UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

FORMALISMO E ALGUNS REFLEXOS DA TEORIA DOS CONJUNTOS

DENYS SEIDI ARAKAKI

Santo André, 2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

FORMALISMO E ALGUNS REFLEXOS DA TEORIA DOS CONJUNTOS

DENYS SEIDI ARAKAKI

Dissertação apresentada à Banca Examinadora na Universidade Federal do ABC, como exigência para obtenção do título de **Mestre em Matemática**, sob a orientação do **Prof. Dr. Vinicius Cifú Lopes**.

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Denys Seidi Arakaki e orientada pelo Prof. Dr. Vinicius Cifú Lopes.

Santo André, 2023

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Arakaki, Denys Seidi
FORMALISMO E ALGUNS REFLEXOS DA TEORIA DOS CONJUNTOS / Denys Seidi Arakaki. — 2023.

42 fls.

Orientador: Vinicius Cifú Lopes

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo André, 2023.

1. Teoria dos Conjuntos. I. Lopes, Vinicius Cifú. II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2023. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do (co)orientador(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato, DENYS SEIDI ARAKAKI realizada em 11 de Novembro de 2023:

gov.br Documento assinado digitalmente
ANA CAROLINA BOERO
Data: 11/11/2023 18:55:49-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.(a) ANA CAROLINA BOERO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

gov.br Documento assinado digitalmente
ROGERIO AUGUSTO DOS SANTOS FAJARDO
Data: 11/11/2023 18:51:02-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.(a) ROGÉRIO AUGUSTO DOS SANTOS FAJARDO
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Prof.(a) RICARDO BIANCONI
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Prof.(a) RODRIGO ROQUE DIAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

gov.br Documento assinado digitalmente
VINICIUS CIFU LOPES
Data: 11/11/2023 19:02:15-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.(a) VINICIUS CIFU LOPES
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

Universidade Federal do ABC

Dedicado à minha família, minha esposa Débora,
meus amigos e colegas de trabalho.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por abrir meus caminhos e possibilitar a minha escolha pelo estudo da Matemática.

Aos meus familiares por estarem ao meu lado desde o início, obrigado pelo carinho, compreensão e apoio durante toda a vida. Cada conversa, cada abraço e cada momento compartilhado renovaram minhas energias e reforçaram minha determinação em alcançar meus objetivos acadêmicos.

À minha esposa, Débora, por me apoiar e ser meu pilar ao longo de incertezas e momentos difícies, mas, acima de tudo por partilhar comigo muitas alegrias e conquistas. Sua presença ao meu lado fez esta jornada de estudos mais significativa e enriquecedora.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Vinicius Cifú Lopes, por sua paciência, auxílio, revisões, dedicação e comprometimento para que este trabalho fosse realizado. Obrigado por me guiar através dos obstáculos (principalmente pela compreensão dos momentos difíceis devido a pandemia) e por compartilhar sua paixão pelo conhecimento. Sem sua contribuição e orientação, não teria conseguido avançar no trabalho até a conclusão.

RESUMO

A teoria dos conjuntos oferece uma linguagem para descrever e analisar agrupamentos de objetos, bem como suas estruturas, sendo assim uma ferramenta indispensável em diversas áreas da ciência. Neste estudo apresentaremos uma abordagem mais formal que estabelece algumas extensões do conteúdo escolar e regras para a existência e formação de conjuntos evitando contradições e paradoxos.

A versão mais atualizada da BNCC, que é um documento que estabelece os conhecimentos, competências e habilidades essenciais que os estudantes devem desenvolver ao longo da educação básica no Brasil, não menciona o ramo da teoria dos conjuntos. No entanto, não estar explicitamente na BNCC não significa que ela não deva ser abordada no ensino da matemática, muito pelo contrário, cabe aos professores fazer escolhas sobre como iniciar e aprofundar os conteúdos ao longo do currículo.

Palavras-chave: Teoria dos Conjuntos, Axiomas de Zermelo-Fraenkel, Educação Básica

ABSTRACT

Set theory offers a language to describe and analyze groupings of objects, as well as their structures, thus being an indispensable tool in several areas of science. In this study we will present some extensions to school contents and a more formal approach that establishes rules for the existence and formation of sets, avoiding contradictions and paradoxes.

The most up-to-date version of the BNCC, which is a document that establishes the essential knowledge, skills and abilities that students must develop throughout basic education in Brazil, does not mention the branch of set theory. However, it not being explicitly in the BNCC does not mean that it should not be addressed in mathematics teaching, quite the contrary, it is up to teachers to make choices about how to start and deepen the contents throughout the curriculum.

Keywords: Set Theory, Zermelo-Fraenkel Axioms, Basic Education

Lista de ilustrações

Figura 01: Diagrama de Venn com 3 classes - elaborado pelo próprio autor (2023)......12

Lista de abreviaturas e siglas

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
GEEM	Grupo de Estudos do Ensino de Matemática
MMM	Movimento da Matemática Moderna
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
SMSG	School Mathematics Study Group

Sumário

	Introdução	**3**
1	**CONTEXTO NO ENSINO ESCOLAR**	**5**
1.1	**Ensino antes do *Movimento da Matemática Moderna***	**5**
1.2	**Movimento da Matemática Moderna e a teoria dos conjuntos**	**5**
1.2.1	MMM no Brasil	6
1.3	**Base Nacional Comum Curricular**	**8**
2	**A NOÇÃO DE CONJUNTO**	**11**
2.1	**Notações iniciais**	**12**
2.2	**Conjunto universo**	**12**
2.3	**Modos de designação de um conjunto**	**12**
2.3.1	Descrição pela citação dos elementos	13
2.3.2	Descrição por uma propriedade	13
2.3.3	Diagrama de Euler-Venn	14
2.4	**Casos especiais de conjuntos**	**15**
2.4.1	Conjunto vazio	15
2.4.2	Conjunto unitário	15
2.5	**Igualdade de Conjuntos**	**16**
2.6	**Relação de Inclusão**	**16**
2.7	**Conjuntos cujos elementos são conjuntos**	**17**
2.7.1	Família de conjuntos	17
2.7.2	Conjunto das partes de um conjunto	17
2.7.3	Paradoxo de Russell	18
3	**INTERSEÇÃO E UNIÃO DE CONJUNTOS**	**19**
3.1	**Interseção**	**19**
3.1.1	Interseção de uma quantidade finita arbitrária de conjuntos	19
3.1.2	Interseção de uma família de conjuntos	20
3.1.3	Aplicação da interseção de conjuntos	21
3.2	**União**	**22**
3.2.1	União de uma família de conjuntos	23
4	**PRODUTO CARTESIANO E FUNÇÃO**	**25**
4.1	**Par ordenado**	**25**
4.2	**Produto cartesiano de dois conjuntos**	**26**

4.3 **Função** 26
4.4 **Produto cartesiano de uma família de conjuntos** 26

5 **AXIOMAS DE ZERMELO-FRAENKEL** 29
5.1 **Teoria Axiomática dos Conjuntos** 29
5.2 **Axioma 1. Axioma do *Conjunto Vazio*** 30
5.3 **Axioma 2. Axioma da *Extensionalidade* ou da *Extensão*** 30
5.4 **Axioma 3. Axioma da *Separação*** 30
5.5 **Axioma 4. Axioma do *Par*** 31
5.6 **Axioma 5. Axioma da *União*** 32
5.7 **Axioma 6. Axioma do *Conjunto Potência* ou *das Partes*** 32
5.8 **Axioma 7. Axioma do *Infinito* ou da *Infinitude*** 33
5.9 **Axioma 8. Axioma da *Substituição*** 33
5.10 **Axioma 9. Axioma da *Fundamentação* ou *Regularidade*** 33
5.11 **Axioma 10. Axioma da *Escolha*** 34
5.12 **Números naturais** 34

Conclusão 37

Referências Bibliográficas 39

Introdução

Decorridas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), as mudanças realizadas nos ensinos fundamental e médio no Brasil, no final da década de 2010, trouxeram um enfoque para alguns conteúdos e supressões de outros, podendo prejudicar a transição de aprendizagem dos alunos que saem do ensino médio para o ensino de nível superior.

No caso da Teoria dos Conjuntos, não há menção expressa do assunto no Ensino Fundamental Anos Finais e Ensino Médio na BNCC, contudo houve permanência da matéria de "relação de função" e uma singela abordagem nos dois primeiros anos do ensino fundamental, com enfoque na comparação entre quantidades de objetos de dois conjuntos.

A teoria dos conjuntos, como um campo específico de estudo, pode não estar diretamente mencionada na BNCC por alguns motivos. Um possível motivo é que a BNCC busca fornecer diretrizes gerais para o ensino e aprendizado, abrangendo diversas áreas do conhecimento. Assim, ela tende a focar em conceitos e habilidades mais amplos e transversais, como o desenvolvimento de habilidades de pensamento crítico, resolução de problemas e raciocínio lógico, que podem ser aplicadas de maneira interdisciplinar. Outro possível motivo é que a teoria dos conjuntos pode ser abordada de maneira implícita ou construída em diferentes campos do currículo como lógica, combinatória, probabilidade e estatística, entre outros.

Apesar de a teoria dos conjuntos não estar mencionada na BNCC, os conteúdos relacionados a ela podem ser pensados em diferentes momentos e contextos ao longo do currículo, já que a BNCC é apenas um guia geral e o professor e a escola podem incluí-la como um tópico de estudo mais detalhado, caso considerem relevante e adequado para seus alunos.

