. O professor Bicudo (2009) destaca que a versão de *Heiberg-Stamatis* (1969) parece ser a mais próxima do manuscrito genuíno.

Escrita provavelmente em diversos papiros, seguindo a tradição grega da época, *Os Elementos* ganhou forma por volta de 300 aEC. É comumente mencionado pelos historiadores da matemática como a obra mais antiga e influente de estudos da área, e, sendo assim, a mais replicada na história.

Euclides organiza definições matemáticas de conhecimento geral e estabelece axiomas, apresentando uma maneira sistemática de desenvolver raciocínios, de modo cadenciado e gradativo, metodologia denominada por alguns autores como "método axiomático-dedutivo". Há, inclusive, a defesa desses autores no vínculo euclidiano com a filosofia platônica, devido a maneira de apresentar e desenvolver problemas e proposições, seguindo uma progressão paulatina e conexa da assuntos expostos.

Como mencionado, o tratado *Os Elementos* reuniu 13 partes, separadas em livros, seguindo um critério temático. Entretanto, muitos desses temas acabam se correlacionando de maneira antecipada, ficando implícita suas respectivas utilizações ao longo das exposições. Ilustrando muito bem essa aplicação prévia está a Divisão em Meia e Extrema Razão que, apesar de definida somente no livro VI, aparece em proposições do Livro II e do livro IV.

No que diz respeito aos livros que compõem *Os Elementos*, existe um certo agrupamento de tópicos discernível entre eles. Os livros de I a VI tratam de geometria plana, desde seus conceitos fundamentais até o aprofundamento no estudo das definições e proposições de maior complexidade. Entre esses, o livro V é atribuído a Eudoxo de Cnido e apresenta a teoria das proporções como a conhecemos.

> "Diz-se que quatro grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta se, quando equimútiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e equimútiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimútiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ambos menores que, os últimos equimútiplos considerados em ordem correspondentes". (Elementos de Euclides, Livro V, definição 6).

A formalização da Divisão de um segmento de reta em Meia e Extrema Razão seria impossível sem o registro dessa teoria, que agora abrangia grandezas comensuráveis e incomensuráveis[2].

Os livros VII, VIII, IX e X são dedicados à teoria dos números. O famoso Algoritmo de Euclides está presente no Livro VII, e o estudo sobre os incomensuráveis, descoberta recente até então, encontra-se no Livro X .

---

[2] Números incomensuráveis são aqueles que não podem sem expressos como uma razão de dois números inteiros.

Já nos livros XI, XII e XIII, o enquadramento é dedicado à Geometria Espacial. Em particular, o livro XIII investiga os poliedros regulares, tendo a DMER ocupado um papel de destaque na análise do dodecaedro e icosaedro.

1.3. **A Divisão de um Segmento em Meia e Extrema Razão**

1.3.1. A definição

A simplicidade com que é apresentada a definição do segmento de reta dividido em Meia e Extrema Razão em *Os Elementos* é surpreendente, especialmente quando consideramos suas inúmeras possibilidades.

Presente na terceira definição do Livro VI, Euclides a enuncia desta forma:

Definição VI, 3: *"Uma reta é dita estar cortada em extrema e média razão, quando como o todo esteja para o maior segmento, assim o maior para o menor."*

Figura 1 - Segmento de reta dividido em Meia e Extrema Razão

Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Em uma linguagem mais simples, ao marcarmos um ponto sob um segmento de reta, de tal forma que a razão entre os pedaços maior e menor é a mesma do que entre todo o segmento e o pedaço maior, esse segmento fica, assim, dividido em Meia e Extrema Razão.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}$$

Herz-Fischler (1987) diz que "O conceito matemático que está no centro de todas as discussões contidas neste estudo é enganosamente fácil de definir."

Já Lívio (2006) apresenta a DMER da seguinte forma:

> Quem poderia imaginar que essa divisão de linha aparentemente tão inocente, que Euclides definiu com objetivos puramente geométricos, poderia ter consequências em temas que vão do arranjo de folhas em botânica à estrutura de galáxias que contêm bilhões de estrelas, ou da matemática às artes? (Livio, Mario. Razão áurea (Portuguese Edition) (p. 10). Editora Record. Edição do Kindle.)

Definida a Meia e Extrema Razão, adentraremos no estudo relativo a suas várias aplicações em *Os Elementos*.

1.3.2. Proposições euclidianas anteriores à concepção formal da DMER

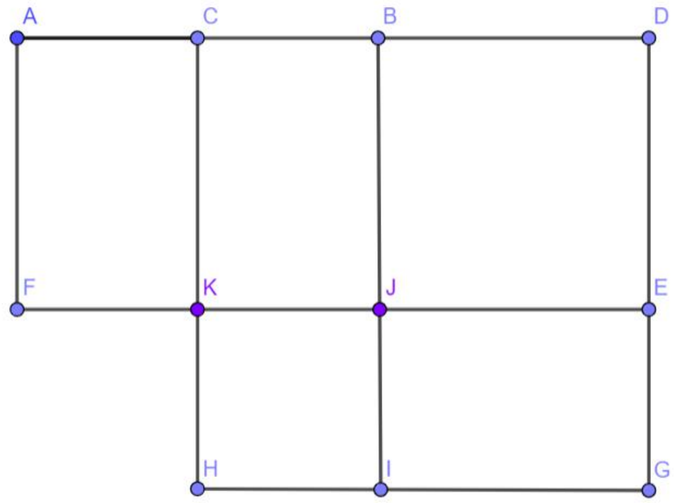
Como pontuado anteriormente, Euclides reserva um trecho do sexto capítulo de sua obra para delinear as noções da Meia e Extrema Razão. Entretanto, é importante notar que ele previamente empregara, de maneira indireta, essa conceito em livros anteriores. Surgem, então, questionamentos pertinentes: se o conhecimento sobre a DMER já estava presente para Euclides, por que ele optou por não introduzi-lo inicialmente? Ou seria possível que ele não tenha identificado esse princípio em suas demonstrações?

Um ponto crucial a ser assentado é a ausência de qualquer método algébrico conhecido nas demonstrações euclidianas. As argumentações empregam uma linguagem estritamente geométrica, técnica pouco usual nos dias de hoje. Há, ainda, diferenças na nomenclatura de alguns elementos, como destaca Carvalho (2004): "Para compreendermos o que Euclides quer demonstrar, lembre-se, em primeiro lugar, que os matemáticos gregos chamavam de reta o que nós hoje chamamos de segmento de reta". Entretanto, mesmo com essas diferenças, o rodeio em torno da DMER não parece fazer sentido, sob esse prisma.

Antes de avançarmos com o teor do inquérito e com as proposições que utilizam a DMER implicitamente, exploraremos outra proposição do Livro II de *Os Elementos*, que servirá como base para as futuras análises.

Proposição II, 6: *Se uma linha reta é dividida em duas partes iguais e se uma outra linha reta lhe é adicionada, prolongando-a, (a área do) o retângulo determinado pela linha reta e pela reta adicionada é igual, se lhe for adicionado (a área do) o quadrado sobre a metade da reta, (à área do) ao quadrado sobre a reta formada pela metade e pela reta adicionada.*

Figura 2 - Construção geométrica da Proposição II, 6.



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

A Figura 2 é construída seguindo as instruções enunciadas na Proposição II, 6. Iniciamos com um segmento AB, de ponto médio C. A partir do ponto B, prolongamos o segmento até um ponto D qualquer. Em seguida, são traçados: o retângulo ADEF, com DE = BD; o quadrado CDGH; e o segmento BI, paralelo a CH e DG. Os pontos J e K são as interseções de EF com BI e CH, respectivamente. Como resultado da construção, HIJK também é um quadrado e os retângulos ACKF, BCKJ e EGIJ são congruentes.

A área do retângulo ADEF inclui dois desses retângulos congruentes mais o quadrado BDEJ. Quando adicionamos à área do retângulo, a área do quadrado HIJK, obtemos exatamente as figuras de mesma área contidas na formação do quadrado CDGH.

Portanto,

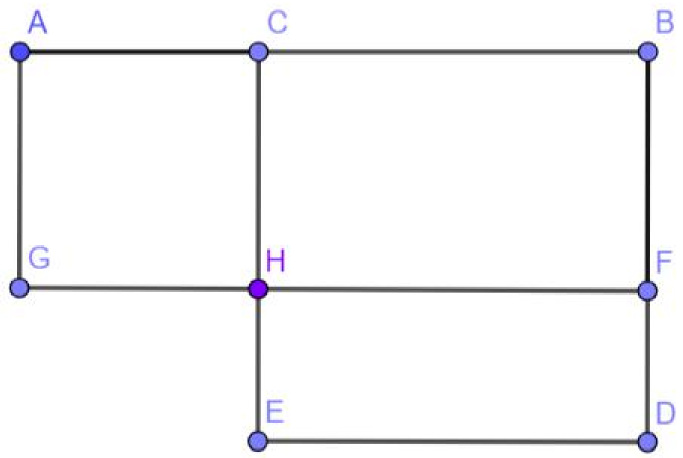
$$\text{Área (ADEF)} + \text{Área (HIJK)} = \text{Área (CDGH)}$$

Dando continuidade ao estudo do Livro II, focaremos agora na Proposição 11:

Proposição II,11: "*Cortar a reta dada, de modo que (a área do)o retângulo contido pela inteira e por um dos segmentos é igual (à área do) ao quadrado sobre o segmento restante.*"

Não há uma menção direta à Meia e Extrema Razão, mas se debruçando na proposição acabamos reconhecendo sua presença. Esboçando a figura de acordo com o enunciado, temos:

Figura 3 - Construção geométrica da Proposição II, 11



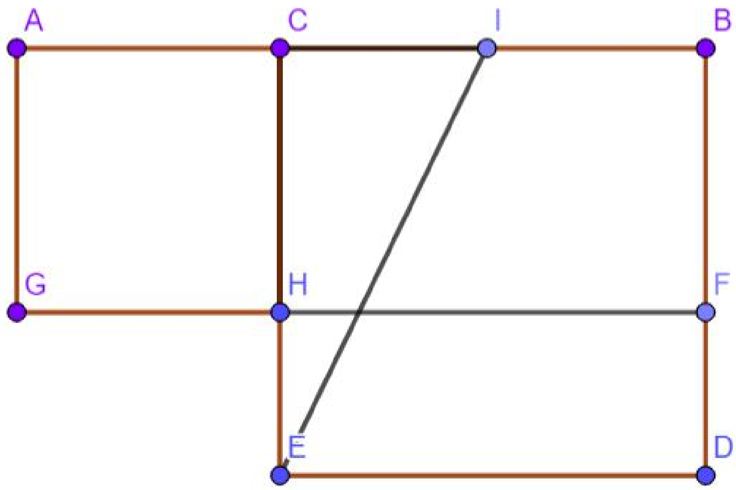
Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Se partirmos de um segmento BC, prolongando-o de acordo com o formato de II, 6 até um ponto A (construção realizada na Figura 2), visualizamos um segmento maior AB dividido em C. A partir do segmento (maior) BC, desenhamos um quadrado, e utilizamos a medida do segmento restante (menor) como lado de um retângulo de base AB (AC = AG). Sendo válida a proposição, o segmento AB fica dividido em Meia e Extrema Razão no ponto C, uma vez que:

$$\text{Área (ABFG)} = \text{Área(BCED)}$$
$$AB\,.\,AG = BC^2$$
$$AB\,.\,AC = BC^2$$
$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AC}$$

Para a demonstração da proposição II, 11, utilizaremos como base a proposição II, 6. A figura de partida é o quadrado BCED, e marcaremos o ponto médio de BC como I. Em continuação, prolongaremos o segmento BC, a partir de C, até o ponto A, de tal forma que a medida do segmento AI seja congruente à medida de EI (AI = EI).

Figura 4 - Desenvolvimento da Proposição II, 11



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Pela proposição II, 6, temos que:

$$\text{Área (ABFG)} + \text{Área do quadrado de lado CI} = \text{Área do quadrado de lado AI}$$

$$AB\,.\,AG\ +\ CI^2 = AI^2 \qquad \textbf{(I)}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras[3] (Euclides o enuncia na proposição I, 47) no triângulo CEI e recorrendo às igualdades AG = AC e EI = AI, temos:

$$EI^2 = CE^2 + CI^2$$
$$AI^2 = CE^2 + CI^2 \qquad \textbf{(II)}$$

Substituindo **(II)** em **(I)**:

$$AB\,.\,AC\ +\ CI^2 = CE^2 +\ CI^2$$

Adicionalmente, recorreremos a CE = BC

$$AB\,.\,AC\ = BC^2$$

[3] Teorema de Pitágoras: aplicado em triângulos retângulos, traz que a medida da hipotenusa ao quadrado é igual à soma das medidas dos catetos também elevadas ao quadrado.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AC}$$

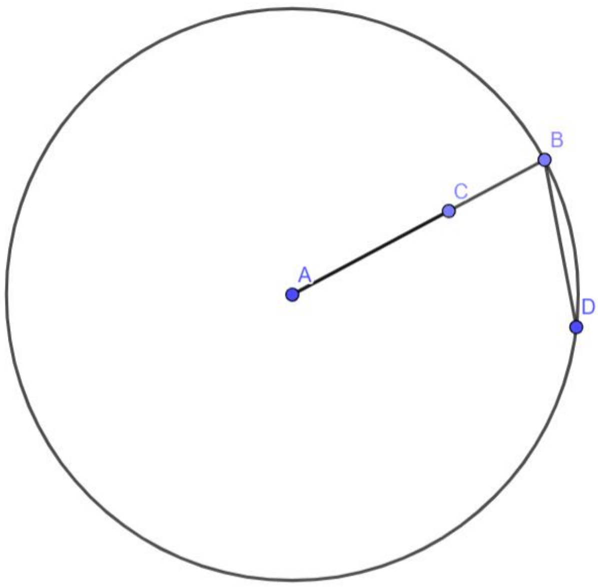
Ficando assim demonstrada a aparição velada da divisão do segmento AB em Meia e Extrema Razão, a partir do ponto C, dentro da demonstração da Proposição II, 11.

Outra aparição oculta da DMER é identificada no Livro IV, onde Euclides fornece instruções para a construção de um triângulo isósceles peculiar.

Proposição IV,10. *Construir um triângulo isósceles com cada ângulo da base o dobro do ângulo do vértice.* (isto é, o triângulo 72°-72°-36°)

Euclides expõe a ideia de construção do triângulo a partir de um segmento de reta AB, dividido por um ponto C de acordo com a proposição II, 11. É traçado, ainda, um circulo de raio AB e centro A. Sob a circunferência, estabelece-se um ponto D, tal que sua distância para o ponto B seja a mesma distância entre os pontos A e C. Ou seja, AC = BD.

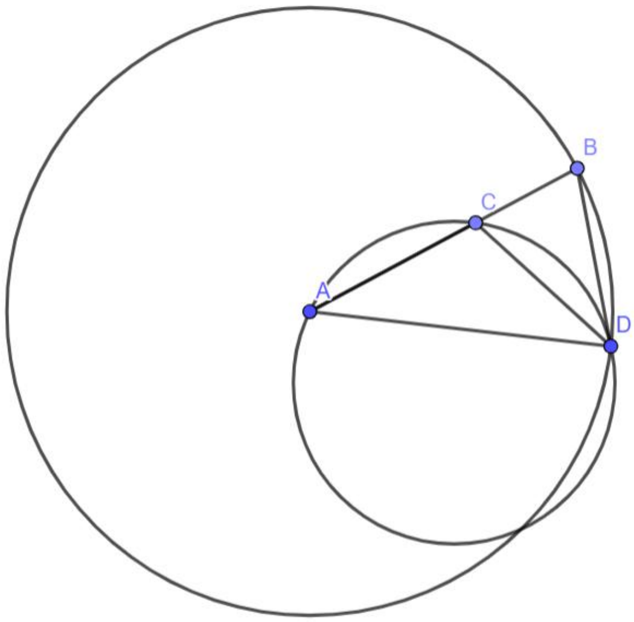
Figura 5 - Construção de um triângulo isósceles do tipo 36° - 72° - 72° (Parte 1)



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

O triângulo ABD é construído, naturalmente isósceles, já que AD também é raio do círculo. Em seguida, uma segunda circunferência é desenhada, passando pelos pontos A, C e D, ou seja, circunscrita ao triângulo ACD. Finalmente, o segmento CD é traçado.

Figura 6 - Construção de um triângulo isósceles do tipo 36° - 72° - 72° (Parte 2)



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Como o segmento AB fora inicialmente dividido conforme a proposição II, 11, temos:

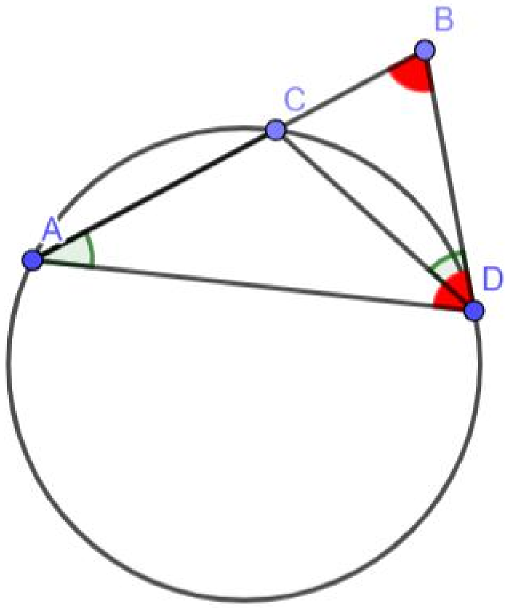
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC} \quad .\colon \quad AC^2 = AB\,.\,BC \qquad (\boldsymbol{III})$$

Como AC = BD, substituiremos a igualdade em **(III)**

$$BD^2 = AB\,.\,BC \qquad (\boldsymbol{IV})$$

De acordo com a equação **(IV)**, idêntica à propriedade da potência de ponto (apresentada em *Os Elementos* no Livro III), pode-se inferir que segmento BD é tangente ao círculo menor. O arco menor CD determina, então, que os ângulos BAD e BDC são congruentes (indicados em verde). Além disso, os ângulos ABD e ADB também são congruentes (indicados em vermelho), dada a natureza isósceles do triângulo ABD.

Figura 7 - Construção de um triângulo isósceles do tipo 36° - 72° - 72° (Parte 3)



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Portanto, considerando que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é constante, podemos concluir que o ângulo BCD possui a mesma medida do que o ângulo ABD, e, através disso, constatamos que o triângulo BCD também é isósceles, com BD = CD (= AC).

Ressaltamos que a adoção de medidas angulares não foi utilizada no texto original euclidiano, ficando registrado no manuscrito "construir um triângulo isósceles com cada ângulo da base o dobro do ângulo do vértice.

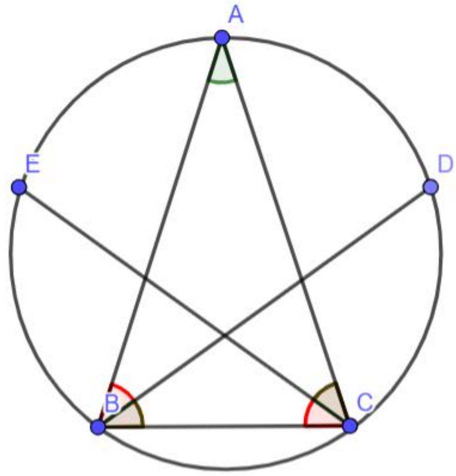
A conclusão que se chega após esta construção, é que Euclides mais uma vez utiliza implicitamente a DMER, agora para a construção do triângulo isósceles 36° - 72° - 72°. Esse triângulo desempenhará um papel fundamental na construção de outras figuras diretamente vinculadas à seção áurea.

Ainda no livro IV, Euclides demonstra como construir um pentágono regular a partir do triângulo 36° - 72° - 72°.

Proposição IV, 11. *Inscrever um pentágono regular em um círculo dado.*

Já com o molde do triângulo 36° - 72° - 72° inscrito em um círculo (IV, 10), Euclides utiliza a bissecção dos ângulos de mesma medida para chegar à seguinte figura:

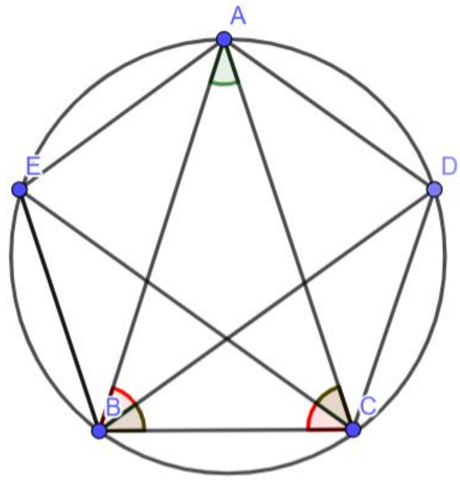
Figura 8 - Construção de um pentágono regular inscrito em uma circunferência



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Desta forma, a circunferência fica dividida em 5 pontos tais que os arcos formados por dois consecutivos são congruentes. Em outras palavras, os arcos AE, BE, BC, CD e AD possuem a mesma medida. Consequentemente, pela Definição III, 11[4], os segmentos de reta obtidos a partir desses arcos também terão a mesma medida

Figura 9 - Construção de um pentágono regular inscrito em uma circunferência



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Com isso, é obtido um pentágono regular.

[4] *Os Elementos*, Definição III, 36: Segmentos semelhantes de círculos são os que admitem ângulos iguais, ou nos quais os ângulos são iguais entre si.

1.3.3 <u>O uso explícito da DMER em *Os Elementos*</u>

Após a formalização da Meia e Extrema Razão realizada por Euclides na terceira definição no início do Livro VI, a utilização da proporção passa a figurar abertamente.

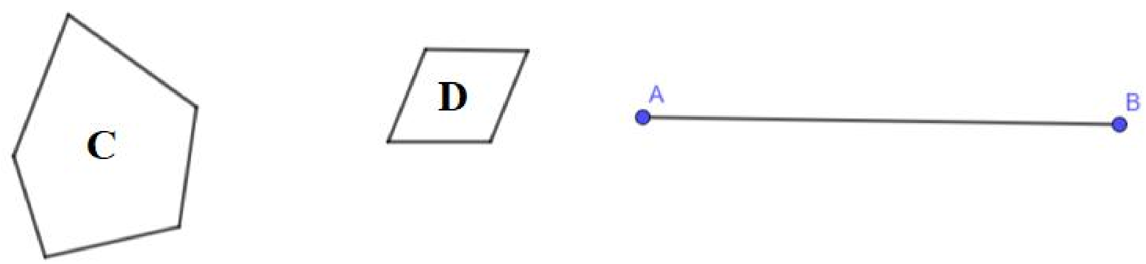
Em destaque, Euclides utiliza a divisão de um segmento em Meia e Extrema Razão, agora explicitamente, principalmente em estudos que utilizam equivalências de áreas. Na proposição VI, 30, estabelece um método para dividir um segmento em Meia e Extrema Razão, justamente através dessa equivalência.

Para a correta apresentação de VI, 30, é necessário entender a proposição anterior,

Proposição VI, 29. *À reta dada aplicar, igual à retilínea dada, um paralelogramo excedente por uma figura paralelogrâmica semelhante à dada.*

Dada a figura C e um paralelogramo D, utilizaremos o segmento AB como referência para a demonstração.

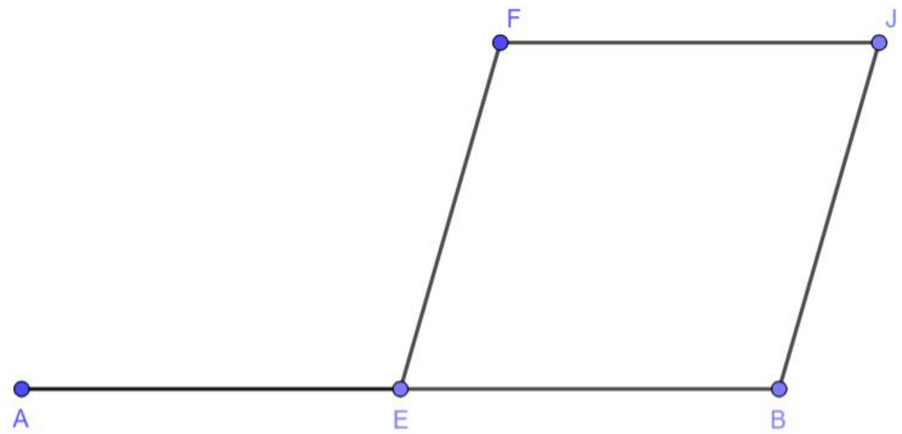
Figura 10 - Construção geométrica da Proposição VI, 29 (Parte 1)



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Sob o segmento AB, é marcado seu ponto médio E e construída uma figura semelhante ao paralelogramo D a partir de EB.

Figura 11 - Construção geométrica da Proposição VI, 29 (Parte 2)



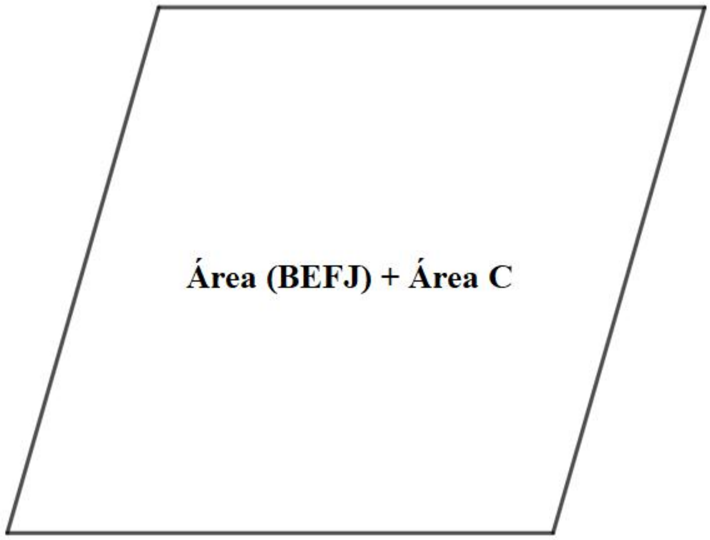
Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

A fim de esclarecer exatamente o objetivo dessa construção euclidiana, e até mesmo para o entendimento do que seja um *paralelogramo excedente*, citaremos Roque (2012):

> São dadas a reta AB, uma figura C (com determinada área) e uma figura D (com determinada forma). O problema consiste em aplicar à reta AB a figura AONG da Figura 15, com área igual à de C e com um excedente dado pela figura BONP, similar à D. Ou seja, queremos construir um paralelogramo com área igual à de uma outra figura (C, no exemplo), mas a construção deve ser feita com algo sobrando em relação ao segmento dado inicialmente (AB). (Roque, T. História da Matemática: Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas. p. 152. Ed. Zahar)

Dando prosseguimento, é construído um outro paralelogramo semelhante a D, com área equivalente à soma das áreas de BEFJ e C. Consequentemente, teremos um paralelogramo com medidas maiores do que BEFJ.

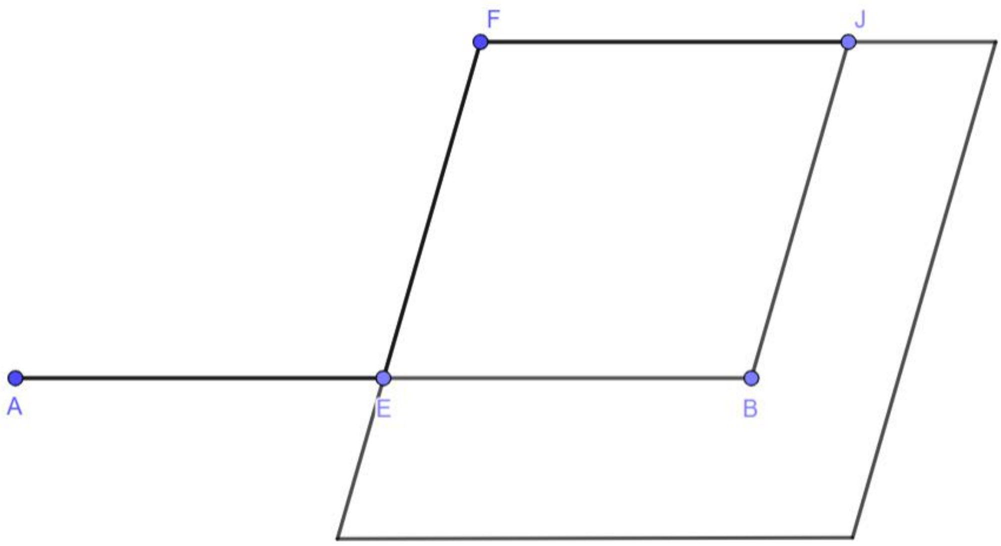
Figura 12 - Construção geométrica da Proposição VI, 29 (Parte 3)



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Pondo o lado superior desse paralelogramo sob o lado FJ, teremos a seguinte figura:

Figura 13 - Construção geométrica da Proposição VI, 29 (Parte 4)

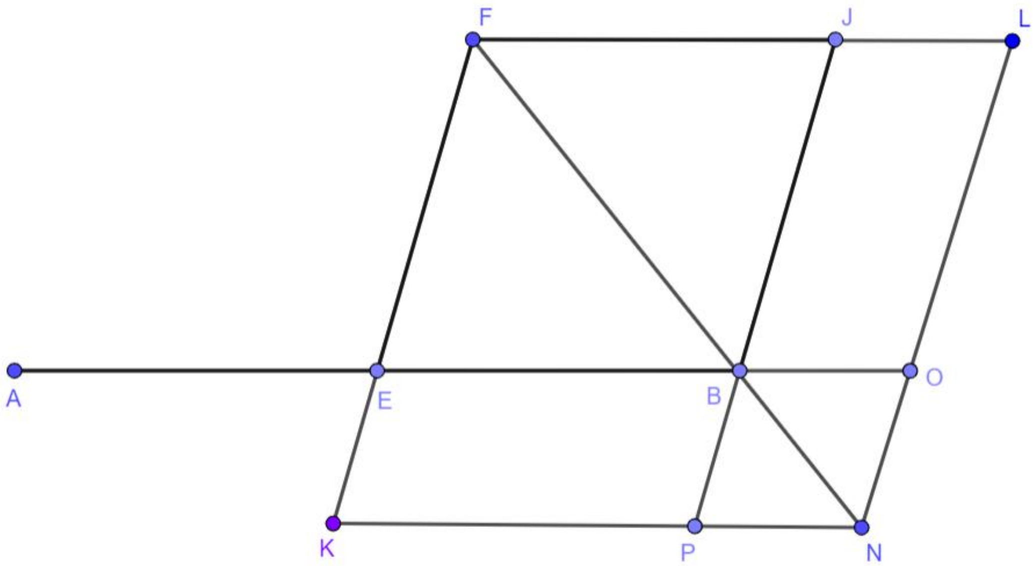


Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Uma vez que nas construções dos paralelogramos foram obedecidas as condições de semelhança entre eles, as diagonais de ambos acabam sobrepostas em virtude da inclinação equivalente. A diagonal FN fica estabelecida; os segmentos EF, BJ, EB e FJ são prolongados até os lados do paralelogramo maior, definindo os pontos M, P , O e L respectivamente.

Destaca-se que a área do gnomon[5] formado é equivalente a C, pois o paralelogramo maior fora construído utilizando justamente C e o paralelogramo BEFJ.

Figura 14 - Construção geométrica da Proposição VI, 29 (Parte 5)



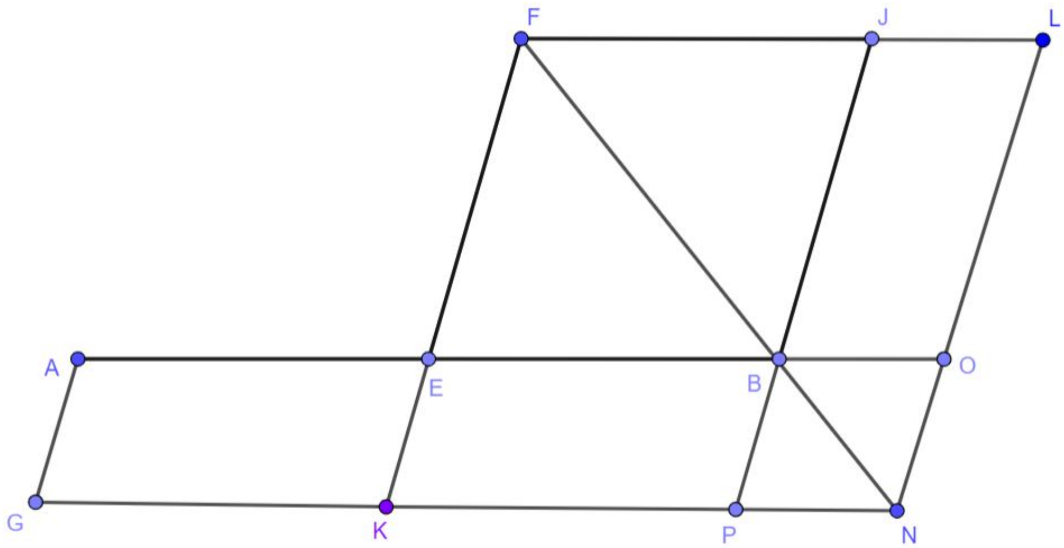
Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

As áreas de BEKP e BJLO possuem a mesma medida, como já demonstrado na Proposição II, 6. Logo, se FKN e FLN são iguais, BEF e BFJ também são, além de BNP e BNO.

A partir dos segmentos AO e ON, é formado uma paralelogramo com um dos segmentos sob KN, nomeado AGNO. Consequentemente, AEKG também assume a forma de paralelogramo, sendo esse idêntico a BEKP (e a BJLO), uma vez que E é o ponto médio de AB fazendo com que AE tenha medida do que EB.

[5] A figura "gnomon", na geometria plana, é obtida quando removemos um paralelogramo menor, com um vértice e dois lados coincidentes, de um paralelogramo maior.

Figura 15 - Construção geométrica da Proposição VI, 29 (Parte 6)



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Já que a área do gnomon é equivalente à área C fornecida, podemos inferir que a área do paralelogramo AGON será igual, pois BJLO e AEKG têm a mesma área.

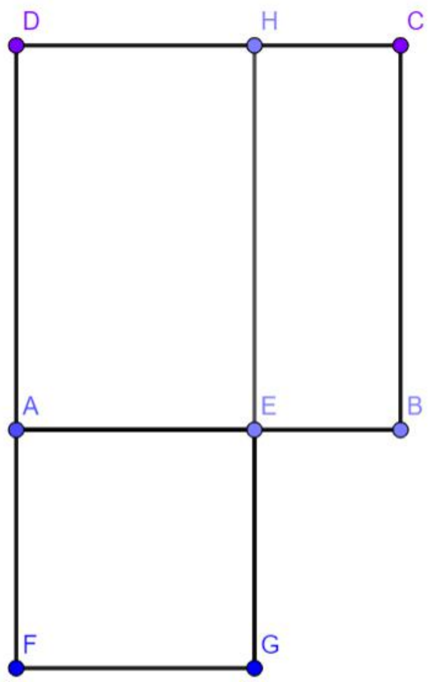
Portanto, a área do paralelogramo excedente BONP, construído a partir de uma figura C dada, sob o segmento de reta AB, é semelhante ao paralelogramo D estabelecido inicialmente.

Proposição VI, 30. *Cortar a reta finita dada em extrema e média razão.*

O método proposto por Euclides para dividir um segmento em Meia e Extrema Razão baseia-se na utilização da proposição VI, 29. Todavia, ao aplicar essa proposição na demonstração a seguir, é necessário que ocorra uma reconfiguração, na qual o paralelogramo em questão seja representado como um quadrado.

Segue, desta forma: dado o segmento AB, constrói-se um quadrado ABCD com base nele. Com a finalidade de obter um quadrilátero (leia-se: retângulo) de área equivalente à do quadrado ABCD, prolonga-se o lado AD, a partir de A, até o ponto F (conforme obtido em II, 6 e II, 10). Assim, as áreas de ABCD e DFGH são equivalentes.

Figura 16 - Construção geométrica da Proposição VI, 30



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Por VI, 29, a figura excedente obtida pelo prolongamento de AD e que apresenta as condições estabelecidas acima é semelhante à figura construída com base no segmento original AB. Em outras palavras, o quadrilátero AEFG também é um quadrado, semelhante ao quadrado ABCD.

Observando a equivalência entre áreas de ABCD e DFGH, é evidente que, ao remover o retângulo ADHE das figuras, as áreas de AEFG e BCHE também assumem o mesmo valor. Ou seja:

$$\text{Área (AEFG)} = \text{Área (BCHE)}$$
$$AE^2 = BC.BE$$

Considerando que o segmento BC possui a mesma medida que AB.

$$AE^2 = AB.BE$$
$$\frac{AE}{BE} = \frac{AB}{AE}$$

Que é precisamente a divisão de AB em Meia e Extrema Razão.

A divisão em Meia e Extrema Razão volta a ser citada no Livro XIII, uma vez que os livros posteriores ao VI não abordam temas que poderiam se associar à DMER.

Logo no início do Livro XIII, Euclides enuncia a proposição 1:

Proposição XIII, 1. *Caso uma linha reta seja cortada em extrema e média razão, o segmento maior, tendo recebido antes a metade da toda, serve para produzir o quíntuplo do quadrado sobre a metade.*

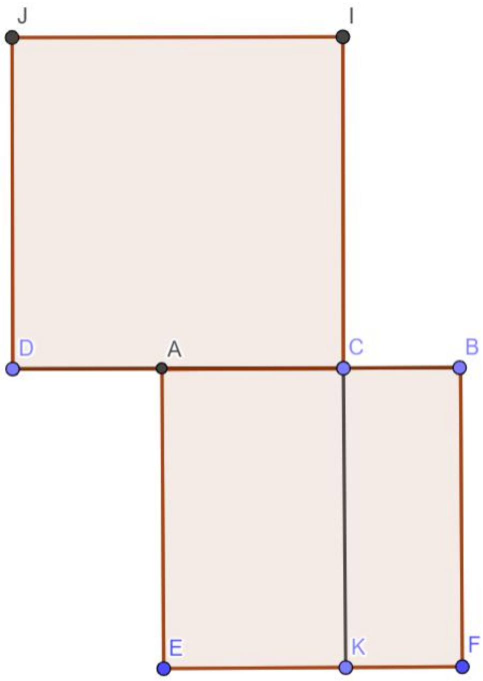
Dado um segmento AB dividido em Meia e Extrema Razão pelo ponto C, prolonga-se, a partir de A, o segmento dado, até o ponto D, de tal forma que AD seja equivalente à metade do segmento AB.

Figura 17 - Construção geométrica da Proposição XIII, 1 (Parte 1)

Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

São construídos os quadrados ABFE e CDJI. Prolonga-se o segmento CI, a partir de C, até o ponto K, sob o segmento EF. Consequentemente, K também divide EF em Meia e Extrema Razão, já que as linhas AB e EF são paralelas.

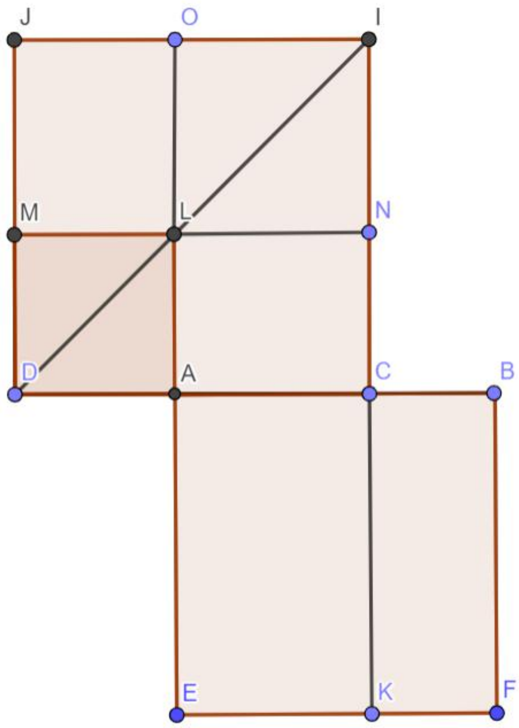
Figura 18 - Construção geométrica da Proposição XIII, 1 (Parte 2)



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Traça-se a diagonal DI e o quadrado ADML, com o ponto M sob o lado DJ e L sob a diagonal traçada. São estendidos os lados ML e AL até N e O, respectivamente, onde ambos são fixados sob os lados do quadrado CDJI.

Figura 19 - Construção geométrica da Proposição XIII, 1 (Parte 2)



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Em virtude da divisão dos segmentos em meia e extrema razão e da congruência dos segmentos AB e BC, além de AC e LN, podemos concluir que:

I) As áreas de BCKF e LNIO são equivalentes. Pela DMER no segmento AB, temos:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC} \quad .\colon \quad AC^2 = AB\,.\,BC$$

$$LN^2 = BF\,.\,BC$$

$$\text{Área (BCKF)} = \text{Área (LNIO)}$$

II) Sendo AB é o dobro de AD, AB = AE e AD = AL, então AE é o dobro de AL. Desta forma, é mantida essa proporção na área do retângulo ACKE, ou seja é o dobro da área de ACNL.

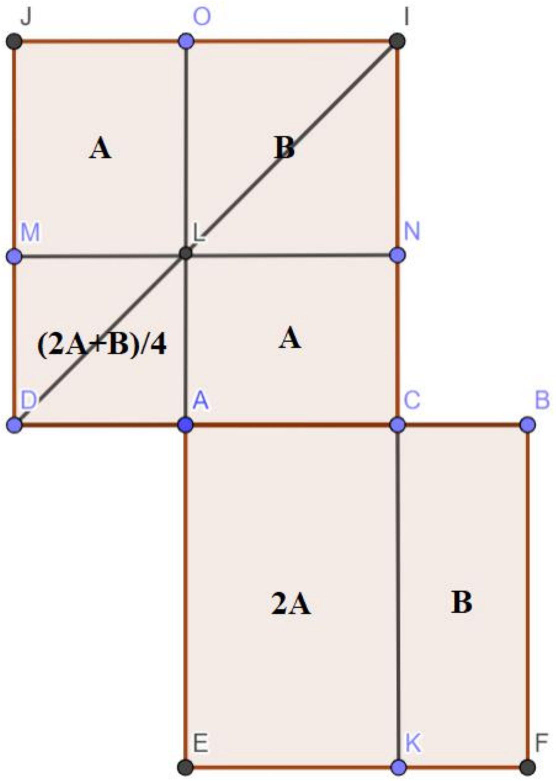
III) Seguindo o raciocínio, a área de ACKE equivale à soma das areas de ACNL e JMLO.

