



Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul - UEMS
Câmpus de Dourados

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO
E INOVAÇÃO - PROPI

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL - PROFMAT



Estudo das Cônicas, Quádricas e suas Aplicações

Emerson de Lima Garcia

Orientador(a): Dr. Jaime Rezende de Moraes

Dourados, Abril – 2024



Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul - UEMS
Câmpus de Dourados

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO
E INOVAÇÃO - PROPI

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL - PROFMAT



Estudo das Cônicas, Quádricas e suas Aplicações

Emerson de Lima Garcia

Orientador(a): Dr. Jaime Rezende de Moraes

Trabalho, apresentado à Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Dourados, Abril – 2024

G198e Garcia, Emerson de Lima

Estudo das cônicas, quádricas e suas aplicações / Emerson de Lima Garcia. -
Dourados, MS: UEMS, 2024.

172 p.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Matemática em Rede Nacional -
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS), 2024.

Orientador: Prof.º Dr.º Jaime Rezende de Moraes

11. História das seções cônicas (matemática) 2. Cônicas e quádricas -
Aplicações 3. GeoGebra (software) - Aplicativo 4. Geometria analítica
(matemática). I. Moraes, Jaime Rezende de. II. Título.

CDD 23 ed. 516.244

Ata de Defesa de Dissertação
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional

Aos cinco dias do mês de abril do ano de dois mil e vinte e quatro, às quinze horas, na Sala 07 bloco G - piso superior - Unidade de Dourados, da Fundação Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, realizou-se a sessão de defesa de Dissertação, intitulada: "ESTUDO DAS CÔNICAS, QUÁDRICAS E SUAS APLICAÇÕES" de autoria do aluno: **EMERSON DE LIMA GARCIA**, CPF 034.372.632-77, sob a orientação de JAIME REZENDE DE MORAES do Programa de Pós-Graduação em Matemática, nível: Mestrado Profissional. Reuniu-se a Banca Examinadora composta pelos membros: JAIME REZENDE DE MORAES (**Presidente**), VANDO NARCISO e ANA CLÁUDIA MACHADO MENDONÇA (UFGD). Concluída a apresentação e arguição, os membros da Banca Examinadora emitiram parecer expresso conforme segue:

Aprovação

Aprovação com revisão

Reprovação

EXAMINADOR

Dr. JAIME REZENDE DE MORAES

Dr. VANDO NARCISO

Dra. ANA CLÁUDIA MACHADO MENDONÇA (UFGD)

ASSINATURA





participação por videoconferência

OBSERVAÇÕES:

Nada mais a ser tratado, o Presidente declarou a sessão encerrada e agradeceu a todos pela presença.

Assinaturas:



Presidente da Banca Examinadora



Aluno

Agradecimentos

Agradeço a Deus em primeiro lugar e a minha família pelo incentivo e em especial os meus pais, Deoclecio Rodrigues Garcia e Maria Dalvanete Sales de Lima por sempre me darem apoio. Agradeço também ao professor doutor Jaime Rezende de Moraes que foi meu orientador nesse estudo e aos professores que gentilmente aceitaram o convite para compor a banca avaliadora.

Resumo

Neste trabalho, buscamos investigar o contexto histórico da origem das seções cônicas e realizar um estudo analítico das mesmas, destacando as suas propriedades e aplicações. Exploramos também as superfícies quádricas, distinguindo entre quádricas centrais e não centrais. Além disso, examinamos as propriedades reflexivas das cônicas, estendendo essas análises às quádricas, com demonstrações correspondentes. Exploramos aplicações em áreas como astronomia, demonstrando, por exemplo, a natureza elíptica das órbitas dos corpos celestes e comparando-as com a órbita do cometa Halley para entender a excentricidade dessas trajetórias. Utilizamos predominantemente o software GeoGebra para criar as figuras, complementado por algumas representações específicas criadas com o CorelDRAW. Concluímos que a integração da tecnologia, especialmente o GeoGebra, desempenhou um papel crucial em nosso estudo, facilitando a compreensão e a visualização de conceitos abstratos. Essa abordagem tornou o aprendizado mais acessível e eficaz, evidenciando a importância da tecnologia como aliada no processo educacional.

Palavras-chave: Contextualização - História da Matemática - Cônicas e Quádricas - Aplicações - GeoGebra.

Abstract

In this work, we seek to investigate the historical context of the origin of conic sections and carry out analytical studies of them, highlighting their properties and applications. We also explore quadric surfaces, distinguishing between central and non-central quadrics. Furthermore, we examine the reflective properties of conics, extending these analyzes to quadrics, with corresponding proofs. We explore applications in areas such as astronomy, demonstrating, for example, the elliptical nature of the orbits of celestial bodies and comparing them with the orbit of Halley's comet to understand the eccentricity of these trajectories. We predominantly used GeoGebra software to create the figures, complemented by some specific representations created with CorelDRAW. We conclude that the integration of technology, especially GeoGebra, played a crucial role in our study, facilitating the understanding and visualization of abstract concepts. This approach made learning more accessible and effective, highlighting the importance of technology as an ally in the educational process.

Keywords: Contextualization - History of Mathematics - Conics and Quadrics - Applications - GeoGebra.

Sumário

Introdução	14
1 Estudo das Cônicas	25
1.1 Elipse	25
1.1.1 Elementos da elipse	27
1.1.2 Forma canônica da elipse	34
1.1.3 Rotação da elipse	38
1.1.4 Translação da elipse	40
1.2 Hipérbole	44
1.2.1 Elementos da hipérbole	46
1.2.2 Forma canônica da hipérbole	55
1.2.3 Rotação da hipérbole	61
1.2.4 Translação da hipérbole	63
1.3 Parábola	68
1.3.1 Elementos da parábola	70
1.3.2 Forma canônica da parábola	72
1.3.3 Translação da parábola	77
1.3.4 Equação da parábola na forma explícita	80
1.4 Equação geral do 2 ^o grau com duas variáveis	82
2 Estudo das Quádricas	88
2.1 Quádricas centrais	89
2.1.1 Elipsoide	92
2.1.2 Hiperboloide de uma folha	94
2.1.3 Hiperboloide de duas folhas	98
2.1.4 Cone elíptico	102
2.1.5 Cilindro elíptico	105
2.1.6 Cilindro hiperbólico	110
2.2 Quádricas não centrais	114

2.2.1	Paraboloide elíptico	120
2.2.2	Paraboloide hiperbólico	122
2.2.3	Cilindro parabólico	127
3	Aplicações	132
3.1	Propriedade refletora da elipse	134
3.2	Propriedade refletora da parábola	142
3.3	Propriedade refletora da hipérbole	148
3.4	Outras aplicações	156
3.4.1	Sistema de navegação hiperbólica	156
3.4.2	Movimento dos corpos celestes	160
3.4.3	Excentricidade da órbita dos corpos celestes	165
4	Considerações Finais	170
	Referências	172

Lista de Figuras

1	Tentativa da duplicação do cubo.	15
2	Construção do segmento x	16
3	Triângulo ADC , retângulo em D	17
4	Duplicação do cubo de aresta $a = 1$	18
5	Cônicas segundo Menaecmus.	20
6	Cônicas segundo Apolônio.	23
7	Origem dos nomes: elipse, parábola e hipérbole.	23
8	Relação de falta.	24
9	Relação de igualdade na parábola	25
10	Relação de excesso na hipérbole	26
11	Elipse	28
12	Eixo maior.	28
13	Eixo maior da elipse \mathcal{E}	29
14	Elipse \mathcal{E} com seus eixos maior e menor.	30
15	Excentricidade da elipse.	31
16	Simetria em relação a reta focal.	32
17	Simetria em relação ao centro	33
18	Simetria em relação a reta não focal.	34
19	Elipse com centro na origem e eixo maior na horizontal	35
20	rotação de um ponto $P = (x, y)$	39
21	Elipse com centro na origem e eixo maior na vertical	40
22	Translação da elipse cujo eixo maior está sobre o eixo das abcissas.	41
23	Translação da elipse cujo eixo maior está sobre o eixo das ordenadas.	43
24	Hipérbole obtida por dobradura	45
25	Hipérbole \mathcal{H}	45
26	Eixo real ou transverso	47
27	Eixo Imaginário.	49
28	Eixo Real e Eixo Imaginário	49

29	Hipérbole \mathcal{H} com seus eixos.	50
30	Assintotas da Hipérbole.	51
31	Abertura da Hipérbole \mathcal{H} para $e = 1.03$	52
32	Abertura da Hipérbole \mathcal{H} para $e = 3.9$	52
33	Hipérbole equilátera.	53
34	Simetria em relação a reta focal.	53
35	Simetria em relação a reta não focal.	54
36	Simetria em relação ao centro.	55
37	Hipérbole com eixo real sobre o eixo das abcissas.	56
38	Retângulo de base e assintotas da hipérbole.	59
39	hipérbole rotacionada em torno da origem.	62
40	hipérbole rotacionada em torno da origem.	64
41	Translação seguida de uma rotação, em torno de C' , de um ponto P	66
42	hipérbole com centro fora da origem e focos paralelos ao eixo das ordenadas.	68
43	Parábola obtida através de dobraduras.	69
44	Parábola.	70
45	Reta focal da parábola.	71
46	Simetria em relação ao eixo focal da parábola.	72
47	Parábola com vértice na origem e $F = (0, p/2)$	74
48	Parábola com vértice na origem e $F = (0, -p/2)$	74
49	Parábola com vértice na origem e $F = (p/2, 0)$	76
50	Parábola com vértice na origem e $F = (-p/2, 0)$	76
51	Parábola \mathcal{P}' com vértice fora da origem e foco paralelo ao eixo y	79
52	Elipsoide.	92
53	Traços do elipsoide nos planos $z = k$, $y = k$ e $x = k$	94
54	Elipsoide de revolução $\mathcal{Q} : \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2 + z^2}{a^2} = 1$	95
55	Hiperboloide de uma folha com eixo Oz :.	95
56	$\mathcal{Q} \cap \{z = k\}$ é uma elipse com centro $(0, 0, k)$	96
57	Traços do hiperboloide de uma folha no plano $x = k$	99
58	Traços do hiperboloide de uma folha no plano $y = k$	100

59	Hiperboloide de duas folhas de eixo Ox .	101
60	Traços do hiperboloide de duas folhas nos plano $z = k$ e $y = k$.	101
61	Traços do hiperboloide de duas folha no plano $x = k$.	103
62	Cone elíptico de eixo Oz .	104
63	Traços do cone elíptico de eixo Oz com plano $z = k$.	104
64	Traços do cone elíptico de eixo Oz com o plano $y = k$.	105
65	Traços do cone elíptico de eixo Oz com o plano $x = k$.	106
66	Cilindro elíptico de eixo Oz .	107
67	Traço no plano $z = k$.	108
68	Traços do cilindro elíptico no plano $y = k$.	109
69	Traços do cilindro elíptico no plano $x = k$.	111
70	Cilindro hiperbólico de eixo Oz .	112
71	Traço no plano $z = k$.	113
72	Traços do cilindro hiperbólico no plano $y = k$.	113
73	Traços do cilindro hiperbólico no plano $x = k$.	115
74	Paraboloides elípticos de eixo Oz .	121
75	Traços do paraboloides elíptico \mathcal{Q}_1 com plano $z = k$.	123
76	Traços do paraboloides elíptico \mathcal{Q}_1 no plano $y = k$.	124
77	Traços do paraboloides elíptico \mathcal{Q}_1 no plano $x = k$.	124
78	Paraboloides hiperbólico \mathcal{Q} de eixo Oz .	125
79	Traços do paraboloides hiperbólico \mathcal{Q} com plano $z = k$.	127
80	Traços do paraboloides hiperbólico \mathcal{Q} com os planos $y = k$ e $x = k$, respectivamente.	128
81	Cilindros parabólicos de eixo Oy .	130
82	Traços do cilindro parabólico \mathcal{Q} com plano $z = k$.	132
83	Traço do cilindro parabólico \mathcal{Q} com plano $y = k$.	133
84	Traço do cilindro parabólico \mathcal{Q} com plano $x = k$.	133
85	Propriedade refletora da Elipse \mathcal{E} .	135
86	Galeria de sussurros Grand Central Terminal, Manhattan.	140
87	Catedral de São Paulo (Saint Paul), Londres.	140
88	Frente leste do Capitólio, EUA.	141

89	Visão geral do aparelho de litotripsia.	141
90	Visão do paciente realizando o procedimento de litotripsia.	142
91	Propriedade refletora da Parábola \mathcal{P}	143
92	Propriedade reflexiva	147
93	Receptores de ondas	148
94	Refletores de luz	148
95	Propriedade refletora da hipérbole.	149
96	Propriedade refletora da hipérbole \mathcal{H}	150
97	Telescópio refletor	154
98	Telescópio refletor de Newton	155
99	Telescópio refletor de Cassegrain	156
100	Representação gráfica da hipérbole discutida.	159
101	Representação gráfica das hipérbolas intersectadas nos pontos A e B	159
102	Posição do planeta em relação ao Sol.	162
103	Coordenadas polares do planeta.	164
104	Sol na origem do plano cartesiano sendo um dos focos.	166
105	Órbitas na escala de 1 : 1.000.000.	168
106	Órbita do cometa Halley.	169

Introdução

É comum que estudantes iniciantes em matemática, ou mesmo aqueles que estão explorando um novo tema pela primeira vez, questionem a origem e a aplicação dos conhecimentos que estão prestes a adquirir. Esse tipo de indagação reflete a curiosidade inerente à natureza humana, que busca compreender como e onde o conhecimento pode ser empregado de maneira prática e relevante.

Partindo dessa premissa, o objetivo específico deste trabalho é realizar um estudo teórico sobre as cônicas e quádricas. Iremos destacar a origem desses conhecimentos e suas aplicações contemporâneas. Além disso, temos como objetivo geral motivar os estudantes do tema e professores, que buscam compreender as belíssimas propriedades presentes nas cônicas, tão amplamente utilizadas hoje em dia, mantendo, é claro, o rigor e o formalismo matemático.

Começaremos estudando a origem das seções cônicas e posteriormente será feito um estudo individualizado de cada uma delas, isto é, da elipse, hipérbole e parábola. Na sequência, estudaremos sobre as quádricas e suas formas canônicas e por fim, as propriedades presentes nas cônicas que por sua vez são estendidas para as quádricas, que resultam em diversas aplicações. Vale ressaltar que todas as construções geométricas presentes neste trabalho, foram feitas utilizando o software Geogebra.

As curvas denominadas de cônicas, começaram a ser estudadas devido as incansáveis buscas dos matemáticos gregos pela solução dos três problemas clássicos que são: A quadratura do círculo, A duplicação do cubo e a trisseção do ângulo. Todos estes problemas, deveriam ser solucionados apenas com régua e compasso e em particular o problema de duplicar um cubo foi que resultou no estudo das curvas que posteriormente receberam os nomes de Elipse, Hipérbole e Parábola atribuídos por Apolônio de Perga (mais a diante veremos a razão para estes nomes).

A origem do problema da duplicação do cubo está envolta em certo misticismo. Segundo [3], conta-se que durante um surto de peste que devastou cerca de um quarto da população de Atenas, por volta de 428 a.C., uma delegação de atenienses foi enviada ao oráculo de Apolo em Delos em busca de orientação sobre como combater a doença. O

oráculo, então, supostamente respondeu que o altar de Apolo, com sua forma cúbica, deveria ser duplicado. Os atenienses, seguindo as instruções do oráculo, decidiram duplicar as dimensões do altar na esperança de resolver o problema. No entanto, essa medida não só falhou em aliviar a peste, como também não trouxe o resultado esperado.

Ao duplicarem as dimensões do altar, os atenienses obtiveram um altar cúbico com um volume oito vezes maior do que o original, ao invés do dobro. Essa discrepância revelou a complexidade do desafio matemático proposto pelo oráculo, que exigia mais do que simplesmente dobrar as dimensões do objeto. Vejamos a explicação matemática da tentativa de resolver o problema feita pelos atenienses. Considere os cubos A e B com aresta medindo x e $2x$, respectivamente, conforme a Figura 1.

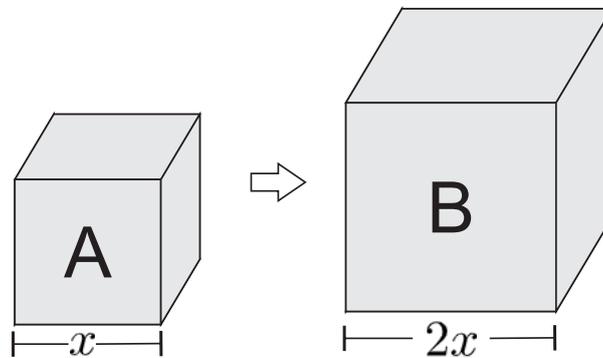


Figura 1: Tentativa da duplicação do cubo.

Temos que o volume do cubo A é x^3 . Porém, ao calcular o volume do cubo B obtemos $8x^3$ que é oito vezes o volume do cubo A. Essa é a lenda por trás do problema da duplicação do cubo que também ficou conhecido como problema deliano.

Na busca pelas soluções destes problemas clássicos, principalmente o da quadratura do círculo, os matemáticos atenienses tornaram-se habilidosos em trabalhar com transformações de áreas e proporções. Para eles, em particular, não havia dificuldades em transformar um retângulo de lados a e b em um quadrado. Isso exige achar uma medida x que corresponde a média proporcional entre a e b , ou seja, na linguagem moderna deve-se encontrar x tal que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \quad \text{ou equivalente} \quad x^2 = ab. \quad (1)$$

Os geômetras da época construíam esse segmento x facilmente. Os passos a seguir

mostram como construir tal segmento utilizando régua e compasso [11]:

- (1) Construa um segmento $\overline{AB} = a$ e um segmento $\overline{CD} = b$.
- (2) Trace uma reta r ;
- (3) Transporte o segmentos AB para a reta r e a partir do ponto B transporte o segmento CD para reta r formando o segmento $\overline{BC} = b$, ou seja, o segmento AC tem medida $a + b$.
- (4) Trace a mediatriz m do segmento AC e marque o ponto M , médio de AC ;
- (5) Trace o círculo \mathcal{C} de centro M e raio AM ;
- (6) Trace a perpendicular s à reta r passando por B ;
- (7) Marque o ponto D , intersecção do círculo c com a perpendicular s .
- (8) O segmento BD é o segmento de medida x no qual é solução da equação (1).

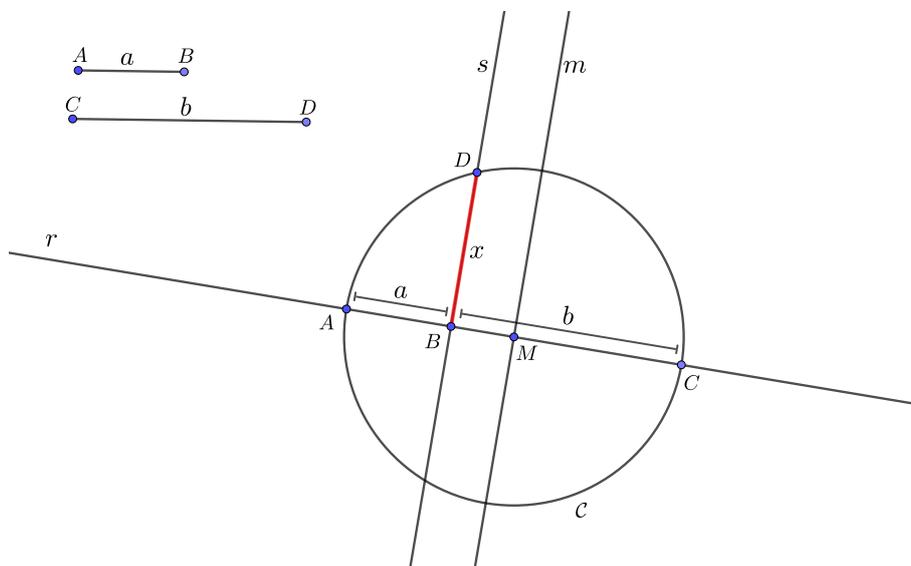


Figura 2: Construção do segmento x .

Justificando

A partir da construção feita, conforme ilustrado na Figura 2, podemos formar o triângulo ADC que é retângulo em D , veja Figura 3. Sabe-se pelas relações métricas

no triângulo retângulo que a altura, em relação a hipotenusa, quando elevada ao quadrado é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa. Seja então x a medida do segmento BD , logo pela relação métrica citada, temos que:

$$\begin{aligned} (\overline{BD})^2 &= \overline{AB} \cdot \overline{BC} \implies \\ x^2 &= ab. \end{aligned}$$

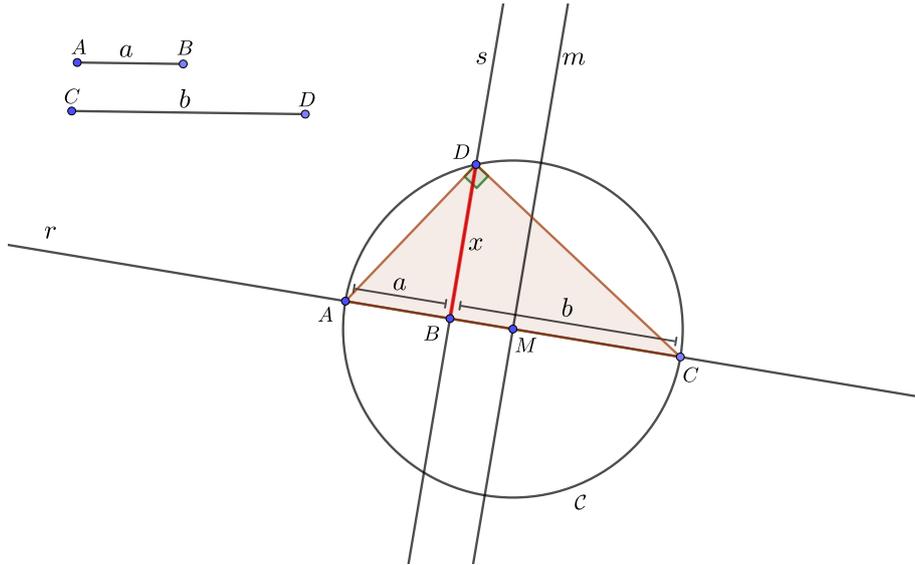


Figura 3: Triângulo ADC , retângulo em D .

Com a possibilidade de quadrar um retângulo, era natural que tentassem generalizar a questão inserindo duas médias proporcionais entre duas grandezas dadas a e b . Na linguagem moderna, o problema agora era encontrar as duas médias proporcionais x e y entre os segmentos de comprimento a e b , isto é,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}. \quad (2)$$

Conta-se que Hipócrates de Quio (aprox. 440, a.C.) foi quem percebeu que a solução deste problema levaria à solução do problema da duplicação do cubo tomando $b = 2a$. Note que da equação (2) podemos escrever:

$$\begin{cases} x^2 = ay; \\ xy = ab. \end{cases} \implies x^3 = axy = a^2b.$$

Substituindo $b = 2a$, concluímos que:

$$x^3 = 2a^3. \quad (3)$$

Portanto, o problema da duplicação do cubo pode ser reduzido à encontrar duas médias proporcionais entre os segmentos a e b . A medida x representa a aresta de um cubo cujo volume é duas vezes maior que o volume de um outro cubo de aresta a .

Além disso, a partir da equação (2) e utilizando uma linguagem atual, podemos encontrar três equações, sendo $b = 2a$, isto é,

$$x^2 = ay; \quad (4)$$

$$y^2 = 2ax; \quad (5)$$

$$xy = 2a^2. \quad (6)$$

A intersecção das curvas gerada por essas três equações é solução da equação (3). Afim de exibir uma construção para esse problema, para uma melhor compreensão, iremos utilizar o software Geogebra. Para isso consideremos um cubo de aresta $a = 1$ e portanto, digitando as equações (4), (5) e (6), no campo de entrada do software, obtemos as curvas conforme ilustrado na Figura 4. A abscissa do ponto P , cujo valor é aproximadamente 1.26, representa a aresta de um cubo que tem o dobro do volume do cubo de aresta $a = 1$.

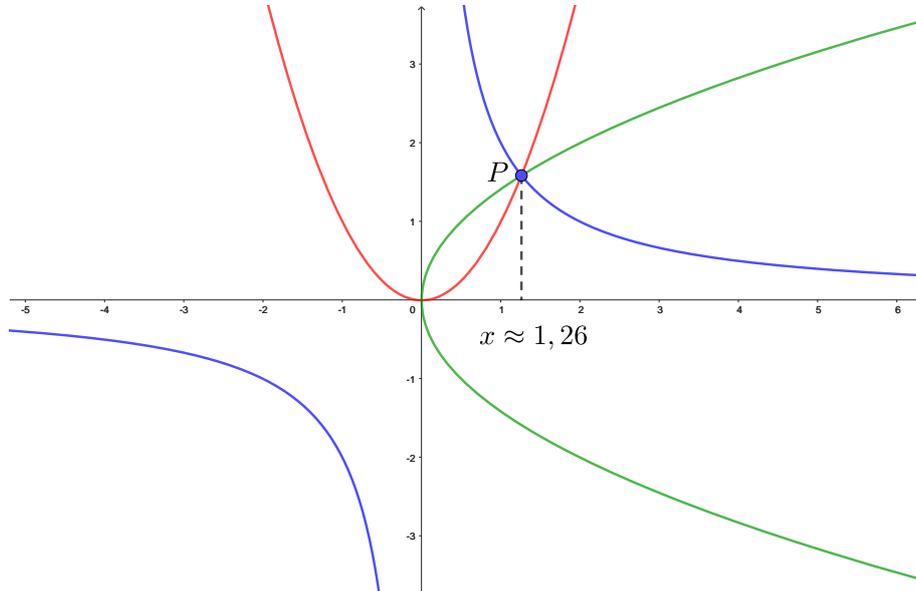


Figura 4: Duplicação do cubo de aresta $a = 1$.

É importante destacar que esse método não reflete a abordagem dos matemáticos gregos para resolver o problema. Naquela época, eles não dispunham de análise de curvas

expressadas de forma analítica nem do simbolismo algébrico usado atualmente. Em vez disso, suas técnicas se baseavam em seções de sólidos ou métodos mecânicos, como o uso de régua e compasso. Essa representação nos oferece uma perspectiva moderna de como as curvas poderiam ter sido empregadas para solucionar o problema da duplicação do cubo [11].

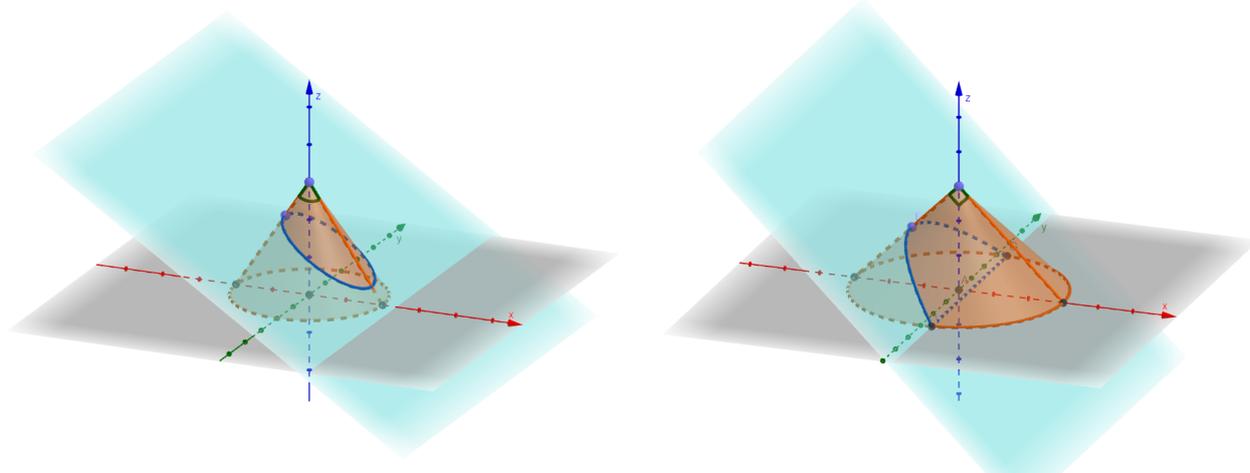
Após Hipócrates reduzir o problema da duplicação do cubo à busca por duas médias proporcionais entre os segmentos a e b , os matemáticos gregos concentraram seus esforços em encontrar uma solução geométrica usando régua e compasso para o desafio proposto por ele, a fim de resolver o problema de Delos. Alguns críticos questionaram Hipócrates, argumentando que ele substituíra um problema difícil por outro igualmente desafiador. Durante a busca pela solução, surgiram propostas interessantes, embora algumas delas utilizassem ferramentas além da régua e do compasso.

Uma das soluções inovadoras foi proposta pelo matemático Menaecmus (380-320 a.C), que descobriu como gerar as curvas que posteriormente foram identificadas como a elipse, a parábola e a hipérbole, solucionando assim o problema de Hipócrates. Embora ele tenha conseguido determinar a sua forma, a questão de como traçá-las de forma mecânica no plano, utilizando apenas régua e compasso, permaneceu sem resposta. Essas curvas surgiam como resultado da seção de um cone circular reto por um plano perpendicular a um de seus elementos, como ilustrado na Figura 5. A natureza da curva resultante - elipse, parábola ou hipérbole - dependia do ângulo formado pelo vértice do cone, que poderia ser agudo, reto ou obtuso (conhecido como cone acutângulo, retângulo ou obtusângulo, respectivamente).

Ele percebeu que ao seccionar um cone retângulo com um plano perpendicular à sua geratriz, a curva resultante poderia ser representada na forma moderna da geometria analítica como:

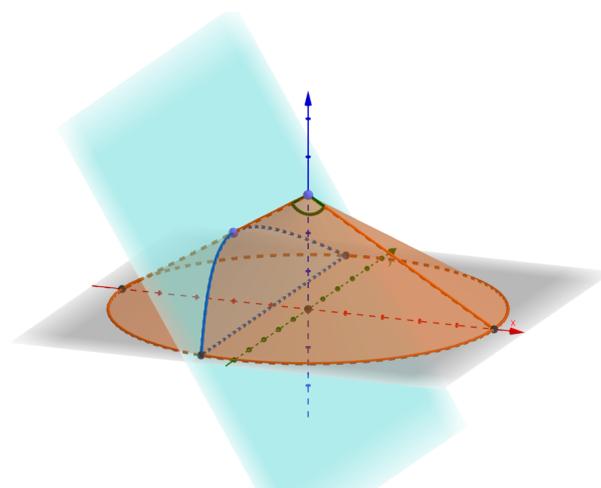
$$y^2 = lx, \tag{7}$$

em que l é uma constante dependente da distância do plano ao vértice, posteriormente denominada de *latus rectum* da curva. A forma como Menaecmus chegou a essa conclusão ainda não é totalmente compreendida, mas sua dedução se baseou em princípios da geometria elementar. Uma explicação detalhada pode ser encontrada em [3].



(a) Elipse - cone acutângulo $\theta < 90^\circ$.

(b) Parábola - cone retângulo $\theta = 90^\circ$.



(c) Hipérbole - cone obtusângulo $\theta > 90^\circ$.

Figura 5: Cônicas segundo Menaecmus.

Além disso, em uma linguagem matemática atualizada, ele também deduziu que, ao seccionar um cone acutângulo e um cone obtusângulo com um plano perpendicular à sua geratriz, as equações podem ser expressas como:

$$y^2 = lx - b^2 \frac{x^2}{a^2}. \quad (8)$$

$$y^2 = lx + b^2 \frac{x^2}{a^2}. \quad (9)$$

Aqui, a e b são constantes. As equações (7), (8) e (9) representam, respectivamente, uma parábola, uma elipse e uma hipérbole. Além disso, ao substituir $l = 2a$ na equação (7),

obtemos exatamente a equação (5).

Menaecmus, durante sua pesquisa, teria descoberto uma curva que mais tarde seria reconhecida como a Elipse. Esse achado surgiu como um subproduto de sua investigação, na qual a parábola e a hipérbole desempenhavam papéis fundamentais na solução do problema de Delos. Posteriormente, matemáticos gregos como Euclides e Arquimedes exploraram essas curvas e suas propriedades. No entanto, foi a obra de Apolônio de Perga (262 a 190 a.C.) que se destacou como a mais notável da Grécia Antiga sobre as cônicas.

Apolônio, nascido em Perga, no Sul da Ásia Menor, possivelmente recebeu sua educação em Alexandria. As datas exatas de sua vida são desconhecidas, mas é relatado que ele viveu durante os reinados de Ptolomeu Euergetes e Ptolomeu Filopater, sendo estimado como vinte a quarenta anos mais jovem que Arquimedes. Sugere-se que tenha vivido de 262 a 190 a.C., embora poucos detalhes de sua vida sejam conhecidos [3].

Embora Apolônio tenha produzido muitos tratados, apenas dois chegaram até nós em grande parte. Todas as versões gregas de “Dividir segundo uma razão” foram perdidas há muito tempo, mas felizmente uma tradução árabe foi feita antes disso ocorrer. Outra de suas obras preservadas, em parte, é sua famosa obra “As Cônicas”, da qual apenas metade dos oito volumes originais em grego sobreviveu. Felizmente, o matemático árabe Thabit Ibn Qurra traduziu os três volumes seguintes, e essa versão foi preservada. Em 1710, Edmund Halley forneceu uma tradução em latim dos sete volumes, possibilitando traduções para outras línguas modernas.

As seções cônicas já eram conhecidas há cerca de um século e meio quando Apolônio escreveu sua famosa obra sobre essas curvas. Seu tratado sobre as cônicas não apenas consolidou o conhecimento existente, mas também superou todas as obras anteriores sobre o assunto, inclusive as cônicas de Euclides.

Antes de Apolônio, a elipse, a hipérbole e a parábola eram obtidas como seções de três tipos de cones diferentes: o cone acutângulo, o retângulo e o obtusângulo, com o plano de secção perpendicular à geratriz do cone. Apolônio foi pioneiro ao demonstrar sistematicamente que todas as três espécies de cônicas podem ser geradas a partir de um único cone, independentemente de ser acutângulo, retângulo ou obtusângulo, bastando variar a inclinação do plano de secção. Esse avanço foi fundamental para relacionar de

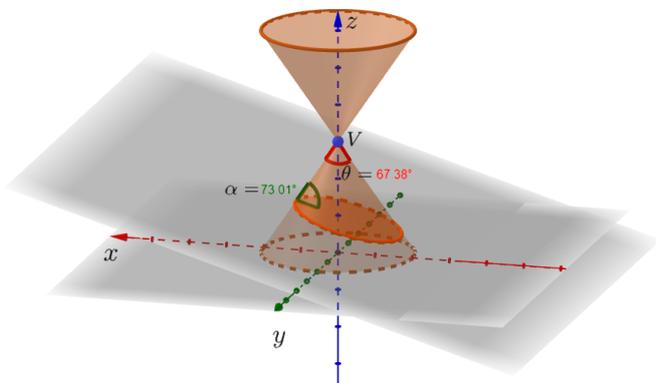
forma mais integrada essas três curvas.

Uma segunda generalização importante foi quando Apolônio mostrou que o cone não precisava ser reto, ou seja, com o eixo perpendicular à base circular, mas podia ser oblíquo ou escaleno. Outra mudança significativa, que aproximou as cônicas antigas do ponto de vista moderno, foi a substituição do cone de uma só folha por um cone de duas folhas. Como consequência dessa última mudança, a hipérbole passou a ser vista como uma única curva com dois ramos, ao invés de duas hipérbolés distintas como anteriormente se pensava. Consideremos então, os ângulos α e θ como sendo os ângulos entre o plano de secção e o cone duplo e o ângulo do vértice do cone, respectivamente. A Figura 6 ilustra as cônicas segundo Apolônio.

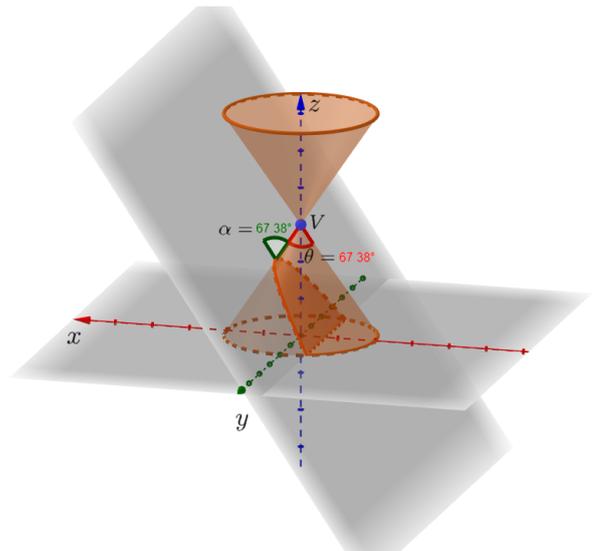
Na história da matemática os conceitos são mais importante que a terminologia, mas o feito de Apolônio em atribuir os nomes “elipse”, “hipérbole” e “parábola” para designar as secções cônicas foi de grande importância. Durante cerca de século e meio essas curvas não tinham uma designação apropriada, apenas eram conhecidas pelo modo que tinham sido descobertas - secções de cone acutângulo (oxytome), secções de cone retângulo (orthome) e secções de cone obtusângulo (amblytome).

As palavras “elipse”, “hipérbole” e “parábola” não foram simplesmente inventadas por Apolônio, os pitagóricos já faziam o uso destas terminologias na solução de equações quadráticas por aplicação de áreas. Dessa forma, quando os pitagóricos posicionavam a base de um retângulo sobre um segmento retilíneo de modo que uma das extremidades da base coincidissem com uma extremidade do segmento, eles identificavam isso como um caso de elipse, parábola ou hipérbole, dependendo se a base fosse menor, igual ou maior que o segmento. É notável que a razão por trás dessas denominações reside no próprio significado dos termos: “elipse” indica falta, “parábola” denota igualdade e “hipérbole” expressa excesso. Veja a Figura 7.

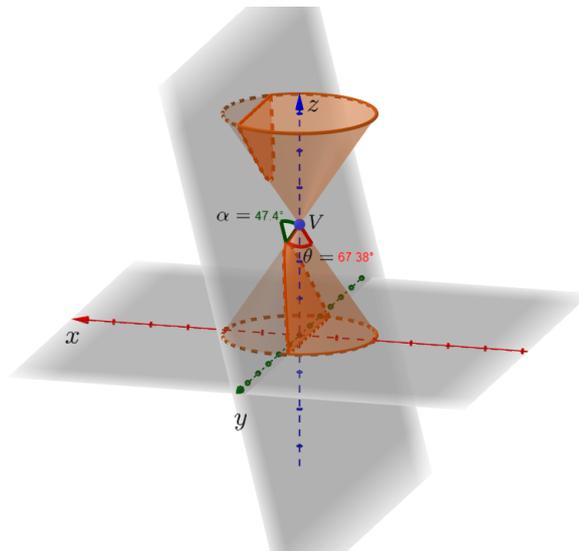
Utilizando a geometria analítica atual, veremos o porque as cônicas receberam os nomes de elipse, parábola e hipérbole. Consideremos a cônica conforme representada na Figura 8, o segmento MN é conhecido como *latus rectum* da cônica. Este conceito, já conhecido por Apolônio, pode ser definido como o segmento perpendicular ao eixo de simetria que passa pelo foco da cônica e possui extremidades na própria cônica [2].



(a) Elipse ($\alpha > \theta$).



(b) Parábola ($\alpha = \theta$).



(c) Hipérbole ($\alpha < \theta$).

Figura 6: Cônicas segundo Apolônio.

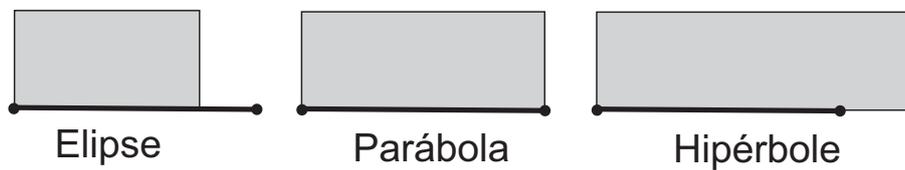


Figura 7: Origem dos nomes: elipse, parábola e hipérbole.

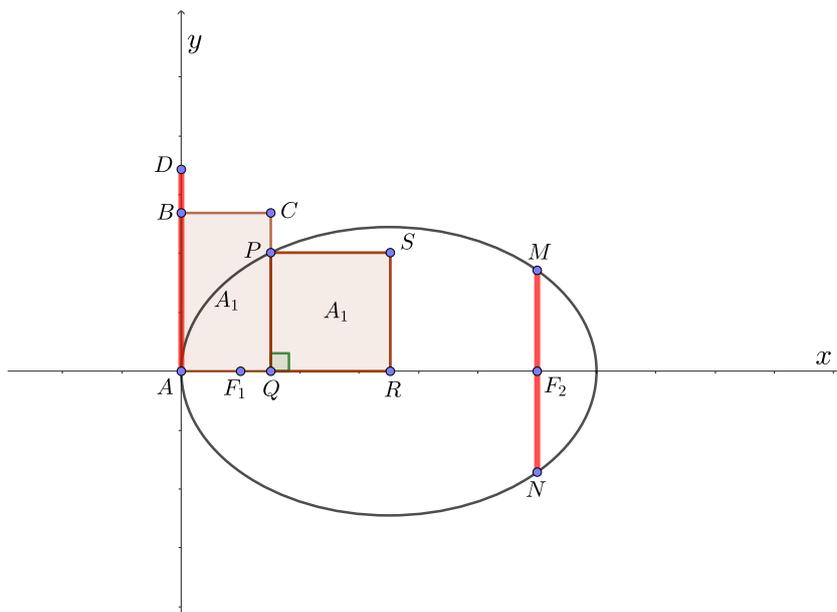


Figura 8: Relação de falta.

Observação 1. *Embora Apolônio tenha reconhecido a existência dos focos nas cônicas, o termo “foco” só foi introduzido mais tarde por Johannes Kepler (1571-1630). A definição exata de foco será apresentada posteriormente neste trabalho. Por ora, assumiremos que a elipse possui dois focos, F_1 e F_2 .*

Sobre o eixo das ordenadas, tracemos o segmento AD com medida igual ao latus rectum. Seja P um ponto qualquer da cônica e Q a sua projeção ortogonal sobre o eixo das abcissas. Construamos o quadrado $PQRS$ cuja área é $A_1 = \overline{PQ}^2$. Em seguida, construamos um retângulo com base AQ e área igual a A_1 , resultando no retângulo $ABCQ$. Nota-se que o lado AB desse retângulo é menor que o segmento AD . Assim, Apolônio observou que para qualquer ponto $P \neq A$ nesta cônica, o lado do retângulo era sempre menor que seu latus rectum, o que o levou a designá-la como elipse, pela mesma razão que os pitagóricos utilizavam esse termo.

De maneira análoga, consideremos a cônica conforme representada na Figura 9. O retângulo $ABCQ$ e o quadrado $PQRS$ possuem a mesma área A_1 , onde o segmento MN representa o latus rectum e o segmento AD é igual a MN . O ponto F é o foco da cônica. Nota-se que o lado AB do retângulo é igual ao segmento AD .

Portanto, Apolônio nomeou essa cônica de parábola pois, ele percebeu que para qual-

quer ponto $P \neq A$ nesta cônica, o lado do retângulo é sempre igual ao seu latus rectum, o que corresponde à mesma razão pela qual os pitagóricos utilizavam esse termo.

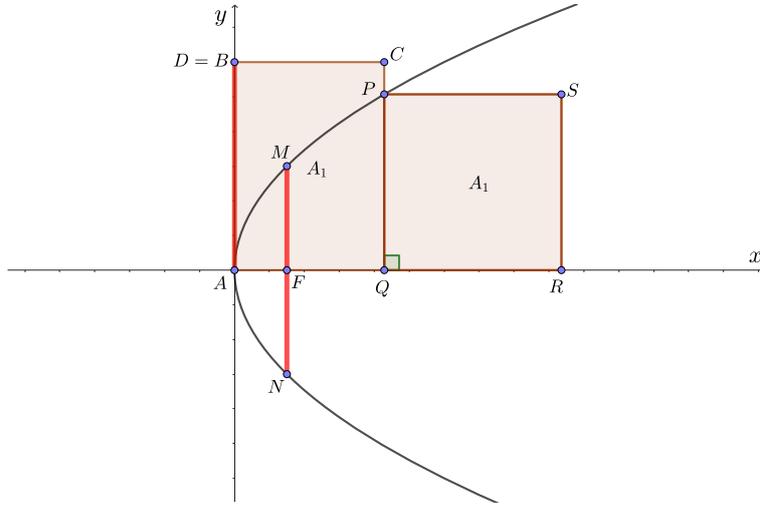


Figura 9: Relação de igualdade na parábola .

Analogamente, consideremos a cônica representada na Figura 10. O retângulo $ABCQ$ e o quadrado $PQRS$ possuem a mesma área A_1 , onde o segmento MN representa o latus rectum e o segmento AD é igual a MN . Os pontos F_1 e F_2 são os focos da cônica. Nota-se que o lado AB do retângulo é maior que o segmento AD .

Portanto, Apolônio nomeou essa cônica de hipérbole pois, ele percebeu que para qualquer ponto $P \neq A$ nesta cônica, o lado do retângulo é sempre maior que o seu latus rectum, o que corresponde à mesma razão pela qual os pitagóricos utilizavam esse termo.

1 Estudo das Cônicas

Iremos estudar a elipse, a hipérbole e a parábola, respectivamente, sob a perspectiva da geometria analítica atual, na qual é inspirada nos estudos feitos por Apolônio [5]; [16]; et al.

1.1 Elipse

A elipse desempenha um papel importante tanto na Matemática quanto na Física. Uma de suas aplicações significativas na Física está relacionada a mecânica celeste, que estuda

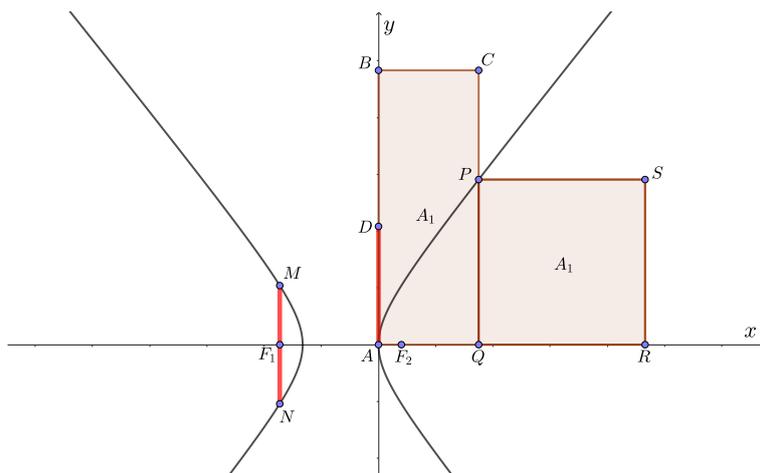


Figura 10: Relação de excesso na hipérbole .

os movimentos dos corpos celestes, cujas trajetórias são descritas por órbitas elípticas. Por exemplo, o movimento de translação da Terra ao redor do Sol é descrito por uma trajetória elíptica, onde o Sol está localizado em um dos focos dessa elipse. Neste trabalho exploraremos com um pouco mais de detalhe essa e outras aplicações da elipse.

Como sugestão didática para o professor ao introduzir o conceito de elipse, sugere-se que peça aos alunos para construir uma elipse em uma folha de papel. Para isso, utilize uma folha de papel A4 e um pedaço de barbante de aproximadamente 25 cm.

Instruções passo a passo:

- (1) Coloque a folha de papel na posição vertical e tenha uma régua em mãos.
- (2) Trace um segmento de 10 cm no centro da folha utilizando a régua.
- (3) faça um furo no papel, em cima das extremidades do segmento e em seguida passe o barbante pelos furos.
- (4) Dê um nó em cada uma das pontas do barbante de modo que ele fique fixo na folha.
- (5) Estique a sobra do barbante sobre o papel.
- (6) Utilizando um lápis ou caneta, deslize a ponta do lápis sobre o papel seguindo o contorno do barbante esticado.

- (7) Em seguida, reposicione o barbante esticado no outro lado da folha e deslize novamente o lápis sobre o papel, mantendo o barbante esticado.

Sugestão. Para evitar que o barbante dê voltas no lápis, construa um lado da elipse primeiro e, em seguida, reposicione o barbante esticado no outro lado da folha antes de deslizar novamente o lápis sobre o papel.

Essa atividade prática permite que os alunos visualizem e experimentem a construção de uma elipse, proporcionando uma compreensão mais concreta desse conceito geométrico. Além disso, os estudantes podem marcar pontos sobre a elipse desenhada e com auxílio de uma régua verificar que a soma das distâncias desses pontos sobre a elipse até as duas extremidades fixas do barbante é sempre constante.

Observação 2. Note que por se tratar de uma construção manual, podem haver pequenos erros nas medições e, conseqüentemente, nos resultados obtidos. Portanto, os alunos poderão encontrar valores aproximados.

A seguir, apresentamos a definição matemática da elipse e os seus elementos.

Definição 1. *Uma elipse \mathcal{E} é o lugar geométrico dos pontos P de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano F_1 e F_2 , chamados de focos, é igual a uma constante $2a > 0$.*

$$\mathcal{E} = \{P \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}.$$

A distância entre os focos é igual a uma constante positiva, $d(F_1, F_2) = 2c$, onde, $0 \leq 2c < 2a$.

A Figura 11 mostra três pontos P_1 , P_2 e P_3 pertencentes a elipse \mathcal{E} . De acordo com a definição, a soma de suas distâncias até os focos é sempre constante, isto é,

$$d(P_1, F_1) + d(P_1, F_2) = d(P_2, F_1) + d(P_2, F_2) = d(P_3, F_1) + d(P_3, F_2) = 2a.$$

1.1.1 Elementos da elipse

Os elementos da elipse são de fundamental importância para a sua construção e também para estudar as suas propriedades. Veja os principais elementos que compõem a elipse.

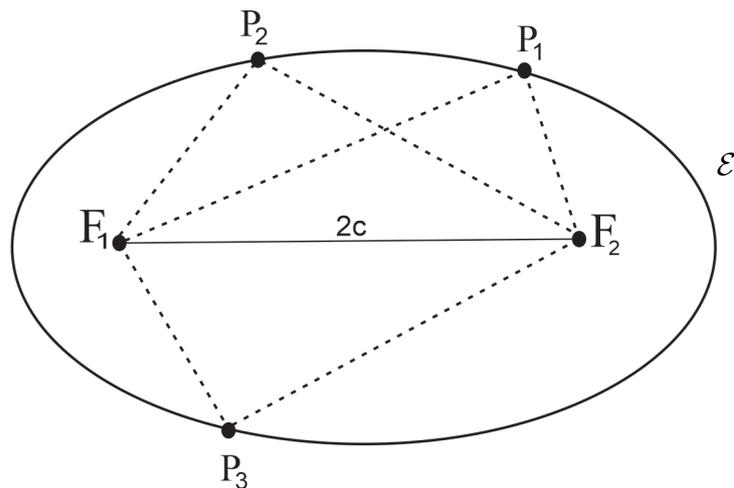


Figura 11: Elipse

- (i) **Focos:** são os pontos F_1 e F_2 .
- (ii) **Reta focal:** é a reta que contem os focos.
- (iii) **Distância focal:** é a distância igual a $2c$ entre os focos.
- (iv) **Eixo maior:** é o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$ (o segmento A_1A_2 contém os focos e seus extremos pertencem à elipse).