Sabemos o quão importante é a notação de conjuntos para disciplinas do ensino superior como, por exemplo, Cálculo, Álgebra Linear e Probabilidade e Estatística: conjuntos de soluções e intervalos, conjuntos de funcionais, subespaços, eventos e operações booleanas entre eles. Dessa forma, um dos objetivos deste trabalho é tentar contextualizar a importância da teoria dos conjuntos no currículo da Educação Básica, destacando sua relevância para o desenvolvimento do pensamento lógico e habilidades matemáticas dos estudantes.

Além do mais, sabe-se que a teoria dos conjuntos é um dos tópicos fundamentais da Matemática e estuda as estruturas e relações entre elementos e conjuntos oferecendo uma linguagem precisa e formal para analisar e descrever a natureza e a existência dos conjuntos e suas propriedades. Essa é a teoria axiomática dos conjuntos, que também apresentaremos. Tal teoria organiza, com os axiomas de ZF, os princípios fundamentais que regem os conjuntos e suas operações de forma precisa e sem ambiguidades, permitindo a resolução de paradoxos que surgiram em sistemas anteriores, como o paradoxo de Russell. Com a abordagem axiomática, podemos reduzir noções matemáticas mais complexas, como relações, funções e números, a noções conjuntistas.

Para desenvolver o tema, este trabalho está dividido em cinco capítulos (Capítulo 1: Contexto no Ensino Escolar; Capítulo 2: Noção de Conjunto; Capítulo 3: Intersecção e União de Conjuntos; Capítulo 4: Produto Cartesiano e Função; Capítulo 5: Axiomas de Zermelo-Fraenkel).

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

1 Contexto no ensino escolar

1.1 Ensino antes do *Movimento da Matemática Moderna*

A *Aritmética escolar tradicional* trata da aritmética lecionada nas escolas entre o final do século XIX até meados do século XX.

De acordo com Leme da Silva; Valente (2013, p. 862), até o final do século XIX havia a mera memorização da tabuada, um processo puramente mecânico.

Com a introdução da pedagogia denominada intuitiva (cuja origem data do final do século XIX) surgiu o significado da aprendizagem dos números e da tabuada, que se referiam à quantidade de determinado objeto. Assim, ainda segundo os mesmos autores (p. 862-864 e nota de rodapé 6), podemos destacar a importância da construção de ideias como o ensino ativo e, por sua vez, a expressão *escola ativa*, surgidos nas últimas décadas do século XIX e disseminados a partir de 1922, no cenário da Escola Nova, onde se destacou o papel central do aluno, que passou a assumir um papel ativo, promovendo a descoberta de novos conhecimentos e, dessa forma, evidenciou-se novas preocupações com o processo educativo, visando romper a pedagogia considerada tradicional até então.

Anos depois, ainda segundo Leme da Silva; Valente (2013, p. 865), no final da década de 1950, apareceu mais um passo na evolução do ensino da Matemática: o Movimento da Matemática Moderna.

1.2 Movimento da Matemática Moderna e a teoria dos conjuntos

No período compreendido entre os anos de 1945 e 1989, as nações capitalistas, lideradas pelos Estados Unidos da América (EUA), e as nações socialistas, encabeçadas pela União das Repúblicas Socialistas Soviéticas (URSS), disputavam ideologia, o poder bélico (de armas) e o potencial tecnológico, incluindo a tecnologia aero-espacial.

De acordo com os autores Alves; Silveira (2017, p. 10), estudos apontam que o lançamento do satélite Sputnik I, pelos soviéticos, em 1957, possivelmente contribuiu para que houvesse uma mudança no ensino das ciências exatas. Uma das vertentes com que pedagogos, matemáticos e outros especialistas em educação se preocuparam, nesse momento, foi a matemática.

Diante do avanço soviético em relação à corrida espacial, houve preocupação dos países capitalistas, principalmente aqueles da Europa Ocidental e os EUA, para atualizar os conceitos e aprimorar o ensino da Matemática, para então difundir uma *Matemática*

Moderna nos países em desenvolvimento. Conjectura-se, portanto, que essa sequência de acontecimentos tenha dado início ao *Movimento da Matemática Moderna (MMM)*, apesar de outros autores defenderem outras suposições.

Conforme Oliveira (2018, p. 1), a inspiração para o referido movimento foi o grupo de matemáticos europeus e americanos cujo pseudônimo era *Nicolas Bourbaki*. Segundo Borges (2011, p. 45), tal grupo foi formado na França e, de acordo com Santander (2009, p. 41), desejavam abordar toda a Matemática em uma única obra chamada *Élements de mathématique*.

Nicolas Bourbaki, ao enfatizar a importância da teoria dos conjuntos (até então, uma disciplina de nível superior), tornou-se uma das principais bases do Movimento da Matemática Moderna, originada na década de 1950.

Sob influência de Bourbaki, "o Movimento da Matemática Moderna (MMM) buscava aproximar a Matemática ensinada na escola básica com a Matemática produzida pelos pesquisadores da área", conforme Leme da Silva (2006, p. 51).

1.2.1 MMM no Brasil

No Brasil, houve tentativas de reformas no ensino de Matemática antecedentes ao Movimento da Matemática Moderna, conforme menciona Macedo (2008, p. 36), nas décadas de 1930 e 1940.

Consoante Macedo (2008, p. 36), em 1931, houve a Reforma Francisco Campos e, em 1942, a Reforma Gustavo Capanema, que ajudaram a integrar três áreas distintas da Matemática no ensino escolar: geometria, álgebra e aritmética.

No final da década de 1950, segundo o mesmo autor, o Movimento da Matemática Moderna, além das ideias de Bourbaki, utilizou a fonte da Teoria Psicogenética de Piaget — autor que estudou as estruturas lógico-matemáticas no processo de aprendizagem escolar.

Em 1958, consoante Silva (2013, pp. 99 a 102), surgiu um grupo de estudos nos EUA formado por professores de matemática (inclusive professores brasileiros: Lafayette de Moraes e Osvaldo Sangiorgi), matemáticos, psicólogos e educadores: o *School Mathematics Study Group* (SMSG), vinculado à Universidade de Yale, coordenado pelo professor Edward G. Bagle, com o objetivo de aproximar o ensino escolar ao ensino superior por meio de uma reestruturação do conteúdo de ensino de matemática. De acordo com Silva (2013, p. 103), o professor Osvaldo Sangiorgi retornou em 1961 ao Brasil para criar o *Grupo de Estudos do Ensino de Matemática* (GEEM), similar ao SMSG. Além do referido grupo, houve outros criados entre as décadas de 1960 e 1970.

Com os grupos criados, foi possível aproximar o ensino superior (com a posterior criação e desenvolvimento de centros de pesquisas) do ensino ginasial (que atualmente, seria de meados ao fim do Ensino Fundamental) com palestras e materiais didáticos inspirados no *Movimento da Matemática Moderna*, pois houve foco para diminuir as insuficiências no ensino de matemática, reformulação da disciplina no currículo e do método de ensino. De acordo com Arruda (2008, p.2), a Matemática Moderna, foi implementada nas escolas do Brasil entre as décadas de 1960 e 1970 e, em algumas escolas, de maneira tardia, na década de 1980.

De acordo Borges (2011, p. 129-130), no entanto, a partir de 1962, começaram a surgir manifestações contrárias ao Movimento da Matemática Moderna, inicialmente por parte de matemáticos canadenses e norte-americanos. Em 1973, Morris Kline publicou um livro que expôs publicamente as razões para o MMM não funcionar. No Brasil, esse livro foi publicado em 1976, em um período em que o MMM ainda mantinha uma presença significativa no ensino de matemática brasileiro, apesar das críticas de Elon Lages Lima (Borges, 2011, p. 132).

Uma das características do MMM é a valorização do simbolismo, do rigor, da lógica matemática e da Teoria dos Conjuntos. Segundo Borges (2011, p. 143), a presença da Teoria dos Conjuntos desempenha o papel de "elemento unificador no tratamento dos conteúdos matemáticos", "havendo preocupação com a abstração dos alunos desde as primeiras séries".

Nesse ponto, podemos entender a crítica feita nos PCN. De acordo com Vicente; Pilati (2012, p. 6), em 1997, em colaboração com pesquisadores de diversas universidades brasileiras, o Ministério da Educação lançou os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que se tornaria um novo orientador para as escolas e professores.

Consoante Brasil (1997), os Parâmetros Curriculares Nacionais "constituem um referencial de qualidade para a educação no Ensino Fundamental em todo o País". Ademais, segundo a mesma fonte (Brasil, 1997), a função dos PCN é "orientar e garantir a coerência dos investimentos no sistema educacional, socializando discussões, pesquisas e recomendações, subsidiando a participação de técnicos e professores brasileiros, principalmente daqueles que se encontram mais isolados (...)". Assim, os PCN são, além de um referencial de qualidade do Ensino Fundamental, também um parâmetro para os investimentos no sistema de ensino.

Conforme a fonte Brasil (1997, v.3, p. 20), os PCN apresentam uma justificativa do porquê de excluir o tópico Teoria dos Conjuntos da Educação Básica, dizendo que "ao aproximar a Matemática escolar da Matemática pura, centrando o ensino nas estruturas e fazendo uso de uma linguagem unificadora, a reforma deixou de considerar um ponto básico que viria se tornar seu maior problema: o que se propunha estava fora do alcance dos alunos, em especial daqueles das séries iniciais do ensino fundamental. O ensino passou a ter preocupações excessivas com abstrações internas à própria Matemática, mais voltadas à teoria do que à prática. A linguagem da teoria dos conjuntos, por exemplo, foi introduzida com tal ênfase que a aprendizagem de símbolos e de uma terminologia interminável comprometia o ensino do cálculo, da geometria e das medidas".