IV) Sendo AB o dobro de AD, a área do quadrado ABFE é o quádruplo da área de ADML.

V) Assim, a área do quadrado CDJI é equivalente a cinco vezes a do quadrado ADML, demonstrando a proposição.

A fim de fornecer uma versão mais fluida do exposto acima, colocaremos as áreas de todas as figuras em função de A e B, sendo A a área de ACNL e B, de BCKF.

Figura 20 - Construção geométrica da Proposição XIII, 1 (Parte 3)



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

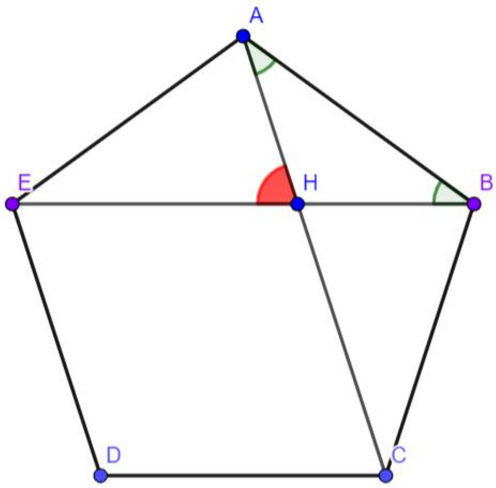
Proposição XIII,8. *Caso retas estendam-se sob dois ângulos consecutivos de um pentágono equilátero e equiângulo, cortam-se em extrema e média razão, e os segmentos maiores delas são iguais ao lado do pentágono.*

Tendo em vista a construção de um pentágono regular inscrito em um círculo presente na proposição IV, 10, são traçadas as diagonais AC e BE.

Como os lados do pentágono possuem mesma medida, os triângulos ABE e ABC são isósceles e congruentes. Com isso, os ângulos BAC e ABE também possuem a mesma medida.

Utilizando a regra do ângulo externo em AHB, o ângulo AHE é o dobro da medida dos assinalados anteriormente.

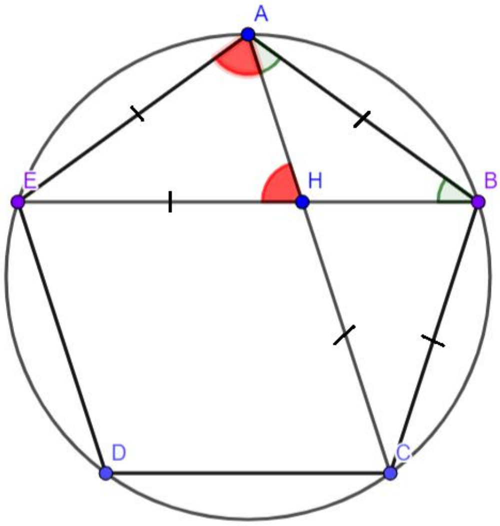
Figura 21 - Construção geométrica da Proposição XIII, 8 (Parte 1)



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Observando a figura, os vértices do pentágono ABCDE dividem a circunferência em 5 arcos de mesma medida. Os ângulos ABE e ABC "enxergam", cada um, um desses arcos provenientes do pentágono. Já o ângulo CAE "enxerga" dois desses arcos, e, assim, possui o dobro da medida dos ângulos ABE e ABC. Com isso, o triângulo AEH é isósceles, com AE = AH. De modo análogo, AH também possui mesma medida que o lado do pentágono.

Figura 22 - Construção geométrica da Proposição XIII, 8 (Parte 2)



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Visto que os triângulos ABE e ABH são semelhantes (ângulos com mesmas medidas), aplica-se a proporção:

$$\frac{BE}{AB} = \frac{AB}{BH}$$

Como acima demonstrado, AB = EH. Desta forma:

$$\frac{BE}{EH} = \frac{EH}{BH}$$

Justamente a definição da divisão em Meia e Extrema Razão.

A construção do icosaedro e dodecaedro utilizam algumas das proposições expostas acima, além de várias outras contidas ao longo dos treze livros de *Os Elementos*. Essas construções sao destrinchadas nas proposições XIII, 16 e XIII, 17, respectivamente, e são extremamente alongadas por Euclides. A fim de focar no que temos como temas centrais para discussão histórica da DMER, o poliedros de 12 e 20 faces serão estudados de maneira breve na subseção seguinte..

Ainda no Livro XIII, outros teoremas também são enunciados (2 ao 6) com a Meia e Extrema Razão, e todos são preparativos para a construção dos poliedros regulares. Devemos lembrar que *Os Elementos* carrega demonstrações graduais, e os teoremas e definições desse livro acabam sendo uma preparação para o estudo seguinte, nesse caso, os poliedros platônicos.

1.4. **A DMER sob uma perspectiva moderna**

Observamos anteriormente como Euclides emprega uma linguagem matemática consideravelmente diferente da utilizada atualmente. A ausência de unidades de medida acaba implicando em um alongamento de muitas de suas definições e proposições.

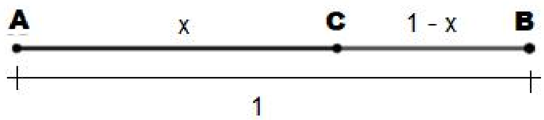
Portanto, a fim de não neglicenciar a propriedade central do tema, a Meia e Extrema Razão, apresentaremos um repertório de análises sob a perspectiva matemática contemporânea. Isso proporcionará um melhor e mais amplo entendimento matemático da DMER.

1.4.1. O valor numérico da DMER: Phi (Φ)

Ao estudarmos novamente a definição da DMER, desta vez adotando que o segmento dividido possui uma unidade de medida, chegamos a um valor numérico para a razão entre os segmentos definidos pela divisão, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, usualmente vinculado à letra grega Φ (*phi*), sendo popularmente conhecida como “número de ouro”

Aplicando a divisão em Meia e Extrema Razão em um segmento AB de medida unitária, e chamando o segmento maior encontrado após a divisão de x, temos que:

Figura 23 - Segmento de reta unitário dividido em Meia e Extrema Razão



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

$$1.(1-x) = x^2$$

$$1 - x = x^2$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4.1.(-1) = 5$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Descarta-se a raiz negativa da equação, já que estamos tratando de medida geométrica.

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Calculando, então, a razão entre os dois segmentos dispostos na condição:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5\ -1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Ao adotar-se a letra grega *phi* (Φ) na representação:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}61803398\ldots$$

1.4.2. Algumas curiosas propriedades algébricas de Φ:

O número de ouro possui uma grande quantidade de propriedades matemáticas que são intrigantes.

Por exemplo, temos uma relação curiosa entre Φ, Φ^2 e $1/_{\Phi}$.

$$\Phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Ou seja, $\Phi^2 = 1 + \Phi = 2{,}61803398\ldots$

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2.(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5}).(1-\sqrt{5})} = \frac{2.(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1$$

Ou seja, $1/_{\Phi} = \Phi - 1 = 0{,}61803398\ldots$

Logo, os três números possuem o mesmo posicionamento das infinitas casas decimais, com uma diferença unitária para mais ou menos, a partir de Φ.

De uma forma mais ampla, podemos estabelecer a seguinte identidade:

$$\Phi^{n+2} = \Phi^{n+1} + \Phi^n$$

Demonstração: Inicialmente, utilizaremos um n tal que $n > 0$.

$$\Phi^{n+1} + \Phi^{n} = \Phi^{n}.\Phi + \Phi^{n} = \Phi^{n}.(\Phi + 1) = \Phi^{n}.\Phi^{2} = \Phi^{n+2}$$

Já para $n < 0$, deve existir um k tal que $n =- k$, onde $k > 0$.

$$\Phi^{-k} = \frac{\Phi^{2}}{\Phi^{k+2}} = \frac{1+\Phi}{\Phi^{k+2}} = \frac{1}{\Phi^{k+2}} + \frac{\Phi}{\Phi^{k+2}} = \Phi^{-k-2} + \Phi^{-k-1}$$

Substituindo $-k = n$, temos:

$$\Phi^{n} = \Phi^{n-2} + \Phi^{n-1}$$

Enfim, para $n = 0$, se $\Phi^{2} = 1 + \Phi$, então

$$\Phi^{2} = \Phi^{0} + \Phi^{1}$$

Algumas expressões inusitadas são obtidas em decorrência das propriedades demonstradas acima.

A primeira que será exposta é

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}}$$

Assumindo que não sabemos o valor numérico da expressão, igualaremos a mesma a x. Logo,

$$x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado

$$x^2 = \left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}\,)\right)^2$$

$$x^2 = 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$$

$$x^2 = 1 + x$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Equação do 2° grau que já estudamos e que possui como raiz positiva (que é o caso da expressão acima), Φ.

Uma outra expressão inusitada que é vinculada a Φ é:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}$$

Para encontrar seu valor numérico, utilizaremos um método análogo ao anterior, ou seja,

$$x = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}$$

$$x = 1+\frac{1}{x}$$

$$x^2 = x + 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Novamente o resultado será decorrente da equação quadrática de raiz positiva Φ.

1.4.3. A progressão aritmética/geométrica áurea

De acordo com a demonstração da identidade $\Phi^{n+2} = \Phi^{n+1} + \Phi^{n}$, pode-se concluir que a sequência numérica

$$\ldots, \Phi^{-n}, \ldots, \Phi^{-2}, \Phi^{-1}, \Phi^{0}, \Phi^{1}, \Phi^{2}, \ldots, \Phi^{n}, \ldots$$

é aditiva e multiplicativa, concomitantemente.

Essa característica peculiar da progressão é fonte de estudos em diferentes áreas além da matemática, gerando, como veremos no Capítulo 3, mais uma associação à sequência de Fibonacci, inclusive com aplicações na botânica. (CONTADOR, 2011).

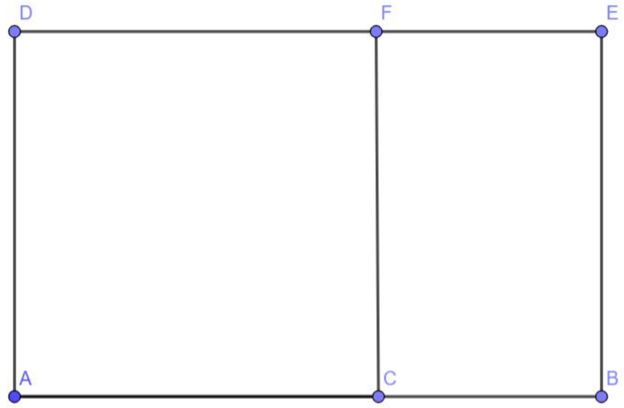
Denominada como "progressão geométrica áurea", a sequência pode ser reescrita utilizando expressões com coeficientes numéricos pertencentes à sequência de Fibonacci, tornando mais leve a exposição dos termos. Também será apresentada essa forma sequencial reformulada no terceiro capítulo.

1.4.4. O retângulo áureo

O retângulo que apresentaremos a seguir é uma das figuras mais exibidas quando tratamos da razão áurea de forma geométrica.

A figura em questão adota um molde de acordo com a Proposição II, 11. Um segmento de reta AB é dividido em Meia e Extrema Razão, um quadrado ACFD é construído a partir do maior pedaço e um retângulo BCFE é formado a partir de um dos lados do quadrado e o outro oriundo do pedaço menor resultante da DMER.

Figura 24 - Construção do retângulo áureo (Parte 1)



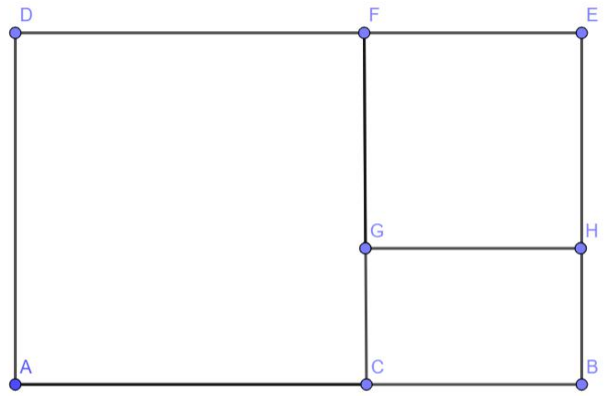
Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Neste caso, de acordo com a condição de formação da figura, temos que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC} = \Phi$$

Aplicando a DMER no lado maior do retângulo ABEF, e repetindo o processo adotado acima, obtemos um novo quadrado e retângulo, EFGH e BCGH, respectivamente.

Figura 25 - Construção do retângulo áureo (Parte 2)



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

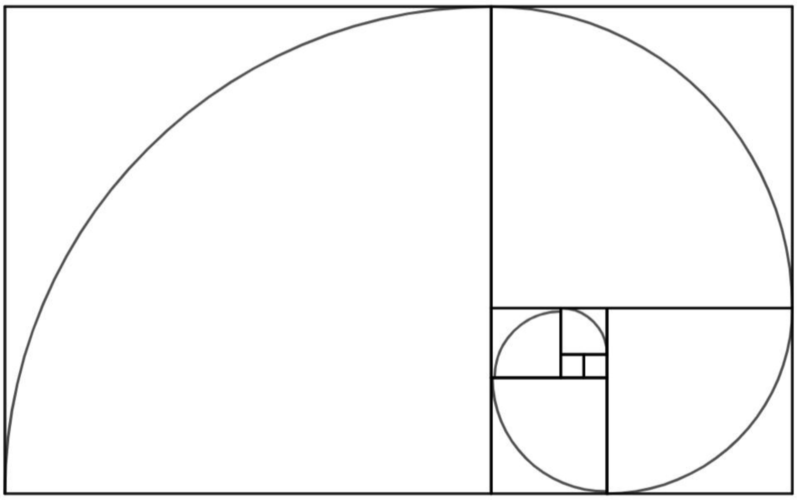
Daí,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC} = \frac{BE}{EH} = \frac{EH}{BH} = \Phi$$

Ao aplicar o mesmo processo em cada novo retângulo formado, observamos uma característica chamada de auto-propagação, ou seja, uma repetição respeitando as mesmas condições iniciais, infinitamente. Em outras palavras, a DMER continuará ocorrendo indefinidamente nos retângulos áureos oriundos de cada nova divisão, e as proporções entre os lados, sempre iguais a Φ.

À frente, veremos que a sequência de Fibonacci encaixa-se perfeitamente nos quadrados formados a partir do conjunto inicial, proporcionado mais uma evidência da associação entre a sequência e a DMER.

Figura 26 - Construção do retângulo áureo (Parte 3)

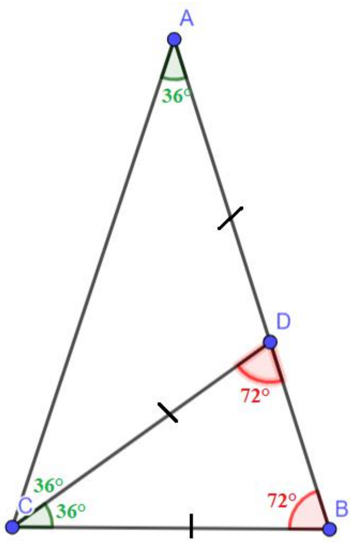


Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Ao traçamos um arco de 90° de raio equivalente à medida dos lados dos sucessivos quadrados formados no interior do retângulo áureo, obtemos uma espiral logarítmica denominada espiral de Fibonacci ou espiral áurea. Como será abordado adiante, toda espiral áurea é uma espiral logarítmica; porém, o oposto não ocorre.

1.4.5. O triângulo áureo

Figura 27 - Construção do triângulo áureo (Parte 1)



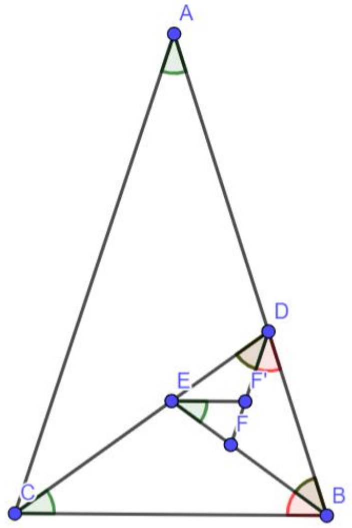
Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Os triângulos obtidos a partir da Proposição IV, 10 de *Os Elementos* são chamados de triângulos áureos (36° - 72° - 72°). Aplicando a semelhança de triângulos entre os dois, temos:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DB} = \Phi$$

Dividindo infinitamente um dos lados congruentes do triângulo isósceles em Meia e Extrema Razão, vão sendo formados outros semelhantes e correlacionados à razão áurea, com uma razão de semelhança equivalente a *phi* (Φ). A auto-propagação volta a atuar.

Figura 28 - Construção do triângulo áureo (Parte 2)

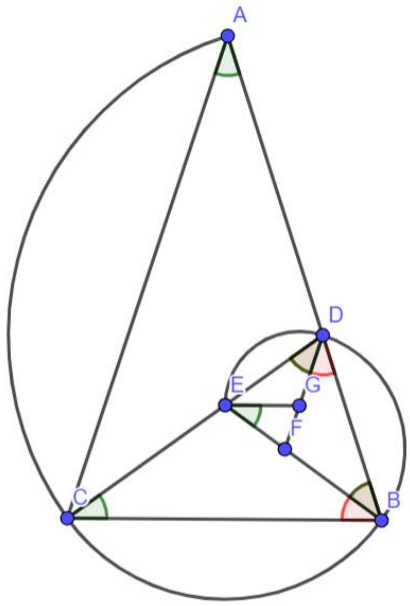


Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DB} = \frac{CD}{CE} = \frac{BE}{EF} = \frac{DF}{FF'} = \Phi$$

Unindo os vértices de cada triângulo isósceles obtidos sob arcos de circunferência de 108°, sempre partindo daquele que possui o ângulo distinto, obtemos uma outra espiral logarítmica denominada espiral áurea triangular.

Figura 29 - Construção do triângulo áureo (Parte 2)



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

1.4.6. O pentagrama

A construção do pentágono na proposição IV, 11, fornece um esboço da formação de um pentagrama, uma figura importantíssima para o estudo da história da DMER.

Utilizaremos a Figura 8 como ponto de partida para o estudo do pentagrama. Ao traçar a diagonal DE, teremos um pentagrama perfeito formado a partir das diagonais de um pentágono regular.

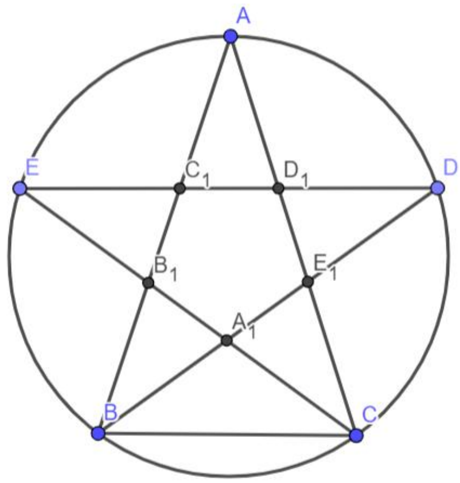
Além disso, como indicado em IV, 10, a razão entre os segmentos que formam o pentagrama (diagonais do pentágono) e o lado do pentágono regular que o origina está em Meia e Extrema Razão.

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AE_1} = \frac{BD}{BE_1} = \frac{CE}{CB_1} = \frac{DE}{DC_1} = \Phi$$

Outra característica apontada (Proposição XIII, 8) foi que as diagonais do pentágono regular se interceptam em Meia e Extrema Razão. Algebricamente:

$$\frac{AB_1}{BB_1} = \frac{AE_1}{CE_1} = \frac{BE_1}{DE_1} = \frac{CB_1}{EB_1} = \frac{DC_1}{EC_1} = \Phi$$

Figura 30 - Construção de um pentagrama

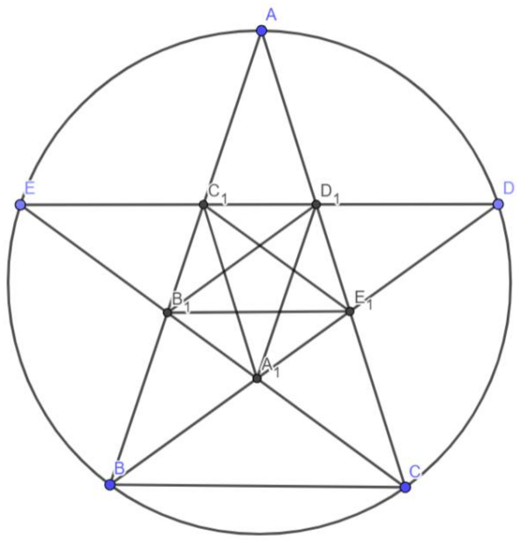


Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Ao aplicarmos o fenômeno da auto-propagação, podemos replicar infinitamente a inscrição de pentagramas, visto que novos polígonos regulares se formam no centro dessas figuras.

Na Figura 30, podemos observar que no pentagrama gerado, surge um novo pentágono denominado $A_1B_1C_1D_1E_1$. As diagonais traçadas nesse pentágono, de modo análogo, formam um outro pentagrama, e assim sucessivamente.

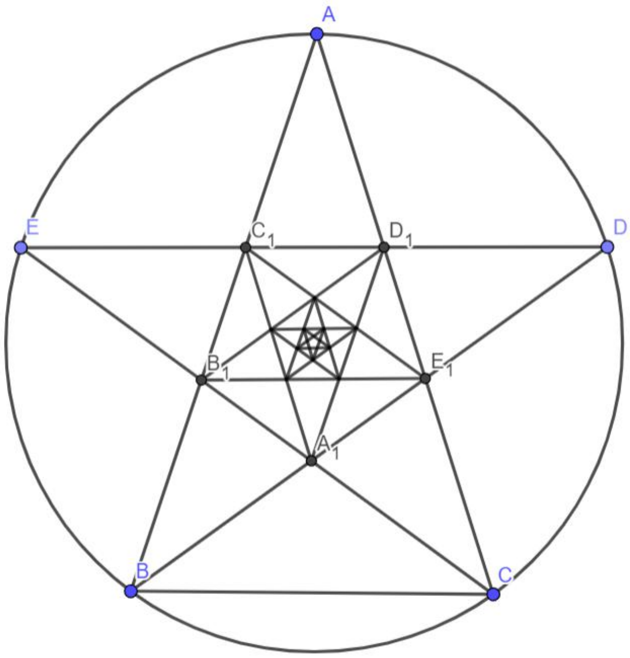
Figura 31 - Auto-propagação de um pentagrama (Parte 1)



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

A auto-propagação fica evidenciada na Figura 32, onde pentagramas e pentágonos se intercalam infinitamente, todos obtidos a partir do mesmo procedimento.

Figura 32 - Auto-propagação de um pentagrama (Parte 2)



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

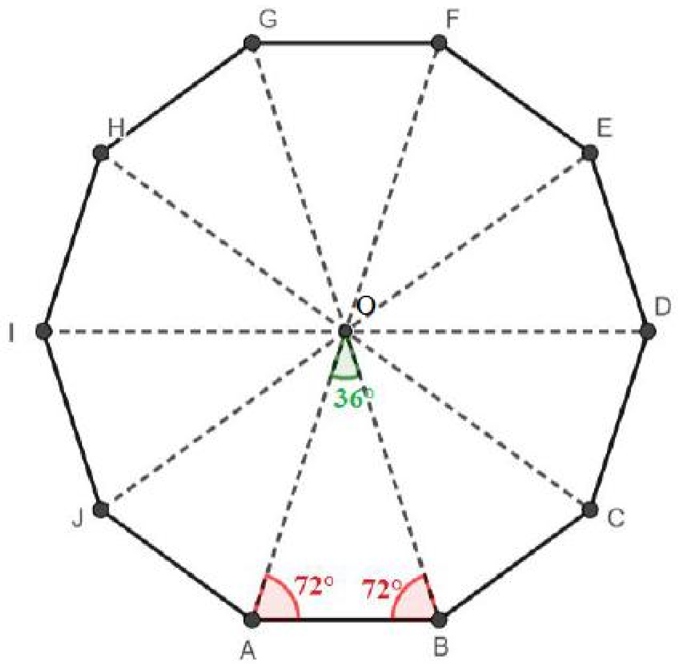
Devido a esse fenômeno e às características singulares da figura, o pentagrama ocupa a liderança em segmentos divididos (e subdivididos) em Meia e Extrema Razão.

1.4.7. O decágono regular

O estudo do decágono regular é de vital importância quando analisamos a história da Meia e Extrema Razão. O polígono desempenha um papel significativo em obras que contribuem para a compreensão da evolução histórico-matemática da definição de Euclides.

Apesar disso, Euclides não enuncia sua construção em *Os Elementos*, ao contrário do que fez com outras figuras. Em vez disso, ele apenas menciona o decágono em proposições contidas no livro IV.

Figura 33 - Construção de um decágono regular



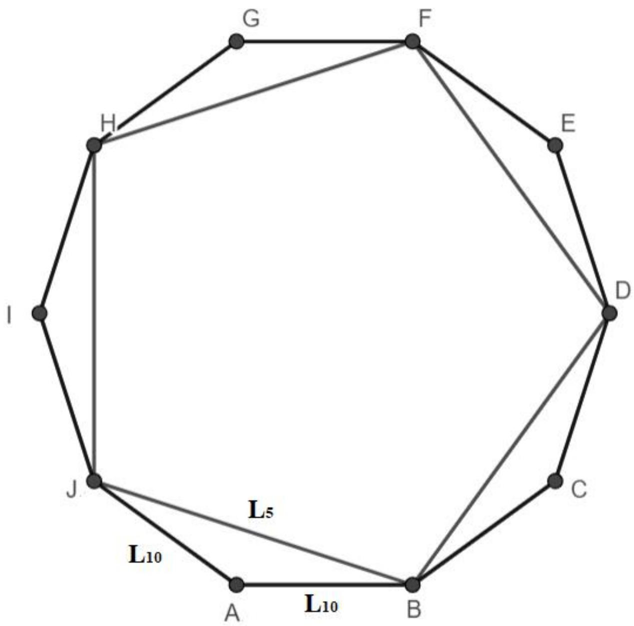
Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

O decágono regular pode ser construído a partir de triângulos isósceles 36° - 72° - 72°. Ao construí-los de modo que seja mantido um dos lados congruentes comum ao triângulo adjacente, a construção terá como consequência o decágono regular.

O polígono de 10 lados mantém a presença da DMER oriunda dessa construção. Por exemplo, a razão entre a metade da diagonal que passa pelo centro e seu respectivo lado é equivalente a *phi* (Φ).

Também é possível relacionar o lado do decágono regular estabelecido ao lado do pentágono formado interligando vértices alternados.

Figura 34 - Relacionando o decágono regular à Meia e Extrema Razão (Parte 1)



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

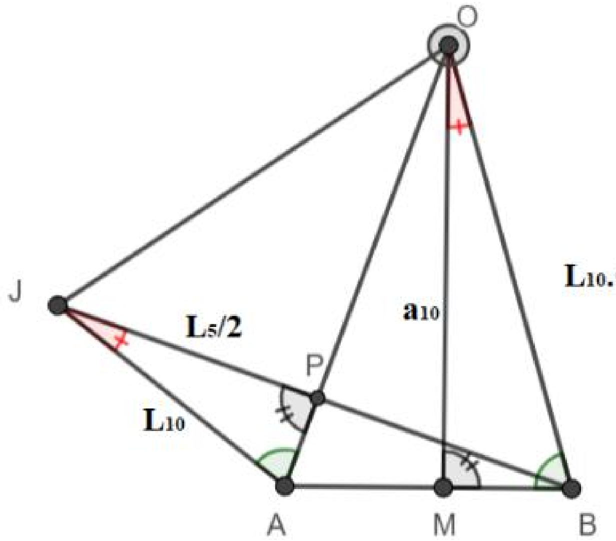
Para efeito de demonstração, denominaremos o lado do pentágono regular como L_5, e do decágono regular como L_{10}. Além disso, o apótema do decágono regular será apresentado como a_{10}

Destacando os vértices J, A e B, além do ponto central do decágono regular (ponto O, Figura 33), é traçado seu respectivo apótema, que, em virtude da usa propriedade perpendicular e da natureza isósceles do triângulo ABO, encontra o lado AB em seu ponto médio M. Ainda, pelo exposto acima

$$\frac{BO}{AB} = \Phi$$

$$BO = \mathrm{L}_{10}.\Phi$$

Figura 35 - Relacionando o decágono regular à Meia e Extrema Razão (Parte 2)



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

O ponto P, interseção entre os segmentos BJ e AO, produz efeito análogo ao do apótema, ou seja, AP é altura e mediana do triângulo ABJ. Dessa forma, temos os triângulos APJ e BMO semelhantes. Aplicando a proporção resultante da semelhança

$$\frac{BO}{AJ} = \frac{MO}{JP}$$

$$\frac{L_{10}.\Phi}{L_{10}} = \frac{a_{10}}{L_5/_2}$$

$$2.a_{10} = L_5.\Phi$$

$$\frac{2.a_{10}}{L_5} = \Phi$$

Ou seja, a razão entre o dobro do apótema do decágono e o lado do pentágono correspondente também encontram-se em razão áurea.

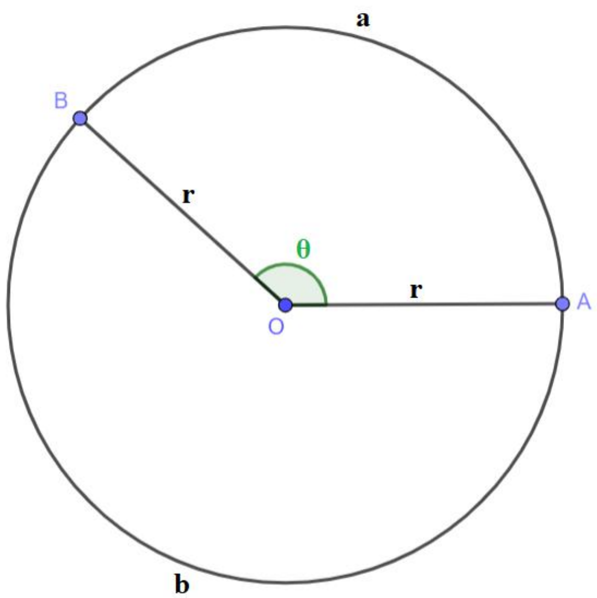
1.4.8. O ângulo áureo

Outra figura de regular utilização envolvendo a Divisão em Meia e Extrema Razão é o ângulo áureo.

Um ângulo áureo é encontrado quando dividimos uma circunferência em dois arcos tais que a razão entre suas medidas seja igual a Φ. Isso resulta em uma medida aproximada de 137,5°, medida essa utilizada como ângulo áureo.

Demonstração: Em um círculo de centro O e raio r, são marcados sob a circunferência os pontos A e B. O arco menor AB, formado a partir da divisão, é chamado de a e o maior, b. O ângulo central AOB tem medida igual a θ.

Figura 36 - Definição do ângulo áureo



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

A partir da afirmação de que a razão entre a e b é equivalente a Φ, os valores ficam submetidos à proporção oriunda da definição euclidiana:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Seguindo uma análise geométrica, infere-se que:

I) $a + b = 2.\pi.r$ (comprimento da circunferência)

II) $b = \frac{\theta.\pi.r}{180°}$

III) $a = \frac{(360° - \theta).\pi.r}{180°}$

Substituindo as igualdades na proporção obtida acima

$$\frac{2.\pi.r}{\frac{(360° - \theta).\pi.r}{180°}} = \frac{\frac{(360° - \theta).\pi.r}{180°}}{\frac{\theta.\pi.r}{180°}}$$

$$\frac{2\,.\,180°}{360° - \theta} = \frac{360° - \theta}{\theta}$$

$$360°\,.\,\theta = (360° \; - \; \theta)^2$$
$$360°.\,\theta = (360°)^2 - 2.360°.\,\theta + \theta^2$$
$$\theta^2 - 1080.\,\theta + (360°)^2 = 0$$

Ao resolver a equação do 2° grau obtida, temos como raízes:

$\theta_1 \cong 942{,}5°$ (descarta-se, já que $0° < \theta < 360°$)

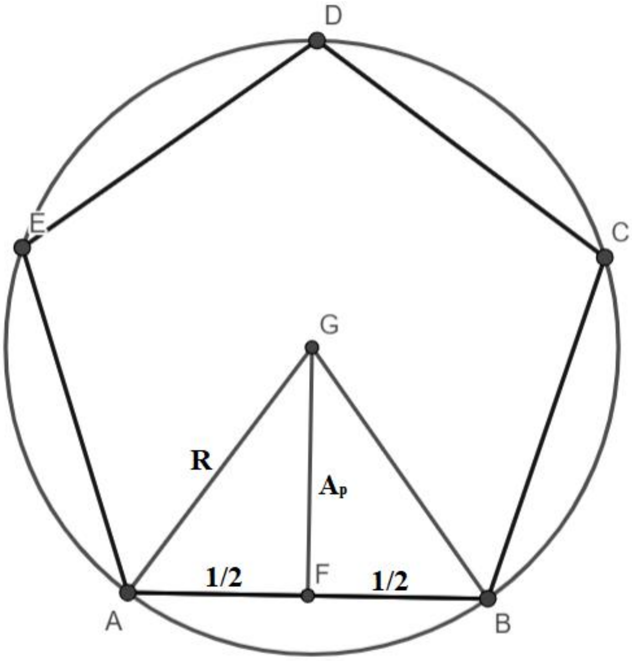
$\theta_2 \cong 137{,}5°$

Portanto, chega-se à medida de 137,5° para definir um ângulo áureo.

1.4.9. O seno e cosseno de 54° e a área do pentágono regular

Retomando o estudo do pentágono regular, continuaremos a adotar o exemplo de um pentágono com lados de comprimentos unitários. Conforme apresentando em IV, 11, a razão entre a diagonal e o lado do pentágono equivale à razão áurea. Com base nessa propriedade, e definindo *apótema* (A_p) como distância do centro da circunferência circunscrita ao polígono até o ponto médio de seu lado correspondente, temos

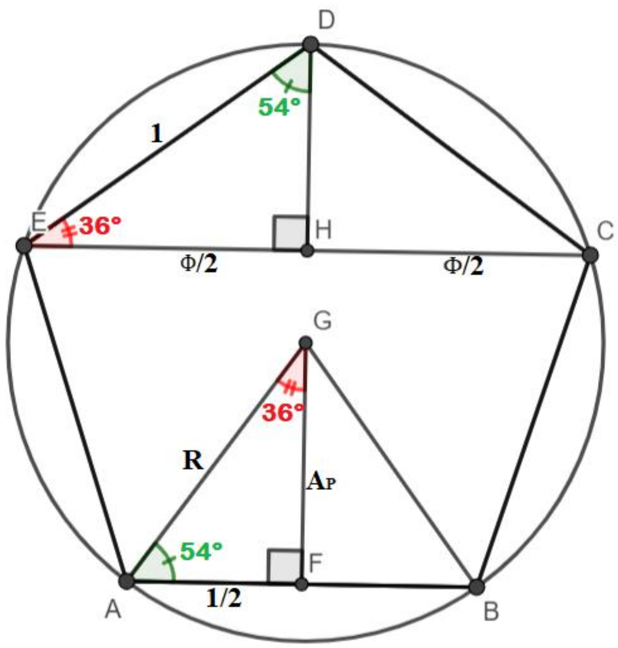
Figura 37 - Apótema de um pentágono regular



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Traçaremos a diagonal CE. De acordo com a construção, $\mathrm{CE} = \Phi$. Dada a natureza isósceles do triângulo CDE, a altura relativa ao vértice D, DH, também é bissetriz e mediana do segmento CE.

Figura 38 - Construção de triângulos retângulos do tipo 36° - 54° - 90°



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Consoante à construção, os triângulos AFG e DEH são semelhantes. Aplicando a razão de semelhança entre eles:

$$\frac{DE}{AG} = \frac{EH}{FG}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\Phi/_2}{A_P}$$

$$\frac{A_P}{R} = \frac{\Phi}{2}$$

Porém, a razão entre FG (A_P) e AG (R) também equivale ao seno de 54° (Observar o triângulo AFG). Ou seja,

$$sen\ 54° = \frac{\Phi}{2}\ (= cos\ 36°)$$

Pela identidade trigonométrica

$$sen^2\ 54° + cos^2\ 54° = 1$$

$$\frac{\Phi^2}{4} + cos^2\ 54° = 1$$

$$cos^2\ 54° = \frac{4 - \Phi^2}{4}$$

$$cos\ 54° = \frac{\pm\sqrt{4 - \Phi^2}}{2}$$

Descartando, para esse caso, o valor negativo

$$cos\ 54° = \frac{\sqrt{4 - \Phi^2}}{2}\ (= sen\ 36°)$$

Ainda utilizando propriedades trigonométricas, o valor da tangente é dado pela razão entre o seno e o cosseno de um respectivo ângulo. Portanto,

$$tan\ 54° = \frac{sen\ 54°}{cos\ 54°}$$

$$tan\,54° = \frac{\frac{\Phi}{2}}{\frac{\sqrt{4-\Phi^2}}{2}}$$

$$tan\,54° = \frac{\Phi}{\sqrt{4-\Phi^2}}$$

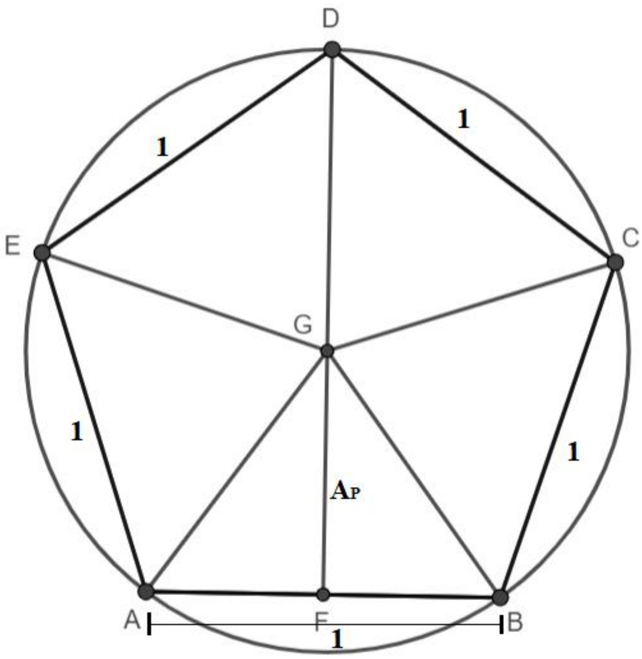
Novamente observando o triângulo AFG, vemos que a tangente também é equivalente à razão entre FG (A_P) e AF $(1/2)$.

$$\frac{A_P}{1/2} = \frac{\Phi}{\sqrt{4-\Phi^2}}$$

$$A_P = \frac{\Phi}{2.\sqrt{4-\Phi^2}}$$

Com os valores do seno, cosseno e tangente de 54°, bem como do apótema, agora nos concentraremos no cálculo da área do pentágono regular de lado unitário. Ao dividir o pentágono em cinco triângulos congruentes, conforme ilustrado na Figura 39, pode-se observar que a área do pentágono é igual a cinco vezes a área de AFG, uma vez que as áreas dos outros triângulos possuem o mesmo valor.

Figura 39 - Demonstração da área de um pentágono regular



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

$$\text{Área (ABCDE)} = 5 \,.\, \text{Área (ABG)}$$

$$\text{Área (ABCDE)} = 5 \,.\, \frac{1 \,.\, A_P}{2}$$

$$\text{Área (ABCDE)} = \frac{5}{2} \,.\, \frac{\Phi}{2.\sqrt{4-\Phi^2}}$$

$$\text{Área (ABCDE)} = \frac{5.\Phi}{4.\sqrt{4-\Phi^2}}$$

Podemos reescrever a igualdade substituindo o valor de $\Phi^2 = 1 + \Phi$

$$\text{Área (ABCDE)} = \frac{5.\Phi}{4.\sqrt{4-(1+\Phi)}}$$

$$\text{Área (ABCDE)} = \frac{5.\Phi}{4.\sqrt{3-\Phi}}$$

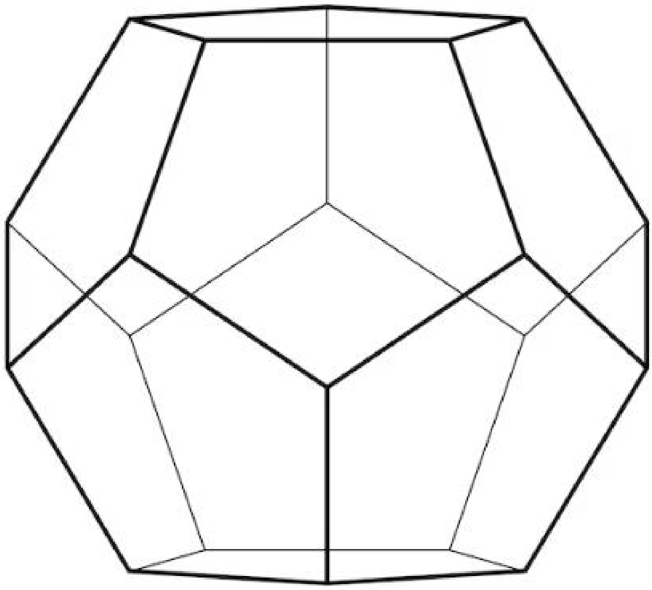
1.4.10. O dodecaedro

Adentrando ao universo dos poliedros regulares, analisaremos, primeiramente, o dodecaedro.

Definimos um dodecaedro como um sólido de 12 faces pentagonais, pentágono que, conforme apresentado, está intimamente ligado à DMER. Portanto, para a construção de um dodecaedro regular, é necessário o conhecimento de como construir um pentágono regular e, por conseguinte, o conhecimento da DMER.

Outrossim, as relações entre o dodecaedro e o número áureo também se manifestam ao calcular a área total e o volume da figura tridimensional (com aresta unitária).