Vejamos sobre a construção do eixo maior da elipse \mathcal{E} . Considere ℓ como sendo a reta focal que contém os focos F_1 e F_2 . Os pontos de interseção entre a elipse e essa reta são chamados de vértices da elipse sobre a reta focal, e são representados por A_1 e A_2 .

Vamos considerar o ponto A_2 como um dos pontos de interseção entre a elipse e a reta focal ℓ , tal que o foco F_2 esteja localizado entre F_1 e A_2 . Nessa configuração, seja x a distância entre A_2 e F_2 , ou seja, $x = d(A_2, F_2)$. Veja a Figura 12.

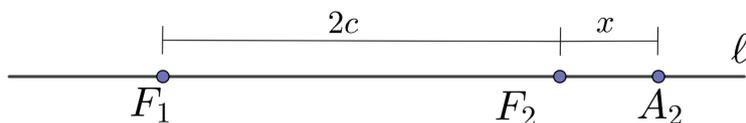


Figura 12: Eixo maior.

Temos que a distância entre A_2 e os focos F_1 e F_2 pode ser expressa por

$$d(A_2, F_1) + d(A_2, F_2) = x + 2c + x = 2x + 2c.$$

Sabemos também que o parâmetro a da elipse é igual a metade dessa distância, ou seja,

$$2a = 2x + 2c.$$

A partir dessa equação, podemos concluir que $x = a - c$. Portanto, o ponto A_2 está a uma distância de $a - c$ do foco F_2 , com o foco F_2 localizado entre F_1 e A_2 .

De forma análoga, podemos considerar o ponto A_1 pertencente à interseção entre a elipse \mathcal{E} e a reta focal ℓ , onde o foco F_1 está entre A_1 e F_2 . Da mesma maneira, podemos concluir que a distância entre A_1 e os focos F_1 e F_2 é dada por

$$d(A_1, F_1) + d(A_1, F_2) = y + y + 2c = 2y + 2c,$$

onde y representa essa distância. Assim, temos

$$2a = 2y + 2c,$$

o que implica que $y = a - c$. Portanto, o ponto A_1 está a uma distância de $a - c$ do foco F_1 . Veja a Figura 13.

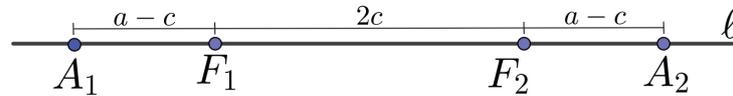


Figura 13: Eixo maior da elipse \mathcal{E} .

Os elementos seguintes que iremos definir são o Centro da elipse, a Reta não focal e o Eixo menor.

- (v) **Centro:** é o ponto médio C do segmento F_1F_2 . Nota-se que o ponto C também é ponto médio do segmento A_1A_2 .
- (vi) **Reta não focal:** é a reta perpendicular à reta focal passando pelo centro C .
- (vii) **Eixo menor:** é o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$, ($B_1B_2 \perp A_1A_2$ em C).

Vejamos sobre a construção do eixo menor da elipse \mathcal{E} . Considere ℓ' como sendo a reta que não passa pelos focos da elipse. Os pontos de interseção entre a elipse e essa reta são chamados de vértices da elipse sobre a reta não focal, representados por B_1 e B_2 .

Vamos considerar B_1 como um dos pontos de interseção entre a elipse e a reta não focal ℓ' . Como a reta ℓ' é perpendicular à reta que passa pelos focos F_1 e F_2 no ponto médio C , então ℓ' também é a mediatriz do segmento F_1F_2 e do segmento A_1A_2 . Portanto, a distância de B_1 até os focos F_1 e F_2 é a mesma, isto é,

$$d(B_1, F_1) = d(B_1, F_2) = a \implies d(B_1, F_1) + d(B_1, F_2) = a + a = 2a.$$

Analogamente, considere B_2 como o outro ponto de interseção, temos que:

$$d(B_2, F_1) = d(B_2, F_2) = a \implies d(B_2, F_1) + d(B_2, F_2) = a + a = 2a.$$

Pelo teorema de Pitágoras, os pontos B_1, B_2 distam $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ do centro C da elipse pois,

$$[d(B_1, F_1)]^2 = [d(B_1, C)]^2 + [d(F_1, C)]^2 \implies a^2 = b^2 + c^2 \implies b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

A Figura 14 mostra a elipse \mathcal{E} com seus eixos maior e menor, representados pelos segmentos A_1A_2 e B_1B_2 , respectivamente.

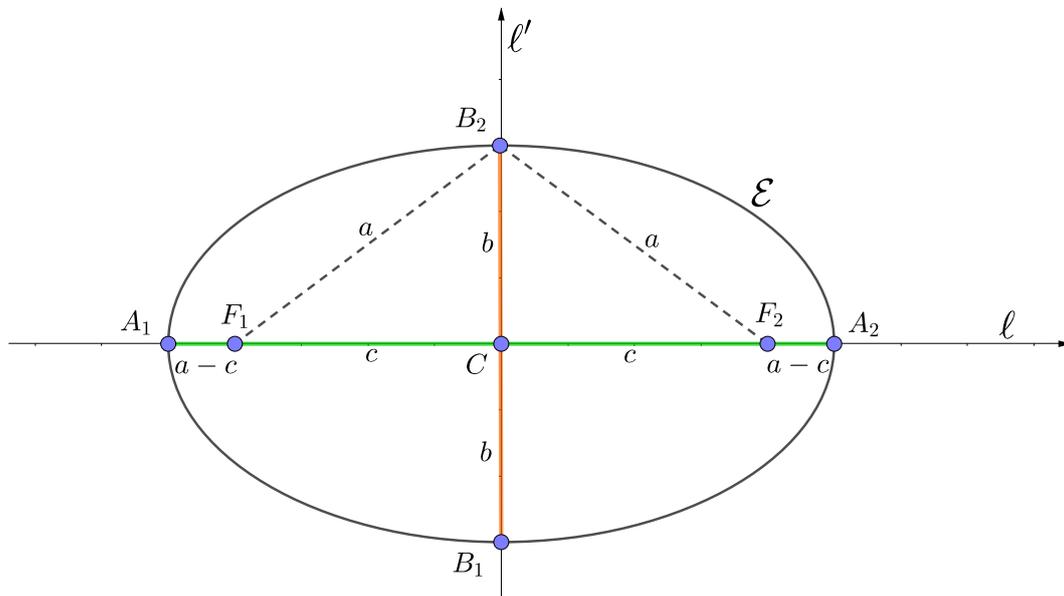


Figura 14: Elipse \mathcal{E} com seus eixos maior e menor.

O número “ a ” é a distância do centro aos vértices sobre a reta focal, o número “ b ” é a distância do centro aos vértices sobre a reta não focal e o número “ c ” é a distância do centro aos focos.

O último elemento que iremos definir é a excentricidade. Ela é calculada como o quociente entre a distância focal c e o semieixo maior a .

(viii) **Excentricidade:** A excentricidade da elipse é o número, $e = c/a$. Como $c < a$, segue que $0 \leq e < 1$.

A excentricidade fornece uma medida da forma da elipse, indicando o quão “achatada” ou “alongada” no eixo maior ela é em relação a uma circunferência perfeita. À medida que a excentricidade se aproxima de zero, a elipse vai se tornando mais achatada, aproximando-se de uma circunferência. Por outro lado, valores mais próximos de um indicam uma elipse mais alongada. O caso em que a excentricidade é igual a zero é chamado de degeneração da elipse. Quando a excentricidade é igual a zero, a elipse se degenera em uma circunferência. Veja a Figura 15 para ilustração desses casos.

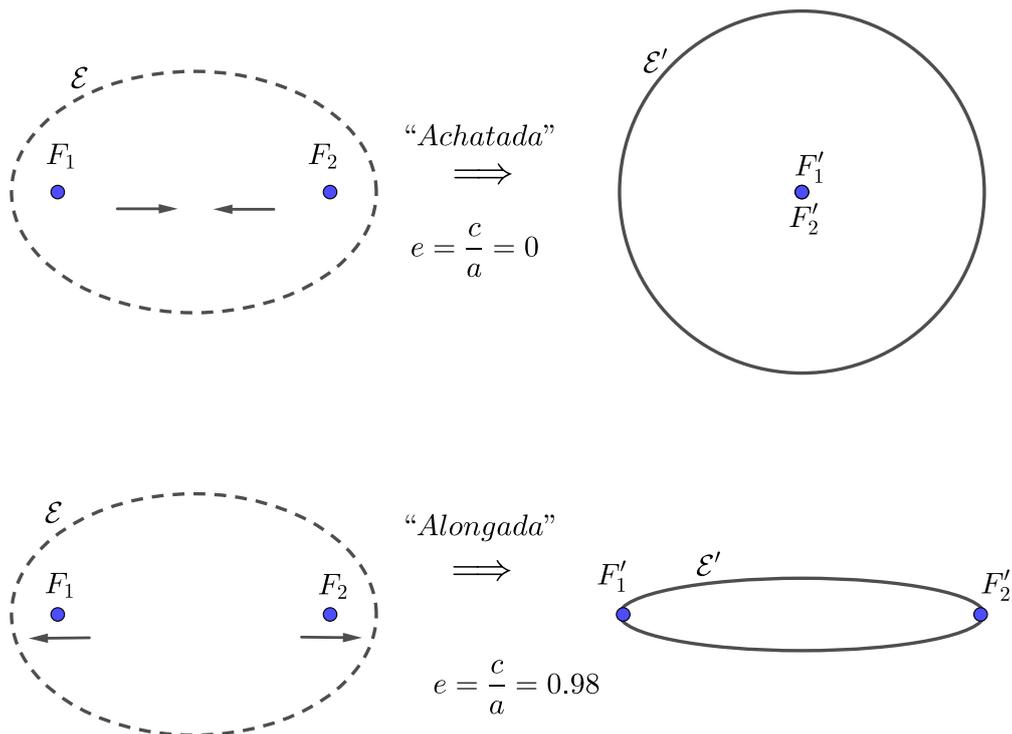


Figura 15: Excentricidade da elipse.

Podemos observar que quando a excentricidade se aproxima de zero, a distância entre os focos também diminui. Em outras palavras, os focos estão se movendo em direção

ao centro da elipse, fazendo com que o eixo maior da elipse diminua, enquanto o eixo menor permanece constante. Quando os focos estão localizados no centro da elipse, os eixos maior e menor possuem a mesma medida, o que fornece uma circunferência com raio igual a esse valor.

A elipse apresenta uma propriedade adicional de grande interesse, que é a simetria. Para qualquer ponto pertencente à elipse, seu ponto simétrico também pertence à mesma. A demonstração da próxima proposição, relacionada à simetria na elipse, está dividida em três partes: (a), (b) e (c).

Proposição 1. *A elipse \mathcal{E} é simétrica em relação à reta focal, reta não focal e ao centro.*

Demonstração. De fato,

(a) Seja $P \in \mathcal{E}$ e P' o simétrico de P , em relação à reta focal, conforme a Figura 16.

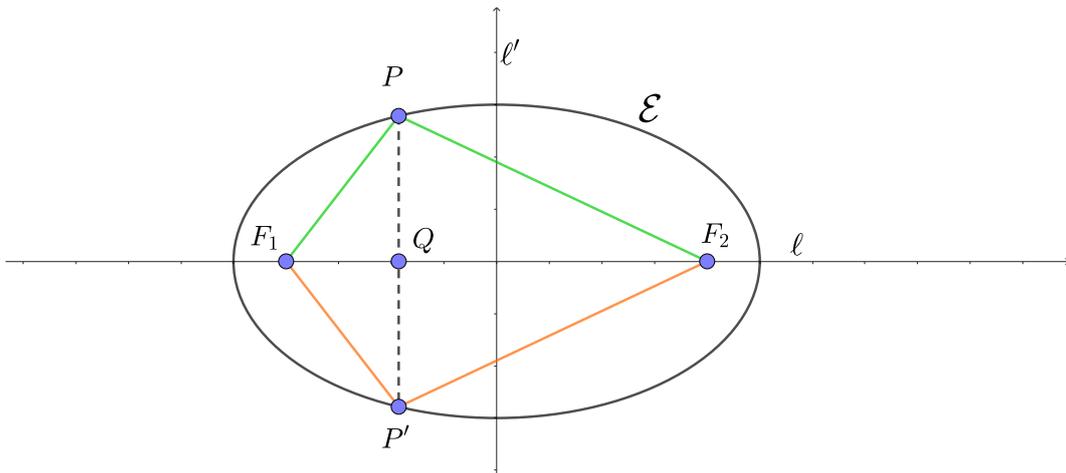


Figura 16: Simetria em relação a reta focal.

Os triângulos retângulos F_2PQ e $F_2P'Q$ e os triângulos retângulos F_1PQ e $F_1P'Q$ são congruentes pelo caso LAL . Logo, temos

$$d(F_1, P) = d(F_1, P') \text{ e } d(F_2, P) = d(F_2, P').$$

Portanto,

$$2a = d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P', F_1) + d(P', F_2),$$

o que implica que $P' \in \mathcal{E}$. Como o ponto P' também pertence a elipse \mathcal{E} , significa que a mesma é simétrica em relação a reta focal.

(b) Seja $P \in \mathcal{E}$ e P'' o simétrico de P em relação ao centro Q , veja a Figura 17.

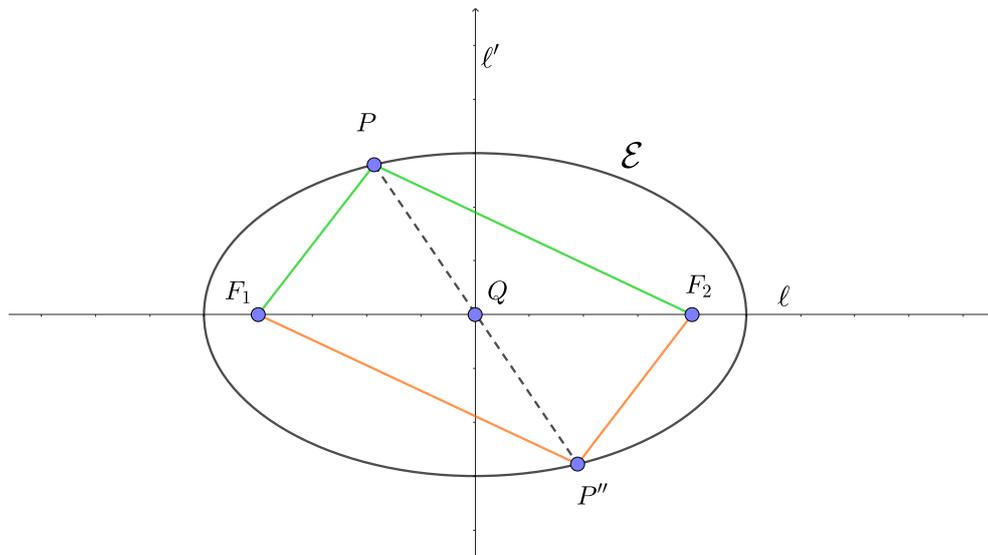


Figura 17: Simetria em relação ao centro

Os triângulos PQF_2 e $P''QF_1$, assim como os triângulos PQF_1 e $P''QF_2$, são congruentes pelo caso LAL . A partir disso podemos concluir que,

$$d(P, F_1) = d(P'', F_2) \text{ e } d(P, F_2) = d(P'', F_1).$$

Assim temos a igualde:

$$2a = d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P'', F_2) + d(P'', F_1).$$

Dessa forma, concluímos que o ponto P'' pertence à elipse \mathcal{E} . Em outras palavras, a elipse exibe simetria em relação ao seu centro, uma vez que o ponto P'' também faz parte dela.

(c) Seja $P \in \mathcal{E}$ e P''' o ponto simétrico de P em relação à reta não focal. O ponto Q é a projeção ortogonal de P e P''' sobre a reta ℓ' . Definimos o ponto R como a interseção das retas PF_2 e $P'''F_1$ com a reta ℓ' . O ponto C representa o centro da elipse. Veja a Figura 18.

Podemos observar que os triângulos retângulos PQR e $P'''QR$ são congruentes, assim como os triângulos retângulos F_1RC e F_2RC também são congruentes, ambos

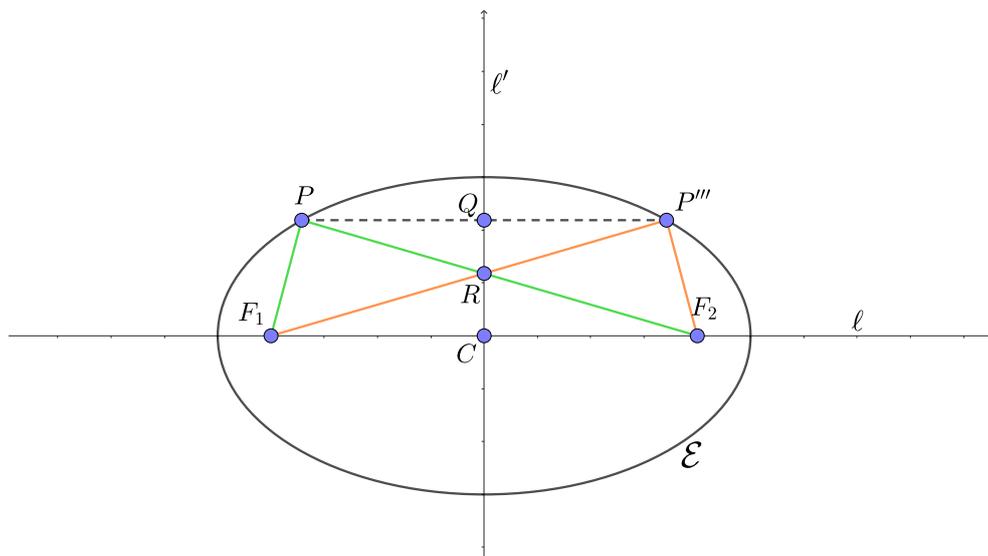


Figura 18: Simetria em relação a reta não focal.

pele caso *LAL*. Com base nisso, concluímos que os triângulos F_1PR e $F_2P'''R$ também são congruentes pelo caso *LAL*. Logo, temos

$$d(P, R) = d(P''', R) \text{ e } d(F_1, R) = d(F_2, R),$$

o que implica que

$$d(P, F_2) = d(P''', F_1) \text{ e também } d(P, F_1) = d(P''', F_2).$$

Portanto,

$$2a = d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P''', F_2) + d(P''', F_1),$$

e concluímos que o ponto P''' também pertence a elipse \mathcal{E} , ou seja, a elipse é simétrica em relação a reta não focal.

□

1.1.2 Forma canônica da elipse

Vamos mostrar em maior detalhe como se obtém a equação de uma elipse usando os eixos ortogonais do plano cartesiano, com base na definição da elipse apresentada anteriormente.

Primeiramente, suponhamos que a elipse está centrada na origem do plano cartesiano, com os focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, indicando que o eixo maior está na direção

horizontal (ao longo do eixo das abscissas x) e o eixo menor está na direção vertical (ao longo do eixo das ordenadas y). Vamos supor que P seja um ponto qualquer da elipse \mathcal{E} , com coordenadas cartesianas $P = (x, y)$, conforme ilustrado na Figura 19. Sob essas condições, a seguinte proposição é válida:

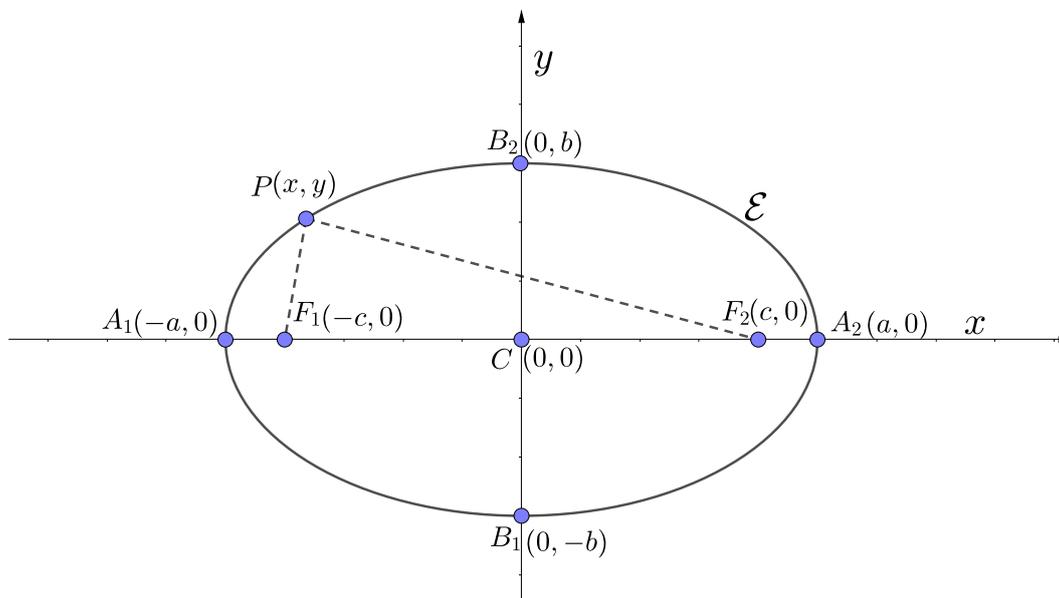


Figura 19: Elipse com centro na origem e eixo maior na horizontal

Proposição 2. Um ponto $P = (x, y)$ pertence a elipse \mathcal{E} se, e somente se,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Demonstração. Primeiramente, vamos provar que se P é um ponto da elipse, então a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{10}$$

é satisfeita, onde x e y são as coordenadas do ponto P . De fato, calculando a soma das distâncias de P até focos utilizando suas coordenadas, segue que

$$\begin{aligned} d(P, F_1) + d(P, F_2) &= 2a \Rightarrow \\ \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} &= 2a \Rightarrow \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado da equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
 (x+c)^2 + y^2 &= \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow \\
 x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow \\
 x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \Rightarrow \\
 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 4(a^2 - xc) \Rightarrow \\
 a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a^2 - xc.
 \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado da igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
 a^2 [(x-c)^2 + y^2] &= (a^2 - xc)^2 \Rightarrow \\
 a^2 [x^2 - 2xc + c^2 + y^2] &= a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \Rightarrow \\
 a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2xc + x^2c^2.
 \end{aligned}$$

Sabe-se que na elipse é válida a relação $a^2 = b^2 + c^2$, então podemos substituir c^2 por $c^2 = a^2 - b^2$ na expressão anterior.

$$\begin{aligned}
 a^2x^2 + a^2(a^2 - b^2) + a^2y^2 &= a^4 + x^2(a^2 - b^2) \Rightarrow \\
 a^2x^2 + a^4 - a^2b^2 + a^2y^2 &= a^4 + a^2x^2 - b^2x^2 \Rightarrow \\
 b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2.
 \end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros da igualdade acima por a^2b^2 temos,

$$\begin{aligned}
 \frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} &= \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \Rightarrow \\
 \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1.
 \end{aligned}$$

A equação (10) é a equação reduzida da elipse com centro na origem do plano cartesiano e com eixo maior sobre o eixo das abscissas x . Acabamos de mostrar que se um ponto $P = (x, y)$ pertence a elipse então suas coordenadas satisfazem a equação (10).

Vejam agora a recíproca, isto é, se a equação (10) é satisfeita, então (x, y) são as coordenadas de um ponto da elipse. De fato, multiplicando a equação (10) por a^2b^2 temos,

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Como $a > c$, segue que $a^2 > c^2$, i.e., $a^2 - c^2 > 0$. Substituindo b^2 por $b^2 = a^2 - c^2$ na expressão anterior temos,

$$\begin{aligned}
 (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \Rightarrow \\
 a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2.
 \end{aligned}$$

Subtraindo $2a^2xc$ em ambos os membros da igualdade acima, temos

$$\begin{aligned}
a^2x^2 - 2a^2xc - x^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2xc - a^2c^2 \Rightarrow \\
a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \Rightarrow \\
a^2[(x-c)^2 + y^2] &= (a^2 - xc)^2.
\end{aligned} \tag{11}$$

Precisamos verificar que $a^2 - xc > 0$. Com efeito,

$$\frac{x^2}{a^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x^2 \leq a^2 \Rightarrow |x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a.$$

Assim,

$$a^2 - xc \geq a^2 - ac > a^2 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 - xc > 0.$$

Como $a^2 - xc > 0$ e $a > 0$ segue da equação (11) que

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc.$$

Multiplicando por 4 a equação acima e somando x^2 , y^2 e c^2 em ambos os membros temos,

$$\begin{aligned}
4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 + y^2 + c^2 &= 4(a^2 - xc) + x^2 + y^2 + c^2 \Rightarrow \\
x^2 + y^2 + c^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 4xc + x^2 + y^2 + c^2 \Rightarrow \\
x^2 + y^2 + c^2 + 2xc &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2xc + x^2 + y^2 + c^2 \Rightarrow \\
(x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow \\
(x+c)^2 + y^2 &= (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2.
\end{aligned} \tag{12}$$

De forma análoga a equação (11), precisamos verificar que $2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \geq 0$. Com efeito,

$$\frac{y^2}{b^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 \leq b^2 \Rightarrow y^2 - b^2 \leq 0.$$

Como, $c^2 = a^2 - b^2$, $-a \leq x \leq a$ e $y^2 - b^2 \leq 0$, segue que,

$$(x-c)^2 + y^2 = x^2 - 2xc + c^2 + y^2 < a^2 + 2a^2 + c^2 + y^2 = a^2 + 2a^2 + a^2 - b^2 + y^2 = 4a^2 - b^2 + y^2 \leq 4a^2.$$

Portanto,

$$(x-c)^2 + y^2 \leq 4a^2 \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \leq 2a \Rightarrow 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \geq 0.$$

Logo, da equação (12) obtemos

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

isto é,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad (13)$$

A equação (13) trata-se da soma das distâncias entre um ponto de coordenada (x, y) e outros dois pontos fixos com coordenadas $(-c, 0)$ e $(c, 0)$, que por sua vez, resulta em $2a$. Portanto, $P = (x, y)$ é um ponto pertencente a elipse. \square

1.1.3 Rotação da elipse

Para realizar a rotação da elipse em torno da origem, basta rotacionar seus focos e um ponto que pertença a ela. Isso se deve ao fato de que, a partir dos focos, podemos reconstruí-la conforme sua definição. Destaca-se que a construção dessa elipse, segundo sua definição, será realizada utilizando o software GeoGebra. Para isso, são necessários apenas os focos e um ponto pertencente à elipse. Vamos agora explorar o processo para obter a rotação de um ponto qualquer no plano XY .

Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer, cujo o ângulo entre o segmento \overline{OP} e o eixo das abscissas é dado por ϕ conforme a Figura 38.

Se $P' = (x', y')$ é o ponto obtido pela rotação de P em torno da origem e θ é o ângulo de rotação entre esses ponto então, temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad x &= r \cos \phi. & \text{(iii)} \quad x' &= r \cos (\theta + \phi). \\ \text{(ii)} \quad y &= r \sin \phi. & \text{(iv)} \quad y' &= r \sin (\theta + \phi). \end{aligned}$$

Desenvolvendo (iii) e (iv) obtemos as expressões:

$$\begin{aligned} x' &= r \cos \theta \cos \phi - r \sin \theta \sin \phi \\ y' &= r \sin \theta \cos \phi + r \sin \phi \cos \theta. \end{aligned} \quad (14)$$

Substituindo (i) e (ii) nas equações (14), obtemos as coordenadas de P' em função das coordenadas de P e do ângulo de rotação.

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' &= x \sin \theta + y \cos \theta. \end{aligned} \quad (15)$$

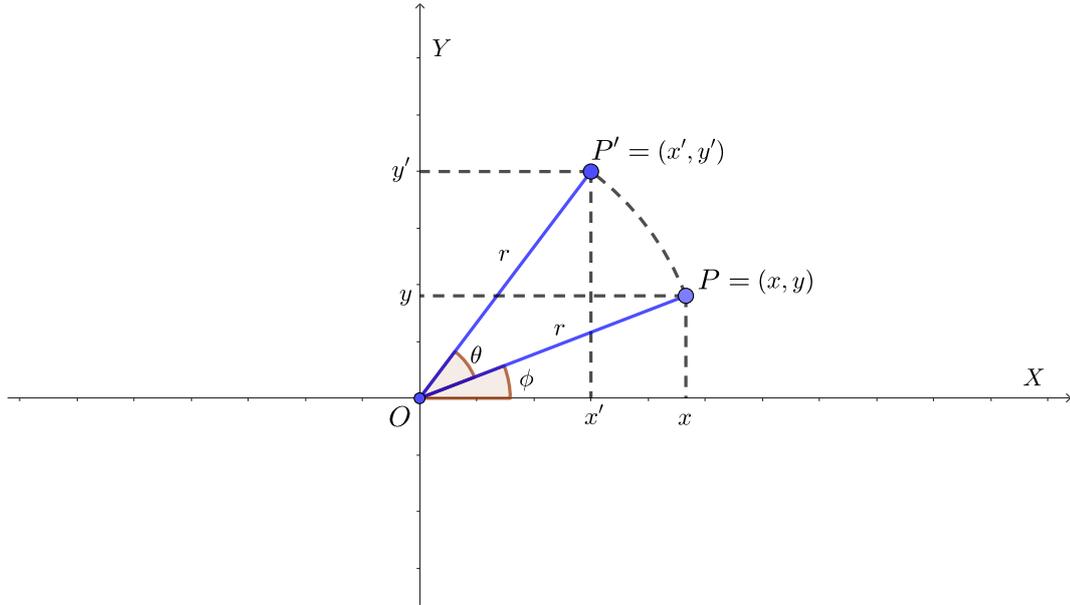


Figura 20: rotação de um ponto $P = (x, y)$.

Consideremos a elipse \mathcal{E} , cujo os focos se encontram sobre o eixo das abcissas, conforme mostrado na Figura 19. Se rotacionarmos os focos em $\theta = \pi/2$, em torno do centro $C = (0, 0)$, a equação (15) se resume em:

$$x' = -y \quad \text{e} \quad y' = x.$$

Portanto, trocando x' por $-y$ e y' por x podemos obter a rotação dos focos com $\theta = \pi/2$. Para completar a rotação de toda a elipse, basta reconstruí-la a partir das novas posições dos focos. Chamaremos \mathcal{E}' a elipse rotacionada. Veja a Figura 21.

A elipse \mathcal{E}' encontra-se centrada na origem porém, seu eixo maior agora está sobre o eixo das ordenadas com as coordenadas dos focos e dos vértices dadas por:

$$\begin{aligned} F'_1 &= (0, -c) \quad \text{e} \quad F'_2 = (0, c) \\ A'_1 &= (0, -a) \quad \text{e} \quad A'_2 = (0, a) \\ B'_1 &= (b, 0) \quad \text{e} \quad B'_2 = (-b, 0). \end{aligned}$$

Se antes da rotação o ponto $P = (x, y)$ pertencia a elipse \mathcal{E} então, a rotação de P dada por $P' = (-y, x)$ pertence a elipse \mathcal{E}' .

Como P' é um ponto da elipse, na qual foi rotacionada então,

$$d(P', F'_1) + d(P', F'_2) = 2a.$$

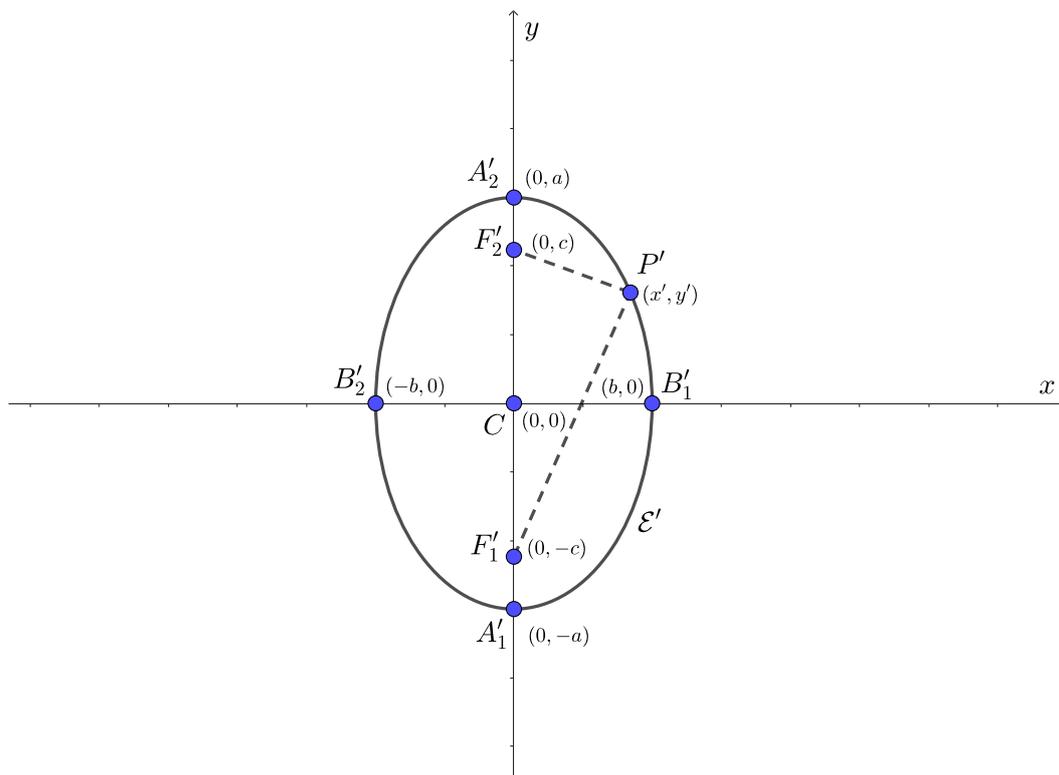


Figura 21: Elipse com centro na origem e eixo maior na vertical

Logo as coordenadas de P' satisfazem a equação reduzida da elipse.

$$\frac{(-y)^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1. \quad (16)$$

A equação (16) é a equação reduzida da elipse com centro na origem e eixo maior sobre o eixo das ordenadas. Já vimos também que a recíproca é verdadeira, ou seja, se a equação (16) é satisfeita então, x e y são as coordenadas de um ponto da elipse.

1.1.4 Translação da elipse

Analisaremos agora o caso em que a elipse possui seu centro C fora da origem $(0,0)$.

Inicialmente considere a elipse \mathcal{E} , com centro na origem $(0,0)$ e com coordenadas dos focos e vértices:

$$F_1 = (-c, 0), F_2 = (c, 0), A_1 = (-a, 0), A_2 = (a, 0), B_1 = (0, -b), \text{ e } B_2 = (0, b).$$

Seja o vetor $\vec{v} = (x_0, y_0)$. Ao realizarmos a translação do ponto $C = (0,0)$ na mesma direção e sentido e também com o mesmo módulo do vetor \vec{v} , obtemos o ponto C' com

exatamente as mesmas coordenadas de \vec{v} , isto é, $C' = (x_0, y_0)$. Para facilitar a compreensão, consideremos novos eixos ortogonais entre si, \bar{x} e \bar{y} , passando pelo ponto C' de tal forma que \bar{y} seja paralelo ao eixo das ordenadas e \bar{x} paralelo ao eixo das abscissas. Isso significa que a origem do novo sistema de coordenadas será o ponto C' . Para garantir a translação da elipse é suficiente transladar os seus focos e os vértices que estão sobre o eixo maior. Para isso, basta somar as coordenadas destes pontos com as novas coordenadas do centro C' mantendo assim as proporções originais entre os focos, os vértices do eixo maior e o centro. Para obter a elipse transladada basta então reconstruí-la a partir dos novos focos, conforme a sua definição. Chamaremos essa elipse transladada de \mathcal{E}' . Note que os vértices do eixo menor de \mathcal{E}' podem ser obtidos fazendo as intersecções da elipse com o eixo \bar{y} . Para realizar tal construção, utilizamos o software GeoGebra. Veja a Figura 22.

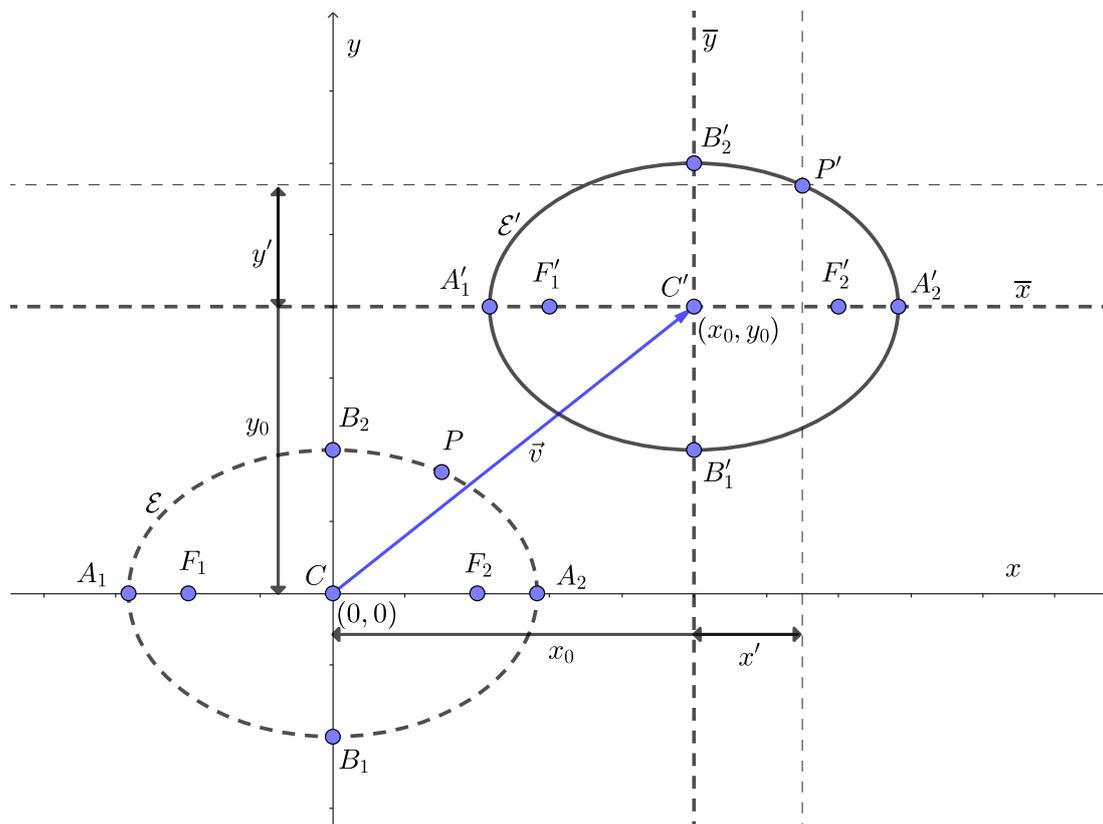


Figura 22: Translação da elipse cujo eixo maior está sobre o eixo das abscissas.

Como a elipse \mathcal{E}' tem centro em $C' = (x_0, y_0)$, então as coordenadas dos focos e vértices

em relação aos eixos originais x e y são:

$$F'_1 = (x_0 - c, y_0), F'_2 = (x_0 + c, y_0),$$

$$A'_1 = (x_0 - a, y_0), A'_2 = (x_0 + a, y_0),$$

$$B'_1 = (x_0, y_0 - b), \text{ e } B'_2 = (x_0, y_0 + b).$$

Seja $P' = (x', y')$ um ponto da \mathcal{E}' , onde suas coordenadas estão em relação aos eixos \bar{x} e \bar{y} . Vamos obter as coordenadas de P' em relação aos eixos cartesianos x e y originais.

Seja (x, y) as coordenadas de P' em relação aos eixos x e y , temos que:

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y'. \end{cases}$$

Isolando x' e y' nas equações acima obtemos,

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0. \end{cases} \quad (17)$$

Como $P' = (x', y')$ é um ponto da elipse \mathcal{E}' , nos novos eixos ortogonais, a definição é satisfeita:

$$P' = (x', y') \in \mathcal{E}' \iff d(P', F'_1) + d(P', F'_2) = 2a \iff \frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1, \quad (18)$$

pois, o movimento de translação preserva a forma e o tamanho dos objetos.

Substituindo as coordenadas de x' e y' , conforme (17), na equação (18) temos,

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (19)$$

A equação (19) é chamada de equação reduzida da elipse com centro fora da origem $(0, 0)$ e eixo maior paralelo ao eixo das abscissas.

De maneira análoga, considere a elipse (Figura 21) com seu eixo maior sobre o eixo das ordenadas y . As coordenadas dos focos e vértices são:

$$F_1 = (0, c), F_2 = (0, -c), A_1 = (0, a), A_2 = (0, -a), B_1 = (-b, 0) \text{ e } B_2 = (b, 0).$$

Ao realizar a translação do centro da elipse, inicialmente localizado em $C = (0, 0)$, movendo-o na mesma direção, sentido e com o mesmo comprimento do vetor $\vec{v} = (x_0, y_0)$,

obtemos um novo centro $C' = (x_0, y_0)$. Da mesma forma que fizemos anteriormente, para transladar a elipse, basta transladar os seus focos e os vértices que estão sobre o eixo maior. Por fim, reconstrói-se a elipse conforme a sua definição obtendo assim, a elipse \mathcal{E}' . Veja a (Figura 23).

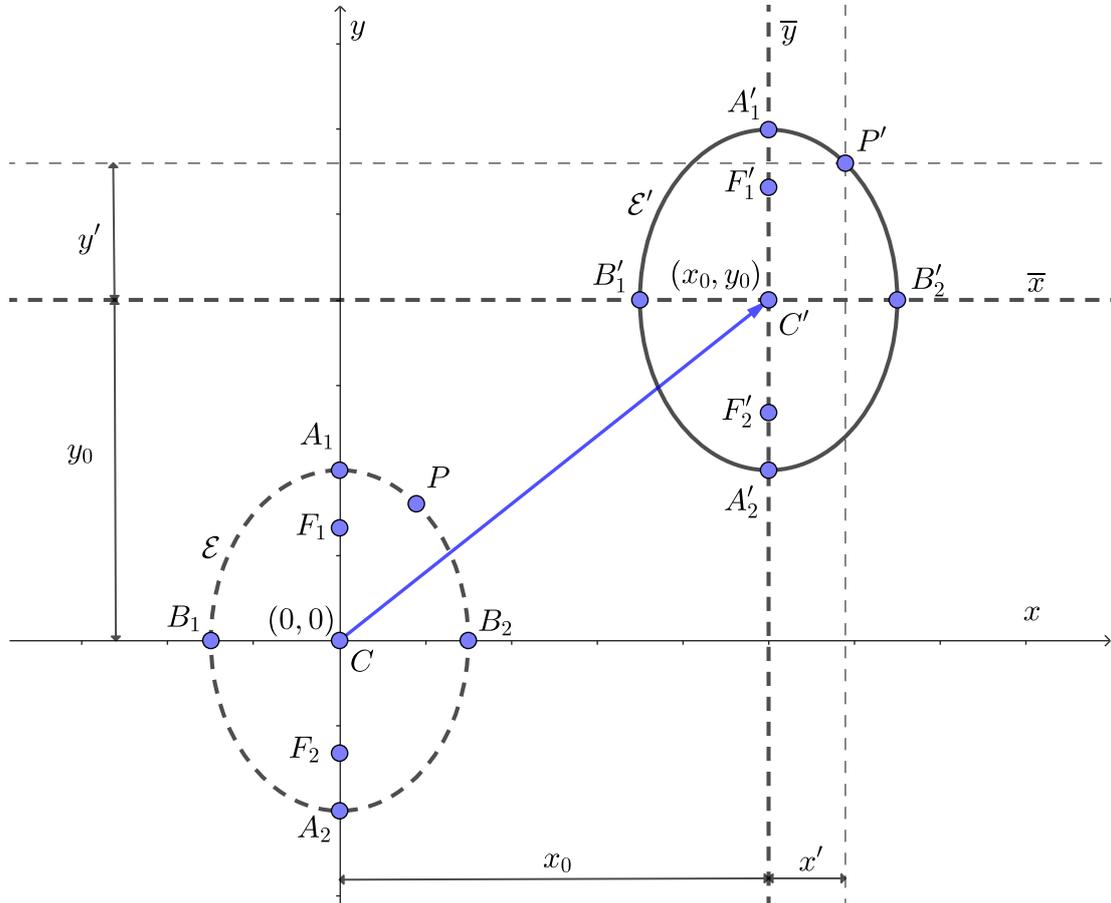


Figura 23: Translação da elipse cujo eixo maior está sobre o eixo das ordenadas.

Como a elipse \mathcal{E}' tem centro em $C' = (x_0, y_0)$, então as coordenadas dos focos e vértices em relação aos eixos originais x e y são:

$$F'_1 = (x_0, y_0 + c), \quad F'_2 = (x_0, y_0 - c),$$

$$A'_1 = (x_0, y_0 + a), \quad A'_2 = (x_0, y_0 - a),$$

$$B'_1 = (x_0 - b, y_0), \quad \text{e } B'_2 = (x_0 + b, y_0).$$

Assim como feito anteriormente, considere as coordenadas (x', y') do ponto P' em relação aos eixo \bar{x} e \bar{y} e também as coordenadas (x, y) , de P' em relação aos eixos originais x e y .

Logo, a equação (20) é satisfeita

$$P' = (x', y') \in \mathcal{E}' \iff d(P', F'_1) + d(P', F'_2) = 2a \iff \frac{(y')^2}{a^2} + \frac{(x')^2}{b^2} = 1. \quad (20)$$

Substituindo as coordenadas de x' e y' , conforme (17), na equação (20) segue que

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1. \quad (21)$$

A equação (21) é chamada de equação reduzida da elipse com centro fora da origem $(0, 0)$ e eixo maior paralelo ao eixo das ordenadas.

1.2 Hipérbole

Para tornar a introdução do conceito de hipérbole mais didática, sugere-se que o professor peça aos alunos para construírem uma hipérbole utilizando uma folha translúcida (papel vegetal) e dobraduras. Abaixo estão as instruções detalhadas para a construção:

Instruções passo a passo:

1. Em uma folha translúcida (papel vegetal), trace uma circunferência e marque um ponto P exterior a ela.
2. Dobre a folha de modo que o arco da circunferência passe pelo ponto P .
3. Abra a folha novamente e, com um lápis, trace a reta formada pela dobra, que atravessa a circunferência.
4. Repita os passos 2 e 3, de modo que no passo 2 você percorra todo o arco da circunferência.

As retas traçadas no passo 3 são tangentes a uma hipérbole, cujos focos são o centro da circunferência e o ponto P . Quanto mais retas forem traçadas, mais evidente a hipérbole se tornará. A Figura 24 ilustra a hipérbole obtida por meio das dobraduras.

Definição 2. *Uma Hipérbole \mathcal{H} é o lugar geométrico dos pontos P de um plano cuja a diferença, em módulo, das distâncias a dois pontos fixos desse plano F_1 e F_2 , chamados de focos, é igual a uma constante $2a > 0$.*

$$\mathcal{H} = \{P \mid |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}$$

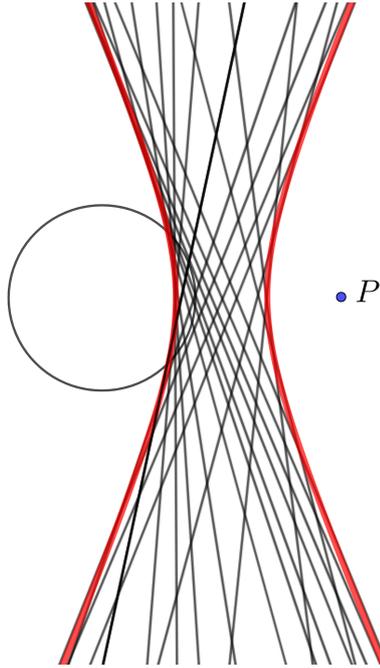


Figura 24: Hipérbole obtida por dobradura

A distância entre os focos é igual a uma constante positiva, $d(F_1, F_2) = 2c$, onde, $2a < 2c$.

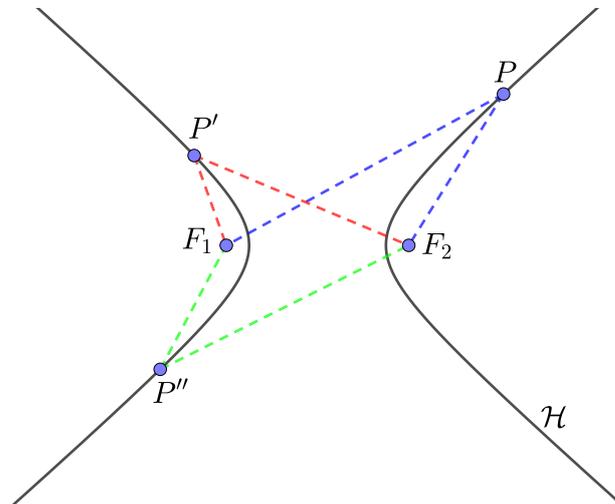


Figura 25: Hipérbole \mathcal{H} .

A Figura 25 representa a hipérbole \mathcal{H} , onde os pontos P , P' e P'' são pontos de \mathcal{H} nos quais, independente do ramo em que estejam, (direita ou esquerda), o módulo da diferença de suas distâncias até os focos é sempre constante e igual a $2a$.

Observe que a definição da hipérbole é similar à da elipse, com uma mudança importante: ao invés de somar as distâncias, agora subtraímos uma da outra. Isso torna necessário o uso do módulo para garantir que o resultado seja sempre positivo, independentemente de qual distância seja maior.

1.2.1 Elementos da hipérbole

- (i) **Focos:** São os pontos F_1 e F_2 .
- (ii) **Reta focal:** é a reta que contém os focos.
- (iii) **Eixo real ou transverso:** é o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$. Os pontos A_1 e A_2 são obtidos fazendo a intersecção da hipérbole com a reta focal e são chamados de vértices da hipérbole.
- (iv) **Distância focal:** é a distância $2c$ entre os focos. O eixo real ou transverso está contido no segmento F_1F_2 de comprimento $2c$.

Vejamos, a seguir, a construção do eixo real ou transverso da hipérbole \mathcal{H} . Considere ℓ como sendo a reta focal. Sejam A_1 e A_2 os vértices da hipérbole de modo que A_1 esteja localizado entre F_1 e A_2 .

O vértice A_1 dista $c - a$ do foco F_1 , assim como A_2 dista $c - a$ do foco F_2 . Primeiramente, mostraremos que $d(A_1, F_1) = d(A_2, F_2)$. De fato, seja x a distância de A_2 à F_2 e y a distância de A_1 à F_1 , conforme a Figura 26.