Na minha concepção, o foco excessivo em abstrações teóricas, como a Teoria dos Conjuntos (característica do MMM), realmente, pode ser um pouco inacessível e de certa forma prejudicar o desenvolvimento matemático de estudantes, principalmente, das séries iniciais e dificultar aplicações práticas de conhecimentos matemáticos como descrito nos PCN. No entanto, se houver uma revisão mais cuidadosa da metodologia de ensino e uma adaptação adequada às capacidades dos alunos conforme suas séries, é possível abordar temas mais específicos e abstratos ajudando a desenvolver uma base conceitual mais sólida e rigorosa dos estudantes, preparando-os para desafios mais aprofundados.

1.3 Base Nacional Comum Curricular

O Art. 214 da Constituição Federal de 1988 estabelece o plano nacional de educação, de duração decenal (período de dez anos), que tem como objetivo "articular o sistema nacional de educação em regime de colaboração e definir diretrizes, objetivos, metas e estratégias de implementação para assegurar a manutenção e desenvolvimento do ensino em seus diversos níveis, etapas e modalidades por meio de ações integradas dos poderes públicos das diferentes esferas federativas" (União, Estados, Distrito Federal e Municípios).

No ano de 2014, foi promulgada a Lei nº 13.005/2014, que trata do Plano Nacional de Educação (PNE), o qual inclui vinte metas para melhorar a educação brasileira (ensinos fundamental e médio).

Em meados da década de 2010, surgiu a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que tem como origem o PNE. A BNCC, norteia o ensino escolar que abrange o ensino fundamental (do primeiro ao nono ano) e o ensino médio (do primeiro ao terceiro ano), conforme Brasil (2022).

De acordo com Brasil (2018), a BNCC "é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE)".

Ainda segundo Brasil (2018), a BNCC também "aplica-se exclusivamente à educação escolar, tal como a define o § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996), e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN)".

Além disso, consoante Brasil (2018), a BNCC “é uma referência para formação de currículos escolares nos sistemas de ensino de Estados, Distrito Federal e Municípios e uma referência para política de formação de professores e desenvolvimento da educação”.

A BNCC teve três versões.

Na primeira versão, de setembro de 2015, de acordo com Brasil (2015, p. 139), havia a preocupação de o estudante “compreender função como um tipo de relação de dependência entre duas variáveis, que pode ser representada graficamente” (item “MTMT9FOA020”).

Na segunda versão, de maio de 2016, conforme Brasil (2016), um dos objetivos de lecionar “álgebra e funções” era aquele de o discente “compreender função como uma relação de dependência entre duas variáveis, as ideias de domínio, contradomínio e imagem, e suas representações algébricas e gráficas, e utilizá-las para analisar, interpretar e resolver problemas em contextos diversos, inclusive fenômenos naturais, sociais e de outras áreas” (Item “EM11MT06”).

Entretanto, na terceira versão da Base Nacional Comum Curricular, de 2018, conforme verificado em Brasil (2018), houve a supressão do item, indicando que a teoria dos conjuntos, enfatizada no Movimento da Matemática Moderna, simplesmente foi excluída dos conteúdos trabalhados ao longo do Ensino Fundamental Anos Finais e Ensino Médio, sendo abordada, de forma branda, apenas nas séries iniciais do Ensino Fundamental, como comparação entre quantidades de objetos entre conjuntos, de acordo com as habilidades EF01MA03 e EF02MA03.

Para este trabalho, cabe ressaltar que, apesar de haver menção de um assunto relacionado à teoria dos conjuntos (relação entre duas variáveis) nas duas primeiras versões Base Nacional Comum Curricular, o tema “teoria dos conjuntos” não foi mencionado sequer uma vez no documento. Contudo, devido à importância para o aprendizado de matérias correlacionadas do ensino básico e do ensino superior, o enfoque deste trabalho é teoria dos conjuntos, que será desenvolvida no decorrer da dissertação.

2 A noção de conjunto

Para o ensino da teoria dos conjuntos, é fundamental que o(a) discente tenha conhecimento dos conceitos primitivos de conjuntos, elementos e relação de pertinência como algo abstrato. Normalmente, esses conceitos são trabalhados na primeira série do Ensino Médio como coleção bem definida de objetos e esses objetos podem ser números, letras, símbolos, ou até mesmo outros conjuntos. Essas coleções são formadas por objetos distintos que não se preocupam com a ordem ou com a repetição.

Na visão de Cantor, como menciona Novaes (2018, p. 2), *conjunto* se refere a uma "coleção de objetos, distinguíveis, definidos, de nossa intuição ou nosso intelecto, a ser concebida como um todo (uma única entidade)".

A princípio, Novaes (2018, p. 3 e 4) relaciona expressões ou palavras para explicar a definição de maneira clara.

No caso de "nosso intelecto" ou "nossa intuição", sugere-se a ideia de liberdade de escolha, de delimitação da característica do objeto. Os elementos que compõem o conjunto podem ser estritamente matemáticos (exemplos: conjunto de números, conjunto de números primos) ou ter características em comum (exemplo: conjunto de mamíferos).

Em relação à noção de "elementos distinguíveis", há a característica de eles serem comparáveis entre si, se são diferentes ou iguais entre si.

No tocante à ideia de os elementos serem "definidos", há a identificação de o objeto ser ou não pertencente ao conjunto.

É válido ressaltar que na teoria acadêmica, conjuntos e elementos não são distinguíveis, pois elemento pode ser conjunto e conjunto pode ser elemento. Além dos objetos, a relação de pertinência é a única outra noção primitiva (ou ente primitivo).

Assim como na teoria de conjuntos, na geometria também são estabelecidos entes primitivos que formarão a base para a construção e estudos das figuras geométricas. Os conceitos primitivos na geometria são pontos, retas, planos, as relações de incidência (entre pontos e retas, entre pontos e planos, entre retas e planos), a noção que expressa quando um ponto está entre dois outros pontos em uma reta e as relações de congruência (entre segmentos de reta, entre ângulos). As aplicações em diferentes contextos podem ser reduzidas a essas noções.

Para este capítulo, adotaremos as mesmas estruturas de Novaes (2018) e Iezzi; Murakami (2013) como referência e assumiremos os conceitos e exemplos dados por ele.

2.1 Notações iniciais

Para descrever conjunto, elemento e relação de pertinência formalizando uma linguagem precisa e concisa, utilizam-se as seguintes notações:

Conjunto e *elemento*, por padrão, são representados por letra maiúscula $(A, B, C...)$ e por letra minúscula $(a, b, c...)$, respectivamente.

Relação de pertinência:

É a relação existente entre elemento e conjunto. Por padrão, é representada pelo símbolo $\in$.

Exemplo: $b \in A$ ou $A \ni b$. Em outras palavras, indica que o elemento b pertence ao conjunto A.

É válido ressaltar que os estudantes não devem cristalizar o hábito das letras minúsculas ou maiúsculas, pois conjuntos podem ser elementos de outros conjuntos.

2.2 Conjunto universo

Situação em que todos os elementos de determinado interesse dentro de um contexto pertencem a um conjunto denominado *conjunto universo* ou *conjunto fundamental.*

Exemplificando, na Teoria Estatística, o conjunto universo U é representado pela população (todos os elementos de determinada característica dentro de um contexto). Ex.: todos os livros de matemática da biblioteca.

Na Educação Básica, a noção de conjunto universo é apresentada de forma mais consistente a partir do 9º Ano do Ensino Fundamental II, principalmente nas resoluções de equações e inequações polinomiais do 1º e 2º grau, e também, em equações irracionais. Nestes tópicos, os estudantes devem avaliar qual valor/quais valores satisfaz/satisfazem a equação ou inequação, a partir do conjunto universo dado, apresentando assim, o conjunto solução ou conjunto verdade.

Um problema de inconsistência seria considerar um conjunto que contém todos os conjuntos possíveis, incluindo o próprio conjunto universo. Isso levaria a uma contradição, conhecida como paradoxo de Russell, cujo tema será aprofundado na Seção 2.7.3.

2.3 Modos de designação de um conjunto

Segundo Novaes (2018, p. 11), é possível "designar um dado conjunto de vários modos diferentes". Neste trabalho, apresentaremos duas formas de representar conjuntos: definição por enumeração e propriedade característica dos elementos.

2.3.1 Descrição pela citação dos elementos

Na definição por enumeração, citamos explicitamente todos os elementos de um conjunto entre chaves. Este modo de designação é muito utilizado na educação básica, principalmente nas apresentações de conjuntos numéricos, como o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros, e também, de conjunto solução ou conjunto verdade.

Exemplos:

1º) conjunto A tal que: $A = \{2, 4, 6\}$

2º) conjunto B tal que: $B = \{-9, 5, \pi\}$

Se o conjunto for infinito, ou finito com muitos elementos, basta colocar reticências para omitir os elementos do conjunto.

Exemplos:

1º) conjunto dos números múltiplos de cinco positivos:

$$\{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ...\}$$

2º) conjunto dos números pares não negativos:

$$\{0, 2, 4, 6, 8, 10, ...\}$$

3º)

$$\{0, 2, 4, 6, 8, 10, ..., 99998\}$$

2.3.2 Descrição por uma propriedade

Neste modo de designação de um conjunto especificamos uma condição ou uma propriedade em que todos elementos do conjunto devem satisfazer. Se A for um conjunto, x seu elemento genérico e P uma propriedade que o caracteriza, então denotamos:

$A = \{x|x \text{ tem a propriedade } P\}$

ou

$A = \{x|P(x)\}$

Exemplos:

1º) $A = \{x|x \text{ é número primo positivo menor que } 13\}$.

2º) $B = \{x|x \text{ é natural e } 2 \leq x \leq 120\}$.

Note que, por enumeração, os exemplos acima são representados da seguinte forma: $A = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5, ..., 120\}$.