Figura 40 - Dodecaedro vazado



FONTE: https://br.freepik.com/vetores-premium/ilustracao-em-vetor-de-dodecaedro-vazio-isolado-no-fundo-branco_20251558.htm

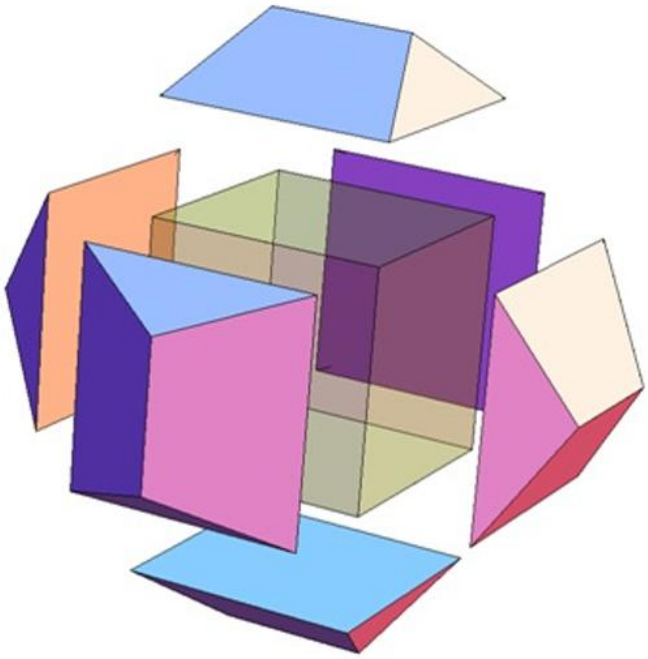
Através da área do pentágono regular com lados medindo 1 unidade, podemos facilmente deduzir o valor de sua área total, uma vez que esse valor equivale à área de 12 pentágonos congruentes ao exposto e que compõem as faces do poliedro. Dessa forma,

$$\acute{A}REA_{TOTAL} = 12\,.\,\frac{5.\Phi}{4.\sqrt{3-\Phi}}$$

$$\acute{A}REA_{TOTAL} = \frac{15.\Phi}{\sqrt{3-\Phi}}$$

Para o cálculo do volume, divide-se o sólido de tal forma que o resultado é um cubo e seis sólidos congruentes.

Figura 41 - Dodecaedro separado em alguns sólidos para cálculo do volume



FONTE: http://demonstrations.wolfram.com/RoofingACubeToProduceADodecahedron

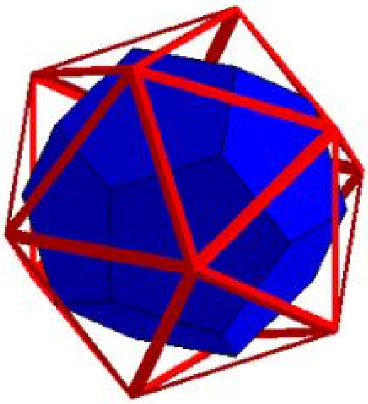
Após a sequência de cálculos para encontrar os volumes das figuras resultantes da divisão do dodecaedro (Figura 36), chega-se ao respectivo valor:

$$V_{DODECAEDRO} = \frac{5 - \Phi^3}{6 - 2\Phi}$$

1.4.11. <u>O icosaedro</u>

O poliedro de 20 faces triangulares, icosaedro, também possui relação com a razão áurea. Ao estabelecer os pontos centrais de cada face triangular e interligá-los, encontra-se um dodecaedro regular.

Figura 42 - Icosaedro com um dodecaedro inscrito, para cálculo do volume



FONTE: https://pt.wikipedia.org/wiki/Icosaedro

Com o volume do dodecaedro já estabelecido, restam calcular os volumes das figuras restantes, pirâmides de bases pentagonais. Ao efetuar o cálculo, encontra-se para o valor para volume do icosaedro de aresta unitária (em função de Φ)

$$V_{DODECAEDRO} = \frac{5.\Phi^5}{6}$$

2 A MEIA E EXTREMA RAZÃO ANTES DE EUCLIDES? UMA INCURSÃO NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA GRÉCIA ANTIGA

A discussão sobre a possível existência de alguma noção, total ou mesmo parcial, da DMER, anterior ao seu primeiro registro formal em *Os Elementos* tem sido objeto de constantes debates nas últimas décadas. Inclusive, muitas das lendas amplamente difundidas estão enraizadas neste período, que antecede o ano 300 aEC, como a construção da Pirâmide de Gizé pelos egípcios e o Partenon pelos gregos. Esses e outros mitos serão especialmente abordados no Capítulo 4 deste trabalho.

Com certa robustez, as principais teorias que poderiam antecipar a data de concepção da razão áurea estão vinculadas a Pitágoras e a Platão. Na verdade, de acordo com as principais fontes de investigação sobre o assunto, são os discípulos destes grandes personagens os verdadeiros focos de exame quando se trata deste tópico.

Ao tentar encontrar alguma evidência que reconheça algum domínio da DMER pelos povos antigos (anteriores a Pitágoras), não analisamos qualquer manuscrito, mas sim objetos arqueológicos que contêm figuras geométricas associadas à razão áurea em alguma parte de sua estrutura.

É provável que a maior referência no assunto seja o canadense Roger Herz-Fischler (1987), quando analisa de forma séria as especulações no terceiro capítulo de *A Mathematical History of the Golden Number*.

Os objetos arqueológicos analisados são oriundos de civilizações que existiram em um período entre a pré-história até 550 aEC, e os pentagramas sobressaem no cenário temático. No entanto, Herz-Fischler (1987) destaca que muitos dos desenhos encontrados em objetos trazem pentagramas completamente preenchidos, e sem qualquer rigidez geométrica, em uma representatividade provavelmente vinculada a estrelas ou a algum fundamento místico.

Em relação à origem desses objetos, são apresentados por Herz-Fischler (1987) cerâmicas, moedas e outros, em barro ou pedra, oriundos do Egito Antigo, Mesopotâmia e Babilônia. No entanto, até o momento não existe um arcabouço de provas que permita associar esses povos à Meia e Extrema Razão.

2.1. **A Escola Pitagórica: o pentagrama, o dodecaedro e os incomensuráveis**

2.1.1. Pitágoras e seus discípulos: uma breve história

Não há um estudante que conclua hoje o Ensino Fundamental que não tenha sido apresentado em algum momento ao famoso Teorema de Pitágoras. A importância deste teorema transcende o campo geométrico, uma vez que muitos indagam em sala de aula a figura histórica de Pitágoras. E a pergunta acaba sendo uma imersão na história, não só da matemática, mas da própria humanidade.

A vida de Pitágoras é repleta de incertezas. As biografias escritas por contemporâneos, se existiram, acabaram se perdendo, e o que se sabe é fruto principalmente de filósofos e historiadores de séculos posteriores. Ele próprio não deixou nenhum registro escrito conhecido, transmitindo instruções e ensinamentos unicamente da forma oral.

A certeza sobre sua vida reside na forma como inspirou a sociedade que o cercava, provocando questionamentos filosóficos, impulsionando o aprofundamento da matemática como ciência teórica, e estabelecendo um modo de viver alinhado ao misticismo de suas crenças e a uma ética irrepreensível. Inspirou tanto, que teve em vida, e depois desta, discípulos que formavam uma autêntica irmandade, chamada de Irmandade ou Escola Pitagórica.

Ainda sobre Pitágoras, é destacado pelas fontes literárias que seu conhecimento foi construído ao longo da vivência com diferentes mestres e civilizações, cada uma com perspectivas matemáticas, filosóficas e religiosas distintas. Nascido por volta de 570 aEC, na ilha de Samos, hoje parte da Grécia e bem próxima à costa turca, não há qualquer relato difundido sobre sua infância.

Alguns autores defendem que Pitágoras recebeu instrução em Mileto, com Tales (c. 624 aEC - c. 546 aEC), o que poderia explicar parte da sua formação filosófica e matemática, uma vez que Tales foi um dos pioneiros em negar a mitologia grega como religião, apresentando novas ideias para a origem do Universo. É relatado por esses que quando a ilha foi tomada pelo tirano Polícrates (c. 610 aEC - c. 522 aEC), em 538 aEC, Pitágoras acaba migrando para o Egito, e depois, em algum momento, para a Babilônia, conforme mencionado por Livio (2006):

> Talvez seguindo o conselho de seu suposto professor, o matemático Tales de Mileto, Pitágoras tenha vivido durante algum tempo (uns vinte e dois anos, segundo alguns relatos) no Egito, onde ele teria aprendido Matemática, Filosofia e temas religiosos com os sacerdotes egípcios. Depois que o Egito foi esmagado pelas forças persas, Pitágoras pode ter sido levado para a Babilônia com alguns membros do clero. Lá ele teria travado contato com o conhecimento matemático mesopotâmico. (Livio, Mario. Razão áurea (p. 30). Editora Record. Edição do Kindle.)

A imprecisão biográfica também ocorre com os pitagóricos, assim denominados os integrantes da Irmandade. Até mesmo a identificação de membros é alvo de controvérsia, não havendo certeza sobre a participação de determinados nomes na Escola. Assim como Pitágoras, não produziram material escrito e qualquer avanço ou descoberta por um de seus membros não era a ele atribuída, mas sim ao próprio Pitágoras ou à irmandade como um todo.

Essa cultura do anonimato demonstra a devoção quase religiosa que era dada a Pitágoras por parte de seus discípulos, como pode-se notar nos relatos do filósofo e escritor grego Jâmblico de Calcis (245 - 325), autor de *A vida de Pitágoras*, trabalho que se concentra principalmente na filosofia e ética pitagórica. Jâmblico reproduz uma suposta fala dos pitagóricos: “tudo pertence a Ele”, referindo-se a ele como figura central do conhecimento, com um ar de divindade.

Entretanto, é incontestável que a matemática grega teve com os pitagóricos um salto teórico e intelectual. Na perspectiva da época, a matemática era uma ferramenta para cálculos voltados para comércio, medições e registros de contagens. Segundo Livio (2006), “Pitágoras, por outro lado, foi um dos primeiros a compreender números como entidades abstratas que existem por si mesmos”. Esta nova visão foi determinante para estudos posteriores, e, inclusive, para a elaboração de *Os Elementos.*

Um dos primeiros a escrever sobre os pitagóricos foi o célebre filósofo grego Aristóteles (384 aEC – 322 aEC). No seu conjunto de tratados filosóficos *Metafísica*, Aristóteles cita como os pitagóricos se conectavam à matemática de modo fundamental, reconhecendo-a como base para a compreensão de todos os princípios universais.

> Ao mesmo tempo, porém, e ainda antes, os chamados pitagóricos se dedicaram à matemática e foram os primeiros a desenvolver esta ciência; e, estudando-a, passaram a acreditar que seus princípios são os princípios de tudo. (Aristóteles, -384 a -332, Metafísica 985b; Herz-Fischler, R. A Mathematical History of the Golden Number (Tradução Própria). p.63. Dover Publications, INC. New York, 1987)

Além disso, os números desempenhavam um papel vital no modo de vida pitagórico, essenciais para a compreensão das questões relacionadas à ordem e à harmonia do universo. Tanto que, segundo Livio (2006), a frase “tudo é arrumado de acordo com números” é atribuída ao próprio Pitágoras, destacando sua crença em um significado único para cada número.

Ainda segundo Livio (2006), para os pitagóricos, por exemplo, "o número 6 era o primeiro número perfeito, e o número da criação. O adjetivo *perfeito* era anexado a números que eram exatamente iguais à soma de todos os seus divisores (números que os dividem sem resto) exceto ele mesmo, como 6 = 1 + 2 + 3." e o "10 unia os números que representam todas as dimensões, mas também combinava todas as propriedades de unicidade (como expresso pelo 1), polaridade (expresso pelo 2), harmonia (expresso pelo 3) e espaço e matéria (expresso pelo 4)", uma vez que 10 = 1 + 2 + 3 + 4 e, assim, chamado de *tudo*.

Adentrando ao tema do trabalho, a relação entre Pitágoras, pitagóricos e a divisão em Meia e Extrema razão é objeto de inúmeras pesquisas e várias vertentes, mas nenhuma delas conseguiu encontrar uma prova cabal do domínio da escola pitagórica sobre a DMER. Isso abre espaço para inúmeras conjecturas, amplamente discutidas até hoje. Herz-Fischler (1987) dedica um capítulo do livro já citado aos pitagóricos, reunindo vários registros documentais que poderiam conectar a DMER à Escola Pitagórica, o que, por sua vez, ergueria questionamentos sobre a autoria de Euclides na DMER.

2.1.2. Pitágoras e o pentagrama

Como vimos anteriormente, o pentagrama é a figura com a maior quantidade de segmentos divididos em meia e extrema razão. A figura foi (e ainda é) usada como símbolo místico em diferentes religiões e seitas. Não diferente com a Irmandade Pitagórica, o pentagrama era diretamente relacionado a algo sagrado, um símbolo que representava os cinco elementos da natureza: água, ar, fogo, terra e o éter, que era um elemento associado ao movimento dos corpos celestes, preenchendo o espaço acima da Terra, algo puro e celestial. Essa relação dos cinco elementos com o pentagrama lhe conferia este caráter sacro.

Além disso, algumas pesquisas afirmam que o pentagrama possuía um propósito de saudação, chamada de "Saúde". Herz-Fischler (1987) traz uma passagem do escritor e filósofo sírio Lucian (125 - 180), uma das fontes mais utilizadas em pesquisas sobre os pitagóricos, explorando a relevância do símbolo:

> O divino Pitágoras optou por não nos deixar nada próprio, mas se podemos julgar por Ocellus, o Leucanian, e Archytas e seus outros discípulos, ele fez não prefixo "Alegria para você" ou "Faça bem", mas disse-lhes para começar com "Saúde para você". De qualquer forma, toda a sua escola em cartas sérias entre si começou imediatamente com "Saúde para você", como uma saudação mais adequada tanto para o corpo quanto para a alma, abrangendo todos os bens humanos. De fato, o

> Pentagrama, o triplo triângulo de interseção que eles usavam como símbolo de sua seita [literalmente, aqueles do mesmo ensinamento], eles chamavam de "Saúde". (Herz-Fischler, R. A Mathematical History of the Golden Number (Tradução Própria). p.65. Dover Publications, INC. New York, 1987)

Pelo fato de Lucian utilizar do sarcasmo em vários de seus trabalhos, há um entendimento convencional que existe certo comprometimento de suas obras, afastando-o de ser uma fonte fidedigna da história da matemática. Porém, Herz-Fischler (1987) apresenta um outro trecho atribuído ao dramaturgo e filósofo grego Aristófanes (446 aEC - 386 aEC), que reforça o uso do pentagrama como símbolo da sociedade pitagórica:

> "Primeiro, saudações": eles dizem que Cleon, enviando mensagens aos atenienses de Pilos e Sphacteria, começou escrevendo "saudações"; de onde [a saudação] entrou em uso. E os pitagóricos [usavam] "ser de boa saúde". E o triângulo triplamente auto-entrelaçado, o pentagrama, que eles empregavam como sinal entre os colegas de sua escola, foi chamado por eles de "saúde". (Herz-Fischler, R. A Mathematical History of the Golden Number (Tradução Própria). p.65. Dover Publications, INC. New York, 1987)

A partir destas duas passagens, infere-se que o pentagrama era, de fato, um símbolo utilizado como saudação. Também podemos notar que não há qualquer menção de um estudo geométrico da figura por parte dos pitagóricos, ou seja, segundo os relatos, não há uma abordagem do pentagrama do ponto de vista matemático. Diante disso, entram alguns questionamentos:

- A construção de uma figura, considerada até certo ponto sagrada para a Escola Pitagórica, era feita sem maiores cuidados geométricos?

- E por que o pentagrama, e não outra figura, era usada?

Em relação à primeira pergunta, prevalecem as especulações, levantando ainda mais dilemas. Se os pitagóricos possuíam o conhecimento para construir um pentagrama perfeito, efetuavam por meio da DMER? Se não, qual outra técnica era empregada? Ou será que o pentagrama era construído sem exatidão, mesmo diante de um grupo de indivíduos que buscava a harmonia perfeita entre matemática e universo?

Já em relação ao porquê do pentagrama, uma das versões é baseada na quantidade de vértices da figura, cinco. Conforme exposto acima, cada número para os pitagóricos detinha um significado, e o cinco não era exceção. Livio (2006) aborda esta teoria:

> A identificação original do número 2 com o feminino e o 3 com o masculino pode ter sido inspirada pelas configurações dos seios femininos e da genitália masculina. Essa argumentação tem suporte no fato de que o konso* na África Oriental faz a mesma identificação. Na vida cotidiana, divisão em duas categorias é o mais comum: bom e mau, em cima e embaixo, direita e esquerda. Geometricamente, o 2 era expresso por uma linha (que é determinada por dois pontos), que tem uma dimensão. Supunha-se que 3 era o primeiro número masculino real e também o número da harmonia, pois combina unidade (o número 1) com divisão (o número 2). Para os

> pitagóricos, 3 era, em certo sentido, o primeiro número real, pois tinha um "começo", um "meio" e um "fim" (diferentemente do 2, que não tem meio). A expressão geométrica do 3 era o triângulo, pois três pontos que não estejam na mesma linha determinam um triângulo, e a área do triângulo tem duas dimensões. (Livio, Mario. Razão áurea (p. 37). Editora Record. Edição do Kindle.)

Como cinco corresponde à soma entre o número dois (representando o feminino) e o número três (representando o masculino), acabava sendo considerado o número do amor e do casamento, ou seja, de uma união sagrada. Todavia, como os pitagóricos eram celibatários, o conceito de casamento poderia ter uma conotação mais simbólica, e, diante deste contexto, podemos pensar que os mesmos "casavam" com a Irmandade, explicando a importância do número e do pentagrama.

Uma outra teoria também é levantada pelo arqueólogo francês e coronel do exército, François-Maurice Allotte de la Fuÿe (1844 - 1939). Os de la Fuÿe foram uma família de notáveis franceses, com destaque nos séculos XIV e XX. Por exemplo, Julio Verne, considerado o inventor da ficção científica e autor das conhecidas obras *A volta ao mundo em oitenta dias*(1872), *Viagem ao centro da Terra* (1864), *Vinte Mil Léguas Submarinas* (1870), era filho de Sophia Allote de La Fuÿe, e primo-irmão de François-Maurice. Autor de inúmeras obras, muitas com temas numismáticos, de la Fuÿe escreveu um livro intitulado "Pentagramas Pitagóricos": *Le pentagramme pythagoricien. Sa diffusion, son emploi dans la syllabaire cunéiforme*, (1934). Por que um arqueólogo especialista em moedas acabou se aprofundando em pentagramas? A resposta pode estar em outra sociedade, a maçônica, visto que seu primo-irmão Verne era figura importante deste círculo, na época. Não há qualquer registro oficial conhecido que vincule François-Maurice à maçonaria, entretanto, considerando que o pentagrama também é um símbolo usado entre seus membros e que o tema desvia bastante da área de pesquisa de de la Fuÿe, a suposição de uma possível influência da maçonaria, também detentora de segredos não revelados à sociedade, é aceitável. Livio (2006) expõe a versão apresentada por de la Fuÿe:

> Uma explicação imaginativa (embora talvez não totalmente sólida) para a associação do pentagrama com saúde foi sugerida por A. de la Fuÿe em 1934, em seu livro Le Pentagramme Pythagoricien, Sa Diffusion, Son Emploi dans le Syllabaire Cuneiform (O Pentagrama Pitagórico, sua difusão, seu uso na cartilha cuneiforme). De la Fuÿe sugeriu que o pentagrama simbolizava a deusa grega da saúde, Hygeia, através de uma correspondência das cinco pontas da estrela com uma representação esquemática da deusa. (Livio, Mario. Razão áurea (p. 39). Editora Record. Edição do Kindle)

Figura 43 - Comparação entre um pentagrama e a representação da deusa Hygeia

Fonte: Livio, M.

Aqueles que refutam esta ideia argumentam que Pitágoras não seguia os fundamentos da religião/mitologia grega e não destacaria como símbolo de sua escola algo ligado a algum deus grego, mesmo com toda a influência destes na vida dos cidadãos da época.

O fato é que não há um indício mais robusto que estabeleça uma conexão entre o pentagrama pitagórico e a divisão em Meia e Extrema Razão.

2.1.3. Hipaso de Metaponto: o dodecaedro e a incomensurabilidade

Um dos discípulos mais citados de Pitágoras é conhecido como Hipaso de Metaponto (c.a. 500 aEC). A biografia de Hipaso, como a de qualquer pitagórico, está longe de ser extensa, sendo que até mesmo seu local de nascença, Metaponto, é motivo de debate entre alguns estudiosos. A parte mais intrigante de sua história pessoal está relacionada a sua morte, ou melhor, nas várias versões sobre como ela ocorreu.

Seu legado na área de estudos matemáticos trouxe à Escola Pitagórica uma verdadeira revolução, desafiando seus métodos e subvertendo seus princípios.

Jâmblico destaca que Hipaso pode ter sido o pioneiro na construção de um dodecaedro.

> E sobre Hippasus dizem, que ele foi um dos pitagóricos, e por ser o primeiro a desenhar e publicar a esfera dos doze hexágonos [leia: pentágonos], ele pereceu no mar tão irreverente e tomou a ideia como se fosse seu inventor, enquanto ela pertence inteiramente a "aquele homem" - pois assim designam Pitágoras e não o chamam pelo nome. (lamblichus, On Common Mathematical Knowledge, cap. 25 [lamblichus-Festa, 77]; Herz-Fischler, R. A Mathematical History of the Golden Number (Tradução Própria). p.65. Dover Publications, INC. New York, 1987)

A esfera de doze pentágonos citada por Jâmblico nada mais é do que o próprio dodecaedro inscrito em uma esfera. Entretanto, de acordo com o explicitado neste trabalho, sabe-se que construir um dodecaedro perfeito sem ter o conhecimento da divisão em Meia e

Extrema razão é desafiador. E levantam-se as suspeitas de que não somente Hipaso, mas toda a Irmandade Pitagórica detinha tal noção. A ordem como é colocada a história, com a construção do dodecaedro vindo antes do domínio da divisão de um segmento em Meia e Extrema Razão é, no mínimo, controversa.

O *Catálogo dos Geômetras* de Proclus atrela a construção de figuras cósmicas a Pitágoras que, como já vimos, recebia os créditos por qualquer descoberta de discípulos. Assim sendo, o texto abaixo pode ser mais um sinal de que os pitagóricos realmente dominavam a geometria dos sólidos e, talvez, a DMER, uma vez que as tais figuras cósmicas são, na verdade, os sólidos platônicos e, entre eles, está o dodecaedro.

> Seguindo esses homens, Pitágoras transformou a filosofia matemática em um esquema de educação liberal examinando seus princípios de cima para baixo e investigando seus teoremas de maneira imaterial e intelectual; foi ele quem descobriu a teoria das proporções [possivelmente irracionais] e a estrutura das figuras cósmicas. (Proclus, A Commentary of the First Book Euclid's 'Elements', "Catalogue of Geometers" [Proclus —Morrow, 52]; [Proclus—Friedlein, 65; Thomas, 1939, I, 149; Van der Waerden, 1954, 90]; Herz-Fischler, R. A Mathematical History of the Golden Number (Tradução Própria). p.65. Dover Publications, INC. New York, 1987)

Herz-Fischler (1987) apresenta uma contestação à estrutura do texto de Proclo.

> Enquanto muito do resumo de Proclus parece ter sido tirado de um catálogo escrito por Eudemus (c. -330), esta porção particular é aparentemente tirada de Iamblico (Q.7), como visto em Van der Waerden [1954, 91]; Burkert [1972, 411]; Heidel [1940, 16]. É a opinião desses autores que Eudemus deu pouca ou nenhuma informação sobre Pitágoras e assim Proclus preencheu a lacuna com o material de lamblico. Assim, esta evidência de Proclus não é confiável. (Herz-Fischler, R. A Mathematical History of the Golden Number (Tradução Própria). p.65. Dover Publications, INC. New York, 1987)

Outra atribuição usualmente dada a Hipaso é a descoberta da existência dos números incomensuráveis, números que não podem ser expressados através de uma razão entre números inteiros. A matemática grega ainda engatinhava no conceito teórico dos números quando os incomensuráveis começaram a ser percebidos e estudados. Para os pitagóricos é provável que a incomensurabilidade tenha causado algum abalo em sua filosofia e visão cósmica de que tudo poderia ser expresso por números racionais.

Herz-Fischler (1987) destaca um trecho de Jâmblico em *On The Pythagorean Life* enfatizando, em sua parte final, justamente a revelação da incomensurabilidade.

> E Pitágoras não achava apropriado falar ou escrever de tal maneira que [suas] ideias fossem claras para todos que aparecessem, mas ele disse ter ensinado exatamente isso primeiro aos seus discípulos, para que, livres de toda incontinência, guardem em silêncio as palavras que ouviram. Eles dizem que o primeiro [homem] a revelar a natureza da comensurabilidade e incomensurabilidade para aqueles indignos de compartilhar a teoria foi tão odiado que não apenas ele foi banido da associação comum e do modo de vida [dos pitagóricos], mas até mesmo uma tumba foi construída, como se [seu] ex-camarada tivesse partido da vida entre a humanidade.

> E alguns dizem que até o poder divino se irritou com aqueles que divulgaram os [ensinamentos] de Pitágoras; para aquele que revelou a estrutura do icoságono [uma figura de vinte lados; talvez haja confusão com o icosaedro de vinte faces aqui] - e este era o dodecaedro, uma das cinco figuras ditas sólidas - para ser inscritível dentro de uma esfera, pereceu no mar como quem cometeu sacrilégio. Mas alguns disseram que o homem que sofreu isso havia falado sobre irracionalidade e incomensurabilidade. (lamblichus, On the Pythagorean Life, cap. 34, 246, 247; lamblichus-Nauck [171]; lamblichus-Albrecht [239]; Herz-Fischler, R. A Mathematical History of the Golden Number (Tradução Própria). p.66. Dover Publications, INC. New York, 1987)

Originalmente, é discutido que a primeira percepção de um número irracional se deu através da diagonal de um quadrado. De fato, dado um quadrado de lado unitário, sua diagonal é equivalente a $\sqrt{2}$, um incomensurável.

Nesse sentido, também se argumenta que as diagonais do pentágono são igualmente irracionais. Dentro de um panorama da matemática pitagórica, se realmente houve uma compreensão de que a diagonal de um quadrado não era comensurável, é plausível que as diagonais de um pentágono regular, que compõem o pentagrama, símbolo máximo da irmandade, tenham igualmente sido estudadas. Seria improvável não encontrar a proporção áurea entre os lados e diagonais de um pentágono, de acordo com o conhecimento matemático grego disponível na época.

As literaturas disponíveis são confusas e contraditórias, dificultando uma pesquisa que estabeleça um parâmetro. De fato, sem qualquer registro escrito contemporâneo dos pitagóricos, produzir um estudo sério com base em conjecturas é um tarefa impossível. Se considerarmos que Hipaso ou outro integrante da Escola pitagórica tenha realmente descoberto a razão áurea através dos estudos do dodecaedro e/ou da incomensurabilidade, ou mesmo ao construir um pentagrama, o panorama da matemática grega alcança um patamar ainda mais elevado. No entanto, sem evidências históricas concretas, essas questões permanecem no campo da especulação.

A fim de concluir o exposto, e com um toque de curiosidade em relação às versões sobre a morte de Hipaso, todas elas ilustram a insatisfação de Pitágoras e outros membros de sua Escola perante o comportamento não condizente com os ferrenhos princípios por eles defendidos. A eventual descoberta e revelação da incomensurabilidade, ruindo o mantra de que “tudo poderia ser expresso por números” e expandindo conhecimentos para fora do círculo da Escola, culminou na construção de uma lápide com seu nome.

As versões para sua morte são variadas: um afogamento causado por outros membros da Irmandade, com anuência do próprio Pitágoras; outro afogamento, mas causado por um naufrágio crimonoso; suicídio, devido à pressão imposta pela Escola Pitagórica por conta dos acontecimentos narrados; ou até mesmo em combate, algo bastante comum naqueles tempos.

2.2. **Platão e os sólidos: um ensaio para a concepção da DMER**

2.2.1. Breve Biografia de Platão

Considerado um dos três grandes filósofos gregos da Antiguidade, Platão (427 aEC – 347 aEC) e suas contribuições não se limitaram à filosofia, envolvendo-se em discussões que se estendem até à geometria e, talvez, à divisão em Meia e Extrema Razão.

Discípulo de outro grande filósofo, Sócrates, Platão, cujo nome real era Aristocles, nasceu em Atenas, proveniente de família grega aristocrática de destaque na sociedade ateniense da época. Sua ascendência nobre lhe proporcionou uma educação de alta qualidade, tanto em matemática quanto em escrita, gramática e literatura, inicialmente aprendendo com tutores particulares e, posteriormente, na escola dos gramáticos ateniense. Apesar de não existir uma riqueza de detalhes sobre sua infância e estudos, este rito era o comum aos jovens gregos de mesma condição social do que Platão.

Ainda jovem, foi tomado pela atmosfera política em Atenas, berço da democracia, e resolveu se engajar nas discussões que moldavam tomadas de decisões políticas e sociais da cidade. Havia um conflito em curso entre Atenas e Esparta, chamada de Guerra do Peloponeso, que acirrava ainda mais as deliberações públicas.

Por volta de 407 aEC, provavelmente numa destas discussões, conhece Sócrates, já com uns 60 anos, e acaba impressionado com seus questionamentos e sagacidade filosófica. Esta aproximação acarreta no contato direto de Platão com a dialética socrática[6], método que o incentivou a examinar intimamente suas próprias crenças e a desenvolver conclusões baseadas em investigações filosóficas e autocríticas. Era o início da sua formação como filósofo.

Pouco tempo após a sentença de morte dada a Sócrates, devido às acusações de “corromper a juventude” ateniense e por desestimular a crença nos deuses gregos, em 399 aEC, Platão deixa Atenas em busca de novas experiências. Durante esse período, entra em

[6] Método de questionamento filosófico desenvolvido por Sócrates no século V aEC.

contato com sistemas políticos e correntes filosóficas distintas da vivência obtida por ele em Atenas. As literaturas relatam que suas viagens rodearam o Mar Mediterrâneo, encontrando na Sicília, provavelmente, a mais impactante de suas experiências.

Vale destacar que a Sicília é uma ilha localizada ao sul da Itália, e nos séculos IV e V aEC, era dividida em algumas cidades-estado, cada uma com seu próprio governo. Uma delas, Siracusa, foi governada por um tirano chamado Dionisio I entre 405 aEC e 367 aEC Por volta do ano de 388 aEC, Platão chega à Sicília a convite da corte de Dionísio, deparando-se com um sistema de governo oposto à "democracia ateniense". Busca estabelecer uma aproximação com as autoridades locais, tendo a oportunidade de se encontrar com Dionisio em pessoa. No entanto, apesar de apresentar uma retórica primorosa e argumentos bem fundamentados, o soberano não demonstra interesse pelas propostas de Platão, baseados em uma governança mais justa e ideal. O fracasso dessa empreitada levou Platão a profundas reflexões sobre política em um formato teórico e utópico, além de impactar diretamente em sua investigação filosófica, à medida que testemunhava grandes injustiças nesses locais.

Uma notória consequência da experiência em Siracusa foi o término do conjunto de diálogos *A República*, em 387 aEC, onde apresenta o que chama de "Estado Ideal". A obra será discutida adiante.

Platão ainda retorna a Siracusa em 366 aEC, após a morte de Dionisio I, agora sob o regime igualmente autocrata de seu jovem filho, Dionisio II. A intenção era usar da inexperiência de Dionísio II para convencê-lo a implementar as reformas políticas defendidas em *A República*. No entanto, essa segunda viagem também acarreta em novo insucesso, dadas as dificuldades de apresentar suas ideias junto ao conselho que cercava o governante, bem como a própria soberba do novo Dionísio. Alguns eventos são debatidos por biógrafos sobre o final dessa passagem, sugerindo que pode ter ocorrido uma prisão de Platão e até mesmo uma venda como escravo, sendo necessária intervenção de pessoas próximas do filósofo para resgatá-lo.

De volta a Atenas após sua primeira passagem pela Sicília, Platão funda a Academia, no ano de 387 aEC, instituição que se transforma em um centro de amplas e variadas discussões filosóficas e estudos que também abrangiam matemática e ciências naturais. Considerada por algumas fontes literárias como um dos primeiros centros de ensino superior da história, a Academia resistiu por quase 900 anos, até a ordem de fechamento de instituições que lecionavam ciência e filosofia pelo imperador romano Justiniano I, em 529, um dos primeiros eventos que marcaria o início da Idade Média na Europa.

Sobre sua morte, não há consenso quanto à causa, data e local, sendo mais utilizado o período entre 347 aEC e 348 aEC, em Atenas. Há algumas teses que abordam que seu jazigo foi construído no terreno da própria Academia, mas a informação carece de fontes concretas.

2.2.2 A Academia

Conforme relatado, Platão dirigiu a Academia até sua morte aos 80/81 anos de idade. Durante seu período como escolarca[7], inspirou e encorajou seus discípulos a reflexões e debates filosóficos, e ao mesmo tempo, introduziu uma metodologia de investigação profunda na matemática e suas áreas, criando condições para avanços significativos da disciplina em um intervalo temporal relativamente curto.

Durante os quase nove séculos de sua existência, a Academia desempenhou um papel crucial no progresso filosófico-matemático, e mesmo com sua composição sendo alterada com o passar dos anos, o principal objetivo da instituição manteve-se sempre consoante com as ideias de Platão. Ainda hoje existem inúmeras pesquisas que podem revelar a existência de mais contribuições por parte de seus membros, e, entre elas, alguns autores investigam se a idealização da divisão em Meia e Extrema Razão poderia ter ocorrido dentro dos muros da Academia.

Ao pesquisar sobre os associados da Academia, encontram-se inúmeros personagens de relevância histórica, incluindo Aristóteles, mais famoso discípulo de Platão. Na área da matemática, Eudoxo de Cnido (c. 408 aEC - c. 355 aEC), Menécmo (séc. IV aEC), Teeteto (c. 415 aEC - c. 369 aEC), Filipo de Mende (séc. IV aEC), Menelau de Alexandria (c. 70 - 140), entre muitos outros, também fizeram parte do centro de estudos fundado por Platão, sendo autores de inúmeras pesquisas e estudos relacionados à teoria dos números e à geometria, e que serviram como estrutura para alcançar a profundidade matemática (e geométrica) existente atualmente.

A demonstração de como a geometria era extremamente relevante para a Academia e em seus estudos reside no registro grafado acima da porta da instituição: "Que pessoa alguma destituída de geometria entre por esta porta." (LIVIO, 2006)

Além disso, a Academia proporcionou e facilitou a troca de conhecimentos com outros pensadores contemporâneos, mesmo aqueles que não estavam diretamente associados à

[7] Nome dado ao diretor de uma escola de Filosofia na Grécia Antiga.

instituição, incluindo membros da Escola Pitagórica. Alguns pesquisadores defendem que o próprio pitagórico Hipaso de Metaponto teve contato com a matemática platônica e a Academia, contato esse que teria impulsionado a descoberta da incomensurabilidade e o esboço de alguns sólidos regulares, incluindo o dodecaedro.

Outro pitagórico, Architas de Tarento (428 aEC – 347 aEC), é citado por ter estabelecido um vínculo de amizade com Platão, tendo causado valiosa incitação à matemática da Academia. Considerado destacado matemático por autores especialistas em história grega antiga, Architas pode ter sido usado por Platão em seus diálogos como parte de algum personagem, levantando conjecturas sobre a amplitude de seus ensinamentos aos acadêmicos.

Em relação à razão áurea, essa não seria possível de ser desenvolvida sem a Teoria das Proporções criada por Eudoxo e, conforme citado acima, foi membro da Academia. Além disso, os sólidos básicos ocuparam bastante das pesquisas realizadas pelos acadêmicos, sendo amplamente citados nos diálogos platônicos.

Nesse sentido, fica destacada a atuação da Academia em prol do desenvolvimento da Matemática e, particularmente, da DMER.

2.2.3 Platão, a Geometria e a DMER

Considerar Platão um matemático de excelência não parece ser uma afirmação condizente com a realidade que chegou até nós através dos documentos históricos. Apesar de ter seu nome associado a várias contribuições matemáticas, como nos sólidos platônicos, não existe uma assinatura fidedigna que o coloque neste *status*. Porém, sua verdadeira e importantíssima contribuição matemática reside na fundação da Academia, onde, além de aplicar sua habilidade na condução das pesquisas oriundas dos seus membros, colaborou indiretamente para a evolução da matemática através do estímulo aos processos investigativos e na promoção de um ambiente propício para o desenvolvimento intelectual de forma geral.

Segundo Herz-Fischler (1987), “se Platão era um matemático em algum sentido da palavra, então ele não era um chauvinista”.

Livio (2006) destaca este papel exercido por Platão:

> Considerando o papel de Platão na matemática em geral, e em relação à Razão Áurea em particular, temos de examinar não só suas contribuições puramente matemáticas, que não foram muito significativas, mas os efeitos de sua influência e

> de seu estímulo para a matemática de outras pessoas da sua e das gerações seguintes. (Livio, Mario. Razão áurea (p. 76). Editora Record. Edição do Kindle.)

Também é registrado por Livio (2006) que Platão obteve formação em matemática, o que lhe assegurou condições de sugerir problemas e questionamentos:

> Dizem que Platão estudou Matemática com o pitagórico Teodoro de Cirene, que foi o primeiro a provar que, além do $\sqrt{2}$, números como $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, até $\sqrt{17}$ também eram irracionais. (Ninguém sabe por que ele parou no 17, mas é óbvio que ele não tinha uma prova geral.) Alguns pesquisadores afirmam que Teodoro também pode ter usado uma linha cortada na Razão Áurea para obter o que pode ser a prova mais fácil de incomensurabilidade. (Livio, Mario. Razão áurea (p. 76). Editora Record. Edição do Kindle.)

Também já citamos a ligação entre Platão e muitos matemáticos, o que certamente causou uma expansão em seu domínio nas áreas correlacionadas.

Mesmo não sendo considerado um matemático de alto nível, Platão aparece no importantíssimo "Catálogo de Geômetras", do filósofo neoplatônico Proclo, seguindo os registros de Eudomo de Rodes (c. 370 aEC - 300 aEC). Eudemo foi autor de alguns livros sobre a história da matemática grega e discípulo de Aristóteles. O *Catálogo de Geômetras* estabelece o percurso da geometria até *Os Elementos*, e foi publicado como parte da obra *Comentário sobre o primeiro livro de Euclides*, no final do século V. A inclusão do nome de Platão no *Catálogo* fornece a extensão de sua participação no desenvolvimento da geometria enquanto indagador de problemas e fornecedor de condições propícias para estudos acadêmicos.

Por fim, é correto afirmar que Platão era um entusiasta da matemática, o que deixa explícito em suas principais obras. Em Leis, por exemplo, ele alça a matemática como "arte divina".

> Nenhum ramo isolado da educação detém uma influência tão grande quanto o estudo dos números. O principal benefício que proporciona é despertar o indivíduo que é por natureza indolente e de mente preguiçosa, tornando-o ágil para o aprendizado, detentor de boa memória e sagaz, progredindo além de sua capacidade natural pela arte divina... (Platão, As leis. Livro V. p. 226. Disponível em: https://www.democracia.org.br/wp-content/uploads/2019/02/Plat%C3%A3o-As-Leis.pdf)

2.2.4. As obras de Platão sob a perspectiva da DMER

Conhecer e identificar as obras escritas por Platão é essencial para se debruçar na história da matemática e, até mesmo, da DMER.

Suas produções literárias são formadas através de diálogos, ou seja, uma conversa entre personagens, que geralmente envolvem seu mentor Sócrates como figura central. Platão explora diferentes questões filosóficas, em uma ótica moral, ética, política, metafísica e a parte que aqui debatemos, matemática.

É inevitável não se envolver ao ler os colóquios apresentados nas publicações platônicas, porquanto as reflexões estimuladas a fim de dar luz a nossas próprias ideias. Ao imaginar o impacto desta iteração face a face, encontramos o motivo pelo qual Platão continua a inspirar de forma tão poderosa.

A análise, sob o ponto de vista do presente trabalho, será realizada nos diálogos das seguintes obras:

2.2.4.1 A República

Escrito provavelmente em 380 aEC, objetiva a discussão de temas como justiça, educação e política, defendendo a atuação do que chama de filósofos-reis, figuras que governariam num regime ideal que exaltaria virtudes individuais e coletivas, numa busca incessante pela perfeição social.

Está entre as obras mais conhecidas e estudadas de Platão, *A República* é composta por 10 livros que envolvem sequências de diálogos entre Sócrates e personagens como Glauco e Adimanto, sempre concentrados no alcance de uma sociedade auspiciosa.

Em um diálogo do livro VI, Sócrates afirma a Glauco:

> "Concebe então", disse eu, "como estávamos dizendo, que existem essas duas entidades, e que uma delas é soberana sobre a ordem e a região inteligíveis e a outra sobre o mundo do globo ocular, para não dizer o globo celeste, mas deixe isso passar. Você certamente apreende os dois tipos, o visível e o inteligível." "Eu faço." "Represente-os então, por assim dizer, por uma linha dividida em duas seções desiguais e corte cada seção novamente na mesma proporção (a seção, que isto é, do visível e o da ordem inteligível), e então, como expressão da proporção de sua clareza e obscuridade comparativas, você terá como uma das seções do mundo visível, as imagens." (Platão, República VI , 509D [Plato-Shorey, II, 109]; [Plato-Jowett, I, 771]) (Herz-Fischler, R. A Mathematical History of the Golden Number (Tradução Própria). p.84. Dover Publications, INC. New York, 1987)

Um trecho da citação acima fala de "uma linha dividida em duas seções desiguais e corte cada seção novamente na mesma proporção", o que, para alguns autores, é a descrição da divisão de um segmento em Meia e Extrema Razão. Existe uma vastidão de confrontos de opiniões sobre como interpretar o trecho sinalizado, alguns destacados por Herz-Fischler (1987).

Apesar de Platão afirmar em *A República* que "a Matemática era absolutamente necessária na educação de todos os chefes de Estado e filósofos.", ele não se aprofunda em nenhum tema específico da área neste conjunto de livros, fazendo com que a literalidade da "linha dividida" seja fortemente contestada. Nunes (2000) é um dos que defendem este ponto de vista.

> A opinião e a ciência se articulam entre si como dois distintos domínios, o do visível e o do inteligível ou invisível. É o que nos mostra a figuração das porções simétrica de uma 'linha cortada em duas partes desiguais, cada segmento dividido na mesma proporção', numa relação horizontal, constante do Livro VI. O primeiro segmento representa o visível e o segundo o invisível. As imagens e as sombras alinham-se na primeira seção e os seres e as coisas perceptíveis na segunda do primeiro segmento. Simetricamente, no segundo segmento, as hipóteses estão para os conceitos assim como as sombras estão para as coisas do primeiro. As hipóteses funcionam como postulados, à maneira de apoios, ainda ligados ao sensível, que facilitam a passagem aos conceitos puros do inteligível, que nada mais figuram ou imitam. (Platão. A República; tradução de Carlos Alberto Nunes. 3ª Ed. Belém: EDUFPA, 2000. p.20)

Efetivamente, não há uma construção lógica de acontecimentos que permita estabelecer como correta e verdadeira uma ou outra versão deste caso.