Como $A_1, A_2 \in \mathcal{H}$ segue que,

$$\begin{aligned} |d(A_2, F_1) - d(A_2, F_2)| &= 2a \implies \\ |(2a + y) - x| &= 2a. \end{aligned}$$

Como $2a + y > x$ podemos desconsiderar o módulo:

$$\begin{aligned} 2a + y - x &= 2a \implies \\ y &= x. \end{aligned}$$

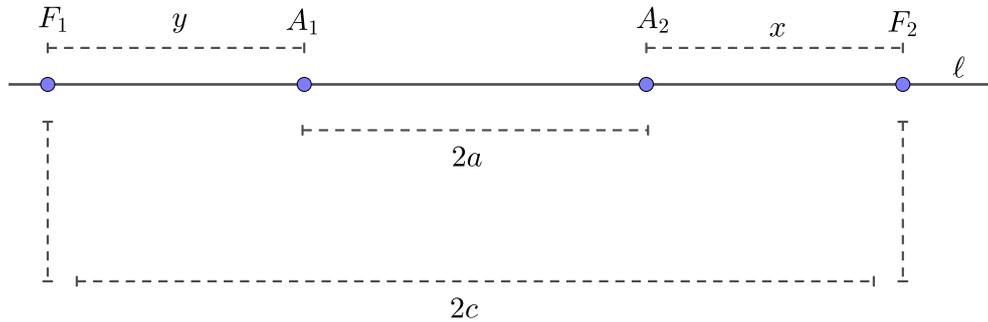


Figura 26: Eixo real ou transverso

Portanto, $d(A_1, F_1) = d(A_2, F_2)$. Aplicando novamente a definição da hipérbole temos que,

$$\begin{aligned} |d(A_1, F_1) - d(A_1, F_2)| &= 2a \implies \\ |x - (2c - x)| &= 2a \implies \\ |2x - 2c| &= 2a. \end{aligned}$$

Como $2x - 2c < 0$, então $|2x - 2c| = 2c - 2x$. Portanto,

$$\begin{aligned} 2c - 2x &= 2a \implies \\ x &= c - a. \end{aligned}$$

- (v) **Centro:** é o ponto médio C do segmento F_1F_2 . O ponto C também é ponto médio de A_1A_2 .
- (vi) **Reta não focal:** é a reta perpendicular à reta focal em C . Como C é ponto médio de F_1F_2 então, a reta não focal também é a mediatriz de F_1F_2 .
- (vii) **Eixo imaginário ou conjugado:** é o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$. Os pontos B_1 e B_2 , pertencem a reta não focal e são chamados de vértices imaginários da hipérbole.

Vejamos a construção do eixo imaginário ou conjugado da hipérbole \mathcal{H} . Considere ℓ' como sendo a reta não focal. Os vértices imaginários B_1 e B_2 não interceptam a hipérbole pois,

B_1 e B_2 pertencem a reta não focal, que por sua vez, é mediatriz do segmento F_1F_2 , logo:

$$\begin{aligned} d(B_1, F_1) = d(B_1, F_2) \quad \text{e} \quad d(B_2, F_1) = d(B_2, F_2) &\implies \\ |d(B_1, F_1) - d(B_1, F_2)| = 0 \quad \text{e} \quad |d(B_2, F_1) - d(B_2, F_2)| = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|d(B_1, F_1) - d(B_1, F_2)| = |d(B_2, F_1) - d(B_2, F_2)| = 0 \neq 2a.$$

Como a diferença das distâncias dos pontos B_1 e B_2 até os focos é diferente de $2a$, implica que B_1 e B_2 não fazem parte da hipérbole.

Para determinar os vértices imaginários B_1 e B_2 , devemos construir os segmentos $CB_1 = b$ e $CB_2 = b$, sobre a reta não focal ℓ' , de tal modo que b satisfaça a relação $c^2 = a^2 + b^2$, isto é, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Para realizar essa construção, basta seguir os passos:

- (a) A partir do eixo real já construído sobre a reta focal ℓ , marca-se o ponto C que é ponto médio de F_1F_2 e em seguida traçamos a reta não focal ℓ' , perpendicular a ℓ , passando pelo centro C .
- (b) Sobre o vértice A_2 traçamos uma reta r de modo que $r \perp \ell$.
- (c) Traçamos uma circunferência de centro em C e raio $CF_2 = c$ e marcamos o ponto P na intersecção da reta r com a circunferência.
- (d) O segmento A_2P tem comprimento $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Portanto, basta transportá-lo para a reta não focal com uma de suas extremidades no centro C . Obtendo assim, o vértice imaginário B_1 na outra extremidade.

Podemos notar que as diagonais do retângulo CA_2PB_1 são iguais ao raio da circunferência que por sua vez, mede c . Portanto, é válida a relação $c^2 = a^2 + b^2$. Veja a Figura 27.

Para se obter o ponto B_2 , basta traçar o simétrico de B_1 em relação ao centro C , sobre a reta não focal. Veja a Figura 28.

Pelo teorema de Pitágoras, os pontos B_1 e B_2 distam $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ do centro C . Note que diferente da elipse, na hipérbole a relação válida é $c^2 = a^2 + b^2$. A Figura 29 ilustra a hipérbole com seus eixos: Real e Imaginário.

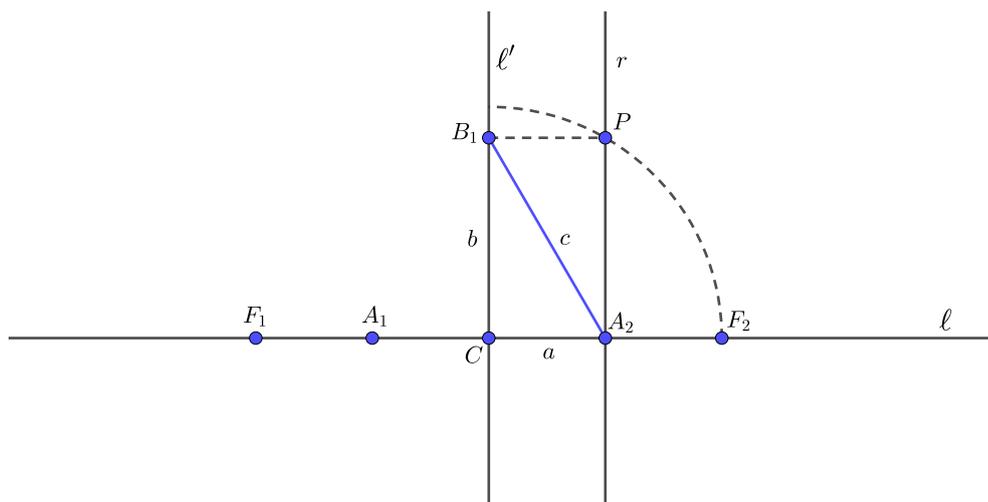


Figura 27: Eixo Imaginário.

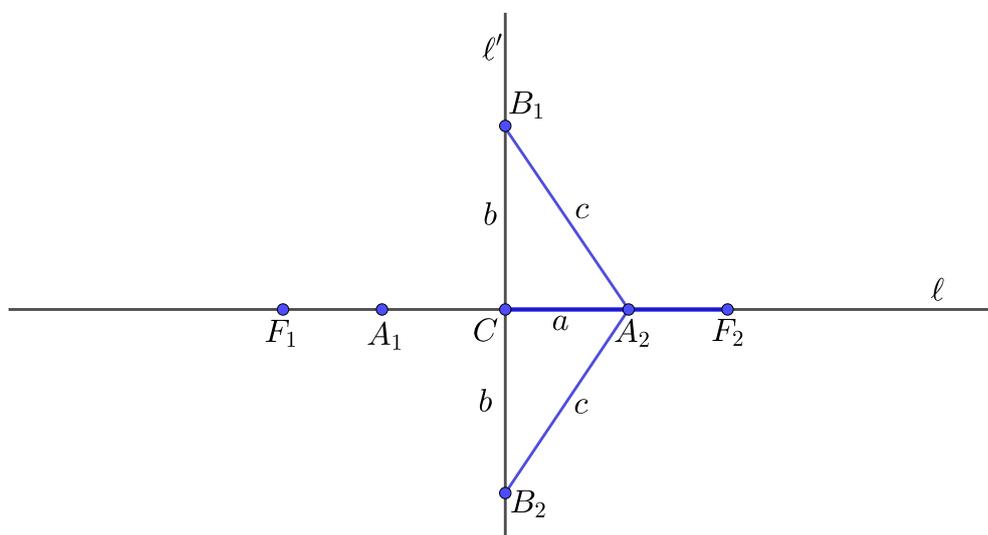


Figura 28: Eixo Real e Eixo Imaginário

Um outro elemento bastante importante na hipérbole é a sua excentricidade, que iremos definir a seguir.

(viii) **Excentricidade:** Chama-se excentricidade da hipérbole, o número real dado por:

$$e = \frac{c}{a}.$$

Como $c > a$, então a excentricidade é um número estritamente maior que 1.

A fim de aprofundarmos nossa compreensão sobre a excentricidade, é essencial que entendamos o conceito do ângulo de abertura da hipérbole. Para isso, considere os quatro

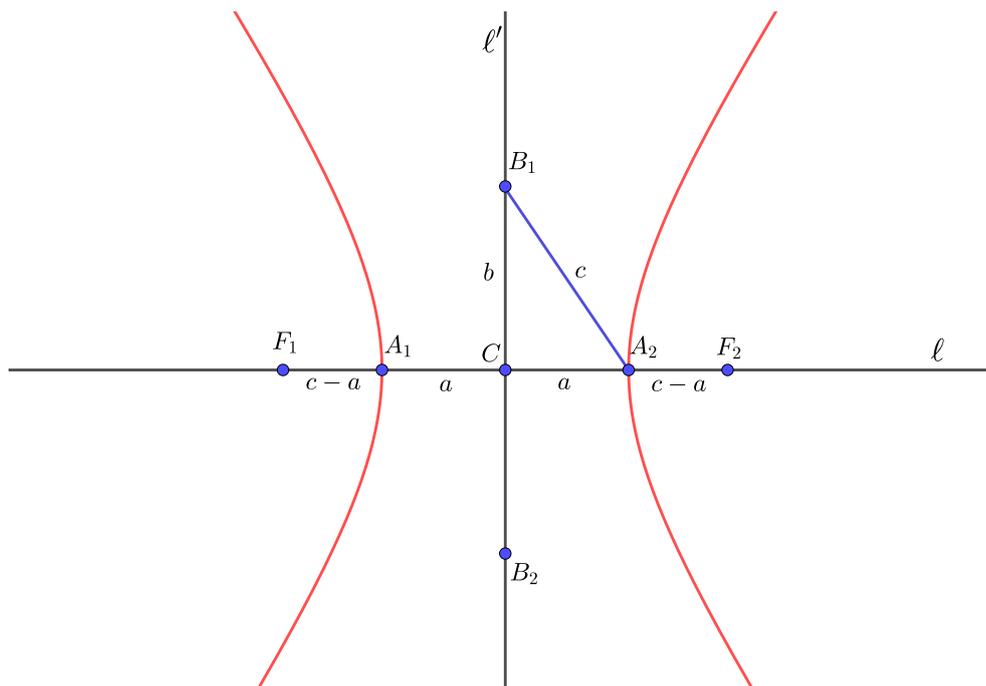


Figura 29: Hipérbole \mathcal{H} com seus eixos.

passos realizados na construção do eixo imaginário B_1B_2 , descrito anteriormente no item (vii). Contudo, traçaremos mais uma reta perpendicular a ℓ , agora passando pelo outro vértice A_1 e marquemos os pontos P, Q, R , e S , nos quais estão na intersecção das retas perpendiculares com a circunferência de centro em C . O retângulo $PQRS$ é chamado de retângulo de base da hipérbole e as retas que passam pelas suas diagonais são chamadas de assintotas da hipérbole. Veja a Figura 30.

Ainda sobre a Figura 30, temos o ângulo θ que é o ângulo do vértice C do triângulo CQR . Além disso, θ também é o ângulo entre as assintotas, que por sua vez é chamado de ângulo de abertura da hipérbole. A excentricidade está relacionada com o ângulo de abertura da hipérbole. Vamos explorar a razão por trás dessa relação.

Através dos triângulos retângulos A_1CQ e A_1CR podemos calcular a medida do ângulo θ que é dado por:

$$\theta = 2 \arctan \left(\frac{b}{a} \right).$$

Como a excentricidade é dada por c/a então, variando o parâmetro a e mantendo o parâmetro b constante, a excentricidade aumenta ou diminui de tal forma que é sempre maior que 1 pois, o parâmetro c também varia, já que é dado por: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Desta

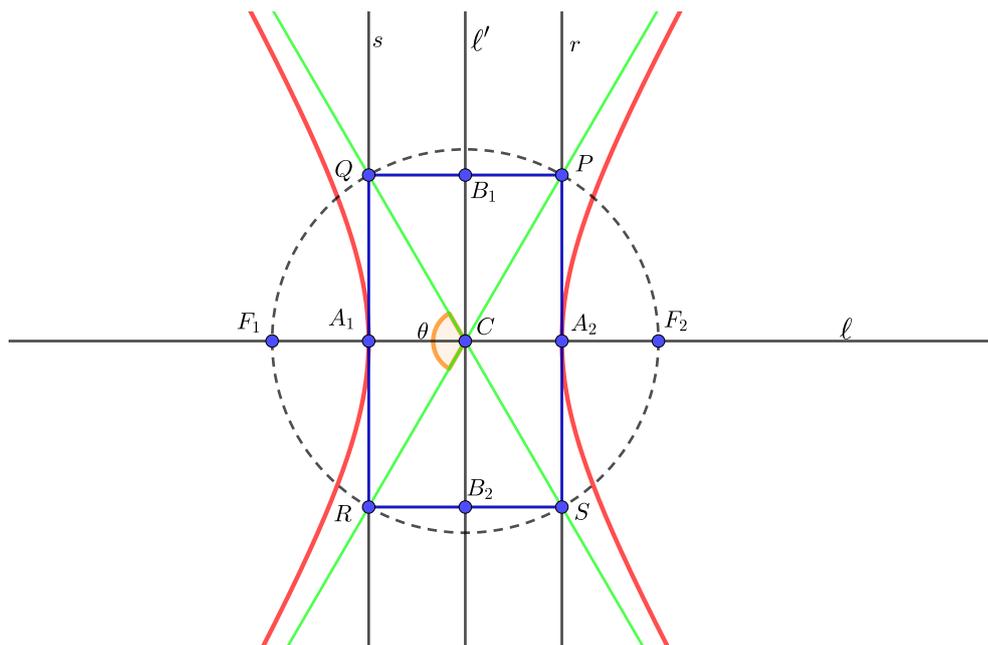


Figura 30: Assíntotas da Hipérbole.

forma, ao aumentarmos ou diminuirmos o valor da excentricidade, estamos também variando o ângulo de abertura θ , uma vez que ambos dependem do parâmetro a .

Portanto, ao mantermos b constante e aumentarmos o valor de a , a excentricidade tende a se aproximar de 1, uma vez que o parâmetro c também aumenta, garantindo sempre que $c > a$. Por outro lado, ao aumentar a , o ângulo θ diminui gradualmente, mas é importante ressaltar que θ permanecerá sempre acima de zero. Isso se deve ao fato de que se θ fosse igual a zero, as assíntotas coincidiriam com a reta focal, resultando na ausência da própria hipérbole.

No entanto, quando reduzimos o valor de a (sempre assegurando que $a > 0$), observamos um aumento na excentricidade. Simultaneamente, o ângulo θ aumenta progressivamente, aproximando-se de π . Vale ressaltar que θ permanecerá sempre menor que π , pois, caso contrário, as assíntotas se alinhariam com a reta não focal, o que resultaria na ausência da hipérbole.

Podemos concluir então, que a excentricidade nos fornece informações sobre a abertura da hipérbole. As figuras a seguir, ilustram uma hipérbole \mathcal{H} com excentricidades diferentes. Na Figura 31, temos que o valor da excentricidade é 1.03 que é próximo de 1 e portanto, a hipérbole é mais fechada. Já na Figura 32, a excentricidade é igual a 3.9

então, a hipérbole é mais aberta. Quando o valor da excentricidade é igual a $\sqrt{2}$, o ângulo de abertura da hipérbole é igual a $\pi/2$ e neste caso, a hipérbole é chamada de **hipérbole equilátera**. Veja a Figura 33.

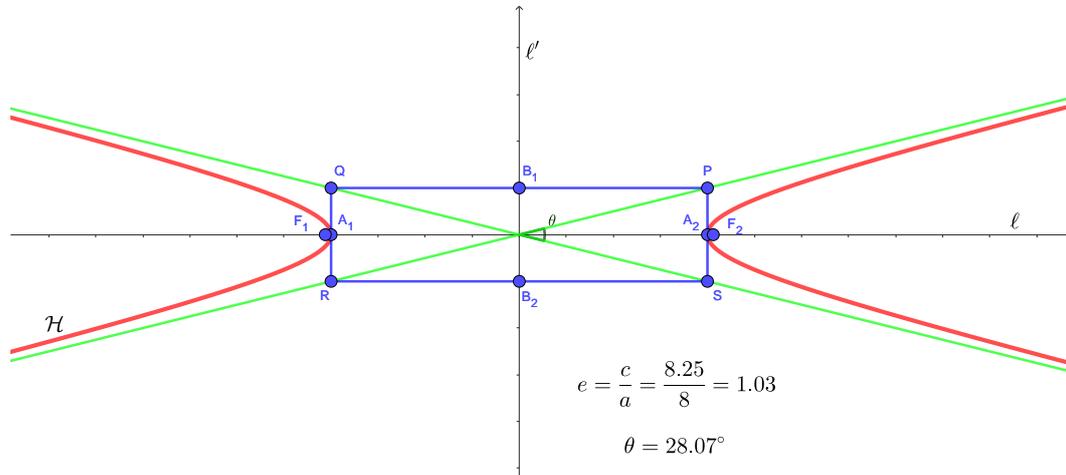


Figura 31: Abertura da Hipérbole \mathcal{H} para $e = 1.03$.

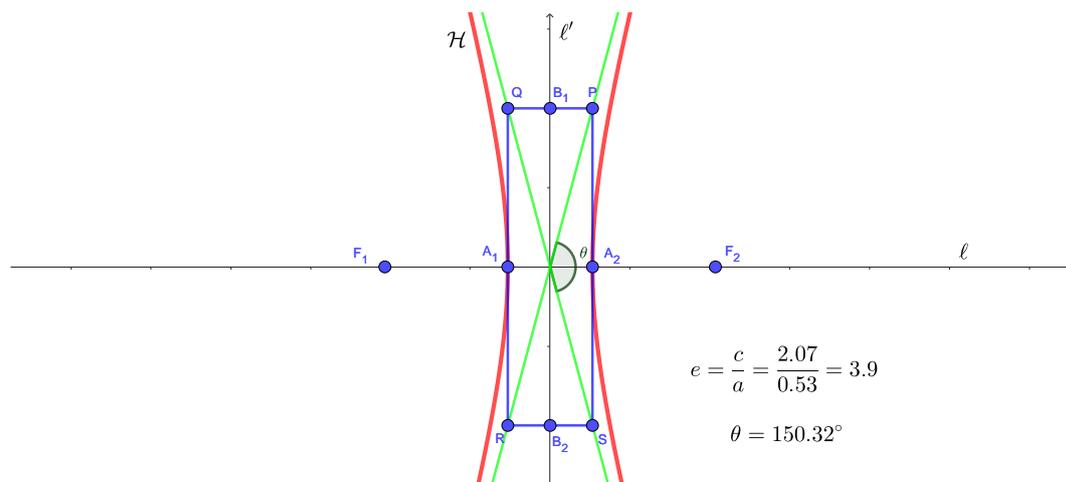


Figura 32: Abertura da Hipérbole \mathcal{H} para $e = 3.9$.

Da mesma forma que a elipse, a hipérbole também exibe a propriedade de simetria. A demonstração da proposição subsequente, que diz respeito à simetria na hipérbole, desdobra-se em três partes distintas: (a), (b) e (c). Essa demonstração é similar à realizada para a elipse.

Proposição 3. *A hipérbole \mathcal{H} é simétrica em relação à reta focal, reta não focal e ao centro.*

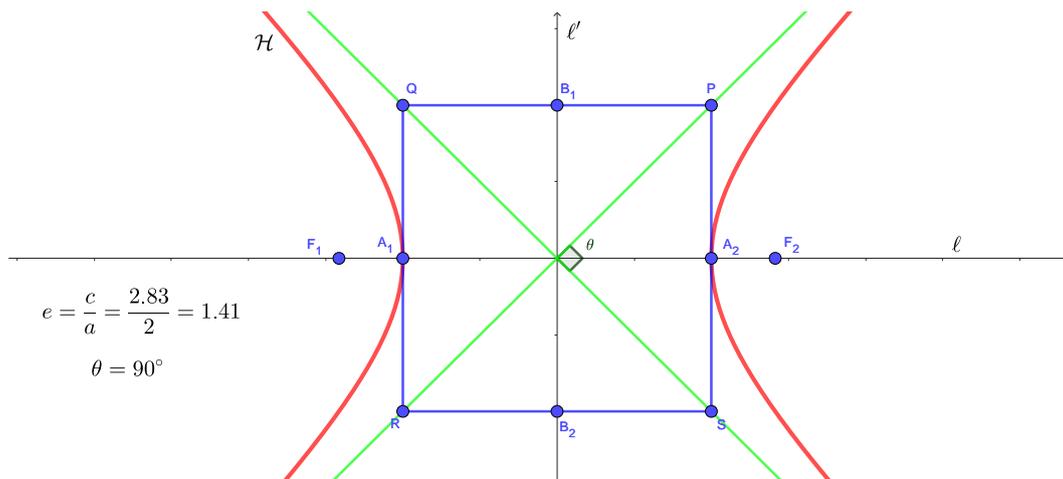


Figura 33: Hipérbole equilátera.

Demonstração. De fato,

- (a) Seja $P \in \mathcal{H}$ e P' o simétrico de P , em relação à reta focal, conforme a Figura 34. Os triângulos retângulos F_2PQ e $F_2P'Q$ e os triângulos retângulos F_1PQ e $F_1P'Q$

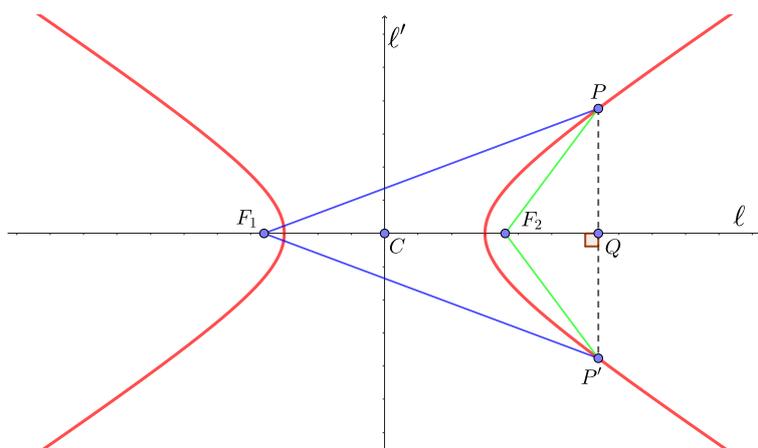


Figura 34: Simetria em relação a reta focal.

são congruentes pelo caso LAL . Logo, temos

$$d(F_1, P) = d(F_1, P') \text{ e } d(F_2, P) = d(F_2, P').$$

Portanto,

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |d(P'F_1) - d(P', F_2)| = 2a,$$

o que implica que $P' \in \mathcal{H}$. Como o ponto P' também pertence a hipérbole \mathcal{H} , significa que a mesma é simétrica em relação a reta focal.

- (b) Seja $P \in \mathcal{H}$ e P'' o ponto simétrico de P em relação à reta não focal. O ponto Q é a projeção ortogonal de P e P'' sobre a reta ℓ' . Definimos o ponto R como a interseção das retas PF_1 e $P''F_2$ com a reta ℓ' . O ponto C representa o centro da hipérbole. Veja a Figura 35.

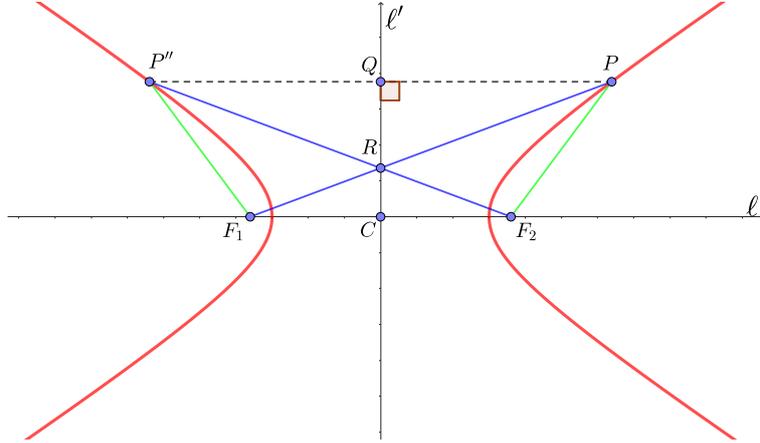


Figura 35: Simetria em relação a reta não focal.

Podemos observar que os triângulos retângulos PQR e $P''QR$ são congruentes, assim como os triângulos retângulos F_1RC e F_2RC também são congruentes, ambos pelo caso LAL . Com base nisso, concluímos que os triângulos $F_1P''R$ e F_2PR também são congruentes pelo caso LAL . Logo, temos

$$d(P, R) = d(P'', R) \text{ e } d(F_1, R) = d(F_2, R),$$

o que implica que

$$d(P, F_1) = d(P'', F_2) \text{ e também } d(P, F_2) = d(P'', F_1).$$

Portanto,

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |d(P'', F_2) - d(P'', F_1)| = 2a.$$

Concluímos que o ponto P'' também pertence a hipérbole \mathcal{H} , ou seja, a hipérbole é simétrica em relação a reta não focal.

- (c) Seja $P \in \mathcal{H}$ e P''' o simétrico de P em relação ao centro C , veja a Figura 36.

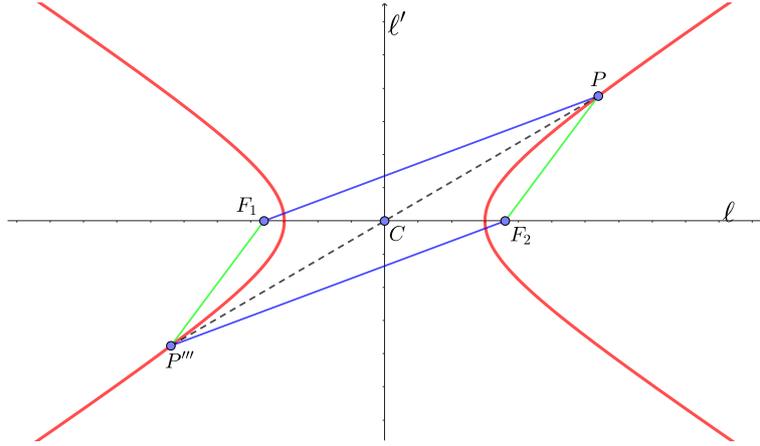


Figura 36: Simetria em relação ao centro.

Os triângulos PCF_2 e $P'''CF_1$ são congruentes, assim como os triângulos PCF_1 e $P'''CF_2$ também são congruentes, ambos pelo caso LAL . A partir disso podemos concluir que,

$$d(P, F_1) = d(P''', F_2) \text{ e } d(P, F_2) = d(P''', F_1).$$

Assim temos a igualde:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |d(P''', F_2) - d(P''', F_1)| = 2a.$$

Dessa forma, concluímos que o ponto P''' pertence à hipérbole \mathcal{H} . Sendo assim, a hipérbole exibe simetria em relação ao seu centro.

□

1.2.2 Forma canônica da hipérbole

De forma similar à realizada na elipse, iremos obter a equação da hipérbole usando os eixos ortogonais do plano cartesiano com base na definição de hipérbole, na qual foi apresentada.

Inicialmente, consideremos a hipérbole centrada na origem do plano cartesiano xOy , com as coordenadas dos focos dadas por $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Seja P um ponto qualquer do ramo direito da hipérbole \mathcal{H} , com coordenadas cartesianas $P = (x, y)$, conforme ilustrado na Figura 37. Sob essas condições, a seguinte proposição é válida:

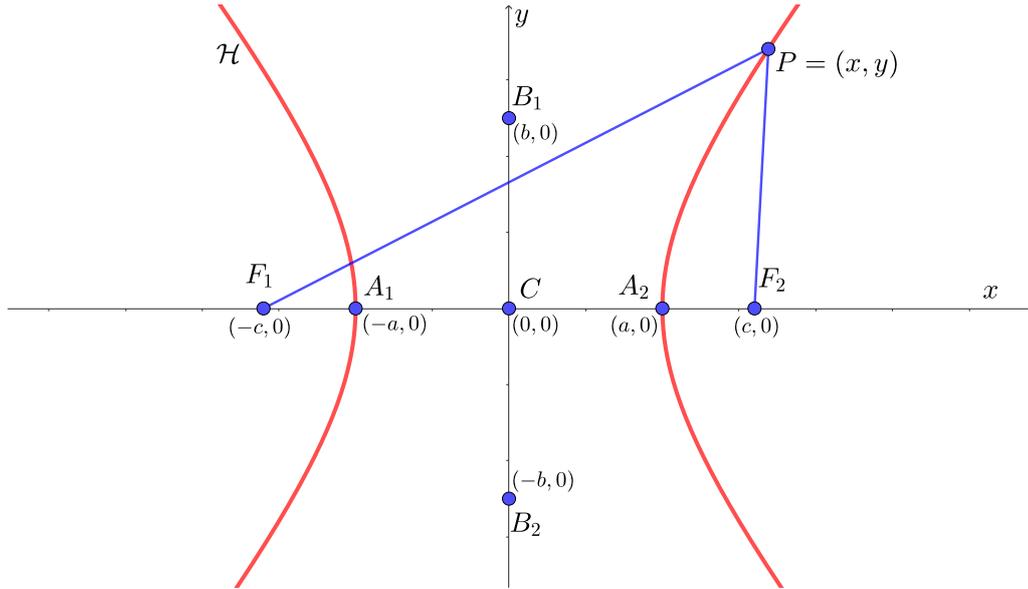


Figura 37: Hipérbole com eixo real sobre o eixo das abcissas.

Proposição 4. *Um ponto $P = (x, y)$ pertence a hipérbole se, e somente se,*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

em que $b^2 = c^2 - a^2$.

Demonstração. É suficiente realizar esta demonstração considerando um ponto P em um dos ramos da hipérbole, em razão de sua simetria. Pela definição de hipérbole sabemos que

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a,$$

Calculando a diferença das distâncias de P até os focos, utilizando as coordenadas destes pontos, vem que:

$$|\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}| = 2a.$$

Como P pertence ao ramo direito da hipérbole então, podemos desconsiderar o módulo.

Logo,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$$\begin{aligned}(x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \implies \\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \implies \\ cx - a^2 &= a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Elevando novamente ao quadrado, temos

$$\begin{aligned}c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \implies \\ (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2).\end{aligned}$$

Como $b^2 = c^2 - a^2$, ficamos com

$$\begin{aligned}b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2 \implies \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1.\end{aligned}\tag{22}$$

Assim, quando um ponto P pertence ao ramo direito da hipérbole, suas coordenadas satisfazem a equação (22), que é conhecida como a forma reduzida da equação da hipérbole. Se $P = (x, y)$ estiver localizado no ramo esquerdo (ou seja, $x < 0$), então o ponto $P' = (-x, y)$ estará no ramo direito. Isso implica que a equação mencionada será satisfeita para as coordenadas $(-x, y)$ pois,

$$\frac{(-x)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Portanto, a equação da hipérbole é válida para as coordenadas de qualquer ponto pertencente a ela, independentemente de estar situado no ramo direito ou esquerdo. Em outras palavras, ambos os ramos da hipérbole satisfazem a mesma equação, refletindo a simetria dessa curva.

De forma recíproca, vamos mostrar que se um ponto $P = (x, y)$ satisfaz a equação (22), então ele pertence à hipérbole.

De fato, vamos considerar inicialmente o caso em que a coordenada x de P é positiva. Realizaremos o processo inverso à dedução apresentada anteriormente, partindo da equação (22), e demonstraremos que P está situado no ramo direito da hipérbole. Para isso, em ambos os momentos em que elevamos ao quadrado, nos dois lados da equação,

será necessário extrair a raiz quadrada durante a reversão. Portanto, é crucial demonstrar também que os seguintes termos da igualdade são positivos:

$$cx - a^2 > 0 \quad \text{e} \quad 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} > 0.$$

De fato, pela equação (22) implica que:

$$\frac{x^2}{a^2} \geq \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \implies x^2 \geq a^2 \implies -x \leq a \leq x.$$

Sabemos que $c > a$, o que implica que $c - a > 0$. Portanto,

$$cx - a^2 \geq ca - a^2 = a(c - a) > 0 \implies cx - a^2 > 0.$$

Analogamente, temos que:

$$\frac{y^2}{b^2} \geq \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = -1 \implies y^2 \geq -b^2 \implies y^2 + b^2 \geq 0.$$

Como $c^2 = a^2 + b^2$ e considerando que $cx > a^2$, segue que:

$$(x-c)^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 > a^2 - 2a^2 + a^2 + b^2 + y^2 > a^2 - 2a^2 + a^2 = 0.$$

Portanto,

$$(x-c)^2 + y^2 > 0 \implies \sqrt{(x-c)^2 + y^2} > 0 \implies 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} > 2a > 0.$$

Realizando o processo inverso da dedução temos que:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \implies \\ b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2 \implies \\ (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2) \implies \\ c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \implies \\ (cx - a^2)^2 &= a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \implies \\ cx - a^2 &= a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} \implies \\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} + x^2 - 2cx \\ &\quad + c^2 + y^2 \implies \\ (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \implies \\ (x+c)^2 + y^2 &= (2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 \implies \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \implies \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a. \end{aligned}$$

Portanto,

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a.$$

Logo concluímos que P é um ponto da hipérbole que está localizado em seu ramo direito. O caso em que a coordenada x de P é negativa, então, o ponto $P' = (-x, y)$ tem abscissa positiva e suas coordenadas também satisfazem a equação (22). Logo P' está no ramo direito da hipérbole e conseqüentemente $P = (x, y)$ está no ramo esquerdo. Portanto, as coordenadas de um ponto que satisfazem a equação (22) é um ponto da hipérbole no qual, pertence ao ramo direito ou esquerdo. \square

Além da equação da hipérbole, podemos obter também as equações de suas assíntotas. Já definimos anteriormente que as assíntotas são as retas que passam pelas diagonais do retângulo de base da hipérbole. Os lados desse retângulo são obtidos traçando as retas $x = a$, $x = -a$, $y = b$ e $y = -b$, onde as interseções dessas retas delimitam os seus vértices P , Q , R e S . Portanto, o retângulo de base possui dimensões $2a \times 2b$. Além disso, vimos também que, por construção, as diagonais PR e QS tem comprimento $2c$. Para efeitos da discussão a seguir, considere a hipérbole com os focos sobre o eixo das abscissas. Veja a Figura 38.

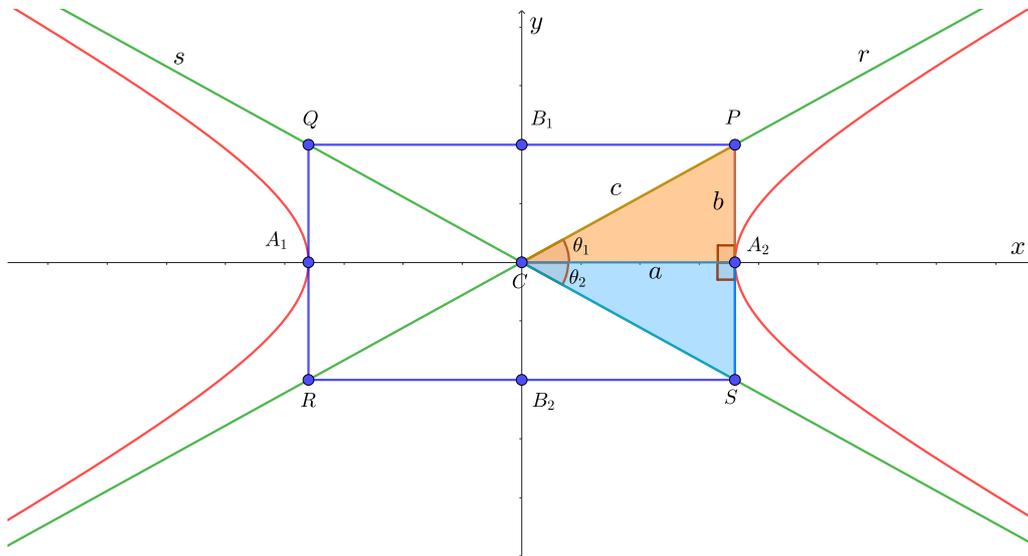


Figura 38: Retângulo de base e assíntotas da hipérbole.

Sejam r e s as assíntotas da hipérbole. Suas equações reduzidas são da forma:

$$r : y = m_1x + n_1 \quad \text{e} \quad s : y = m_2x + n_2.$$

A partir dos triângulos retângulos PCA_2 e SCA_2 , marcamos os ângulos $P\hat{C}A_2 = \theta_1$ e $S\hat{C}A_2 = \theta_2$, conforme a Figura 38 .

Logo, podemos obter os coeficientes angulares m_1 e m_2 :

$$m_1 = \tan \theta_1 = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad m_2 = \tan \theta_2 = -\frac{b}{a}.$$

Como as assíntotas passam pela origem, então os coeficientes lineares n_1 e n_2 são nulos e portanto, as equações das assíntotas são:

$$r : y = \frac{b}{a}x \quad \text{e} \quad s : y = -\frac{b}{a}x.$$

Seja $P = (x, y)$ um ponto pertencente a hipérbole. Se P percorre a hipérbole, afastando-se da origem, ao longo de seus ramos então, a distância vertical de P até a assíntota tende a diminuir, ou seja, a hipérbole se aproxima de suas assíntotas no infinito. A proposição a seguir se trata exatamente desta característica das assíntotas.

Proposição 5. *Para cada $x > 0$, considere no primeiro quadrante os pontos:*

- $P(x, y_P)$ na hipérbole;
- $Q(x, y_Q)$ na assíntota.

Então,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y_Q - y_P = 0.$$

Demonstração. Os pontos P e Q têm a mesma coordenada x , diferindo apenas nas coordenadas y . O objetivo é mostrar que, à medida que x tende ao infinito, a distância vertical entre P e Q se aproxima de zero.

De fato, pela equação da hipérbole podemos obter a ordenada y_P :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \implies y_P = b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}.$$

Lembrando que y_P é positivo no primeiro quadrante.

Da mesma forma, a equação da assíntota nos fornece a ordenada y_Q :

$$y_Q = \frac{bx}{a}.$$

Fazendo a diferença entre y_Q e y_P temos que:

$$\begin{aligned} y_Q - y_P &= \frac{bx}{a} - b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \implies \\ &= \frac{bx}{a} - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \implies \\ &= \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}). \end{aligned}$$

Multiplicando e dividindo pelo conjugado na expressão acima, temos que:

$$\begin{aligned} y_Q - y_P &= \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) \cdot \frac{(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{(x + \sqrt{x^2 - a^2})} \implies \\ y_Q - y_P &= \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y_Q - y_P = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0.$$

Além disso, como a , b e x são todos positivos, a diferença $y_Q - y_P$ é sempre maior que zero, o que implica que a assíntota está sempre acima da hipérbole no primeiro quadrante. A proposição demonstrada também é válida para os outros quadrantes devido à simetria da hipérbole [14]. □

1.2.3 Rotação da hipérbole

Considere uma hipérbole com centro na origem do plano cartesiano na qual, seus focos estão sobre o eixo das abcissas. Para realizarmos a rotação da hipérbole, em torno da origem, é necessário realizar a rotação de seus focos e dos vértices reais. Com isso, garantimos que a distância $2a$ entre os vértices seja a mesma na hipérbole rotacionada. Para completar a rotação de toda a hipérbole, basta reconstruí-la novamente a partir da sua definição. Destaca-se que a construção dessa hipérbole, segundo sua definição, será realizada utilizando o software GeoGebra. Para isso, são necessários apenas os focos e um ponto pertencente à hipérbole.

Conforme já discutido anteriormente na rotação da elipse, em torno da origem, ao rotacionar os focos e vértices com ângulo $\theta = \pi/2$, para obter as suas coordenadas (x', y') basta trocarmos x' por $-y$ e y' por x .

Se $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ são os focos e $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$ são os vértices, ambos da hipérbole \mathcal{H} antes da rotação então, suas novas coordenadas após a rotação são:

$$F'_1 = (0, -c) \quad \text{e} \quad F'_2 = (0, c)$$

$$A'_1 = (0, -a) \quad \text{e} \quad A'_2 = (0, a).$$

Reconstruindo novamente a hipérbole a partir da sua definição, obtemos a hipérbole \mathcal{H}' rotacionada. Veja a Figura 39.

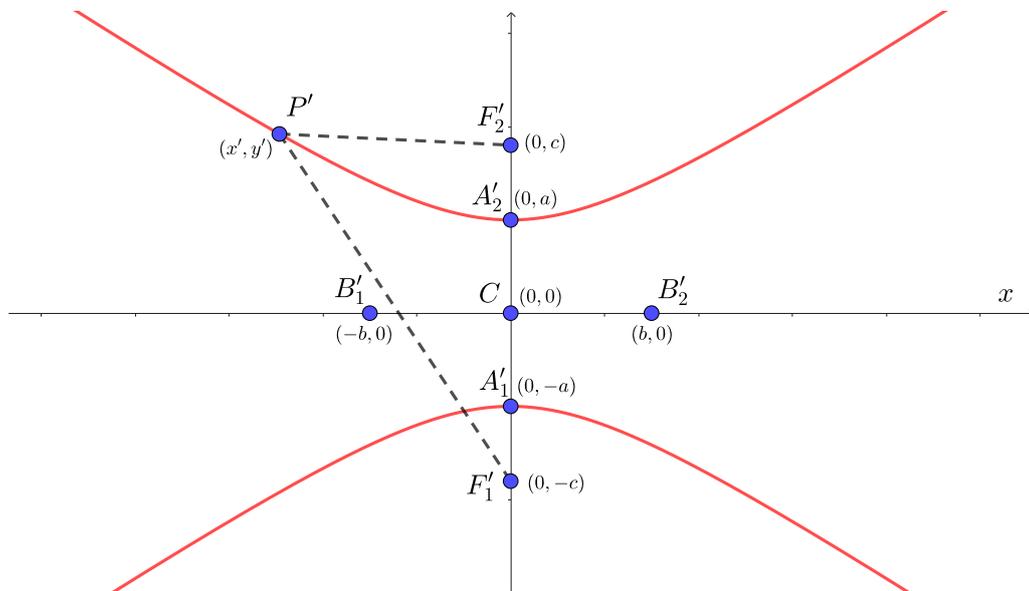


Figura 39: hipérbole rotacionada em torno da origem.

Se antes da rotação o ponto $P = (x, y)$ pertencia a hipérbole \mathcal{H} então, a rotação de P dada por $P' = (-y, x)$ pertence a hipérbole \mathcal{H}' . Como P' é um ponto da hipérbole, na qual foi rotacionada então,

$$|d(P', F'_1) - d(P', F'_2)| = 2a.$$

Logo as coordenadas de P' satisfazem a equação reduzida da hipérbole.

$$\frac{(-y)^2}{a^2} - \frac{(x)^2}{b^2} = 1 \quad \implies \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (23)$$

A equação (23) representa a equação reduzida da hipérbole quando seus focos estão localizados no eixo das ordenadas. Como já havíamos discutido anteriormente, não importa o ramo em que esteja localizado o ponto P' , suas coordenadas irão satisfazer a equação (23). Além disso a recíproca também é válida pois, se a equação (23) é satisfeita então x e y são as coordenadas de um ponto da hipérbole com eixo real na vertical.

1.2.4 Translação da hipérbole

Analisaremos agora o caso em que a hipérbole possui seu centro C fora da origem $(0, 0)$.

Inicialmente considere a hipérbole \mathcal{H} , com centro na origem $(0, 0)$ e com coordenadas dos focos e vértices:

$$F_1 = (-c, 0), F_2 = (c, 0), A_1 = (-a, 0), A_2 = (a, 0), B_1 = (0, b), \text{ e } B_2 = (0, -b).$$

Conforme fizemos no caso da elipse, definiremos um vetor $\vec{v} = (x_0, y_0)$. Ao realizarmos a translação do centro $C = (0, 0)$ na mesma direção e sentido e também com o mesmo módulo do vetor \vec{v} , obtemos o ponto C' com exatamente as mesmas coordenadas de \vec{v} , isto é, $C' = (x_0, y_0)$. Consideremos novos eixos \bar{x} e \bar{y} , passando pelo ponto C' de tal forma que \bar{y} seja paralelo ao eixo das ordenadas e \bar{x} paralelo ao eixo das abscissas. Portanto, C' é a origem do novo sistema de coordenadas. Para transladar toda a hipérbole, de modo que C' seja seu novo centro, é necessário realizar a translação dos focos e também dos vértices reais. Para isso, basta somar as coordenadas dos focos com as coordenadas do centro C' e também somar as coordenadas dos vértices reais com as coordenadas do centro C' , mantendo assim as proporções originais entre os focos e o centro e entre os vértices e o centro. Para completar a translação da hipérbole basta então reconstruí-la a partir de sua definição. Chamaremos essa hipérbole transladada de \mathcal{H}' . Para a construção, segundo a definição, utilizamos o GeoGebra, veja a Figura 40.

As coordenadas dos focos e vértice da hipérbole transladada \mathcal{H}' em relação aos eixos x e y são:

$$\begin{aligned} F'_1 &= (x_0 - c, y_0) \text{ e } F'_2 = (x_0 + c, y_0) \\ A'_1 &= (x_0 - a, y_0) \text{ e } A'_2 = (x_0 + a, y_0) \\ B'_1 &= (x_0, y_0 + b) \text{ e } B'_2 = (x_0, y_0 - b). \end{aligned}$$

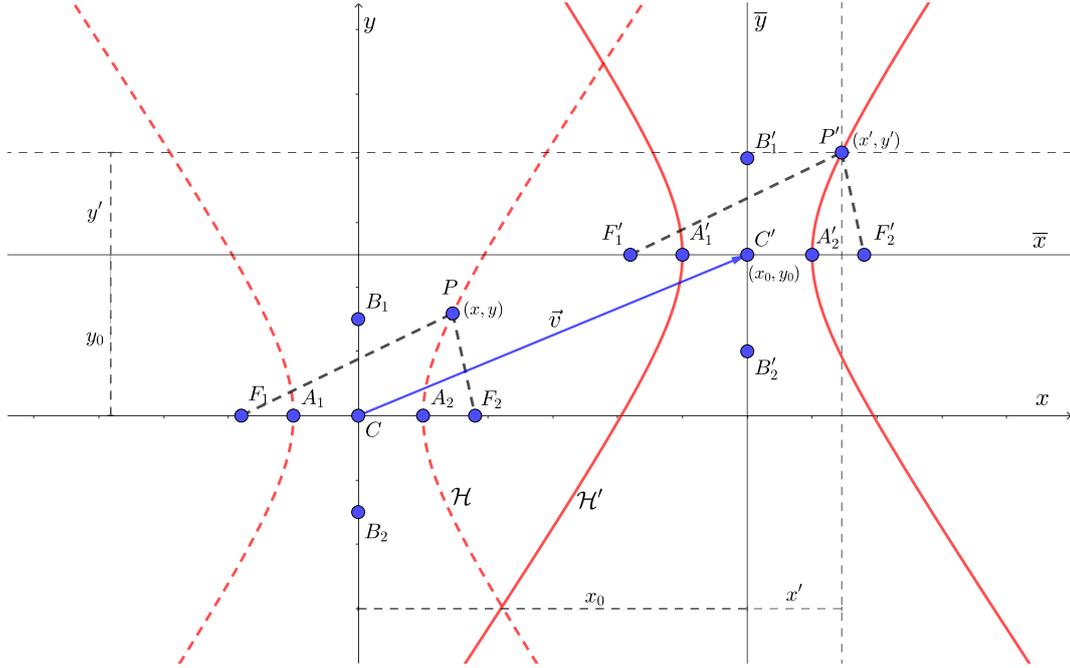


Figura 40: hipérbole rotacionada em torno da origem.

Seja (x', y') as coordenadas de P' em relação aos eixos \bar{x} e \bar{y} . De forma análoga ao que realizamos no caso da elipse, vamos obter as coordenadas de P' em relação aos eixos x e y originais. Se (x, y) forem as coordenadas P' em relação aos eixos x e y temos que:

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y'. \end{cases}$$

Isolando x' e y' nas equações acima obtemos,

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0. \end{cases} \quad (24)$$

Como $P' = (x', y')$ é um ponto da hipérbole \mathcal{H}' nos novos eixos ortogonais, a definição é satisfeita:

$$P' = (x', y') \in \mathcal{H}' \iff |d(P', F'_1) - d(P', F'_2)| = 2a \iff \frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1. \quad (25)$$

Substituindo as coordenadas de x' e y' , conforme (24), na equação (25) temos,

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (26)$$

A equação (26) é chamada de equação reduzida da hipérbole com centro fora da origem com seu eixo real paralelo ao eixo das abscissas.

Vejam agora como obter uma hipérbole com centro fora da origem, cujos focos estão sobre um eixo paralelo ao eixo das ordenadas. Para facilitar o entendimento, chamaremos de \mathcal{H} a hipérbole na qual possui seu centro na origem e os focos sobre o eixo das abscissas e chamaremos de \mathcal{H}' a hipérbole obtida através da translação, seguida de uma rotação, da hipérbole \mathcal{H} .

No processo de translação da hipérbole \mathcal{H} , descrito anteriormente, vimos que foi necessário transladar apenas os focos e os vértices reais pois, podemos reconstruí-la a partir destes pontos usando a sua definição. Portanto, para obtermos a hipérbole \mathcal{H}' , basta transladarmos os focos e os vértices reais, da hipérbole \mathcal{H} e depois rotacioná-los em torno da nova origem, com um ângulo $\theta = \pi/2$. Por fim, construímos a hipérbole \mathcal{H}' de acordo com a definição.

Seja $C' = (x_0, y_0)$ o centro da hipérbole \mathcal{H}' e considere, \bar{x} e \bar{y} , eixos auxiliares, ortogonais entre si, passando pelo ponto C' . Nestas condições, vejamos como transladar um ponto $P = (x_P, y_P)$ e depois rotacioná-lo em torno do centro C' . A Figura 41 ilustra o procedimento que queremos realizar.

Se o ponto $P' = (x', y')$ for resultado da translação de P e $P'' = (x'', y'')$ for resultado da rotação de P' em torno do centro $C' = (x_0, y_0)$, então podemos escrever as coordenadas de P'' conforme a equação:

$$\begin{cases} x'' = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y'' = x' \sin \theta + y' \cos \theta. \end{cases} \quad (27)$$

Durante o estudo da elipse, vimos que a equação (27) descreve a rotação de um ponto em torno da origem. Neste caso, estamos considerando C' como a origem de novos eixos coordenados e por este motivo podemos escrever as coordenadas de P'' conforme a equação mencionada.