2.3.3 Diagrama de Euler-Venn

De acordo com Pinheiro (2015, p. 72), o princípio dos diagramas de Venn consiste em, graficamente, traçar áreas delimitadas que representam conjuntos, uns em relação aos outros, de maneira que todas as possíveis relações lógicas entre os conjuntos possam ser indicadas no mesmo diagrama.

John Venn (1834-1923) utilizou linhas fechadas e não entrelaçadas, como linhas fronteiras de cada região, como sugere Iezzi; Murakami (2013, p. 19) para representar, em seu interior, os elementos de um ou mais conjuntos. Segundo Novaes (2018):

> Venn introduziu os diagramas em um trabalho de Lógica Formal publicado em julho de 1880 na *Philosophical Magazine and Journal of Science* intitulado "Da representação mecânica e diagramática de proposições e raciocínios". [...] O próprio Venn não se referia aos diagramas como sendo da sua autoria, mas sim como "círculos eulerianos", referindo-se aos diagramas criados pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) cerca de um século antes (motivo pelo qual, provavelmente, alguns autores referem-se aos diagramas de Venn como diagramas de Euler-Venn). Venn aperfeiçoou o uso desses diagramas, bem como os estendeu, fornecendo-lhes uma interpretação dotada de mais recursos (Novaes, 2018, p.28).

Mais precisamente na primeira série do Ensino Médio, utiliza-se o diagrama de Venn como uma ferramenta que contribui na organização de informações e resolução de problemas de conjuntos. Além disso, esse diagrama permite aos estudantes visualizar de uma forma mais clara como os conjuntos se sobrepõem, se intersectam ou são mutuamente exclusivos, facilitando a compreensão de operações de conjuntos, como união, interseção e diferença.

A figura abaixo é um exemplo de um diagrama com 3 conjuntos dados por $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{d, e, f, g\}$ e $C = \{c, d, e, h\}$:

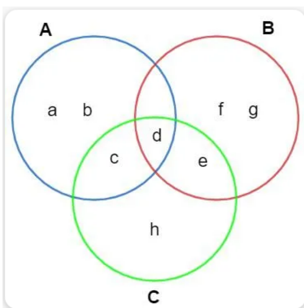

Figura 1: Diagrama de Venn com 3 conjuntos - elaborado pelo próprio autor (2023)

2.4 Casos especiais de conjuntos

2.4.1 Conjunto vazio

Um conjunto descrito por uma propriedade sempre falsa é vazio, cujo símbolo é $\emptyset$.

Exemplos:

1) $A = \{x|x$ é número natural menor que 0 $\}$. Como não há números naturais menores que zero, então $A = \emptyset$.

2) $B = \{x|x$ é inteiro e $5 < x < 6\}$. Perceba que não existem números inteiros maiores que cinco e menores que seis, portanto $B = \emptyset$.

Normalmente, o primeiro contato dos estudantes com o conjunto vazio e sua simbologia ocorre no 9º ano do Ensino Fundamental II ao estudarem resoluções de equações polinomiais do segundo grau. Quando o discriminante resulta em um número negativo, não há solução no conjunto dos números reais, que geralmente, é o conjunto universo adotado nos anos finais do ensino fundamental. Assim, o conjunto verdade ou conjunto solução resulta no conjunto vazio.

2.4.2 Conjunto unitário

Um conjunto com exatamente um elemento denomina-se *conjunto unitário*.

Exemplos:

1) Seja A o conjunto dos múltiplos de 4, inteiros não negativos e menores que 4, então $A = \{0\}$ é um conjunto unitário.

2) $B = \{x|x$ é natural e $x! = 120\}$. Note que o único número natural que satisfaz a condição é o cinco, portanto $B = \{5\}$ é um conjunto unitário.

Atenção neste outro exemplo, que normalmente causa confusões ou estranhamento aos estudantes:

3) conjuntos A, B e C tais que $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$ e $C = \{\{\{1\}\}\}$. Note que $A \neq B \neq C \neq A$ e todos são conjuntos unitários. Uma analogia para compreender este exemplo é a resposta da seguinte questão “Uma laranja é o mesmo objeto que uma sacola com uma laranja?”.

2.5 Igualdade de Conjuntos

Dois conjuntos A e B são iguais quando todo elemento que pertence a A também pertence a B e, reciprocamente, todo elemento que pertence a B também pertence a A. Simbolicamente:

$$A = B \iff (\forall x)(x \in A \iff x \in B)$$

Observação: i) o símbolo $\iff$ significa a equivalência de proposições e se lê da seguinte maneira "$A = B$ se, e somente se, $(\forall x)(x \in A \iff x \in B)$". Da mesma forma, "$x \in A$ se, e somente se, $x \in B$".

ii) o símbolo $\forall$ representa o quantificador universal "para todo". Assim, $\forall x$ significa "para todo objeto x".

Assim, conjuntos são definidos ou identificados tão somente pelos elementos que contêm (e isso permite a notação de chaves), ou seja, a relação de igualdade baseia-se no conceito primitivo de pertinência.

Na definição de igualdade entre conjuntos, não importa a ordem nem a repetição de elementos, portanto:

$$\{0, 5, \emptyset\} = \{5, \emptyset, 0\}$$
$$\{x, 2, y, 7\} = \{2, x, x, 7, 2, y, 7, 7, y, y, x, x, 2, 2\}$$

2.6 Relação de Inclusão

O conjunto A é um *subconjunto* de um conjunto B se todo elemento de A também for elemento de B. Também pode-se dizer que A *está contido* em B ou, ainda, que A é *parte* do conjunto B.

Simbolicamente:

$$A \subseteq B \iff (\forall x)(x \in A \implies x \in B)$$

Observação: i) o símbolo $\subset$ é a notação mais utilizada na educação básica. Neste trabalho utilizaremos a notação dos pesquisadores da área, cujo símbolo é $\subseteq$.

ii) o símbolo $\implies$ significa a implicação lógica e se lê da seguinte maneira "se $x \in A$, então $x \in B$".

Na educação básica, geralmente os alunos aprendem que "pertence" só se usa entre elementos e conjuntos, e "contido" entre conjuntos, por isso é importante destacar que é preciso cuidado com a terminologia “está contido” pois pode ser usado tanto com inclusão como com pertinência, que são conceitos diferentes. Por exemplo:

Seja o conjunto $A = \{\emptyset, 1, \{2\}, \{3, 4\}\}$, então as sentenças $\emptyset \in A$, $1 \in A$, $\{1\} \subseteq A$, $\{2\} \in A$ e $\emptyset \subseteq A$ são verdadeiras, mas $\{1\} \in A$ e $2 \in A$ são falsas.

Quaisquer que sejam os conjuntos A e B, temos:

$$\emptyset \subseteq A \text{ e } A = B \Longleftrightarrow (A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A)$$

Para mostrar que $\emptyset \subseteq A$, suponha $\emptyset \nsubseteq A$. Pela definição, existe um $x \in \emptyset$ que não pertence a A. Porém, $\emptyset$ não tem elementos, contradição. A equivalência segue da definição de igualdade na seção anterior.

2.7 Conjuntos cujos elementos são conjuntos

2.7.1 Família de conjuntos

Consoante Novaes (2018, p. 111), em Geometria, ao se mencionar “família de curvas” ou “família de retas”, há a noção de conjuntos de curvas e de retas. Por sua vez, podemos pensar em retas e curvas como conjuntos de pontos.

Em geral, uma “família de conjuntos” é um conjunto cujos elementos são, todos eles, conjuntos também. Por exemplo,

$$F = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ com } a \leq b\}.$$

Note que:

$$1 \in [0, 3] \text{ e } [0, 3] \in F, \text{ mas } 1 \notin F.$$

2.7.2 Conjunto das partes de um conjunto

O *conjunto das partes de um conjunto* A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto que possui todos os subconjuntos de A. Então:

$$\forall x (x \in \mathcal{P}(A) \iff x \subseteq A).$$

Exemplo:

Seja $A = \{\pi, e\}$, então os subconjuntos de A são $\emptyset$, $\{\pi\}$, $\{e\}$ e $\{\pi, e\}$. Logo, o conjunto das partes de A é $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{\pi\}, \{e\}, \{\pi, e\}\}$.

Observe que o conjunto das partes de A é um exemplo de família de conjuntos, pois todos os seus elementos são conjuntos. Note também que, se o conjunto A possui n elementos, então o conjunto das partes de A possui 2^n elementos. Uma maneira de conjecturar que, se A tem n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos, é via análise combinatória, geralmente trabalhada na segunda série do Ensino Médio. Assim, para cada elemento de A devemos escolher se ele entra ou não em um dado subconjunto e portanto há duas escolhas para cada elemento. Logo, pelo princípio fundamental da contagem, o número de subconjuntos de um conjunto de n elementos é 2^n.

2.7.3 Paradoxo de Russell

Conforme Ávila (2000, pp. 8 e 9), no contexto de conjunto como elemento de outro conjunto, podemos ver a explicação sobre o chamado *Paradoxo de Russell*.

Chamamos M o conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos.

Simbolicamente:

$$M = \{x | x \notin x\}.$$

Neste caso, não se pode afirmar que $M \in M$, pois M seria um x tal que $x \notin x$, pela definição de M, ou seja, $M \notin M$.

Da mesma forma, é incorreto afirmar que $M \notin M$, porque M seria um x tal que $x \notin x$, então, pela definição de M, $x \in M$, isto é, $M \in M$.

Resumindo:

$$M \in M \Longleftrightarrow M \notin M.$$

No decorrer deste trabalho, veremos que o paradoxo de Bertrand Russell pode ser evitado através da restrição imposta pelo axioma da separação. Tal axioma nos permite construir conjuntos com critérios mais específicos e bem definidos, selecionando apenas os elementos de um conjunto previamente identificado que satisfaçam uma determinada propriedade.