2.2.4.2 *Timaeus* (Timeu)

Datado de 360 aEC, o diálogo *Timeu* é analisado como proeminente por parte daqueles que estudaram as obras platônicas ao longo dos séculos posteriores a sua morte.

Construído com debates entre Sócrates, Timeu, Crítias e Hermócrates, *Timeu* enfoca na cosmologia e na concepção do universo e suas características. Destaca-se o personagem Timeu, indivíduo que se destaca nos diálogos como "o mais entendido em astronomia e o que mais se empenhou em conhecer a natureza do mundo" (PLATÃO).

A inexistência de fatos que comprovem a existência de Timeu como sujeito factual dá origem a uma série de especulações sobre sua identidade. Numa delas, Lopes (2011) coloca Architas como a pessoa por trás de Timeu; até mesmo cogita-se que o personagem na verdade é um pseudônimo do próprio Platão. Há ainda uma certa confusão com seu homônimo, Timeu de Tauromênio, filósofo e historiador grego que viveu aproximadamente um século após a publicação do diálogo.

> De facto, dadas as sérias dúvidas em relação ao Timeu histórico, há quem veja nele uma máscara de outra personalidade. Cícero refere nos Academica (1.10.16) que Platão, quando foi pela primeira vez à Sicília, conviveu muito de perto com Timeu de Lócride e também com Arquitas de Tarento. Se a existência do primeiro é duvidosa, quanto à do segundo não restam dúvidas: além de um político exemplar, Arquitas foi um matemático brilhante e mestre de ilustres matemáticos, como o próprio Eudoxo, conforme atesta Diógenes Laércio (8.86.1). Por isso, é possível que Timeu represente Arquitas; contudo, os dados disponíveis não permitem mais do

> que simples conjecturas. (Platão, Timeu-Crítias. Tradução do grego, introdução e notas: Rodolfo Lopes. 1ª Ed. Centro de Estudos Clássicos e Humanísticos, Faculdade de Letras, Universidade de Coimbra. Coimbra, 2011. p. 21)

A presença dos sólidos básicos em *Timeu* é destacável, já que estariam intrinsicamente ligados à estrutura da matéria de elementos-base do mundo, usando a estereométrica[8] como fundamentação para o estudo.

> É, por exemplo, através da estereometria que Timeu consegue deduzir as formas dos elementos, atribuindo a cada um a figura correspondente de acordo com as suas propriedades cinéticas: o cubo à terra, pois é, de entre os elementos, o que se move mais lentamente (55d); o icosaedro à água (55b, 56a); o octaedro ao ar (55a, 56a); a pirâmide ao fogo (55d). De forma análoga, a dedução destas figuras depende também de um raciocínio matemático: através da combinação dos triângulos-base (rectângulo, equilátero e isósceles) mediada pela proporção, a geometria em plano passa a estereometria tridimensional (54d-sqq), dando assim corpo às formas representáveis mentalmente e de forma abstracta. (PLATÃO, Timeu-Crítias. Tradução do grego, introdução e notas: Rodolfo Lopes. 1ª Ed. Centro de Estudos Clássicos e Humanísticos, Faculdade de Letras, Universidade de Coimbra. Coimbra, 2011. p. 29)

Na discussão de uma eventual familiarização entre Platão e a DMER em *Timeu*, a questão central situa-se na construção do dodecaedro. Na verdade, em *Timeu*, vemos que Platão utiliza a decomposição em triângulos retângulos dos tipos 30°, 60° e 90° e 45°, 45° e 90° para descrever montagem das faces triangulares e quadrangulares presentes no tetraedro, hexaedro, octaedro e icosaedro.

Entretanto, em relação ao dodecaedro, não há qualquer menção à montagem de sua face pentagonal, levando a uma justaposição à questão da familiarização citada acima "Como ainda restava uma figura composta, a quinta, Deus a usou para o todo, bordando-a com desenhos" (Platão)

A quinta figura da citação acima é justamente o dodecaedro, elevada ao *status* de divina provavelmente por influência pitagórica, influência essa que marca presença em *Timeu*. Platão ainda cria uma analogia entre o universo e o dodecaedro, pois, segundo ele, "deus o usou para ornamentar as constelações de todo o céu".

Em outra passagem de *Timeu*, mais precisamente na discussão sobre a criação de "alma do mundo", alguns autores destacados por Herz-Fischler traduzem:

> E o mais belo dos laços é aquele que mais perfeitamente une em um tanto a si mesmo quanto as coisas que ele une; e é da natureza de uma proporção geométrica contínua para efetuar isso mais perfeitamente. (Platão, Timeu 31B-32ª; Herz-Fischler, R. A Mathematical History of the Golden Number (Tradução Própria). p.84. Dover Publications, INC. New York, 1987)

---

[8] Parte da Geometria que utiliza como base propriedades do universo tridimensional.

A expressão “proporção geométrica contínua” acaba remetendo alguns estudiosos à proporção áurea. Na verdade, não é improvável que exista um problema exatamente na tradução, já que outras versões trazem uma versão diferente para a segunda parte da citação acima. Ademais, se realmente a colocação estiver correta quanto à transcrição, associar a proporção do trecho à DMER parece ser uma perspectiva limitada do assunto. Herz-Fischler (1987) utiliza algumas referências para trazer que as proporções de interesse da época não estavam voltadas de nenhuma forma à DMER, fato que inviabiliza qualquer paralelo.

2.2.4.3 *Hippias Meizon* (Hipias Maior)

As literaturas consideram que o diálogo *Hipias Maior* foi concebido um pouco depois da morte de Sócrates, por volta de 390 aEC. Os diálogos são travados entre Sócrates e o sofista Hipias, um polímata que, entre outras habilidades, detinha profundos conhecimentos matemáticos.

Dentre as discussões, está a investigação da existência de um conceito de beleza universal. Num dos diálogos, temos:

> Para qual grupo, então, Hípias, faz o bonito parece que você pertence? Ao grupo daqueles que você mencionou? Se eu sou forte e você também, nós dois somos coletivamente fortes, e se eu sou justo e você também, nós dois somos coletivamente justos, e se ambos coletivamente, então cada um individualmente; assim, também, se eu sou bonito e você também, somos ambos coletivamente belos, e se ambos coletivamente, então cada um individualmente? ambos coletivamente pares, eles podem talvez individualmente ser ímpares, ou talvez pares, e novamente, **quando as coisas são quantidades individualmente irracionais, elas podem ser coletivamente racionais**, ou talvez irracionais, e inúmeros outros casos que, você sabe, eu disse que apareceram diante da minha mente? A que grupo você atribui o belo? Ou você tem e a mesma visão sobre isso que eu? Pois me parece uma grande tolice que coletivamente sejamos belos, mas cada um de nós não seja assim, ou que cada um de nós seja assim, mas ambos não sejam, ou qualquer outra coisa desse tipo. Você escolhe desta maneira, como eu, ou de alguma outra maneira? (Platão, Hippias Major 303B [Plato-Fowler, 417] (grifo de Herz-Fischler); Herz-Fischler, R. A Mathematical History of the Golden Number (Tradução Própria). p.85. Dover Publications, INC. New York, 1987)

Livio (2006) traz uma interpretação sobre o trecho grifado:

> Platão reconhece (em Hippias Maior) que, assim como um número par pode ser a soma de dois números pares ou de dois números ímpares, a soma de dois irracionais pode ser irracional ou racional. Como já sabemos que Φ é irracional, uma linha reta racional (por exemplo, de comprimento unitário) dividida numa Seção Áurea fornece um exemplo desse último caso, embora Platão talvez não soubesse desse fato. (Livio, Mario. Razão áurea (p. 79). Editora Record. Edição do Kindle.)

Esta interpretação feita por Livio parece ser de senso comum, ou seja, Platão utiliza da recente descoberta da incomensurabilidade que havia tomado ciência através dos pitagóricos, mais precisamente através de Hipaso, para promover uma reflexão envolvendo o conceito de beleza atrelado à teoria dos números. Como a razão áurea e a incomensurabilidade são objetos de pesquisas que as relacionam, o trecho em si poderia certificar a familiaridade de Platão com a DMER, apesar da percepção geral não ser esta.

2.4.4.4 *Phaedo* (Fedão)

Neste, a discussão gira entorno da imortalidade da alma, usando fundamentos da filosofia como caminho para a libertação da mesma para alcance do conhecimento superior. Escrita por volta de 360 aEC, o cenário do livro é a prisão onde se encontra Sócrates, na véspera de sua execução.

Em um fragmento da obra, o personagem Sócrates descreve o esplendor da verdadeira terra:

> Pois bem, meu amigo, em primeiro lugar diz-se que o carro, visto de cima, parece uma daquelas bolas feita de doze peças de couro, pintado em várias cores, de que as cores que nos são familiares pelo seu uso pelos pintores são, por assim dizer, amostras. Lá em cima, toda a terra exibe essas cores, e de fato muito mais brilhantes e puras do que essas. (Platão, Phaedo 110B [Plato-Hackforth, 176]; Herz-Fischler, R. A Mathematical History of the Golden Number (Tradução Própria). p.82. Dover Publications, INC. New York, 1987)

A "bola feita de doze peças de couro" lembra muito a esfera de doze hexágonos (leia-se pentágonos) descrita por Pitágoras, numa referência ao dodecaedro, já reverenciado como divino em *Timeu*, causando mais um furor por parte de alguns autores que defendem a compreensão da proporção áurea por Platão.

3 DA ANTIGUIDADE AO RENASCIMENTO

O capítulo que se desenvolverá adiante abrangerá um longo período de quase 2000 anos, e é de vital importância para a compreensão da evolução da DMER, tanto como propriedade algébrica quanto geométrica. Além disso, os passos históricos que levaram ao misticismo extremo associados à proporção também serão apresentados.

Após a publicação de *Os Elementos*, a DMER alterna entre momentos de estudos aprofundados por figuras de destaque na história da matemática e outros de hibernação, com séculos sem qualquer menção conhecida.

A divisão em seções seguirá um padrão regional/temporal,com foco naqueles que mais se destacaram no contexto do tema.

3.1 Ainda na Antiguidade (de c. -300 a c. 500)

A Grécia Antiga manteve sua posição de destaque no cenário científico em geral durante o intervalo entre 300 aEC. até o início da Idade Média, especialmente na matemática. Isso ocorreu, em grande parte, devido a uma mudança significativa na literatura da disciplina após a publicação da obra euclidiana.

As principais mentes que viveram durante o Império Romano no período que estudaremos adiante, estabeleceram Alexandria como capital do saber. Manuscritos contendo novas pesquisas e descobertas eram enviados a partir da Grécia rumo a outros locais da Europa, África, Oriente Médio e Ásia.

Alexandria é uma cidade localizada no Egito, às margens do Mar Mediterrâneo. Pode-se causar uma confusão nacionalizar seus cidadãos como gregos. Entretanto, a cidade pertenceu ao Império Romano como província desde 30 aEC até meados do século VI. E com uma população predominantemente de descendência grega, a adoção da nacionalidade para os moradores ali nascidos acabou sendo algo natural.

Além disso, pela posição geográfica estratégica, Alexandria era um importante centro comercial marítimo, o que facilitava o intercâmbio de conhecimentos e culturas.

Abrigou durante séculos a famosa Biblioteca de Alexandria, local com a maior quantidade de manuscritos e textos da Antiguidade. A biblioteca passou por diversas destruições parciais decorrentes de diferentes conflitos, fazendo com que declinasse ao longo dos séculos posteriores ao nascimento de Cristo. Todavia, muitos dos citados a seguir utilizaram seu acervo como fonte de conhecimento para o desenvolvimento matemático, inclusive da DMER.

O primeiros matemáticos que se destacaram logo após Euclides foram Arquimedes de Siracusa (c. 287 aEC - c. 212 aEC) e Apolônio de Perga (c. 262 aEC - c. 190 aEC). Para Livio (2006), juntamente com Euclides, esses três desencadearam uma verdadeira Era de Ouro da matemática grega. De fato, o impulso provocado pelas pesquisas não ficou restrito à matemática, mas também fomentou milênios de inovações científicas, nas mais variadas áreas.

Mesmo sem contribuições significativas conhecidas em relação à DMER, Arquimedes, em particular, foi fundamental nos estudos dos personagens que se seguirão, a começar por Heron de Alexadria (10 - 80).

3.1.1 Heron

Heron é outro indivíduo com período de vida impreciso. Além de grande geômetra, destacou-se como inventor e engenheiro, atuando entre os séculos I e II. Algumas passagens históricas atribuídas a Heron oferecem uma noção do período em que viveu e do local de sua produção literária.

Por exemplo, Heron previu um eclipse no ano de 62 (STRUIK, 1982) e é creditado como autor do projeto da *cheiroballistra*, uma espécie de besta que foi colocada em uso na segunda metade do século I pelo Império Romano. Ou seja, o período ativo de Heron é centrado nestas décadas intermediárias e finais do século I.

Algumas fontes citam que pode ter sido professor do Museu de Alexandria, dada a similaridade de algumas de suas obras com notas de aulas. Além disso, a cidade de Alexandria atraía estudiosos das mais diversas áreas, na época. (CONNOR & ROBERTSON, 1999).

> As obras matemáticas de Hero são uma mistura de material teórico e prático-computacional. Partes de seu trabalho parecem ser uma transmissão de tradições mais antigas, algumas das quais parecem remontar aos tempos babilônicos. (Herz-Fischler, R. A Mathematical History of the Golden Number (Tradução Própria). p.108. Dover Publications, INC. New York, 1987))

Eves (2011) destaca que 14 obras de Heron chegaram até os dias de hoje, apesar de muitas delas apresentarem perceptíveis edições. Entre essas obras está *Metrica*, que traz, entre outras aplicações geométricas, aproximações para cálculo das áreas do pentágono e decágono, bem como dos volumes do dodecaedro e icosaedro. O domínio e a utilização da DMER, além de várias outras proposições euclidianas, é evidente nesta obra.

Heron é autor da fórmula utilizada para cálculo da área de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas de seus lados (Teorema de Heron). No campo da matemática, também aprimorou um modelo de aproximação para raízes quadradas não-exatas. Como invetor e engenheiro, projetou mecanismos avançados para a tecnologia da época, incluindo uma turbina a vapor que também carrega seu nome. É evidente, portanto, que suas contribuições abrangeram tanto a teoria matemática quanto a prática aplicada à disciplina, com projetos avançados e audaciosos para a época.

3.1.1.1 *Metrica*

Dividido em três livros, *Metrica* é um exemplo que ilustra o interesse da Grécia Antiga no aprofundamento da geometria e seus respectivos problemas de mensurações, dando praticidade aos estudos essencialmente teóricos em publicações de séculos anteriores. Foi amplamente consultada pelos matemáticos gregos dos séculos seguintes, ganhando traduções para o árabe, principalmente após o deterioração científico oriunda do início da Idade Média. Foi citado por Pappus e por matemáticos árabes, e continua sendo uma referência de pesquisa até hoje.

Vale destacar que não se tinha conhecimento de um manuscrito que preservasse a versão original (ou bem próxima) até o ano de 1896, quando o arqueólogo alemão Richard Schöne (1840 - 1922) o encontra em Constantinopla. (PAPADOULOS, 2007)

São diversos os teoremas apresentados em *Os Elementos* que enriquecem o tratado de Heron. A Meia e Extrema Razão é discutida diretamente em *Metrica* nos livros I e II, vinculada com esses teoremas, principalmente os provenientes do Livro XIII de Euclides..

No Livro I, Heron apresenta um estudo sobre a área de pentágonos regulares. Utiliza diretamente dois teoremas euclidianos presentes no livro XIII, o primeiro e o oitavo (já apresentados no Capítulo 1). Através de aproximações numéricas, deduz que a razão entre a área de um pentágono regular e o quadrado da medida de seu respectivo lado equivale a 5/3.

Por exemplo, se calcularmos a área de um pentágono regular com lados de comprimento 10 unidades, chegamos a um valor muito próximo de 172. A razão entre a área do polígono (172) e o quadrado do lado (100) equivale a 1,72, relativamente próxima de 5/3. Mesmo com uma margem de erro considerável, a dedução da razão aproximada utilizando os teoremas do livro XIII de *Os Elementos* acabou guiando outros matemáticos subsequentes a buscar cálculos mais precisos.

Ainda no primeiro livro de *Metrica*, Heron continua a aplicar as mesmas técnicas citadas para encontrar a razão entre a área de um decágono e o quadrado de seu respectivo lado. Chega ao valor de 15/2, uma margem de erro semelhante com a do pentágono, uma vez que o valor real aproximado é 7,69.

Já no segundo livro da obra, os volumes do dodecaedro e do icosaedro são discutidos. Herz-Fischler (1987) destaca que Heron apresenta razões entre as alturas e arestas dos sólidos, sem fornecer maiores explicações sobre a origem dos cálculos. A partir das razões fornecidas, retoma a abordagem iniciada com os pentágonos, utilizando as aproximações convenientes aos seus cálculos, e continuando a empregar teoremas euclidianos que envolvem diretamente a DMER.

Além disso, Herz-Fischler (1987) observa que Pappus de Alexandria (c. 290 - c. 350) usou deste método de Heron para aperfeiçoar a fórmula de cálculo do volume do icosaedro, em seu manuscrito *Synagoge*.

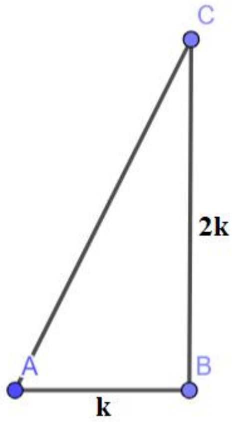
3.1.1.2 A DMER em outras obras de Heron

Outra obra de Heron, intitulada *Mensurae*, traz um estudo para cálculo aproximado (mais uma vez) do diâmetro do círculo circunscrito ao pentágono regular. Heron dá seguimento à metodologia de *Metrica*, adotando aproximações peculiares, e conectando seu estudo a mais um teorema do livro XIII de *Os Elementos*, desta vez o décimo, que envolve indiretamente a DMER.

Mas é em um trecho de *Comentários sobre Os Elementos* de um matemático árabe chamado al-Naiziri (865 - 922) que se destaca uma versão alternativa de Heron para encontrar a divisão de um segmento em Meia e Extrema Razão. Al-Naiziri registra trechos únicos de outros matemáticos gregos que se debruçaram em esmiuçar *Os Elementos* (HERZ-FISCHLER, 1987).

Na apresentação de al-Naiziri, Heron parte de segmentos perpendiculares com razão 1:2. Um terceiro segmento é traçado formando um triângulo retângulo, conforme a figura 44.

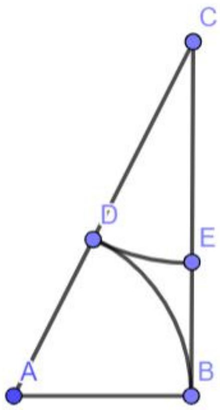
Figura 44 - Divisão de um segmento em Meia e Extrema Razão por Heron (Parte 1)



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, com $\widehat{B} = 90°$, temos que $\mathrm{AC} = \mathrm{k}\sqrt{5}$. Traça-se, a partir de A, um arco de raio AB que intersecta o segmento AC em D. Outro arco é traçado, agora com raio CD, intersectando BC em E.

Figura 45 - Divisão de um segmento em Meia e Extrema Razão por Heron (Parte 2)



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Da forma que foi formada a figura, temos $AB = AD = k$. Logo, $CD = CE = k\sqrt{5} - k$. Por fim, $BE = 2k - (k\sqrt{5} - k) = 3k - k\sqrt{5}$.

Heron, desta forma, dividiu o segmento BC em Meia e Extrema Razão no ponto E. Se aplicarmos a proporção áurea nos segmentos, fica demonstrada a DMER.

$$\frac{2k}{\mathrm{k}\sqrt{5} - \mathrm{k}} = \frac{\mathrm{k}\sqrt{5} - \mathrm{k}}{3\mathrm{k} - \mathrm{k}\sqrt{5}}$$

$$\frac{2k}{k(\sqrt{5}-1)} = \frac{k(\sqrt{5}-1)}{k(3-\sqrt{5})}$$

$$\frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{(\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$$

$$\frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{(3\sqrt{5}+5-3-\sqrt{5})}{4}$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{2\sqrt{5}+2}{4}$$

Fica validada, dessa maneira, a divisão de Heron apresentada por al-Naiziri.

Desta forma, assentamos que Heron foi uma figura que contribuiu significativamente para o desenvolvimento e propagação da DMER ao longo do tempo e em distintas regiões, ocupando um lugar de destaque na história da razão áurea.

3.1.2 Ptolomeu

A inclusão de Ptolomeu neste estudo é primordialmente atribuída à influência que exerceu sobre Leonardo Fibonacci. Mais especificamente, é destacado o desenvolvimento por Ptolomeu da proposição VI, 30, e que posteriormente acabou sendo aplicado em *Practica Geometriae*, uma das obras de Fibonacci, e com impacto também na matemática árabe.

Cláudio Ptolomeu (c. 100 - 170) foi um matemático, astrônomo e geógrafo greco-romano, hoje considerado um dos patronos da Astronomia. Herdeiro notável da ciência grega antiga e inspirado pela visão universal aristotélica, atrelou o misticismo ao estudo dos cosmos, e assentou sua teoria em uma das obras mais lidas durante os primeiros 1500 anos depois de Cristo, o *Almagesto*, escrita por volta do ano 150.

Seu modelo geocêntrico, elaborado com auxílio da geometria na determinação do posicionamento dos astros, acabou guiando a astronomia por mais de um milênio, até a divulgação da Teoria Heliocêntrica elaborada por Nicolau Copérnico (1473 - 1543) ganhar notoriedade pela Europa. Apesar disso, seu tratado catalogou 47 constelações que ainda hoje são reconhecidas oficialmente pela União Astronômica Internacional, instituição que atua nas pesquisas astronômicas globais.

O *Almagesto* sobreviveu a vários percalços ao longo dos séculos, incluindo a destruição da Biblioteca de Alexandria e a Idade Média na Europa. Foi traduzido para idiomas não ocidentais e estudado continuamente, tendo suas ideias alcançado um impacto duradouro na astronomia e na geometria. Embora algumas fontes sugiram que Hiparco tenha sido o autor de inúmeras exposições que nele se encontram, é mais aceito que ele não tenha sido autor direto, mas sim um influenciador profundo e inegável das proposições contidas ali.

Sobre a origem do nome *Almagesto*:

> Ptolomeu sintetizou seu próprio trabalho astronômico e o de outros astrônomos gregos (particularmente Hiparcos de Nicéa) em um livro enciclopédico, de treze volumes, *Hē Mathēmatikē Syntaxis* (A síntese matemática). O livro se tornou conhecido mais tarde como *O grande astrônomo*. No entanto, os astrônomos árabes do século IX se referiam ao livro invocando o superlativo grego "Megistē" ("O maior"), mas pondo antes o identificador árabe de nomes próprios, "al". O livro, portanto, ficou conhecido até os dias de hoje como *Almagesto*. (Livio, Mario. Razão Áurea (Portuguese Edition), p.102. Edição do Kindle)

Adentrando à seção áurea, Ptolomeu foi fundamental para estabelecer uma escala trigonométrica, inclusive para os ângulos de 36°, 72° e 108°, ângulos esses partes integrantes das figuras inerentes à DMER. Além disso, apresenta uma série de estudos interligados a *Os Elementos.* E é o aprimoramento de uma proposição do sexto livro da obra euclidiana que representará o ponto focal que será trazido à discussão.

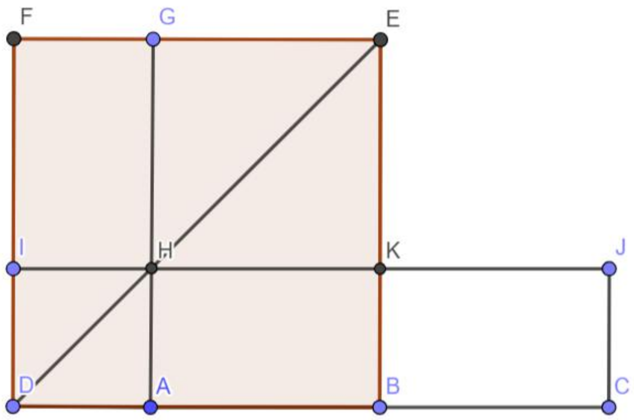
3.1.2.1. A DMER em *Almagesto*

Ptolomeu apresenta um novo método para a proposição VI, 30 de *Os Elementos*, justamente a demonstração de Euclides para a divisão de um segmento de reta em Meia e Extrema Razão, que se encontra na Proposição VI, Livro II, de *Almagesto*.

Relembrando o contexto do enunciado: a partir de um segmento AC, marca-se seu ponto médio B e que, quando prolongado até um ponto D de tal forma que o quadrado construído a partir de BC possui área equivalente a um retângulo de base CD, o segmento BD fica em dividido em MER.

Além disso, por VI, 29, a o paralelogramo esboçado a partir do segmento excedente AD é semelhante ao paralelogramo formado inicialmente por BD, ou seja, ADIH também é um quadrado.

Figura 46 - Construção geométrica da Proposição II, 6 do *Almagesto*



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Ainda de acordo com as proposições euclidianas já mencionadas, temos que os retângulos ABKH, BCJK e FGHI são congruentes. Desta forma:

$$\text{Área (CDIJ)} = \text{Área Gnomom (BDGHK)}$$
$$\text{Área (CDIJ)} = \text{Área (BDFE)} - \text{Área (GEKH)}$$
$$CD\,.\,DI = BD^2 - HK^2$$

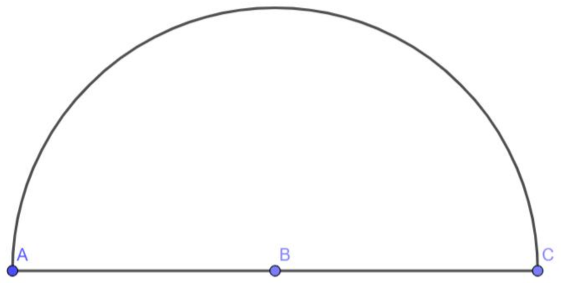
Como $HK = AB$, temos

$$BD^2 = AB^2 + CD.\,DI$$

Ptolomeu utiliza desse fundamento em *Almagesto* para demonstrar um outro, também objetivando encontrar a DMER.

No Livro I, Parte 10, ele apresenta uma construção a partir de um semicírculo de diâmetro AC, com centro em B.

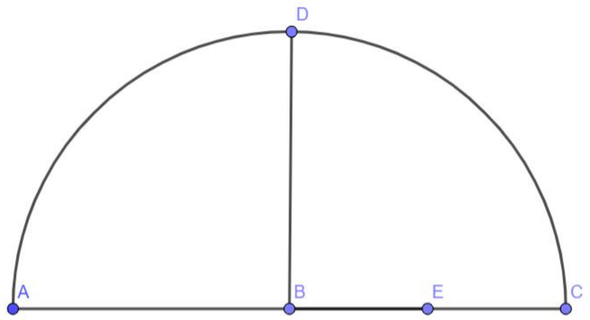
Figura 47 - Construção geométrica da Proposição I, 10 do *Almagesto* (Parte 1)



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Fica estabelecido E como ponto médio de BC. Traça-se, a partir do centro B, um raio perpendicular ao diâmetro, interceptando o arco em D.

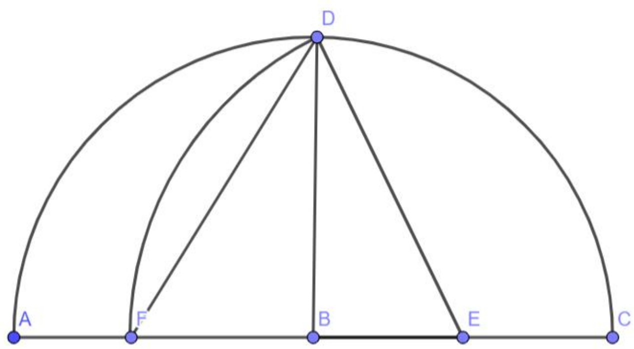
Figura 48 - Construção geométrica da Proposição I, 10 do *Almagesto* (Parte 2)



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Traça-se o segmento DE e, a partir de E e sob AC, desenha-se um segmento congruente a DE. Por fim, é traçado também o segmento DF.

Figura 49 - Construção geométrica da Proposição I, 10 do *Almagesto* (Parte 1)



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Pela proposição euclidiana exposta acima, os pontos F, B, E e C obedecem à seguinte relação:

$$EF^2 = BE^2 + CF.BF$$

Porém $EF = DE$, e, por Pitágoras, $BE^2 + BD^2 = DE^2$. Substituindo na equação acima:

$$BE^2 + BD^2 = BE^2 + CF.BF$$
$$BD^2 = CF.BF$$

Temos ainda que $BD = BC$.

$$BC^2 = CF.BF$$

Desta forma, Ptolomeu estabelece que o ponto B divide o segmento CF em meia e extrema razão. Ele dá seguimento às demonstrações, avançando a partir da proposição exposta, até chegar ao famoso Teorema de Ptolomeu. Aplicável a quadriláteros inscritos em uma circunferência, estabelece que a soma dos produtos dos lados oposto é equivalente ao produto das diagonais.

No contexto deste tema, reforça-se que a maneira como Ptolomeu chega à DMER, a partir da proposição de Euclides, terá significativo efeito nas obras de Fibonacci, sendo determinante para a evolução da seção áurea à maneira como é propagada atualmente.

3.1.3 Pappus de Alexandria

Pappus de Alexandria (290 - 350), tido como o último grande matemático grego antes do início da Idade Média, participou ativamente de pesquisas relacionadas à Divisão em Meia e Extrema Razão.

Provavelmente Pappus também teve acesso à Biblioteca de Alexandria e, assim, obtido acesso a diferentes estudos que ainda se mantinham conservados em seu acervo, no início do século IV.

De concreto, Pappus teve a oportunidade de se aprofundar nos teoremas de *Os Elementos*, elaborando e agregando demonstrações inéditas que fizeram parte da obra *Synagoge* (Coletânea), publicada em 340. Composta por oito livros, cada um com um tema distinto, não só abordou Euclides como também compilou e desenvolveu trabalhos de matemáticos gregos anteriores a ele.

Tendo como pano de fundo a razão áurea, Pappus elaborou as construções do dodecaedro e do icosaedro de forma extensiva à registrada em *Os Elementos*. Na verdade, ele utiliza outros teoremas euclidianos para a construção das figuras, mantendo a DMER como peça fundamental nos respectivos traçados, além de aprimorar as aproximações de Heron.

> Há duas partes da obra de Pappus que nos interessam: primeiro, a construção do icosaedro e dodecaedro por um método fundamentalmente diferente em espírito daquele de Euclides e que como um subproduto dá uma nova e elegante prova do resultado principal (...) (Herz-Fischler, R. A Mathematical History of Golden Number (Tradução Própria). p.115. Dover Publications, INC. New York, 1987)

> Em Coleção (Synagoge; 340), Pappus apresenta um novo método de construção do dodecaedro e do icosaedro, e também comparações entre os volumes de todos os sólidos platônicos, sempre envolvendo a Razão Áurea. (Livio, Mario. Razão áurea (p. 102). Editora Record. Edição do Kindle)

Outro material desenvolvido por Pappus em *Synagoge* estabeleceu um paralelo entre volumes dos poliedros regulares cujas áreas superficiais são equivalentes, também adotando a razão áurea como princípio.

> Há duas partes da obra de Pappus que nos interessam: (...) e, em segundo lugar, a comparação dos volumes de poliedros regulares cuja área superficial é a mesma, por meio de uma série de lemas que envolvem propriedades de DEMR e estimativas numéricas obtidas a partir dessas propriedades. (Herz-Fischler, R. A Mathematical History of the Golden Number (Tradução Própria). p.115. Dover Publications, INC. New York, 1987)

Como o objetivo da dissertação é explorar a história da DMER, não nos alongaremos nas demonstrações desenvolvidas por Pappus, concentrando-nos no tema histórico.

A influência do trabalho de Pappus sobre a DMER vai ser explicitada ainda nesse capítulo, já que é regularmente citada em novas pesquisas oriundas dos indivíduos que serão apresentados. Ainda em relação à admiração de Pappus a Euclides, temos um trecho de Livio (2006)

> A figura do autor que surge das páginas de Elementos é a de um homem consciencioso, respeitador da tradição e muito modesto. Em nenhum lugar Euclides procura obter o crédito por um trabalho que não seja originalmente seu. Na verdade,

> ele não reivindica qualquer originalidade, apesar do fato de que é bastante óbvio que contribuiu com muitas provas novas, reorganizou totalmente o conteúdo desenvolvido por outros em volumes inteiros e planejou todo o trabalho. A justiça escrupulosa e a modéstia lhe valeram a admiração de Pappus de Alexandria, que por volta de 340 elaborou uma obra em oito volumes intitulada Coleção (Synagoge), que fornece um registro inestimável de muitos aspectos da matemática grega. (Livio, Mario. Razão áurea (p. 90). Editora Record. Edição do Kindle.)

3.1.4 Proclo

É peremptória a inclusão das obras e vida do filósofo grego Proclo de Licia (412 - 485) para o teor da história da DMER ser integral nesta dissertação. Não é exagero afirmar que a verdadeira compreensão da existência de certas autorias no campo da matemática foram estabelecidas em virtude dos textos literários deixados por Proclo.

Um dos mais importantes estudiosos e propulsores da filosofia do ponto de vista neoplatônico, recebe o título de Diádoco (*Proclus Diadochus*), que em grego e latim pode ser traduzido como "sucessor", quando assume a posição de escolarca da Academia em 437.

Muito do que sabemos da vida de Proclo é derivado do registro de outro filosófo neoplatônico, Marino de Neapolis (c. 450 - c. 500), curiosamente o sucessor de Proclo na cadeira de diretor da Academia. A obra *Vida de Proclo* acaba transmitindo detalhes de sua vida pessoal; usaremos esta como principal referência para apresentarmos uma breve biografia. Outra referência utilizada será o livro *Proclo: Uma Introdução* do filósofo Radek Chlup (1972 -), um estudo com uma abordagem mais teológica e filosófica de suas respectivas obras, mas que contém trechos que se adequam ao correspondente tema. Em relação às produções literárias relativas à razão áurea, manteremos Herz-Fischler como referência.

> Se eu meramente tivesse considerado a nobreza e valor de nosso filósofo contemporâneo Proclo, a multidão de documentos e as realizações oratórias dos biógrafos de tal homem, e, além disso, minha própria insuficiência na prática da eloquência, eu acho que deveria ter sido sábio em me abster silenciosamente de "pular o poço", como o vulgar diz, precipitando-me nessa empreitada perigosa. (Marino, A Vida de Proclo (Concernente à felicidade), tradução: Ruan Carlos, p. 2)

Sobre suas publicações, os comentários aos diálogos platônicos são considerados o gênero mais importante para os neplatônicos tardios[9], e que ergue Platão ao lugar mais alto

[9] Os denominados filósofos neoplatônicos tardios viveram após o século III, já com a ascenção do Cristianismo como religião predominante na Europa, incorporando novos conceitos à corrente de pensamento dos platônicos da Antiguidade Clássica.

entre os antigo filósofos. Nosso enfoque será no livro *Comentários ao Primeiro Livro dos Elementos de Euclides*, com uma atenção especial à distinta parte intitulada "Catálogo dos Geômetras".

3.1.4.1. Breve biografia

Nascido no ano de 412 em Constantinopla, antes incorporada ao Império Greco-Romano, hoje território de Istambul, na Turquia, seus pais detinham certa condição social nobre, utilizando desta para uma mudança quase imediata ao nascimento de Proclo para a cidade de Xhantus, em Lícia, região turca na costa mediterrânea. Seu pai, Patrício, era um conhecido advogado da região, e lhe proporcionou condições para lograr mudança para Alexandria ainda jovem, obtendo acesso a um ensino de excelência.

Outrossim, sua família seguia os ritos da antiga religião grega, já decadente no início do século V. Aliás, a fé no politeísmo foi um traço marcante da vida de Proclo, numa época em que qualquer denominação religiosa diferente do cristianismo recebia a alcunha de paganismo, herança de Constantino (272 - 337), o imperador romano que instituiu a religião cristã como a oficial no Império Romano em 313.

> Ao nascer, ele foi recebido pela deusa constantinopolitana Poliouchos [Atenas], que, por assim dizer, ajudou sua mãe no parto. Ela pode ter sido considerada a causa de sua vida, porque ele nasceu na cidade que ela protege e salva; e que, quando chegou à infância e à juventude, o fez viver bem: pois ela lhe apareceu em um sonho induzindo-o a seguir a filosofia. (Marino, A Vida de Proclo (Concernente à Felicidade), tradução: Ruan Carlos. p. 6)

É chamativo que muitas decisões tomadas por Proclo eram baseadas em presságios, fato que também norteava outros intelectuais da época. Ao deixar Alexandria rumo a Constantinopla, (sem data confirmada), na companhia de um de seus muitos mestres eloquentes, Leonas (sofista, sem maiores informações), acaba tendo uma revelação divina, que alteraria seu rumo novamente.

> Ele ainda estava estudando quando Leonas o convidou a compartilhar sua viagem a Constantinopla, que ele havia empreendido como um favor a Teodoro, o governador alexandrino, um homem de grande distinção, liberalidade e simpatia para com a filosofia. O jovem acompanhou seu professor com muito prazer, para não interromper seus estudos. Mas, afinal, isso foi extremamente providencial, pois o trouxe de volta à influência da deusa que havia sido a causa de seu nascimento [Atenas]. Pois, ao chegar, a deusa o aconselhou a dedicar-se à filosofia e a frequentar as escolas atenienses. Então ele se despediu da retórica e de seus outros estudos anteriores...(Marino, A Vida de Proclo (Concernente à Felicidade), tradução: Ruan Carlos. p. 7)

Marino expõe, então, que o passo dado por Proclo rumo à filosofia foi baseado numa visão divina da deusa grega Atena. Verdade ou não, o fato é que nascia ali um dos maiores filósofos neoplatônicos do século V. Além da influência platônica, seu retorno a Alexandria acabou sendo acompanhado por outros mestres que possibilitaram sua introdução à filosofia aristotélica, encontrando nesta uma vertente importante no desenvolvimento de uma visão que possuía fundamentos de ambos, além de um apreço pela figura de Aristóteles.

Outras mudanças acabam ocorrendo ao longo de sua vida, sempre inspiradas por intervenções místicas, sendo a principal a chegada a Atenas, tendo, ali, contato direto com Plutarco, que na época era o escolarca da Academia, já com idade avançada. O velho Plutarco acaba impressionado com as habilidades de Proclo e o recomenda como substituto na direção da Academia, cargo que exerceu por quase 50 anos. (de 437 a 485)

Durante sua gestão, pode-se afirmar que a Academia retoma o *status* de principal centro de estudos filosóficos da Europa, com um alcance tão grande que passa a incomodar o Império Romano, dada sua essência politeísta , distante dos preceitos cristãos. Proclo morreria em 485, já com a idade avançada, e a Academia em 529.

3.1.4.2 Comentários a Euclides, Livro I: O Catálogo dos Geômetras

Não haveria muitos detalhes da história da matemática grega se não fosse pelo *Comentários ao Primeiro Livro de Euclides*, livro escrito no século V, um milênio após a morte de Pitágoras. Em um primeiro impulso, perguntamo-nos como um escrito que carrega uma história de cerca mil anos poderia deter tanta carga detalhista em relação aos antigos matemáticos?

Infelizmente, outros escritos que fundamentaram os *Comentários* foram perdidos ao longo do tempo, mas, na época de Proclo, esse conhecimento escrito provavelmente ainda existia, além daqueles repassados oralmente. Dada sua posição como escolarca da Academia, era natural que obtivesse acesso a estes.

Especificamente, o *Catálogo de Geômetras* é um referencial importante e amplamente utilizado quando tratamos da história da geometria, particularmente daqueles personagens vinculados (direta ou indiretamente) à Academia.

Um outro nome utilizado para o mesmo conjunto de páginas é *Sumário Eudemiamo*, já que Eudemo de Rodes (c. -370 - c. -300) foi amplamente empregado como fonte de estudo.

> É por Proclus, preservando a memória da obra História da Geometria, de Eudemo, importante discípulo de Aristóteles, ao citar um trecho do referido trabalho, denominado o Catálogo dos Geômetras ou, como se tornou mais conhecido, o

> Sumário de Eudemo. (Leão, A.F. Euclides e a Incomensurabilidade: O Profundo tear das Abrangências - Os Sumos e Segredos do Livro X. Tese (Doutorado). Rio Claro, 2017. p. 17)

> Supõe-se geralmente que o catálogo contém grandes resumos de uma história da matemática escrita por Eudemus, um estudante de Aristóteles e, portanto, uma pessoa que viveu pouco depois da época em questão. (Herz-Fischler, R. A Mathematical History of the Golden Number (Tradução Própria). p.80. Dover Publications, INC. New York, 1987)

Além de Eudemo, outro filósofo que é defendido como essencial à composição dos *Comentários* é Jâmblico de Cálcis. A ele são atribuídas, sobretudo, as passagens históricas relativas a Pitágoras e seus discípulos, algumas já destrinchadas no capítulo 2. Por exemplo, vimos que foi por Proclo, através dos apontamentos (também perdidos nos dias de hoje) de Jâmblico, que a elevação do fazer matemático à categoria de ciência intelectual foi graças a Pitágoras, matemática essa não necessariamente conectada às necessidades humanas diretas, como comércio e agricultura. Além disso, a revelação da descoberta dos incomensuráveis pela escola pitagórica, presente em *Comentários,* também é devida a Jâmblico.

> Admite-se geralmente que os primeiros passos no sentido do desenvolvimento da teoria dos números e, ao mesmo tempo, do lançamento das bases do futuro misticismo numérico, foram dados por Pitágoras e seus seguidores movidos pela filosofia da fraternidade. Assim é que Jâmblico, um influente filósofo neoplatônico que viveu por volta de 320 EC, atribui a Pitágoras a descoberta de certos números incomensuráveis. (Gomes.C.R. Pitágoras de Samos: de Mistico a Precursor da Teoria dos Números. Introdução. V Bienal da SBM. Universidade Federal da Paraíba. 2010)

Sobre a natureza do *Catálogo*, os indivíduos listados são dispostos cronologicamente, anteriores e contemporâneos a Euclides. Além de Eudemo e Jâmblico, já aludimos alguns deles, Eudoxo de Cnido, Platão, Teeteto, Architas, Teodoro de Cirene, ... Há inúmeros outros mencionados na obra, com destaque a Leodamas de Tasos, contemporâneo a Platão, e Hipócrates de Quio (c. 470 aEC - c. 410 aEC), importante geômetra grego que é autor de alguns teoremas notáveis.