Considere as coordenadas (x_1, y_1) , como sendo as coordenadas de P' em relação aos eixos x e y originais. Como (x', y') são as coordenadas de P' em relação aos eixos \bar{x} e \bar{y} ,

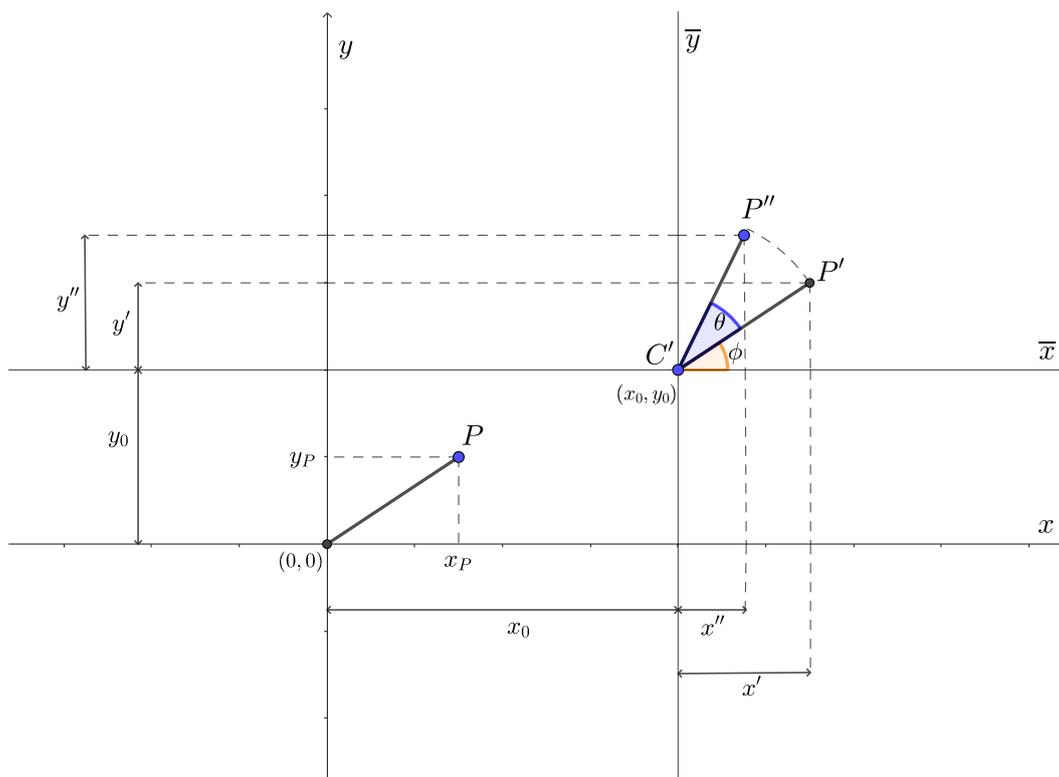


Figura 41: Translação seguida de uma rotação, em torno de C' , de um ponto P .

então podemos escrever:

$$\begin{cases} x' = x_1 - x_0 \\ y' = y_1 - y_0. \end{cases} \quad (28)$$

Porém, como P' foi obtido pela translação de $P = (x_P, y_P)$, então as coordenadas de P' , em relação aos eixos x e y , também podem ser escritas conforme a equação:

$$\begin{cases} x_1 = x_P + x_0 \\ y_1 = y_P + y_0. \end{cases} \quad (29)$$

Pelas equações (28) e (29) concluímos que:

$$\begin{cases} x' = x_P \\ y' = y_P. \end{cases} \quad (30)$$

Portanto, substituindo a equação (30) na (27), obtemos as coordenadas de P'' em função das coordenadas de P e do ângulo de rotação.

$$\begin{cases} x'' = x_P \cos \theta - y_P \sin \theta \\ y'' = x_P \sin \theta + y_P \cos \theta. \end{cases} \quad (31)$$

Aplicando uma rotação de $\theta = \pi/2$ a equação (31) se resume em:

$$\begin{cases} x'' = -y_P \\ y'' = x_P. \end{cases} \quad (32)$$

Veja que a equação (32) fornece as coordenadas de P'' em função das coordenadas de P porém, essas coordenadas de P'' está em relação aos eixos \bar{x} e \bar{y} . Considere então (x, y) como sendo as coordenadas de P'' em relação aos eixos x e y então,

$$\begin{cases} x'' = x - x_0 \\ y'' = y - y_0. \end{cases} \quad (33)$$

Das equações (32) e (33), obtemos as coordenadas de P'' nas quais desejamos.

$$\begin{cases} x = -y_P + x_0 \\ y = x_P + y_0. \end{cases} \quad (34)$$

Como as coordenadas dos focos e vértices reais da hipérbole \mathcal{H} são:

$$F_1 = (-c, 0) \quad \text{e} \quad F_2 = (c, 0)$$

$$A_1 = (-a, 0) \quad \text{e} \quad A_2 = (a, 0),$$

então, só precisamos aplicar a equação (34) nestes pontos, para obter os focos e vértices reais da hipérbole \mathcal{H}' .

Portanto, os focos e vértices reais de \mathcal{H}' são:

$$F'_1 = (x_0, -c + y_0) \quad \text{e} \quad F'_2 = (x_0, c + y_0)$$

$$A'_1 = (x_0, -a + y_0) \quad \text{e} \quad A'_2 = (x_0, a + y_0),$$

Construindo a hipérbole \mathcal{H}' a partir de seus focos e vértices reais, conforme a sua definição, obtemos a hipérbole desejada na qual possui centro fora da origem e focos paralelos aos eixos das ordenadas. Veja a Figura 42.

Vejamos como obter a equação reduzida da hipérbole \mathcal{H}' . Seja $P = (x_P, y_P)$ um ponto da hipérbole \mathcal{H} então, as coordenadas de P satisfazem a equação:

$$\frac{(x_P)^2}{a^2} - \frac{(y_P)^2}{b^2} = 1. \quad (35)$$

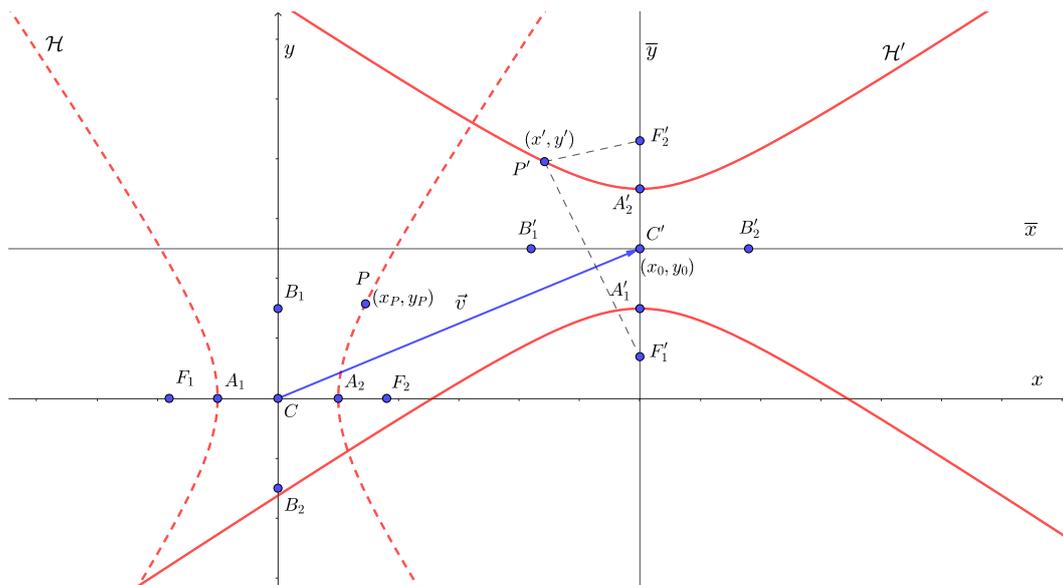


Figura 42: hipérbole com centro fora da origem e focos paralelos ao eixo das ordenadas.

Pelas equações (32) e (35) podemos escrever:

$$\frac{(y'')^2}{a^2} - \frac{(-x'')^2}{b^2} = 1 \quad \implies \quad \frac{(y'')^2}{a^2} - \frac{(x'')^2}{b^2} = 1. \quad (36)$$

Portanto, o ponto $P'' = (x'', y'')$, no qual suas coordenadas satisfazem a equação (36), pertence a hipérbole \mathcal{H}' . Lembrando que as coordenadas de P'' estão em relação aos eixos \overline{xy} .

Substituindo a equação (33) na equação (36) temos:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1. \quad (37)$$

A equação (37) representa a equação reduzida da elipse, com centro fora da origem e os focos sobre um eixo paralelo ao eixo das ordenadas.

1.3 Parábola

Para enriquecer a compreensão do conceito de parábola, sugerimos uma abordagem prática utilizando dobraduras em uma folha translúcida (papel vegetal). Abaixo estão as instruções detalhadas para a construção:

Instruções passo a passo:

1. Em uma folha translúcida (papel vegetal), trace uma reta r e marque um ponto P fora dela.
2. Dobre a folha de modo que a reta passe pelo ponto P .
3. Abra a folha novamente e, com um lápis, trace a reta formada pela dobra.
4. Repita os passos 2 e 3, de modo que na etapa 2 você percorra toda a reta r .

As retas traçadas no passo 3 são tangentes a uma parábola, cujo foco é o ponto P e a reta r é a reta diretriz. Quanto mais retas forem traçadas (formadas pelas dobras), mais evidente a parábola se tornará. A Figura 43 ilustra a parábola obtida por meio dessas dobraduras.

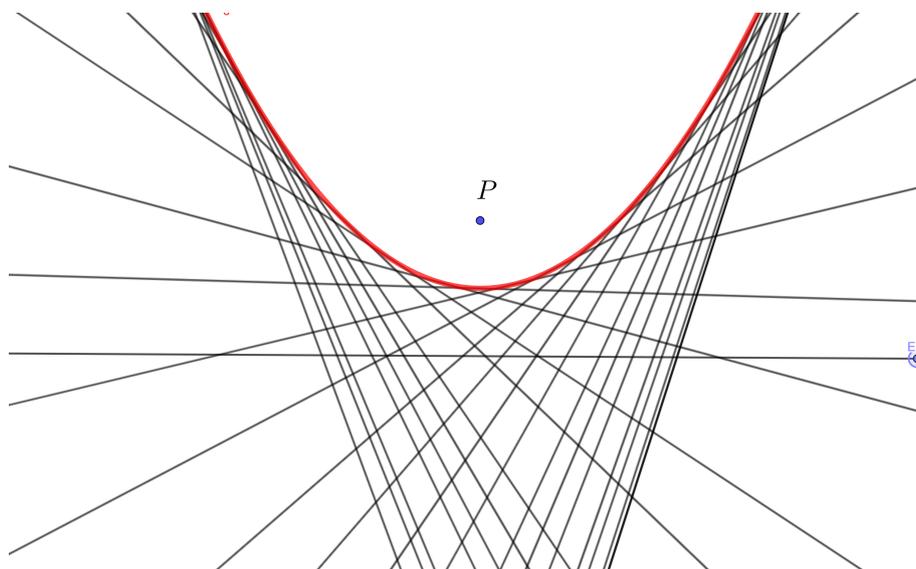


Figura 43: Parábola obtida através de dobraduras.

Definição 3. Considere em um plano uma reta d e um ponto F fora dela. Chama-se de *Parábola* o lugar geométrico dos pontos equidistantes de d e F . A reta d e o ponto F são chamados, respectivamente, de *diretriz* e *foco* da parábola.

Seja P um ponto do plano e P_0 um ponto da reta d , de modo que P_0 é o pé da perpendicular baixada de P sobre a reta d . A distância entre o ponto P e a reta d se

resume na distância de P à P_0 . Portanto, pela definição acima, o ponto P é um ponto da parábola, se e somente se,

$$d(P, F) = d(P, P_0).$$

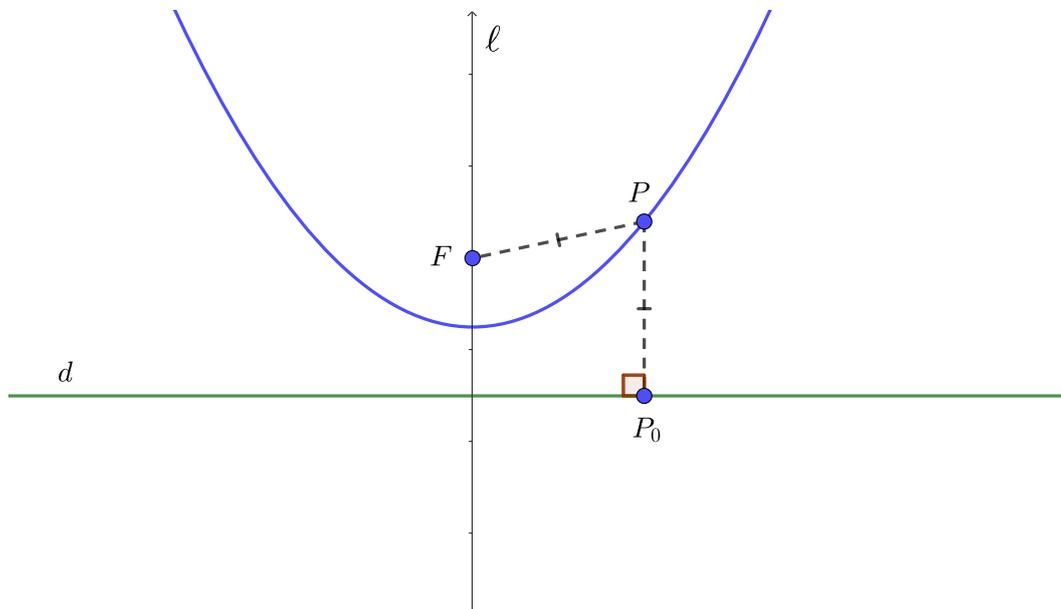


Figura 44: Parábola.

Iremos definir os elementos da parábola que são de fundamental importância para a sua construção.

1.3.1 Elementos da parábola

- (i) **Foco:** é o ponto F .
- (ii) **Diretriz:** é a reta d .
- (iii) **Reta focal:** é a reta que contém o foco F e é perpendicular à diretriz.

Veamos como construir a reta focal. Inicialmente considere, no plano, uma reta d e um ponto $F \notin d$. Tracemos por F uma reta ℓ perpendicular a reta d . A reta ℓ é a reta focal.

Seja A o ponto de intersecção da reta focal com a diretriz e V o ponto médio do segmento AF então, o ponto V é um ponto da parábola, já que

$$d(V, A) = (V, F).$$

Chamaremos de p a medida do segmento AF . Veja a Figura 45.

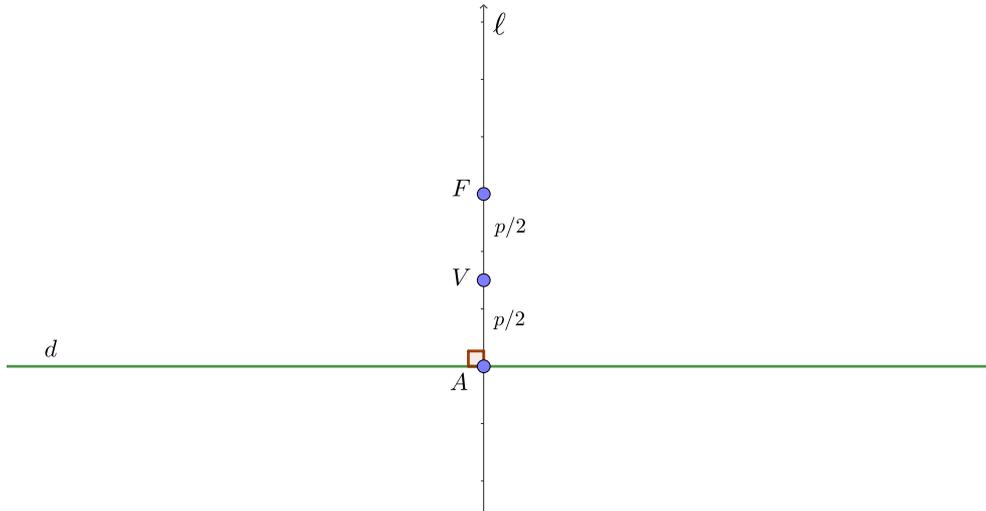


Figura 45: Reta focal da parábola.

O número real p é chamado de parâmetro da parábola. Este parâmetro está associado com a concavidade da parábola.

- (iv) **Vértice:** é o ponto V que está na intersecção da parábola com a reta focal. O vértice é o ponto da parábola que está mais próximo da diretriz.

A proposição a seguir trata-se da propriedade de simetria de parábola.

Proposição 6. *Toda parábola \mathcal{P} é simétrica com relação ao seu eixo focal.*

Demonstração. Considere uma parábola \mathcal{P} e um ponto P pertencente a ela. Seja P' o simétrico de P em relação a reta focal ℓ . O segmento PP' é perpendicular à reta focal e se interceptam no ponto Q . Veja a Figura 46.

Os triângulos retângulos PQF e $P'QF$ são congruentes pelo caso (LAL) . Portanto, os segmentos PF e $P'F$ são iguais.

Considere os pontos P_0 e P'_0 pertencentes a reta diretriz d , de tal modo que P_0 e P'_0 , sejam ambos o pé da perpendicular baixada de P e P' , respectivamente, sobre a diretriz. Nestas condições, formamos o retângulo $PP'P'_0P_0$. Portanto, os segmentos $P'P'_0$ e PP_0 são iguais.

Como supomos inicialmente que P era um ponto da parábola, então temos:

$$d(P, P_0) = d(P, F).$$

Já mostramos também que

$$d(P, P_0) = d(P', P'_0) \quad \text{e} \quad d(P, F) = d(P'F).$$

Portanto,

$$d(P, P_0) = d(P, F) \quad \implies \quad d(P', P'_0) = d(P'F).$$

Logo P' também é um ponto da parábola \mathcal{P} . □

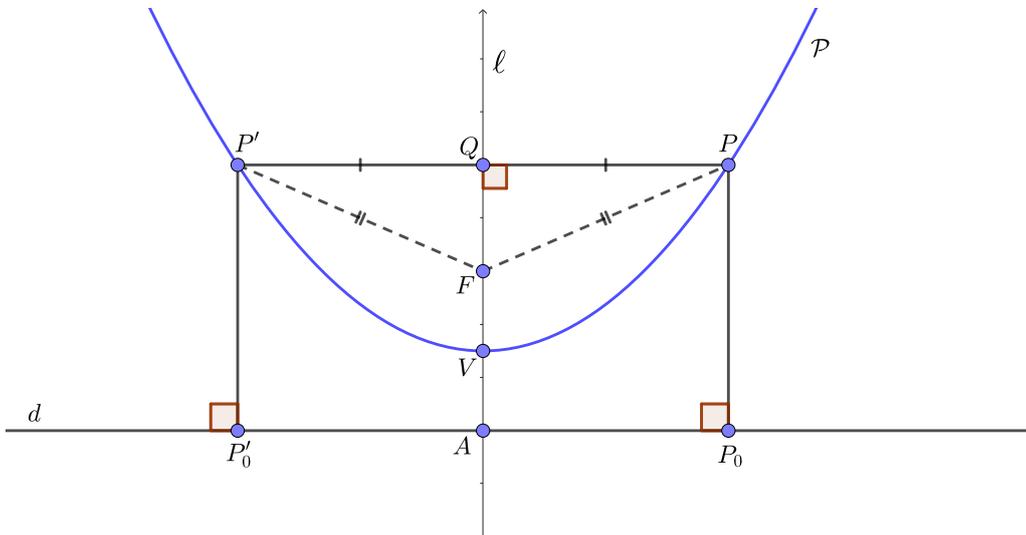


Figura 46: Simetria em relação ao eixo focal da parábola.

1.3.2 Forma canônica da parábola

Afim de facilitar a compreensão, dividiremos o estudo sobre a forma canônica da parábola em dois casos: **Caso (a)** e **Caso (b)**.

Caso (a):

Considere inicialmente uma parábola \mathcal{P} com vértice na origem do plano- xy e foco sobre o eixo y . Nestas condições, o foco estará a uma distância $p/2$ do vértice, assim como a reta diretriz também estará a uma distância $p/2$ do vértice. A seguinte proposição é válida:

Proposição 7. *Seja $P = (x, y)$ um ponto da parábola e P_0 o pé da perpendicular baixada de P sobre a diretriz d , então:*

$$d(P, F) = d(P, P_0) \iff x^2 = \pm 2py.$$

Demonstração. Primeiro, vamos considerar que o foco esteja acima do eixo x , isto é, $F = (0, p/2)$. Veja a Figura 47. Logo,

$$\begin{aligned} d(P, F) &= d(P, P_0) && \iff \\ \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} &= \sqrt{\left(y + \frac{p}{2}\right)^2} && \iff \\ x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} &= y^2 + py + \frac{p^2}{4} && \iff \\ x^2 &= 2py. \end{aligned}$$

De forma análoga, consideremos agora, $F = (0, -p/2)$, conforme a Figura 48. Logo,

$$\begin{aligned} d(P, F) &= d(P, P_0) && \iff \\ \sqrt{x^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2} &= \sqrt{\left(y - \frac{p}{2}\right)^2} && \iff \\ x^2 + y^2 + py + \frac{p^2}{4} &= y^2 - py + \frac{p^2}{4} && \iff \\ x^2 &= -2py. \end{aligned}$$

Portanto,

$$d(P, F) = d(P, P_0) \iff x^2 = \pm 2py. \tag{38}$$

□

A equação (38), representa a equação reduzida da parábola com foco sobre o eixo das ordenadas. Além disso, usaremos o sinal positivo quando a reta diretriz estiver abaixo do foco e o sinal negativo quando a diretriz estiver acima do foco. Quando a diretriz está abaixo do foco, dizemos que a parábola tem concavidade para cima e no outro caso, a parábola tem concavidade para baixo.

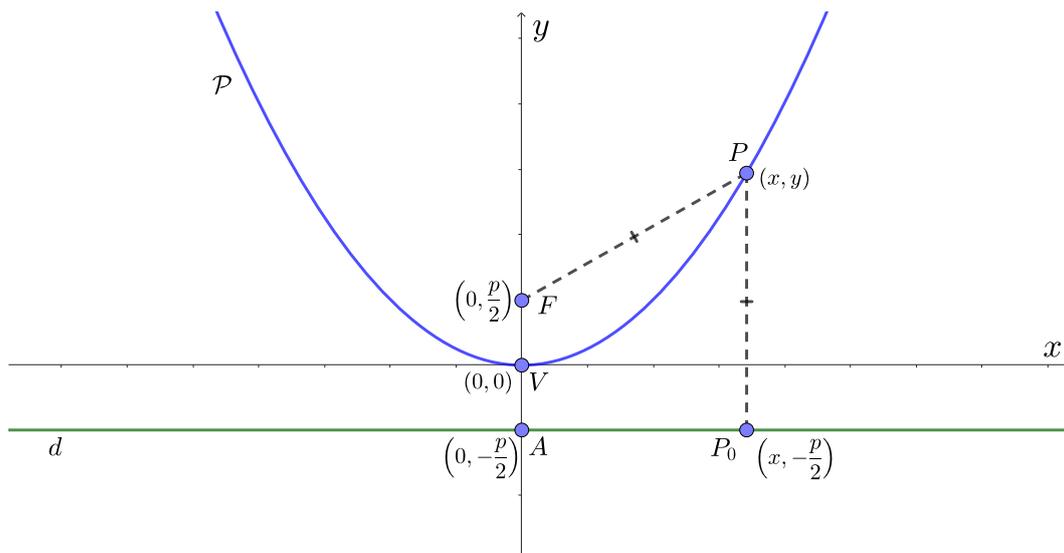


Figura 47: Parábola com vértice na origem e $F = (0, p/2)$.

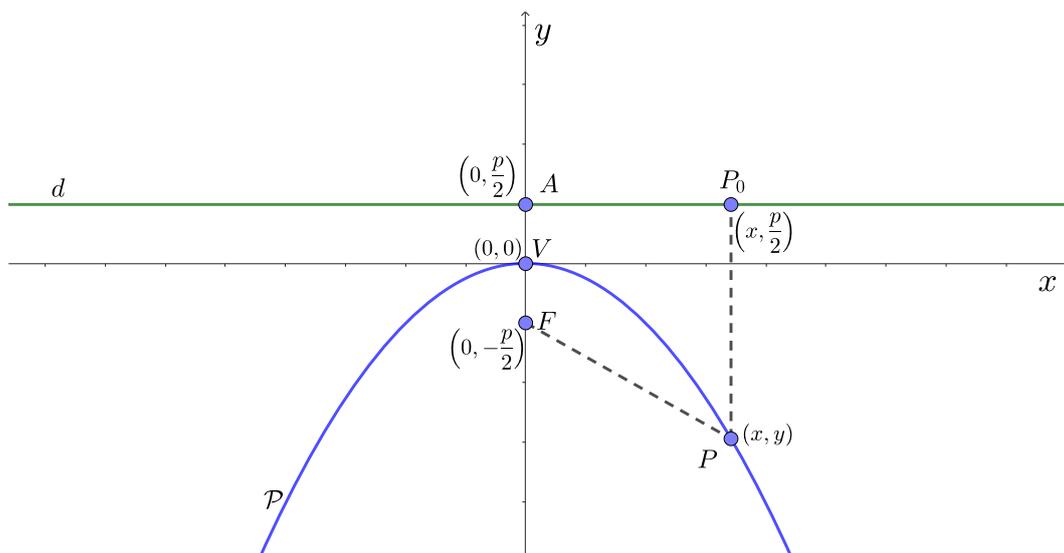


Figura 48: Parábola com vértice na origem e $F = (0, -p/2)$.

Caso (b):

Considere agora uma parábola \mathcal{P} com vértice na origem do plano- xy e foco sobre o eixo x . O foco estará a uma distância $p/2$ do vértice, assim como a reta diretriz também estará a uma distância $p/2$ do vértice. Nestas condições, a seguinte proposição é válida:

Proposição 8. *Seja $P = (x, y)$ um ponto da parábola e P_0 o pé da perpendicular baixada*

de P sobre a diretriz d , então:

$$d(P, F) = d(P, P_0) \iff y^2 = \pm 2px.$$

Demonstração. Primeiramente, vamos considerar que o foco esteja a direita do eixo y , isto é, $F = (p/2, 0)$. Veja a Figura 49. Logo,

$$\begin{aligned} d(P, F) &= d(P, P_0) && \iff \\ \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} &= \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} && \iff \\ x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 &= x^2 + px + \frac{p^2}{4} && \iff \\ y^2 &= 2px. \end{aligned}$$

De forma análoga, consideremos agora, $F = (-p/2, 0)$, conforme a Figura 50. Logo,

$$\begin{aligned} d(P, F) &= d(P, P_0) && \iff \\ \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} &= \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2} && \iff \\ x^2 + px + \frac{p^2}{4} + y^2 &= x^2 - px + \frac{p^2}{4} && \iff \\ y^2 &= -2px. \end{aligned}$$

Portanto,

$$d(P, F) = d(P, P_0) \iff y^2 = \pm 2px. \tag{39}$$

□

A equação (39), representa a equação reduzida da parábola com foco sobre o eixo das abcissas. Nesta equação, usaremos o sinal positivo quando a reta diretriz estiver à esquerda do foco e o sinal negativo quando a diretriz estiver à direita do foco. Quando a diretriz está à esquerda do foco, dizemos que a parábola tem concavidade para direita e no outro caso, a parábola tem concavidade para esquerda.

Além disso, podemos também obter a equação da reta diretriz a partir das coordenadas do foco e do vértice da parábola. Como a reta diretriz e o foco são equidistantes do vértice então, temos as seguintes equações de acordo com as posições do foco:

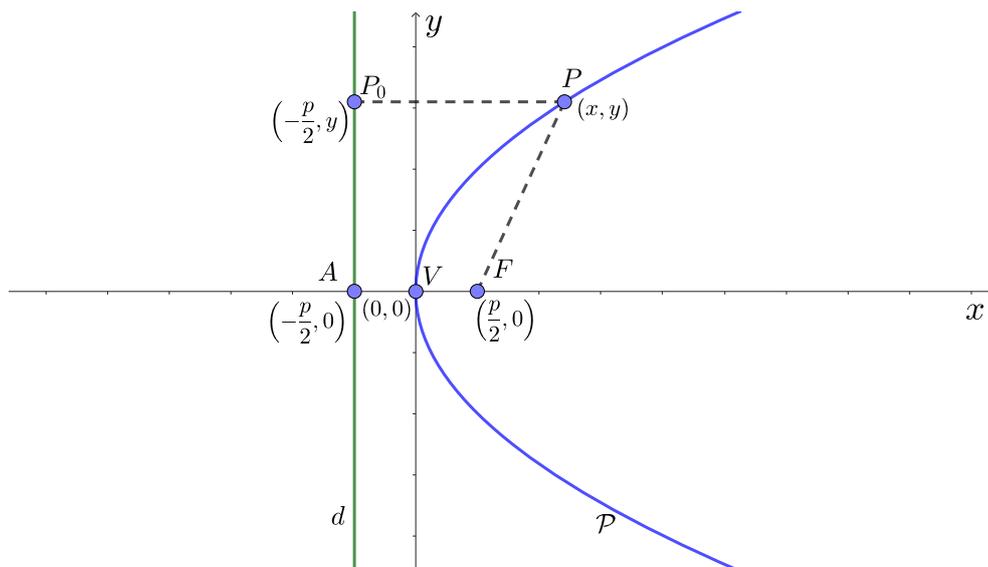


Figura 49: Parábola com vértice na origem e $F = (p/2, 0)$.

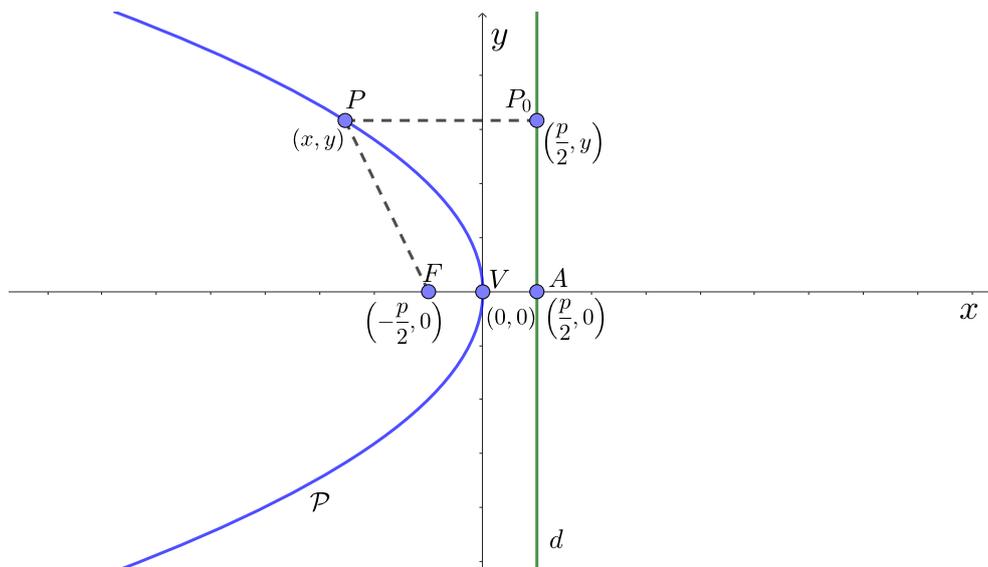


Figura 50: Parábola com vértice na origem e $F = (-p/2, 0)$.

- Foco sobre o eixo y :

$$F = \left(0, \frac{p}{2}\right) \implies d : y = -\frac{p}{2}$$

$$F = \left(0, -\frac{p}{2}\right) \implies d : y = \frac{p}{2}$$

- Foco sobre o eixo x :

$$F = \left(\frac{p}{2}, 0\right) \implies d : x = -\frac{p}{2}$$

$$F = \left(-\frac{p}{2}, 0\right) \implies d : x = \frac{p}{2}.$$

Neste caso o vértice se encontra na origem. Quando o foco F estiver sobre o eixo das ordenadas, note que a equação da diretriz fica igual a ordenada de F porém com sinal oposto. De maneira análoga, quando o foco F estiver sobre o eixo x , a equação da diretriz fica igual a abscissa de F com sinal oposto.

De maneira mais geral, se o vértice da parábola estiver fora da origem então teremos as seguintes equações para a diretriz, de acordo com as posições do foco:

- Foco sobre o eixo \bar{y} paralelo ao eixo y :

$$F = \left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right) \implies d : y = y_0 - \frac{p}{2}$$

$$F = \left(x_0, y_0 - \frac{p}{2}\right) \implies d : y = y_0 + \frac{p}{2}.$$
(40)

- Foco sobre o eixo \bar{x} paralelo ao eixo x :

$$F = \left(x_0 + \frac{p}{2}, y_0\right) \implies d : x = x_0 - \frac{p}{2}$$

$$F = \left(x_0 - \frac{p}{2}, y_0\right) \implies d : x = x_0 + \frac{p}{2}.$$
(41)

Nas equações apresentadas, x_0 e y_0 são as coordenadas do vértice da parábola.

1.3.3 Translação da parábola

Vejam agora, como transladar uma parábola para uma nova posição na qual, seu vértice está fora da origem. Considere inicialmente duas parábolas \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 , ambas com vértice na origem do plano- xy e focos sobre o eixo y .

As coordenadas do foco F_1 e a equação da diretriz d_1 da parábola \mathcal{P}_1 são:

$$F_1 = \left(0, \frac{p}{2}\right) \implies d_1 : y = -\frac{p}{2}.$$

As coordenadas do foco F_2 e a equação da diretriz d_2 da parábola \mathcal{P}_2 são:

$$F_2 = \left(0, -\frac{p}{2}\right) \implies d_2 : y = \frac{p}{2}.$$

Como visto anteriormente, as equações de \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 são:

$$\mathcal{P}_1 : x^2 = 2py \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_2 : x^2 = -2py.$$

Podemos notar que \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 são ambas uma reflexão uma da outra em relação ao eixo x .

Considere o vetor $\vec{v} = (x_0, y_0)$. Assim como fizemos na elipse e hipérbole, vamos transladar o vértice das parábolas na mesma direção, sentido e também com o mesmo módulo do vetor \vec{v} , obtendo assim, o novo vértice $V' = (x_0, y_0)$. Consideremos novos eixos, ortogonais entre si, \bar{x} e \bar{y} , passando por V' de modo que \bar{x} seja paralelo ao eixo das abcissas e \bar{y} paralelo ao eixo das ordenadas. Nestas condições, V' é a origem do novo sistema.

Para obtermos a translação das parábolas \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 para o novo vértice V' , precisamos transladar primeiramente seus focos F_1 e F_2 e em seguida encontrar as equações das novas retas diretrizes. Para transladar F_1 e F_2 , basta somar as suas coordenadas com as coordenadas do novo vértice e para obter as equações das novas retas diretrizes, basta seguir as equações (40) vistas anteriormente. Portanto, os novos focos e retas diretrizes são:

$$\begin{aligned} F'_1 &= \left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right) \implies d'_1 : y = y_0 - \frac{p}{2} \\ F'_2 &= \left(x_0, y_0 - \frac{p}{2}\right) \implies d'_2 : y = y_0 + \frac{p}{2}. \end{aligned}$$

Finalmente, para completar o processo de translação, basta reconstruirmos as parábolas a partir dos novos focos e retas diretrizes, conforme a definição matemática. Dessa forma obtemos as parábolas \mathcal{P}'_1 e \mathcal{P}'_2 . Poderíamos também transladar uma só delas, por exemplo \mathcal{P}_1 , e após isso fazer a reflexão de \mathcal{P}'_1 em relação ao eixo \bar{x} . Veja a Figura 51.

Para encontrarmos as equações das parábolas \mathcal{P}'_1 e \mathcal{P}'_2 , considere um ponto P'_1 pertencente a parábola \mathcal{P}'_1 e um ponto P'_2 pertencente a parábola \mathcal{P}'_2 . (Figura 51).

Se $P'_1 = (x'_1, y'_1)$ e $P'_2 = (x'_2, y'_2)$, em relação aos eixos \bar{x} e \bar{y} , então as coordenadas de P'_1 e P'_2 satisfazem as equações:

$$\mathcal{P}'_1 : (x'_1)^2 = 2p(y'_1) \quad \text{e} \quad \mathcal{P}'_2 : (x'_2)^2 = -2p(y'_2). \quad (42)$$

Escrevendo as coordenadas de P'_1 e P'_2 , respectivamente, em relação aos eixos x e y temos:

$$\begin{cases} x = x_0 + x'_1 \\ y = y_0 + y'_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = x_0 - |x'_2| \\ y = y_0 - |y'_2| \end{cases} \quad (43)$$

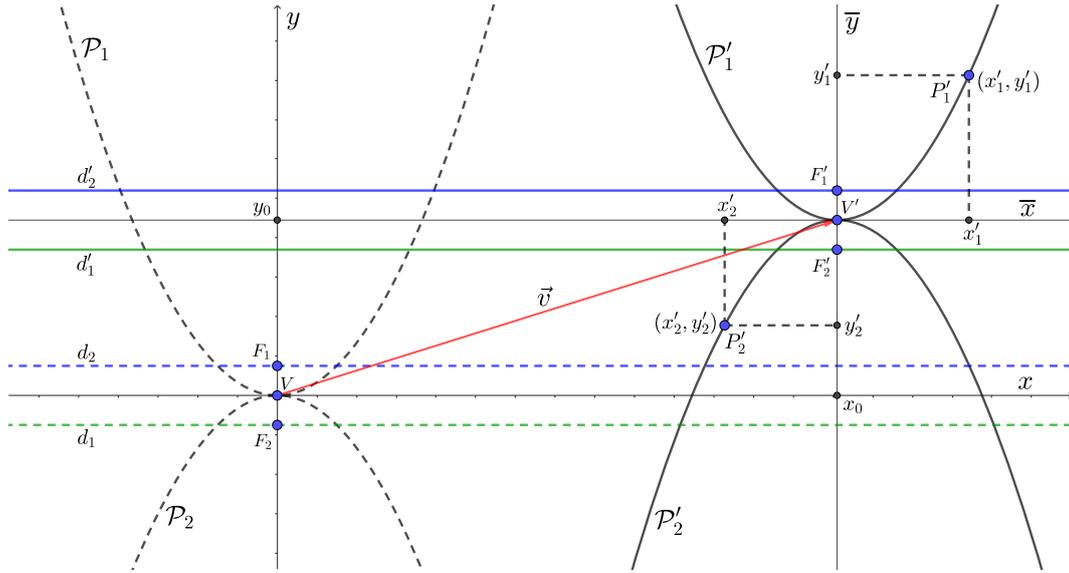


Figura 51: Parábola \mathcal{P}' com vértice fora da origem e foco paralelo ao eixo y .

Na equação acima, estamos utilizando $|x_2'|$ e $|y_2'|$ pois, são as distâncias de V' até o ponto x_2' e de V' até y_2' . Neste caso estamos considerando V' como a origem dos eixos coordenados \bar{x} e \bar{y} , isto é, $V' = (\bar{0}, \bar{0})$.

Como $x_2' < \bar{0}$ e $y_2' < \bar{0}$, então:

$$|x_2'| = -x_2' \quad \text{e} \quad |y_2'| = -y_2'.$$

Portando, a equação (43) fica:

$$\begin{cases} x = x_0 + x_1' \\ y = y_0 + y_1' \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = x_0 + x_2' \\ y = y_0 + y_2' \end{cases} \quad (44)$$

Isolando x_1' , x_2' , y_1' e y_2' na equação (44) obtemos:

$$\begin{cases} x_1' = x - x_0 \\ y_1' = y - y_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_2' = x - x_0 \\ y_2' = y - y_0 \end{cases} \quad (45)$$

Por fim, substituindo as coordenadas, conforme a equação (45), na equação (42) segue que:

$$\mathcal{P}'_1 : (x - x_0)^2 = 2p(y - y_0) \quad \text{e} \quad \mathcal{P}'_2 : (x - x_0)^2 = -2p(y - y_0). \quad (46)$$

As equações de (46) representam as equações das parábolas com vértice fora da origem e focos sobre o eixo \bar{y} paralelo ao eixo das ordenadas. As parábolas \mathcal{P}'_1 e \mathcal{P}'_2 tem concavidades para cima e para baixo, respectivamente.

De maneira análoga, podemos obter as equações que representam parábolas com vértice fora da origem e focos sobre o eixo \bar{x} paralelo ao eixo das abcissas.

$$\mathcal{P}''_1 : (y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \quad \text{e} \quad \mathcal{P}''_2 : (y - y_0)^2 = -2p(x - x_0).$$

As parábolas \mathcal{P}''_1 e \mathcal{P}''_2 tem concavidade para direita e concavidade para esquerda, respectivamente.

1.3.4 Equação da parábola na forma explícita

Como já vimos, a equação:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0),$$

representa uma parábola com vértice no ponto (x_0, y_0) e eixo focal paralelo ao eixo das ordenadas. Desenvolvendo está equação, a fim de explicitar o termo y temos:

$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 = 2py - 2py_0 \implies y = \frac{x^2}{2p} - \frac{x_0x}{p} + \frac{x_0^2}{2p} + y_0.$$

Logo a equação da parábola na forma explícita é dada por:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

onde,

$$a = \frac{1}{2p}, \quad b = -\frac{x_0}{p} \quad \text{e} \quad c = y_0 + \frac{x_0^2}{2p}.$$

Podemos reescrever os coeficiente b e c em função do coeficiente a , logo temos:

$$a = \frac{1}{2p}, \quad b = -2ax_0 \quad \text{e} \quad c = y_0 + ax_0^2.$$

Além disso, podemos obter as coordenadas do vértice em função dos coeficiente a , b e c . Temos que:

$$b = -2ax_0 \implies x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Temos também que:

$$c = y_0 + ax_0^2 \implies y_0 = c - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} \implies y_0 = c - \frac{b^2}{4a} \implies y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Portanto, as coordenadas do vértice são dadas por:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad y_0 = -\frac{\Delta}{4a}. \tag{47}$$

Onde,

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Se a parábola tem vértice na origem, então os coeficientes b e c são nulos e a equação na forma explícita fica:

$$y = ax^2. \quad (48)$$

Vale ressaltar ainda que o coeficiente a é sempre diferente de zero pois, o parâmetro p representa a distância entre o foco da parábola e a reta diretriz.

Se utilizássemos a equação da parábola:

$$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0),$$

na qual já vimos que possui vértice no ponto (x_0, y_0) e eixo focal paralelo ao eixo das ordenadas, porém possui concavidade voltada para baixo. Então, sua equação na forma explícita fica:

$$y = -ax^2 - bx + c, \quad (49)$$

onde,

$$a = \frac{1}{2p}, \quad b = -2ax_0 \quad \text{e} \quad c = y_0 - ax_0^2$$

As coordenadas do vértice podem ser obtidas utilizando também a equação (47).

Se os coeficientes b e c forem nulos, então a parábola tem vértice na origem e a equação na forma explícita fica:

$$y = -ax^2. \quad (50)$$

De forma análoga, podemos obter as equações da parábola na forma explícita, cujo eixo focal é paralelo ao eixo das abscissas e vértice no ponto (x_0, y_0) .

$$x = ay^2 + by + c \quad \text{e} \quad x = -ay^2 - by + c', \quad (51)$$

onde,

$$a = \frac{1}{2p}, \quad b = -2ay_0, \quad c = x_0 + ay_0^2 \quad \text{e} \quad c' = x_0 - ay_0^2$$

1.4 Equação geral do 2º grau com duas variáveis

Durante o desenvolvimento da geometria analítica, conforme a conhecemos hoje, os principais matemáticos que contribuíram foram René Descartes e Pierre de Fermat. No campo profissional, Fermat não era, de fato, um matemático. Sua formação acadêmica era em direito e ele estudava matemática por hobby. Contudo, Fermat desenvolveu um grande interesse em restaurar obras perdidas da antiguidade, com base em informações fragmentárias sobre elas [3].

Uma das suas notáveis contribuições foi a obra “Ad locos planos et solidos isagoge”, (Introdução aos lugares planos e sólidos) , que surgiu enquanto ele estava envolvido na restauração da famosa obra ”Lugares Planos” de Apolônio, usando referências feitas por Pappus de Alexandria. Embora sua obra não tenha sido publicada durante sua vida, suas correspondências com outros matemáticos da época influenciaram no desenvolvimento da geometria analítica.

Em sua obra, Fermat concluiu que os lugares geométricos tratados por Apolônio poderiam ser expressos por meio de equações algébricas com duas variáveis. Essa ideia permitiu que ele estudasse esses lugares geométricos por meio de métodos algébricos o que complementava os métodos geométricos tradicionais. Em suas investigações sobre as cônicas (elipse, hipérbole e parábola), Fermat percebeu que essas curvas poderiam ser obtidas a partir de uma equação geral do segundo grau com duas variáveis.

Uma equação geral do 2º grau é da forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (52)$$

Proposição 9. *Dada uma equação geral do segundo grau na forma*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Se o coeficiente B for nulo e os coeficiente A e C tiverem o mesmo sinal então, a equação representa uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados.

Demonstração. Tomando $B = 0$ na equação (52) e dividindo ambos os membros por AC

temos:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{A} + \frac{Dx}{AC} + \frac{Ey}{AC} &= -\frac{F}{AC} \implies \\ \frac{x^2 + \frac{Dx}{A}}{C} + \frac{y^2 + \frac{Ey}{C}}{A} &= -\frac{F}{AC} \end{aligned}$$

Completando quadrados temos:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + \frac{Dx}{A} + \frac{D^2}{4A^2}}{C} + \frac{y^2 + \frac{Ey}{C} + \frac{E^2}{4C^2}}{A} &= -\frac{F}{AC} + \frac{D^2}{4A^2C} + \frac{E^2}{4AC^2} \implies \\ \frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} &= \frac{C^2D^2 + ACE^2 - 4AFC^2}{4A^2C^3}. \end{aligned} \quad (53)$$

Seja,

$$M = C^2D^2 + ACE^2 - 4AFC^2.$$

Se $M \neq 0$, então podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{C}{M}} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{A}{M}} &= 1 \implies \\ \frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{C}{4A^2C^3}} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{A}{4A^2C^3}} &= 1 \implies \\ \frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{M}{4A^2C^2}} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{M}{4ACC^2}} &= 1. \end{aligned} \quad (54)$$

Como $AC > 0$, a equação (54) representa uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados, desde que tenhamos $M > 0$. O seu centro é o ponto:

$$\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right).$$

□

Além disso, se $M = 0$ na equação (53), temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} &= 0 \implies \\ A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Como $A \neq 0$ e $C \neq 0$, então devemos ter:

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = 0 \quad \text{e} \quad \left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = 0.$$

O que implica em

$$x = -\frac{D}{2A} \quad \text{e} \quad y = -\frac{E}{2C}.$$

Se $M < 0$ a equação (54) representa um conjunto vazio. Quando temos $B = 0$, $AC > 0$ e a equação geral do 2º grau com duas variáveis representa um ponto ou um conjunto vazio então, chamamos estes de casos degenerados da elipse.

A recíproca da proposição anterior também é verdadeira, ou seja, dada uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados então, sua equação pode ser expressa na forma de uma equação geral do segundo grau, onde o coeficiente B é nulo e os coeficientes A e C tem o mesmo sinal, isto é, $AC > 0$. Com efeito,

Desenvolvendo a equação da elipse, com centro fora da origem, segue que:

$$\begin{aligned} \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} &= 1 \implies \\ b^2x^2 - 2x_0b^2x + x_0^2b^2 + a^2y^2 - 2a^2y_0y + y_0^2a^2 - a^2b^2 &= 0 \implies \\ Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F &= 0. \end{aligned}$$

Onde,

$$A = b^2, \quad C = a^2, \quad D = -2b^2x_0, \quad E = -2a^2y_0 \quad \text{e} \quad F = x_0^2b^2 + y_0^2a^2 - a^2b^2.$$

Proposição 10. *Dada uma equação geral do segundo grau na forma*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Se o coeficiente B for nulo e os coeficientes A e C tiverem sinais opostos então, a equação representa uma hipérbole com eixos paralelos aos eixos coordenados ou um par de retas concorrentes.

Demonstração. Tomando $B = 0$ e supunhamos que $A > 0$ e $C < 0$ temos:

$$Ax^2 + Dx - (-Cy^2 - Ey) = -F.$$

Como $AC < 0$ então, dividindo em ambos os membros por AC ficamos com

$$\frac{\left(x^2 + \frac{Dx}{A}\right)}{-C} - \frac{\left(y^2 + \frac{Ey}{C}\right)}{A} = \frac{F}{AC}.$$

Completando quadrado segue que

$$\begin{aligned} \frac{\left(x^2 + \frac{Dx}{A} + \frac{D^2}{4A^2}\right)}{-C} - \frac{\left(y^2 + \frac{Ey}{C} + \frac{E^2}{4C^2}\right)}{A} &= \frac{F}{AC} - \frac{D^2}{4A^2} - \frac{E^2}{4C^2} \implies \\ \frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{-C} - \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} &= \frac{4ACF - CD^2 - AE^2}{4A^2C^2} = \frac{M}{4A^2C^2} \end{aligned}$$

onde,

$$M = 4ACF - CD^2 - AE^2.$$

Se $M \neq 0$, então podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{-C}}{\frac{M}{4A^2C^2}} - \frac{\frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A}}{\frac{M}{4A^2C^2}} &= 1 \implies \\ \frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{M}{4A^2(-C)}} - \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{M}{4AC^2}} &= 1. \end{aligned} \tag{55}$$

A equação (55) representa uma hipérbole com eixos paralelos aos eixos coordenados com centro no ponto:

$$\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right).$$

Por outro lado, se $M = 0$ temos:

$$\begin{aligned} \frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{-C} - \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} &= 0 \implies \\ -A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + (-C)\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 &= 0 \implies \\ (-C)\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 &= A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2. \end{aligned}$$

Daí,

$$y + \frac{E}{2C} = \pm \sqrt{\frac{A}{(-C)}} \left(x + \frac{D}{2A} \right). \quad (56)$$

A equação (56) representa a equação de duas retas concorrentes. Quando temos $B = 0$, $AC < 0$ e a equação geral do 2º grau com duas variáveis representa duas retas concorrentes então, chamamos este de caso degenerado da hipérbole. \square

A recíproca desta proposição também é verdadeira, ou seja, dada uma hipérbole com eixos paralelos aos eixos coordenados então, sua equação pode ser expressa na forma de uma equação geral do segundo grau com duas variáveis, onde o coeficiente B é nulo e os coeficientes A e C possuem sinais opostos, isto é, $AC < 0$. Com efeito,

Desenvolvendo a equação da hipérbole, com centro fora da origem, segue que:

$$\begin{aligned} \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} &= 1 \implies \\ b^2x^2 - 2x_0b^2x + x_0^2b^2 - a^2y^2 + 2a^2y_0y - y_0^2a^2 - a^2b^2 &= 0 \implies \\ Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F &= 0. \end{aligned}$$

Onde,

$$A = b^2, \quad C = -a^2, \quad D = -2b^2x_0, \quad E = 2a^2y_0 \quad \text{e} \quad F = x_0^2b^2 - y_0^2a^2 - a^2b^2.$$

Note que A e C possuem sinais opostos. O mesmo ocorre quando desenvolvemos a equação da hipérbole, cujo eixo focal é paralelo ao eixo das ordenadas.

Proposição 11. *Dada uma equação geral do segundo grau na forma*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Se os coeficiente B e C forem nulos e os coeficientes A e E forem diferentes de zero então, a equação representa uma parábola com eixo focal paralelo ao eixo das ordenadas.

Demonstração. Dada uma equação geral do segundo grau nas variáveis x e y . Se B e C forem nulos com $A \neq 0$ e $E \neq 0$, então podemos dividir ambos os membros da equação por A .

$$x^2 + \frac{Dx}{A} = -\frac{Ey}{A} - \frac{F}{A}.$$

Completando quadrado segue que

$$x^2 + \frac{Dx}{A} + \frac{D^2}{4A^2} = \frac{D^2}{4A^2} - \frac{Ey}{A} - \frac{F}{A}.$$

Como $E \neq 0$ então, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 &= -\frac{E}{A} \left(y + \frac{F}{E} - \frac{D^2}{4AE}\right) \implies \\ \left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 &= -\frac{E}{A} \left(y + \frac{4AF - D^2}{4AE}\right) \end{aligned} \quad (57)$$

A equação (57) representa uma parábola com eixo focal paralelo ao eixo das ordenadas e coordenadas do vértice dadas por:

$$V = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{4AE - D^2}{4AE}\right).$$

□

Além disso, se $E = 0$ então,

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{Dx}{A} &= -\frac{F}{A} \implies \\ \left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 &= \frac{D^2}{4A^2} - \frac{F}{A} \implies \\ x &= \pm \sqrt{\frac{D^2}{4A^2} - \frac{F}{A}} - \frac{D}{2A} \implies \\ x &= \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - 4AF}}{2A}. \end{aligned} \quad (58)$$

A equação (58) representa duas retas paralelas ao eixo das ordenadas se $D^2 - 4AF > 0$.