3 Interseção e União de Conjuntos

Neste capítulo, novamente, seguiremos as estruturas apresentadas por Novaes (2018) e Iezzi; Murakami (2013) como base de referência. Adotaremos os conceitos e exemplos apresentados por esses autores.

3.1 Interseção

A interseção de dois conjuntos A e B é o conjunto que possui todos os elementos que são comuns a ambos os conjuntos.

Simbolicamente:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Se a interseção for vazia, $A \cap B = \emptyset$, dizemos que, A e B são *conjuntos disjuntos.*

3.1.1 Interseção de uma quantidade finita arbitrária de conjuntos

Na Educação Básica, geralmente se utiliza a operação de interseção com dois ou três conjuntos. De acordo com Novaes (2018, p. 139), generalizando para n conjuntos, temos que a interseção de n $(n > 2)$ conjuntos A_1,A_2,A_3,..., A_n é o conjunto cujos elementos pertencem simultaneamente a todos esses n conjuntos.

Simbolicamente:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n \text{ ou, ainda, } \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

Observe que a notação $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ é utilizada de forma similar ao somatório que é ensinado no ensino básico:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n.$$

A seguir, apresentaremos um exemplo extraído de Novaes (2018, p. 139):

Dados os n conjuntos: $A_1 = \{1, 2, 3...\}$, $A_2 = \{2, 3, 4...\}$ $A_3 = \{3, 4, 5...\}$, ..., $A_n = \{n, n + 1, n + 2...\}$, temos:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_n.$$

3.1.2 Interseção de uma família de conjuntos

Dado um conjunto não vazio de índices I e dada uma família de conjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$, a interseção dessa família é o conjunto cujos elementos pertencem a A_i, para todo $i \in I$.

Simbolicamente, de acordo com Novaes (2018, p. 142):

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x|x \in A_i,\, \forall i \in I\}.$$

Observe que se escreve $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ quando $I = \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ e essa notação é utilizada de forma similar a séries que são ensinadas no ensino superior.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

Exemplos:

Aproveitando os conjuntos do exemplo acima:

$$A_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}, \text{ com } \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_n.$$

Tratando da interseção infinita, temos

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset.$$

Observe que se pegarmos qualquer número natural k, sempre haverá um n tal que $k < n$. Portanto, k não pertence a A_n, e consequentemente, k não pertence à interseção de todos os conjuntos. Logo $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

Dados os conjuntos B_n tais que,

$$B_n = \left]-\tfrac{1}{n}, 1 + \tfrac{1}{n}\right[,$$

então

$$\bigcap_{i=1}^{n} B_i = B_n.$$

Temos

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = [0, 1].$$

Observe que por um lado, se $x \in [0,1]$ então $-\frac{1}{n} < 0 \leq x \leq 1 < 1 + \frac{1}{n}$. Por outro, a sequência $-\frac{1}{n}$ é crescente com supremo 0, pois para todo n, temos $-\frac{1}{n} < 0$ ($\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0$) e a sequência $1 + \frac{1}{n}$ é decrescente com ínfimo 1, pois para todo n, temos $1 + \frac{1}{n} > 1$ ($\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$). Para todo $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, considerando as sequências $\left(-\frac{1}{n}\right)$, (x) sequência constante de valor x e $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, utilizando o Teorema do Confronto, temos $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) \leq \lim_{n\to\infty}(x) \leq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ e, portanto, $0 \leq x \leq 1$. Logo, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i = [0,1]$.

Agora, vamos considerar $\mathbb{F}$ uma família qualquer de conjuntos, não vazia.

A interseção da coleção $\mathbb{F}$ é o conjunto de todos os elementos x que têm a propriedade:

$$x \in X, \forall\ X \in \mathbb{F}.$$

Notação, segundo Novaes (2018, p. 145):

$$\bigcap \mathbb{F} = \bigcap_{X \in \mathbb{F}} X.$$

Simbolicamente:

$$\bigcap \mathbb{F} = \{x | x \in X, \forall\ X \in \mathbb{F}\}$$

Para ver por que $\mathbb{F} \neq \emptyset$ (e $I \neq \emptyset$ no início desta subseção), vamos calcular $\bigcap \emptyset$. Pela definição:

$$x \in \bigcap \emptyset \iff x \in X, \forall\ X \in \emptyset$$

Porém, todo e qualquer conjunto x tem a propriedade $x \in X, \forall\ X \in \emptyset$, porque, pela interpretação clássica, não existe $X \in \emptyset$ para o qual não se verifique $x \in X$. Então $\bigcap \emptyset$ seria o "conjunto de todos os conjuntos", mas demonstraremos que não existe tal conjunto no Teorema 5.4.2.

3.1.3 Aplicação da interseção de conjuntos

O conjunto X é denominado *o menor conjunto com a propriedade* P se satisfaz as seguntes condições:

I) X tem a propriedade P;

II) se Y é qualquer conjunto que também tem a propriedade P, então $X \subseteq Y$.

Então,

$$X = \bigcap \{Z \mid Z \text{ tem a propriedade } P\}.$$

Exemplo: O conjunto I dos números naturais ímpares é o menor subconjunto de $\mathbb{N}$ que satisfaz: $1 \in I \quad \text{e} \quad \forall n(n \in I \Rightarrow n+2 \in I)$. Observe que outros conjuntos têm essa propriedade:

$$\mathbb{N}\ ;\ I \cup \{8, 10, 12, 14, \ldots\}.$$

3.2 União

A *união*, também denominado de *reunião* de dois conjuntos A e B, é o conjunto que possui todos os elementos que pertencem a pelo menos um dos dois conjuntos.

Notação:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

A *união* (ou *reunião*) de n $(n \geq 2)$ conjuntos $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ é o conjunto cujos elementos pertencem a, pelo menos, um desses n conjuntos.

Notação:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n \quad (\text{ou} \bigcup_{i=1}^{n} A_i).$$

Exemplo: Se

$$A_1 = [0,1], A_2 = [0,2], A_3 = [0,3], ..., A_n = [0,n],$$

então

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = [0,n],$$

ou seja,

$$\bigcup_{i=1}^{n} [0,i] = [0,n]$$

3.2.1 União de uma família de conjuntos

Dado um conjunto de índices I, a *união* da família de conjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$ é o conjunto cujos elementos pertencem a A_i, para algum $i \in I$.

Simbolicamente:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x|x \in A_i, \text{para algum } i \in I\}.$$

Sendo $\mathbb{F}$ uma família de conjuntos, a união de $\mathbb{F}$ é o conjunto de todos os elementos x que têm a propriedade:

$$\text{existe } A \in \mathbb{F} \text{ tal que } x \in A.$$

Simbolicamente:

$$\bigcup \mathbb{F} = \bigcup_{A\in\mathbb{F}} A = \{x|\exists A \in \mathbb{F} \text{ tal que } x \in A\}.$$

Exemplo:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} [0, i] = \mathbb{R}_+.$$

Cabe salientar que tanto a união quanto a interseção de famílias de conjuntos são abordadas no ensino básico, sem uma definição formal da expressão "família de conjuntos". Normalmente, essa ideia é introduzida por meio de exemplos simples, aplicando as operações de união e interseção em exercícios básicos e entre dois conjuntos ou em número finito de conjuntos.

4 Produto cartesiano e função

Para construir produtos cartesianos de dois conjuntos, precisaremos da noção de par ordenado. Os produtos cartesianos de famílias de conjuntos serão definidos por meio de funções. Deste modo, utilizaremos Novaes (2018) como modelo e referência.

4.1 Par ordenado

Com base no que afirma Novaes (2018, p.264), um *par ordenado* (a, b) é um conjunto que, consite em dois objetos a e b, dispostos em uma ordem específica. Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se e somente se $a = c$ e $b = d$.

Simbolicamente:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ e } \ b = d.$$

Em vez de estipular a noção de par ordenado como um novo conceito primitivo, podemos defini-la a partir do que já temos.

Segundo Fajardo (2017, p.41), na definição de pares ordenados de Kazimierz Kuratowski, temos:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Com a definição de Kuratowski, é possível demonstrar formalmente e precisamente a igualdade entre pares ordenados, conforme Fajardo (2017, p. 42):

Demonstração. ($\Longleftarrow$) Se $a = c$ e $b = d$, então $\{a\} = \{c\}$ e $\{a, b\} = \{c, d\}$. Assim, temos $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$, logo $(a, b) = (c, d)$.

($\Longrightarrow$) Supondo $(a, b) = (c, d)$, então $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Assim, $\{a\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$ e $\{a, b\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Se $\{a\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$, então $\{a\} = \{c\}$ ou $\{a\} = \{c, d\}$, e portanto, $a = c$. Agora, se $\{a, b\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$, então $\{a, b\} = \{c\}$ ou $\{a, b\} = \{c, d\}$. Supondo que $a = b$, temos $\{b\} = \{c, d\}$, e portanto, $b = d$. Agora, supondo que $a \neq b$, como $\{a, b\} = \{c\}$ ou $\{a, b\} = \{c, d\}$, pelo axioma da extensionalidade, $b = c$ ou $b = d$, porém supomos que $a \neq b$ e já provamos que $a = c$, então $b = d$. $\square$

Nesta seção, apresentamos uma definição formal de par ordenado envolvendo teoria dos conjuntos. No ensino fundamental, em torno do sexto ou sétimo ano, pares ordenados são apresentados como coordenadas de um ponto no plano cartesiano. O ensino de pares ordenados começa com uma compreensão básica dos eixos coordenados (eixo x e eixo y) e os estudantes aprendem a localizar pontos em um gráfico usando coordenadas (x, y), onde x representa a posição horizontal e y representa a posição vertical. Posteriormente, utiliza-se os pares ordenados no ensino de funções, que neste trabalho abordaremos como conjuntos.