Como não poderia ser diferente, as evocações a Platão são constantes em *Comentários*, dada a natureza filosófica neoplatônica de Proclo. Além de incluí-lo como matemático em *Catálogos*, mesmo sem contribuições diretas conhecidas, Proclo aborda os estudos relativos à "seção", alvos de polêmicas interpretações em relação à DMER por conta do contexto da palavra, os poliedros platônicos e suas características e o aprofundamento da teoria dos números e dos incomensuráveis.

> Platão, que apareceu depois deles, avançou muito a matemática em geral e a geometria em particular por causa de seu zelo por esses estudos. É bem sabido que seus escritos estão repletos de termos matemáticos e que em todos os lugares ele tenta despertar a admiração pela matemática entre os estudantes de filosofia. Nessa

> época também viviam Leodamas de Tasos, Arquitas de Tarento e Teeteto de Atenas, por quem os teoremas foram aumentados em número e trazidos para um arranjo mais científico. Mais jovens que Leodamas eram Neoclides e seu discípulo Leão, que acrescentaram muitas descobertas às de seus predecessores, de modo que Leão pôde compilar um livro de elementos mais cuidadosamente planejados para levar em conta o número de proposições que haviam sido provadas e sua utilidade. Ele também descobriu o *diorismi*, cujo objetivo é determinar quando um problema sob investigação é suscetível de solução e quando não é. Eudoxo de Cnido, um pouco mais tarde que Leão e membro do grupo de Platão, foi o primeiro a aumentar o número dos chamados teoremas gerais; às três proporções já conhecidas acrescentou mais três e multiplicou o número de proposições relativas à “seção” que tiveram sua origem em Platão, empregando o método de análise para sua solução. Amyclas de Heracleia, um dos seguidores de Platão, Menecmo, um estudante de Eudoxus que também estava associado a Platão, e seu irmão Dinostratus tornaram toda a geometria ainda mais perfeita. Teudio de Magnésia tinha uma reputação de excelência em matemática como no resto da filosofia, pois ele produziu um arranjo admirável dos elementos e fez muitos teoremas parciais mais gerais. Houve também Athenacus de Cyzicus, que viveu nessa época e se tornou eminente em outros ramos da matemática e principalmente na geometria. Esses homens viviam juntos na Academia, fazendo suas indagações em comum. Hermótimo de Cólofon prosseguiu as investigações já iniciadas por Eudoxo e Teeteto, descobriu muitas proposições nos Elementos e escreveu algumas coisas sobre locus-teoremas. Filipo de Mende, um aluno que Platão havia encorajado a estudar matemática, também realizou suas investigações de acordo com as instruções de Platão e se pôs a estudar todos os problemas que ele achava que contribuiriam para a filosofia de Platão. (Proclus, A Commentary on the First Book of Euclid's Elements, "Catalogue of Geometers" (Herz-Fischler, R. A Mathematical History of the Golden Number (Tradução Própria). p.80. Dover Publications, INC. New York, 1987. [Proclus-Morrow , 54]; [Proclus-Friedlein, 66; Proclus-Ver Eecke, 59; Heath, 1921, I, 32; Van der Waerden, 1954, 90; Thomas , 1951, 151; ver também Burkert, 1972, 452])

> No entanto, foi Teeteto que distinguiu as potências que são comensuráveis em comprimento daquelas que são incomensuráveis e que dividiu as linhas irracionais mais conhecidas de acordo com os diferentes meios, atribuindo a linha mediana à geometria, o binômio à geometria. aritmética e o apótema da harmonia; como afirma Eudemo, o Peripatético. (Herz-Fischler, R. A Mathematical History of Golden Number (Tradução Própria). p.88. Dover Publications, INC. New York, 1987)

Fica, desta forma, o registro da importantíssima obra *Comentários ao Primeiro Livro de Euclides*, com destaque à parte *Catálogo de Geômetras*. Ademais, apesar de conciso, evidencia-se que fazer constar Proclo no nosso texto é inerente ao tema do trabalho, tanto por trazer até nós um conhecimento acerca da história da matemática não visto em outro autor, quanto por ter servido de inspiração a outros personagens que serão essenciais ao desenvolvimento da DMER, abrangendo, inclusive, regiões fora do universo ocidental, como veremos a seguir.

3.2 **A DMER no mundo árabe**

O início da Idade Média no mundo ocidental marcou uma redução drástica no ritmo de avanços no conhecimento científico, e na matemática não foi diferente. A transição do modelo de vida da sociedade romana para um caracterizado pelo sistema feudal, substancialmente agrícola, no qual a Igreja centralizava o poder e armazenava as antigas publicações acadêmicas em seus domínios, acarretou em campos de estudos, que outrora fluíam com intensidade, praticamente estagnados. A teologia cristã se tornou o principal objeto de ensino à população não eclesiástica, em parte com a intenção de controle ideológico, distante o suficiente da ciência.

Houve um movimento em algumas instituições religiosas no sentido de reproduzir e traduzir os escritos literários existentes, tornando seus membros praticamente os únicos que conseguiam acesso às obras científicas da Antiguidade Clássica. Desta forma, os pensadores matemáticos estavam limitados a religiosos destas instituições, e não havia um movimento constante para troca de conhecimentos entre membros de instituições diferentes.

Todavia, fora do ocidente europeu, a matemática continuava a progredir entre povos como os árabes, persas, indianos e chineses. A morte de Maomé, o profeta do Islã, em 632, deu origem a um período denominado Califado, ou Período Islâmico, com os adeptos da religião se espalhando por todo o Oriente Médio, além de parte da Índia e arredores, em um momento que coincidia com os primeiros séculos da Idade Média.

Os califas[10] exerciam muita influência dentro das regiões que constituíram um verdadeiro império islâmico, e, como veremos a seguir, esta influência acabou direcionando seus matemáticos a novas descobertas, com acesso a todo o acervo grego para auxiliar em suas progressões.

> Depois da morte do profeta Maomé, em 632, o controle do mundo islâmico passou para uma série de califas. Em princípio, os califas eram escolhidos por mérito, de modo que o sistema de poder do califado não era exatamente uma monarquia. No entanto, o califa tinha muito poder. Mais ou menos em 654, sob Otomão, o terceiro califa, o califado tinha se tornado o maior império que o mundo já vira. Seu território (na geografia atual) incluía a Península Arábica, a África do Norte desde o Egito, passando pela Líbia até a Tunísia Oriental, o Levante, o Cáucaso e grande parte da Ásia Central, do Irã ao Paquistão, Afeganistão e Turcomenistão. (Stewart, Ian. Desbravadores da matemática (pp. 37-38). Zahar. Edição do Kindle)

Marcado por um desenvolvimento amplo em diferentes campos científicos, o Período Islâmico acabou mantendo vivos os estudos relacionados à proporção áurea. Nesta perspectiva, focaremos em dois matemáticos não ocidentais: al-Khwarismi e Abu Kamil. Ambos obtiveram progressos fundamentais para estudarmos a matemática como a

[10] Sucessor do profeta Maomé, na qualidade de guia ou líder temporal da comunidade islâmica.

conhecemos nos dias de hoje, garantindo a preservação e aperfeiçoando os conhecimentos provenientes da Grécia Antiga.

3.2.1 al-Khwarismi

Com uma biografia bem restrita, Muhammad ibn Musa al-Khwarismi (780 - 850) tem como um provável local de nascimento a antiga cidade de Khwariszm, atualmente Khorazm, localizada no Uzbequistão, próxima da fronteira com o Turcomenistão. Essa região integrava a antiga Pérsia e também foi impactada pelo Período Islâmico.

Com a decadência da biblioteca de Alexandria e o avanço do Islã, era natural que o líder político e religioso do mundo islâmico almejasse também o domínio intelectual de seu povo. Entre os anos de 813 e 833, o califa Al-Manum (786 - 833) tomou a iniciativa de erguer uma estrutura semelhante a de Alexandria, na cidade de Bagdá, capital do Império Islâmico.

A empreitada recebe o nome de Beit al-hikma (Casa do Saber). O califa ainda estabelece que deveriam ser traduzidas obras intelectuais de diferentes culturas para o idioma árabe, entre elas as literaturas gregas. (LIVIO, 2006)

Em algum momento entre as décadas de 10 e 20 do século IX, al-Khwarismi decide se dirigir a Bagdá. Os registros conhecidos indicam que ele dominava o idioma grego e que, por isso, acabou desempenhando papel fundamental nas traduções de obras da Grécia Antiga que a Casa do Saber detinha posse, entre elas, *Os Elementos*. Contudo, não há uma confirmação de que al-Khwarismi tenha entrado em contato com a obra euclidiana diretamente, e, desta forma, com a DMER.

> Na verdade, existe alguma controvérsia sobre se Al-Khwarizmi tinha ciência dos Elementos de Euclides. Devia conhecer, porque Al-Hajjaj, outro estudioso na Casa do Saber, havia traduzido Euclides para o árabe quando Al-Khwarizmi era jovem. Por outro lado, a principal tarefa da Casa do Saber era a tradução, e as pessoas que lá trabalhavam não eram obrigadas a ler as obras traduzidas por seus colegas. (Stewart, Ian. Desbravadores da matemática (pp. 41-42). Zahar. Edição do Kindle.)

Agregando distintos conhecimentos no acervo existente na Casa do Saber, acaba elaborando o *Kitab al-Jabr wa-I-muqabala* (O Livro da Restauração e do Equilíbrio), por volta de 820. Com uma exposição inédita, o livro estabelece pela primeira vez um pilar algébrico semelhante ao estudado atualmente, explorando equações lineares e quadráticas, e referindo-se à incógnita como “coisa”. Al-Khwarismi acaba criando um protótipo do que viria se tornar o conceito causador de traumas de muitos jovens de hoje, o famigerado “x” (que só tomaria essa forma no século XVI). Reitera-se que ele mesmo não utilizou qualquer símbolo, mas estruturou a concepção de sua aplicação.

Diante da pertinência do livro no campo das equações, surge a nomenclatura Álgebra em virtude do nome *al-Jabr*, uma homenagem realizada por um tradutor inglês chamado Roberto di Chester, ou Roberto de Ketton, que viveu no século XII. Ele também foi responsável pela tradução de obras árabes para o latim, inclusive do até então inédito livro Alcorão, além de possibilitar e contribuir para a difusão do *Kitab al-Jabr wa-I-muqabala* no mundo ocidental.

Outra obra de al-Khwarismi, *Kitab al-Jam’a wal-Tafreeq bi-Hisab al-Hind* (Sobre o cálculo com números hindus), também impactou a matemática e levou ao surgimento de outras expressões matemáticas, como “algarismo” e “algoritmo”. Publicado em meados de 825, foi fundamental para a propagação do sistema decimal através de algarismos hindus, dentro do Império Islâmico. Mais tarde, o sistema apresentado no livro seria introduzido no Ocidente de modo efusivo, através do *Liber Abaci* de Fibonacci.

> Sobre o cálculo com numerais hindus, escrito por volta de 825, foi traduzido para o latim como Algoritmi de numero indorum, e quase sozinho ele espalhou para a Europa medieval a notícia dessa nova e impressionante maneira de fazer aritmética. Ao longo do caminho, Algoritmi tornou-se Algorismi, e métodos para calcular usando esses numerais foram chamados algorismos. No século XVIII, a palavra mudou para algoritmo. (Stewart, Ian. Desbravadores da matemática (p. 38). Zahar. Edição do Kindle)

Em relação a DMER, al-Khwarismi expõe o seguinte problema algébrico em *Kitab al-Jabr wa-I-muqabala*:

> “Se alguém disser: ‘Dividi dez em duas partes; multipliquei uma por dez e a outra por si mesma, e os produtos foram o mesmo’; então o cálculo é este: você multiplica uma coisa por dez; são dez coisas. Então, multiplique dez menos por si mesmo; é 100 e um quadrado menos vinte coisas, que é igual a dez coisas. Reduza isso de acordo com as regras que eu expliquei acima para você.” (Herz-Fischler, R. A Mathematical History of the Golden Number (Tradução Própria). p.123. Dover Publications, INC. New York, 1987)

Desenvolvendo em uma linguagem algébrica o problema acima, obtemos:

$$10.x = (10 - x).(10 - x)$$

$$\frac{10}{10 - x} = \frac{10 - x}{x}$$

Equivalente à proporção originada da Meia e Extrema Razão.

Herz-Fischler (1987) apresenta algumas opiniões de autores acerca do real propósito de al-Khwarismi sobre o problema proposto, analisando se sua verdadeira intenção era explorar a DMER, que acaba coincidindo com o posicionamento levantado por Stewart em uma citação anterior.

> A questão de interesse é se al-Kwarizmi tinha ou não o DEMR em mente quando apresentou esse problema. Uma resposta negativa é dada por Gandz [1938, 531], que diz que al-Khwarizmi não sabe nada da importância especial deste problema que é ensinado por Euclides II [11]. Deve-se notar que Gandz [por exemplo, pp 519, 524] é da opinião de que al-Khwarizmi não foi influenciado por Euclides no desenvolvimento de seus métodos e que enquanto "algebricamente" [al-Khwarizmi] está à frente de Euclides 1000 anos, "geometricamente" ele está atrás de Euclides 1000 anos. (Herz-Fischler, R. A Mathematical History of the Golden Number (Tradução Própria). p.80. Dover Publications, INC. New York, 1987

Apesar da incerteza em relação ao propósito original de al-Khwarismi no quesito DMER, ficam as evidências de um matemático que foi imensamente estudado e celebrado por seus homólogos posteriores. Seu legado continuou a inspirar na elaboração de uma quantidade incontável de obras, consolidando seu nome entre os grandes da história da matemática.

3.2.2 Abu Kamil

Abu Kamil Shuja ibn Aslam (ca. 850 – ca.930), matemático cuja biografia ainda permanece envolta em mistério, teve como provável local de nascimento o Egito, embora alguns autores coloquem o Iraque como uma alternativa. Não existem muitos registros precisos sobre sua vida, contudo, seu trabalho é reconhecido como crucial para o desenvolvimento da matemática, especialmente no campo algébrico. Foi preponderante para a retomada matemática no Renascimento ocidental, inclusive sendo citado diretamente por Fibonacci.

Abu Kamil foi quase imediatamente posterior a al-Khwarizmi e que, nesta altura, estava amplamente difundido no mundo árabe. Acaba dando sequência aos princípios contidos em seus manuscritos, reverenciando-o como "inventor da álgebra", além de "aquele que foi o primeiro a ter sucesso em um livro de álgebra e que foi pioneiro e inventou todos os princípios nele" (CONNOR & ROBERTSON, 1999)

Entre as obras que não se perderam ao longo do tempo e são conhecidas, estão: *Book on algebra* (Livro sobre Álgebra)*, Book on surveying and geometry* (Livro sobre agrimensura e geometria) e *Book of rare things in the art of calculation* (Livro de coisas raras na arte do cálculo).

Duas dessas envolvem a meia e extrema razão, e em ambas Abu Kamil deixa explícita a referência à proporção, apresentando domínio total da obra de Euclides, citando-o de modo costumaz em seus livros. (HERZ-FISCHLER, 1987).

No manuscrito *Book on surveying and geometry,* o foco não é direcionado a matemáticos, mas sim a agrimensores. Apesar disso, os fundamentos geométricos expostos estão longe de serem simples e, em alguns deles, são utilizadas construções que envolvem a DMER, principalmente aquelas envolvendo os polígonos regulares de 5 e 10 lados. Entretanto, as demonstrações algébricas foram documentadas em um outro tratado, que compõe o *Book of algebra*.

O *Book of algebra* é dividido em 3 tratados: *On the solution of quadratic equations* (Sobre a solução de equações quadráticas), *On applications of algebra to the regular pentagon and decagon* (Sobre aplicações da álgebra ao pentágono regular e decágono) e *On diophantine equations and problems of recreations mathematics* (Sobre equações diofantinas e problemas de matemática recreativa). A parte que expusemos acima encontra-se em *Sobre aplicações da álgebra ao pentágono regular e decágono*, onde Abu Kamil deixa de lado as construções das figuras e se concentra nos cálculos de perímetros, áreas e diagonais dessas figuras. Nesse teor, há a utilização da DMER de forma direta e indireta em alguns dos problemas colocados.

Ainda em *Book of algebra*, Abu Kamil retoma a discussão envolvendo a divisão de 10 em duas partes, seguindo critérios específicos, problema esse proposto anteriormente por al-Khwarizmi. A apresentação de diferentes princípios para essa divisão resulta em resoluções distintas para cada problema, tornando-se uma característica marcante não apenas da obra em si, mas também do próprio Abu Kamil. De fato, em *Sobre equações diofantinas e problemas de matemática recreativa* ele "chega a descrever um problema para o qual encontrou 2.678 soluções" (LIVIO, 2006).

Retornando ao tema, alguns problemas da divisão do 10 em duas partes apresentaram a razão extrema e média como consequência dos critérios adotados, fato que parece ter sido proposital, como o próprio Fibonacci aborda posteriormente (HERZ-FISCHLER, 1987).

A presença de referências às obras de Abu Kamil por Fibonacci não apenas direcionou sua forma de fazer matemática, mas também valorizou ainda mais a matemática árabe. Isso manteve viva a discussão da DMER em construções geométricas e nas equações quadráticas, perpetuando Abu Kamil no sumário da história da razão áurea.

3.3 **O Renascimento**

3.3.1 Leonardo Pisanus - A Sequência de Fibonacci

Fibonacci certamente está no topo dos matemáticos mais famosos de todos os tempos. Seu nome é atrelado a tantas áreas de pesquisa, que muitas vezes acaba passando despercebido entre aqueles que o citam, numa espécie de substantivo comum. Por exemplo, analistas em investimentos aplicam "fibonacci" para identificar uma projeção ou retração de um ativo financeiro.

Sua importância na história da razão áurea é quase tão vital quanto a de Euclides. Ambos desempenharam papel primordial na compreensão e divulgação da razão áurea, mesmo que em momentos totalmente diferentes da história. O famoso "problema dos coelhos" assinalado em sua obra mais famosa, o *Liber Abaci* (1202), desencadeou um efeito cascata de propriedades algébricas envolvendo *phi* (Φ), muitas delas transcendendo o âmbito matemático.

> O papel de Fibonacci na história da Razão Áurea é realmente fascinante. Por um lado, nos problemas em que usava conscientemente a Razão Áurea, foi responsável por um progresso significativo mas não espetacular. Por outro, simplesmente formulando um problema que, em princípio, nada tinha a ver com a Razão Áurea, ele expandiu drasticamente o escopo da Razão Áurea e de suas aplicações. (Livio, Mario. Razão áurea (Portuguese Edition) (p. 109). Editora Record. Edição do Kindle.)

No âmbito pessoal, não é difícil encontrar uma literatura que revele que o nome Fibonacci é, na verdade, uma alcunha. A pessoa por trás da lenda Fibonacci é Leonardo Bigollo, também conhecido como Leonardo Pisanus ou Leonardo de Pisa. Ele era filho de um comerciante que, em decorrência da sua atividade profissional, acabou influenciando a história da matemática, sem qualquer percepção de tal impacto, como exposto a seguir.

O final do século XII ainda ruminava a restrição científica imposta pela Igreja Católica em muitas regiões da Europa. A transição para um paradigma que transcendesse os limites teológicos estava apenas começando a tomar forma. Em paralelo, algumas regiões específicas, especialmente as que tinham acesso ao mar Mediterrâneo, o padrão de vida árabe exercia sua influência. Do ponto de vista de matemático, gerava um ambiente mais aberto a novos estudos, em virtude da política de valorização da ciência iniciada no Califado.

O Renascimento batia à porta, entretanto, a matemática ocidental ainda estava muito atrelada às atividades comerciais. Nesse contexto, os algarismos romanos eram amplamente empregados como sistema numérico predominante, tornando qualquer operação aritmética extremamente complicada, inclusive as comerciais. Essa realidade contrastava consideravelmente com as práticas comerciais observadas do lado africano do Mediterrâneo e do Oriente, onde o sistema com algarismos indo-arábicos já estava firmemente estabelecido.

Informações concretas sobre a infância e juventude de Leonardo Fibonacci são divergentes em alguns tópicos, como o ano de seu nascimento, variando entre 1165 e 1170. Contudo, é conhecimento comum que seu local de nascimento foi a região de Pisa, Itália. Embora atualmente seja uma cidade italiana, à época de Fibonacci era um Estado independente, a República de Pisa. Sua localização próxima ao Mar Mediterrâneo lhe conferia um porto de importância significativa, tornando-a um centro econômico na região.

> A Pisa do século XII era um porto movimentado através do qual passavam mercadorias que vinham do interior e do ultramar. Especiarias do Extremo Oriente circulavam por Pisa a caminho da Europa setentrional, cruzando no porto com as rotas do vinho, do óleo e do sal que eram transportados entre diferentes partes da Itália, Sicília e Sardenha. A grande indústria de couro de Pisa importava peles de cabras do norte da África, e curtidores podiam ser vistos preparando as peles nas margens do rio de Pisa. A cidade, no rio Arno, também se orgulhava de seus excelentes trabalhos de ferragem e dos estaleiros. Pisa é mais conhecida hoje por sua famosa torre inclinada, e a construção dessa torre de sino começou durante a juventude de Fibonacci. É claro que toda essa agitação comercial exigia muitos registros de estoques e preços. Leonardo seguramente teve oportunidade de observar vários escribas enquanto listavam preços em numerais romanos e os somavam usando um ábaco. (Livio, Mario. Razão áurea (p. 107). Editora Record. Edição do Kindle.)

Guglielmo dei Bonacci, seu pai, era notório mercador pisano e que atuou como uma espécie de representante alfandegário em Bugia, Argélia. Acima citamos seu eventual envolvimento na história da matemática, fato intrisicamente ligado à sua posição na Argélia. Fibonacci possivelmente não teria contato com a matemática árabe e, consequentemente, com os algarismos hindus, se não fosse a posição profissional de seu pai, já que o acompanhou em sua estada em Bugia.

Aliás, como é amplamente divulgado, o nome “Fibonacci” é derivado da filiação, “filho de (família) Bonacci”. É apresentado pelas literaturas que o termo fora inicialmente utilizado pelo matemático e controverso bibliotecário ítalo-francês Guillaume Libri, em 1838. Leonardo provavelmente nunca tenha sido chamado por este nome em vida.

> O apelido Fibonacci (do latim filius Bonacci, filho da família Bonacci, ou "filho da boa natureza") foi provavelmente introduzido pelo historiador de matemática Guillaume Libri numa nota de rodapé em seu livro Histoire des Sciences Mathematique en Italie (História das ciências matemáticas na Itália), de 1838, embora alguns pesquisadores atribuam o primeiro uso do nome Fibonacci a matemáticos italianos do fim do século XVIII. Em alguns manuscritos e documentos, Leonardo se refere a si mesmo e é citado por outros como Leonardo Bigollo (ou Leonardi Bigolli Pisani), em que "Bigollo" significa algo como "viajante" ou "homem sem importância" nos dialetos toscano e veneziano, respectivamente. (Livio, Mario. Razão áurea (Portuguese Edition) (pp. 106-107). Editora Record. Edição do Kindle.)

Conforme destacado por Livio (2006), o acompanhamento Bigollo pode ter origem em duas traduções distintas; porém, Leonardo foi, de fato, um viajante, uma das interpretações tradutivas. Após sua partida de Bugia, peregrina pela costa mediterrânea, efetuando relações mercantis e se aprimorando como matemático, obtendo contato com pares em regiões como Egito, Grécia, Síria e Sicília, como o próprio Leonardo cita no prólogo da segunda edição de *Liber Abaci*. Ao longo dessa jornada, aprende e domina o sistema numérico arábico, obtém acesso às obras de al-Khwarizmi e Abu Kamil, entre outros mestres não ocidentais, e se familiariza com *Os Elementos* de Euclides, além da antiga matemática grega. Com essa riqueza de conhecimento acumulado, decide voltar a Pisa, em 1200, a fim de registrá-lo e disseminá-lo pelo território italiano.

Parece que os primeiros anos após o retorno à sua terra natal foram realmente dedicados à produção literária, uma vez que a primeira edição de *Liber Abaci* é publicada em 1202. Há um hiato temporal de 18 anos quando consideramos a publicação de sua próxima obra conhecida, o *Practica Geometriae*. Sobre este período, não há qualquer detalhe ou mesmo relato biográfico consistente. É plausível que Leonardo tenha deixado Pisa novamente em busca de aprimorar ainda mais seus conhecimentos matemáticos, para, assim, embasar suas futuras composições literárias.

A década que se inicia em 1220 revela-se muito produtiva para Fibonacci. Logo no início, dá forma ao *Practica Geometriae*, obra que apresenta um detalhado estudo geométrico e trigonométrico e que abrange a DMER; em 1225, escreve o *Liber quadratorum*, que, segundo Eves (2011), é "um trabalho brilhante e original sobre análise indeterminada, que o guindou à posição de matemático mais importante desse campo entre Diofanto e Fermat."

Uma figura muito significativa na vida de Leonardo, principalmente nesta primeira metade de década, foi o Imperador Sacro-Romano e Rei da Sicília, Frederico II (1194 - 1250). A fim de ilustrar a magnitude da posição de Frederico II, seu império se estendia pelas regiões demarcadas no mapa a seguir:

Figura 50 - Mapa do reino de Frederico II

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Mitteleuropa_zur_Zeit_der_Staufer.svg

De fato, no mundo ocidental, Frederico II partilhava a posição de homem mais importante com a figura papal, à época, Gregório IX (1145 - 1241). Inclusive, estes mantiveram contrapontos políticos bem marcantes, que resultaram na excomunhão de Frederico II por parte de Gregório IX, em 1227. Todavia, essa excomunhão não o impediu de se envolver nas famosas Cruzadas[11] de 1228 (Sexta Cruzada), na qual Frederico utiliza de sua sagacidade e retórica diplomática para negociar acordos com os sultões de Damasco e Egito e, desta forma, conquistar Jerusalém por meio de uma abordagem não militar. Em troca, ofereceu proteção aos respectivos reinos e liberdade de culto islâmico em seus domínios. Como consequência desses acordos, uma segunda excomunhão foi dada, pelo sucessor de Gregório, Papa Honório III, em 1239. A relação próxima de Frederico com o Islã foi decisivo para revitalização do pensamento científico na Europa.

[11] As cruzadas foram expedições militares arquitetadas pela Igreja Católica para dominar terras consideradas sagradas para a religião, e que se encontravam sob domínio dos muçulmanos. Ocorreram principalmente entre séculos XI e XIII.

Assim sendo, ingressar na corte de Frederico II representava alcançar o mais alto patamar de prestígio social e científico e, consequentemente, ter acesso a mais títulos restritos e controlados pela Igreja no Ocidente. Leonardo teve a oportunidade de desfrutar desse privilégio, muito em virtude da notoriedade adquirida através de seu *Liber Abaci*. Graças à indicação de outras figuras proeminentes da corte de Frederico II e que obtiveram acesso ao seu livro, Leonardo se apresenta como um matemático hábil, capaz de resolver desafios impostos por outros matemáticos da corte, entre eles Michael Scotus (c. 1175 - c. 1232) e Johannes de Palermo (séc. XIII). Os problemas propostos principalmente por Palermo acabaram sendo incorporados em obras literárias desenvolvidas posteriormente por Leonardo.

A recomendação de Michael Scotus é reconhecida no segundo volume de *Liber Abaci*, escrito em 1228, onde Leonardo assenta que a revisão era a ele dedicada. Essa dedicatória pode ter ido além da indicação à corte; Scotus possivelmente desempenhou um papel nas revisões realizadas em relação ao primeiro volume. Isso se justificaria pelo fato de que ele detinha domínio do idioma árabe, inclusive com importantes traduções inéditas de obras árabes para o latim, o que pode ter gerado observações no novo volume.

> Você, meu Mestre Michael Scott, grande filósofo, escreveu ao meu Senhor (Frederico II) sobre o livro dos números que há algum tempo compus e transcrevi para você; por isso, atendendo às suas críticas, à sua circunspecção examinadora mais sutil, para honra sua e de muitos outros, corrigi com vantagem este trabalho. (Liber Abaci, tradução própria

Um dos problemas solucionados por Fibonacci no desafio proposto por Palermo resultou na criação de outro manuscrito, o *Flos*.

> No segundo problema, pedia-se que se achasse uma solução da equação cúbica $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Fibonacci tentou provar que nenhuma raiz da equação pode ser expressa irracionalmente na forma $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ ou, em outras palavras, que nenhum a raiz pode ser construída com régua e compasso. Obteve então uma resposta aproximada que, expressa em notação decimal, é 1,3688081075 e que é correta até a nona casa. A resposta aparece, sem nenhuma discussão anexa, num trabalho de Fibonacci intitulado Flos ("floração" ou "flor") e tem provocado alguma perplexidade. (Eves, H. Introdução à História da Matemática. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. p. 294)

Sobre este período e obras, Lívio (2006) salienta outro dos problemas resolvidos por Leonardo:

> O Liber abaci deu a Fibonacci um reconhecimento considerável, e sua fama chegou até os ouvidos do imperador romano Frederico II, conhecido como "Stupor Mundi" ("Maravilha do Mundo") por patrocinar a matemática e as ciências. Fibonacci foi convidado a comparecer diante do imperador em Pisa no início dos anos 1220, e foi apresentado a uma série de problemas que eram considerados muito difíceis pelo mestre Johannes de Palermo, um dos matemáticos da corte. Um dos problemas pode ser descrito da seguinte forma: "Encontre um número racional (um número inteiro ou fração) tal que quando 5 é somado ou subtraído do seu quadrado, o resultado [em

> cada caso] também seja igual ao quadrado de um número racional." Fibonacci resolveu todos os problemas usando métodos engenhosos. Mais tarde ele descreveu dois deles em um livro curto chamado Flos (Flor) e usou o problema acima no prólogo de um livro que ele dedicou ao imperador: Liber quadratorum (Livrodos quadrados). Hoje temos de ficar impressionados com o fato de que, sem a ajuda de computadores ou calculadoras de qualquer tipo, simplesmente através de sua manipulação virtuosa da Teoria dos Números, Fibonacci tenha sido capaz de ver que a solução para o problema acima era 41/12. De fato, $(41/12)^2 + 5 = (49/12)^2$ e $(41/12)^2 - 5 = (31/12)^2$. (Livio, Mario. Razão áurea (Portuguese Edition) (pp. 108-109). Editora Record. Edição do Kindle.)

Fibonacci ainda possui outras obras que não chegaram até o presente, como os *Comentários ao Livro X de Euclides* e *Di Minor Guisa*, uma espécie de manual aritmético para o universo mercantil.

Após este período de produção literária, a biografia de Fibinacci entra mais uma vez em um período obscuro. A citação da concessão de uma remuneração paga por Pisa em virtude de contribuições contábeis, em 1240, é praticamente a única referência à pessoa Leonardo após o segundo volume de *Liber Abaci*, e não se sabe ao certo o local e ano de sua morte, muito menos a causa.

3.3.1.1. *Liber Abaci*

Amplamente reconhecido como um marco de extrema importância na história da matemática medieval, uma vez que introduziu de forma didática os algarismos indo-arábicos no contexto europeu. A revolução desencadeada a partir deste manuscrito redefiniu a abordagem para resoluções de problemas matemáticos que envolvessem operações aritméticas básicas, devido à eficiência desses algarismos em comparação aos romanos, os mais utilizados até então.

Publicado em 1202, a primeira edição deste livro não chega a ser conhecida na modernidade. Leonardo publica uma segunda edição em 1228, esta sim estudada até hoje, onde cita um aperfeiçoamento do estudo em relação à primeira:

> Nesta retificação acrescentei certas necessidades e eliminei certas supérfluas. Nele apresentei uma instrução completa sobre números próxima ao método indiano[3], cujo excelente método escolhi para esta ciência. (Pisano's. L. Liber Abaci, Book of Calculation. Versão: Sigler, L. E. A Translation Into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation. Prólogo (Tradução Própria) Ed. Springer. Nova Iorque. 2003)

É importante enfatizar que os algarismos indo-arábicos já eram conhecidos e utilizados na Europa, mas sua adoção era bem restrita, desconhecida entre a população em geral. Conforme já mencionado, as regiões com acesso ao Mediterrâneo mantinham um contato mais próximo com o mercantilismo árabe e cultura muçulmana em comparação a outras regiões mais ao norte do continente europeu. Consequentemente, a teoria numérica herdada de al-Khwarizmi, e já difundida no Império Islâmico, também encontrava eco, mesmo limitado, nestes territórios.

Por exemplo, numa destas regiões se destaca como matemático, além de filósofo e astrônomo, Abraham bar Hiyya (c.1070 - c.1136). Embora não se tenha certeza sobre seu local de nascimento, sua atuação na Espanha, particularmente em Barcelona, é bem documentada, exatamente uma dessas regiões de marcante influência muçulmana. Desempenhou um papel fundamental ao traduzir inúmeros livros para o latim e o hebraico, esta última devido à sua identidade judaica, além de também ser um autor reconhecido. Entre suas publicações, está *Hibbur ha-Meshihah ve-ha-Tishboret* (Tratado sobre medições e cálculo), onde apresentou soluções para equações quadráticas do tipo $ax^2 + bx + c = 0$. As soluções utilizaram algarismos indo-arábicos, servindo como ponte entre o conhecimento árabe e europeu cristão.

Portanto, é possível que tanto o estudo das soluções quadráticas, que também estão presentes no *Liber Abaci* de Leonardo, quanto a utilização do sistema hindu de números (de maneira mais simples do que a apresentada em *Liber Abaci*), tenham sofrido influência dos estudos de Abraham bar Hiyya.

Já o ineditismo de uma metodologia didática para a transformação detalhada dos algarismos romanos em hindus foi realizada através do *Liber Abaci;* esta sim é uma afirmação sólida.

O livro é composto de 15 capítulos onde, além da apresentação dos denominados algarismos hindus, há inclusão do zero como algarismo, configurando o sistema numérico decimal que é o utilizado atualmente. O próprio Leonardo inicia o primeiro capítulo do livro com a apresentação:

> As nove figuras indianas são:
>
> 9 8 7 6 5 4 3 2 1
>
> Com esses nove algarismos, e com o sinal 0 que os árabes chamam de zephir [1] escreve-se qualquer número, conforme demonstrado abaixo. Um número é uma soma de unidades, ou uma coleção de unidades, e através da adição delas os números aumentam em etapas sem fim... (Pisano's. L. Liber Abaci, Book of Calculation. Versão: Sigler, L. E. A Translation Into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation. p. 17 (Tradução Própria) Ed. Springer. Nova Iorque. 2003)

A partir desta apresentação, a obra segue com uma exposição de diversas questões matemáticas, sempre utilizando os dez algarismos.

Dos capítulos da obra, o 12° é o que nos traz até aqui. Sendo um dos mais longos capítulos da obra, é dividido em 9 partes pelo próprio Leonardo:

> Portanto, dividimos o capítulo doze sobre problemas de ábaco em nova partes.
> Dos quais a primeira é sobre a soma de séries de números e alguns outros problemas semelhantes.
> A segunda é sobre proporções numéricas pela regra das quatro proporções.
> A terceira é sobre problemas de árvores, e outros problemas semelhantes que têm solução.
> A quarta é sobre a descoberta de bolsas.
> A quinta é sobre a compra de cavalos entre membros de uma companhia, de acordo com determinadas proporções .
> A sexta é sobre os viajantes e os problemas que se assemelham aos problemas de viajantes.
> A sétima é sobre falsa posição e regras de variação.
> A oitava é sobre certos problemas de adivinhação.
> A nona é sobre a duplicação de quadrados e alguns outros problemas.
> (Pisano's. L. Liber Abaci, Book of Calculation. Versão: Sigler, L. E. A Translation Into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation. p. 259 (Tradução Própria) Ed. Springer. Nova Iorque. 2003)

O famoso problema dos coelhos se encontra na sétima parte, uma parte repleta de questões que envolvem câmbio e divisão de valores de acordo com a respectiva apresentação nos enunciados. É impressionante como um trecho tão curto, dentro de uma obra extensa e, mais ainda, em meio a problemas tão diversos, mudou a história da matemática. Um olhar menos atento à leitura deixaria passar despercebido o problema em questão. Leonardo o apresenta desta forma:

> Um certo homem tinha um par de coelhos juntos em um certo local fechado, e deseja-se saber quantos são criados a partir do par em um ano, quando é da natureza deles em um único mês gerar outro par e no segundo mês aqueles nascidos para gerar também. Porque o par acima escrito no primeiro mês gerou, você o dobrará; haverá dois pares em um mês. Um destes, a saber, o primeiro, dá à luz no segundo mês, e assim há no segundo mês 3 pares; destas em um mês duas ficam grávidas, e no terceiro mês nascem 2 casais de coelhos, e assim ficam 5 casais no mês; neste mês, 3 pares estão grávidas, e no quarto mês, 8 pares, dos quais 5 pares geram outros 5 pares; estes são adicionados aos 8 pares formando 13 pares no quinto mês; estes 5 pares que nascem neste mês não acasalam neste mês, mas outros 8 pares estão grávidas, e assim há no sexto mês 21 dores; a estes são adicionados os 13 pares que nascem no sétimo mês; serão 34 pares neste mês: a isso se somam os 21 pares que nascem no oitavo mês; haverá 55 pares neste mês: a estes se somam os 34 pares que nascem no nono mês; serão 80 pares neste mês; a estes são adicionados novamente os 55 pares que nascem no décimo mês; haverá 144 pares neste mês; a estes são adicionados novamente os 89 pares que nascem no décimo primeiro mês; serão 233 pares neste mês. Você pode realmente ver na margem como operamos, ou seja, que adicionamos o primeiro número ao segundo, ou seja, o 1 ao 2, e o segundo ao terceiro, e o terceiro ao quarto, e o quarto ao quinto, e assim, um após o outro, até que adicionamos o décimo ao décimo primeiro, ou seja, 144 a 233, e tivemos a soma acima escrita de coelhos, ou seja, 377, e assim você pode encontrá-la por um número interminável de meses. (Pisano's. L. Liber Abaci, Book of Calculation. Versão: Sigler, L. E. A Translation Into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation. p. 404 (Tradução Própria) Ed. Springer. Nova Iorque. 2003)

Inicialmente, o foco da discussão está na existência do conhecimento de Fibonacci em relação à sequência numérica e suas inúmeras relações com a razão áurea. Optamos por expor integralmente o problema com o propósito de estimular essa discussão, considerando a extensão do manuscrito e o curto trecho que é utilizado para a apresentação do problema.

Herz-Fischler (1987) menciona em duas ocasiões de *A Mathematical History of the Golden Number* que não há uma indicação de que Fibonacci tivesse noção da conexão entre sua sequência e a Meia e Extrema Razão. Entretanto, Fibonacci detinha domínio da obra euclidina, além da própria DMER. Como veremos a seguir, em *Practice Geometriae* ele a utilizou para encontrar as áreas do pentágono e decágono, entre outras demonstrações, além de uma possível referência no próprio *Liber Abaci*.

No capítulo XV, intitulado *De regulis proportionibus geometrie pertinentibus: de questionibus aliebre et amulchabale* (A regra da proporção geométrica e questões de álgebra e almucabala), há um verdadeiro aprofundamento dos estudos de Abu Kamil, principalmente em relação a proporções.

Os problemas dispostos nesse capítulo abordam a questão da divisão de um número em partes proporcionais, conforme a indicação enunciada. Entre esses desafios, destaca-se o problema da divisão de 10 em meia e extrema razão, problema esse formulado por Abu Kamil e já explorado na seção anterior.

> "Ten is to be divided into two parts and the greater is divided by the smaller and the smaller by the larger and I put together those things which come out of the division and they were the root of 5 'denarii'." (Pisano's. L. Liber Abaci, Book of Calculation. Versão: Sigler, L. E. A Translation Into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation. p. 587. Ed. Springer. Nova Iorque. 2003)

A tradução literal deste trecho é um pouco confusa devido aos termos *greater*, *smaller* e *larger* estarem dispostos em uma posição conflitante, mas durante o discorrer de Leonardo, fica evidente a associação a Abu Kamil e, neste caso, à Meia e Extrema Razão.

Além da resolução apresentada por Abu Kamil, Leonardo apresenta alternativas para o mesmo problema, como destaca Herz-Fischler (1987):

> Encontramos Fibonacci adotando as soluções de Abu Kamil, mas com detalhes adicionais (...) Fibonacci está dizendo que ele nos mostrou três maneiras de resolver o problema dado, mas que ele reconhece que os números têm a ver com EMR (...) (Herz-Fischler, R. A Mathematical History of Golden Number (Tradução Própria). p.143. Dover Publications, INC. New York, 1987)

A observação intrigante reside na disparidade de tratamento dado a este problema (da divisão de 10 em partes proporcionais à razão extrema e média) e o problema dos coelhos. A impressão gerada é que Fibonacci realmente não tinha o menor conhecimento da conexão entre a sequência obtida pelo nascimento dos coelhos e a razão áurea, mesmo ciente da existência da proporção.

3.3.1.2 *Practica Geometriae*

Publicado em 1223, o *Practica Geometriae* é uma obra original de Fibonacci composta de um número mais curto de páginas comparada com o padrão da época. Dividida em 7 capítulos, um deles é inteiramente dedicado à razão áurea, aplicada em diversas figuras geométricas ao longo do capítulo e também do manuscrito. Eves (2011) define o *Practica geometriae* de Fibonacci como "uma alentada coleção de material sobre geometria e trigonometria, numa abordagem hábil, feita com rigor euclidiano e alguma originalidade".

O domínio de Leonardo sobre a proporção áurea fica claramente evidente nessa publicação, através de cálculos e construções nas quais não apenas aprimora a proposição euclidiana, mas também demonstram uma perfeita proficiência na geometria árabe que a utiliza.

Por exemplo, numa subseção do capítulo 3 intitulada "*On the Dimensions of Planar Figures Having More than Four Sides*" (Sobre as Dimensões de Figuras Planas com mais de quatro lados), Fibonacci apresenta um método para cálculo da área de um pentágono regular utilizando a técnica da divisão da figura em triângulos retângulos (artifício muito utilizado por Abraham bar Hiyya) e que necessita do domínio da divisão em meia e extrema razão para concluí-lo. Volta a fazer uso de Abu Kamil, tanto para cálculos de áreas do pentágono como para outras aplicações da DMER em figuras de duas e três dimensões.