Por outro lado, se $D^2 - 4AF = 0$ temos:

$$x = -\frac{D}{2A}.$$

Que representa uma reta paralela ao eixo das ordenadas. Ou ainda, se $D^2 - 4AF < 0$ temos então um conjunto vazio.

Nestes casos em que temos duas retas, uma reta e um conjunto vazio são denominados de casos degenerados da parábola. Poderia ser mostrado de forma análoga que se os

coeficientes A e B fossem nulos e os coeficientes C e D fossem diferentes de zero então, poderíamos obter, a partir da equação geral do segundo grau nas variáveis x e y , a equação da parábola cujo eixo focal é paralelo ao eixo das abcissas.

A recíproca desta proposição também é verdadeira. Dada uma parábola com vértice fora da origem e eixo focal paralelo ao eixo das ordenadas então:

$$\begin{aligned}(x - x_0)^2 &= \pm 2p(y - y_0) \implies \\ x^2 - 2x_0x + x_0^2 &= \pm 2py \mp 2py_0 \implies \\ x^2 - 2x_0x + x_0^2 \mp 2py \pm 2py_0 &= 0 \implies \\ Ax^2 + Dx + Ey + F &= 0.\end{aligned}$$

Onde,

$$A = 1, \quad D = -2x_0, \quad E = \mp 2p, \quad F = \pm 2py_0.$$

De maneira análoga, dada uma parábola com vértice fora da origem e eixo focal paralelo ao eixo das abcissas então:

$$\begin{aligned}(y - y_0)^2 &= \pm 2p(x - x_0) \implies \\ y^2 - 2y_0y + y_0^2 &= \pm 2px \mp 2px_0 \implies \\ y^2 - 2y_0y + y_0^2 \mp 2px \pm 2px_0 &= 0 \implies \\ Cy^2 + Dx + Ey + F &= 0.\end{aligned}$$

Onde,

$$C = 1, \quad D = \mp 2p, \quad E = -2y_0, \quad F = y_0^2 \pm 2px_0.$$

Nota-se que em ambos os casos temos sempre $B = 0$ e $AC = 0$.

2 Estudo das Quádricas

O estudo das quádricas será dividido em duas partes: O estudo das quádricas centrais e o das quádricas não centrais [5]; [10]; [16]. Começaremos esta secção definindo o que é uma superfície de nível.

Definição 4. *Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Uma superfície de nível é conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ no \mathbb{R}^3 para os quais $f(x, y, z) = c$, onde $c \in \mathbb{R}$.*

Uma função quadrática em \mathbb{R}^3 é da forma

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J.$$

As superfícies de nível de uma função quadrática em \mathbb{R}^3 são chamadas de quádricas.

2.1 Quádricas centrais

Quando temos a forma quadrática

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz \quad (59)$$

onde,

$$G = H = I = J = 0$$

então, as superfícies de nível associadas a função $f(x, y, z)$ em (59), são chamadas de quádricas centrais pois, possui centro na origem $(0,0,0)$, uma vez que os termos G, H e I , que poderiam fazer com que essas superfícies se desloquem ao longo dos eixos coordenados, são nulos. As quádricas centrais são simétricas em relação aos planos coordenados ou aos planos paralelos a eles. A origem também é um centro de simetria, ou seja, existe simetria em relação aos planos coordenados e a origem. Em outras palavras, se um ponto P pertencente a quádrica $f(x, y, z) = R$ então, o simétrico $-P$ também pertence a quádrica.

Nas superfícies quádricas $f(x, y, z) = R$, isto é,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = R, \quad (60)$$

onde $R \in \mathbb{R}$, podemos realizar uma mudança de coordenadas por meio de rotação de modo que tenhamos $D = E = F = 0$. Em outras palavras, podemos escolher novos eixos coordenados, \bar{x} , \bar{y} e \bar{z} , de tal forma que os termos Dxy , Exz e Fyz se tornem nulos. A eliminação destes termos faz com que as superfícies quádricas em (60), fiquem mais simétricas em relação aos eixos coordenados.

Portanto, a equação (60) assume a forma:

$$A'\bar{x}^2 + B'\bar{y}^2 + C'\bar{z}^2 = R'. \quad (61)$$

Essa forma simplificada permite visualizar melhor as suas superfícies de nível, ou seja, as quádricas centrais. Usando desta ideia, admitiremos que dada uma equação similar a equação (60), podemos escolher um sistema de eixos ortogonais de modo que tenhamos $D = E = F = 0$, ou seja, podemos reescrever na forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R \quad (62)$$

Dada a equação (62), vamos analisar o caso em que $R \neq 0$. Logo, podemos escrever:

$$\frac{Ax^2}{R} + \frac{By^2}{R} + \frac{Cz^2}{R} = 1.$$

Sejam

$$a = \sqrt{\frac{R}{A}}, \quad b = \sqrt{\frac{R}{B}} \quad \text{e} \quad c = \sqrt{\frac{R}{C}}.$$

Se tivermos

$$\frac{A}{R} > 0, \quad \frac{B}{R} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{C}{R} > 0,$$

então temos que

$$\frac{Ax^2}{R} + \frac{By^2}{R} + \frac{Cz^2}{R} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

De forma análoga se tivermos

$$\frac{A}{R} < 0, \quad \frac{B}{R} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{C}{R} < 0,$$

então pondo

$$a = \sqrt{-\frac{R}{A}}, \quad b = \sqrt{-\frac{R}{B}} \quad \text{e} \quad c = \sqrt{-\frac{R}{C}},$$

podemos escrever

$$\frac{Ax^2}{R} + \frac{By^2}{R} + \frac{Cz^2}{R} = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Portanto, quando $R \neq 0$ temos que

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (63)$$

Qualquer uma das combinações de sinais da equação (63) são chamadas de forma canônica das quádricas centrais. Note que $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.

A partir das combinações de sinais nesta equação podemos concluir que existem três tipos de superfícies, sendo as que possuem os três coeficientes todos positivos, ou dois

deles positivos ou apenas um positivo. Quando todos são negativos então não existe lugar geométrico, uma vez que a equação (63) não é satisfeita.

Vejamos o caso em que $R = 0$ na equação (62). Temos que:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0.$$

Se os coeficientes A , B e C forem todos positivos, então pondo

$$a = \sqrt{\frac{1}{A}}, \quad b = \sqrt{\frac{1}{B}} \quad \text{e} \quad c = \sqrt{\frac{1}{C}},$$

podemos reescrever na forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Por outro lado, se os coeficientes A , B e C forem todos negativos, então basta tomarmos

$$a = \sqrt{\frac{-1}{A}}, \quad b = \sqrt{\frac{-1}{B}} \quad \text{e} \quad c = \sqrt{\frac{-1}{C}}.$$

Logo podemos reescrever na forma:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Portanto, quando temos $R = 0$, também podemos escrever a equação (62) na forma:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{64}$$

As combinações de sinais da equação (64) também são chamadas de formas canônicas das quádricas centrais. Em particular, os casos em que temos todos os sinais positivos ou todos negativos, na equação (64), representam a origem $(0, 0, 0)$.

As demais combinações de sinais, representam apenas uma superfície, na qual estudaremos mais adiante.

Vamos aprofundar nossa análise das quádricas centrais. Nesse processo, exploraremos suas formas canônicas, bem como as seções planas que ocorrem em paralelo aos eixos coordenados, conhecidas como traços. Os traços nos permitem realizar uma análise mais detalhada da superfície quádrica, possibilitando o estudo das características e propriedades geométricas conforme as seções planas.

2.1.1 Elipsoide

Definição 5. O elipsoide é a superfície representada pela forma canônica

$$\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Os termos a , b e c são reais e positivos e também representam a medida dos semi-eixos do elipsoide. Veja a Figura 52.

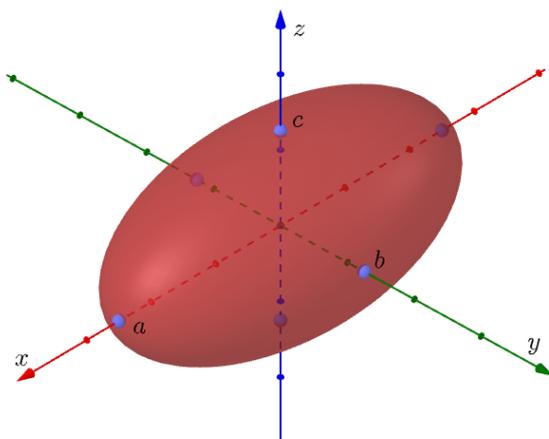


Figura 52: Elipsoide.

Quando uma quádrlica é cortada pelos planos coordenados ou planos paralelos a eles então, a curva de intersecção será uma cônica. A intersecção de um plano com uma superfície é chamada de traço da superfície no plano.

O traço do elipsoide \mathcal{Q} com o plano $z = k$ paralelo ao plano-xy, com $k \in \mathbb{R}$, isto é,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}, \\ z = k, \end{cases}$$

pode ser os seguintes itens:

- (a) Uma elipse com centro $(0, 0, k)$, se $k \in (-c, c)$.
- (b) O ponto $(0, 0, c)$, se $k = c$ ou o ponto $(0, 0, -c)$, se $k = -c$.
- (c) O conjunto vazio, se $|k| > c$. Desta forma o plano $z = |k|$ não intercepta o elipsoide.

De forma análoga, temos os traços do elipsoide \mathcal{Q} com os planos $y = k$ e $x = k$, paralelos aos planos xOz e yOz , respectivamente.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2} \\ y = k, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2} \\ x = k, \end{cases}$$

Da mesma forma, estes traços podem ser:

- (a) Uma elipse com centro $(0, k, 0)$, se $k \in (-b, b)$ ou a elipse de centro $(k, 0, 0)$ se $k \in (-a, a)$.
- (b) Os pontos $(0, b, 0)$ e $(0, -b, 0)$, se $k = \pm b$ ou os pontos $(a, 0, 0)$ e $(-a, 0, 0)$, se $k = \pm a$.
- (c) O conjunto vazio, se $|k| > b$ ou $|k| > a$.

Os pontos $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ e $(0, 0, \pm c)$ são chamados de vértice do elipsoide. Veja as Figuras 53a, 53b e 53c.

Se dois dos três valores a , b e c forem iguais então teremos um elipsoide de revolução. Por exemplo, quando $a = c$ o elipsoide

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2 + z^2}{a^2} = 1$$

é obtido rotacionando, em torno do eixo Oy , a elipse \mathcal{E} pertencente ao plano yOz

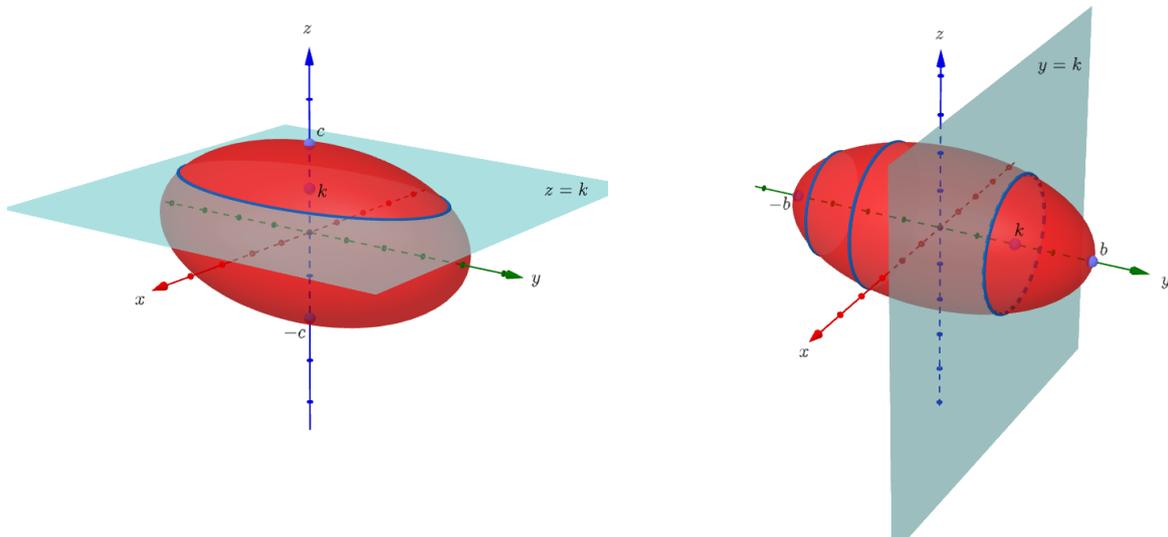
$$\mathcal{E} : \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

Veja a Figura 54.

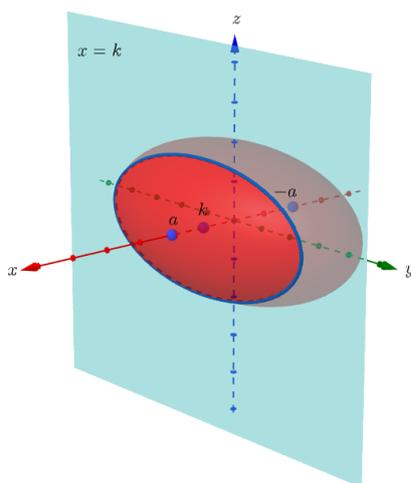
Observação 3. *A esfera de equação:*

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

é um elipsoide com $a = b = c = R$.



(a) Traço do elipsoide no plano $z = k$, com $|k| < c$. (b) Traço do elipsoide no plano $y = k$, com $|k| < b$.



(c) Traço do elipsoide no plano $x = k$, com $|k| < a$.

Figura 53: Traços do elipsoide nos planos $z = k$, $y = k$ e $x = k$.

2.1.2 Hiperboloide de uma folha

Nas combinações de sinais da equação (63), os casos em que temos apenas um coeficiente negativo, isto é,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{e} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

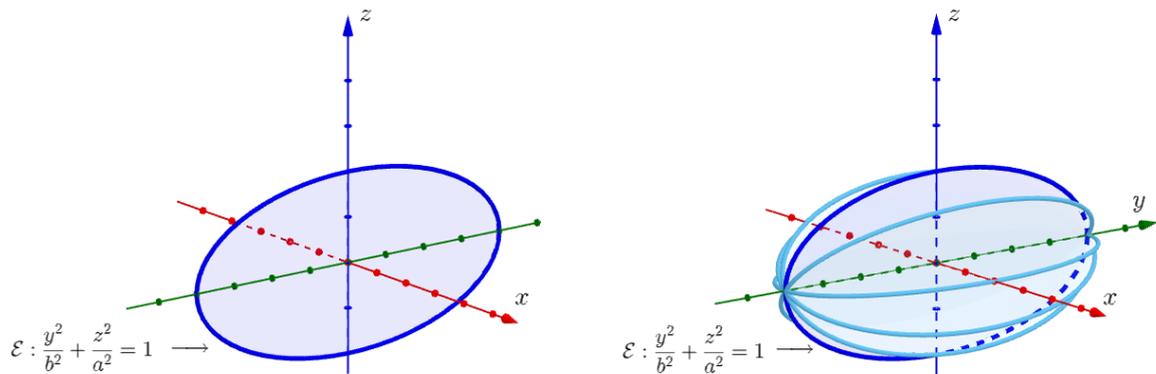


Figura 54: Elipsoide de revolução $\mathcal{Q}: \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2 + z^2}{a^2} = 1$.

Representam as formas canônicas do hiperboloide de uma folha de eixos Oz , Oy e Ox , respectivamente. Vamos analisar a forma canônica do hiperboloide de uma folha de eixo Oz . Veja a Figura 55.

$$\mathcal{Q}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

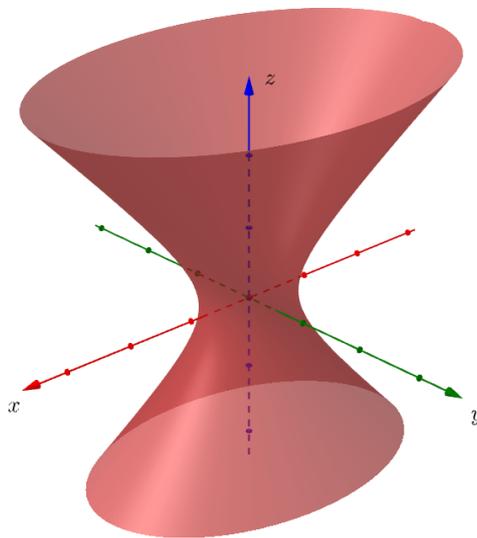


Figura 55: Hiperboloide de uma folha com eixo Oz .

O traço do hiperboloide de uma folha \mathcal{Q} com o plano $z = k$ paralelo ao plano-xy, com

$k \in \mathbb{R}$, isto é,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2} \\ z = k, \end{cases}$$

é uma elipse com centro $(0, 0, k)$, para todo $k \in \mathbb{R}$. Veja a Figura 56.

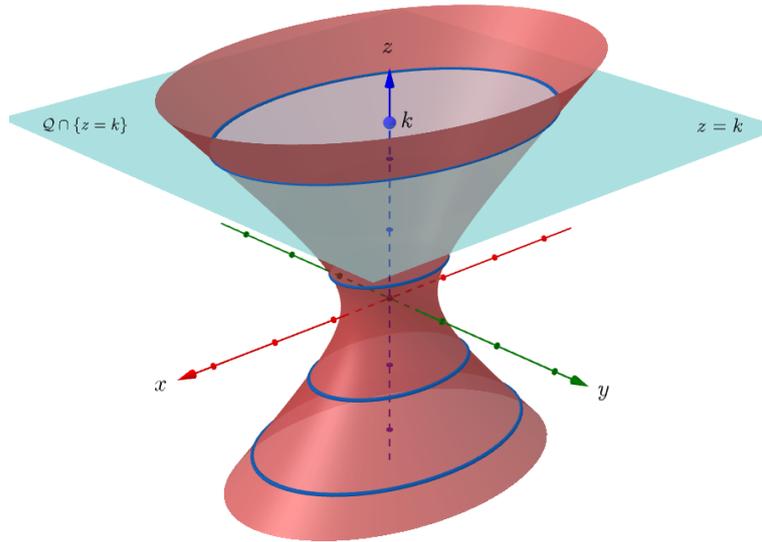


Figura 56: $Q \cap \{z = k\}$ é uma elipse com centro $(0, 0, k)$.

Já os traços no plano $x = k$, isto é,

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2} \\ x = k, \end{cases}$$

podem representar os seguintes itens:

- (a) Uma hipérbole com centro $(k, 0, 0)$ se $k \in (-a, a)$ pois,

$$-a < k < a \implies |k| < a \implies k^2 < a^2.$$

Assim,

$$1 - \frac{k^2}{a^2} > 0.$$

O eixo focal é a reta paralela ao eixo Oy que passa pelo ponto $(k, 0, 0)$. Veja a Figura 57a. As assíntotas possuem equações:

$$z = \pm \frac{c}{b}y.$$

(b) Dois par de retas concorrentes se $k = \pm a$. Portanto, temos um par de retas concorrentes no ponto $(a, 0, 0)$ e outro par de retas concorrentes no ponto $(-a, 0, 0)$. As equações destas retas concorrentes são as mesmas das assíntotas do item anterior. Veja a Figura 57b.

(c) Uma hipérbole com centro $(k, 0, 0)$ se $|k| > a$ pois,

$$|k| > a \implies k^2 > a^2.$$

Podemos reescrever a equação para os traços no plano $x = k$ da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1 \\ x = k, \end{cases}$$

Portanto,

$$\frac{k^2}{a^2} - 1 > 0.$$

O eixo focal é a reta paralela ao eixo Oz que passa pelo ponto $(k, 0, 0)$. Veja a Figura 57c. As assíntotas possuem equações:

$$y = \pm \frac{b}{c}z.$$

Para os traços no plano $y = k$, isto é,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2} \\ y = k, \end{cases}$$

podem representar os seguintes itens:

(a) Uma hipérbole com centro $(0, k, 0)$ se $k \in (-b, b)$ pois,

$$-b < k < b \implies |k| < b \implies k^2 < b^2.$$

Assim,

$$1 - \frac{k^2}{b^2} > 0.$$

O eixo focal é a reta paralela ao eixo Ox que passa pelo ponto $(0, k, 0)$. Veja a Figura 58a. As assíntotas possuem equações:

$$z = \pm \frac{c}{a}x.$$

(b) Dois par de retas concorrentes se $k = \pm b$. Portanto, temos um par de retas concorrentes no ponto $(0, b, 0)$ e outro par de retas concorrentes no ponto $(0, -b, 0)$. As equações destas retas concorrentes são as mesmas das assíntotas do item anterior. Veja a Figura 58b.

(c) Uma hipérbole com centro $(0, k, 0)$ se $|k| > b$ pois,

$$|k| > b \implies k^2 > b^2.$$

Podemos reescrever a equação para os traços no plano $y = k$ da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{k^2}{b^2} - 1 \\ y = k, \end{cases}$$

Portanto,

$$\frac{k^2}{b^2} - 1 > 0.$$

O eixo focal é a reta paralela ao eixo Oz que passa pelo ponto $(0, k, 0)$. Veja a Figura 58c. As assíntotas possuem equações:

$$x = \pm \frac{a}{c}z.$$

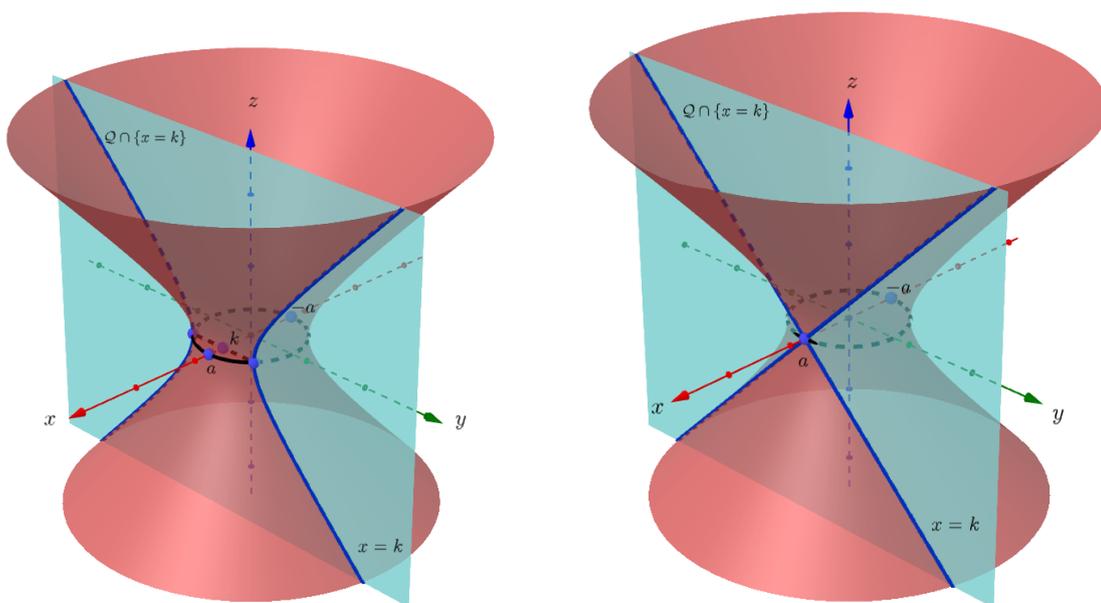
2.1.3 Hiperboloide de duas folhas

Nas combinações de sinais da equação (63), os casos em que temos apenas um coeficiente positivo, isto é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{e} \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

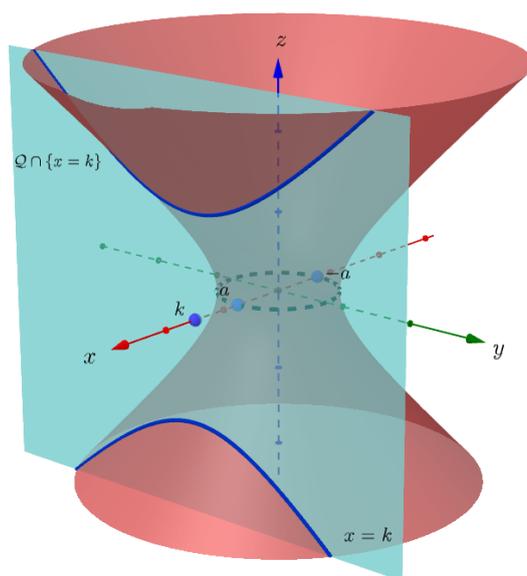
Representam as formas canônicas do hiperboloide de duas folhas de eixos Ox , Oy e Oz , respectivamente. Vamos analisar o hiperboloide de duas folhas de eixo Ox , conforme a Figura 59.

$$\mathcal{Q}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



(a) hipérbole para $|k| < a$.

(b) retas concorrentes no ponto $(a, 0, 0)$.

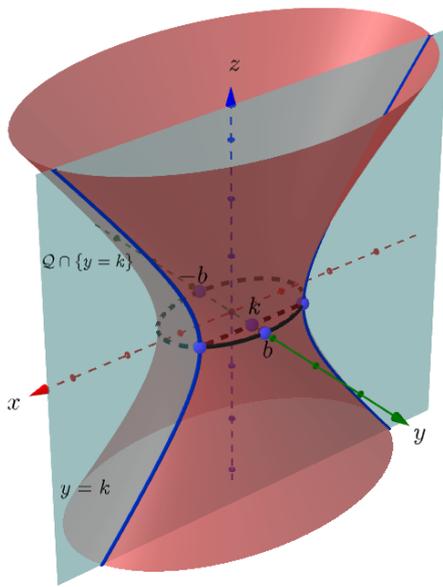


(c) hipérbole para $|k| > a$.

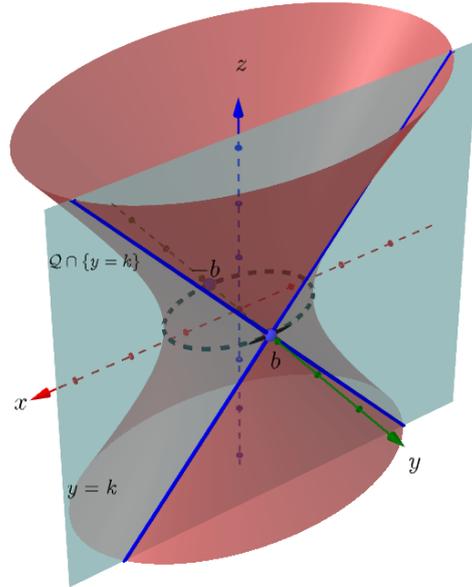
Figura 57: Traços do hiperboloide de uma folha no plano $x = k$.

Os traços do hiperboloide de duas folha \mathcal{Q} com os planos $z = k$ e $y = k$, com $k \in \mathbb{R}$, isto é,

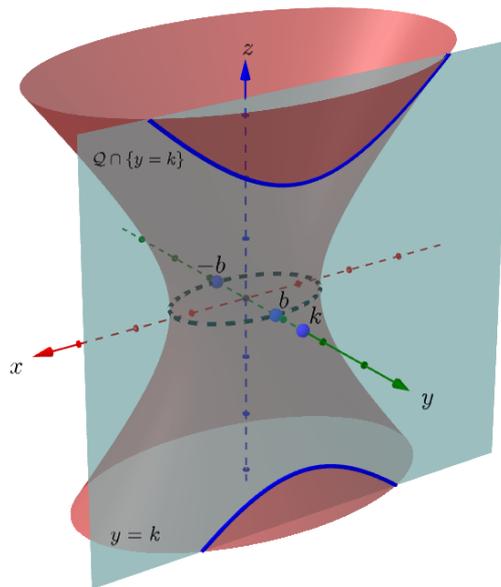
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2} \\ z = k, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{k^2}{b^2} \\ y = k, \end{cases}$$



(a) hipérbole para $|k| < b$.



(b) retas concorrentes no ponto $(0, b, 0)$.



(c) hipérbole para $|k| > b$.

Figura 58: Traços do hiperbolóide de uma folha no plano $y = k$

são hipérbóles, onde suas assíntotas são, respectivamente,

$$\begin{cases} y = \pm \frac{bx}{a} \\ z = k, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} z = \pm \frac{cx}{a} \\ y = k, \end{cases}$$

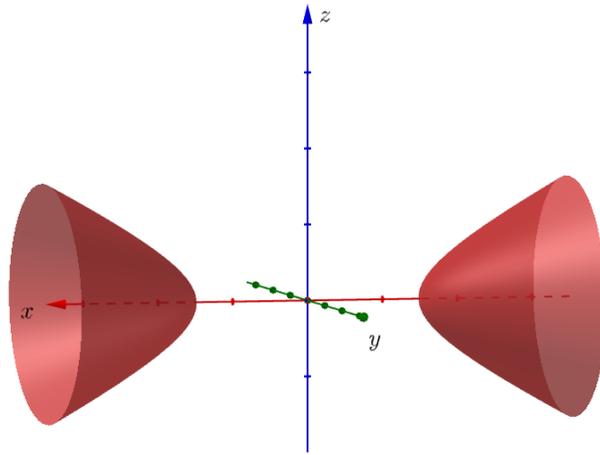
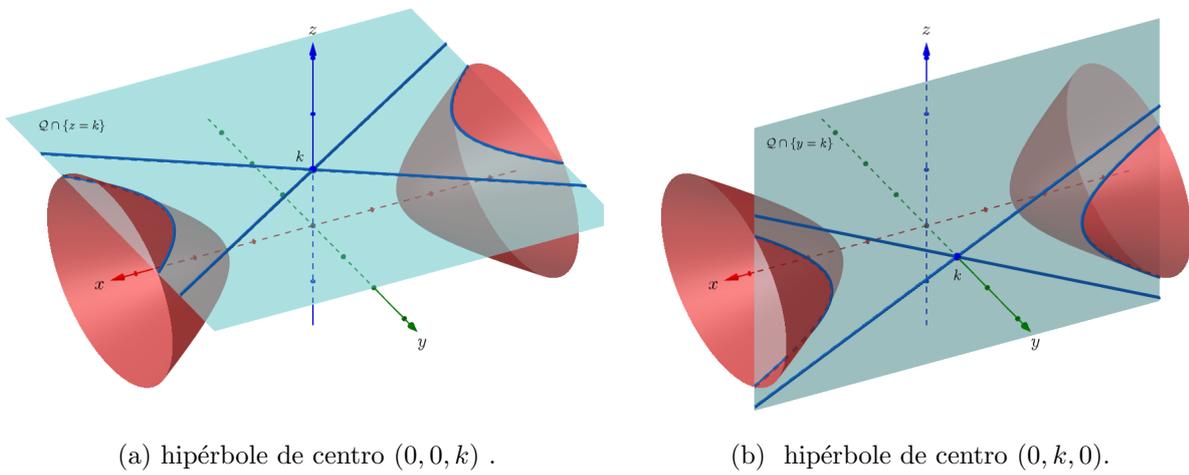


Figura 59: Hiperboloide de duas folhas de eixo Ox .

Os eixos focais destas hipérboles, são paralelos ao eixo Ox e passam pelos pontos $(0, 0, k)$ e $(0, k, 0)$, respectivamente. Veja a Figura 60.



(a) hipérbole de centro $(0, 0, k)$.

(b) hipérbole de centro $(0, k, 0)$.

Figura 60: Traços do hiperboloide de duas folhas nos plano $z = k$ e $y = k$.

Por outro lado, os traços no plano $x = k$ com $k \in \mathbb{R}$, isto é,

$$\begin{cases} -\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1 \\ x = k, \end{cases}$$

podem representar os seguintes itens:

(a) Uma elipse com centro $(k, 0, 0)$ se $|k| > a$ pois,

$$|k| > a \iff k^2 > a^2 \iff \frac{k^2}{a^2} > 1 \iff \frac{k^2}{a^2} - 1 > 0.$$

Veja a Figura 61a.

(b) Os pontos $(a, 0, 0)$ e $(-a, 0, 0)$ se $k = a$ e $k = -a$, respectivamente. Veja a Figura 61b.

(c) O conjunto vazio se $|k| < a$. Veja a Figura 61c.

2.1.4 Cone elíptico

As formas canônicas para o cone elíptico, são dadas pelas combinações de sinais da equação (64), mencionada no início desta secção. As equações:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

representam um cone elíptico de eixos Ox , Oy e Oz , respectivamente. Vamos estudar com mais detalhes o cone elíptico de eixo Oz , conforme a Figura 62.

$$\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

O traço do cone elíptico \mathcal{Q} com o plano $z = k$ paralelo ao plano-xy, com $k \in \mathbb{R}$, isto é,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} \\ z = k, \end{cases}$$

representa uma elipse de centro $(0, 0, k)$ quando $k \neq 0$ e representa a origem se $k = 0$. Veja a Figura 63.

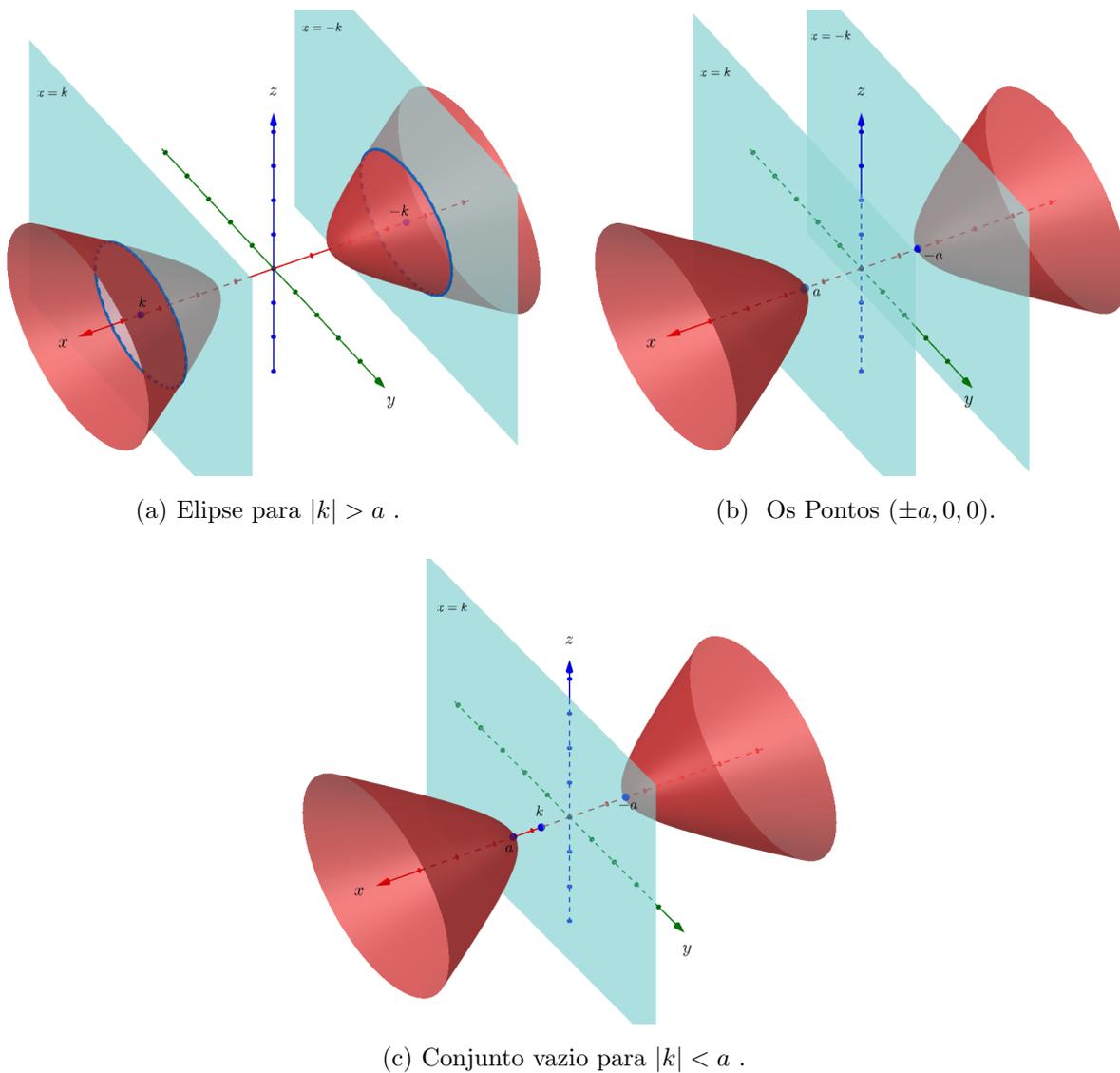


Figura 61: Traços do hiperboloide de duas folha no plano $x = k$.

Observação 4. Se tivermos $a = b$ então, temos um cone circular já que o traço no plano $z = k$, com $k \neq 0$, é um círculo.

Já o traço com o plano $y = k$, isto é,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{k^2}{b^2} \\ y = k, \end{cases}$$

representa uma hipérbole com centro $(0, k, 0)$ se $k \neq 0$. A reta focal é a reta paralela ao

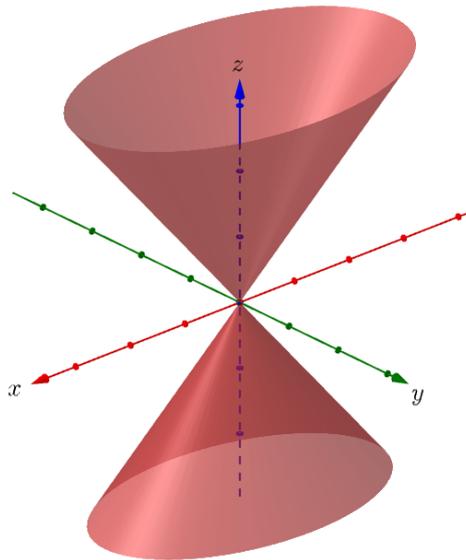


Figura 62: Cone elíptico de eixo Oz .

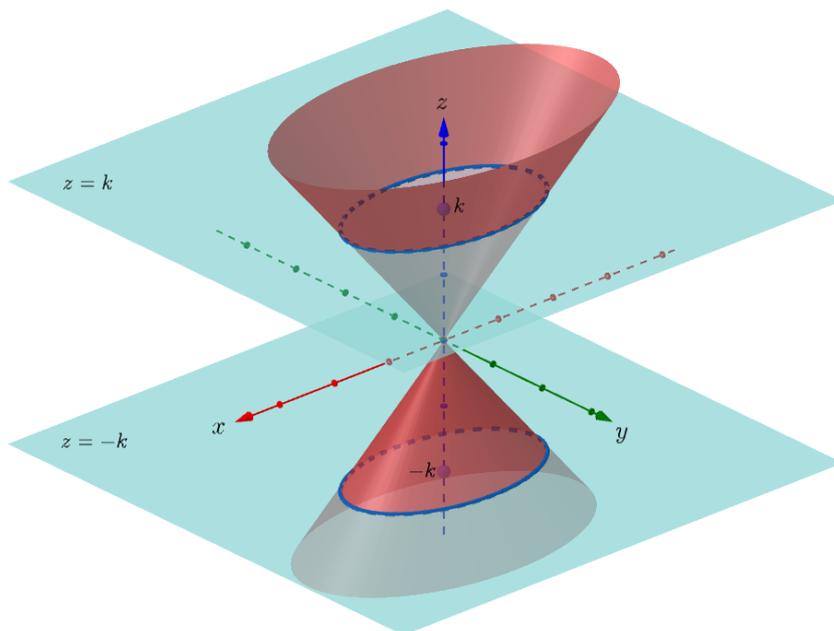


Figura 63: Traços do cone elíptico de eixo Oz com plano $z = k$.

eixo Oz que passa pelo ponto $(0, k, 0)$. Suas assíntotas são dadas por:

$$\begin{cases} x = \pm \frac{az}{c} \\ y = k \end{cases}$$

Por outro lado, se $k = 0$ então, temos duas retas concorrentes que possuem a mesma equação das assíntotas mencionadas acima. Estas retas são concorrentes na origem. Veja as Figuras 64a e 64b.

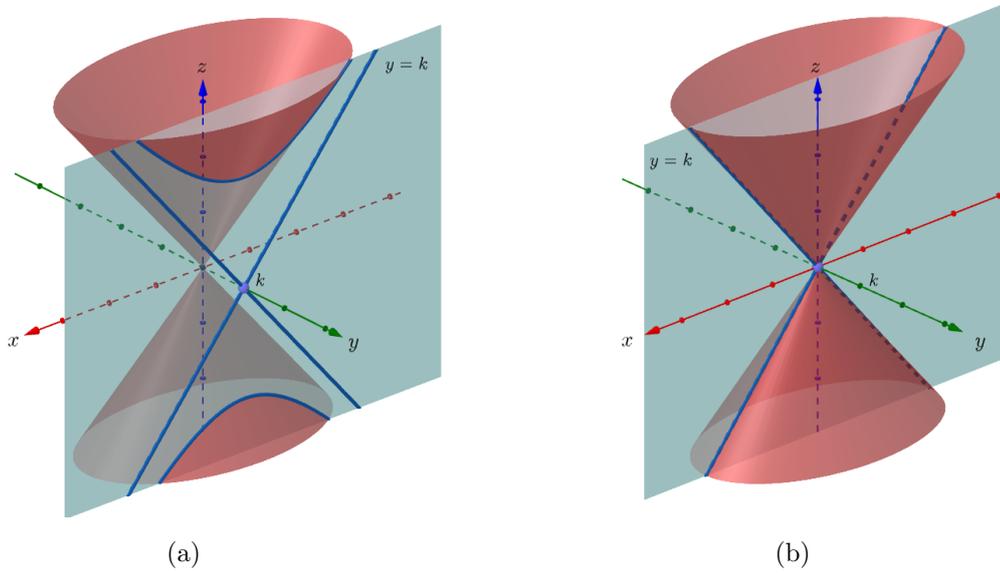


Figura 64: Traços do cone elíptico de eixo Oz com o plano $y = k$.

Para o traço com o plano $x = k$, isto é,

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{a^2} \\ x = k, \end{cases}$$

representa uma hipérbole com centro $(k, 0, 0)$ se $k \neq 0$. A reta focal é paralela ao eixo Oz e passa pelo ponto $(k, 0, 0)$. As equações de suas assíntotas são:

$$\begin{cases} y = \pm \frac{bz}{c} \\ x = k. \end{cases}$$

Se $k = 0$ então, temos duas retas concorrentes na origem que possuem a mesma equação das assíntotas mencionadas acima. Vejas as Figuras 65a e 65b.

2.1.5 Cilindro elíptico

A partir da equação

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R,$$

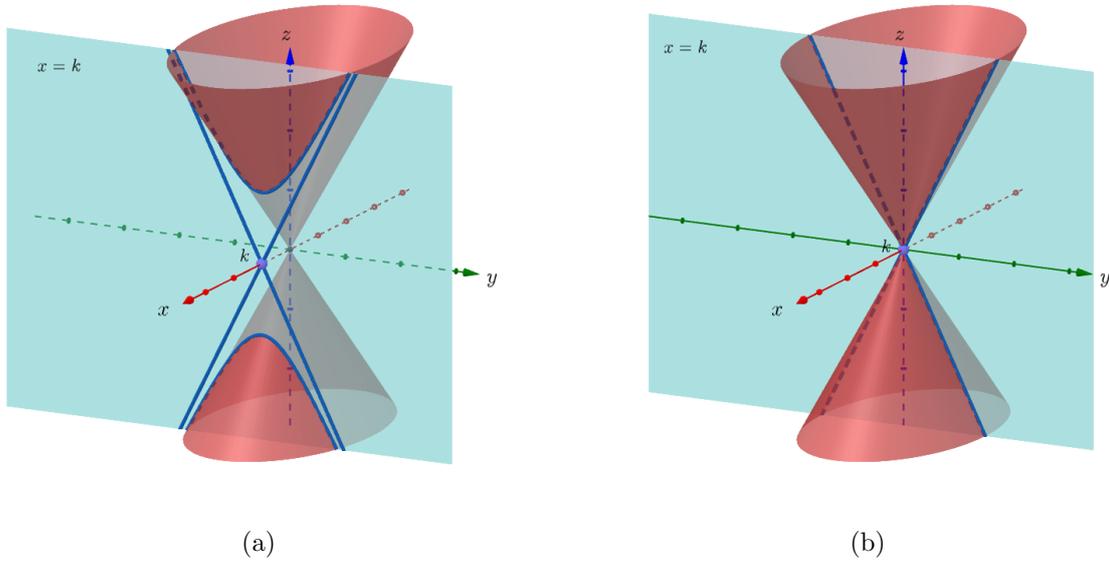


Figura 65: Traços do cone elíptico de eixo Oz com o plano $x = k$.

apresentada no início desta secção, podemos obter as formas canônicas do cilindro elíptico.

Seja $R \neq 0$. Se um dos coeficientes A , B ou C for nulo então, temos as seguintes equações de segundo grau nas variáveis x , y e z :

$$\frac{0x^2}{R} + \frac{By^2}{R} + \frac{Cz^2}{R} = 1, \quad \frac{Ax^2}{R} + \frac{0y^2}{R} + \frac{Cz^2}{R} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{Ax^2}{R} + \frac{By^2}{R} + \frac{0z^2}{R} = 1.$$

De maneira análoga ao que fizemos no início desta secção, podemos escrever as equações acima da seguinte forma:

$$\pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{e} \quad \pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (65)$$

As equações de (65) representam um conjunto vazio se os coeficientes, no primeiro membro, forem todos negativos. Se todos os coeficientes forem positivos então teremos as formas canônicas do cilindro elíptico. Por outro lado, se apenas um dos coeficientes for positivo então teremos um cilindro hiperbólico no qual será discutido na próxima subsecção.

Portanto, as equações do segundo grau nas variáveis x , y e z

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

são denominadas de formas canônicas do cilindro elíptico, cujos eixos são respectivamente, Ox , Oy e Oz . Iremos abordar com mais detalhes o cilindro elíptico de eixo Oz conforme a Figura 66. Os demais, são análogos.

$$\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

O traço do cilindro elíptico \mathcal{Q} com o plano $z = k$, paralelo ao plano- xy , com $k \in \mathbb{R}$, isto

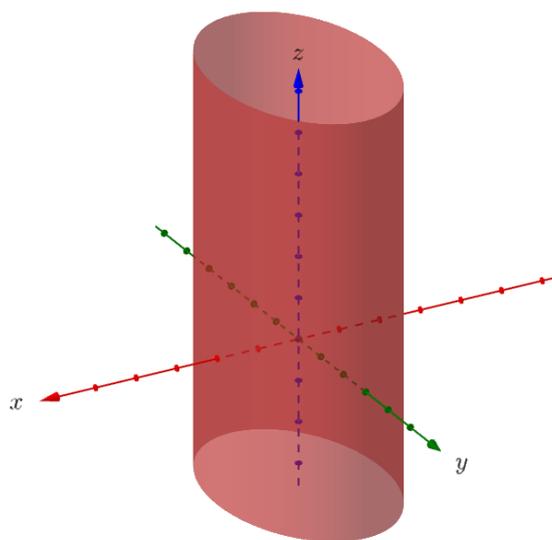


Figura 66: Cilindro elíptico de eixo Oz .

é,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = k, \end{cases}$$

representa uma elipse de centro $(0, 0, k)$. Veja a Figura 67.

Observação 5. *Se tivermos $a = b$ então, o cilindro é circular pois, o traço no plano $z = k$ são círculos de centro $(0, 0, k)$.*

Já o traço no plano $y = k$, isto é,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = 1 \\ y = k \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2} \\ y = k. \end{cases}$$

Representam os seguintes itens:

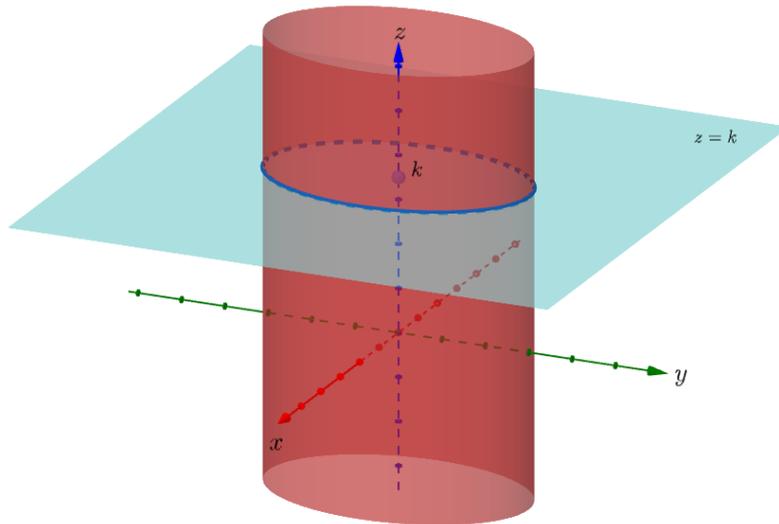


Figura 67: Traço no plano $z = k$.

(a) Duas retas paralelas ao eixo Oz se $|k| < b$ pois,

como $|k| < b \iff -b < k < b$, então,

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2} > 0.$$

Logo temos:

$$x^2 = \frac{a^2(b^2 - k^2)}{b^2} \implies x = \pm \frac{a\sqrt{b^2 - k^2}}{b},$$

na qual representa as duas retas paralelas. Veja a Figura 68a.

(b) Uma reta paralela ao eixo Oz que passa pelo ponto $(0, b, 0)$ ou pelo ponto $(0, -b, 0)$,

se $k = b$ ou $k = -b$, respectivamente, pois,

se $k = \pm b$ então:

$$\frac{x^2}{a^2} = 0 \implies x = 0.$$

Portanto, temos a reta de equação

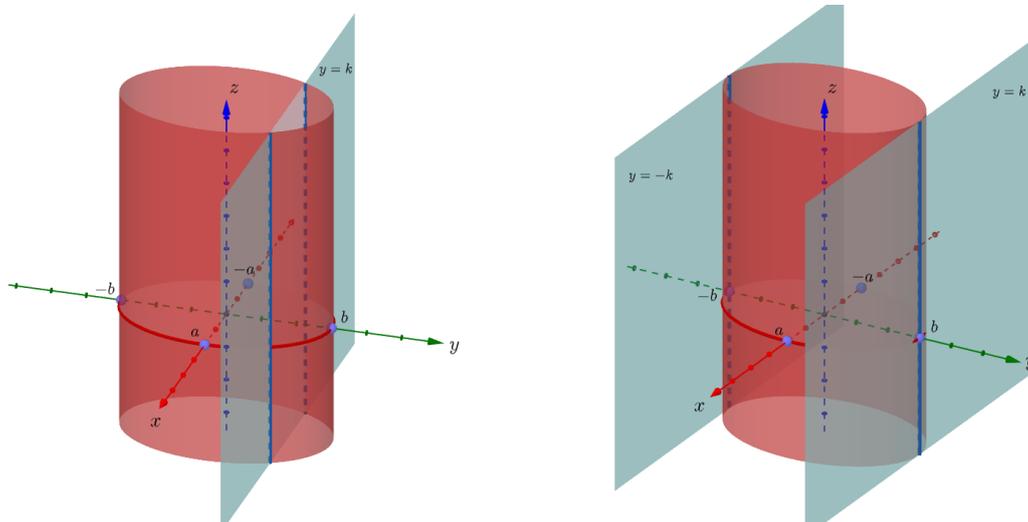
$$\begin{cases} y = b \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = -b \\ x = 0. \end{cases}$$

Veja a Figura 68b.