4.2 Produto cartesiano de dois conjuntos

O *produto cartesiano* de A e B é um conjunto que consiste em todos os pares ordenados (a, b), onde a pertence ao conjunto A e b pertence ao conjunto B.

Sendo assim:

$A \times B = \{(a, b)|a \in A \text{ e } b \in B\}$.

4.3 Função

Apresentaremos o conceito de função, de acordo com Fajardo (2017, pp. 42 e 43).

Definição 4.3.1. Dizemos que R é uma **relação** (ou relação binária) de A em B se é um subconjunto de $A \times B$. Quando R é uma relação, utilizamos a notação xRy como abreviatura de $(x, y) \in R$.

Definição 4.3.2. Uma relação F de A em B é uma **função** de A em B se para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in F$.

Note que, se pares ordenados são conjuntos, então funções são de fato representadas como conjuntos. No ensino fundamental, anos finais, os estudantes aprendem as relações entre variáveis, por exemplo, como uma variável pode depender da outra em situações do cotidiano. Ademais, no ensino médio, uma função de A em B é definida por uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$, em que A e B são conjuntos não vazios. Uma maneira de abstrair que funções são conjuntos seria através da interpretação de tabelas e gráficos que representam relações funcionais. Observe que a Definição 4.3.2 coincide com a de gráfico de função, já que gráfico de f no plano Oxy (delimitado pelo retângulo $A \times B$) é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y), para $x \in A$, $y \in B$ e $y = f(x)$.

4.4 Produto cartesiano de uma família de conjuntos

Dado um conjunto de índices I e dado um conjunto A_i para cada $i \in I$, o *produto cartesiano da família de conjuntos* $\{A_i\}_{i \in I}$ é o conjunto das sequências $(a_i)_{i \in I}$. Por sua vez, essas sequências são funções $a : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ tais que $\forall i \in I, a(i) \in A_i$, e escrevemos $a_i = a(i)$.

Notação, consoante Novaes (2018, p. 281):

$$\prod_{i \in I} A_i.$$

Note que, assim, não precisamos tomar sequências (bem como pares ordenados) como um ente primitivo.

5 Axiomas de Zermelo-Fraenkel

A "Teoria Ingênua dos Conjuntos", como é conhecida atualmente, é a versão inicial e intuitiva da Teoria dos Conjuntos. Ela foi desenvolvida na segunda metade do século XIX e início do século XX, segundo Ferreira (2012, p. 25), principalmente pelo matemático Georg Cantor que mostrou pela primeira vez que há diferentes "tamanhos" de infinito. Esta abordagem inicial para o estudo de conjuntos carece de formalismo e contém contradições.

Ainda conforme Ferreira (2012, p. 25), o matemático Gottlob Frege, posteriormente, apresentou uma formalização para a Teoria Ingênua dos Conjuntos, com a qual pretendia-se fundamentar a matemática a partir de princípios lógicos. No entanto, ainda antes da publicação de seus estudos, contradições derivadas desta formalização foram descobertas.

No começo do século XX, o matemático Bertrand Russell descobriu o paradoxo historicamente mais importante, que conhecemos na seção 2.7.3, e de acordo com Tomaz (2016, p. 17), o paradoxo foi analisado e discutido mais profundamente em 1902, apontado em uma carta e enviada a Frege. Segundo Ferreira (2012, p. 26) o problema estava no fato de se permitir que dada uma propriedade qualquer, exista o conjunto dos objetos que têm essa propriedade.

Dado que a Teoria dos Conjuntos é a base de muitas vertentes da matemática, contornar os paradoxos foi a motivação de estudos de muitos matemáticos. Ernst Zermelo apresentou a Teoria Axiomática dos Conjuntos, refinada, posteriormente, por Abraham Fraenkel, gerando os axiomas de Zermelo-Fraenkel.

5.1 Teoria Axiomática dos Conjuntos

Como estratégia de superação das contradições e paradoxos que surgiram na Teoria Ingênua dos Conjuntos, Zermelo e Fraenkel desenvolveram a Teoria Axiomática dos Conjuntos, também conhecida como *sistema Zermelo-Fraenkel com Escolha* ou, simplesmente, ZFC, que é um conjunto de dez axiomas.

Consoante Ferreira (2012, p. 27) os paradoxos mostraram que há propriedades que não podem determinar conjuntos. Na abordagem axiomática, a intenção era restringir as condições em que os conjuntos são formados, de modo a evitar paradoxos, mantendo, ao mesmo tempo, todos os conjuntos essenciais para a matemática.

Os axiomas de ZFC estabelecem critérios de forma precisa e consistente para a formação de conjuntos. Para isso, usaremos: 1) As relações binárias: $=, \in$, $\subseteq$ e $\supseteq$; 2) Os conectivos lógicos: "e", "ou", "implica", "se e somente se" e "não", cujos símbolos são respectivamente: $\wedge$, $\vee$, $\implies$, $\iff$ e $\neg$; 3) Os quantificadores: "para todo" e "existe" representados pelos respecticos símbolos: $\forall$ e $\exists$; 4) Variáveis usualmente denotadas por letras, com ou sem índice. As próximas seções especificam os axiomas de ZFC.

Em relação aos axiomas a serem apresentados até a seção de números naturais, adotaremos as mesmas estruturas, conceitos, demonstrações, teoremas e colorários de Vasconcelos (2018, pp. 13 a 22).

5.2 Axioma 1. Axioma do *Conjunto Vazio*

Existe um conjunto que não possui elementos:

$$\exists x \forall z (z \notin x).$$

Observação: Na obra de Ciesielski (1997, pp. 211 a 213), é considerada, primeiramente, um axioma que garante a existência de um conjunto ($\exists x(x = x)$) e, depois, com o esquema de Axiomas da Separação, obtém o Axioma do Vazio.

5.3 Axioma 2. Axioma da *Extensionalidade* ou da *Extensão*

Dados dois conjuntos x e y, dizemos que $x = y$ se, e somente se, eles possuem os mesmos elementos.

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \iff z \in y) \iff x = y).$$

5.4 Axioma 3. Axioma da *Separação*

Esquema de Axiomas da Separação:

Para todo conjunto x, dada uma propriedade P, existe o conjunto y cujos elementos são os elementos de x que têm a propriedade P:

$$\forall x \exists y (\forall z (z \in y \iff (z \in x \wedge P(z)).$$

O conjunto y é denotado por:

$$\{z \in x | P(z)\}.$$

A expressão "esquema de axiomas" indica que, para cada propriedade P temos um axioma.

Na lógica matemática, estabelecem-se limites rigorosos para a formulação de P, ou seja, essas formulações devem ser precisas, bem definidas, não ambíguas e seguir a sintaxe formal da lógica matemática.

Ao empregar o esquema da separação, torna-se possível substituir o Axioma do Vazio por um axioma que meramente garante a existência de um conjunto, pois obtemos a existência (e unicidade) do conjunto vazio como um teorema.

Teorema 5.4.1. *Existe um único conjunto vazio.*

Demonstração. Supondo que existem dois conjuntos vazios distintos x e y, então existe um elemento z tal que $z \in x$ e $z \notin y$ ou $z \notin x$ e $z \in y$. Absurdo. Logo, $x = y$, de acordo com o axioma da extensionalidade.

□

Esquema de Axiomas da Compreensão. De acordo com Vasconcelos (2018, p. 14), para cada propriedade P, existe o conjunto x cujos elementos são os conjuntos que têm a propriedade P:

$$\exists x(\forall z(z \in x) \iff P(z))$$

Com o esquema de separação, o raciocínio usado no paradoxo de Russell pode ser adaptado para demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 5.4.2. *Não existe o conjunto de todos os conjuntos.*

Demonstração. Supondo que existe o conjunto de todos os conjuntos e seja U tal conjunto. Seja $x = \{y \in U | y \notin y\}$. Como no Paradoxo de Russell, podemos argumentar que $x \in x \iff x \notin x$, absurdo. □

É possível comparar o uso do axioma da separação com a notação do "conjunto-solução", muito comum no ensino básico. O conjunto-solução de uma equação, por exemplo, é o conjunto de valores que satisfazem as condições estabelecidas pela equação, ou seja, é o conjunto de todas as soluções possíveis que tornam a equação verdadeira. Por exemplo, considerando a equação $2x - 6 = 0$, tal que $x \in \mathbb{N}$, o conjunto-solução é $S = \{3\}$. Note que poderíamos utilizar o axioma da separação para definir o conjunto S. Pelo axioma da separação e tomando $P(x) : 2x - 6 = 0$, existe $V = \{x \in \mathbb{N} | P(x)\}$, temos $V = S$.

5.5 Axioma 4. Axioma do *Par*

Para todo conjunto x e para todo conjunto y, existe um conjunto z cujos elementos são x e y:

$$\forall x \forall y \exists z (\forall u (u \in z \iff (u = x \text{ ou } u = y))).$$

O conjunto z é denotado por $\{x, y\}$ e lembre que esse par não é ordenado.