> Em Prática de Geometria, Fibonacci tomou a maioria dos problemas de Sobre o Pentágono e Decágono de Abu Kamil, referindo-se a eles como "certas sutilezas geométricas". Observe que isso coloca esses problemas bidimensionais após o tratamento de Fibonacci dos problemas tridimensionais de seu Capítulo 6. Embora muito do material de Abu Kamil seja mais ou menos retomado como está, também encontramos Fibonacci apresentando outras abordagens. Em particular, veremos que ele às vezes aplica diretamente resultados envolvendo DEMR em problemas onde Abu Kamil não o fez. (Herz-Fischler, R. A Mathematical History of the Golden Number (Tradução Própria). p.141. Dover Publications, INC. New York, 1987)

Fibonacci ainda, nesta mesma parte, utiliza da técnica de Ptolomeu para calcular as medidas das diagonais de um pentágono regular a partir de seu lado, método que também contém a utilização da DMER em sua composição. (HERZ-FISCHLER, 1987)

No sexto capítulo, Leonardo introduz uma sofisticado método que utiliza diretamente a Razão Áurea em procedimentos relacionados ao dodecaedro e ao icosaedro. De fato, ele apresenta dois problemas envolvendo cálculos de volumes: do dodecadro inscrito em um esfera, e do icosaedro também inscrito em uma esfera. O refinamento mencionado anteriormente se manifesta pela apresentação autêntica de segmentos divididos em meia e extrema razão. Ele explana a utilização da técnica euclidiana, enriquecida com referências da matemática árabe.

Fica assentado, desta forma, que Fibonacci detinha profundo conhecimento da DMER, oriundo de *Elementos*, do *Almageu* de Ptolomeu e dos estudos relacionados à matemática não ocidental.

3.3.1.3 A Sequência de Fibonacci e suas conexões com a DMER

Conforme observamos mais acima, a sequência recursiva 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... foi concebida a partir da solução do problema dos coelhos, onde cada novo termo é obtido pela soma dos dois anteriores. A maneira mais clara de ilustrar a conexão com a DMER é ao examinar a razão obtida entre dois termos sucessivos, o maior pelo menor. Quanto maiores numericamente os termos dispostos em razão, mais casas decimais batem com o valor numérico de Φ. Lembrando que Φ equivale a 1,61803398... .

$$\frac{1}{1} = 1$$
$$\frac{2}{1} = 2$$
$$\frac{3}{2} = 1{,}5$$
$$\frac{5}{3} = 1{,}666\ldots$$
$$\frac{8}{5} = 1{,}6$$
$$\frac{13}{8} = 1{,}625$$
$$\frac{21}{13} = 1{,}61538461\ldots$$
$$\frac{34}{21} = 1{,}61904761\ldots$$
$$\frac{55}{34} = 1{,}61764705\ldots$$
$$\frac{89}{55} = 1{,}61818181..$$

Se pegarmos, por exemplo, o 30° e 31° termos da sequência, 832.040 e 1.346.269, repectivamente, e calcularmos a razão entre eles, obtemos 1,6180398875..., ou seja, com as dez primeiras casas decimais idênticas a *phi* (Φ), acarretando numa margem de erro beirando o desconsiderável.

Este, porém, é só o começo de uma série de elos entre os fibonaccis, números que fazem parte da sequência, e a DMER.

A sequência de Fibonacci foi a primeira sequência recursiva elaborada na Europa. De acordo com Lucas (1987), a notação matemática que utilizaremos na definição 4.1. foi elaborada por Albert Girard (1595 - 1632).

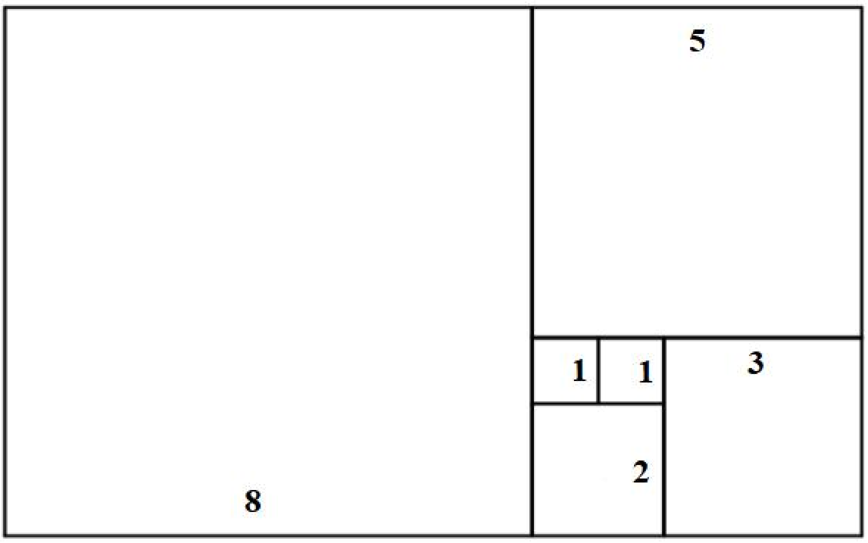
Já a terminologia "sequência de Fibonacci" passou por diferentes denominações anteriormente. François Édouard Anatole Lucas (1842-1891), matemático francês de destaque no século XIX, dá forma ao termo em *Recherche sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise* (Pesquisa sobre Diversas Obras de Leonardo de Pisa), publicação de 1877. Ao examinar o texto percebe-se que a sequência era conhecida como "série de Lamé", uma possível homenagem a Gabriel Lamé (1795 - 1870), outro matemático francês com contribuições substanciais e que havia estabelecido uma relação entre o Algoritmo de Euclides e a sequência de Fibonacci.

> La série dite de Lamé, mais considérée pour la première foi por Léonard de Pise, ainsi que nous venons de la dire, est une série (...) (A chamada série de Lamé, mas considerada pela primeira vez por Leonardo de Pisa, como acabamos de dizer, é uma série recorrente (...) (Lucas, Recherche sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise, p. 9)

Lucas viria a identificar a sequência como "série de Fibonacci" mais adiante, numa nota de rodapé localizada na página 11 do livro analisado anteriormente: "Daus ce cas, on a, pour la série de FIBONACCI" (*Neste caso, temos, para a série de FIBONACCI*).

Uma abordagem convencional para compreender geometricamente a sequência de Fibonacci está diretamente associada à DMER. Inicia-se com um retângulo cujas dimensões correspondem a dois fibonaccis consecutivos. O lado maior desse retângulo é, então, dividido em duas partes, uma das quais de mesmo comprimento que o lado menor. Consequentemente, a figura fica desmembrada em um quadrado (com lados iguais ao menor dos fibonaccis utilizados) e em outro retângulo, que também tem dimensões equivalentes a fibonaccis sucessivos. Ao replicar esse mesmo processo ininterruptamente, cria-se uma figura congruente a um retângulo áureo, cuja espiral logarítmica já fora apresentada. Explica-se, nesse caso, a nomenclatura "Espiral de Fibonacci".

Figura 51 - Retângulo dividido segundo a sequência de Fibonacci



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Retomando o contexto algébrico, a notação de um termo da sequência de Fibonacci mais utilizada é F_n, onde n é a posição do termo no desenvolver da sequência. Portanto, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 5$, e assim, sucessivamente.

E denominamos como "Sequência de Fibonacci" a sequência definida por $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, com $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e n > 2 e $n \in$ IN.

3.3.1.4 Principais proposições que associam F_n e Φ

Proposição 1: Consideremos uma sequência (r_k), n ≥ 2, onde r_k são os elementos obtidos pela razão entre dois fibonaccis, F_{k+1} e F_k, respectivamente. Logo,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{F_{k+1}}{F_k} = \Phi$$

Demonstração: De acordo com o enunciado da proposição:

$$r_k = \frac{F_{k+1}}{F_k} = \frac{F_k + F_{k-1}}{F_k} = 1 + \frac{F_{k-1}}{F_k}$$

Como

$$\lim_{k\to\infty} r_k = \lim_{k\to\infty} r_{k-1} = x$$

Então

$$\lim_{k\to\infty} \frac{F_{k-1}}{F_k} = \frac{1}{x}$$

Segue, então, que

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Equação que já vimos que possui raiz positiva igual a Φ.

A proposição acima foi demonstrada por Robert Simpson, em 1753 (LUCAS, 1877).

Proposição 2 (conhecida como “Teorema de Binet”): Jacques Philippe Marie Binet (1786 - 1856) foi mais um matemático a se debruçar na associação entre a sequência de Fibonacci e a DMER. Muito conhecido pelos estudos das matrizes, Binet recebeu o nome da fórmula não-recursiva utilizada para encontrar um fibonacci de uma *n*-ésima posição.

A proposição, também conhecida como Teorema de Binet, recorre à razão áurea como parte integrante de uma equação; na verdade, utiliza as raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$.

A proposição define que para todo $n \geq 1$, tem-se que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}.[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$$

onde, (F_n) é a sequência de Fibonacci.

Demonstração: Adotaremos como instrumento de demonstração a indução matemática:

. Caso Base: n = 1.

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}.[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1] = \frac{1}{\sqrt{5}}.[\frac{1+\sqrt{5}\ -1+\sqrt{5}}{2}] = \frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{2\sqrt{5}}{2} = 1$$

Como $F_1 = 1$, o caso base está verificado.

. Hipótese de Indução: Se

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}.[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$$

então

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}.[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]$$

Utilizando a recorrência $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, temos:

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}.[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n] + \frac{1}{\sqrt{5}}.[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}.[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n] + \frac{1}{\sqrt{5}}.[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n.(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{-1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n.(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{-1}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}.[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n] + \frac{1}{\sqrt{5}}.[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n.(\frac{2}{1+\sqrt{5}})^1 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n.(\frac{2}{1-\sqrt{5}})^1]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}.[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n] + \frac{1}{\sqrt{5}}.[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n.(\frac{\sqrt{5}-1}{2}) - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n.(\frac{-\sqrt{5}-1}{2})]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}.[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n](1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}) - \frac{1}{\sqrt{5}}.[(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n].(1-\frac{\sqrt{5}+1}{2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}.[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n](\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + \frac{1}{\sqrt{5}}.[(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n].(\frac{1-\sqrt{5}}{2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}.[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]$$

Validando, assim, a hipótese de indução.

É justo o registro de alguns autores que esta fórmula já era conhecida anteriormente, especificamente por Abraham de Moivre (1667 - 1754), famoso pelas leis que relacionam potências complexas e trigonometria. De qualquer forma, a importância do teorema para o trabalho reside justamente na relação entre a DMER e a sequência de Fibonacci.

Proposição 3: Para qualquer $n \geq 2$ $(n \in IN)$, tem-se que: $\Phi^n = F_{n-1} + F_n.\Phi$, em que (F_n) é a sequência de Fibonacci.

Demonstração: Utilizaremos, mais uma vez, a indução matemática.

. Caso Base: n = 2

$$\Phi^2 = F_{2-1} + F_2.\Phi$$
$$\Phi^2 = 1 + 1.\Phi$$
$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

Equação que, de fato, tem como raiz Φ. Caso Base Verificado.

. Hipótese de Indução: Se $\Phi^n = F_{n-1} + F_n.\Phi$, $n \geq 2$ (n ∈ IN), então $\Phi^{n+1} = F_n + F_{n+1}.\Phi$

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n.\Phi = (F_{n-1} + F_n.\Phi).\Phi = F_{n-1}.\Phi + F_n.\Phi^2$$

Analisando o número Φ^2:

$$\Phi^2 = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{2+1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$= 1 + \Phi$$

Substituindo, desta forma, a análise encontrada:

$$\Phi^{n+1} = F_{n-1}.\Phi + F_n.(1+\Phi)$$
$$\Phi^{n+1} = F_{n-1}.\Phi + F_n.\Phi + F_n$$
$$\Phi^{n+1} = (F_{n-1}. + F_n).\Phi + F_n$$
$$\Phi^{n+1} = F_{n+1}.\Phi + F_n$$

Desta forma, verificada-se a hipótese de indução.

Também poderíamos verificar a identidade acima através da recorrência. Partindo da propriedade já demonstrada de que $\Phi^2 = 1 + \Phi$, temos:

$$\Phi^2 = 1 + 1.\Phi = 1 + \Phi$$

$$\Phi^3 = \Phi^2.\Phi = (1+\Phi).\Phi = \Phi + \Phi^2 = \Phi + 1 + \Phi = 1 + 2\Phi$$
$$\Phi^4 = \Phi^2.\Phi^2 = (1+\Phi).(1+\Phi) = 1 + 2\Phi + \Phi^2 = 1 + 2\Phi + 1 + \Phi = 2 + 3\Phi$$
$$\Phi^5 = \Phi^3.\Phi^2 = (1+2\Phi).(1+\Phi) = 1 + 3\Phi + 2\Phi^2 = 1 + 3\Phi + 2 + 2\Phi = 3 + 5\Phi$$
$$\Phi^6 = \Phi^3.\Phi^3 = (1+2\Phi).(1+2\Phi) = 1 + 4\Phi + 4\Phi^2 = 1 + 4\Phi + 4 + 4\Phi = 5 + 8\Phi$$
$$\Phi^7 = \Phi^4.\Phi^3 = (2+3\Phi).(1+2\Phi) = 2 + 7\Phi + 6\Phi^2 = 2 + 7\Phi + 6 + 6\Phi = 8 + 13\Phi$$

Os coeficientes encontrados a cada nova potência Φ^n desenvolvida são fibonaccis, sendo o termo independente equivalente a F_n e o coeficiente que acompanha Φ igual F_{n-1}.

Proposição 4: (conhecida como "Identidade de Cassini"): Giovanni Domenico Cassini (1625 - 1712) foi um astrônomo respeitado do século XVII e contém, além das várias anotações conhecidas derivadas das observações astronômicas, contribuições significativas na matemática.

A proposição é assim enunciada: Para todo n > 1,

$$F_{n-1}.F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

Demonstração: Novamente utilizando a indução matemática:

. Caso Base: n = 2

$$F_1.F_3 - F_2^2 = (-1)^2$$
$$1.2 - 1^2 = (-1)^2$$
$$2 - 1 = 1$$

Caso Base é válido.

.Hipótese de indução: Se para todo n > 1 , $F_{n-1}.F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$, então $F_n.F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.

$$F_n.F_{n+2} - F_{n+1}^2 =$$
$$F_n.F_{n+2} - F_{n+1}.F_{n+1} =$$
$$F_n.F_{n+2} - F_{n+1}.(F_n + F_{n-1}) =$$
$$F_n.F_{n+2} - F_{n+1}.F_n - F_{n+1}.F_{n-1} =$$

$$F_n.F_{n+2} - F_{n+1}.F_n - F_{n+1}.F_{n-1} =$$
$$F_n.(F_{n+2} - F_{n+1}) - F_{n+1}.F_{n-1} =$$
$$F_n.F_n - F_{n+1}.F_{n-1} =$$
$$(-1).(F_n.F_n - F_{n+1}.F_{n-1}) =$$
$$(-1).(-1)^n =$$
$$(-1)^{n+1}$$

Ficando, desta forma, comprovada a hipótese de indução e, consequentemente, a identidade de Cassini.

3.3.1.5 *Fibonacci Quarterly*

A popularidade conquistada ao longo dos últimos séculos pela sequência de Fibonacci (e, consequentemente, da razão áurea) levou um grupo de professores da Universidade do Missouri, Estados Unidos, a fundar, em 1963, a *The Association Fibonacci*, com a incumbência de organizar um periódico trimestral chamado de *Fibonacci Quarterly.*

Figura 52 - Logomarca do periódico *The Fibonacci Association*

Fonte: https://www.mathstat.dal.ca/fibonacci/

Com o objetivo de avaliar, catalogar e publicar artigos dedicados aos mais variados estudos que examinam a teoria dos números de Fibonacci, o *Fibonacci Quarterly* vem sendo publicado trimestralmente desde sua primeira edição, também em 1963.

Revista de grande credibilidade na comunidade acadêmica matemática, os artigos submetidos passam por um rigor a fim de manter o indicativo de qualidade e reputação do periódico.

Na figura disposta acima, o símbolo do *The Fibonacci Association* é destacado por inúmeros pentagramas, que, como já vimos inúmeras vezes nesta dissertação, são diretamente associados à DMER.

Fica assentado que as edições ficam liberadas para acesso, com exceção das cinco últimas, exclusivas para assinaturas pagas do periódico. Desta forma, podemos notar a evolução contínua do tópico ao longo das últimas décadas, ao acessar o acervo. Ou seja, o legado de Fibonacci continua a despertar a curiosidade daqueles que são entusiastas de sua sequência.

3.3.2 A Proporção Divina: Luca Pacioli

O que torna algo ser tão impactante a ponto de ser classificado como divino? No ano de 1509 foi publicado o primeiro volume (de um total de três) de *De Divina Proportione* (Divina Proporção), escrito pelo matemático italiano Luca Pacioli (1447 - 1517), obra que voltou a aquecer o interesse pelo estudo da DMER após um longo período letárgico.

O Renascentismo florescia em toda a Europa, com a ciência e a arte voltando a fazer parte dos círculos abertos de discussões e estudos, depois de séculos quase restrita aos religiosos. Estudos simultâneos de matemática, filosofia, astronomia e teologia eram amplamente disseminadas em universidades e academias. Buscava-se harmonia e equilíbrio na arquitetura, esculturas e pinturas, e uso de proporções, inclusive a áurea, era uma das formas de expressar esta busca. Permanecia, todavia, uma forte e insistente influência da Igreja Católica, acabando por levar muitos cientistas a conciliar suas pesquisas com as crenças religiosas predominantemente cristãs.

Analisando brevemente a biografia de Pacioli, é de se destacar que foi ordenado frei franciscano em 1470, tornando sua mente terreno fértil para encontrar padrões naturais ligados a uma denominação sagrada. Ao intitular seu livro como *De Divina Proportione*, ou Divina Proporção, usou da sua fé cristã para criar uma verdadeira devoção às aplicabilidades da DMER. Livio (2006) destrincha os cinco motivos usados por Pacioli para atribuir a termologia divina à proporção, os quais estão registrados no primeiro volume da obra:

> 1. "Que ela é uma só e não mais." Pacioli compara o valor único da Razão Áurea com o fato de que a unidade "é o supremo epíteto do próprio Deus".
> 2. Encontra uma similaridade entre o fato de que a definição da Razão Áurea envolve exatamente três comprimentos (AC, CB e AB na Figura 24) e a existência da Santíssima Trindade, do Pai, do Filho e do Espírito Santo.

> 3. Para Pacioli, a impossibilidade da compreensão de Deus e o fato de a Razão Áurea ser um número irracional são equivalentes. Em suas próprias palavras: "Assim como Deus não pode ser definido adequadamente nem entendido por meio de palavras, nossa proporção também não pode ser designada por números inteligíveis nem pode ser expressa por uma quantidade racional, e sempre permanecerá oculta e secreta, e é chamada de irracional pelos matemáticos."
> 4. Pacioli compara a onipresença e a invariabilidade de Deus com a autossimilaridade associada à Razão Áurea — de que seu valor é sempre o mesmo e não depende do comprimento da linha sendo dividida ou do tamanho do pentágono no qual quocientes entre os comprimentos são calculados.
> 5. A quinta razão revela uma visão ainda mais platônica da existência do que a expressa pelo próprio Platão. Pacioli sustenta que, assim como Deus conferiu existência a todo o cosmo através da quinta essência, representado pelo dodecaedro, a Razão Áurea conferiu existência ao dodecaedro, já que não se pode construir o dodecaedro sem a Razão Áurea. Ele acrescenta que é impossível comparar os outros quatro sólidos platônicos (representando terra, água, ar e fogo) entre si sem a Razão Áurea. (Livio, Mario. Razão áurea (Portuguese Edition) (p. 159). Editora Record. Edição do Kindle.)

Além dos motivos apresentados acima, Pacioli possuía total domínio de *Os Elementos*, visto que foi o primeiro a traduzir a obra para o italiano, baseado na versão em latim de Campano[12]. Deixa explícita esta referência durante o primeiro volume de seu livro, salientada pela recomendação presente durante os capítulos de sua obra de como *Os Elementos* deveria ser um norte para o estudo e pesquisa.

Já num segundo plano, a condição de Pacioli como membro do clero lhe deu acesso a manuscritos e livros que não circulavam entre o público em geral. Além disso, lecionou em instituições religiosas de diferentes localidades, estabelecendo um compartilhamento mútuo de conhecimentos com outros estudiosos.

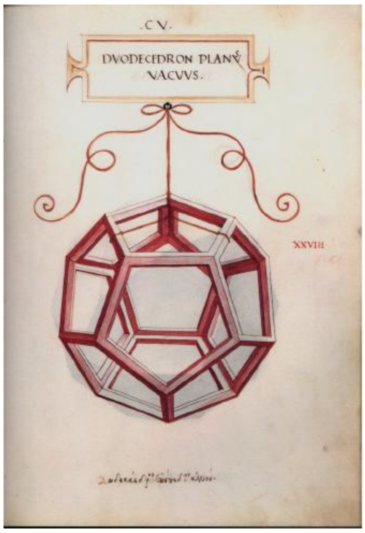
Em termos de magnitude, foi seu período em Milão que acabou o colocando como um renomado matemático do período. Milão acabou por ser tornar a residência de inúmeros intelectuais no final do século XV, quando Ludovico Sforza alcança o cargo de duque e decide tornar Milão a capital europeia das artes e da ciência. Lívio (2006) traz uma breve síntese deste cenário:

> Em 1480, Ludovico Sforza se tornou efetivamente o duque de Milão. Na verdade, ele era apenas o regente do verdadeiro duque de sete anos de idade, após um episódio de intriga política e assassinato. Decidido a fazer da sua corte um lar para estudiosos e artistas, Ludovico convidou Leonardo da Vinci em 1482 como um "pintor e engenheiro do duque". Leonardo tinha considerável interesse por geometria, especialmente por suas aplicações práticas em mecânica. Nas suas palavras: "A mecânica é o paraíso das ciências matemáticas, pois por meio dela se veem os frutos da matemática." Consequentemente, foi Leonardo quem provavelmente induziu o duque a convidar Pacioli para se juntar à corte, como professor de matemática, em 1496. Sem dúvida, Leonardo aprendeu um pouco de geometria com Pacioli, enquanto infundia neste uma maior apreciação da arte. (Livio, Mario. Razão áurea (pp. 158-159). Editora Record. Edição do Kindle.)

[12] Campano de Novara (c.1220 - c.1296), matemático e astrônomo italiano, foi autor da tradução de *Os Elementos* para o latim.

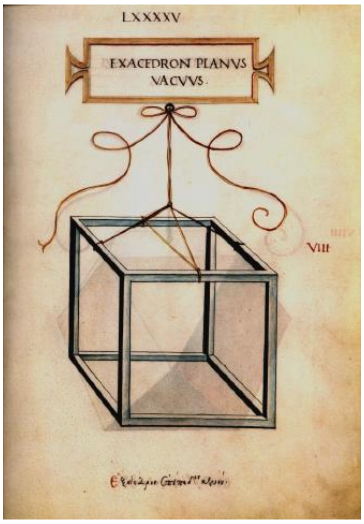
É destacável que Pacioli já desfrutava de certo reconhecimento no início da década de 90 (do século XV), a ponto de receber um convite da corte milanesa costurado por Leonardo Da Vinci. E essa parceria entre os dois, estabelecida ao longo dos anos que sucederam o convite, rendeu a *Divina Proportione* desenhos geométricos extremamente precisos, feitos pelo próprio Da Vinci, dando à obra um prestígio significativo, promovendo ainda mais o nome de Pacioli. Vale ressaltar que os sólidos geométricos que ilustraram os volumes de *Divina Proportione* foram representados de forma vazada pela primeira vez, contribuindo para a disseminação de suas propriedades.

Figura 53 - Dodecaedro ilustrado em *De Divina Proportione*



Fonte: BERTATO, M.

Figura 54 - Hexaedro ilustrado em *De Divina Proportione*



Fonte: BERTATO, M.

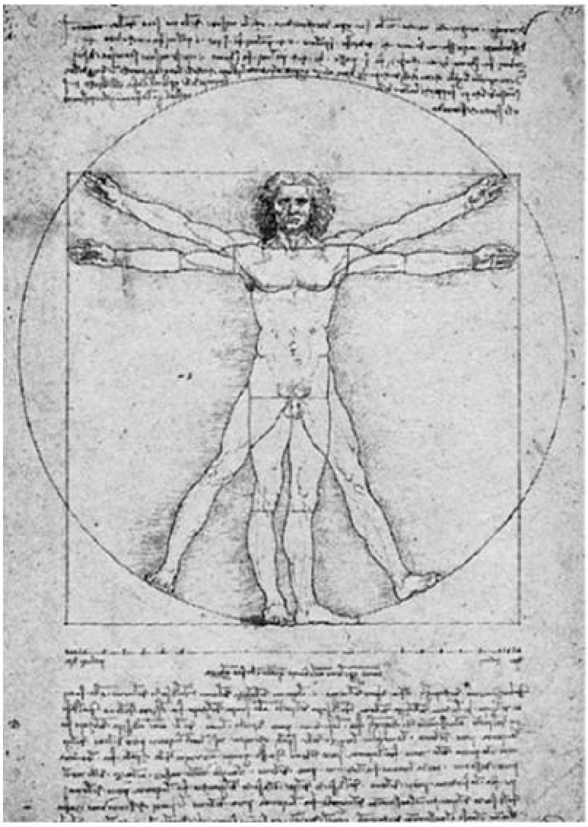
Em relação aos três volumes que compõem *De Divina Proportione*, o primeiro recebe exatamente o mesmo nome da obra; neste, Pacioli reúne as propriedades conhecidas da DMER de maneira minuciosa ao longo de 71 capítulos, muitos com as novas ilustrações de Da Vinci. Dedica este primeiro tomo ao próprio Ludovico Sforza, dado seu peso nas condições proporcionadas para a elaboração do projeto publicado e a quem chama de irmão.

> EXCELLENTISSIMO PRINCIPI LUDOVICO MARIAE SFORCIAE ANGLO MEDIOLANENSIUM DUCI, PACIS ET BELLI ORNAMENTO, **FRATRIS** LUCAE PACIOLI EX BURGO SANCTI SEPULCHRI ORDINIS MINORUM, SACRAE THEOLOGIAE PROFESSORIS, DE DIVINA PROPORTIONE EPISTOLA. (Excelentíssimo Príncipe Ludovico Mario Sforza, Duque dos Anglos e dos Milanenses, Ornamento de Paz e Guerra, do irmão Luca Pacioli, natural da vila de San Sepolcro, membro da Ordem dos Franciscanos Menores, Professor de Teologia Sagrada, Epístola I sobre a Divina Proporção.) (BERTATO, M. Fabio. De Divina Proportione: Tradução Anotada e Comentada. 2008. 322 f. Tese (Doutorado em Filosofia))

O segundo volume intitulado *Tracto de I'architectura* (Tratado da Arquitetura) é um estudo de proporções aplicáveis na arquitetura e no corpo humano, utilizando as interpretações renascentistas da obra do arquiteto romano Marcus Vitruvius Pollio (70 aEC – 25 aEC), *De Architectura*, como embasamento para criar uma espécie de guia para escultores e arquitetos. É de ser enfatizar que Pacioli não cita em momento algum a DMER como uma proporção aplicável nos contextos do volume, inclusive nas proporções da famosa representação artística de Da Vinci, O Homem Vitruviano[13].

[13] Obra desenhada por Leonardo Da Vinci, por volta de 1490, que explicita proporções humanas que considerava ideais.

Figura 55 - O homem vitruviano



Fonte: SCALA/Art Resource, NY

Já o terceiro e último tratado, intitulado *Libellus*, é alvo de polêmica por parte de muitos autores, já que Pacioli literalmente publica uma cópia de *De quinque corporibus* (Cinco Sólidos Regulares), escrito pelo pintor e matemático italiano Piero della Francesca (1415 - 1492), e, por isso, é acusado de plágio. Herz-Fischler (1987) descreve a imputação:

> Talvez nenhum matemático tenha plagiado tanto e com tão pouca mudança nos detalhes e tenha suscitado tanta controvérsia e reações tão veementes como Luca Pacioli... A terceira parte (volume) é o Libellus que, como mencionei acima, é apenas uma versão italiana do *De quinque corporibus de Francesca*. (Herz-Fischler, R. A Mathematical History of Golden Number (Tradução Própria). p.150. Dover Publications, INC. New York, 1987)

O fato de Pacioli não ter citado em nenhum momento a autoria de P. Francesca acaba abrindo espaço para a discussão de plágio por vários autores. Entretanto, temos de ter em mente que P. Francesca foi verdadeiramente seu mestre e um amigo, como destaca Livio (2006)

> Luca Pacioli nasceu em 1445 no *Borgo San Sepolcro* (a mesma vila toscana em que Piero della Francesca nasceu e manteve sua oficina). De fato, Pacioli teve sua educação inicial na oficina de Piero. Contudo, ao contrário de outros alunos que mostraram habilidade na arte da pintura e de alguns, como Pietro Perugino, que estavam destinados a se tornarem grandes pintores, mostrou ser mais promissor na matemática. Piero e Pacioli se tornaram muito próximos mais tarde, como foi

> comprovado pelo fato de que Piero incluiu um retrato de Pacioli como São Pedro, o Mártir, em uma pintura de "Madona e criança com santos e anjos". (Livio, Mario. Razão áurea (p. 156). Editora Record. Edição do Kindle)

Esta conexão pode ter dado a Pacioli uma liberdade ou mesmo proporcionado uma autorização oral para a publicação da obra de *De quinque corporibus* como parte de um projeto maior.

De concreto, o impacto causado pela publicação de *Divina Proportione* em 1509 foi enorme, uma vez que a razão áurea, até então conhecida por "divisão em meia e extrema razão" ou "proporção que tem uma média e dois extremos", acabou tendo seu interesse e estudos retomados, alcançando inclusive um público fora do meio matemático. Além da qualidade dos desenhos de Da Vinci, o próprio nome "divino" despertou um entusiasmo em um momento que ainda contava com domínio da Igreja nos costumes sociais. Por mais que Pacioli não tenha trazido um estudo inédito, deve-se muito a ele no contexto da DMER como objeto de pesquisa.

3.3.3 Kepler

> Antes da origem de todas as coisas, a geometria coexistia com a mente de Deus. (Johannes Kepler *epud* Gleiser, M. A harmonia do mundo (p. 296). Companhia das Letras. Edição do Kindle.)

Diferentemente da maioria dos personagens citados anteriormente, a biografia de Johannes Kepler apresenta inúmeras passagens detalhadas de sua vida pessoal, bem como minúcias das suas revolucionárias descobertas. Digno de figurar no panteão dos grandes gênios da história, suas inovações relacionadas à DMER estão no cerne desta dissertação, como veremos a seguir.

Reconhecido como o maior astrônomo de seu tempo, é evidente que seus trabalhos mais eloquentes residiram justamente nessa esfera de atuação. Mas a matemática era um talento notável de Kepler, o qual contribuiu diretamente para a evolução e disseminação de pesquisas, seja através de correspondências, seja na transmissão em sala de aula. Fora tudo isso, Kepler foi, acima de tudo, um homem devoto e defensor da coexistência entre as diferentes interpretações do cristianismo, postura rara em meio aos conflitos gerados diante da Reforma Protestante[14].

---

[14] Movimento do século XVI que contestou diversas práticas da Igreja Católica e teve como consequências divisões em religiões protestantes dentro da fé cristã.

O importante filósofo alemão Ernst Cassirer utiliza as seguintes palavras para explicitar sua perspectiva sobre Kepler:

> Talvez, em toda história da astronomia, não tenha existido alguém dedicado ao cálculo, de forma tão infatigável e persistente, tão apaixonada e entusiástica, como Kepler. (CASSIRER, Ernest. Tradução: O lugar de Kepler na história intelectual europeia. Cadernos de Filosofia Alemã, v.25, n.1, pp.168. Universidade de São Paulo. 2020, São Paulo)

A história da vida de Kepler se confunde com a história da ciência, entrelaçando-se com os acontecimentos pregressos e futuros envolvendo o número de ouro.

3.3.3.1 Infância e formação universitária: O despertar para o cosmos

Nascido em 27 de dezembro de 1571, Kepler era o mais velho dos sete filhos de Heinrich Kepler, um soldado mercenário que esteve ausente na maior parte de sua infância (Kepler nunca se lamentou por esta ausência), e Katharina Guldenmann, figura constante em sua biografia. Natural de Weil der Stardt, distrito inserido na região de Stuttgart, sudoeste da Alemanha, teve uma infância impactada por provações no seio familiar, visto que testemunhou a morte de três irmãos em poucos anos, tendo a falta de recursos financeiros um estado permanente durante esta fase. Outra marca que há de se destacar é a religiosidade da família, que obedecia ao protestantismo cristão trazido há pouco por Martinho Lutero (1483 – 1546).

Mesmo diante da inviabilidade financeira para o acesso à educação formal e tradicional de qualidade, o menino Johannes Kepler frequentou a escola local, menos abastada, concluindo a formação básica, obtendo destaque em latim e matemática.

Aos 17 anos, ingressa na Universidade de Tübingen, instituição que promovia o ensino luterano na cidade de mesmo nome, sendo a teologia o mais proeminente dos cursos oferecidos por esta ao final do século XVI. Com o objetivo de completar os estudos no curso e, assim, seguir seu objetivo de tornar-se pastor em alguma região posteriormente designada pela administração da universidade, entra em contato profundo com a astronomia, particularmente influenciado por Michael Maestlin (1550 – 1631), professor e mestre da universidade.

Maestlin era considerado um astrônomo de primeira linha em seu tempo, muito em virtude da publicação de registros peculiares nas observações da Supernova de 1572 (também conhecida como a Supernova de Tycho – em homenagem ao astrônomo dinamarquês Tycho

Brahe (1546 - 1601) e do Grande Cometa de 1597, brilhante e visível a olho nu em várias regiões do planeta, afastando o entendimento de Aristóteles acerca da imutabilidade dos céus e, de certa forma, defendendo a adoção do sistema de Copérnico como o correto do ponto de vista cosmológico. Foi de vital importância para a divulgação dos feitos de Kepler este contato, íntimo, com o mestre Maestlin, muito em virtude do posicionamento e análises sobre o sistema de Copérnico.

Dentro do ambiente acadêmico, Maestlin não podia coadunar com a visão cosmológica heliocêntrica, o que representaria uma afronta aos princípios defendidos pelo cristianismo, independente da denominação seguida.

> Tu, que fundaste a Terra sobre os seus fundamentos, para que nunca seja abalada. (SALMO 104:5)
>
> Então Josué falou ao Senhor: no dia em que o Senhor entregou os amorreus nas mãos dos filhos de Israel; e disse na presença dos israelitas: Sol, detém-se dobre Gibeão, e tu, Lua, sobre o vale do Aijalom. E o Sol se deteve, e a Lua parou, até que o povo se vingou dos seus inimigos. Isto não está escrito no Livro de Jasher? O Sol, pois, se deteve no meio do céu e não se apressou a pôr-se, quase um dia inteiro. E não houve dia como aquele, nem antes nem depois dele, ouvindo o Senhor assim a voz de um homem; porque o Senhor pelejava por Israel. (JOSUÉ, CAP. 10, 12 – 14)

Estas passagens bíblicas estabeleceram um robusto pilar sobre o estudo geocêntrico, que acabou prevalecendo como verdade absoluta ao longo da história, incapaz de ser afrontada por fiéis à mitologia cristã até aquele momento.

A antiga metafísica grega também fazia parte dos acalorados debates sobre a cosmologia dentro (e nos arredores) do ambiente acadêmico. Condicionados pelas perspectivas de Ptolomeu e Aristóteles, onde os corpos permaneciam em órbitas imutáveis e a existência da chamada quintessência preenchendo o universo, visão essa que também era compartilhada entre os pitagóricos, encontrar um mero aluno que desafiava a posição estabelecida há milênios perturbava o corpo docente e discente da instituição. Aliás, Kepler mantivera a filosofia de Pitágoras, “Deus sempre geometriza”, presente em várias de suas análises estelares posteriores.

Mais do que simplesmente desafiar os antigos sábios gregos e os membros da Universidade, Kepler se concentrava em estabelecer métodos para explicar os movimentos celestes. O próprio Maestlin resistia em vincular a Astronomia à Física, insistindo na interpretação bíblica de que o trânsito entre os astros havia sido previamente determinado no ato da criação e que não existia uma razão física para os deslocamentos. Ou seja, a posição científica se confundia com a religiosa, limitando a astronomia à simples observação.

A passagem de Kepler na Universidade acabou sendo encurtada, uma vez que os embates constantes com professores e colegas sobre os sistemas geocêntrico e heliocêntrico acarretaram em uma transferência para a escola luterana de Graz, onde estava vaga a posição de professor de matemática após o falecimento do antecessor da cadeira, distante o suficiente de Tübingen para não voltar a perturbá-los. A “indicação” acabou resolvendo o incômodo dos gestores da Universidade diante das constantes intervenções do pupilo, que tanta desafiava as leis contidas no Livro da Concórdia[15].

Kepler deixa Tubingen sem o diploma de Teologia, decepcionado e contrariado com a imposição de uma posição que outrora não cogitara exercer.

3.3.3.2 A dualidade de Kepler

Como podemos notar, a vida universitária Kepler fora bem tribulada. Contudo, desde sua chegada a Graz, o que é percebido da vida de Kepler é uma real dicotomia: sua vida pessoal é acometida por perdas irreparáveis, as primeiras de muitas enquanto adulto, e suas pesquisas ganham corpo e notoriedade.

O contragosto pela transferência se transforma em um jeito íntimo e peculiar de cultuar o deus cristão, interpretando os céus como um meio divino de comunicação e harmonia angelical.

> “Queria ter sido teólogo; durante muito tempo sofri com isso. Mas veja agora como louvo a Deus em meu trabalho como astrônomo.” afirma o próprio Johannes Kepler numa carta a Michael Maestlin, em 1595. (Gleiser, Marcelo. A harmonia do mundo (Portuguese Edition) (p. 63). Companhia das Letras. Edição do Kindle)

Os primeiros anos como professor em *Standische Schule* (Escola Protestante de Graz) acabam sendo os mais tranquilos diante do futuro penoso que o esperava à frente. Além disso, sua ideologia de que o cosmo era o equilíbrio entre o divino e a humanidade estava mais firme do que nunca, gerando o aprofundamento em pesquisas sobre as causas dos movimentos celestes, muito além das observações estritamente aplicadas para registros. Entraria em cena o pitagorismo na mais pura essência.

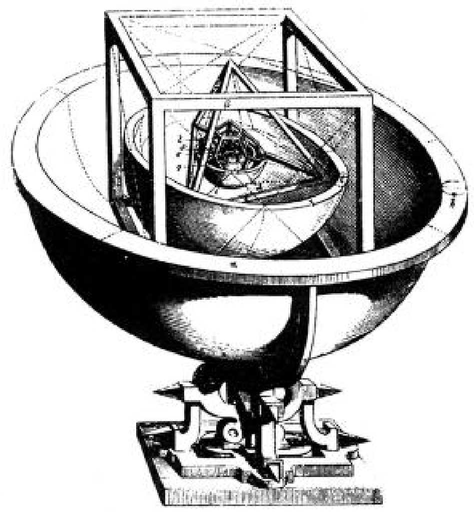
Neste estágio temporal, somente havia conhecimento da existência de seis planetas: Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter, Saturno, além da própria Terra. Kepler, já com o modelo de Copérnico completamente aceito em suas análises, tentava utilizar propriedades geométricas (Deus sempre geometriza) para descrever as órbitas dos planetas em torno do Sol e, neste

---

[15] Coleção de escritos teológicos que norteiam a Igreja Luterana, e que foi compilada no século XVI.

sentido, refutar de vez o geocentrismo. Numa mistura de insanidade e genialidade, publica a obra *Mysterium Cosmographicum*, entre 1596 e 1597 e nele, o novo modelo.

Figura 56 - *Mysterium Cosmographicum*



FONTE: Livio, M.

> A esfera da Terra é a medida de todas as outras órbitas. Circunscreva um dodecaedro em volta dela. A esfera que a envolver será a de Marte. Circunscreva um tetraedro em volta de Marte. A esfera que a envolver será a de Júpiter. Circunscreva um cubo em volta de Júpiter. A esfera que a envolver será a de Saturno. Agora, inscreva um icosaedro dentro da órbita da Terra. A esfera dentro dela será a de Vênus. Inscreva um octaedro dentro de Vênus. A esfera inscrita nela será a de Mercúrio. Assim se obtém a base para o número de planetas. (Livio, Mario. Razão áurea (p. 178). Editora Record. Edição do Kindle.)

Perguntas que o incomodavam, como “por que existem exatamente seis planetas?” e “como definir o espaçamento entre as órbitas destes?” se transformam em respostas utilizando os sólidos geométricos básicos. Entretanto, não houve uma aceitação generalizada da ideia, mesmo com muitos dos estudiosos reconhecendo a originalidade da teoria e que tenderia a evoluir.

> Não é preciso dizer que o modelo cosmológico de Kepler, que era baseado nos sólidos platônicos, não só estava totalmente errado, mas era louco até mesmo para a época de Kepler. A descoberta dos planetas Urano (que vem depois de Saturno em termos da distância crescente do Sol) em 1781 e Netuno (o seguinte após Urano) em 1846 pôs um ponto final numa ideia já moribunda. Mesmo assim, é impossível superestimar a importância desse modelo na história da ciência. Como disse o astrônomo Owen Gingerich no seu artigo biográfico sobre Kepler: “Raramente na história um livro tão errado foi tão fundamental para orientar o curso futuro da ciência. (Livio, Mario. Razão áurea (p. 180). Editora Record. Edição do Kindle.)

Devemos lembrar que *La Divina Proportione* de Pacioli já circulava livremente na Europa e é certo que Kepler havia a lido, uma vez que cita o termo “divina proporção”, oriundo da obra, em pelo menos duas correspondências (HERZ-FISCHLER, 1987). Somando este fato com a herança deixada pelos pitagóricos da conexão entre sólidos geométricos e misticismo, Kepler deixa se levar pelo conjunto de propostas.

Era o mito da razão áurea legada da Antiguidade Clássica atuando, mais uma vez, em um evento que marcaria a história da ciência.