(c) Um conjunto vazio se $|k| > b$ pois,

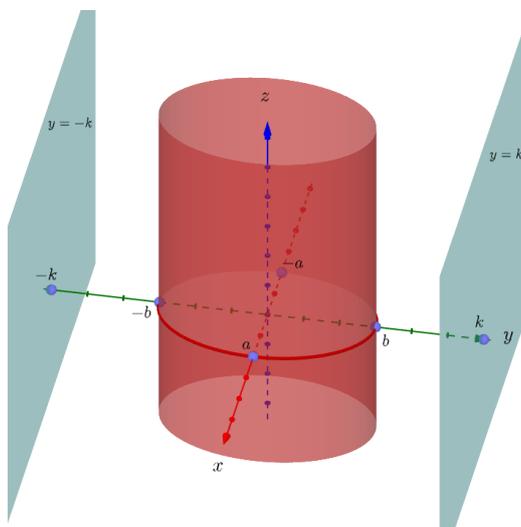
$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2} < 0.$$

que resulta em uma sentença falsa. Veja a Figura 68c



(a) Par de retas paralelas a Oz , se $|k| < b$.

(b) Reta paralela a Oz , se $k = \pm b$



(c) Conjunto vazio, se $|k| > b$.

Figura 68: Traços do cilindro elíptico no plano $y = k$.

De maneira análoga, o traço no plano $x = k$, isto é,

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2} \\ x = k. \end{cases}$$

representam os seguintes itens:

- (a) Duas retas paralelas ao eixo Oz se $|k| < a$. As equações destas retas são dadas por:

$$y = \pm \frac{b\sqrt{a^2 - k^2}}{a}.$$

- (b) Uma reta paralela ao eixo Oz que passa pelo ponto $(a, 0, 0)$ ou pelo ponto $(-a, 0, 0)$, se $k = a$ ou $k = -a$, respectivamente. Logo, temos as equações:

$$\begin{cases} x = a \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -a \\ y = 0. \end{cases}$$

- (c) Um conjunto vazio se $|k| > a$.

Veja a Figura 69.

2.1.6 Cilindro hiperbólico

Nas equações

$$\pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{e} \quad \pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

apresentadas anteriormente, se houver apenas um coeficiente positivo então, chamaremos estas equações de formas canônicas do cilindro hiperbólico. Portanto, temos as seguintes formas canônicas:

- (i) **De eixo Oz .**

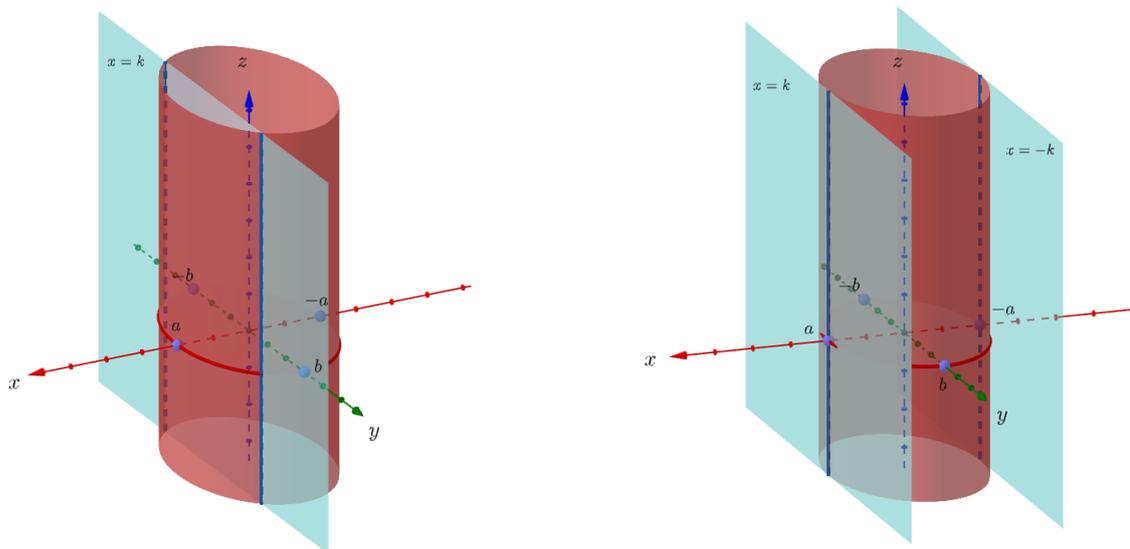
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

- (ii) **De eixo Oy .**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

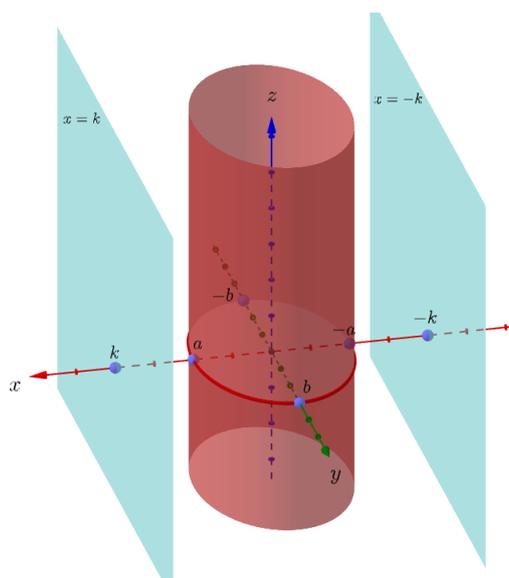
- (iii) **De eixo Ox .**

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



(a) Par de retas paralelas a Oz , se $|k| < a$.

(b) Reta paralela a Oz , se $k = \pm a$



(c) Conjunto vazio, se $|k| > a$.

Figura 69: Traços do cilindro elíptico no plano $x = k$.

Vamos abordar com mais detalhes o cilindro hiperbólico \mathcal{Q} de eixo Oz , uma vez que os demais são análogos. Veja a Figura 70.

$$\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

O traço do cilindro hiperbólico \mathcal{Q} com o plano $z = k$, paralelo ao plano-xy, com $k \in \mathbb{R}$,

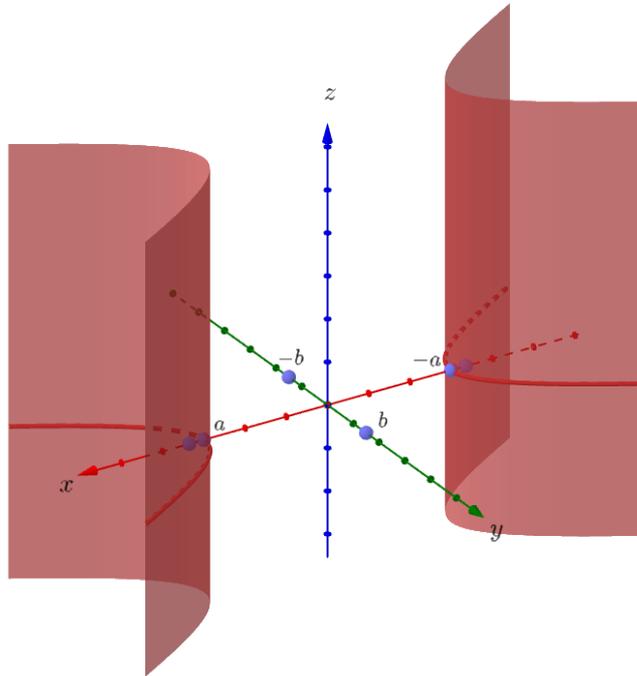


Figura 70: Cilindro hiperbólico de eixo Oz .

isto é,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = k, \end{cases}$$

representa uma hipérbole, cujo centro é o ponto $(0, 0, k)$ para todo k . O eixo real é a reta paralela ao eixo Ox que passa pelos pontos $(a, 0, k)$ e $(-a, 0, k)$. As equações de suas assíntotas são dadas por:

$$\begin{cases} y = \pm \frac{bx}{a} \\ z = k. \end{cases}$$

Veja a Figura 71.

O traço do cilindro hiperbólico \mathcal{Q} com o plano $y = k$, isto é,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{k^2}{b^2} \\ y = k, \end{cases}$$

representa um par de retas paralelas ao eixo Oz para todo k pois,

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{k^2}{b^2} \geq 0 \implies x = \pm \frac{a\sqrt{b^2 + k^2}}{b}.$$

A equação acima, representa a equação dessas duas retas paralelas. Veja Figura 72.

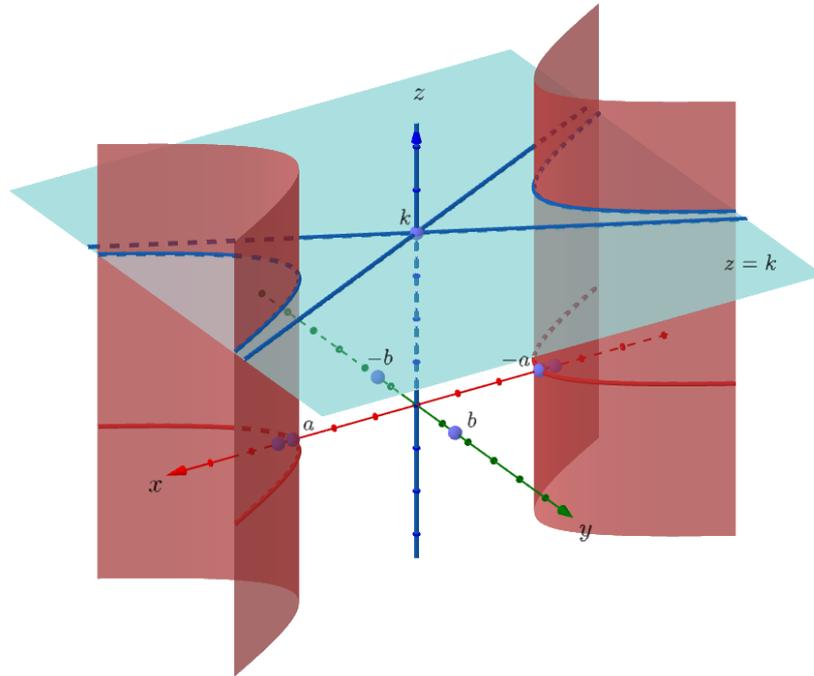


Figura 71: Traço no plano $z = k$.

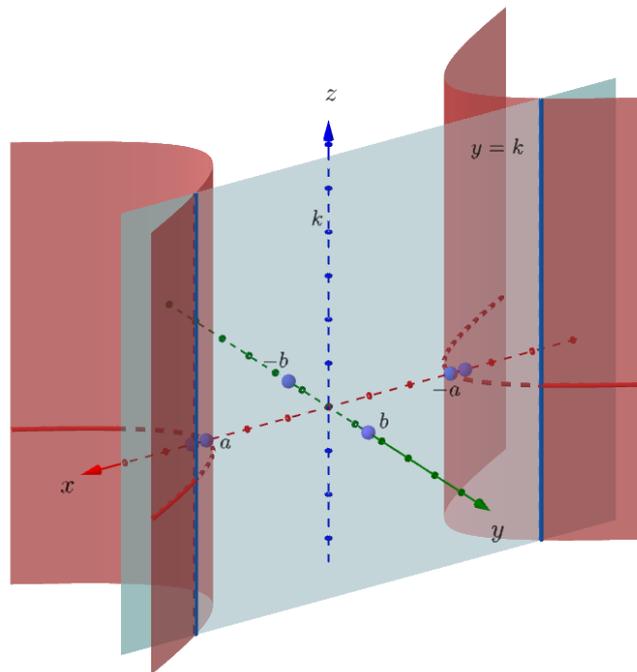


Figura 72: Traços do cilindro hiperbólico no plano $y = k$.

Já o traço no plano $x = k$, isto é,

$$\begin{cases} \frac{k^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = k, \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1 \\ x = k, \end{cases}$$

representa os seguintes itens:

- (a) um par retas paralelas ao eixo Oz se $|k| > a$ pois,

$$\text{como } |k| > a \implies k > a \text{ e } -k > a.$$

Portanto,

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1 > 0 \implies y = \pm \frac{b\sqrt{k^2 - a^2}}{a}.$$

Logo podemos ter os dois par de retas:

$$\begin{cases} y = \pm \frac{b\sqrt{k^2 - a^2}}{a} \\ x = k \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = \pm \frac{b\sqrt{k^2 - a^2}}{a} \\ x = -k \end{cases}$$

Veja a Figura 73a.

- (b) Uma reta paralela ao eixo Oz que passa pelo ponto $(a, 0, 0)$ ou pelo ponto $(-a, 0, 0)$, se $k = a$ ou $k = -a$, respectivamente. Logo, temos as equações:

$$\begin{cases} x = a \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -a \\ y = 0. \end{cases}$$

Veja a Figura 73b.

- (c) Um conjunto vazio $|k| < a$. Veja a Figura 73c.

2.2 Quádricas não centrais

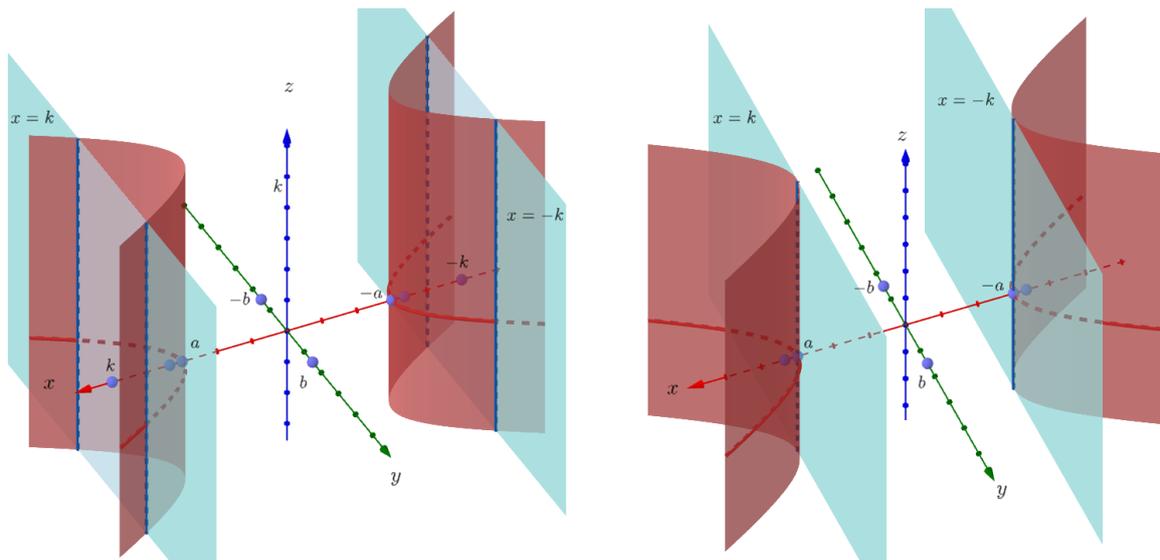
Dada a função quadrática em \mathbb{R}^3

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J.$$

Se os coeficientes G , H e I forem não nulos então, dizemos que as superfícies de nível associadas a função $f(x, y, z)$ são quádricas não centrais. As quádricas não centrais são assim chamadas, por não serem simétricas em relação a origem.

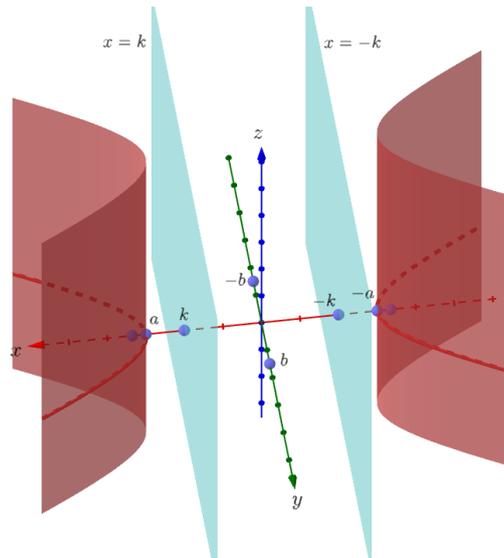
Nas superfícies quádricas $f(x, y, z) = R$, isto é,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = R, \quad (66)$$



(a) Par de retas paralelas a Oz , se $|k| > a$.

(b) Reta paralela a Oz , se $k = \pm a$



(c) Conjunto vazio, se $|k| < a$.

Figura 73: Traços do cilindro hiperbólico no plano $x = k$.

podemos realizar uma mudança de coordenadas de tal modo que tenhamos $D = E = F = 0$. Em outras palavras, podemos escolher novos eixos ortogonais, \bar{x} , \bar{y} e \bar{z} , de modo que a equação (66) se transforma em:

$$A'\bar{x}^2 + B'\bar{y}^2 + C'\bar{z}^2 + G'\bar{x} + H'\bar{y} + I'\bar{z} + J' = R'.$$

Portanto, escolhendo um sistema de eixos ortogonais, podemos reescrever qualquer equação

geral de segundo grau em \mathbb{R}^3 , na forma simplificada:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J = R. \quad (67)$$

Além disso, a partir da equação (67), podemos simplifica-la ainda mais realizando uma translação dos eixos coordenados. Seja o sistema de eixos \overline{Oxyz} obtido pela translação do sistema $Oxyz$ onde, $\overline{O} = (x_0, y_0, z_0)$ é a nova origem.

Seja $P = (x_P, y_P, z_P)$ um ponto no sistema $Oxyz$, onde P satisfaz a equação (67) para algum $R \in \mathbb{R}$. Tomando $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ como sendo a translação de P para o novo sistema \overline{Oxyz} , temos que as coordenadas de \overline{P} em relação ao sistema $Oxyz$ é dada por:

$$\begin{cases} x = \overline{x} + x_0 \\ y = \overline{y} + y_0 \\ z = \overline{z} + z_0. \end{cases}$$

Vale ressaltar que as coordenadas de \overline{P} no sistema \overline{Oxyz} são iguais as coordenadas de P no sistema $Oxyz$, uma vez que, as distâncias destes pontos as suas respectivas origens são iguais pois, \overline{P} é uma translação de P . Portanto, $\overline{x} = x_P$, $\overline{y} = y_P$, $\overline{z} = z_P$, ou seja, para encontrar as coordenadas de \overline{P} em relação a $Oxyz$ podemos somar as coordenadas de P com as coordenadas de \overline{O} .

Aplicando a mudança de coordenadas (translação) na equação (67) segue que:

$$\begin{aligned} A(\overline{x} + x_0)^2 + B(\overline{y} + y_0)^2 + C(\overline{z} + z_0)^2 + G\overline{x} + H\overline{y} + I\overline{z} + J &= R \implies \\ A(\overline{x}^2 + 2\overline{x}x_0 + x_0^2) + B(\overline{y}^2 + 2\overline{y}y_0 + y_0^2) + C(\overline{z}^2 + 2\overline{z}z_0 + z_0^2) & \\ + G(\overline{x} + x_0) + H(\overline{y} + y_0) + I(\overline{z} + z_0) + J &= R \implies \\ A\overline{x}^2 + B\overline{y}^2 + C\overline{z}^2 + (2Ax_0 + G)\overline{x} + (2By_0 + H)\overline{y} + (2Cz_0 + I)\overline{z} & \\ + Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 + Gx_0 + Hy_0 + Iz_0 + J &= R \end{aligned} \quad (68)$$

Pela equação (68) podemos verificar alguns casos:

Caso (I):

Os coeficientes A , B e C são diferentes de zero. Podemos escolher o ponto $\overline{O} = (x_0, y_0, z_0)$ de modo que os termos de primeiro grau desapareçam. Basta tomarmos

$$x_0 = -\frac{G}{2A}, \quad y_0 = -\frac{H}{2B} \quad \text{e} \quad z_0 = -\frac{I}{2C}.$$

Logo, a equação (68) se resume em:

$$A\bar{x}^2 + B\bar{y}^2 + C\bar{z}^2 + \frac{G^2}{4A} + \frac{H^2}{4B} + \frac{I^2}{4C} - \frac{G^2}{2A} - \frac{H^2}{2B} - \frac{I^2}{2C} + J = R \implies$$

$$A\bar{x}^2 + B\bar{y}^2 + C\bar{z}^2 - \frac{G^2}{4A} - \frac{H^2}{4B} - \frac{I^2}{4C} + J = R$$

Tomando

$$\bar{R} = R + \frac{G^2}{4A} + \frac{H^2}{4B} + \frac{I^2}{4C} - J,$$

podemos escrever:

$$A\bar{x}^2 + B\bar{y}^2 + C\bar{z}^2 = \bar{R},$$

que representa a forma simplificada das quádras centrais nas quais já estudamos.

Caso (II):

Somente um dos coeficiente A , B ou C é nulo. Vejamos o caso em que temos $A \neq 0$, $B \neq 0$ e $C = 0$. Afim de fazer desaparecer os termos de primeiro grau, tomemos

$$x_0 = -\frac{G}{2A}, \quad \text{e} \quad y_0 = -\frac{H}{2B}.$$

Note que não é necessário definir um valor para z_0 , um vez que o coeficiente C sendo nulo não conseguimos eliminar o termo de primeiro grau em relação ao eixo \bar{z} . Neste caso, a equação (68) se resume em:

$$A\bar{x}^2 + B\bar{y}^2 + I\bar{z} - \frac{G^2}{4A} - \frac{H^2}{4B} + Iz_0 + J = R.$$

Tomando

$$\bar{R} = R + \frac{G^2}{4A} + \frac{H^2}{4B} - (Iz_0 + J),$$

podemos escrever:

$$A\bar{x}^2 + B\bar{y}^2 + I\bar{z} = \bar{R}. \tag{69}$$

Se tivermos $I = 0$ na equação (69) então temos,

$$A\bar{x}^2 + B\bar{y}^2 = \bar{R},$$

para todo $z_0 \in \mathbb{R}$. Esta equação representa um cilindro elíptico de eixo Oz quando os coeficientes A e B possuem o mesmo sinal de \bar{R} . Por outro lado, se os coeficiente A e B tem sinais opostos então, a equação acima representa um cilindro hiperbólico de eixo Oz .

Obviamente, os cilindros elípticos e hiperbólicos possuem eixos Oz pois estamos considerando $C = 0$ na equação (68). Nos casos em que $A = 0$ ou $B = 0$ teríamos as equações:

$$B\bar{y}^2 + C\bar{z}^2 = \bar{R}_1 \quad \text{e} \quad A\bar{x}^2 + C\bar{z}^2 = \bar{R}_2,$$

com

$$\bar{R}_1 = R + \frac{H^2}{4B} + \frac{I^2}{4C} - (Gx_0 + J) \quad \text{e} \quad \bar{R}_2 = R + \frac{G^2}{4A} + \frac{I^2}{4C} - (Hy_0 + J)$$

e considerando $G = 0$ e $H = 0$ respectivamente. Estas equações representam os cilindros elípticos ou hiperbólicos, conforme os sinais dos coeficiente no primeiro membro, de eixos Ox e Oy respectivamente.

Voltando a equação (69), se tivermos $I \neq 0$, então

$$\begin{aligned} A\bar{x}^2 + B\bar{y}^2 &= \bar{R} - I\bar{z} && \implies \\ A\bar{x}^2 + B\bar{y}^2 &= R + \frac{G^2}{4A} + \frac{H^2}{4B} - (Iz_0 + J) - I\bar{z} \quad . \end{aligned}$$

Escolhendo z_0 como:

$$z_0 = \frac{R}{I} + \frac{G^2}{4AI} + \frac{H^2}{4BI} - J,$$

segue que

$$A\bar{x}^2 + B\bar{y}^2 = -I\bar{z}$$

Tomando $\bar{S} = -I$, temos:

$$A\bar{x}^2 + B\bar{y}^2 = \bar{S}\bar{z}. \tag{70}$$

A equação (70) representa a forma simplificada de uma quádrlica não centrada de eixo Oz . As demais equações para as quádrlicas não centradas de eixos Ox e Oy são obtidas de forma análoga fazendo $A = 0$ ou $B = 0$, onde G e H são não nulos. Estas equações de eixos Ox e Oy , respectivamente são:

$$B\bar{y}^2 + C\bar{z}^2 = \bar{S}_1\bar{x} \quad \text{e} \quad A\bar{x}^2 + C\bar{z}^2 = \bar{S}_2\bar{y},$$

onde $\bar{S}_1 = -G$ e $\bar{S}_2 = -H$

Ainda teríamos mais um caso a ser verificado, o caso em que temos dois dos três coeficientes A , B ou C sendo nulos na equação (68). Porém, não será abordado, uma

vez que a equação (70) obtida no (Caso II), já é suficiente para realizarmos os estudos das quádricas não cêntricas. Portanto, de maneira geral, a equação de uma quádrica não central pode ser simplificada nas formas:

$$Ax^2 + By^2 = Sz \quad \text{ou} \quad Ax^2 + Cz^2 = Sy \quad \text{ou} \quad By^2 + Cz^2 = Sx$$

cujos eixos são respectivamente Oz , Oy e Ox .

Escolhendo a equação de eixo Oz , por exemplo, podemos ainda reescrevê-la na forma canônica. Se $S \neq 0$ então, multiplicando a equação por $\frac{c}{S}$, onde $c \in \mathbb{R}$ tal que $c > 0$, resulta em

$$Ax^2 + By^2 = Sz \quad \implies \quad \frac{Ac}{S}x^2 + \frac{Bc}{S}y^2 = cz.$$

Se os coeficientes forem positivos, isto é,

$$\frac{Ac}{S} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{Bc}{S} > 0,$$

então pondo

$$a = \sqrt{\frac{S}{Ac}} \quad \text{e} \quad b = \sqrt{\frac{S}{Bc}},$$

segue que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz.$$

Por outro lado, se

$$\frac{Ac}{S} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{Bc}{S} < 0,$$

então pondo

$$a = \sqrt{-\frac{S}{Ac}} \quad \text{e} \quad b = \sqrt{-\frac{S}{Bc}},$$

segue que

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz.$$

Portanto, se os coeficientes A e S ou B e S tiverem sinais iguais ou opostos, então podemos escrever:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz \tag{71}$$

As combinações de sinais da equação (71) nos fornece dois tipos de superfícies quádricas de eixo OZ . As equações que representam as quádricas não centrais de eixos Ox e Oy

são respectivamente,

$$\pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = ax \quad \text{e} \quad \pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = by,$$

com a e b números reais, sendo $a > 0$ e $b > 0$. Iremos estudar com mais detalhes esses dois tipos de quádricas que obtemos a partir das combinações de sinais das equações mencionadas acima.

2.2.1 Paraboloide elíptico

Nas combinações de sinais das equações

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz \quad \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = ax \quad \text{e} \quad \pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = by.$$

Se os coeficientes dos termos quadráticos tiverem sinais iguais então, cada uma destas equações representa um paraboloides elíptico. Lembrando que a , b e c são números reais positivos.

Portanto, as equações do paraboloides elíptico na forma canônica de eixos Ox , Oy e Oz , respectivamente, são:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = ax, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = by \quad \text{e} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

ou

$$-\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = ax, \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = by \quad \text{e} \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$$

Vejamos agora os traços dos paraboloides elípticos. Para esta análise, escolheremos a forma canônica com relação ao eixo Oz , pois o procedimento é análogo para as outras formas canônicas. Consideremos os paraboloides elípticos \mathcal{Q}_1 e \mathcal{Q}_2 com eixo ao longo de Oz :

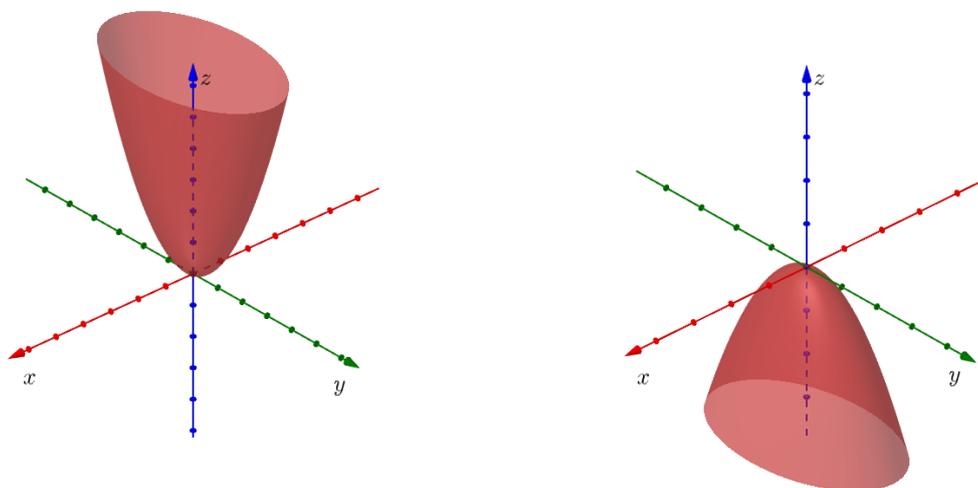
$$\mathcal{Q}_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}_2 : -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz.$$

Podemos ainda reescrever a equação do paraboloides \mathcal{Q}_2 da seguinte forma:

$$\mathcal{Q}_2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -cz.$$

Dizemos que um parabolóide elíptico possui concavidade voltada para cima quando, em sua forma canônica, os coeficientes no primeiro membro têm sinais iguais entre si e iguais ao sinal do coeficiente no segundo membro. Isso é representado na Figura 74a que descreve o parabolóide elíptico \mathcal{Q}_1 .

Por outro lado, quando, na forma canônica, os coeficientes no primeiro membro possuem sinais iguais entre si, mas opostos ao coeficiente no segundo membro, dizemos que o parabolóide elíptico tem concavidade voltada para baixo. Isso é ilustrado na Figura 74b que representa o parabolóide \mathcal{Q}_2 .



(a) Concavidade voltada para cima.

(b) Concavidade voltada para baixo.

Figura 74: Paraboloides elípticos de eixo Oz .

Através da Figura 74 podemos observar que o parabolóide elíptico não é simétrico em relação ao plano xy e a origem, o que é uma característica das quádricas não centradas.

Afim de analisar os traços do parabolóide elíptico de eixo Oz , consideremos apenas o parabolóide \mathcal{Q}_1 .

Os traços de \mathcal{Q}_1 com plano $z = k$, paralelo ao plano- xy , com $k \in \mathbb{R}$, isto é,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = ck \\ z = k, \end{cases}$$

podem representar os seguintes itens:

- (a) Uma elipse cujo centro é o ponto $(0, 0, k)$ se $k > 0$.
- (b) Representa a origem $(0, 0, 0)$, se $k = 0$.
- (c) O conjunto vazio se $k < 0$ pois, o parabolóide elíptico não é simétrico em relação ao plano xy e a origem.

A Figura 75 representa estes traços.

Já os traços de \mathcal{Q}_1 com o plano $y = k$, isto é,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = cz - \frac{k^2}{b^2} \\ y = k, \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 = a^2c \left(z - \frac{k^2}{cb^2} \right) \\ y = k, \end{cases}$$

são parábolas de vértices $\left(0, k, \frac{k^2}{cb^2}\right)$ e eixo focal paralelo ao eixo Oz . Veja a Figura 76.

Os traços de \mathcal{Q}_1 com o plano $x = k$, isto é,

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} = cz - \frac{k^2}{a^2} \\ x = k, \end{cases} \implies \begin{cases} y^2 = b^2c \left(z - \frac{k^2}{ca^2} \right) \\ x = k, \end{cases}$$

também são parábolas de vértice $\left(k, 0, \frac{k^2}{ca^2}\right)$ e eixo focal paralelo ao eixo Oz . Veja a Figura 77.

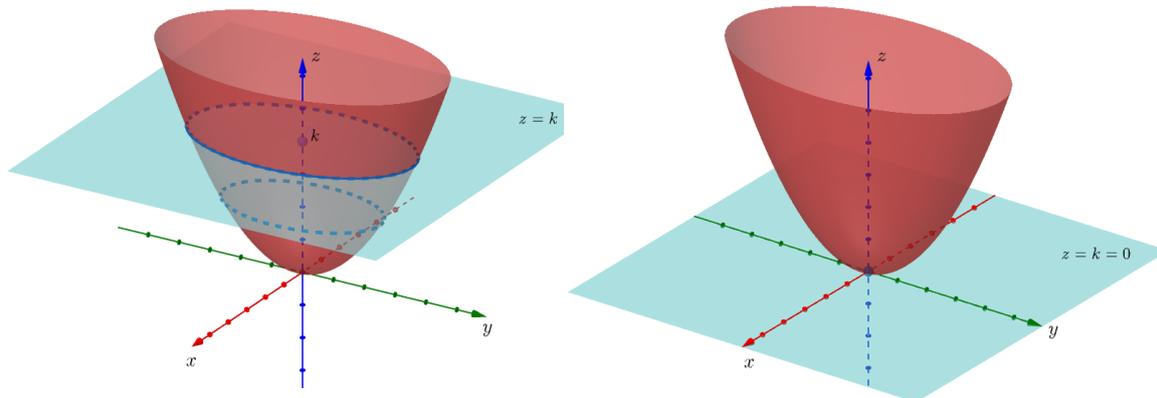
2.2.2 Parabolóide hiperbólico

Nas combinações de sinais das equações

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz \quad \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = ax \quad \text{e} \quad \pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = by.$$

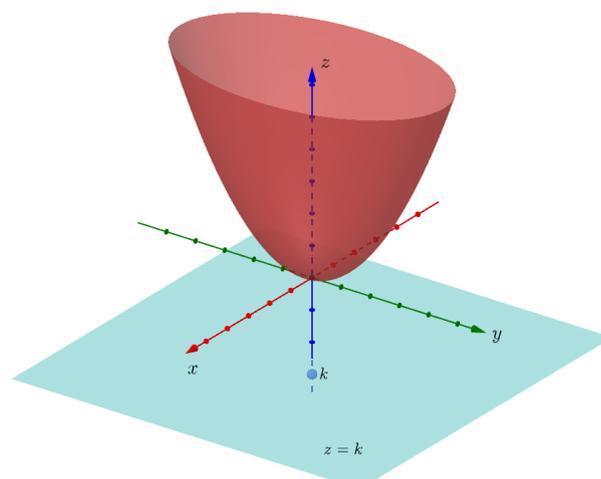
Se os coeficientes dos termos do segundo grau tiverem sinais opostos então, cada uma destas equações representa um parabolóide hiperbólico. Portanto, as equações do parabolóide hiperbólico na forma canônica de eixos Ox , Oy e Oz , respectivamente, são:

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = ax, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = by \quad \text{e} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz \\ \text{ou} \\ -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = ax, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = by \quad \text{e} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz \end{aligned} \tag{72}$$



(a) Elipse se $k > 0$.

(b) Origem $(0, 0, 0)$ se $k = 0$.



(c) Conjunto vazio se $k < 0$.

Figura 75: Traços do parabolóide elíptico \mathcal{Q}_1 com plano $z = k$.

Além disso, cada uma das formas canônica apresentadas em (72), nessa ordem, são equivalentes as equações correspondentes em (73), na mesma ordem.

$$\begin{aligned}
 -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= -ax, & -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} &= -by & \text{e} & -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= -cz \\
 & & \text{ou} & & & & \\
 \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= -ax, & \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} &= -by & \text{e} & \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= -cz
 \end{aligned}
 \tag{73}$$

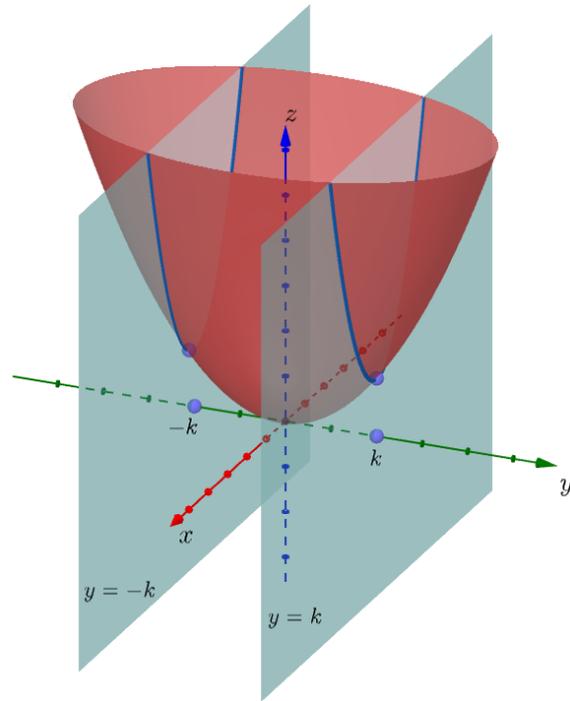


Figura 76: Traços do parabolóide elíptico \mathcal{Q}_1 no plano $y = k$.

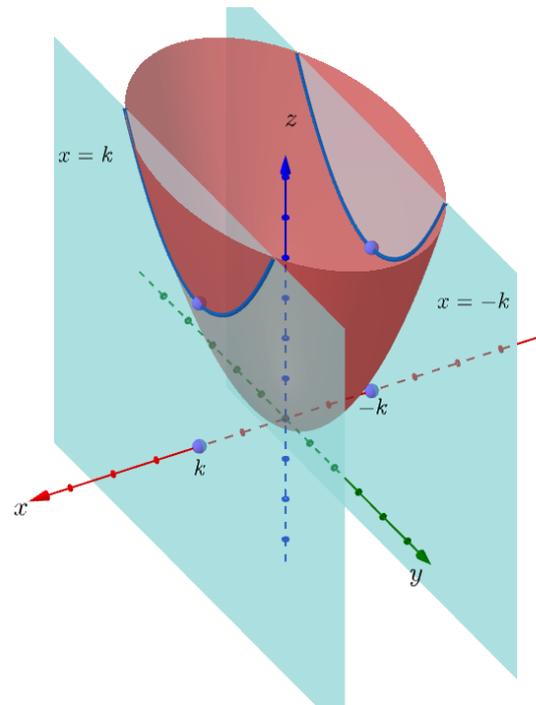


Figura 77: Traços do parabolóide elíptico \mathcal{Q}_1 no plano $x = k$.

Afim de estudarmos os traços dos paraboloides hiperbólicos, escolheremos a forma canônica de eixo Oz com $c > 0$. Para as demais formas canônicas o procedimento é análogo. Seja \mathcal{Q} o parabolóide hiperbólico de eixo Oz . Na Figura 78, na qual ilustra o parabolóide hiperbólico \mathcal{Q} , podemos notar que não existe simetria em relação ao plano xy e a origem.

$$\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz, \quad \text{com } c > 0.$$

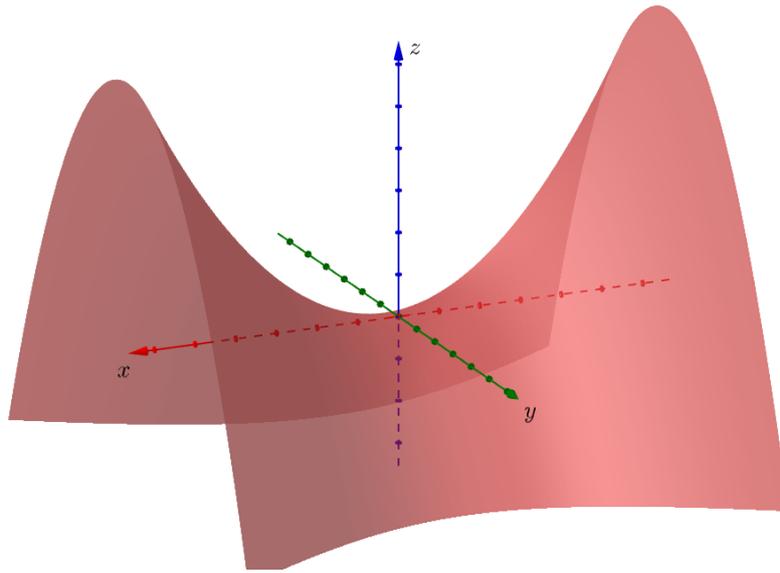


Figura 78: Parabolóide hiperbólico \mathcal{Q} de eixo Oz .

Os traço do parabolóide hiperbólico \mathcal{Q} com o plano $z = k$, paralelo ao plano- xy com $k \in \mathbb{R}$, isto é,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = ck \\ z = k, \end{cases}$$

podem representar os seguintes itens:

- (a) Uma hipérbole de eixo focal paralelo ao eixo Ox se $k > 0$ pois, $ck > 0$ uma vez que c e k são positivos. O centro da hipérbole é o ponto $(0, 0, k)$ e as equações de suas assíntotas são:

$$\begin{cases} y = \pm \frac{b}{a}x \\ z = k. \end{cases}$$

(b) Duas retas concorrentes na origem $(0, 0, 0)$ se $k = 0$ pois,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = c \cdot 0 \\ z = 0. \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} \\ z = 0. \end{cases} \implies \begin{cases} y = \pm \frac{b}{a}x \\ z = 0. \end{cases}$$

(c) Uma hipérbole de eixo focal paralelo ao eixo Oy se $k < 0$ pois, como $c > 0$ então, $-ck > 0$. Logo, a equação desta hipérbole é dada por:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = -ck \\ z = k, \end{cases}$$

O centro da hipérbole é o ponto $(0, 0, k)$ e as equações de suas assíntotas são:

$$\begin{cases} x = \pm \frac{a}{b}y \\ z = k. \end{cases}$$

Os traços do parabolóide hiperbólico \mathcal{Q} com o plano $z = k$, estão representados na Figura 79.

Já os traços do parabolóide hiperbólico \mathcal{Q} com o plano $y = k$, isto é,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = cz + \frac{k^2}{b^2} \\ y = k, \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 = a^2c \left(z + \frac{k^2}{cb^2} \right) \\ y = k, \end{cases}$$

representam parábolas de vértice $\left(0, k, -\frac{k^2}{cb^2} \right)$ e reta focal paralela ao eixo Oz . Como $a^2c > 0$, então estas parábolas possuem concavidades voltadas para cima. Veja a Figura 80a.

Analogamente, os traços de \mathcal{Q} com o plano $x = k$, isto é,

$$\begin{cases} -\frac{y^2}{b^2} = cz - \frac{k^2}{a^2} \\ x = k, \end{cases} \implies \begin{cases} y^2 = -b^2c \left(z - \frac{k^2}{ca^2} \right) \\ x = k, \end{cases}$$

representam parábolas de vértice $\left(k, 0, \frac{k^2}{ca^2} \right)$ e reta focal paralela ao eixo Oz . Neste caso, temos $-b^2c < 0$ e portanto, estas parábolas possuem concavidades voltadas para baixo. Veja a Figura 80b.

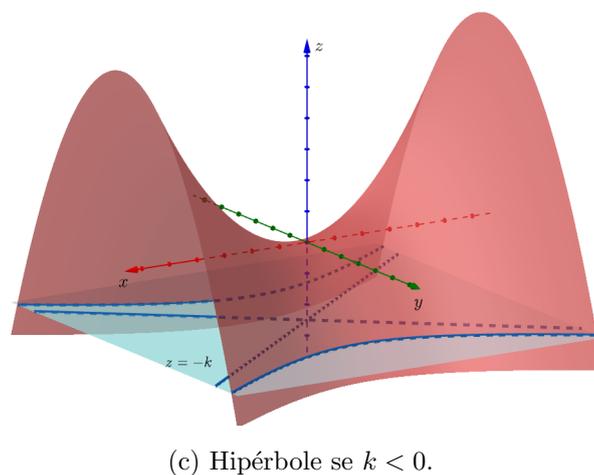
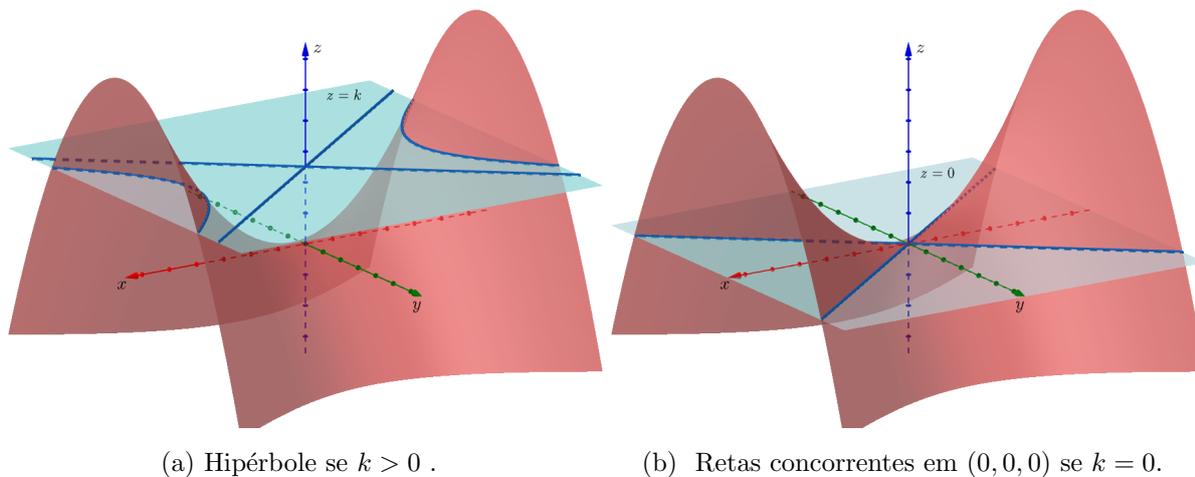


Figura 79: Traços do parabolóide hiperbólico \mathcal{Q} com plano $z = k$.

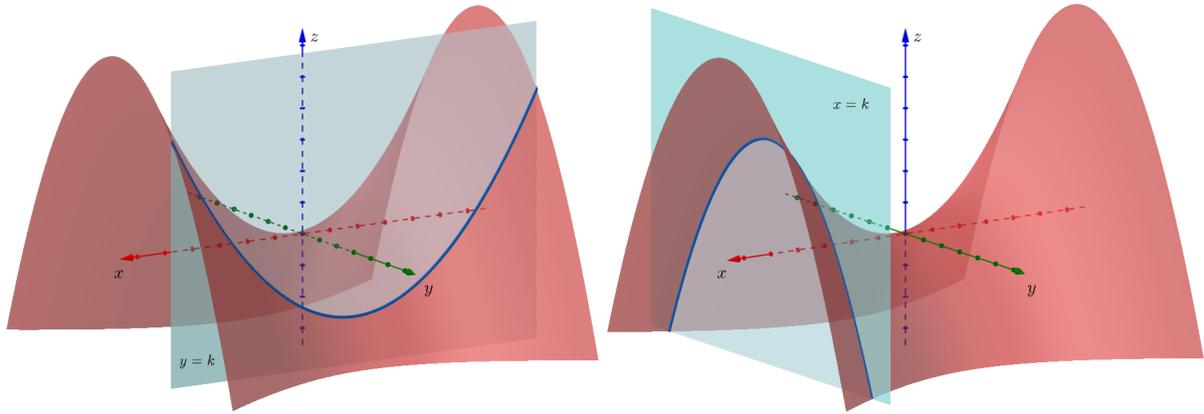
2.2.3 Cilindro parabólico

Já vimos que, de maneira geral, a equação de uma quádrlica não central pode ser simplificada nas formas:

$$Ax^2 + By^2 = Sz \quad \text{ou} \quad Ax^2 + Cz^2 = Sy \quad \text{ou} \quad By^2 + Cz^2 = Sx$$

cujos eixos são respectivamente Oz , Oy e Ox .

No caso das equações acima, estamos considerando que apenas um dos três coeficientes, A , B ou C é nulo. Para o cilindro parabólico, devemos ter dois dos coeficientes A , B ou



(a) Concavidade voltada para cima.

(b) Concavidade voltada para baixo.

Figura 80: Traços do parabolóide hiperbólico \mathcal{Q} com os planos $y = k$ e $x = k$, respectivamente.

C sendo nulo. Portanto, as equações para o cilindro parabólico são:

$$\begin{cases} Ax^2 = Sz, & \text{com } B = C = 0 \\ By^2 = Sz, & \text{com } A = C = 0 \end{cases} \quad (74)$$

$$\begin{cases} Ax^2 = Sy, & \text{com } B = C = 0 \\ Cz^2 = Sy, & \text{com } A = B = 0, \end{cases} \quad (75)$$

$$\begin{cases} By^2 = Sx, & \text{com } A = C = 0 \\ Cz^2 = Sx, & \text{com } A = B = 0 \end{cases} \quad (76)$$

Nas equações do cilindro parabólico, o eixo que não está explicitamente mencionado corresponde ao eixo do próprio cilindro parabólico. Escolhendo, por exemplo, a primeira equação de (74), onde $B = C = 0$, podemos reescrevê-la na forma canônica. Note que $S \neq 0$, conforme visto no **Caso (II)** estudado na subsecção 2.2 referente às quádras não centrais. Multiplicando a primeira equação de (74) por $\frac{c}{S}$, com $c \in \mathbb{R}$ e $c > 0$, segue que

$$Ax^2 = Sz \implies \frac{AC}{S}x^2 = cz.$$

Se tivermos $\frac{Ac}{S} > 0$, então pondo

$$a = \sqrt{\frac{S}{Ac}} \implies \frac{x^2}{a^2} = cz.$$

Por outro lado, se tivermos $\frac{Ac}{S} < 0$, então pondo

$$a = \sqrt{-\frac{S}{Ac}} \implies -\frac{x^2}{a^2} = cz.$$

Portanto, se os coeficiente A e S tiverem sinais iguais ou opostos, então podemos escrever:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} = cz \tag{77}$$

A combinação de sinais de (77) representa duas das quatro formas canônicas do cilindro parabólico de eixo Oy pois, estamos utilizando apenas uma equação de (74). Vale ressaltar ainda que $-\frac{x^2}{a^2} = cz$ equivale a $\frac{x^2}{a^2} = -cz$.

Quando na forma canônica o sinal do termo de segundo grau é oposto ao sinal do termo de primeiro grau, como por exemplo na forma

$$-\frac{x^2}{a^2} = cz \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2} = -cz,$$

então o cilindro parabólico de eixo Oy terá sentido contrário ao cilindro parabólico cuja a forma canônica é

$$\frac{x^2}{a^2} = cz.$$

Veja a Figura 81.

Podemos notar que na Figura 81a o cilindro parabólico tem concavidade no sentido negativo do eixo Oz devido os coeficientes, na forma canônica, terem sinais opostos. Já na Figura 81b, o cilindro parabólico tem concavidade no sentido positivo do eixo Oz pois, na forma canônica os coeficientes possuem sinais iguais. As demais formas canônicas, de eixo Ox e Oz , podem ser obtidas de forma análoga.

Portanto, as formas canônicas do cilindro parabólico são:

De eixo Oz :

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} &= by \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2} = -by, \\ \frac{y^2}{b^2} &= ax \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{b^2} = -ax \end{aligned}$$

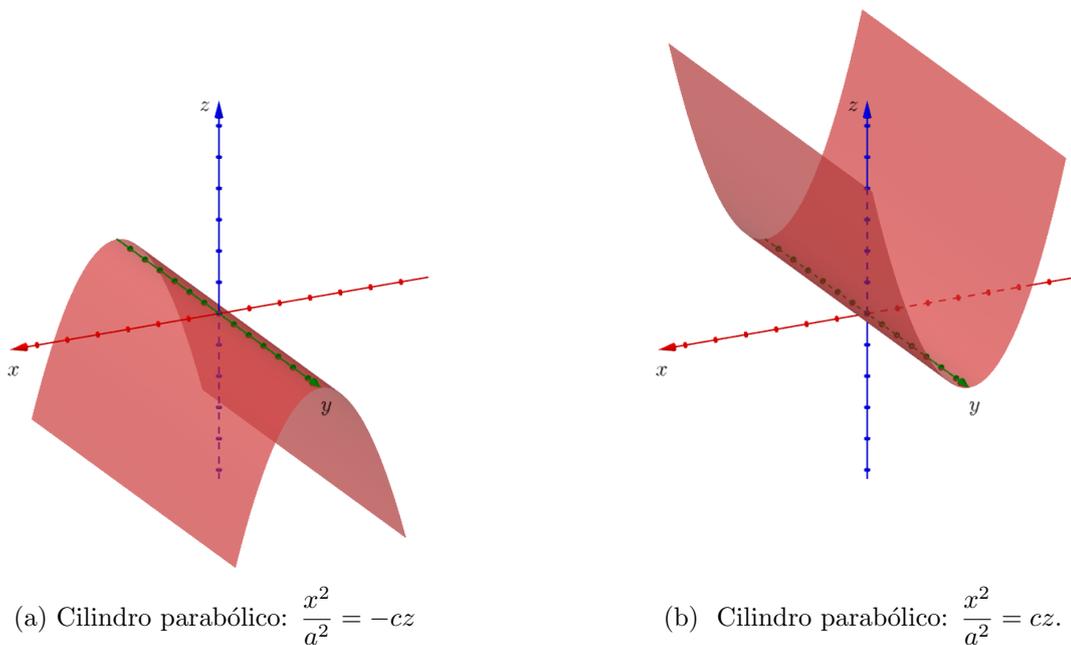


Figura 81: Cilindros parabólicos de eixo Oy .