Esse axioma basta para construir o par ordenado de Kuratowski: dados a e b, obtemos $\{a, a\}$ e $\{a, b\}$, dos quais também obtemos $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

5.6 Axioma 5. Axioma da *União*

Para todo conjunto x, existe um conjunto y cujos elementos são os elementos dos elementos de x:

$$\forall x \exists y (\forall u (u \in y \iff \exists v (v \in x \text{ e } u \in v))).$$

Indicamos

$$y = \bigcup x.$$

Seja x um conjunto não vazio, o Axioma da Separação garante a existência da interseção de x:

$$\bigcap x = \Big\{ y \in \bigcup x | \forall z \in x (y \in z) \Big\}.$$

5.7 Axioma 6. Axioma do *Conjunto Potência* ou *das Partes*

Para todo conjunto x, existe o conjunto y cujos elementos são os subconjuntos do conjunto x:

$$\forall x \exists y (\forall z (z \in y \iff \forall u (u \in z \implies u \in x))).$$

Indicamos

$$y = \mathcal{P}(x).$$

Exemplo: Dados os conjuntos x e y, esse axioma permite construir o *produto cartesiano* de x e y:

$$x \times y = \{u \in \mathbb{P}(\mathbb{P}(x \cup y)) | \exists a \exists b (a \in x \text{ e } b \in y \text{ e } u = \{\{a\}, \{a, b\}\})\}.$$

5.8 Axioma 7. Axioma do *Infinito* ou da *Infinitude*

Definição 5.8.1. Seja x um conjunto, definimos o conjunto $S(x) = x \cup \{x\}$, chamado de *sucessor de* x.

Definição 5.8.2. Seja s um conjunto, dizemos que s é *indutivo* se $\varnothing \in s$ e para qualquer $y \in s$ temos $S(y) \in s$.

Axioma da Infinitude. Existe um conjunto indutivo.

Dentro do contexto de ZFC, utilizaremos o Axioma da Infinitude para descrever o conjunto dos números naturais. Veremos que os conjuntos $\varnothing, S(\varnothing), S(S(\varnothing)), \cdots$ são todos distintos entre si, de modo que todo conjunto indutivo é infinito e, então, tomamos $\mathbb{N}$ como o menor conjunto indutivo.

5.9 Axioma 8. Axioma da *Substituição*

Para todo conjunto x, para cada propriedade $P(u, v)$ que se comporta como uma função, isto é, se para cada $u \in x$ existe um único v_u que torna $P(u, v_u)$ verdadeira, existe o conjunto y cujos elementos são os v_u tais que $u \in x$, ou seja, $y = \{v_u | u \in x\}$.

Uma aplicação da substituição é indexar famílias de conjuntos, como usamos com a união e a interseção:

$$\bigcup \{A_i | i \in I\} = \bigcup_{i \in I} A_i$$
$$\bigcap \{A_i | i \in I\} = \bigcap_{i \in I} A_i$$

5.10 Axioma 9. Axioma da *Fundamentação* ou *Regularidade*

Definição 5.10.1. Todo conjunto não vazio x, dizemos que x é *regular* se existe $y \in x$ tal que $x \cap y = \emptyset$.

Exemplo 5.10.2. Dado um conjunto x, se $\emptyset \in x$, então x é regular, visto que $x \cap \emptyset = \emptyset$.

Axioma da Regularidade. Todo conjunto não vazio é regular.

Teorema 5.10.3. *Não existe um conjunto x tal que $x \in x$.*

Demonstração. Seja um conjunto x tal que $x \in x$. Se $y = \{x\}$, então x é o único elemento de y, e portanto, $y \cap x = x$, com $x \neq \emptyset$, e consequentemente y não é regular. Absurdo. □

Corolário 5.10.4. *Dado um conjunto a, temos que $a \neq S(a)$.*

Demonstração. Lembre que $S(a) = a \cup \{a\}$. Como $a \in S(a)$, segue que $a \neq S(a)$. □

Teorema 5.10.5. *Não existem conjuntos x e y tais que $x \in y$ e $y \in x$.*

Demonstração. Dados dois conjuntos x e y, pelo axioma do par, existe $u = \{x, y\}$. Pelo axioma da regularidade, existe z tal que $z \in u$ e $z \cap u = \emptyset$. Se $z \in u$, então $z = x$ ou $z = y$. Assim, $z = x$ implica em $x \cap u = \emptyset$, e portanto, $y \notin x$ e $z = y$ implica em $y \cap u = \emptyset$, e portanto, $x \notin y$. □

Definição 5.10.6. Dado um conjunto y, dizemos que $x \in y$ é um elemento $\in$-*minimal* de y se para todo $z \in y$ temos $z \notin x$.

Teorema 5.10.7. *Dado um conjunto y, se y é não vazio, então y tem um elemento $\in$-minimal.*

Demonstração. Considere que o elemento $\in$-minimal x não pertence ao conjunto y, então para cada $x \in y$ existe $z \in y$ tal que $z \in x$. Portanto $z \in y \cap x$, e consequentemente, $y \cap x \neq \emptyset$. Logo, y não é regular. Absurdo. □

5.11 Axioma 10. Axioma da *Escolha*

O Axioma da Escolha (AC, do inglês: *Axiom of Choice*) tem muitas formulações que são equivalentes perante os axiomas de ZF (correspondente ao ZFC sem o Axioma da Escolha) e a equivalência entre essas formulações significa que podemos escolher (de forma mais conveniente) diferentes maneiras de expressar o axioma para um determinado contexto. De acordo com Santos (2014, p. 8), uma delas é que, se $a_i \neq \emptyset$ para cada $i \in I$ (com $I \neq \emptyset$), então $\prod_{i \in I} a_i \neq \emptyset$, ou seja, existe $f : I \to \bigcup_{i \in I} a_i$ que "escolhe" $f(i) \in a_i$ para cada $i \in I$.

5.12 Números naturais

As abordagens distintas dos números naturais de Ernst Zermelo e de John von Neumann são representações abstratas que descrevem, fundamentam e constroem os números naturais a partir de conceitos mais fundamentais.

De acordo com Gonzales (2020, p. 3), os números de Zermelo são: $0 = \emptyset, 1 = \{\emptyset\}, 2 = \{\{\emptyset\}\}, 3 = \{\{\{\emptyset\}\}\}, \cdots$ e $S_z(n) = \{n\}$ é o sucessor de n. Os números de Zermelo são todos diferentes entre si porque 0 é o único vazio e se $S_z(m) = S_z(n)$ então $m = n$, pelo axioma da extensão.

Por outro lado, conforme Mariano; Vitória (2017, p. 8), von Neumann propôs que cada número natural seja representado por um conjunto contendo todos os números naturais anteriores a ele. Nesta abordagem temos, $0 = \emptyset, 1 = \{\emptyset\}, 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, 3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \cdots$ e $S(n) = n \cup \{n\}$ é o sucessor de n. Note que, então, $S(n) = \{0, 1, \cdots, n\}$ e podemos concluir que $m < n \Longleftrightarrow m \in n$. Desse modo, os números de von Neumann são também todos diferentes entre si.

A integração dos naturais com a teoria dos conjuntos, nas duas abordagens, oferece uma construção formal para os números naturais, porém a sua aplicabilidade na educação básica, na minha concepção, seria muito abstrata e pouco intuitiva, já que não é usual representar números como conjuntos. Por outro lado, a partir dos naturais, torna-se possível a construção de outros conjuntos numéricos abordados no contexto da educação básica, como os conjuntos dos números inteiros, racionais e reais. Para tanto, recomendamos os capítulos 5 - 10 de Feitosa; Nascimento; Afonso (2011).

Conclusão

Na época, a alteração promovida pelo MMM e a influência de Bourbaki aproximaram alguns dos conceitos vistos no ensino superior do ensino básico, que compreende o ensino fundamental e o ensino médio no Brasil.

O Construtivismo, a Aprendizagem baseada em Problemas e a adoção de metodologias ativas transformaram tanto o conteúdo estudado quanto as abordagens de ensino. Em vez de se basear apenas na memorização mecânica, o aprendizado passou a enfocar relações entre elementos e a desenvolver habilidades matemáticas práticas e aplicáveis no contexto do mundo real. Estas abordagens pedagógicas revolucionaram não apenas o que é ensinado, mas também como é ensinado, criando um ambiente de aprendizado dinâmico e participativo (aluno protagonista).

Após as mudanças realizadas no ensino básico, alguns temas foram aperfeiçoados e outros foram desconsiderados, conforme a terceira e última versão da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), publicada em 2018.

Na Matemática, um dos assuntos excluídos no Ensino Fundamental Anos Finais e no Ensino Médio foi a Teoria dos Conjuntos, que se trata de um dos meios para compreensão de objetos abstratos que aparecem em matérias de cursos de graduação, incluindo Probabilidade e Estatística, Cálculo e Álgebra Linear.

Assim, neste trabalho, evidenciamos que a Teoria dos Conjuntos desempenha um papel importante na educação básica, e consequentemente, na educação superior. No ensino médio, ela serve como um alicerce fundamental, introduzindo os estudantes ao raciocínio lógico e à linguagem matemática. Ao compreender os conceitos básicos dos conjuntos, eles estarão mais preparados para a construção de argumentos matemáticos, prova de teoremas e desafios acadêmicos futuros.

Ademais, o desenvolvimento da Teoria Axiomática dos Conjuntos deu mais formalidade e rigor ao estudo dos conjuntos. Essa abordagem axiomática busca evitar contradições e paradoxos e apresenta uma base para a construção da matemática. Não foi o objetivo deste estudo propor que esta abordagem seja incluída no currículo da educação básica, mas mostrar que, ao introduzir os estudantes ao formalismo dos axiomas de Zermelo-Fraenkel, é possível oferecer uma oportunidade de explorar estruturas lógicas da matemática desde cedo, além de contribuir no desenvolvimento de habilidades de raciocínio abstrato e resolução de problemas.