> Apesar da beleza de seu modelo, ao confrontá-lo com os dados, Kepler encontra discrepâncias que não sabia como explicar. Entretanto, ele atribui isso a erros nas tabelas disponíveis e, inicialmente, não o abandona. O apego de Kepler à sua construção teórica revela que a relação do cientista com os dados nem sempre é tão simples quanto fazem parecer os manuais de metodologia científica e os livros-texto, que muitas vezes apresentam o método científico como um conjunto de etapas que se seguem, linear e mecanicamente, sem espaço para a incerteza, a ambiguidade, a criatividade e a intuição. (Praxedes, G. & Peduzzi, L. Tycho Brahe e Kepler na escola: uma contribuição à inserção de dois artigos na escola. Revista Brasileira de Física. N. 3. Setembro, 2009)

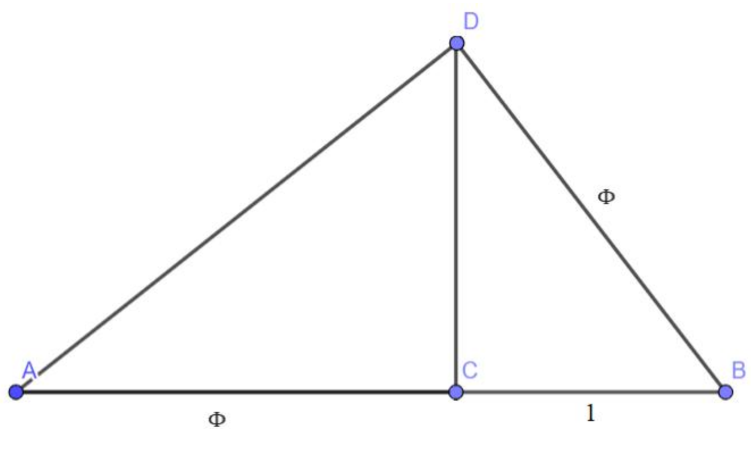
Retomando o contexto da regular comunicação com Maestlin, através de cartas, subentendendo-se que ali existia uma admiração mútua, concebida nos tempos de universidade, são compartilhadas informações dos mais diversos assuntos. Numa destas, em 1597, Kepler propõe o seguinte problema ao mestre:

> (...) construir um triângulo retângulo cujos três lados são mutuamente e continuamente proporcionais, de modo que, assim como o lado menor está para o maior ao redor do triângulo retângulo, o último está para o subtendido pelo ângulo reto. (Herz-Fischler, R. A Mathematical History of the Golden Number (Tradução Própria). p.159. Dover Publications, INC. New York, 1987)

Na mesma correspondência, a solução para o problema é destrinchada utilizando a meia e extrema razão, como afirma o próprio Kepler.

> Se em uma linha que é dividida em razão extrema e média, se constrói um triângulo de ângulo reto tal que o ângulo reto esteja na perpendicular construída no ponto da seção, então a perna menor será igual ao segmento maior da linha dividida. (Herz-Fischler, R. A Mathematical History of the Golden Number (Tradução Própria). p.159. Dover Publications, INC. New York, 1987)

Figura 57 - Triângulo retângulo com segmentos proporcionais à Meia e Extrema Razão



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Ora, tomando o segmento AB na perspectiva da DMER, BC equivale a uma medida que chamaremos de k e CB equivale a uma unidade de medida, obedecendo aos critérios da divisão. Traçando uma perpendicular a partir de C, ponto que dividiu AB em meia e extrema razão, encontra-se um ponto D, tal que a partir deste é formado um triângulo retângulo ABD. (Podemos sugerir a construção de um semicírculo de diâmetro AB para facilitar a marcação de D, interseção entre o eventual semicírculo e a perpendicular traçada).

Os triângulos retângulos ADC, BCD e ABD são todos semelhantes e aplicando a proporção entre estes:

$$\frac{AB}{DB} = \frac{DB}{1}$$

Desta forma, temos que DB possui a mesma medida de k, já que a DMER do segmento resulta numa proporção equivalente.

$$\frac{AB}{DA} = \frac{DA}{AC}$$

Novamente encontramos uma proporcionalidade, agora entre o cateto DA e a hipotenusa AB.

O triângulo construído neste estilo é de acordo com o enunciado proposto por Kepler na correspondência ao mestre. Fica evidenciada a atenção que Kepler dava aos estudos de Euclides, não obstante da DMER.

Ainda em 1597 ocorre o casamento com Bárbara Müller, filha de um comerciante de posses razoáveis e viúva por duas ocasiões. A união acaba dando a Kepler certa estabilidade financeira, sendo esse um dos motivos reais para o arranjo matrimonial. Nesta altura, sua principal fonte de renda não eram os pagamentos da escola de Graz, que se encontravam muitas vezes atrasados, mas sim a venda de mapas astrológicos.

A astrologia atual afugenta os teóricos em ciências matemáticas e da natureza, mas nos séculos XVI e XVII representava erudição em relação aos corpos celestes. Não havia uma tendência à adivinhação, mas sim uma interpretação da posição dos astros, interpretação essa que era utilizada de maneira única por cada pessoa ou situação analisada.

> Embora ciência e misticismo sejam hoje atividades bem separadas e distintas, nem sempre foi assim. Alguns conceitos e ideias da ciência tiveram sua origem na

> astrologia, no pensamento metafísico, em concepções esotéricas. Durante o Renascimento houve a revitalização de uma concepção mística da natureza, proveniente, em parte, de uma intensa releitura dos textos platônicos, neoplatônicos e herméticos. Esse interesse está presente na obra de muitos pensadores renascentistas, sendo apontado por Debus[16] como um dos elementos que atuaram na gênese da nova ciência que então se desenvolvia. (Praxedes, G. & Peduzzi, L. Tycho Brahe e Kepler na escola: uma contribuição à inserção de dois artigos na escola. Revista Brasileira de Física. N. 3. Setembro, 2009)

Em casa, no mesmo ritmo que filhos eram gerados, eram enterrados. Heinrich, o primogênito, morre após dois meses, em 1598, colocando Bárbara numa condição severamente depressiva. Após alguma melhora do trauma, nasce Susanna, em 1599; deixa a vida após 38 dias de existência. A sequência de sepultamentos dos filhos parece condenar também os sentimentos entre Kepler e a esposa.

No final do século XVI eclode o movimento antiluterano em Graz partindo do governo católico recém empossado e Kepler se vê forçado a deixar sua residência permanente, em busca de segurança. Neste momento, foi oferecida a conversão ao catolicismo, prontamente negada. O ato de se posicionar de acordo com sua convicção religiosa viria a causar ainda outros transtornos ao astrônomo.

3.3.3.3 Praga: As leis que mudaram a Astronomia

Mais uma vez com relutância, Kepler se refugia, agora de maneira permanente em Praga, capital do Sacro Império Romano-Germânico em 1600, junto de sua família. Aproveitando o convite conveniente com a ocasião, aceita o cargo de assistente de Tycho Brahe, mas encontra certa rejeição dos outros membros da equipe do astrônomo e, de certa forma, do próprio Tycho. Ser o assistente de alguém que ainda defendia um modelo geocêntrico era desafiador, mas o exílio forçado e a apuração com riqueza de dados astronômicos realizados ao longo de décadas pelo próprio Tycho acabaram tornando aceitável a empreitada.

É importante assinalar como Tycho fora considerado no meio astronômico, sendo responsável pelos mais precisos dados obtidos até aquele momento, muitos destes oriundos do observatório de Uraniborg, localizado na Suécia. Inclusive, há um Museu em homenagem a Tycho Brahe no local. Este fora o mais equipado observatório da época, ficando por alguns anos à disposição do astrônomo dinamarquês.

---

[16] Allen George Debus (1926 - 2009), importante pesquisador estadunidense na área da História das Ciências.

Em um passado recente, Kepler havia se posicionado contra Tycho em discussões entre os modelosgeocêntrico e heliocêntrico. Como consequência da adoção desta posição, foi gerada certa desconfiança por parte de Brahe em relação às verdadeiras intenções de Kepler, limitando seu acesso aos preciosos e almejados registros. Adicionalmente, as concepções distintas sobre os modelos de cosmos despertavam certa rivalidade.

> A relação conflitante e as divergências conceituais entre Tycho e Kepler são elementos que também podem ser explorados em uma situação de ensino que trate a ciência como uma construção histórica e, portanto, humana. Kepler não era discípulo, muito menos um simpatizante das ideias de Tycho; em verdade, ele era um grande rival dessas ideias, e ambos sabiam disso. No entanto, cada um reconhecia e respeitava a competência científica do outro. Esses homens, tão diferentes em temperamento, personalidade e concepção de mundo, trabalharam juntos; eles precisavam um do outro para corroborar ou invalidar os seus respectivos modelos. A relação conflituosa entre esses dois cientistas exemplifica o duplo caráter, cooperativo e competitivo, da ciência. (Praxedes, G. & Peduzzi, L. Tycho Brahe e Kepler na escola: uma contribuição à inserção de dois artigos na escola. Revista Brasileira de Física. N. 3. Setembro, 2009)

Kepler recebe a incumbência de consolidar os estudos sobre a órbita de Marte, tendo acesso somente aos dados pertinentes a esta pesquisa. Paulatinamente, vai conquistando credibilidade junto a Brahe, que enxerga seu brilhantismo, indicando-o como sucessor ao cargo de matemático imperial da corte de Rodolfo II, imperador Romano-Germânico.

Parece que há uma fuga do tema deste trabalho, mas sem esta sucessão de acontecimentos, Kepler não poderia se aprofundar ainda mais na matemática e, consequentemente, na DMER e, especificamente, nas aplicações decorrentes da teoria euclidiana e da sequência de Fibonacci.

Com o falecimento de Brahe em 1601, Kepler assume a cadeira de matemático imperial e obtém o acesso irrestrito aos registros astronômicos anteriormente negados, o combustível que faltava para a elaboração das leis da astronomia moderna e que posteriormente viriam a levar seu próprio nome.

Em 1608, uma carta destinada ao professor de medicina e anatomia, Joachin Tanckius (1557 – 1609), da universidade de Leipzig, carrega o toque magistral em relação à sequência de Fibonacci:

> Dos dois sólidos regulares, o dodecaedro e o icosaedro... esses sólidos, e de fato a estrutura do próprio pentágono não podem ser formados sem a proporção divina, como os geômetras de hoje a chamam. É arranjada de tal maneira que os dois termos menores de uma série progressiva constituem juntos o terceiro, e destes, os últimos dois, quando somados, resultam no termo imediatamente subsequente, e assim por diante, até o infinito, enquanto a mesma proporção continua intacta... quanto mais avançarmos a partir do primeiro número, mais perfeito fica o exemplo. Sejam os menores números 1 e 1... some-os, e a soma será 2; some esse com o último dos uns, resultando 3. Some 2 a isso, e tenha 5. Some 3, e tenha 8; 5 e 8, 13; 8 e 13, 21. Assim como 5 está para 8, 8 está para 13, aproximadamente, e 8 está para 13, assim

> como 13 está para 21, aproximadamente. (Livio, Mario. Razão áurea (pp. 184-185). Editora Record. Edição do Kindle.)

Como já fora discutido anteriormente, Fibonacci não encontrou a relação entre sua sequência e a razão áurea. Coube a Kepler esta observação, abrindo um leque de explorações e aplicações que utilizamos ainda hoje em variadas áreas de estudo.

Outra relação matemática é evidenciada por Kepler nesta mesma correspondência: "*o quadrado de qualquer termo é sempre menor do que uma unidade do produto entre dois termos adjacentes da sequência*." (LIVIO, 2006). A aparência de uma propriedade inocente esconde, na verdade, um conceito que atualmente é muita utilizado em trabalhos de lógica e em redes sociais: o paradoxo de Sam Loyde (1841 - 1911), famoso criador de quebra-cabeças. Livio (2006) apresenta o problema:

> Considere o quadrado com oito unidades no lado (área de $8^2 = 64$) na Figura 57. Agora, divida-o em quatro pedaços como indicado. Os quatro pedaços podem ser reagrupados (Figura 58) para formar um retângulo de lados 13 e 5 com área de 65! De onde veio o quadrado unitário extra? A solução do paradoxo está no fato de que as peças, na verdade, não se encaixam perfeitamente ao longo da diagonal do retângulo — existe um espaço estreito (um longo paralelogramo escondido sob a linha grossa que marca a longa diagonal na Figura 64) com a área de um quadrado unitário. Obviamente, 8 é um número de Fibonacci, e seu quadrado (82 = 64) difere por 1 do produto de seus dois números de Fibonacci adjacentes (13 × 5 = 65) — a propriedade descoberta por Kepler. (Livio, Mario. Razão áurea (p. 185). Editora Record. Edição do Kindle.)

Figura 58 - Paradoxo de Sam Loyde (Parte 1)

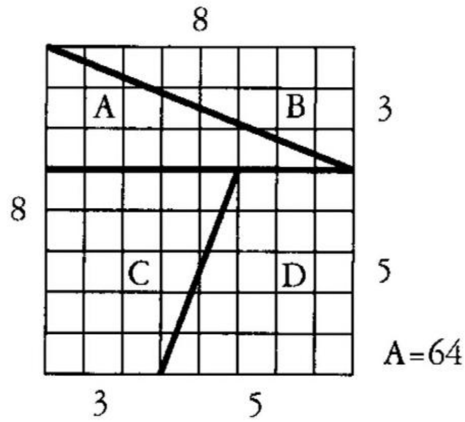
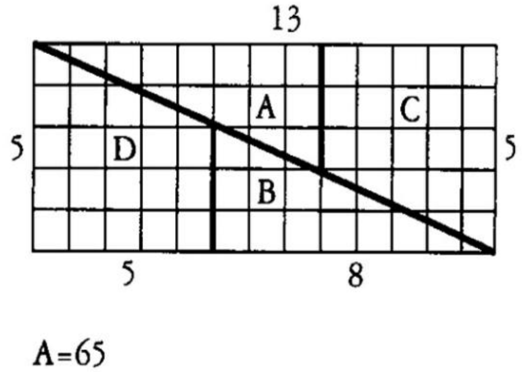


Figura 59 - Paradoxo de Sam Loyde (Parte 2)



FONTE: Livio, M.

Novamente, a sequência numérica desenvolvida por Leonardo Pisanus adquire um contorno além das expectativas de seu criador. O paradoxo de Loyde é uma falácia muito bem elaborada com um contorno do misticismo oriundo da DMER. Além deste, a relação matemática estabelecida por Kepler é uma evidencia irrefutável de como a proporção divina era objeto de estudo regular no período renascentista.

Em relação à abordagem astronômica, Kepler, em Praga, chega à brilhante conclusão de que as órbitas dos planetas em torno do sol não tinham formato circular, mas sim elíptico. Sem os dados deixados por Brahe, seria impossível para Kepler chegar à conclusão. Mais ainda, o Sol não se encontrava numa posição central, fazendo com que a velocidade dos astros fosse alterada de acordo com seu posicionamento em relação à anã amarela. Kepler não sabia, mas havia constatado a existência de uma força de atração entre corpos, que chamamos de gravidade.

As descobertas são catalogadas em uma nova obra, a *Astronomia Nova*, publicada em 1609. A metamorfose astronômica ganha forma, e as primeiras leis de Kepler ganham o mundo.

Os últimos anos em Praga também se tornam fúnebres: Friedrich, outro filho do casal, acaba falecendo aos seis anos. Depois, Bárbara também parte em virtude da uma virose trazida por tropas leais a Matias, irmão do imperador Rodolfo II, que viria a sucedê-lo no trono. Em decorrência desta mudança, Kepler é obrigado a deixar Praga em 1611 para, mais uma vez, escapar das perseguições religiosas. O rumo agora era Linz, importante cidade austríaca.

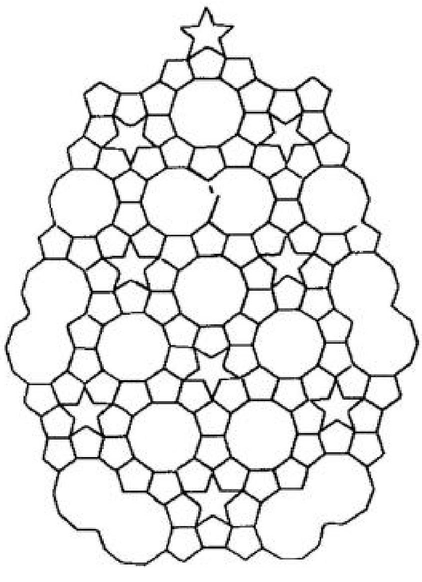
3.3.3.4 Linz

O ano de 1619 é marcado pela publicação de *Harmonice Mundi* (A Harmonia do Mundo), obra que representa o ápice do brilhantismo da vida de Kepler, na qual expõe a lei que daria forma à gravitação universal: a razão entre o período ao quadrado e o semieixo maior ao cubo é a mesma para todos os planetas (T^2/R^3 é constante, onde T é o período e R o raio médio da órbita).

> Eu roubei as naves douradas dos egípcios para construir um tabernáculo para o meu Deus com elas, muito longe das fronteiras do Egito. (Kepler, Johannes apud Livio, Mario. Razão áurea (p. 192). Editora Record. Edição do Kindle.)

Composta por cinco livros, *Harmonice Mundi* traz a DMER através da prática que utiliza espaços preenchidos por figuras geométricas de forma harmônica e sem deixar lacunas, prática essa denominada de *ladrilhamento*. Uma das figuras analisadas é formada por uma série de polígonos diretamente vinculados à razão áurea, pentágonos, pentagramas e decágonos.

Figura 60 - Ladrilhamento formado por pentágonos, pentagramas e decágonos



Fonte: Livio, M.

As evidências da devoção à geometria ficam expostas neste conjunto de manuscritos. É demonstrado ainda como o pitagorismo continuava a nortear as ideias de Kepler, já que a noção de “harmonia” levantada pelo título e conteúdo da obra é coincidente com a visão de Pitágoras de geometrização das leis naturais.

Kepler volta a se casar, em 1613, com Susanna Reuttinger, com quem tem seis filhos e vive até o momento de sua morte em 1630. Conforme expomos, a DMER é companheira fiel nas análises de uma das maiores mentes que já pisaram em nosso planeta, cuja trajetória é exemplo de resiliência sobrecomum das convicções que sustentava, mesmo em face das adversidades e desafios. Seu legado é um dos fatores que nos trouxeram até a presente compreensão de cosmos e de vida.

4 MITOS E VERDADES ENVOLVENDO A RAZÃO ÁUREA

O número áureo, por si só, é extremamente intrigante. Suas aparições em equações, na construções de figuras e em modelos matemáticos diversos resultaram, como apresentamos anteriormente, em uma história riquíssima, com a participação de diversas mentes geniais, algumas das quais expusemos parcialmente nesta dissertação.

4.1. Mitos

A presença do número áureo em obras de arte, arquitetura e natureza é inegável. Apesar disso, há um vasto oceano de mitos que frequentemente obscurecem a realidade sobre a proporção. Seja devido a afinidades filosóficas, visão religiosa, ou ainda por extravagância, histórias infundadas muitas vezes ganham mais compartilhamento do que os estudos reais e rigorosos envolvendo a DMER.

O objetivo da presente seção será desvendar e certificar alguns dos mitos que atrapalham a verdadeira jornada de pesquisas envolvendo a DMER, em uma análise autêntica e contemporânea.

4.1.1. Partenon

Ainda hoje é repetida incessantemente a falsa afirmação de que o Partenon[17] foi construído nos moldes da proporção áurea. A imagem contendo o frontispício original da construção “encaixada” de forma esdrúxula em um retângulo áureo é conhecida por qualquer um que pesquise superficialmente o assunto. Compreender o ponto de partida dessa hipótese errônea, além do seu compartilhamento em massa, é relevante para desvendar a verdadeira história da DMER.

[17] Templo grego construído na Acrópole ateniense durante o período áureo da cidade, no século V aEC.

Antes de adentrar no assunto, há de se registrar o quão imponente é a arquitetura do antigo templo, construído para o culto a Atenas, deusa grega da sabedoria e da guerra. A história de Partenon é marcada por diversos saques e ataques ao longo dos tempos, impossibilitando-nos de visualizar sua forma arquitetônica original. Erguido no século V aEC durante o governo de Péricles (c. 495 aEC - 429 aEC), considerado um dos "inventores da democracia", o Partenon, segundo Plutarco, teve como arquitetos os famosos Íctino (c. 470 aEC - c. 410 aEC) e Calícrates (dados desconhecidos), além de Fídias (480 aEC – 430 aEC) como escultor principal, a quem é atribuída a autoria da Estátua de Atenas, peça central que adornava o prédio.

Talvez por toda esta grandiosidade e importância histórica, um símbolo da essência da Grécia Antiga, é que se busque encontrar uma forma de atribuir ao Partenon pitadas místicas, encontrando na razão áurea uma fonte atrativa de falsas associações.

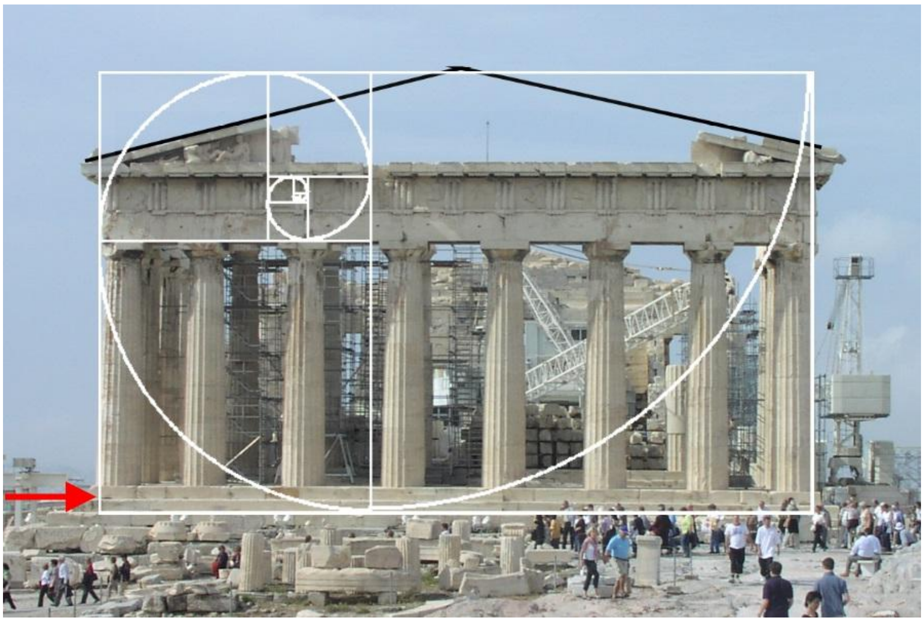
Ao que parece, surgiu do psicólogo alemão e estudioso da matemática e da filosofia, Adolf Zeising (1810 – 1876), a teoria que relaciona o Partenon à razão áurea. Zeising se debruçou no estudo sobre a DMER, enfocando sua pesquisa nas aplicações dessa proporção em animais e vegetais. Em 1800, publicou a obra *Neue Lehre von den Proportionen des Menschlichen Körpers, aus einem bisher unerkannt gebliebenen, die ganze Natur und Kunst durchdringenden* (Nova doutrina sobre as proporções do corpo humano, de uma lei até então não reconhecida e que permeia toda a natureza e arte), onde apresentou seus resultados e observações da presença da DMER no corpo humano, na natureza e na arte.

Muitas das teses apresentadas por Zeising não apresentam evidências concretas. Ao afirmar, por exemplo, que a razão entre a altura de um ser humano e a distância do umbigo até os dedos do pé segue um padrão tendendo a *phi* (Φ), vemos mais um forte entusiasmo em identificar padrões inexistentes do que uma validadação científica sólida. Porém, as teorias lançadas por Zeising ganharam notoriedade e serviram de insporação para pesquisadores posteriores. O matemático e professor da Universidade de Stanford, autor de inúmeros livros científicos, Keith Devlin (1947 -), comenta:

> Mas não importava se era inventado ou não. As teorias de Zeising tornaram-se extremamente populares, "o equivalente do século 19 ao Efeito Mozart", segundo Devlin, referindo-se à crença de que ouvir música clássica melhora sua inteligência. E nunca realmente foi embora. (Devlin, K. Mathematics. Nova York: Columbia University Press, 1999.)

Retomando o raciocínio da eventual construção do Partenon sob o molde da proporção áurea, a ficção repetida por milhares de anos é de que o frontispício do prédio, ainda com o frontão superior triangular, destruído em 1687, numa das muitas batalhas que se sucederam entre a República de Veneza e o Império Otomano, possuía medidas em conformidade com a DMER. Traçando uma linha temporal, observamos que o período de construção do prédio (447 aEC – 433 aEC) ocorreu mais de um século antes da publicação de *Os Elementos*, e, como vimos no Capítulo 2, não existe qualquer evidência concreta do domínio dos gregos sobre a DMER anterior à obra euclidiana, apesar dos pressupostos.

Figura 61 - Retângulo áureo sobreposto ao Frontispício do Partenon



Fonte: https://gizmodo.uol.com.br/wp-content/blogs.dir/8/files/2015/04/Partenon-e-proporcao-aurea.jpg

São diversos os autores que já publicaram estudos contradizendo a hipótese. Markowsky (1992), Fischler (1987), Livio (2006) trazem várias medições do prédio que não se enquadram em *phi* (Φ), nem mesmo dentro de uma margem de erro aceitável.

Chama a atenção um artigo intitulado *Applications of the Golden Mean to Architeture* (Aplicação da Razão Dourada à Arquitetura), de Nikos A. Salingaros, físico e matemático estadunidense e professor de arquitetura da Universidade do Texas, onde afirma

> Como é bem sabido, uma das maravilhas do Partenon é sua curvatura cuidadosamente calculada, ou "entasis". Não faz sentido procurar retângulos em um edifício que é essencialmente curvo. Sua fachada frontal não é retangular — é um retângulo distorcido em degraus curvos e com um triângulo curvo no topo. Não é possível definir um retângulo exato nas faces frontal ou traseira do Partenon. Mesmo que o Partenon seja construído com especificações extremamente precisas, sua curvatura impede medições retangulares de qualquer precisão maior que 1%. Esse erro embutido impede a localização de qualquer retângulo dourado, uma vez que a precisão exigida simplesmente não é atingível. (Salingaros, N., Applications of the Golden Mean to Architeture, University of Texas, 2012)

Ao contrário dos argumentos matemáticos que examinaram diferentes medições em busca de uma possível proporção de acordo com *phi* (Φ), essa é uma evidência geométrica de que não há qualquer compatibilidade entre o retângulo áureo e o Partenon. Salingaros (2012) ainda cita outras verificações que continuam a refutar qualquer tipo de ligação entre o Partenon e a DMER. De qualquer forma, cada teoria que os conecte não passa de mera conjectura e, como afirma Salingaros (2012), introduzir um retângulo em algo curvo é verdadeiramente um malabarismo geométrico.

4.1.2. Pirâmide de Quéops

Outra disseminação irresponsável vinculada à DMER envolve as medidas usadas na construção da conhecida Pirâmide de Quéops, no Egito, frequentemente referida como a Grande Pirâmide. Livio (2006) conduz um estudo acerca da construção da pirâmide:

> Em um artigo publicado na revista *Nature* em novembro de 2000, Kate Spence, da Universidade de Cambridge, propôs outro método de datação, que dá à Grande Pirâmide de Khufu a data de 2480 aEC, com uma imprecisão de apenas cinco anos, aproximadamente. O método de Spence foi inicialmente sugerido pelo astrônomo sir John Herschel em meados do século XIX, e é baseado no fato de as pirâmides serem sempre voltadas para o Norte com extraordinária precisão. Por exemplo, a direção da Grande Pirâmide em Gizé se desvia do Norte exato por menos de três minutos de arco (apenas 5% de um grau). (Livio, Mario. Razão áurea (p. 66). Editora Record. Edição do Kindle.)

Vemos, então, que a data 2480 aEC é mais de dois séculos anterior à publicação de *Os Elementos*, mesmo enquadrados os intervalos de erros de 5 anos. Todavia, entre as inúmeras teses místicas que envolvem a Pirâmide, a presença da seção áurea não poderia estar ausente, mesmo existindo um hiato de dois milênios entre sua construção e *Os Elementos*.

Um dos primeiros historiadores conhecidos, Heródoto (484 aEC – 425 aEC), acabou desempenhando, mesmo que acidentalmente, um papel significativo na propagação de lendas envolvendo a Grande Pirâmide e a DMER, que surgiram a partir do século XIX. Considerado como "Pai da História", Heródoto narra uma série de eventos que envolveram as Guerras Greco-Persianas, ocorridas entre os séculos V e VI aEC, bem como informações sobre as diferentes civilizações que conheceu ao longo de suas extensas viagens. O resultado desta pesquisa gerou a obra "Os Nove Livros de História", uma referência importante sobre a história do mundo antigo.

Dentro da perspectiva do trabalho, temos um trecho do segundo livro (dos nove), destacado por Livio (2006), que acabou por gerar toda esta controvérsia relacionada à Pirâmide de Gizé: "Sua base é quadrada, cada lado tem oito *plethra* de comprimento e sua altura é a mesma."

Convertendo a unidade *plethra* para medidas atuais, uma unidade sua equivale a aproximadamente 30,8 metros. Ou seja, a base da pirâmide, de acordo com o texto de Heródoto citado acima, é quadrada, com lados medindo aproximadamente 246,4 metros. E é exatamente a partir desse ponto que se iniciam as contradições.

Em primeiro lugar, os lados da base da pirâmide não formam um quadrado perfeito, apresentando variações significativas em suas medidas. E, em segundo lugar, a medida média dos lados é de cerca 230 metros, uma distorção de 7,1% em relação à medida apresentada por Heródoto.

É impossível saber o porquê dessa distorção apresentada por Heródoto. Afinal, o segundo livro de sua coletânea foi publicado cerca de 2000 anos após a construção da pirâmide, com instrumentos mais modernos para verificação de medidas.

Além disso, os recentes devaneios ganharam força com escritor britânico John Taylor (1781 - 1864), e seu conflituoso livro *The Great Pyramid, Why Was It Was Built and Who Built It?* (A Grande Pirâmide: Por que foi construída? E quem a construiu, publicado em 1859, uma verdadeira efusão de ideias baseadas na imaginação e nacionalismo desenfreado do autor.

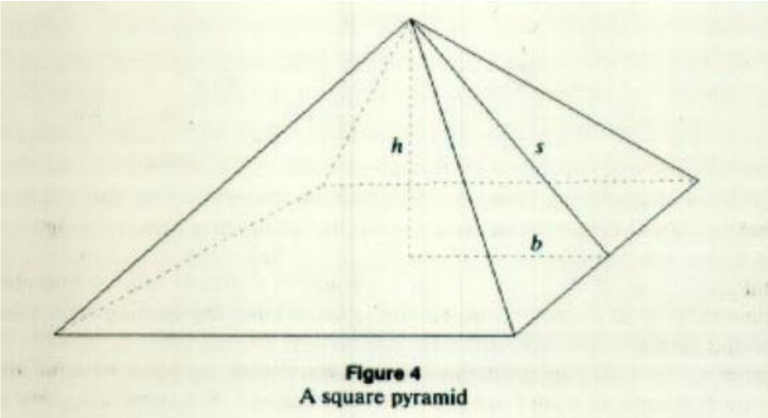
> Taylor tinha tanta convicção de que as pirâmides continham várias dimensões inspiradas por verdades matemáticas desconhecidas dos antigos egípcios que concluiu que sua construção era consequência de intervenção divina. (Livio, Mario. Razão áurea (p. 67). Editora Record. Edição do Kindle.)

Por fim, acaba-se atribuindo uma falsa afirmação a Heródoto, o que, por sua vez, acarreta na discussão da presença de Φ na Pirâmide de Gizé:

> Heródoto relatou numa passagem que os padres egípcios lhe disseram que as dimensões da Grande Pirâmide foram tão escolhidas que a área de um quadrado cujo lado era a altura da grande pirâmide igualava a área de um triângulo facial. (Misconceptions about the Golden Ratio. Markowsky, George. College Mathematics Journal, v23 n1 p.7 Jan 1992)

Interpretando e desenvolvendo geometricamente a frase supracitada, temos a figura:

Figura 62 - Representação de uma pirâmide e alguns elementos



Fonte: Markowsky, G.

Ao analisar matematicamente a figura acima, percebe-se que a razão entre a altura inclinada de uma das faces (s) e a metade do comprimento da base (b) é equivalente a *phi* (Φ). Demonstra-se, a partir da igualdade entre a área de uma das faces e a área de um quadrado, cujo lado é igual h (altura), a implicação em $h^2 = sb$. Pelo Teorema de Pitágoras, $h^2 + b^2 = s^2$.

Ao adotar-se um r (razão) tal que $r = s/b$. Dividindo ambas as equações por b^2 e substituindo os resultados em função de r, temos que $(h/b)^2 = r$ e $(h/b)^2 + 1 = r^2$. Uma nova substituição na primeira equação, agora trazendo o termo idêntico da segunda, obtém-se que $r^2 - r - 1 = 0$, equação essa que já estudamos inúmeras vezes nesse trabalho e, ao ser resolvida, possui como única raiz positiva *phi* (Φ).

O malabarismo matemático usado para encontrar a DMER na pirâmide foi suficiente para viralizar a tese, que, relembrando, surgiu de uma extravagância de Taylor. Herz-Fischler (1987) denominou a situação como "uma das mais engenhosas prestidigitações da história científica", já que, desde então, repete-se incessantemente a falsa teoria.

Logo após a publicação do livro *The Great Pyramide, Why Was It Was Built and Who Built It?*, o Astrônomo Real da Escócia e professor de astronomia da Universidade de Edimburgo, Charles Piazzi Smyth (1819 - 1900), inspirado pela obra, saiu em expedição rumo à Pirâmide de Queóps, encorajado a obter medidas detalhadas para compor uma publicação própria.

Assim como Taylor, Smyth acreditava religiosamente no toque divino que os britânicos possuíam. Ambos acreditavam que a unidade de medida conhecida como polegada inglesa era divinamente inspirada, e que, teoricamente, teria sido empregada na construção da Grande Pirâmide como uma manifestação de Deus no projeto. Taylor via esse caráter sagrado da unidade como o diferencial místico que conferia a presença de razões especiais como a áurea. Devemos lembrar de Pacioli e a denominação *divina proporção*.

Em sua expedição, Smyth utiliza um método de medição semelhante ao de Taylor, mas termina encontrando razões entre as medidas da pirâmide bem próximas ao valor de pi, afastando-o um pouco da seção áurea.

Markowsky (1992) também se debruçou nos falsos vínculos a prédios famosos. Sobre a Pirâmide de Queóps ele escreve:

> A versão distorcida da história de Heródoto faz pouco sentido. Mesmo os autores que o citam não dão uma razão pela qual os egípcios iriam querer construir uma pirâmide de modo que sua altura fosse o lado de um quadrado cuja área é exatamente a área de uma das faces. Essa ideia soa como algo inventado para justificar uma coincidência em vez de uma descrição realista de como as dimensões da Grande Pirâmide foram escolhidas. Não parece que os egípcios sequer soubessem da existência ou muito menos a incorporaram em seus edifícios. (Misconceptions about the Golden Ratio. Markowsky, George. College Mathematics Journal, v23 n1 p.7 Jan 1992)

Portanto, não há qualquer base científica ou mesmo histórica tangível que sustente o argumento da associação entre a DMER e a Pirâmide de Queóps, desconstruindo o mito envolvendo essa relação.

4.1.3. Retângulo áureo é esteticamente o mais agradável

É bastante comum encontrar nas literaturas que tratam da DMER a afirmação de que a proporção áurea é a mais harmoniosa e esteticamente agradável entre todas as proporções. Essas afirmações são frequentemente respaldadas por meio de inúmeras imagens que incluem estrategicamente o retângulo áureo. No entanto, é importante apresentar que a esmagadora maioria dessas imagens é manipulada para causar essa impressão.

Figura já destrinchada anteriormente nesta dissertação, o retângulo áureo é o principal ator das falácias existentes nesse contexto estético, uma vez que é "encaixado" esdruxulamente nas imagens em que se deseja associar à razão áurea, ignorando completamente critérios adequados nas marcações de suas bordas e limites.

Figura 63 - Retângulo áureo sobreposto a uma motocicleta

Fonte: Domínio Público

Um exemplo atual que reflete o apresentado no parágrafo anterior é o caso dos cartões de crédito ou débito. É comumente divulgado que o formato do cartão segue os moldes do retângulo áureo, justamente sob a alegação de proporcionar uma visão harmônica e atraente do objeto. Entretanto, as medidas reais dos cartões não estão em proporção áurea, e isso é previsto pela Organização Internacional para Padronização – ISO (International Organization for Standartdization), através de uma de suas normas, a ISO 7810. Seguindo a norma, as medidas padronizadas dos cartões são 85,60 mm por 53,98 mm, o que representa uma razão de 1,58577, aproximadamente, entre elas, consideravelmente diferente do valor de fi, 1,618.

Se houvesse verdadeiramente a intenção de produzir cartões nos moldes de *phi* (Φ), a indústria e suas máquinas avançadas não teriam problema em confeccioná-los. Por conseguinte, não há qualquer compatibilidade entre cartões de crédito e DMER.

É fundamental explorar o ponto de partida desta teoria, e George Markowsky, ph.D. em Matemática pela Universidade de Harvard e professor da Universidade de Maine, parece tê-lo encontrado. Em seu artigo *Misconceptions about the Golden Ratio* (Equívocos acerca da razão áurea), Markowsky apresenta uma pesquisa realizada em 1860 por Gustav Theodor Fechner (1801 – 1887), filósofo alemão e considerado pai da Psicometria, área da psicologia que utiliza matemática e estatística.

Nessa pesquisa, Fechner solicita aos participantes que escolham um entre vários retângulos de diferentes proporções, objetivando encontrar o mais agradável aos seus olhos. Os resultados revelaram que os retângulos com proporções muito próximas ao valor de *phi* (Φ) foram os mais citados, levando à conclusão de que o retângulo áureo era o visualmente mais harmonioso.

> O procedimento de Fechner consistia em colocar 10 retângulos diante de um sujeito e pedir-lhe para selecionar o retângulo mais agradável. Os retângulos variavam em suas proporções altura/comprimento de 1,00 (quadrado) a 0,40.... O retangulo modal tinha uma relação altura/comprimento de 2, ou seja, a seção áurea, com 76% de todas as escolhas centradas em três retângulos tendo as proporções 0.57, 0.62 e 0.67. Embora todos os outros retângulos tenham recebido menos de 10% das escolhas cada, os resultados de Fechner ainda indicaram que muitos outros retângulos além do retângulo de seção áurea foram considerados os mais agradáveis por um número razoável de sujeitos. (Misconceptions about the Golden Ratio. Markowsky, George. College Mathematics Journal, v23 n1 p.13 Jan 1992)

Embora o teste de Fechner tenha sido constantemente citado como prova cabal em favor da teoria relacionada ao retângulo áureo, Markowsky contesta essa versão. De fato, o teste continha limitações. Inicialmente, a quantidade de figuras foi restringida (somente dez), e, além disso, a disposição das figuras pode ter desempenhando papel significativo nos resultados, pois teriam sido arranjadas em ordem crescente (ou decrescente) de proporção, direcionando os participante a selecionar os retângulos posicionados mais ao centro, gerando uma seleção óbvia.

Livio (2006) também cita a metodologia usada por Fechner:

> A experiência era bastante simples: dez retângulos foram colocados em frente a um indivíduo, a quem se pedia que escolhesse o mais agradável e o menos agradável. Os retângulos variavam no quociente entre comprimento e largura de um quadrado (uma razão de 1,00) até um retângulo alongado (uma razão de 2,5). Três dos retângulos eram mais alongados que o Retângulo Áureo, e seis eram mais próximos de um quadrado. Segundo a descrição feita pelo próprio Fechner do ambiente da experiência, os voluntários frequentemente esperavam e hesitavam, rejeitando um retângulo após outro. Enquanto isso, o responsável pela experiência explicaria que eles deveriam escolher cuidadosamente o retângulo mais agradável, harmônico e elegante. Na experiência de Fechner, 76% das escolhas se concentraram em três retângulos que tinham as razões 1,75, 1,62, 1,50, com o pico no Retângulo Áureo (1,62). Cada um dos outros retângulos foi escolhido por menos de 10% das pessoas. (Livio, Mario. Razão áurea (p. 221). Editora Record. Edição do Kindle.)

A apuração das respostas ainda revela outra informação relevante, como descrito na própria afirmação de Markowsky: houve uma quantidade aceitável de cidadãos entrevistados (24%) que não escolheu o retângulo áureo, ou mesmo os retângulos que possuíam uma proporção mais próxima a *phi* (Φ). É significativo esse dado, pois contradiz a ideia, defendida na literatura de Fechner, de que a atração pela proporção áurea seria uma característica inata e inconsciente aos seres humanos. Na realidade, a percepção de beleza e atração são características subjetivas e variáveis, inexistindo um padrão universal que agrade a 100% das pessoas.

Um outro teste semelhante ao de Fechner foi aplicado pelo próprio Markowsky, na tentativa de investigar mais a tese relacionada à preferência de retângulos. Nesse novo teste, havia 48 opções de retângulos, ou seja, uma quantidade bem superior aos 10 do teste de

Fechner. As razões entre os lados dos retângulos eram diversas, com os participantes passando por duas rodadas de escolha. Na primeira, com uma disposição aleatória das figuras, a escolha deveria ser que no retângulo que mais atraísse o participante. Na segunda, diante de uma apresentação em ordem crescente das proporções dos retângulos, o mesmo objetivo.

Os resultados do teste de Markowsky apresentaram diferenças importantes entre as duas rodadas, reforçando a hipótese supracitada de que no teste de Fechner poderia ter acontecido uma "manipulação" das escolhas, focadas nos retângulos mais centrais. Além disso, a apuração dos resultados mostrou que a razão mais selecionada foi 1,83, uma proporção suficientemente distante de *phi* (Φ), rebatendo a teoria de Fechner.

É interessante registrar que o maior interesse em encontrar um retângulo contendo uma harmonia perfeita se origina na psicologia, em vez da matemática. Provavelmente por estar ligada ao subconsciente, padronizar uma característica geométrica que agrade a maioria acabou lançando outros pesquisadores a elaborar testes semelhantes ao de Markowsky.

Um dos mais intrigantes foi produzido pelo psicólogo canadense Michael Godkewitsch. Em 1974, atuando como professor da Universidade de Toronto, publicou o artigo "*The 'Golden Section': An Artifact of Stimulus Range and Measure of Preference*" (A "Seção Dourada": Um Artefato de Estímulo e Medida de Preferência), apresentando os resultados de uma pesquisa realizada com retângulos divididos em três faixas, posicionando o retângulo áureo estrategicamente para uma escolha mais chamativa. Nem mesmo assim o retângulo áureo configurou como escolha primária da maioria, sendo, na verdade, uma escolha intermediária, selecionado como segunda ou terceira opção pela maioria dos entrevistados. Ele conclui a pesquisa da seguinte forma:

> A conclusão é que a preferência pela seção áurea é um artefato de sua posição na gama de estímulos apresentados e das medidas de preferência, e não de qualquer qualidade estética intrínseca. (Godkewitsch, M., "The 'Golden Section': An Artifact of Stimulus Range and Measure of Preference", American Journal of Psychology, 1974)

4.1.4. A origem da utilização da letra *phi* (Φ)

Ora, se expusemos que o Partenon fora erguido sem qualquer relação fundamentada com a razão áurea, é natural que surja a indagação: como, então, podemos utilizar a letra grega *phi* (Φ), que, de acordo com as literaturas mais famosas, fora arranjada em homenagem a Phidias (Fídias), o escultor citado como responsável em adornar o templo?