De eixo Oy :

$$\frac{x^2}{a^2} = cz \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2} = -cz,$$

$$\frac{z^2}{c^2} = ax \quad \text{ou} \quad \frac{z^2}{c^2} = -ax.$$

De eixo Ox :

$$\frac{y^2}{b^2} = cz \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{b^2} = -cz,$$

$$\frac{z^2}{c^2} = by \quad \text{ou} \quad \frac{z^2}{c^2} = -by.$$

Afim de estudarmos os traços do cilindro parabólico, será escolhido a forma canônica de eixo Oy , cuja a concavidade é no sentido positivo do eixo Oz , isto é,

$$\mathcal{Q}: \frac{x^2}{a^2} = cz.$$

Por se tratar de uma quádrlica não centrada, podemos notar que \mathcal{Q} não é simétrico em relação ao plano- xy e a origem.

Os traços de \mathcal{Q} com plano $z = k$, paralelo ao plano- xy com $k \in \mathbb{R}$, isto é,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = ck \\ z = k, \end{cases}$$

representam os seguintes itens:

(a) Duas retas paralelas ao eixo Oy se $k > 0$ pois,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = ck \\ z = k. \end{cases} \implies \begin{cases} x = \pm a\sqrt{ck} \\ z = k. \end{cases}$$

Portanto, temos duas retas paralelas ao eixo Oy que passam por $x = a\sqrt{ck}$ e $x = -a\sqrt{ck}$, com $k > 0$.

(b) O próprio eixo Oy se $k = 0$ pois,

$$\begin{cases} x = \pm a\sqrt{ck} \\ z = k. \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

(c) O conjunto vazio se $k < 0$.

A Figura 82 ilustra os traços do cilindro parabólico com o plano $z = k$.

Os traços do cilindro parabólico \mathcal{Q} com o plano $y = k$, paralelo ao plano- xz com $k \in \mathbb{R}$, isto é,

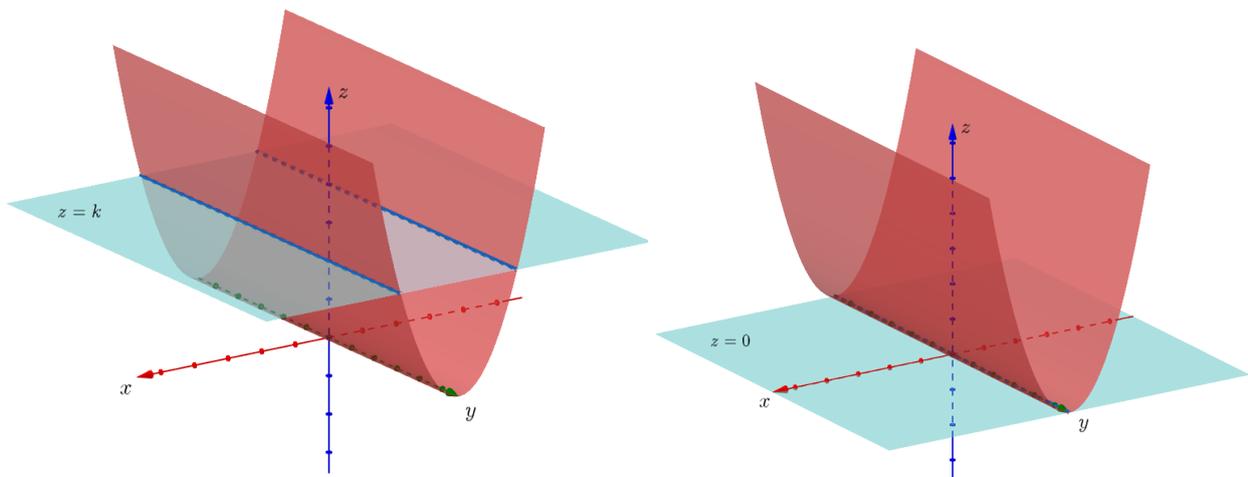
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = cz \\ y = k, \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 = a^2cz \\ y = k, \end{cases}$$

são parábolas de vértice $(0, k, 0)$, para todo $k \in \mathbb{R}$, e concavidade voltada para cima. Veja a Figura 83.

Já os traços de \mathcal{Q} com o plano $x = k$, isto é,

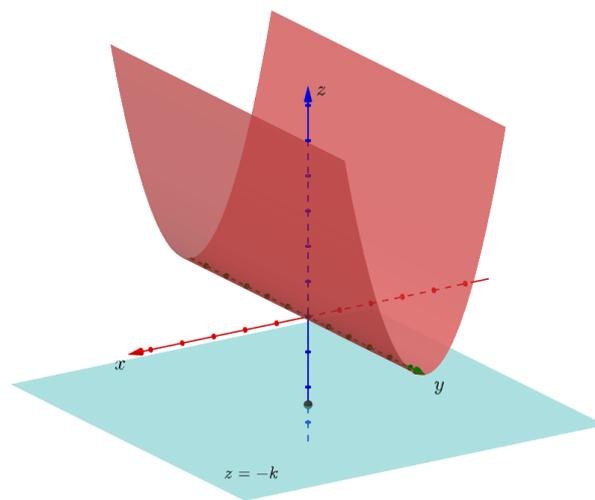
$$\begin{cases} \frac{k^2}{a^2} = cz \\ x = k. \end{cases} \implies \begin{cases} z = \frac{k^2}{ca^2} \\ x = k, \end{cases}$$

são retas paralelas ao eixo Oy para todo $k \in \mathbb{R}$. Veja a Figura 84.



(a) Par de retas paralelas ao eixo Oy quando $k > 0$.

(b) Eixo Oy quando $k = 0$.



(c) Conjunto vazio com $k < 0$

Figura 82: Traços do cilindro parabólico \mathcal{Q} com plano $z = k$.

3 Aplicações

Grande parte das aplicações envolvendo cônicas e quádricas está intrinsecamente relacionada às suas propriedades reflexivas. Essas características reflexivas presentes nas cônicas podem ser estendidas para as quádricas, uma vez que suas seções transversais são, essencialmente, cônicas. A seguir, vamos destacar as propriedades reflexivas específicas da

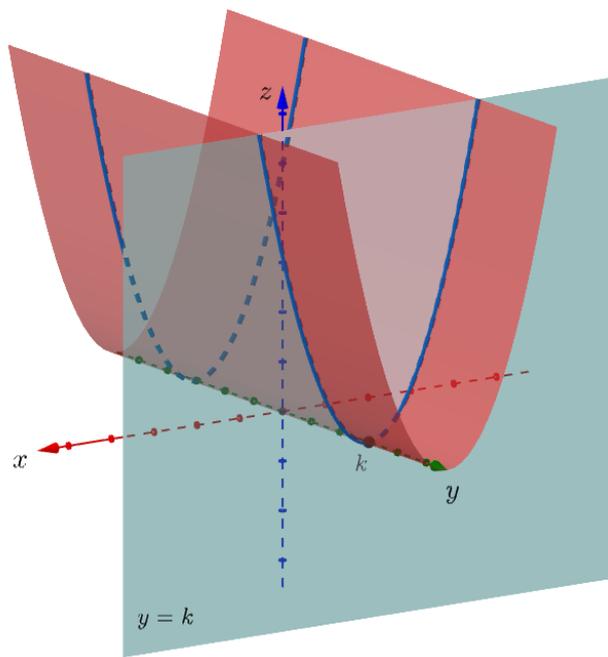


Figura 83: Traço do cilindro parabólico \mathcal{Q} com plano $y = k$.

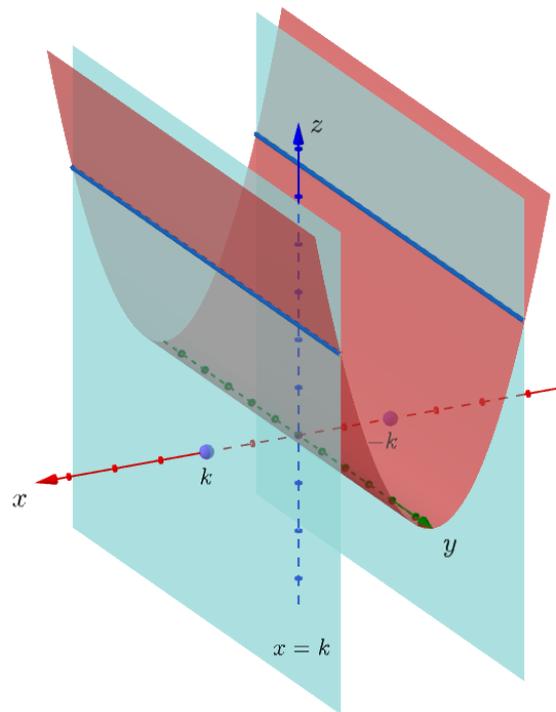


Figura 84: Traço do cilindro parabólico \mathcal{Q} com plano $x = k$.

elipse, parábola e hipérbole [1]; [19];[20].

3.1 Propriedade refletora da elipse

Através da propriedade refletora da elipse, garantimos que, ao posicionar uma fonte de luz ou som em um dos focos de uma superfície com seções transversais elípticas, os raios de luz ou ondas sonoras são refletidos na superfície e dirigem-se em direção ao outro foco.

A definição da elipse estabelece que, se um ponto P pertence a ela, a soma das distâncias de P até os focos permanece constante. Assim, qualquer raio de luz ou onda sonora que se origina de um dos focos de uma superfície com formato elíptico ao ser refletido, após tocar a superfície em um ponto específico, viajará até o outro foco e a soma das distâncias do ponto de reflexão até os focos também será constante. Isso garante que os raios luminosos ou ondas sonoras irão percorrer sempre a mesma distância, resultando na chegada ao outro foco de forma simultânea. Esse fenômeno culmina na intensificação da luz ou onda sonora ao atingir o segundo foco. A proposição a seguir garante tal propriedade reflexiva da elipse.

Proposição 12. *Seja $P = (x_0, y_0)$ um ponto da Elipse \mathcal{E} de focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Os segmentos PF_1 e PF_2 formam ângulos iguais com a reta tangente t à \mathcal{E} em P , isto é, $\alpha = \beta$ conforme a Figura 85. Além disso, a reta normal n à \mathcal{E} em P é a bissetriz do ângulo $F_1\widehat{P}F_2$.*

Demonstração. Dada a forma canônica da Elipse \mathcal{E}

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

podemos expressá-la de forma explícita como:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Sem perda de generalidade, vamos considerar apenas a equação positiva, isto é,

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (78)$$

Ao derivar a equação (78), obtemos:

$$y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

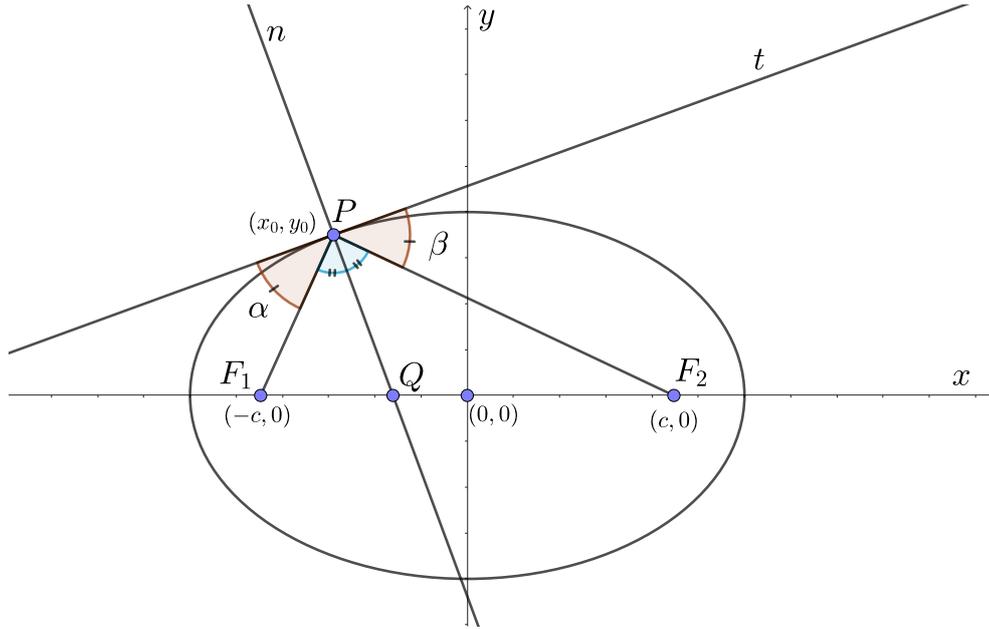


Figura 85: Propriedade refletora da Elipse \mathcal{E} .

Isso nos permite encontrar a equação da reta tangente t no ponto $P(x_0, y_0)$. Substituindo a abscissa de P na derivada, obtemos a inclinação da reta t no ponto P . A equação geral da reta tangente t que passa por P é então:

$$t : y - y_0 = -\frac{bx_0}{a\sqrt{a^2 - x_0^2}} \cdot (x - x_0).$$

Agora que temos a equação de t podemos determinar o vetor diretor desta reta. Seja \vec{v}_t o vetor diretor de t , temos que:

$$\vec{v}_t = \left(a\sqrt{a^2 - x_0^2}, -bx_0 \right).$$

Tomando \vec{u}_t como sendo o vetor unitário associado a \vec{v}_t , então:

$$\vec{u}_t = \frac{\vec{v}_t}{\|\vec{v}_t\|} = \left(\frac{a\sqrt{a^2 - x_0^2}}{\sqrt{a^2(a^2 - x_0^2) + b^2x_0^2}}, -\frac{bx_0}{\sqrt{a^2(a^2 - x_0^2) + b^2x_0^2}} \right).$$

Temos também, os vetores $\overrightarrow{PF_1}$ e $\overrightarrow{PF_2}$, dados por:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PF_1} &= F_1 - P = (-c, 0) - (x_0, y_0) = (-c - x_0, -y_0), \\ \overrightarrow{PF_2} &= F_2 - P = (c, 0) - (x_0, y_0) = (c - x_0, -y_0). \end{aligned}$$

Os vetores unitários associados a $\overrightarrow{PF_1}$ e $\overrightarrow{PF_2}$, respectivamente, são:

$$\begin{aligned}\vec{w}_1 &= \frac{\overrightarrow{PF_1}}{\|\overrightarrow{PF_1}\|} = \left(\frac{-(c+x_0)}{\sqrt{c^2+2cx_0+x_0^2+y_0^2}}, \frac{-y_0}{\sqrt{c^2+2cx_0+x_0^2+y_0^2}} \right), \\ \vec{w}_2 &= \frac{\overrightarrow{PF_2}}{\|\overrightarrow{PF_2}\|} = \left(\frac{c-x_0}{\sqrt{c^2-2cx_0+x_0^2+y_0^2}}, \frac{-y_0}{\sqrt{c^2-2cx_0+x_0^2+y_0^2}} \right)\end{aligned}$$

Para calcular o ângulo α entre o segmento PF_1 e a reta tangente t , devemos calcular o ângulo entre os vetores unitários associados a $\overrightarrow{PF_1}$ e \vec{u}_t , isto é, o ângulo entre os vetores \vec{u}_t e \vec{w}_1 . Devemos tomar um certo cuidado pois, ao calcular o ângulo entre \vec{u}_t e \vec{w}_1 não significa que o resultado já será o valor de α , uma vez que, podemos estar encontrando o maior ângulo entre PF_1 e a tangente t . Chamaremos de θ o ângulo entre \vec{u}_t e \vec{w}_1 . Podemos encontrar o ângulo θ da seguinte maneira:

$$\langle \vec{u}_t, \vec{w}_1 \rangle = \|\vec{u}_t\| \|\vec{w}_1\| \cos \theta.$$

Como a norma de um vetor unitário é igual a 1, segue que:

$$\begin{aligned}\langle \vec{u}_t, \vec{w}_1 \rangle &= \cos \theta \implies \\ \frac{-(c+x_0)a\sqrt{a^2-x_0^2}+bx_0y_0}{\sqrt{a^2(a^2-x_0^2)+b^2x_0^2} \cdot \sqrt{c^2-2cx_0+x_0^2+y_0^2}} &= \cos \theta\end{aligned}\tag{79}$$

Vamos desenvolver separadamente o numerador e o denominador da equação (79). Primeiramente vamos trabalhar no numerador e para isso devemos considerar os seguintes resultados:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{e} \quad y_0 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}.$$

Logo temos,

$$\begin{aligned}-(c+x_0)a\sqrt{a^2-x_0^2}+bx_0y_0 &= -ac\sqrt{a^2-x_0^2}-ax_0\sqrt{a^2-x_0^2}-bx_0\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_0^2} \implies \\ &= \sqrt{a^2-x_0^2}\left(-ac-ax_0+\frac{(a^2-c^2)x_0}{a}\right) \implies\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{a^2 - x_0^2} \left(\frac{-a^2c - a^2x_0 + a^2x_0 - c^2x_0}{a} \right) \implies \\
&= \sqrt{a^2 - x_0^2} \left[-c \left(\frac{a^2 + cx_0}{a} \right) \right] \implies \\
&= -c\sqrt{a^2 - x_0^2} \left(\frac{a^2 + cx_0}{a} \right).
\end{aligned}$$

Desenvolvendo uma parte do denominador temos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2(a^2 - x_0^2) + b^2x_0^2} &= \sqrt{a^4 - a^2x_0^2 + b^2x_0^2} \implies \\
&= \sqrt{a^4 - a^2x_0^2 + (a^2 - c^2)x_0^2} \implies \\
&= \sqrt{a^4 - a^2x_0^2 + a^2x_0^2 - c^2x_0^2} \implies \\
&= \sqrt{a^4 - c^2x_0^2}.
\end{aligned}$$

Desenvolvendo a outra parte:

$$\begin{aligned}
\sqrt{c^2 + 2cx_0 + x_0^2 + y_0^2} &= \sqrt{c^2 + 2cx_0 + x_0^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_0^2)} \implies \\
&= \sqrt{c^2 + 2cx_0 + x_0^2 + b^2 - \frac{b^2x_0^2}{a^2}} \implies \\
&= \sqrt{\frac{a^2c^2 + 2a^2cx_0 + a^2x_0^2 + a^2b^2 - b^2x_0^2}{a^2}} \implies \\
&= \sqrt{\frac{a^2c^2 + 2a^2cx_0 + a^2(a^2 - c^2) + (a^2 - b^2)x_0^2}{a^2}} \implies \\
&= \sqrt{\frac{a^2c^2 + 2a^2cx_0 + a^4 - a^2c^2 + c^2x_0^2}{a^2}} \implies \\
&= \sqrt{\frac{(a^2 + cx_0)^2}{a^2}} \implies \\
&= \frac{a^2 + cx_0}{a}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sqrt{a^2(a^2 - x_0^2) + b^2x_0^2} \cdot \sqrt{c^2 + 2cx_0 + x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{a^4 - c^2x_0^2} \cdot \left(\frac{a^2 + cx_0}{a} \right).$$

Voltando a equação (79), segue que:

$$\begin{aligned} \frac{-c\sqrt{a^2 - x_0^2} \cdot \left(\frac{a^2 + cx_0}{a}\right)}{\sqrt{a^4 - c^2x_0^2} \cdot \left(\frac{a^2 + cx_0}{a}\right)} &= \cos \theta \implies \\ -\frac{c\sqrt{a^2 - x_0^2}}{\sqrt{a^4 - c^2x_0^2}} &= \cos \theta. \end{aligned}$$

Como o cosseno de θ é negativo, significa que $\pi/2 < \theta$. Portanto, θ é o maior ângulo entre o segmento PF_1 e a reta tangente t . Logo temos:

$$\cos \theta = -\cos \alpha = -\frac{c\sqrt{a^2 - x_0^2}}{\sqrt{a^4 - c^2x_0^2}} \implies \cos \alpha = \frac{c\sqrt{a^2 - x_0^2}}{\sqrt{a^4 - c^2x_0^2}}. \quad (80)$$

De forma análoga, podemos calcular o ângulo β , que é o ângulo entre o segmento PF_2 e a reta tangente t . Portanto, calculando o ângulo entre \vec{u}_t e \vec{w}_2 temos que:

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}_t, \vec{w}_2 \rangle &= \cos \beta \implies \\ \frac{(c + x_0)a\sqrt{a^2 - x_0^2} + bx_0y_0}{\sqrt{a^2(a^2 - x_0^2) + b^2x_0^2} \cdot \sqrt{c^2 - 2cx_0 + x_0^2 + y_0^2}} &= \cos \beta \implies \\ \frac{c\sqrt{a^2 - x_0^2}}{\sqrt{a^4 - c^2x_0^2}} &= \cos \beta. \end{aligned} \quad (81)$$

Já concluímos que o ângulo entre \vec{u}_t e \vec{w}_2 é de fato o ângulo β pois, o primeiro membro da equação (81) é positivo. Portanto, pelas equações (80) e (81), concluímos que $\alpha = \beta$.

Vamos mostrar que a reta normal n é a bissetriz do ângulo $F_1\hat{P}F_2$. Considere Q , como sendo o ponto de intersecção da reta normal com eixo das abscissas, conforme a Figura 85. Logo, temos os ângulos $F_1\hat{P}Q$ e $F_2\hat{P}Q$. Como a reta tangente em P é perpendicular a reta normal em P , segue que:

$$\alpha + F_1\hat{P}Q = \frac{\pi}{2} = \beta + F_2\hat{P}Q$$

Como $\alpha = \beta$, concluímos que

$$F_1\hat{P}Q = F_2\hat{P}Q.$$

□

A demonstração que acabamos de realizar é o que caracteriza a propriedade reflexiva da elipse. O fato de que a reta normal à elipse \mathcal{E} em um ponto P também é bissetriz do ângulo $F_1\widehat{P}F_2$, nos faz recordar da lei da reflexão, que afirma que o ângulo de incidência, em relação a reta normal, é igual ao ângulo de reflexão. Portanto, em uma superfície elíptica um raio de luz ou onda sonora que sai de um dos focos ao ser refletido na superfície, fica garantido que ele chegará ao outro foco.

Conforme [19], as galerias de sussurros são um exemplo prático da aplicação da propriedade refletora da elipse. Essas construções possuem tetos em formato elíptico ou de cúpula, resultando em seções transversais elípticas. Ao conhecer o posicionamento dos focos em uma dessas seções, torna-se possível que duas pessoas situadas nesses focos se comuniquem através de sussurros, que permanecem inaudíveis para outras pessoas presentes no mesmo espaço. É crucial observar que as pessoas têm alturas diferentes, o que pode influenciar na experiência auditiva. Quanto mais próxima do foco uma pessoa estiver, mais nitidamente ela escutará o som refletido do outro foco.

A imagem a seguir apresenta uma das áreas do Grand Central Terminal, que é uma estação ferroviária localizado em Manhattan (Figura 86) . Nessa área específica exibida na imagem, se trata de uma galeria de sussurros, onde mostra duas pessoas se comunicando por meio de sussurros [8]. Para uma melhor percepção do que está acontecendo, foi adicionado uma ilustração na imagem onde, foram marcados os focos F_1 e F_2 aproximadamente na altura das cabeças das pessoas e além disso, foi destacado uma das seções transversais com formato semi-elíptico e em tracejado representando o caminho que o som percorre de um foco até o outro, sendo refletido no teto.

Outros exemplos arquitetônicos que possuem esse tipo de acústica é Catedral de São Paulo em Londres e o Capitólio nos Estados Unidos. Tanto a Catedral como o Capitólio possuem uma cúpula na qual produz esse tipo de efeito sonoro. Veja as Figuras 87 e 88.

Além de encontrar aplicação nas galerias de sussurros, a propriedade refletora da elipse também desempenha um papel crucial em diversos equipamentos, como os refletores odontológicos e os aparelhos de litotripsia, utilizados no tratamento de cálculos renais.

Nos refletores odontológicos, um espelho elíptico é empregado para refletir e concentrar os raios luminosos em um ponto específico, o foco. Essa precisão permite que o dentista

Figura 86: Galeria de sussurros Grand Central Terminal, Manhattan.



Fonte: <<https://encurtador.com.br/hBCGN>>

Figura 87: Catedral de São Paulo (Saint Paul), Londres.



Fonte: <<https://encurtador.com.br/1xTW5>>

direcione com exatidão o feixe de luz na cavidade bucal do paciente, evitando ofuscação, uma vez que a máxima concentração dos raios é direcionada para a área desejada [19].

No contexto do tratamento de cálculos renais, a aplicação é análoga. O dispositivo utilizado possui uma superfície arredondada, com seções transversais elípticas, na qual é posicionada na região onde o cálculo está localizado, de modo que este fique em um dos focos. O outro foco é utilizado para emitir ondas sonoras de alta intensidade, as quais são

Figura 88: Frente leste do Capitólio, EUA.



Fonte: Wikimedia Commons.

refletidas e convergem para o foco oposto, onde se encontra o cálculo renal. Essas ondas sonoras induzem vibrações de alta frequência nas pedras nos rins, resultando na sua fragmentação [17]. Os fragmentos assim obtidos podem ser eliminados naturalmente através da urina do paciente. As Figuras 89 e 90 mostram a máquina utilizada no tratamento do calculo renal e a ilustração de um paciente recebendo o tratamento.

Figura 89: Visão geral do aparelho de litotripsia.



Fonte: <<https://encurtador.com.br/ktAP4>> .

Figura 90: Visão do paciente realizando o procedimento de litotripsia.



Fonte: <<https://encurtador.com.br/behzW>> .

3.2 Propriedade refletora da parábola

Uma superfície é denominada parabólica devido às suas secções transversais serem parábolas quando estas são paralelas ao seu eixo de simetria. Exemplos dessas superfícies incluem os paraboloides, abordados detalhadamente na seção 2.2 deste trabalho. A propriedade reflexiva da parábola assegura que, quando uma onda, seja ela eletromagnética ou mecânica, incide paralelamente ao eixo de simetria de uma superfície parabólica, ela é refletida. Contudo, em superfícies parabólicas tradicionais, salvo as superfícies de revolução, não está definido um ponto de convergência único para o qual as ondas são refletidas, pois as secções transversais paralelas ao eixo de simetria são parábolas distintas quando consideradas em planos distintos.

Já nas superfícies parabólicas de revolução, obtidas ao rotacionar uma parábola em torno do eixo de simetria, as ondas eletromagnéticas e mecânicas convergem sempre para o mesmo ponto. Isso ocorre porque, nas secções transversais paralelas ao eixo de simetria, as ondas incidentes são refletidas em direção aos focos específicos de cada parábola obtida pela secção. Por sua vez, esses focos são pontos de outras parábolas cujas as secções transversais passam pelo eixo de simetria e, portanto, a onda é refletida mais uma vez em direção ao eixo de simetria, onde estão localizados os novos focos. Essa sequência de reflexões resulta na convergência da onda para um único ponto, pois as parábolas cujas

secções transversais passam pelo eixo de simetria possuem o mesmo foco. A proposição a seguir garante tal propriedade reflexiva.

Proposição 13. *Seja $P(x_0, y_0)$ um ponto da parábola \mathcal{P} de foco $F = (p/2, 0)$. O segmento PF e a reta $y = y_0$ formam ângulos iguais com a reta tangente t à \mathcal{P} no ponto P , isto é, $\alpha = \beta$, conforme a Figura 91. Além disso, a reta normal n à \mathcal{P} no ponto P é a bissetriz do ângulo $F\hat{P}R$.*

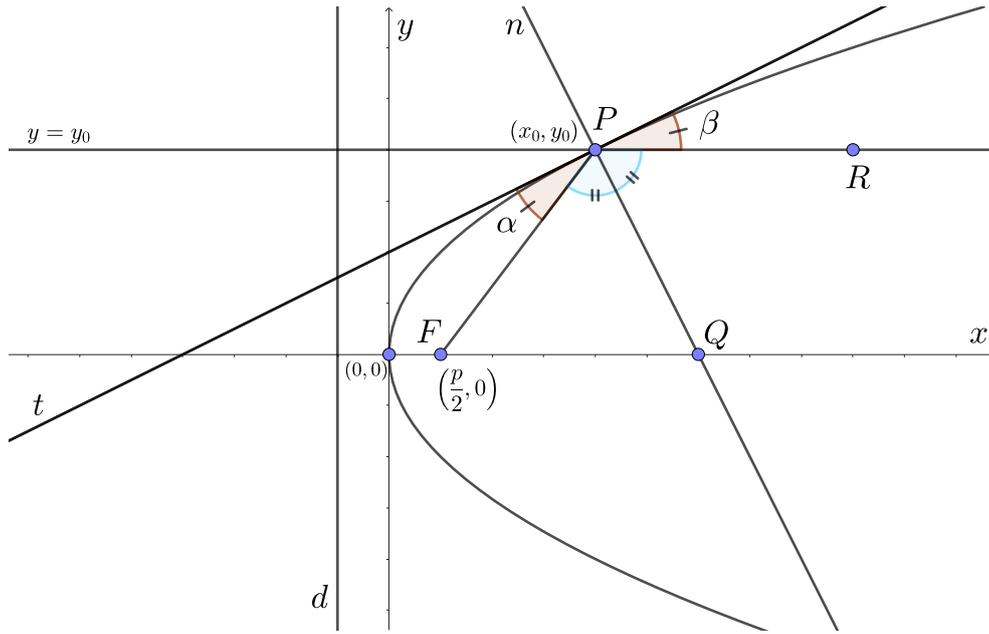


Figura 91: Propriedade refletora da Parábola \mathcal{P} .

Demonstração. Dada a forma canônica da Parábola \mathcal{P} , conforme ilustrado na Figura 91,

$$y^2 = 2px,$$

podemos expressá-la na forma explícita como:

$$y = \pm\sqrt{2px}.$$

Sem perda de generalidade, considere que o ponto P pertencente a parábola, cuja coordenada é (x_0, y_0) , esteja localizado no primeiro quadrante do plano cartesiano. Portanto P está no ramo positivo da parábola e sua coordenada pode ser obtida através da equação:

$$y = \sqrt{2px}, \tag{82}$$

para algum $x_0 > 0$.

Afim de determinar a equação da reta tangente à \mathcal{P} que passa pelo ponto P , vamos encontrar a derivada da equação (82). Logo, obtemos:

$$y' = \frac{p}{\sqrt{2px}}.$$

Substituindo a abcissa de P na derivada acima, obtemos a inclinação da reta tangente t no ponto P . A equação geral da reta tangente t é então:

$$t : y - y_0 = \frac{p}{\sqrt{2px_0}}(x - x_0).$$

Seja \vec{v}_t o vetor diretor da reta tangente t . Então,

$$\vec{v}_t = (\sqrt{2px}, p).$$

Tomando \vec{u}_t como sendo o vetor unitário associado a \vec{v}_t , então:

$$\vec{u}_t = \frac{\vec{v}_t}{\|\vec{v}_t\|} = \left(\frac{\sqrt{2px_0}}{\sqrt{2px_0 + p^2}}, \frac{p}{\sqrt{2px_0 + p^2}} \right).$$

Seja w_1 , o vetor diretor da reta $y = y_0$. Como a reta em questão é paralela ao eixo Ox então, o seu vetor diretor é vetor da base canônica, isto é, $w_1 = (1, 0)$.

Podemos determinar também o vetor \overrightarrow{PF} da seguinte maneira:

$$\overrightarrow{PF} = F - P = \left(\frac{p}{2}, 0 \right) - (x_0, y_0) = \left(\frac{p}{2} - x_0, -y_0 \right).$$

Considere \vec{w}_2 como sendo o vetor unitário associado a \overrightarrow{PF} . Portanto, \vec{w}_2 é dado por:

$$\vec{w}_2 = \frac{\overrightarrow{PF}}{\|\overrightarrow{PF}\|} = \left(\frac{\frac{p}{2} - x_0}{\sqrt{\left(\frac{p}{2} - x_0\right)^2 + y_0^2}}, \frac{-y_0}{\sqrt{\left(\frac{p}{2} - x_0\right)^2 + y_0^2}} \right).$$

Para calcular o ângulo β entre a reta $y = y_0$ e a reta tangente t , basta calcularmos o ângulo entre os vetores \vec{u}_t e \vec{w}_1 , que por sua vez, será análogo ao procedimento realizado na dedução da propriedade refletora da elipse. Portanto, segue que:

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}_t, \vec{w}_1 \rangle &= \|\vec{u}_t\| \|\vec{w}_1\| \cos \beta \implies \\ \langle \vec{u}_t, \vec{w}_1 \rangle &= \cos \beta \implies \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{2px_0}}{\sqrt{2px_0 + p^2}} = \cos \beta. \quad (83)$$

Vamos agora calcular o ângulo α que é o menor ângulo entre a reta tangente t e o segmento PF . Ao calcular o ângulo entre \vec{u}_t e \vec{w}_2 não necessariamente estamos calculando o menor ângulo, isto é, o ângulo α . Portanto, chamaremos de θ o ângulo entre \vec{u}_t e \vec{w}_2 . Logo,

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}_t, \vec{w}_2 \rangle &= \|\vec{u}_t\| \|\vec{w}_2\| \cos \theta \implies \\ \langle \vec{u}_t, \vec{w}_2 \rangle &= \cos \theta \\ \frac{\sqrt{2px_0} \left(\frac{p}{2} - x_0 \right) - py_0}{\sqrt{2px_0 + p^2} \sqrt{\left(\frac{p}{2} - x_0 \right)^2 + y_0^2}} &= \cos \theta. \end{aligned} \quad (84)$$

Vamos desenvolver separadamente o numerador e o denominador da equação (84), lembrando que:

$$y_0 = \sqrt{2px_0}.$$

Desenvolvendo o numerador, temos que:

$$\begin{aligned} \sqrt{2px_0} \left(\frac{p}{2} - x_0 \right) - py_0 &= \frac{p}{2} \sqrt{2px_0} - x_0 \sqrt{2px_0} - p \sqrt{2px_0} \implies \\ &= -\sqrt{2px_0} \left(\frac{p}{2} + x_0 \right). \end{aligned}$$

Desenvolvendo o denominador, temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{2px_0 + p^2} \sqrt{\left(\frac{p}{2} - x_0 \right)^2 + y_0^2} &= \sqrt{2px_0 + p^2} \sqrt{\frac{p^2}{4} - px_0 + x_0^2 + y_0^2} \implies \\ &= \sqrt{2px_0 + p^2} \sqrt{\frac{p^2}{4} - px_0 + x_0^2 + 2px_0} \implies \\ &= \sqrt{2px_0 + p^2} \sqrt{\left(\frac{p}{2} + x_0 \right)^2} \implies \\ &= \sqrt{2px_0 + p^2} \left(\frac{p}{2} + x_0 \right). \end{aligned}$$

Voltando a equação (84), temos:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= -\frac{\sqrt{2px_0} \left(\frac{p}{2} + x_0 \right)}{\sqrt{2px_0 + p^2} \left(\frac{p}{2} + x_0 \right)} \implies \\ \cos \theta &= -\frac{\sqrt{2px_0}}{\sqrt{2px_0 + p^2}} \end{aligned}$$

Pela equação apresentada acima, implica que $\pi/2 < \theta$. Logo θ é o maior ângulo entre a reta tangente t e o segmento PF . Portanto, o ângulo α é dado por:

$$\begin{aligned} \cos \theta = -\cos \alpha &= -\frac{\sqrt{2px_0}}{\sqrt{2px_0 + p^2}} \implies \\ \cos \alpha &= \frac{\sqrt{2px_0}}{\sqrt{2px_0 + p^2}} \end{aligned} \quad (85)$$

Pelas equações (83) e (85), concluímos que $\alpha = \beta$.

Vamos mostrar que a reta normal n é bissetriz. Seja Q a intersecção da reta normal n com o eixo Ox e considere um ponto R pertencente a reta $y = y_0$, tal que, $R = (x_0 + \delta, y_0)$ com $\delta > 0$. Em outras palavras, R está a direita de P na reta $y = y_0$. Desta forma, formamos os ângulos $F\hat{P}Q$ e $F\hat{P}R$ conforme a Figura 91.

Como a reta normal n é perpendicular a tangente t no ponto P , então

$$\alpha + F\hat{P}Q = \frac{\pi}{2} = \beta + F\hat{P}R.$$

Como $\alpha = \beta$, segue que:

$$F\hat{P}Q = F\hat{P}R.$$

Portanto, a reta normal n é bissetriz do ângulo $F\hat{P}R$.

□

Assim como na elipse, a demonstração que acabamos de realizar destaca que a reta normal à parábola \mathcal{P} em um ponto P também é a bissetriz do ângulo $F\hat{P}R$. Dessa forma, em uma superfície parabólica de revolução, fica assegurado que uma onda que incide paralelamente ao eixo de simetria é refletida, seguindo a lei de reflexão, convergindo para um mesmo ponto. O contrário também é válido; isto é, se uma fonte emissora de ondas, como uma fonte luminosa, for posicionada no ponto que coincide com os focos das parábolas cujas as secções transversais passam pelo eixo de simetria, então as ondas serão refletidas na superfície de forma paralela ao eixo de simetria. As Figuras 92a e 92b da Figura 92 ilustram uma das secções transversais que passam pelo eixo de simetria da superfície. Na primeira, as ondas são refletidas e convergem para o ponto F , enquanto na segunda as ondas partem de F e são refletidas de maneira paralela ao eixo de simetria.

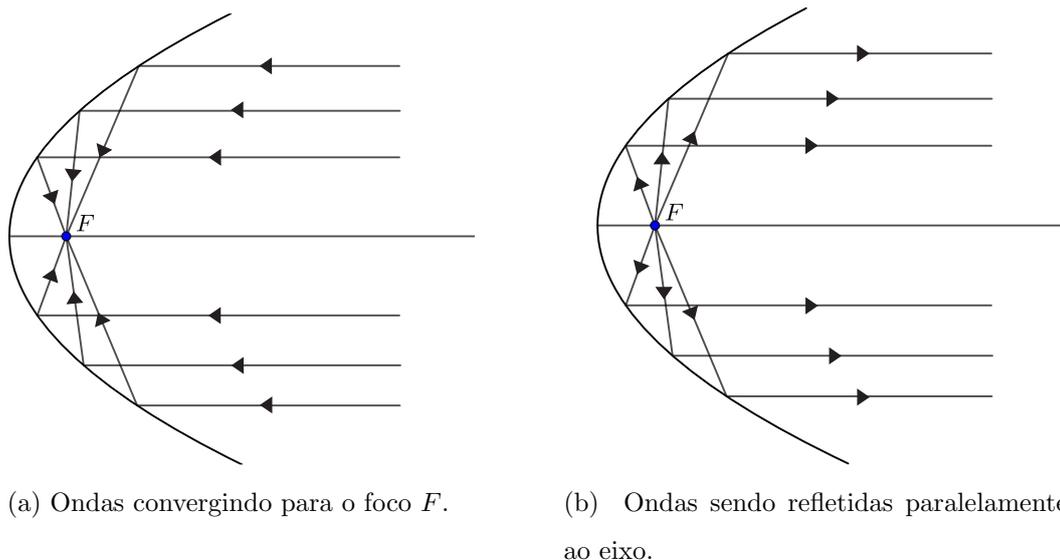


Figura 92: Propriedade reflexiva .

Conforme [20], as antenas parabólicas destacam-se como um exemplo prático da aplicação da propriedade refletora da parábola. Essas estruturas, caracterizadas como superfícies de revolução, desempenham um papel fundamental na captação de ondas de rádio transmitidas via satélite. Quando essas ondas entram em contato com a superfície da antena, são refletidas, convergindo para um ponto focal único. Esse fenômeno resulta na amplificação do sinal captado, proporcionando uma transmissão sem grandes interferências. Outro exemplo relevante são os radiotelescópios, que também são grandes antenas parabólicas que captam onda de rádio provenientes do espaço. A Figura 93a ilustra uma antena parabólica instalada no telhado de uma residência e a Figura 93b apresenta o maior radiotelescópio do mundo que está localizado na China.

Outro exemplo prático da aplicação dessa propriedade reflexiva está nos faróis e lanternas, onde a superfície parabólica de revolução age como um espelho. Uma lâmpada é posicionada no centro da superfície, alinhada com o foco das parábolas formadas pelas seções transversais que cortam o eixo de simetria da superfície. Dessa forma, os raios de luz são refletidos na superfície, seguindo uma trajetória paralela ao eixo de simetria, permitindo direcionar a luz para um local específico desejado. Veja a Figura 94.

Figura 93: Receptores de ondas .

(a) Antena parabólica.



Fonte: <<https://encurtador.com.br/jvGJ2>>

(b) Radiotelescópio Fast.



Fonte: <<https://encurtador.com.br/etvJ0>>

Figura 94: Refletores de luz .

(a) Farol.



Fonte: <<https://encurtador.com.br/eKQT8>>

(b) Lanterna.



Fonte: <<https://encurtador.com.br/1HY01>>

3.3 Propriedade refletora da hipérbole

Uma aplicação de destaque que faz uso da propriedade refletora da hipérbole é a utilização de espelhos refletores em telescópios.

Imagine um espelho com o formato de um ramo de uma hipérbole, onde a parte externa constitui a superfície refletora, ou seja, seu lado côncavo. Esse espelho possui um foco posicionado no eixo de simetria, exatamente na mesma posição do foco do ramo da hipérbole que determina sua estrutura. A propriedade refletora da hipérbole, que será demonstrada na proposição a seguir, assegura que se um feixe de luz for direcionado para

um ponto específico P na parte refletora do espelho, de modo que este feixe esteja alinhado com o foco do espelho, então o feixe será refletido em direção ao foco do outro ramo da hipérbole que dá forma ao espelho. Veja a Figura 95.

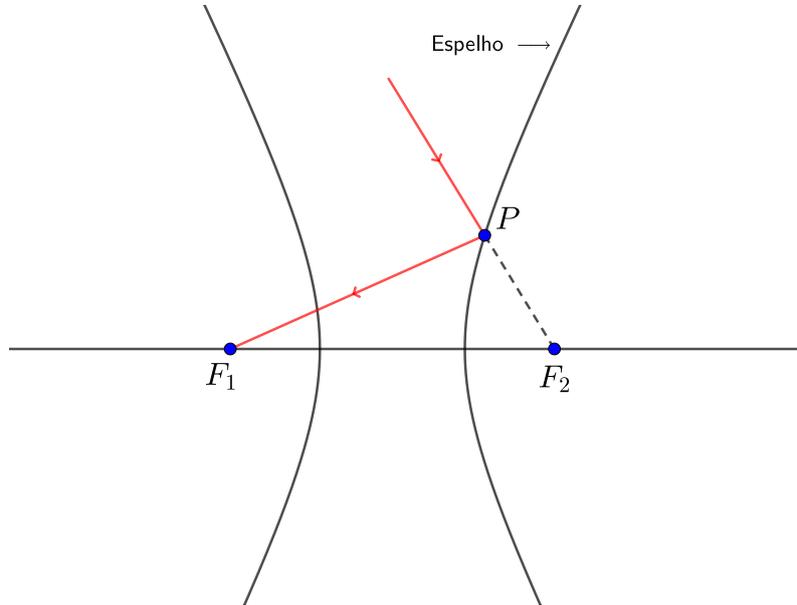


Figura 95: Propriedade refletora da hipérbole.

Proposição 14. *Seja $P = (x_0, y_0)$ um ponto da Hipérbole \mathcal{H} de focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Os segmentos PF_1 e PA formam ângulos iguais com a reta tangente t à \mathcal{H} em P , isto é, $\alpha = \beta$ conforme a Figura 96. Além disso, a reta normal n à \mathcal{H} em P é bissetriz do ângulo $F_1\hat{P}A$.*

Demonstração. Dada a forma canônica da hipérbole \mathcal{H} , conforme ilustrada na Figura 96,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

podemos expressá-la de forma explícita como:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Sem perda de generalidade, considere que o ponto $P = (x_0, y_0)$ pertencente a hipérbole, esteja localizado no primeiro quadrante do plano cartesiano. Portanto P está no ramo direito da hipérbole, na parte positiva, e sua coordenada pode ser obtida através da

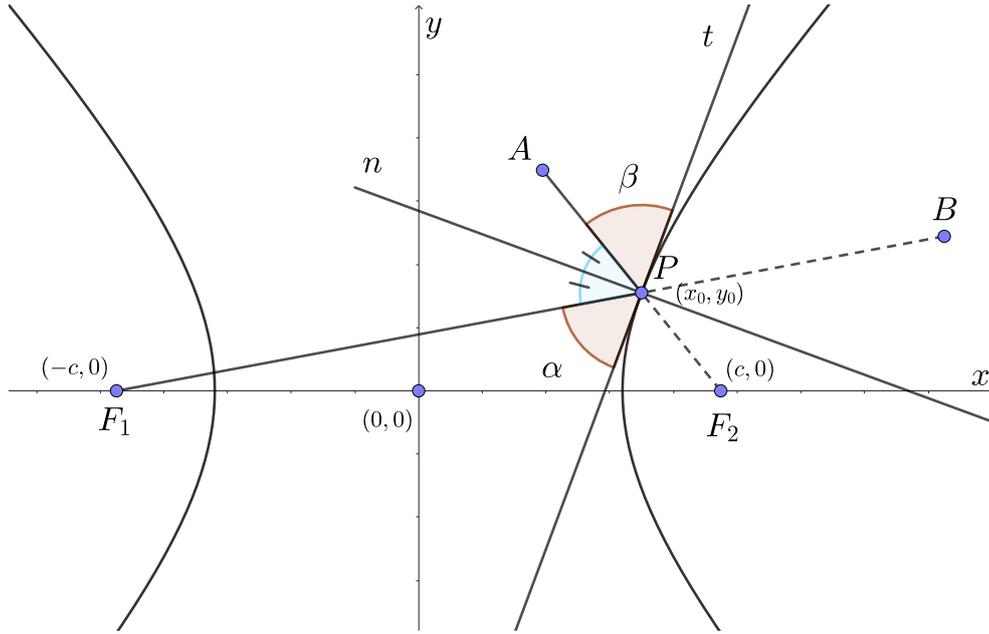


Figura 96: Propriedade refletora da hipérbole \mathcal{H} .

equação:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \quad (86)$$

Para $x = x_0$.

Ao derivar a equação (86), obtemos:

$$y' = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Isso nos permite encontrar a equação da reta tangente t no ponto P . Substituindo a abscissa de P na derivada, obtemos a inclinação da reta t no ponto P e portanto, a equação geral da reta tangente t é então:

$$t: y - y_0 = \frac{bx_0}{a\sqrt{x_0^2 - a^2}} \cdot (x - x_0).$$

Seja \vec{v}_t o vetor diretor da reta tangente t . Então,

$$\vec{v}_t = (a\sqrt{x_0^2 - a^2}, bx_0).$$

Considere \vec{u}_t como sendo o vetor unitário associado a \vec{v}_t . Logo,

$$\vec{u}_t = \frac{\vec{v}_t}{\|\vec{v}_t\|} = \left(\frac{a\sqrt{x_0^2 - a^2}}{\sqrt{a^2(x_0^2 - a^2) + b^2x_0^2}}, \frac{bx_0}{\sqrt{a^2(x_0^2 - a^2) + b^2x_0^2}} \right).$$

Temos também, os vetores $\overrightarrow{PF_1}$ e $\overrightarrow{PF_2}$, dados por:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PF_1} &= F_1 - P = (-c, 0) - (x_0, y_0) = (-c - x_0, -y_0) \\ \overrightarrow{PF_2} &= F_2 - P = (c, 0) - (x_0, y_0) = (c - x_0, -y_0).\end{aligned}$$

Os vetores unitários associados a $\overrightarrow{PF_1}$ e $\overrightarrow{PF_2}$, respectivamente, são:

$$\begin{aligned}\vec{w}_1 &= \frac{\overrightarrow{PF_1}}{\|\overrightarrow{PF_1}\|} = \left(\frac{-(c+x_0)}{\sqrt{(c+x_0)^2 + y_0^2}}, \frac{-y_0}{\sqrt{(c+x_0)^2 + y_0^2}} \right), \\ \vec{w}_2 &= \frac{\overrightarrow{PF_2}}{\|\overrightarrow{PF_2}\|} = \left(\frac{c-x_0}{\sqrt{(c-x_0)^2 + y_0^2}}, \frac{-y_0}{\sqrt{(c-x_0)^2 + y_0^2}} \right).\end{aligned}$$

Para encontrar o ângulo α , que é o menor ângulo entre o segmento PF_1 e a reta tangente t , devemos calcular o ângulo entre os vetores \vec{u}_t e \vec{w}_1 porém, isso não significa que o resultado já será o valor de α , uma vez que, podemos estar encontrando o maior ângulo entre PF_1 e a reta tangente t . Consideremos então o ângulo θ , como sendo o ângulo entre \vec{u}_t e \vec{w}_1 . Logo,

$$\langle \vec{u}_t, \vec{w}_1 \rangle = \|\vec{u}_t\| \|\vec{w}_1\| \cos \theta.$$

Como a norma de um vetor unitário é igual a 1, segue que:

$$\begin{aligned}\langle \vec{u}_t, \vec{w}_1 \rangle &= \cos \theta \implies \\ \frac{-a\sqrt{x_0^2 - a^2} \cdot (c+x_0) - bx_0y_0}{\sqrt{a^2(x_0^2 - a^2) + b^2x_0^2}\sqrt{(c+x_0)^2 + y_0^2}} &= \cos \theta.\end{aligned}\tag{87}$$

Vamos desenvolver separadamente o numerados e o denominador da equação (87), lembrando que:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{e} \quad y_0 = \frac{b}{a}\sqrt{x_0^2 - a^2}.$$

Desenvolvendo o numerador, temos que:

$$\begin{aligned}-a\sqrt{x_0^2 - a^2} \cdot (c+x_0) - bx_0y_0 &= -ac\sqrt{x_0^2 - a^2} - ax_0\sqrt{x_0^2 - a^2} - bx_0 \cdot \frac{b}{a}\sqrt{x_0^2 - a^2} \implies \\ &= -\sqrt{x_0^2 - a^2} \left(ac + ax_0 + \frac{b^2x_0}{a} \right) \implies \\ &= -\sqrt{x_0^2 - a^2} \left(\frac{a^2c + a^2x_0 + (c^2 - a^2)x_0}{a} \right) \implies \\ &= -\sqrt{x_0^2 - a^2} \left(\frac{a^2c + c^2x_0}{a} \right) \implies \\ &= -c\sqrt{x_0^2 - a^2} \left(\frac{a^2 + cx_0}{a} \right).\end{aligned}$$

Desenvolvendo o denominador temos:

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2(x_0^2 - a^2) + b^2x_0^2} &= \sqrt{a^2x_0^2 - a^4 + (c^2 - a^2)x_0^2} && \implies \\ &= \sqrt{c^2x_0^2 - a^4}.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\sqrt{(c + x_0)^2 + y_0^2} &= \sqrt{c^2 + 2cx_0 + x_0^2 + \frac{b^2}{a^2}(x_0^2 - a^2)} && \implies \\ &= \sqrt{c^2 + 2cx_0 + x_0^2 + b^2 - \frac{b^2x_0^2}{a^2}} && \implies \\ &= \sqrt{\frac{a^2c^2 + 2a^2cx_0 + a^2x_0^2 + b^2x_0^2 - b^2a^2}{a^2}} && \implies \\ &= \sqrt{\frac{a^2c^2 + 2a^2cx_0 + (a^2 + b^2)x_0^2 - (c^2 - a^2)a^2}{a^2}} && \implies \\ &= \sqrt{\frac{a^4 + 2a^2cx_0 + c^2x_0^2}{a^2}} && \implies \\ &= \sqrt{\frac{(a^2 + cx_0)^2}{a^2}} && \implies \\ &= \frac{a^2 + cx_0}{a}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sqrt{a^2(x_0^2 - a^2) + b^2x_0^2} \cdot \sqrt{(c + x_0)^2 + y_0^2} = \left(\frac{a^2 + cx_0}{a}\right) \sqrt{c^2x_0^2 - a^4}.$$

Voltando a equação (87), segue que:

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{-c\sqrt{x_0^2 - a^2} \left(\frac{a^2 + cx_0}{a}\right)}{\sqrt{c^2x_0^2 - a^4} \left(\frac{a^2 + cx_0}{a}\right)} && \implies \\ \cos \theta &= -\frac{c\sqrt{x_0^2 - a^2}}{\sqrt{c^2x_0^2 - a^4}}\end{aligned}$$

Como o cosseno de θ é negativo, significa que $\pi/2 < \theta$. O ângulo θ é o maior ângulo entre o segmento PF_1 e a reta tangente t . Portanto temos:

$$\cos \theta = -\cos \alpha = -\frac{c\sqrt{x_0^2 - a^2}}{\sqrt{c^2x_0^2 - a^4}} \implies \cos \alpha = \frac{c\sqrt{x_0^2 - a^2}}{\sqrt{c^2x_0^2 - a^4}}. \quad (88)$$

De forma análoga podemos calcular o ângulo β , que é o ângulo entre o segmento PA e a reta tangente t . Vale ressaltar que o ângulo β e o ângulo $Q\hat{P}F_2$, conforme ilustrados na Figura 96, são iguais pois, são ângulos opostos pelo vértice P . Portanto, calcular o ângulo entre o segmento PA e a reta tangente t é equivalente a calcular o ângulo entre o segmento PF_2 e a reta tangente t , ou seja, o ângulo entre \vec{u}_t e \vec{w}_2 . Logo temos:

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}_t, \vec{w}_2 \rangle &= \cos \beta \implies \\ \frac{a\sqrt{x_0^2 - a^2} \cdot (c - x_0) - bx_0y_0}{\sqrt{a^2(x_0^2 - a^2) + b^2x_0^2} \cdot \sqrt{(c - x_0)^2 + y_0^2}} &= \cos \beta \implies \\ \frac{c\sqrt{x_0^2 - a^2}}{\sqrt{c^2x_0^2 - a^4}} &= \cos \beta. \end{aligned} \quad (89)$$

Já concluímos que este é o ângulo β pois, o primeiro membro da equação (89) é positivo. Portanto, pelas equações (88) e (89), concluímos que $\alpha = \beta$.