Referências Bibliográficas

ALMEIDA, E. L. B. Teoria de conjuntos. Vídeo-aulas didáticas em sítio eletrônico. 2021. Canal no Youtube “Ad infinitum”. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=NJOBBAz5Zyg&list=PLqv5niGUIgiNc-ADTEHh1xLDpIAFTbvWn>. Acesso em: 01 fev. 2023.

ALVES, A. M. M.; SILVEIRA, D. N. Uma leitura sobre as origens do Movimento da Matemática Moderna (MMM) no Brasil. Artigo científico. In: **Revista Tópicos Educacionais**. Revista do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, Recife, v. 23, n.1, p.76-91, jan/jun. 2017. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/topicoseducacionais/article/view/22667>. Acesso em: 20 nov. 2022.

ARAÚJO, J. P. ; BUSSMANN, T. B. Método axiomático e teoria econômica. Artigo científico. In: **Ensaios FEE**, Porto Alegre, v. 34, n. 2, pp. 471-498, dez. 2013. Porto Alegre: Universidade Federal do Pampa, 2013. Disponível em: <https://revistas.planejamento.rs.gov.br/index.php/ensaios/article/download/2789/3175>. Acesso em: 21 nov. 2022.

ARRUDA, J. P. A teoria dos conjuntos no ensino primário: um marco da linguagem da matemática moderna. Encontro. In: **XII EBRAPEM - Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática**. Artigo científico. UNESP: Rio Claro, 2008. Disponível em: <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/71-1-A-PDFonline.pdf>. Acesso em: 29 nov. 2022.

ÁVILA, G. Cantor e a teoria dos conjuntos. Artigo científico. In: Revista do professor de matemática, n. 43, p. 6-14. Goiânia: Universidade Federal de Goiás, 2000. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/veiculos_de_comunicacao/RPM/RPM43/RPM43_02.PDF>. Acesso em: 01 dez. 2022.

BORGES, R. A. S. *Circulação e apropriação do ideário do movimento da matemática moderna nas séries iniciais: as revistas pedagógicas no Brasil e em Portugal.* Tese de doutorado. São Paulo: Universidade Bandeirante de São Paulo, 2011. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/129705>. Acesso em: 20 dez. 2022.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais / Secretaria de Educação Fundamental.* Arquivo em sítio eletrônico. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>. Acesso em: 29 dez. 2022.

BRASIL, *Lei nº 13.005/2014*. Aprova o Plano Nacional de Educação - PNE e dá outras providências. Sítio eletrônico. Brasília: Planalto, 2014. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2014/lei/l13005.htm>. Acesso em: 20 dez. 2022.

BRASIL, Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Primeira versão. Sítio eletrônico. Brasília: MEC, 2015. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/relatorios-analiticos/BNCC-APRESENTACAO.pdf>. Acesso em: 15/10/2022.

BRASIL, Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Segunda versão. Sítio eletrônico. Brasília: MEC, 2016. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/relatorios-analiticos/bncc-2versao.revista.pdf>. Acesso em: 15/10/2022.

BRASIL, Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Terceira versão. Sítio eletrônico. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf>. Acesso em: 15/10/2022.

BRASIL, Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Sítio eletrônico. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 15/10/2022.

BRASIL, *Constituição da República Federativa do Brasil de 1988*. Atualizada até Emenda Constituicional nº 123/2022. Sítio eletrônico. Brasília: Planalto, 2022. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicaocompilado.htm>. Acesso em: 20 dez. 2022.

CIESIELSKI, K. *Set theory for the working mathematician*. Livro. Cambridge (UK): Cambrige University Press, 1997.

FAJARDO, R. A. S. Teoria dos conjuntos. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2017. Texto didático. Disponível em <https://www.ime.usp.br/~fajardo/Conjuntos.pdf>. Acesso em 01/11/2022.

FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C.; ALFONSO, A. B. *Teoria dos conjuntos: sobre a fundamentação matemática e a construção de conjuntos numéricos*. Livro. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2011.

FERREIRA, G. *O conjunto de todos os conjuntos não existe*. Gazeta de Matemática, SPM, 2015. Disponível em: <https://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=528>. Acesso em: 05 nov. 2023.

GONZALEZ, C. G. *A teoria de conjuntos entre 1909 e 1930: o amadurecimento formal de uma teoria axiomática.* Disponível em: <https://www.cle.unicamp.br/eprints/index.php/CLE_e-Prints/article/view/1368>. Acesso em: 08 jan. 2023.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. *Fundamentos da matemática elementar: conjunto e funções*. v. 1. 9ª edição. São Paulo: Editora Atual, 2013.

LEME DA SILVA, M. C. Movimento da Matemática Moderna - possíveis leituras de uma cronologia. Artigo científico. In: **Revista Diálogo Educacional**, v. 6, n. 18, p. 49-63, Toledo: PUC-PR, 2006. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/

160830>. Acesso em: 27 dez. 2022.

LEME DA SILVA, M. C.; VALENTE, W. R. *Uma breve história do ensinar e aprender matemática nos anos iniciais: uma contribuição para a formação de professores.* In: **Educ. Matem. Pesq., v.15, Número Especial**. pp.857-871. São Paulo: PUC-SP, 2013. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/17750/pdf>. Acesso em: 10 jan. 2023.

MACEDO, R. S. *Um estudo da teoria dos conjuntos no Movimento da Matemática Moderna.* Dissertação de mestrado em educação matemática. São Paulo: PUC-SP, 2008. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11342/1/Rodrigo%20Sanchez%20Macedo.pdf>. Acesso em: 11 jan 2023.

MARIANO, A.; VITÓRIA, P. A. *Teoria dos conjuntos como fundamento da matemática e a justificação dos axiomas de ZFC.* Programa de pós-graduação em filosofia. Curso - tópicos especiais em lógica e filosofia da ciência. Professor - Antônio Mariano. Belo Horizonte: UFMG, 2017. Disponível em: <https://www.academia.edu/37524102/TEORIA_DOS_CONJUNTOS_COMO_FUNDAMENTO_DA_MATEM%C3%81TICA_E_A_JUSTIFICA%C3%87%C3%83O_DOS_AXIOMAS_DE_ZFC_1>. Acesso em: 21 nov. 2022.

MENDONÇA, T. N. *Que geometria ensinar às crianças em tempos de matemática moderna? Referências e práticas de uma professora da cidade de Juiz de Fora.* Dissertação de mestrado. Juiz de Fora: Universidade Federal de Juiz de fora, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/186641>. Acesso em: 21 nov. 2022.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática discreta.* Livro. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

NOVAES, G. P. *Introdução à teoria dos conjuntos.* Coleção do professor de matemática. Livro. Rio de Janeiro: SBM, 2018.

OLIVEIRA, Á. B. A função (f (x)) do direito das coisas. Artigo científico. In: **Novos Estudos Jurídicos**, v. 11, n. 1, p. 117-134. Itajaí: Univali, 2006. Disponível em: <https://periodicos.univali.br/index.php/nej/article/view/425/367>. Acesso em: 28 dez. 2022.

OLIVEIRA, A. M. A abordagem da teoria dos conjuntos em dois livros didáticos utilizados no ensino secundário na Bahia durante a década de 1970: uma análise histórica das teorias modernas da matemática. Artigo científico. In: **Anais dos Seminários de Iniciação Científica** , n. 22, 2018. Feira de Santana: UEFS, 2018. Disponível em:<http://periodicos.uefs.br/index.php/semic/article/view/3987/3217>. Acesso em: 01 out. 2022.

PINHEIRO, F. F. *A variedade dos métodos diagramáticos a partir da perspectiva da silogística.* Dissertação de mestrado. Rio Grande do Sul: Universidade Federal de Santa Maria, 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/9150/PINHEIRO%2C%20FELIX%20FLORES.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 01 jul. 2023.

PINTO, N. B.; NOVAES, B. W. D. Impactos do movimento da matemática moderna na cultura escolar de escolas técnicas industriais do Brasil e de Portugal: articulações teórico-metodológicas da história comparada. Artigo científico. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 6, n. 1, p. 261-282. Curitiba: PUC-PR, 2013. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6170650>. Acesso em 02 out. 2022.

SANTANDER, C. V. B. *O trabalho do professor Sylvio Nepomuceno, ajudando a reconstituir a história da educacao matemática, ao tempo de influência do Movimento da Matemática Moderna*. Dissertação de mestrado. São Paulo: PUC-SP, 2008. Disponível em: <https://tede.pucsp.br/handle/handle/11356>. Acesso em: 19 nov. 2022.

SANTOS, M. C. N. D. (2014). *Principais axiomas da matemática*. Dissertação de mestrado. João Pessoa: UFPB, 2014. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/7529/2/arquivototal.pdf>. Acesso em: 10 ago. 2023.

SILVA, T. T. P. *Os movimentos matemática moderna: compreensões e perspectivas a partir da análise da obra "Matemática – curso ginasial" do SMSG*. Dissertação de mestrado. Rio Claro: Unesp, 2013. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/91045> Acesso em: 23 nov. 2022

TOMAZ, F. G. *Teoria dos conjuntos e taxonomia biológica: estudo interdisciplinar*. Dissertação de mestrado. Mossoró: Universidade Federal do Semi-árido, 2016. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=2485&id2=79382>. Acesso em: 24 nov. 2022.

VASCONCELOS, V. F. *Teoria dos conjuntos: um estudo introdutório*. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em matemática). Curitiba: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2018. Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/23976>. Acesso em: 25 nov. 2022.

VICENTE, H. G.; PILATI, E. Teoria gerativa e "ensino" de gramática: uma releitura dos Parâmetros Curriculares Nacionais. Artigo científico. In: **Verbum. Caderos de Pós-Graduação**, n. 2, p. 4-14. São Paulo: PUC-SP, 2012. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/verbum/article/view/12793/9279>. Acesso em: 26 nov. 2022.