Originalmente, a letra grega *tau* (τ) era (e ainda é, em alguns trabalhos) a utilizada para representar o número de ouro. Conforme registra Livio (2006), "Na literatura matemática profissional, o símbolo habitual para a Razão Áurea é a letra grega *tau* (τ, do grego τομή, to-mĭ, que significa "o corte" ou "a seção")".

A adoção de Φ vinculada à seção áurea parece ter sido idealizada pelo engenheiro, inventor e matemático estadunidense, James Mark McGinnis Barr (1877 - 1950). Pelo menos, isso foi inicialmente documentado pelo jornalista inglês Theodore Andrea Cook (1867 - 1928).

De gosto bastante eclético, T. Cook publicara sobre uma ampla gama de tópicos, indo desde castelos franceses até esportes olímpicos, inclusive explorando uma eventual conexão entre Leonardo Da Vinci e um projeto arquitetônico francês. Em relação ao terreno temático, uma parte específica de seu tempo foi dedicado a pesquisas envolvendo espirais (entre elas, a áurea), e suas possíveis relações com a natureza e a arte.

A primeira publicação de T. Cook com referência a espirais foi publicada em 1903, sob o título de *Spirals in Nature and Art* (Espirais na Natureza e na Arte). Nesse trabalho, a espiral áurea não é citada. O estudo sobre a seção áurea e sua respectiva espiral viria a estar presente no livro *The Curves of Life* (As Curvas da Vida), lançado em 1914. Uma significativa expansão da pesquisa publicada na primeira publicação foi apresentada, marcada pela inclusão de citações trazidas por pesquisadores sobre o assunto. Entre eles, Mark Barr.

> The Formula for Growth now suggested in this book is here called the Φ spiral, or Spiral of Pheidias, a new mathematical conception worked out from an ancient principle by Mr. Mark Barr and Mr. Willian Schooling. (A fórmula para o crescimento agora sugerida neste livro é aqui chamada de espiral, ou Espiral de Fídias, uma nova concepção matemática desenvolvida a partir de um princípio antigo do Sr. Mark Barr e do Sr. Willian Schooling) (Cook, T. A. The Curves of Life. prefácio, p. ix. Londres, 1914.)

A citada "Fórmula do Crescimento", na verdade é uma padronização da razão áurea encontrada em algumas manifestações da filotaxia, cuja relação será abordada mais à frente. T. Cook adota a letra grega Φ como notação para seção áurea, além de intitulá-la como *Espiral de Phideas*, seguindo o que denomina como *novo conceito matemático de Mark Barr e Willian Schooling*.

É discutido pelas literaturas relacionadas que os detalhes dessa intitulação foram apresentados a Cook pelo outro personagem presente na citação, Willian Schooling (1860 - 1936). O próprio Cook faz alusão a Schooling em relação a essa apresentação.

> I received a letter from Mr. William Schooling pointing out that if, in a geometrical progression, the sum of any two terms equals the next term, the values of the ratio are $(1 + \sqrt{5})/2 = 1{,}61803398875$ (nearly) : or $(1 - \sqrt{5}) /2 = - 0{,}61803398875$ (nearly). (Cook, T. A. The Curves of Life. p. 419. Londres, 1914.)

Destaca-se ainda que o entendimento de Schooling acerca da razão áurea já incorporava traços mais modernos, além dos tradicionais puramente geométricos.

> Um outro contributo na exploração das propriedades da secção áurea importante de referenciar será o de William Schooling. O seu trabalho é incorporado na obra publicada em 1914 de Theodore Cook (...) O factor mais relevante do contributo de Schooling reside precisamente no facto de não se olhar apenas para a secção de ouro como uma construção geométrica isolada ou como uma relação independente de entidades baseada em φ, para se passar a encarar uma progressão geométrica contínua. (Gomes, V. Sistemas Proporcionais como metodologia de sistematização projectual. Dissertação de Mestrado Integrado em Arquitectura. Faculdade de Arquitectura da Universidade do Porto, 2011/2012)

Retomando a teoria da homenagem de Barr a Phidias, um artigo de sua autoria, publicado em 1929, e intitulado *Parameters of Beauty* (Parâmetros de Beleza), revela que a retórica difundida em relação à adoção da notação em homenagem a Phidias era, na verdade, irreal. Barr (1929) expressa sua crença de que Phidias ou qualquer outro escultor e arquiteto presente na construção e decoração do Partenon tenha utilizado a razão áurea. Portanto, surge a questão de vincular *phi* (Φ) à DMER; alguns autores relatam que Barr teria a intenção de dar um reconhecimento sonoro ao número de ouro de modo semelhante ao de pi.

Fica, assim, desmistificada a história da utilização de Φ como uma homenagem a Phidias, escultor principal do Partenon.

4.1.5. <u>A concha do *Nautillus*</u>

Outra imagem frequentemente reproduzida entre os apreciadores da razão áurea é a concha que envolve o molusco marinho conhecido como *Nautillus,* enquadrada em um retângulo de ouro. A beleza da concha e seu formato espiral atraiu a atenção de inúmeros analistas, os quais sugerem que a espiral da concha está alinhada à espiral áurea.

Huntley (1985) é um dos autores que estabelece essa conexão entre a concha e a DMER por meio da espiral áurea:

> A propriedade matemática fundamental da espiral equiangular (ou logarítmica) corresponde exatamente ao princípio biológico que governa o crescimento da concha do molusco (...) A única curva matemática que acompanha esse padrão de crescimento é a espiral logarítmica. Bernoulli a descreveu como *spira mirabilis*. (Huntley, H. E. A divina proporção: Um ensaio sobre a Beleza na Matemática. Tradução: Luis Carlos Ascêncio Nunes. p. 164 -165. Ed. Universidade Brasília. 1985)

Até mesmo Livio (2006) endossa a comparação como válida: *o crescimento das conchas espirais também obedece a um padrão que é orientado pela Razão Áurea*.

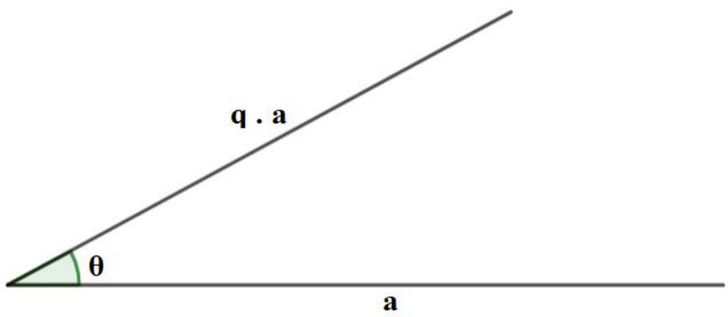
Entretanto, análises geométricas comprometidas em estabelecer a realidade sobre a espiral da concha do *Nautillus* refutam veementemente esta tese.

Antes de adentrar às especificidades dessa teoria, faremos um apanhamento das propriedades gerais de uma espiral logarítmica.

As espirais logarítmicas, de uma forma geral, iniciam a partir de um ponto central. Segmentos de reta, denominados raios (r), irradiam desse ponto de acordo com um ângulo predefinido. Os pontos de encontro entre esses raios com a espiral, interligados ao centro, desencadeiam em uma série de triângulos semelhantes, respeitada uma razão (q) constante entre as figuras.

Seja a a medida do maior raio de uma espiral logarítmica, a razão q deve estar no intervalo]0, 1[para que o critério de proporcionalidade seja coerente.

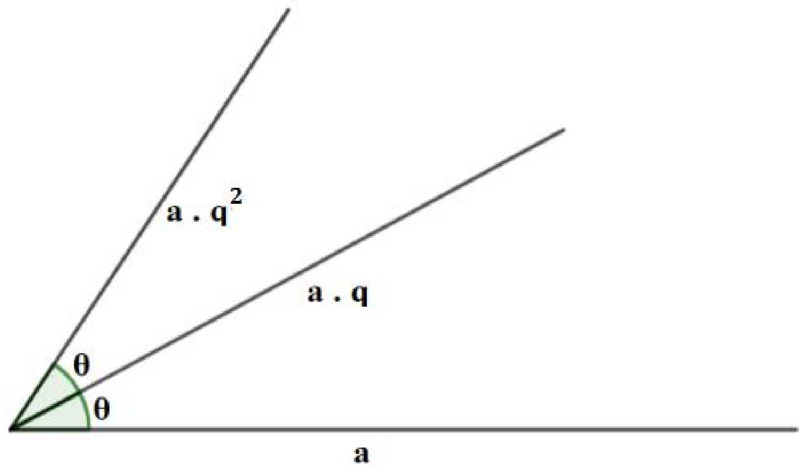
Figura 64 - Construção de uma espiral logarítmica (Parte 1)



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Repetindo o mesmo procedimento, traça-se mais um raio, mantendo a proporcionalidade e o ângulo θ.

Figura 65 - Construção de uma espiral logarítmica (Parte 2)

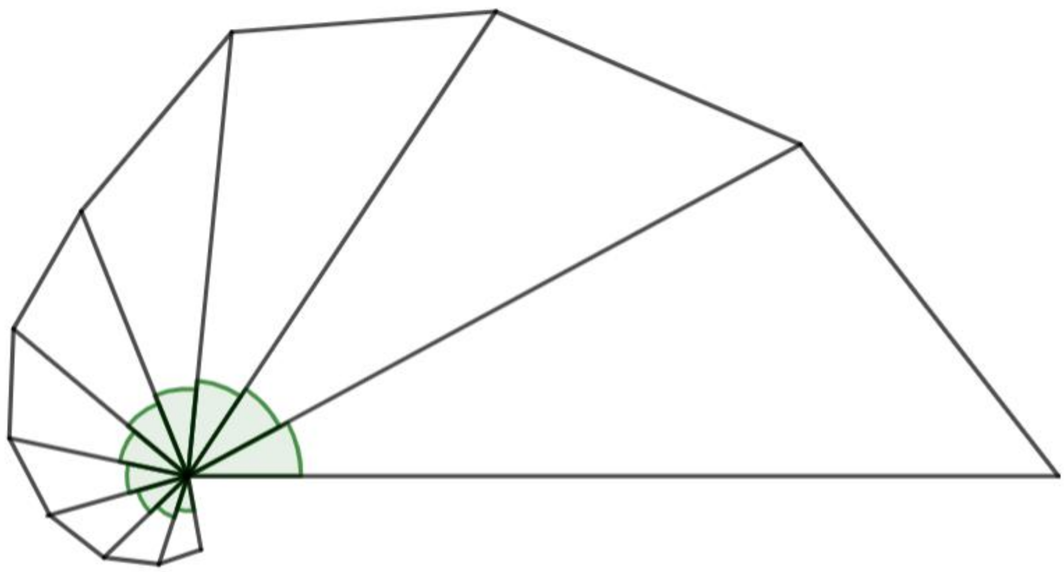


Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

E, seguindo o rito ininterruptamente, temos que o n-ésimo raio traçado equivale a

$$r_n = a.q^n$$

Figura 66 - Construção de uma espiral logarítmica (Parte 3)



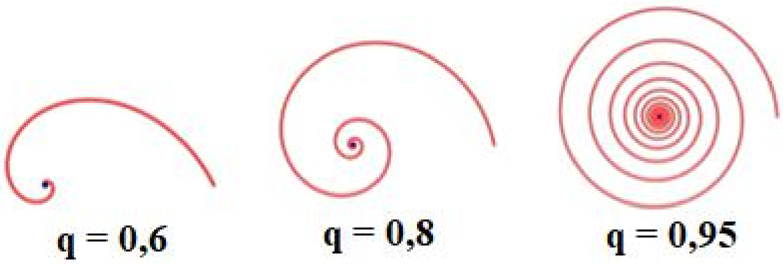
Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o programa Geogebra Online

Reescrevendo a fórmula obtida por meio da recorrência para a formação de raios em um sistema de coordenadas polares, temos:

$$r(\theta) = a.q^{\theta}$$

De acordo com essa fórmula, a espiral assume formatos distintos em função de q, uma vez que os valores de a e θ são constantes.

Figura 67 - Espirais logarítmicas de raios distintos



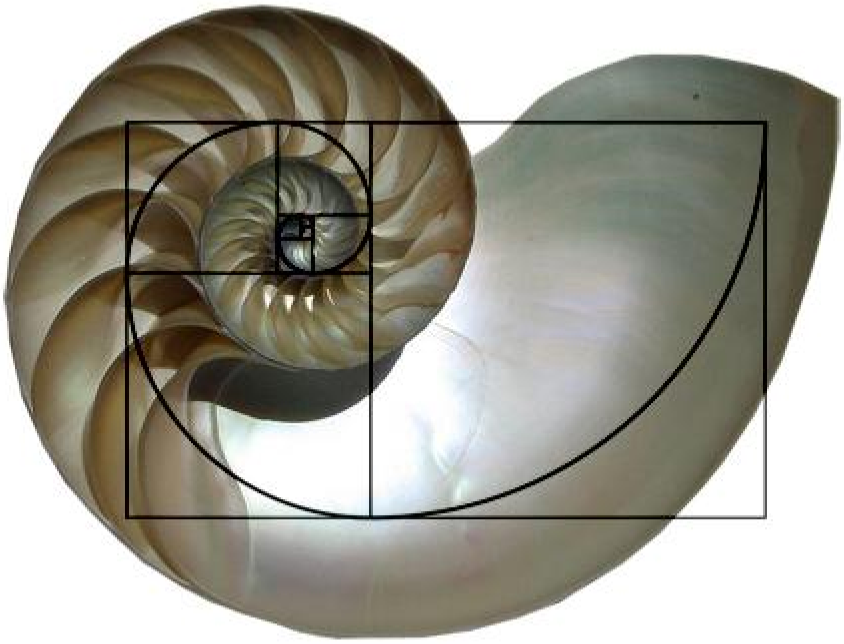
Fonte: Spira, M. A espiral logarítmica e o logo da SBM.

A espiral de Fibonacci possui uma razão q equivalente a $1/\Phi$, e seus respectivos raios são espaçados por $\pi/2\ rad$, conforme ilustrado na Figura 25.

Em relação à concha do *Nautillus*, o crescimento em forma de uma espiral logarítmica se justifica biologicamente para adaptação à forma do animal, característica peculiar da evolução da espécie. Ao averiguar a razão e o espaçamento do raio que compõem sua respectiva espiral, os resultados se distanciam significativamente dos valores da espiral áurea, tanto diametralmente quanto no espaço angular entre os raios.

Analisando diferentes animais da espécie, precisa-se levar em consideração que a variabilidade natural de tamanhos é comum entre quaisquer seres, tornado impossível estabelecer um único padrão de raio e espaçamento. Entretanto, não se encontra um único *Nautillus* cuja concha se sobrepõe a uma espiral áurea. A Figura 68 ilustra uma sobreposição das respectivas espirais.

Figura 68 - Retângulo áureo sobreposto à concha do Nautillus



FONTE: https://aledesigner.com.br/os-mitos-da-proporcao-aurea/

Apresenta-se, assim, os argumentos para refutar a teoria que relaciona a DMER e o *Nautillus*.

4.2. Verdades

A partir do momento que rechaçamos algumas das interpretações equivocadas da razão áurea, chegamos à análise onde ela verdadeiramente se manifesta.

4.2.1. <u>Na natureza</u>

A natureza apresenta algumas formas que exibem a DMER, seja através de figuras correlacionadas à proporção, seja através da sequência de Fibonacci.

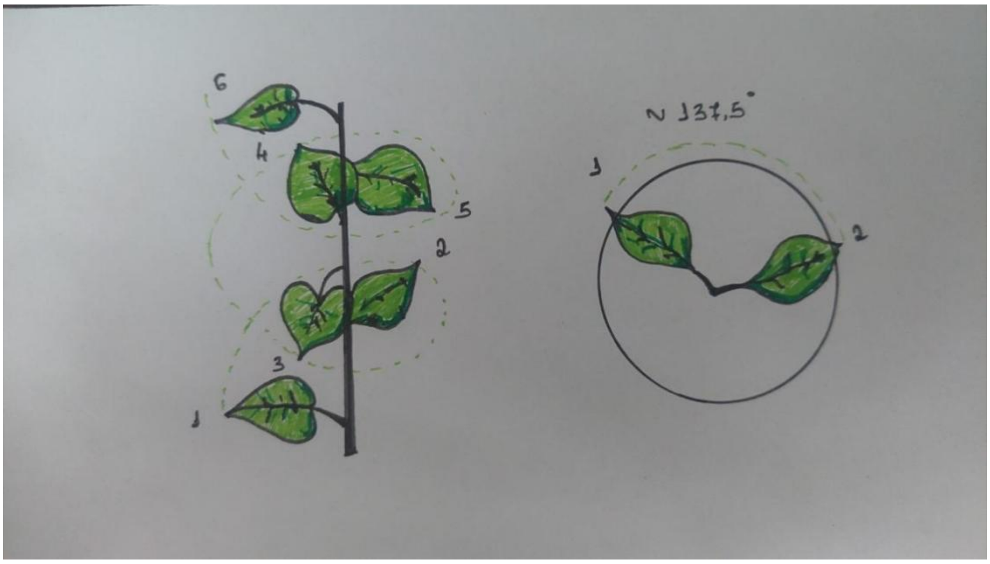
O primeiro exemplo a ser apresentado é a filotaxia. Originada do grego *phyllotaxis* ("arranjo de folhas"), a filotaxia investiga o crescimento e a disposição das folhas de plantas ao longo dos ramos e caules. Não existe uma exatidão nas amostras analisadas, mas, de fato, um certo padrão.

As folhas precisam ser organizadas de forma a garantir a maximização da exposição solar, bem como o alcance à água e ao ar, essenciais para seu desenvolvimento. Para isso, é essencial que haja espaçamento entre elas, conhecido pelos botânicos como ângulo de divergência.

A filotaxia, a partir de um ponto de vista matemático, teve como marco de discussões os comentários de Da Vinci e Kepler (LIVIO, 2006). Mais recentemente, no século XIX, algumas obras específicas começaram a ser publicadas na Europa. Entre elas está *Ensaio sobre o arranjo de folhas curvas* (1837), dos irmãos Bravais, Auguste (1811 - 1863) e Louis François (1801 - 1843), na qual há a observância de que a razão filotáxica em algumas espécies segue a presença de fibonaccis de maneira uniformizada.

Ao analisar o ângulo de divergência de certo grupo de plantas, também observamos alguma regularidade do valor 137,5°. Esse ângulo, como visto no Capítulo 1, é chamado de ângulo áureo, e sua presença na filotaxia é uma das manifestações curiosas da DMER na natureza.

Figura 69 - Demonstração do ângulo divergente áureo na filotaxia



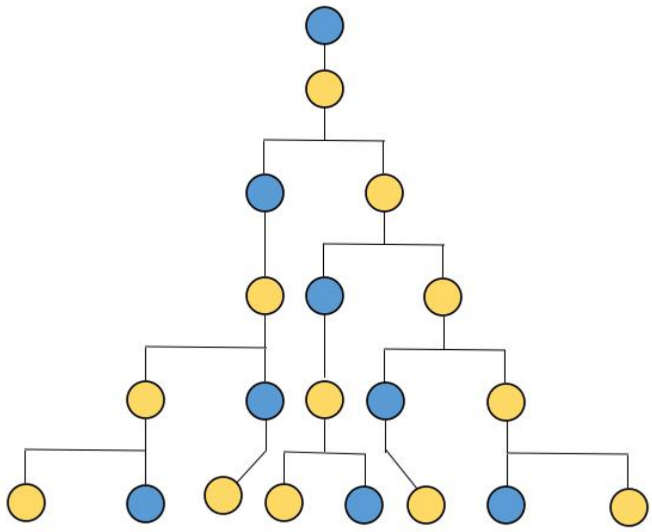
Fonte: desenho feito a mão pelo autor

Outra questão na relação bastante comentada entre a sequência de Fibonacci e a natureza reside na árvore genealógica de um zangão. Biologicamente, um zangão não pode ser gerado de um ovo fertilizado por outro zangão, mas sim de um ovo não fertilizado colocado por uma abelha operária. Ou seja, ele não possui um "pai".

Já uma abelha operária é gerada justamente pela fertilização de um zangão em um ovo colocado pela abelha rainha. Dessa forma, uma abelha possui um "pai" e uma "mãe".

Analisando, então, a árvore genealógica de um zangão (bolinhas azuis representando o zangão e amarelas, abelhas):

Figura 70 - Árvore genealógica do zangão



FONTE: Elaborada pelo autor no Microsoft Word

Observando atentamente o número de indivíduos em cada geração do zangão, notamos a equivalência com a sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...), e, de uma maneira similar à apresentação do problema dos coelhos por Fibonacci. Dessa maneira, fica identificada outra presença do número de ouro na natureza.

Alguns autores buscam vincular particularidades de alguns tipos de flores aos números de Fibonacci. Porém, podemos afirmar que há uma euforia generalizada em muitos desses estudos. Por exemplo, é bastante repetido que a quantidade de pétalas em uma margarida está sempre relacionada a um fibonacci, sendo o 34 o mais citado. Mas qual espécie de margarida é analisada para se chegar à conclusão? É importante destacar que existem mais de 20 mil espécies diferentes de margaridas, algumas com características bem distintas entre si.

Assim, a atribuição do número 34, ou qualquer outro, às pétalas da margarida para ser uma constatação equivocada ou imprecisa.

Já o girassol realmente parece seguir um padrão na disposição de suas sementes. Apresentando formatos em espirais, tanto em sentido horário, quanto anti-horário, essas sementes são usualmente contabilizadas em conformidade com dois fibonaccis sequenciais. Se uma das espirais em determinado sentido contém 34 sementes, a outra pode conter 21 ou 55, números que, como já discutimos, são pertencentes à sequência. De acordo com Livio (2006), há a relatos de observação em alguns exemplares de girassol com 89 e 55 sementes em suas espirais, e até mesmo 144 e 89.

Como seres vivos apresentam diversas características próprias, mesmo pertencentes a uma mesma espécie, a discussão de uma padronização numérica entre essas peculiaridades acaba sendo abstrata.

4.2.2. Na arte: *O Sacramento da Última Ceia*

Entre todas as teorias conspiratórias envolvendo obras de arte e a respectiva presença da proporção áurea, torna-se reticente a crença da utilização verdadeira da proporção em algumas delas. Contudo, há artistas que realmente utilizaram a DMER de modo deliberado em suas obras, e objetivo do infracitado será apresentar a mais famosa delas.

Salvador Dalí (1904 - 1989) foi um renomado pintor surrealista do século XX, conhecido também por sua ampla produção artística que abrangia não somente quadros: mas também esculturas, roteiros de filmes e até mesmo poesia. Entre essas obras, destacaremos para o tema, a pintura “O Sacramento da Santa Ceia”, de 1955.

Figura 71 - O Sacramento da Última Ceia, de Salvador Dalí

Fonte: National Gallery of Art, Washington D.C. The Sacrament of Last Supper, 1955. Disponível em https://www.nga.gov/collection/art-object-page.46590.html

Dalí teve uma relação alternante com a religiosidade ao longo de sua vida. É relatado que, em sua juventude, concentrou-se numa arte mais inclinada ao racionalismo, ou seja, sem traços religiosos. Ao observar os devastadores efeitos da Guerra Civil Espanhola e, posteriormente, da Segunda Guerra Mundial, decide se aproximar de uma fase mais espiritualizada.

Além disso, é influenciado por artistas renascentistas, e naturalmente, entra em contato com o pitagorismo. O quadro "O Sacramento da Santa Ceia" é, justamente, uma referência a outra obra, "A Santa Ceia", de Da Vinci, incorporando também o simbolismo místico da antiga geometria grega. A descrição e a história do quadro são fornecidas pela página oficial da Galeria Nacional de Arte de Washington D.C. (National Galley of Art - Washington D.C.), onde a pintura se encontra em exposição desde 1956.

> A Alta Renascença italiana do início de 1500 foi outra fonte importante do novo classicismo de Dalí. Tal como na apresentação harmoniosa dos esquemas renascentistas, a composição de Dalí está claramente dividida: acção em primeiro plano e cenário de fundo. A disposição dos homens ao redor da mesa é simétrica, a mesma figura repetida em perfeita imagem espelhada em ambos os lados de Cristo. Além disso, todo o quadro de quase três metros de comprimento é construído de acordo com proporções matemáticas complexas elaboradas por cientistas da Renascença e por filósofos gregos antigos como Pitágoras. (National Gallery of Art, Washington D.C. The Sacrament of Last Supper, 1955. Disponível em: https://www.nga.gov/collection/art-object-page.46590.html)

Dando destaque à descrição do quadro, “O Sacramento da Santa Ceia” revela um salão com características mais modernas em comparação com os eventos de 2000 anos atrás, incluindo elementos como aparentes vitrais e uma paisagem ao fundo (de acordo com Galeria Nacional de Arte de Washington D.C., essa paisagem seria a vista da casa de Dalí). No quadro, Jesus de Nazaré ocupa uma posição central à mesa, com seus discípulos distribuídos simetricamente ao longo das laterais em relação a sua figura. Dalí os retrata com cabeças baixas, apenas com o rosto de Jesus visível, enquanto aponta para o alto, onde se destaca uma figura com peito à mostra e braços abertos, fazendo alusão ao Divino.

O formado do salão claramente é um dodecaedro, e o simbolismo associado ao número doze não se limita nesse detalhe, como explica o próprio Dalí, em um registro também presente na página da Galeria Nacional de Arte:

> Queria materializar o máximo da instantaneidade luminosa e pitagórica a partir da comunhão celeste do número doze: doze horas do dia - doze meses do ano - os doze pentágonos do dodecaedro - doze signos do zodíaco em torno do sol - o doze apóstolos ao redor de Cristo. (National Gallery of Art, Washington D.C. The Sacrament of Last Supper, 1955. Disponível em: https://www.nga.gov/collection/art-object-page.46590.html)

Além das referências à DMER em vista das presenças do dodecaedro e da simetria geométrica, as dimensões do quadro, que medem 268 cm por 167 cm, quando colocadas em razão, resultam em um valor aproximado de 1,61, próximas o suficiente de *phi* (Φ) para excluir qualquer possibilidade de coincidência. Existem outras menções à DMER defendidas por alguns autores, porém, a maioria dentro de um ponto de vista mais próximo ao mítico. E pode-se facilmente dispensá-los, já que a pintura, em si, é uma demonstração explícita da razão áurea no campo das artes.

4.2.3. Na arquitetura

Reconhecido como um dos arquitetos modernistas mais importante do século XX, Charles Edouard Jeanneret-Gris (1887 - 1965), conhecido sob o pseudônimo Le Corbusier, foi um dos pioneiros em adotar um sistema matemático baseado na proporção em projetos arquitetônicos.

> Le Corbusier é um dos raros arquitetos, não só do século XX, mas de toda a História da Arquitetura, que propôs uma teoria de proporções e forneceu descrições de como foram aplicadas em seus projetos. Mais ainda, pretendeu e propôs que sua teoria fosse utilizada por outros. Seus desenhos e projetos são, por esta razão, um fértil terreno para o estudo da Geometria na sua conexão com a Arquitetura. (Possebon, E.

O Modulor de Le Corbusier: Forma, Proporção e Medida na Arquitetura. p. 68, 2004)

Além de arquiteto, atuou como urbanista e foi autor de esculturas e pinturas destacáveis. Nascido na Suíça mas naturalizado francês, Le Corbusier adota o pseudônimo aos 29 anos de idade (POSSEBON, 2004), já desfrutando de uma visibilidade internacional no campo da arquitetura como referência para construções modulares em larga escala.

Grande parte desse idealismo em relação aos módulos foi moldado pelo testemunho da destruição completa de cidades nas duas guerras mundiais, acarretando, posteriormente, em um custo altíssimo de reconstrução das residências locais. Dessa forma, os projetos comportariam mais pessoas com um custo menor, dando oportunidade às famílias mais pobres de possuir uma residência. Um exemplo de projeto com esse intuito foi a Unité D'habitation, construído em 1947 na cidade de Marselha, França.

Ainda em relação a sua biografia, há duas curiosidades: primeiro, em 1929 visita o Brasil, passando por Rio de Janeiro e São Paulo, retornando ao Rio em 1936. Nessas visitas, Le Corbusier apresenta suas ideias modernistas em conferências realizadas principalmente na Escola de Belas Artes, Rio de Janeiro. (ZAKIA, 2015)

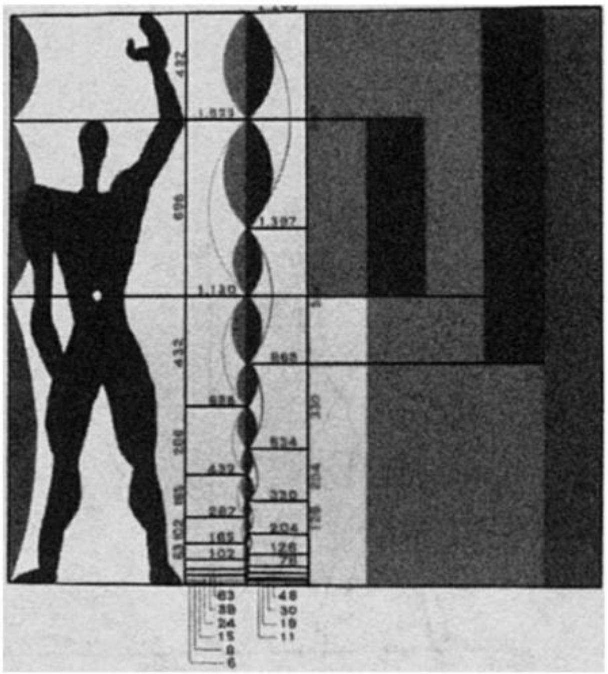
E a outra foi um encontro com Albert Einsten, no ano de 1946, onde lhe apresenta sua teoria de proporções aplicáveis à arquitetura, já com a Meia e Extrema Razão em foco (LIVIO, 2006).

Entre as proporções matemáticas aplicadas nos projetos de Le Corbusier, a DMER estava no núcleo desse estudo. Dois livros de alcance considerável são publicados, o Modulor 1, em 1948, e o Modulor 2, em 1953. A palavra Modulor é obtida pela junção de *Module* (Módulo) + *Section D'or* (Seção de Outro).

A ideia de Le Corbusier era desenvolver espaços adequados no interior desses módulos a homens que possuíam uma estatura média (1,82m, segundo sua própria pesquisa), elegendo "a proporção áurea como princípio estruturador do seu enredado de proporções". (POSSEBON, 2004).

Para encontrar essas medidas em harmonia com a DMER, Le Corbusier parte da figura do homem com um braço levantado, e a partir daí, estabelece divisões em sua cabeça e em seu umbigo, mantendo uma ideia semelhante ao Homem Vitruviano de Da Vinci (que não possui ligação com a DMER). Essa figura é apresentada em seus livros Modulor como um princípio fundamental para encontrar outras medidas arquitetônicas em seus projetos.

Figura 72 - Modulor



Fonte: Livio, M.

Entretanto, apesar das inúmeras tentativas de Le Corbusier em estabelecer a DMER como uma via estrutural na Arquitetura, nos cálculos expostos tanto no Modulor 1, quanto no 2, são encontrados equívocos, apontados por pares e outros analistas matemáticos. O esforço em corrigir essas falhas parecem ter desestimulado o autor ao longo do tempo.

> Com o passar dos anos o interesse se esmaeceu e o próprio Le Corbusier acabou pondo de lado sua obsessão inicial e o uso persistente e sistemático do sistema. E, desafortunadamente, também deixou de ser estudado com a profundidade que merece o que representou esse importante processo surgido dentro da obra de um dos mais representativos arquitetos do século XX. (Possebon, E. O Modulor de Le Corbusier: Forma, Proporção e Medida na Arquitetura. p. 74, 2004)

É inegável que os livros Modulor tenham representando mais uma importante fonte de visibilidade da Meia e Extrema Razão em áreas correlatas à matemática, sendo seu registro importante para a história da razão áurea no século XX.

REFERÊNCIAS

BERTATO, M. F. *De Divina Proportione: Tradução Anotada e Comentada*. 2008. 322 f. Tese (Doutorado em Filosofia) – Universidade de Campinas, Campinas, 2008

CARVALHO, J. B. P. *Revisitando uma velha conhecida*. II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Bahia, 2004.

CASSIRER, E. Tradução: O lugar de Kepler na história intelectual europeia. *Cadernos de Filosofia Alemã*, v.25, n.1. Universidade de São Paulo. 2020, São Paulo

DEVLIN, K. *Mathematics*. Nova York: Columbia University Press, 1999.

EUCLIDES. *Os Elementos*. Tradução: Irineu Bicudo. São Paulo: Editora da UNESP, 2009.

EVES, H. I*ntrodução à História da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª edição. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

LEÃO, A. F. *Euclides e a Incomensurabilidade: O Profundo tear das Abrangências - Os Sumos e Segredos do Livro X*. Tese (Doutorado). Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho", Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, 2017.

GLEISER, M. *A Harmonia do Mundo*. Ed. Cia. Das Letras. Edição do Kindle. 2006.

GOMES. C. R. *Pitágoras de Samos: de Místico a Precursor da Teoria dos Números.* V Bienal da SBM. Universidade Federal da Paraíba. 2010.

GOMES, V. *Sistemas Proporcionais como Metodologia de Sistematização Projectual* (Dissertação de Mestrado Integrado em Arquitectura). Faculdade de Arquitectura da Universidade do Porto, 2011/2012.

GODKEWITSCH, M. "The 'Golden Section': An Artifact of Stimulus Range and Measure of Preference". *American Journal of Psychology*, 1974.

HERZ-FISCHLER, R. *A Mathematical History of the Golden Number*. Dover Publications INC. Nova York, 1987.

HUNTLEY, H. E. *The Divine Proportion*. Nova York: Dover Publications, 1970.

IMBROISI, M.; MARTINS, S. *A Última Ceia, Salvador Dalí*. História das Artes, 2023. Disponível em: <https://www.historiadasartes.com/sala-dos-professores/a-ultima-ceia-salvador-dali/>. Acesso em 09 Oct 2023.

LIVIO, M. *Razão Áurea: A História de Fi, um Número Surpreendente*. Tradução: Marco Shinobu Matsumura. 7ª ed. Editora Record, 2015.

MARKOWSKY, G. *Misconceptions about the Golden Ratio*. College Mathematics Journal, v. 23, n. 1, 1992.

NATIONAL GALLERY OF ART, WASHINGTON DC. *The Sacrament of Last Supper, 1955*. Disponível em: <https://www.nga.gov/collection/art-object-page.46590.html>. Acesso em 09 Oct 2023.

PAPADOULOS. E. *Heron of Alexandria (c. 10 - 85 AD)*. Departament of Mechanical Enginnering, National Thecnical University of Athens. Atenas, 2007.

PLATÃO. *As Leis*. Livro V. Disponível em: <https://www.democracia.org.br/wp-content/uploads/2019/02/Plat%C3%A3o-As-Leis.pdf)>. Acesso em 07 jul 2023.

PLATÃO. *A República*. Tradução de Carlos Alberto Nunes. 3ª Ed. Belém: EDUFPA, 2000.

PLATÃO. *Timeu-Crítias*. Tradução do grego, introdução e notas: Rodolfo Lopes. 1ª Ed. Centro de Estudos Clássicos e Humanísticos, Faculdade de Letras, Universidade de Coimbra. Coimbra, 2011.

PLUTARCO. *Vidas Paralelas.* Disponível em: https://www.academia.edu/42823817/Plutarco_Vidas_Paralelas_Completo_em_portugu%C3%AAs_?email_work_card=view-paper.

POSSEBON E. O Modulor de Le Corbusier: Forma, Proporção e Medida na Arquitetura. *Revista Cult.: Revista do IMAE*. São Paulo, a.5, n. 11, p. 68-76, jan./jun. 2004

PRAXEDES, G.; PEDUZZI, L. Tycho Brahe e Kepler na Escola: Uma Contribuição à Inserção de Dois Artigos na Escola. *Revista Brasileira de Física*. N. 3. Setembro, 2009.

PROCLUS. *A Commentary on the First Fook of Euclid's Elements*. Translated with introduction and notes by Glenn R. Morrow. Princeton: Princeton University Press, 1970.

ROQUE, T. *História da Matemática: Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas*. Ed.Zahar, 2012.

SALINGAROS, N. *Applications of the Golden Mean to Architeture.* University of Texas, 2012.

SPIRA, M. A espiral logarítmica e o logo da SBM. *Revista Matemática Universitária*. Vol. 2, 2021.

STEWART, Ian. *Desbravadores da Matemática: Da Alavanca de Arquimedes aos Fractais de Mandelbrot*. Tradução: George Schlesinger. Editora Zahar. Edição do Kindle.

STRUIK. D. J. *História Concisa das Matemáticas*. Tradução: João Cosme Santos Pereira. 2ª Ed. Gradiva. Lisboa, Portugal, 1982.

ZAKIA, S. P. A Primeira Visita de Le Corbusier ao Brasil em 1929: Uma Chegada Acidentadíssima!. *Revista Arquiteturismo*, ano 09, 2015.

ZEISING, A. *Der Goldnen Schnitt*. Halle: Druck von E. Blochmann & Son in Dresden, 1884.

APÊNDICE - Origem da utilização do adjetivo áureo

Não há discordância de que a expressão mais famosa e usada para a Divisão em Meia e Extrema Razão seja “razão áurea”. Mesmo entre aqueles com formação em matemática, a DMER é uma termologia pouco conhecida, geralmente sendo citada somente no cerne da geometria euclidiana. Portanto, diante da importância do adjetivo “áureo” para este trabalho, dois questionamentos são levantados:

a. Quando e por quem foi registrado o uso do termo áureo para definir a DMER ?

b. Qual é a razão para atrelar a DMER ao adjetivo “áureo”?

Em relação à primeira indagação, as pesquisas mais relevantes não chegam a um consenso exato sobre a aparição do termo “áureo” e/ou “dourado”. Inclusive, essas pesquias indicam a existência de uma disparidade entre a criação do tempo e sua primeira aplicação publicada. Herz-Fischler (1987) reuniu vários desses estudos, trazendo uma análise minuciosa dos registros que abordam as primeiras publições em que a termologia é empregada.

De fato, não é conhecido um registro mais antigo para a expressão “seção áurea” do que a nota de rodapé da proposição 5, página 194, da 2ª edição do livro *Die reine Elementar-Mathematik*, publicado em 1834, do matemático alemão Martin Ohm (1792 – 1872). É importante destacar que Martin Ohm não deve ser confundido com seu irmão mais famoso, George Simon Ohm (1789 – 1854), conhecido por formular a inestimável Lei de Ohm, aplicada à eletricidade.

> Diese Zertheilung eine beliebigen Linie r in 2 solche Theile, nennt man wohl auch den goldenen Schnitt; auch sagt man in diesem Falle zuweilen: die Linie r werde in stetige Proportion getheilt (Tem-se o hábito de chamar essa divisão de uma linha arbitrária em duas partes de corte de ouro [ou “seção”]; às vezes também diz neste caso: a linha r é dividida em proporção contínua) (Ohm, M. 1938 apud Herz-Fischler, R. A Mathematical History of the Golden Number (Tradução Própria). p.168. Dover Publications, INC. New York, 1987)

Presente na nota de rodapé, “*goldenen Schnitt”* foi o batismo oficial da expressão “seção áurea”. A tradução da nota ainda indica que havia o costume de se atribuir o adjetivo “áureo” à seção, dando a entender que Martin Ohm provavelmente não foi o autor original da expressão. Levando em consideração que a expressão só foi usada na 2ª edição, publicada em 1835, há um hiato temporal longo em relação à primeira, de 1822, levantando a suspeita de que a expressão tenha se popularizado durante esse intervalo de 13 anos entre as edições.

A pesquisa de Herz-Fischler (1987) também corrobora que o adjetivo “áureo” circulou inicialmente na Alemanha. Além disso, ela traz transcrições detalhadas de obras posteriores a de Ohm e que utilizam o adjetivo "áureo", todas no círculo matemático alemão. Destas, a primeira ocorrência em títulos é encontrada em *Der Goldene Schnitt in der Natur* ("A Seção Áurea na Natureza"), do filósofo e psicólogo Ernst F. F. Zeising (1819 – 1866). Foi Zeising quem deu início à era de interpretações equivocadas da DMER na arte e arquitetura. Apesar dessas concepções equivocadas, o livro de Zeising conferiu grande visibilidade à DMER, resultando em uma série de pesquisas que são objetos de discussões ainda hoje.

No que diz respeito ao segundo questionamento mencionado acima, a razão pela qual o adjetivo áureo (ou dourado) foi escolhido para descrever a DMER, não é uma questão pacificada. Herz-Fischler (1987) realiza um levantamento das aparições do termo "dourado" em aplicações matemáticas e acaba se deparando inicialmente com um vínculo entre o adjetivo e a regra de três.

> A chamada "regra de três" para resolver problemas de proporção da forma a: b = x: c (ver Sanford [1927, 17]; Smith [1923, II, 483]) era frequentemente chamada de "regra de ouro". O primeiro uso deste termo parece ser de Johann Boschensteyn em 1514; (Herz-Fischler, R. A Mathematical History of the Golden Number (Tradução Própria). p.169. Dover Publications, INC. New York, 1987)

Outras presenças das palavras "áurea" e "dourada" são enunciadas por Herz-Fishcler (1987), como nos calendários franceses impressos que continham o nome "nombre d'or" (número de ouro) para se referir ao ciclo usado na localização das datas da Páscoa; na obra *The Great Art*, publicada em 1545, por Cardano, onde intitula um de seus capítulos, "sobre a regra de ouro", tratando de soluções aproximadas para equações polinomiais; e ainda na chamada "lei fraca dos grandes números da teoria da probabilidade", elaborada por J. Bernoulli e rotulada como "teorema de ouro".

Apesar da verificação destrinchada acima, afirmamos que não foi possível identificar um trabalho que efetivamente explique o porquê da terminologia ter sido usado em referência a DMER, sendo possível afirmar somente que sua aparição mais antiga conhecida é em *Die reine Elementar-Mathematik*, onde foi gerado o costume de utilizá-la.