Vamos verificar agora que a reta normal n é bissetriz do ângulo $F_1\hat{P}A$. Por simplicidade, chamaremos de γ o ângulo que o segmento PF_1 forma com a reta normal n e de δ o ângulo formado pelo segmento PA e a reta normal n , ou seja, $F_1\hat{P}A = \gamma + \delta$. Como a reta normal n é perpendicular a tangente t no ponto P , então

$$\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2} = \beta + \delta.$$

Como $\alpha = \beta$, segue que:

$$\gamma = \delta.$$

Portanto, a reta normal n é bissetriz do ângulo $F_1\hat{P}A$. □

Na demonstração apresentada, ficou provado que a reta normal n também é bissetriz do ângulo $F_1\hat{P}A$. De acordo com a lei da reflexão, que afirma que o ângulo de incidência em relação à reta normal é igual ao ângulo de reflexão, fica garantido então que, ao incidir em um ponto específico da porção côncava de uma superfície modelada como um ramo de uma hipérbole, uma onda será refletida em direção ao outro foco.

Com base nessa propriedade reflexiva, foi possível aprimorar significativamente os telescópios refletores. Antes de abordar especificamente esses instrumentos, é pertinente falarmos sobre os primeiros telescópios ópticos. Segundo [1], por volta de 1609, Galileu

Galilei foi responsável pela criação do primeiro telescópio no qual utilizava lentes que operavam com base na refração da luz.

Denominado telescópio refrator, esse modelo enfrentava desafios significativos devido a fenômenos indesejáveis gerados por suas lentes. Dois problemas notáveis eram as aberrações cromáticas, em que as lentes atuavam como um prisma, decompondo a luz branca em várias cores, e a deformação das imagens produzidas. Esta última é comumente observada em óculos de grau convencionais.

Esses inconvenientes impactavam negativamente a experiência de observação dos corpos celestes. Foi, então, necessário buscar alternativas para superar tais limitações e aprimorar a qualidade da observação astronômica. Surgiram então os telescópios refletores, que utilizam espelhos em vez de lentes.

Os telescópios refletores são essencialmente compostos por um espelho parabólico no fundo de um tubo. A luz proveniente dos corpos celestes forma feixes paralelos ao tubo, sendo refletidos no espelho parabólico e convergindo para um ponto focal F , onde a imagem é formada. Veja a Figura 97.

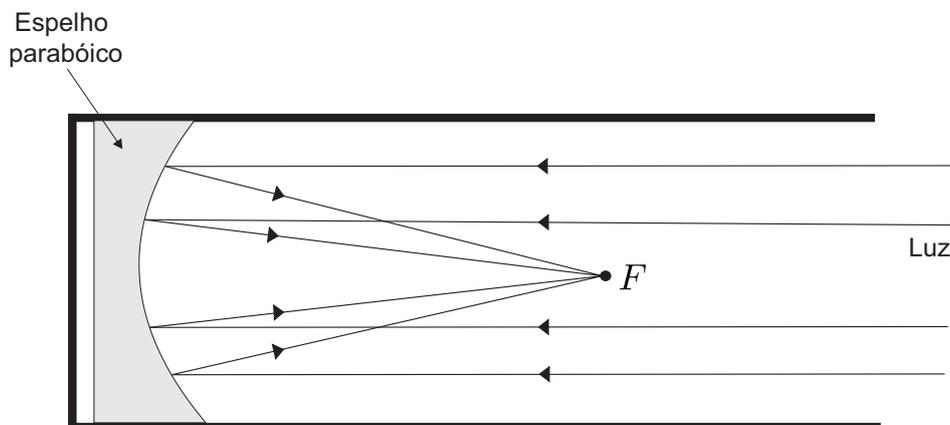


Figura 97: Telescópio refletor

Para visualizar a imagem refletida, o observador enfrentaria a impossibilidade prática de posicionar seu olho exatamente no ponto focal F . Isaac Newton apresentou uma solução engenhosa para esse problema ao introduzir um espelho plano entre o espelho parabólico e o foco F . Com essa modificação, a imagem não seria mais formada no ponto F , pois seria refletida novamente pelo espelho plano e direcionada para fora do tubo do

telescópio, convergindo para um novo ponto F' , onde o observador pode convenientemente posicionar-se. Veja a Figura 98.

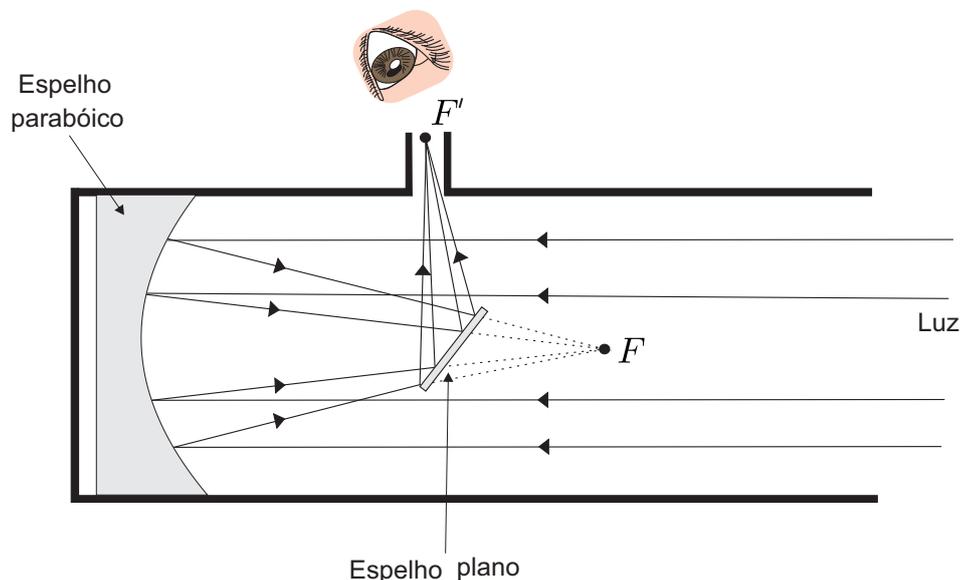


Figura 98: Telescópio refletor de Newton

Apesar da solução proposta por Newton, os telescópios refletores ainda apresentam algumas limitações. A montagem desses instrumentos é pouco flexível, pois o espelho plano requer um posicionamento preciso para garantir que a imagem se forme fora do tubo. Além disso, é necessário que o espelho tenha um tamanho considerável para refletir adequadamente os feixes de luz, o que resulta no bloqueio de parte da luz que entra pelo tubo e incide sobre o espelho parabólico.

Considerando as conhecidas limitações dos telescópios refletores, o astrônomo francês Laurent Cassegrain propôs uma inovação crucial. Em vez do espelho plano utilizado anteriormente, Cassegrain sugeriu substituí-lo por um espelho em forma de um ramo de hipérbole. Esse novo componente é posicionado entre o espelho parabólico e o foco F . O espelho hiperbólico também possui um foco, coincidente com o foco F do espelho parabólico. Como resultado, os raios luminosos direcionados para o foco F são refletidos novamente no espelho hiperbólico, culminando na formação da imagem no ponto F' . Este ponto F' é o foco do outro ramo da hipérbole que dá forma ao espelho, localizado externamente ao tubo do telescópio, atrás do espelho parabólico. Veja a Figura 99.

O telescópio de Cassegrain oferece maior flexibilidade em sua construção, permitindo

posicionar o espelho mais próximo ou mais afastado do foco F , mantendo fixa a distância FF' e, conseqüentemente, podendo alterar o tamanho do espelho. Além disso, a distância FF' pode ser modificada sem alterar a posição do foco F . Essa flexibilidade na montagem permite adaptar o telescópio de acordo com as exigências das observações.

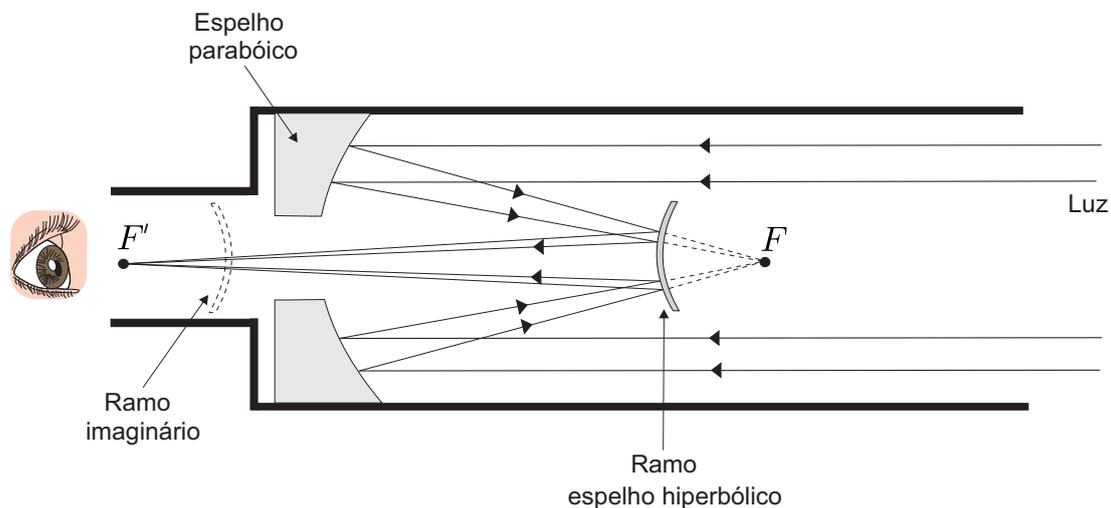


Figura 99: Telescópio refletor de Cassegrain

3.4 Outras aplicações

Veremos outras aplicações nas quais não se baseiam nas propriedades reflexivas, vistas anteriormente [1]; [17];[18].

3.4.1 Sistema de navegação hiperbólica

O sistema de navegação por rádio LORAN (LOng RAnge Navigation) desempenhou um papel crucial durante a Segunda Guerra Mundial, proporcionando aos navios a capacidade de determinar com precisão a sua localização geográfica.

O funcionamento desse sistema é baseado em dois pares de radiotransmissores, onde as distâncias entre cada par são conhecidas. Cada radiotransmissor emite um sinal simultaneamente com seu par correspondente, sendo captado pelo navio em intervalos de tempo distintos. A diferença de tempo no recebimento desses sinais é resultante da variação na distância entre o navio e os radiotransmissores, considerando que o sinal percorre uma

velocidade constante. A partir dessa diferença de tempo, é possível calcular a diferença de distância. À medida que o navio se desloca, essa diferença de distância permanece constante, indicando que a embarcação está situada em um ramo específico de uma hipérbole.

A hipérbole que delimita a posição do navio possui como focos o par de radiotransmissores. Dado que o sistema de navegação conta com dois pares de radiotransmissores, são formadas duas hipérbolas, cuja interseção determina com precisão a localização do navio. Vamos examinar, na prática, como essa localização é realizada.

Consideremos um par de radiotransmissores, F_1 e F_2 , com uma distância conhecida entre eles, d . Ambos emitem sinais simultaneamente, percorrendo distâncias d_1 e d_2 até alcançarem o navio nos tempos correspondentes t_1 e t_2 , respectivamente. Sem perda de generalidade, suponhamos que F_2 seja o radiotransmissor mais distante do navio, resultando em um tempo de chegada maior, isto é, $t_2 > t_1$.

Vamos denotar por k o tempo decorrido entre a chegada do sinal de F_2 e a chegada do sinal de F_1 . Mesmo sem conhecer os tempos exatos t_1 e t_2 que os sinais levaram para chegar ao navio, a diferença k de tempo entre as chegadas dos sinais representa precisamente a diferença entre os tempos t_1 e t_2 , ou seja, $t_2 - t_1$. As distâncias d_1 e d_2 podem ser expressas como:

$$d_1 = v \cdot t_1 \quad \text{e} \quad d_2 = v \cdot t_2,$$

onde v é a velocidade do sinal. Assim, podemos obter a diferença entre as distâncias:

$$\begin{aligned} d_2 - d_1 &= v \cdot t_2 - v \cdot t_1 \Rightarrow \\ &= v(t_2 - t_1) \Rightarrow \\ &= v \cdot k. \end{aligned}$$

Dado que a velocidade do sinal é constante, a diferença k permanece invariável à medida que o navio se desloca, resultando em uma constância na diferença $d_2 - d_1$. Suponha que os radiotransmissores estejam localizados em um plano cartesiano, de forma que F_1 e F_2 estejam a uma distância $d/2$ da origem.

A constância na diferença entre d_2 e d_1 nos remete à definição da hipérbole. Como já observamos anteriormente, a equação reduzida de uma hipérbole com centro na origem

do plano cartesiano é expressa como:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Na situação que estamos analisando, o parâmetro a é dado por:

$$\frac{v \cdot k}{2}.$$

Para determinar o parâmetro b , podemos recorrer à relação fundamental na hipérbole:

$c^2 = a^2 + b^2$. Assim,

$$\begin{aligned} b^2 &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{vk}{2}\right)^2 \Rightarrow \\ &= \frac{d^2 - v^2k^2}{4}. \end{aligned}$$

Portanto, a posição do navio pode ser modelada como pertencente a um dos ramos da hipérbole com a equação:

$$\frac{x^2}{\frac{v^2k^2}{4}} - \frac{y^2}{\frac{d^2 - v^2k^2}{4}} = 1. \quad (90)$$

A Figura 100 representa graficamente a hipérbole com a equação (90), ilustrando a situação recém-analisada. Dado que o navio está mais próximo do radiotransmissor F_1 , podemos inferir que a embarcação se encontra no ramo direito da hipérbole (90).

Agora, repetimos o processo para um novo par de radiotransmissores, F'_1 e F'_2 , com posições distintas de F_1 e F_2 . Seja d' a distância entre F'_1 e F'_2 e k' a diferença de tempo entre o recebimento dos sinais emitidos por F'_1 e F'_2 . Definimos $O' = (x_0, y_0)$ como a origem da nova hipérbole, cujos focos são F'_1 e F'_2 . Sua equação é dada por:

$$\frac{(x - x_0)^2}{\frac{v^2k'^2}{4}} - \frac{(y - y_0)^2}{\frac{d'^2 - v^2k'^2}{4}} = 1. \quad (91)$$

É relevante observar que, na equação (91), precisamos apenas dos valores constantes d' e k' . Neste caso, temos uma hipérbole com o centro fora da origem.

Consideremos agora os pontos de interseção das hipérbolas (90) e (91), representados por A e B na Figura 101. Esses pontos representam as possíveis localizações do navio. No entanto, sabemos que o navio deve estar no ramo direito da hipérbole (90), pois o tempo em que o sinal de F_1 atinge o navio é menor que o tempo do sinal de F_2 . Portanto,

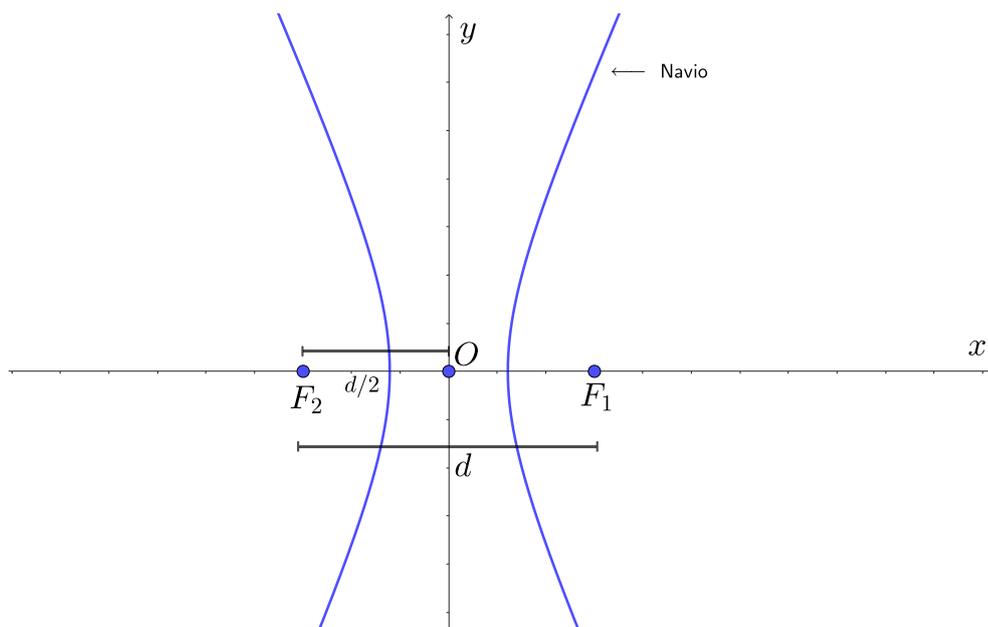


Figura 100: Representação gráfica da hipérbole discutida.

concluimos que o navio está localizado no ponto B . Segundo [11], no caso em que as hipérboles se interceptam em apenas um dos ramos, basta tomar outro par de antenas, por exemplo o par F_1 e F'_1 , e traçar a nova hipérbole cujo os focos são o par de antenas.

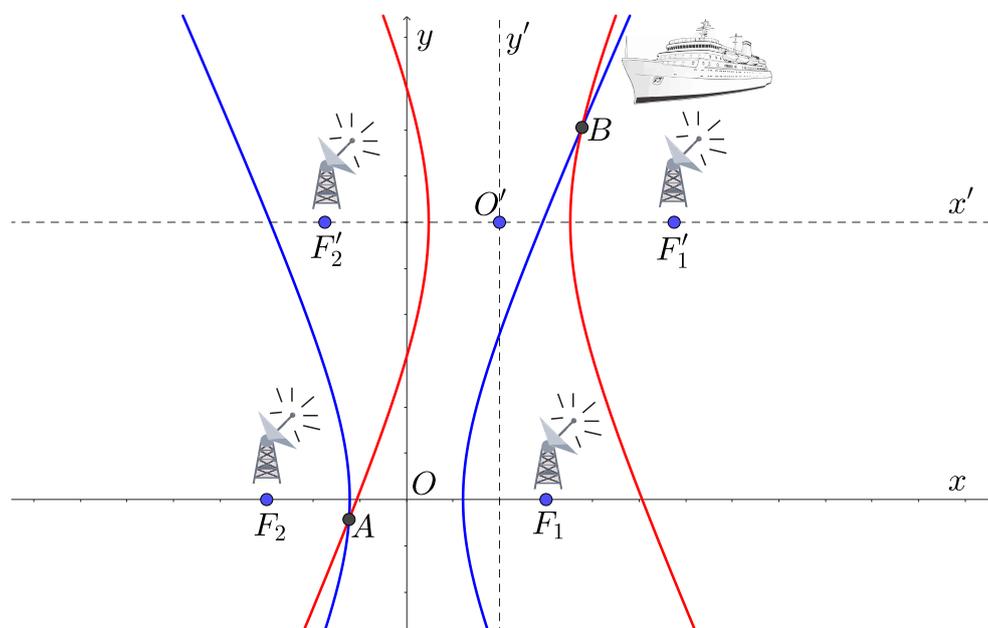


Figura 101: Representação gráfica das hipérboles intersectadas nos pontos A e B .

3.4.2 Movimento dos corpos celestes

Segundo [15], após a morte do astrônomo dinamarquês Tycho Brahe, o seu assistente Johannes Kepler foi quem herdou os dados brutos sobre as posições dos planetas em vários intervalos de tempo, que eles haviam observado durante anos. Por cerca de 20 anos, Kepler trabalhou arduamente sobre esse dados até que conseguiu abstrair deles as suas três leis:

- (1) A órbita de cada planeta é uma elipse, sendo que o Sol está num dos focos.
- (2) O segmento de reta que une um planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.
- (3) O quadrado do período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior da órbita elíptica do planeta. Isto é, se T é o tempo que um planeta gasta para completar uma revolução ao redor do Sol e a é o semi-eixo maior da órbita então, a razão T^2/a^3 é a mesma para todos os planetas do sistema solar.

Kepler chegou à essas três afirmações de forma empírica porém, ele não tinha ideia se eram verdadeiras e nem mesmo existia uma teoria na qual pudesse provar tais afirmações de Kepler. Foi com Isaac Newton que surgiu tal teoria.

Newton criou a lei da gravitação universal por meio de deduções matemáticas e para isso utilizou-se da terceira lei de Kepler, onde concluiu que a força que mantém um planeta orbitando o Sol é diretamente proporcional ao produto da massa do planeta e a massa do Sol e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles. Tal força esta na direção da reta que une o planeta ao sol e portanto, sua expressão é dada por:

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{u}$$

onde G é a constante gravitacional.

O vetor \vec{u} é o vetor unitário dado por:

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r},$$

onde \vec{r} é o vetor posição do planeta em relação ao Sol, isto é, o Sol encontra-se na origem do sistema de coordenadas xyz . A distância r entre o planeta e o Sol é dado pelo modulo de \vec{r} .

O vetor unitário \vec{u} tem sentido contrário à força gravitacional \vec{F} e por isso se justifica o sinal de menos na expressão.

A partir da lei da gravitação universal, Newton deduziu matematicamente as três leis de Kepler. Conforme [17], iremos fazer a dedução apenas da primeira lei de Kepler, onde será mostrado que a órbita de cada planeta é uma elipse e o Sol está em um dos Focos.

De maneira geral, a lei da gravitação de Newton afirma que massa atrai massa e portanto, outros corpos celestes também exercem uma força gravitacional sobre os planetas. Como a força gravitacional que o Sol exerce sobre os planetas é muito maior do que a força exercida por outros corpos celestes, então podemos desconsiderar quaisquer interações gravitacionais de outros corpos celestes de tal forma que a força resultante seja apenas a força exercida entre dois corpos, isto é, planeta e Sol. Utilizaremos as seguintes leis de Newton:

$$\text{Segunda Lei do Movimento: } \vec{F} = m\vec{a}.$$

$$\text{Lei da Gravitação universal: } \vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}.$$

sendo,

- (i) \vec{r} : é o vetor posição do planeta em relação ao Sol.
- (ii) $\|\vec{r}\| = r$: é a distância entre o planeta e o Sol.
- (iii) $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$: é o vetor unitário que indica a direção radial.

A equação polar:

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$$

representa uma cônica de excentricidade e . Conforme o valor de e podemos ter:

- Uma elipse se $e < 1$.
- Uma parábola se $e = 1$.
- uma hipérbole se $e > 1$.

Para a dedução da primeira lei de Kepler, vamos partir das duas leis de Newton e obter uma equação, conforme a equação polar de uma cônica.

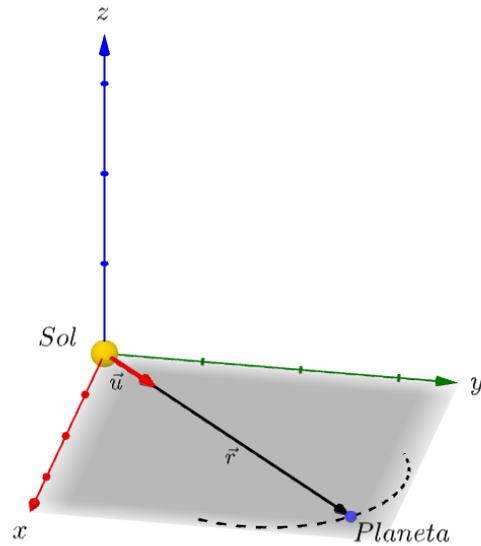


Figura 102: Posição do planeta em relação ao Sol.

Igualando as equações temos:

$$m\vec{a} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}$$

$$\vec{a} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}.$$

Portanto, \vec{a} é um múltiplo de \vec{r} o que implica que \vec{a} e \vec{r} são paralelos. Logo temos que

$$\vec{a} \times \vec{r} = 0.$$

Inicialmente iremos verificar que o planeta se move em um plano. Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) &= \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \\ &= \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{v}) = 0.$$

Seja $\vec{r} \times \vec{v} = \vec{h}$, com $\vec{h} \neq \vec{0}$ um vetor constante. Isso significa que \vec{r} e \vec{v} não são paralelos, ou seja, o plano determinado por \vec{r} e \vec{v} é perpendicular a \vec{h} o que mostra que a órbita do planeta é uma curva plana.

Para demonstrar a primeira lei de Kepler, vamos reescrever o vetor \vec{h} da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} &= \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= r\vec{u} \times \frac{d(r\vec{u})}{dt} \\ &= r\vec{u} \times \left(\frac{dr}{dt}\vec{u} + r\frac{d\vec{u}}{dt} \right) \\ &= r\vec{u} \times \frac{dr}{dt}\vec{u} + r\vec{u} \times r\frac{d\vec{u}}{dt} \\ &= r\frac{dr}{dt}(\vec{u} \times \vec{u}) + r^2\vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt} \\ &= r^2\vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt}.\end{aligned}$$

Temos também que:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{h} &= -\frac{GM}{r^2}\vec{u} \times r^2\vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt} \\ &= -GM\vec{u} \times \vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt} \\ &= -GM \left[\left(\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \right) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{u}) \frac{d\vec{u}}{dt} \right].\end{aligned}$$

Como $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$ que é o vetor unitário associado a \vec{r} então, $\|\vec{u}\| = 1$. Portanto,

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{dt}(1) = \frac{d}{dt}(\|\vec{u}\|) = \frac{d}{dt}(\vec{u} \cdot \vec{u}) \\ &= \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u} + \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u} = 2 \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u} = 0.$$

Voltando ao desenvolvimento do produto vetorial $\vec{a} \times \vec{h}$, temos:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{h} &= -GM \left[\left(\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \right) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{u}) \frac{d\vec{u}}{dt} \right] \\ &= GM \frac{d\vec{u}}{dt}.\end{aligned}$$

Podemos escrever também o produto vetorial $\vec{a} \times \vec{h}$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{v} \times \vec{h}) &= \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{h} + \vec{v} \times \frac{d\vec{h}}{dt} \\ &= \vec{a} \times \vec{h}. \end{aligned}$$

Igualando as duas expressões para $\vec{a} \times \vec{h}$ e em seguida integrando em ambos os membros, temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dt}(\vec{v} \times \vec{h}) &= \int GM \frac{d\vec{u}}{dt} \\ \vec{v} \times \vec{h} &= GM\vec{u} + \vec{c}. \end{aligned} \tag{92}$$

Tomando \vec{c} como um vetor constante, o produto vetorial $\vec{v} \times \vec{h}$ resulta em um vetor que é perpendicular a \vec{v} e \vec{h} ao mesmo tempo e portanto, o vetor $\vec{v} \times \vec{h}$ pertence ao plano xOy . Dessa forma, podemos escolher \vec{c} de tal forma que \vec{c} fique na direção do eixo x formando um ângulo θ com o vetor \vec{r} . Assim, (r, θ) são as coordenadas polares do planeta.

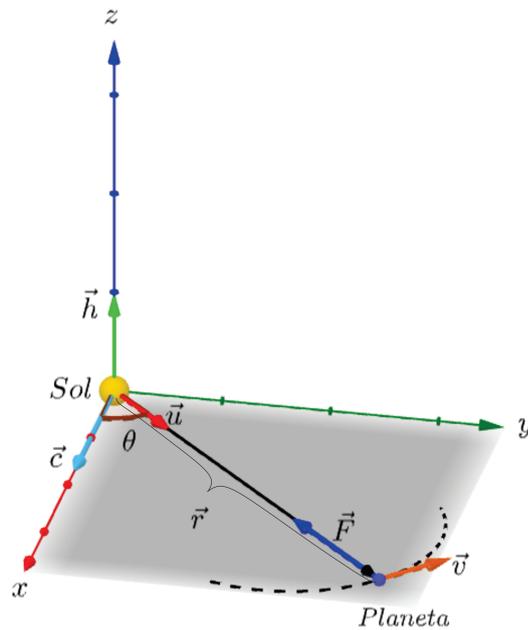


Figura 103: Coordenadas polares do planeta.

Fazendo o produto escalar por \vec{r} em ambos os membros da equação (92) temos:

$$\begin{aligned}
 \vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{h}) &= \vec{r} \cdot (GM\vec{u} + \vec{c}) \\
 &= r\vec{u} \cdot GM\vec{u} + \|\vec{r}\| \|\vec{c}\| \cos \theta \\
 &= rGM(\vec{u} \cdot \vec{u}) + rc \cos \theta \\
 &= r(GM + c \cos \theta)
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$r = \frac{\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{h})}{GM + c \cos \theta}. \quad (93)$$

Pela propriedade do produto misto, temos que:

$$\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{h}) = (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{h} = \vec{h} \cdot \vec{h} = h^2.$$

Tomando $c/GM = e$, logo podemos reescrever a equação (93) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{h^2}{GM + c \cos \theta} \\
 &= \frac{1}{GM} \frac{h^2}{1 + (c/GM) \cos \theta} \\
 &= \frac{e}{c} \frac{h^2}{1 + e \cos \theta} \\
 &= \frac{ed}{1 + e \cos \theta},
 \end{aligned}$$

onde $d = h^2/c$.

Finalmente, chegamos na equação polar de um cônica e como a órbita de um planeta é uma curva fechada então essa equação polar se trata de uma elipse com a excentricidade $e < 1$.

3.4.3 Excentricidade da órbita dos corpos celestes

Para compreender as características dessas órbitas elípticas, isto é, se são mais arredondadas ou achatadas, é necessário analisar sua excentricidade.

A excentricidade pode ser determinada a partir das medidas do Afélio e Periélio. O Afélio é o ponto da órbita em que o planeta está mais afastado do Sol, enquanto o Periélio é o ponto em que ele está mais próximo. A seguir, conforme [6], examinaremos como a excentricidade se relaciona com o Afélio e o Periélio por meio de uma expressão algébrica.

No plano cartesiano, consideramos o Sol (representado por S) fixo na origem, sendo um dos focos da elipse que define a órbita de um planeta. Como consequência, essa elipse terá centro $C = (x_0, 0)$. Supondo $x_0 = c$ e definindo A e P como as medidas do Afélio e Periélio, respectivamente, e F como o outro foco da elipse, temos a Figura 104.

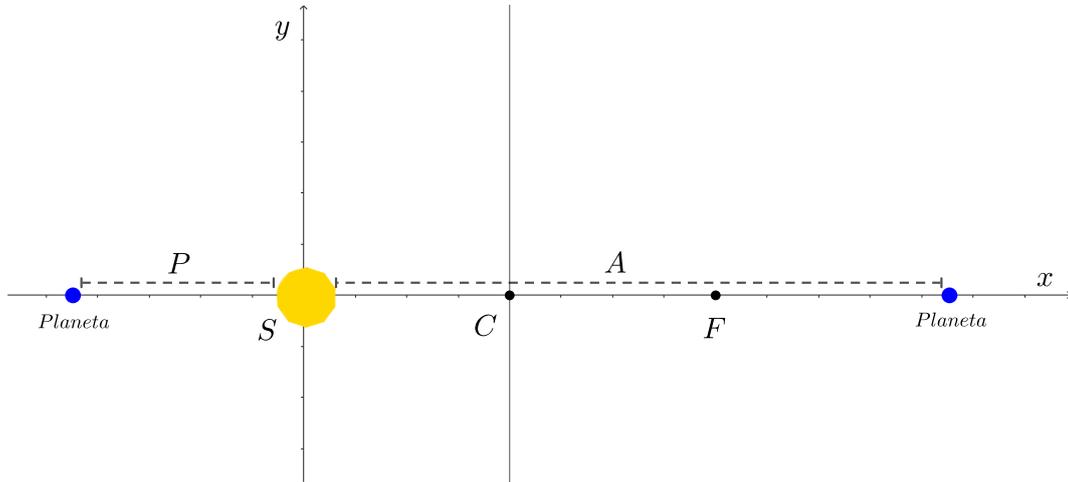


Figura 104: Sol na origem do plano cartesiano sendo um dos focos.

Seja $2c$ a distância focal e $2a$ a distância do eixo maior, logo temos:

$$\begin{cases} 2a = A + P \implies a = \frac{A + P}{2}. \\ 2c = A - P \implies c = \frac{A - P}{2}. \end{cases}$$

Como a excentricidade é dada pela razão c/a , podemos expressá-la como:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{A - P}{2}}{\frac{A + P}{2}} = \frac{A - P}{A + P}. \quad (94)$$

Na tabela a seguir mostra os valores de A , P e e dos planetas do sistema solar. A excentricidade e foi calculada conforme a equação (94), e os valores de A e P foram coletados no site oficial da Nasa, disponível em [12].

Conforme os dados apresentados na Tabela 1, é possível observar que os planetas Mercúrio e Plutão possuem órbitas mais achatadas em comparação aos outros planetas. Em outras palavras, a excentricidade mais próxima de zero indica que a órbita se aproxima mais de uma circunferência.

Planeta	A (10^6 km)	P (10^6 km)	e
Mercúrio (Me)	69.8	46.0	0.206
Vênus (V)	108.9	107.5	0.006
Terra (T)	152.1	147.1	0.017
Marte (M)	249.3	206.7	0.093
Jupter (J)	816.4	740.6	0.049
Saturno (S)	1506.5	1357.6	0.052
Urano (N)	3001.4	2732.7	0.047
Netuno (N)	4558.9	4471.1	0.010
Plutão (P)	7375.9	4436.8	0.249

Tabela 1: Excentricidade dos planetas do sistema solar.

A Figura 105 ilustra as órbitas de Mercúrio, Vênus, Terra e Marte criadas por meio do software Geogebra. Para a plotagem das elipses que representam as órbitas foi necessário inserir as equações na forma implícita. Como é conhecido, a equação reduzida de uma elipse, cujo centro não é a origem, é dada por:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Seguindo o raciocínio ilustrado na Figura 104, onde o Sol está fixo na origem e representa um dos focos, podemos determinar a equação das elipses que representam as órbitas dos planetas. Dado que conhecemos os valores dos parâmetros a e c , podemos aplicar a relação $a^2 = b^2 + c^2$ para determinar o parâmetro b . Assim, temos:

$$\begin{aligned} b^2 &= \left(\frac{A+P}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-P}{2}\right)^2 \implies \\ &= \frac{1}{4} [(A+P)^2 - (A-P)^2] \implies \\ &= AP. \end{aligned}$$

Portanto, a equação que representa as órbitas é dada por:

$$\frac{\left(x - \frac{A-P}{2}\right)^2}{\left(\frac{A+P}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{AP} = 1. \quad (95)$$

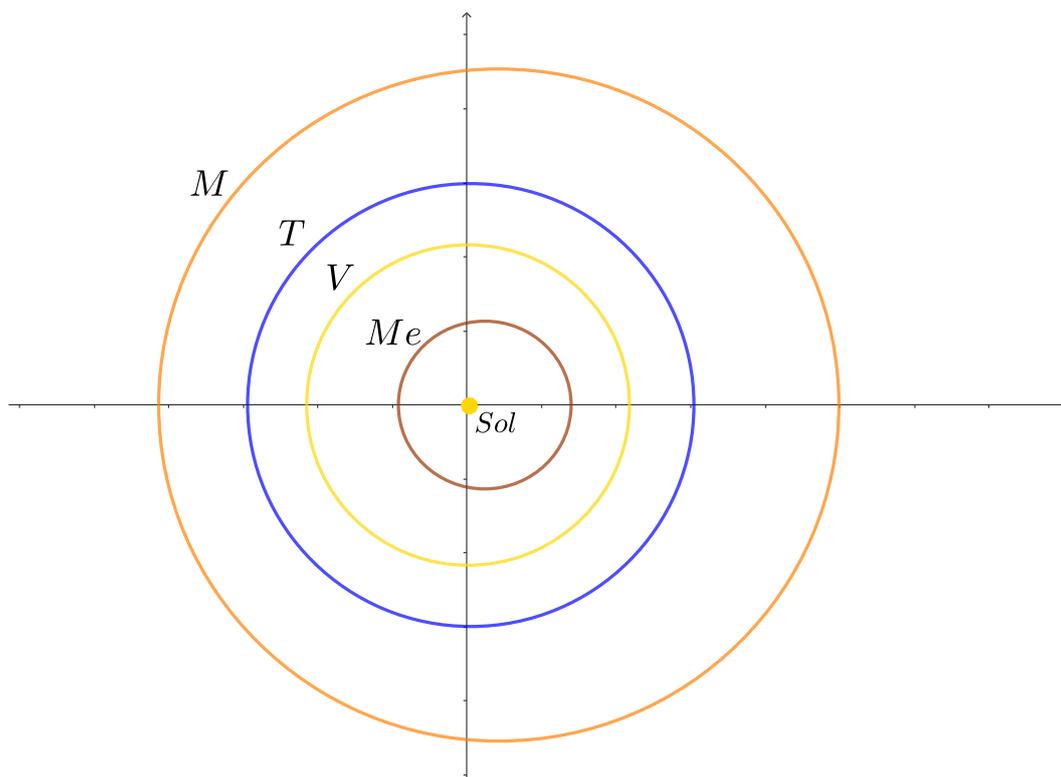


Figura 105: Órbitas na escala de 1 : 1.000.000.

Lembrando que as coordenadas do centro é:

$$C = (x_0, 0) = (c, 0) = \left(\frac{A - P}{2}, 0 \right).$$

Escrevendo a equação 95 na forma implícita, obtemos:

$$APx^2 + \left(\frac{A + P}{2} \right)^2 y^2 + (AP^2 - A^2P)x = A^2P^2. \quad (96)$$

Ao inserir no Geogebra a equação (96) com os respectivos valores de A e P para cada planeta, conforme a Tabela 1 e desconsiderando a potência 10^6 , obtemos as orbitas de cada planeta em uma escala de 1 : 1.000.000 o que mantem as mesmas proporções do tamanho real.

Assim como os planetas, vários corpos celestes possuem órbitas elípticas, incluindo cometas, asteroides, luas e satélites. Para ilustrar e analisar a excentricidade orbital, tomemos como exemplo o cometa Halley.

O cometa Halley ficou notório por ser o primeiro classificado como periódico. Antes disso, a crença predominante era que os cometas realizavam apenas uma passagem pelo

sistema solar. No entanto, em 1705, o astrônomo Edmond Halley, ao aplicar a teoria da gravitação de Newton, identificou similaridades nas órbitas de cometas brilhantes observados em 1531, 1607 e 1682. Halley sugeriu que essas passagens correspondiam ao mesmo cometa, indicando uma órbita periódica. Conforme [13], observações do cometa remontam a mais de 2000 anos, e Halley previu seu retorno para o ano de 1758; no entanto, sua morte ocorreu em 1742, antes de poder confirmar sua previsão. O cometa Halley possui um período de revolução de aproximadamente 76 anos, com sua última passagem ocorrendo em 1986, e sua próxima prevista para 2061. No afélio, em 1948, o cometa estava a uma distância de 5,27 bilhões de quilômetros do Sol, enquanto no periélio, em 1986, a distância foi de 87,8 milhões de quilômetros.

Para esboçar a órbita do cometa usando o software Geogebra, ajustaremos os valores do afélio e periélio para a escala de 1 : 1.000.000, dividindo ambos por 10^6 . Ao inserir a equação (96) com os novos valores de afélio (A) e periélio (P), obtemos a representação da órbita. A Figura 106 ilustra a órbita de Halley em comparação com as órbitas dos planetas, apresentadas na Figura 105.

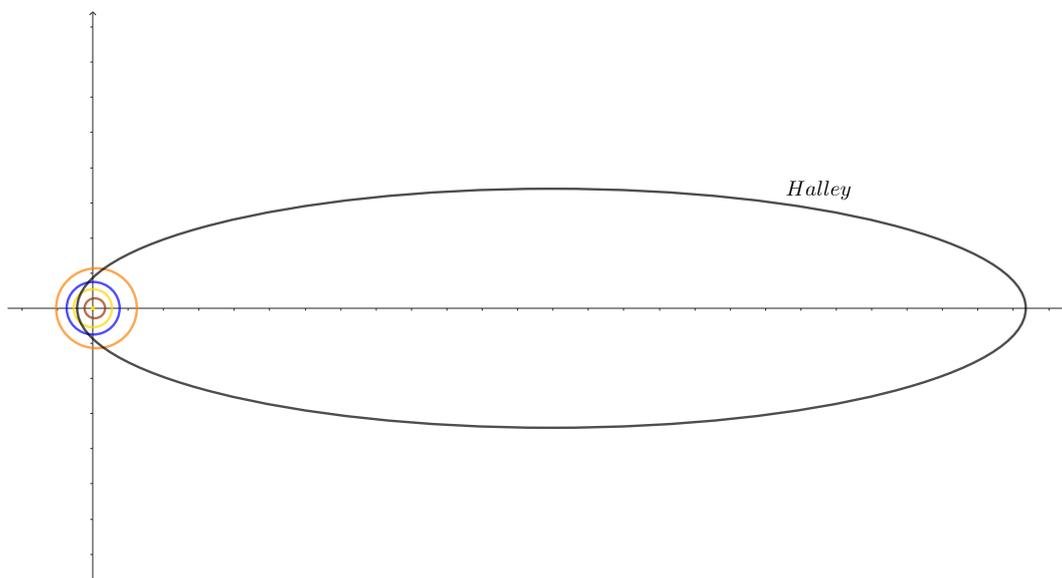


Figura 106: Órbita do cometa Halley.

Ao calcular a excentricidade da órbita de Halley por meio da equação (94), obtemos:

$$e = \frac{5270 - 87,8}{5270 + 87,8} \approx 0,97.$$

A Figura 106 e o valor da excentricidade destacam o quão achatada é a órbita do cometa Halley.

4 Considerações Finais

O desenvolvimento deste trabalho destacou ainda mais a importância do uso de um software de geometria dinâmica para o estudo das seções cônicas e quádras, tanto para estudantes que desejam aprofundar-se no tema quanto para professores.

Optamos pelo software GeoGebra para esta investigação, e sua contribuição foi fundamental na revisão das propriedades das cônicas por meio de construções. Ao explorarmos as rotações e translações no plano da elipse, hipérbole e parábola, o GeoGebra revelou-se uma ferramenta valiosa, permitindo a execução dessas construções e o aproveitamento das ferramentas de rotação e translação disponíveis no software.

Na análise das rotações e translações das cônicas, adotamos uma abordagem um pouco diferente em relação às tradicionais encontradas nos livros. Em vez de rotacionar os eixos das cônicas, optamos por girar apenas os focos e os vértices A_1 e A_2 , que mantêm uma distância constante de $2a$ um do outro. A partir dessa premissa, construímos a elipse ou a hipérbole que passa por esses novos pontos, utilizando a definição de cada curva. Quanto à translação, em vez de mover os eixos das cônicas para um novo centro, transladamos os focos e os vértices para um novo ponto central e, em seguida, construímos a elipse ou a hipérbole que passa por esses novos focos e vértices. No caso específico da translação da parábola, movemos a reta diretriz e o foco, e então construímos a parábola transladada a partir do novo foco e da nova reta diretriz.

Essa abordagem foi adotada devido à praticidade oferecida pelo GeoGebra. Para traçar uma elipse ou uma hipérbole neste software, bastam os focos e um ponto pertencente à curva. Já para a parábola, é necessário especificar a reta diretriz e o foco. Ao utilizar essa abordagem facilitadora na construção das cônicas, tornou-se essencial demonstrar que um ponto pertencente à curva, antes de sofrer rotação ou translação, permanece como parte da cônica após a aplicação dessas transformações. Além disso, podemos validar essas rotações ou translações utilizando os comandos "Girar" e "Transladar" disponíveis

no GeoGebra, os quais podem ser aplicados à cônica desejada.

No estudo das quádricas neste trabalho, realizamos uma análise abrangente das quádricas centrais e não centrais. Ficou evidente a importância de obtermos suas formas canônicas, pois sem elas a análise dessas superfícies se tornaria extremamente complexa. Com o auxílio do GeoGebra, pudemos visualizar essas superfícies tanto por meio de suas equações gerais quanto de suas formas canônicas. Além disso, foi possível explorar os traços de cada uma das quádricas em relação aos planos coordenados ou planos paralelos a eles. Dessa forma, a utilização de um software como o GeoGebra não apenas torna as aulas mais atrativas para os professores, mas também proporciona uma compreensão mais profunda da análise dessas superfícies para aqueles que buscam aprofundar-se no tema.

Ao remontarmos às origens das cônicas, que remontam ao problema da duplicação do cubo aproximadamente no século V a.C [3], percebemos que seu impacto só se manifestou plenamente no mundo contemporâneo. As principais aplicações da elipse, hipérbole e parábola estão intrinsecamente ligadas às suas propriedades refletoras. Neste trabalho, buscamos demonstrar essas propriedades de forma autoral, seguindo os princípios da geometria analítica e utilizando a derivação para encontrar a equação da reta tangente. Ao explorarmos as aplicações subjacentes a essas propriedades reflexivas, compreendemos profundamente o quão fundamental foi a descoberta das secções cônicas para os dias atuais. Nessa perspectiva, somos incentivados a continuar buscando e descobrindo novos conhecimentos, mesmo que estes não tenham uma aplicação imediata, pois no futuro podem se revelar indispensáveis para a humanidade.

Referências

- [1] AVILA, Geraldo. **A hipérbole e os telescópios**. Revista do Professor De Matemática (RPM) n° 34.
- [2] BARCO, Luiz. **Por que elipse, parábola e hipérbole?**. Revista do Professor De Matemática (RPM), 1991 Vol. 4, p. 47.
- [3] BOYER, Carl B. 1996. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.
- [4] Civitatis, St. Paul's Cathedral.
Disponível em: <<https://encurtador.com.br/1xTW5>>.
Acesso em 04 de fevereiro de 2024.
- [5] DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. **Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: SBM, Coleção PROFMAT, 2013.
- [6] ESQUEF, Paulo A. ; RIBEIRO, Sérgio A. P. **Elipses e as órbitas dos planetas**. Revista do Professor De Matemática (RPM) n° 77.
- [7] EVES, Howard Whitley. **Introdução à história da matemática**. Howard Eves / Tradução Hygino H. Domingues. 5^o ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.
- [8] GURGEL, Paulo. **A Galeria dos Sussurros**. Blog EntreMentes, 02 de fevereiro de 2013.
Disponível em: <<https://encurtador.com.br/dilqt>>.
Acesso em 06 de Janeiro de 2024.
- [9] IMENES, Luiz M. P. **Arredondada ou achatada?**. Revista do Professor De Matemática (RPM) n° 11.
- [10] LIMA, Elon Lages. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

- [11] LIMA, João Paulo. **Uma Proposta Para o Ensino Das Seções Cônicas no Ensino Básico Mediante o Uso De um Ambiente Dinâmico**. Dissertação de Mestrado - Profmat, Universidade Federal Rural Do Semi-Árido, Mossoró, 2014.
- [12] NASA. **Planetary Fact Sheet - Metric**.
Disponível em: <<https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/>>
Acesso em 03 de fevereiro de 2024.
- [13] NASA. **1P/HALLEY**.
Disponível em: <<https://encurtador.com.br/vwCNO>>.
Acesso em 03 de fevereiro de 2024.
- [14] PROFMATVIDEOS. **MA23 Assíntotas: Hipérbole transladada**.
Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=ndXhNgjydAI>>.
Acesso em 15 de setembro de 2023.
- [15] SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica V.2** / George F. Simmons ; tradução Seiji Hariki; revisão técnica Rodney Carlos Bassanezi, Silvio de Alencastro Pregnotatto. São Paulo: Pearson Makron Books, 1988.
- [16] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2^o edição, 1987.
- [17] STEWART, James. **Cálculo, volume 2** / James Stewart ; tradução EZ2 Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- [18] SWOKOWSKI, Earl W. **Cálculo com Geometria Analítica**. Tradução Alfredo Alves de Faria. São Paulo: Makron Books, 1994.
- [19] VALLADARES, Renato J.C. **Elipse, sorrisos e sussurros**. Revista do Professor De Matemática (RPM) n° 36.
- [20] WAGNER, Eduardo. **Por que as antenas são parabólicas**. Revista do Professor De Matemática (RPM) n° 33.

[21] Wikimedia Commons, “**Arquivo: Flickr - USCapitol - Frente Leste do Capitólio dos EUA (cortado).jpg**”.

Disponível em: <<https://encurtador.com.br/ghjG9>>.

Acesso em 04 de fevereiro de 2024.