UNIVERSIDADE REGIONAL DO CARIRI – URCA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

O ENSINO DE RAZÃO E PROPORÇÃO PARA O ENEM: uma proposta motivada por observações em uma escola pública do Ceará

JOSÉ CICERO BOAVENTURA ALVES DA COSTA

JUAZEIRO DO NORTE - CE

2024

O ENSINO DE RAZÃO E PROPORÇÃO PARA O ENEM: uma proposta motivada por observações em uma escola pública do Ceará

JOSÉ CICERO BOAVENTURA ALVES DA COSTA

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientador

Prof. Me. Mario de Assis Oliveira

JUAZEIRO DO NORTE - CE

2024

Ficha Catalográfica elaborada pelo autor através do sistema
de geração automático da Biblioteca Central da Universidade Regional do Cariri - URCA

Costa, José Cicero Boaventura Alves da

C837e O ENSINO DE RAZÃO E PROPORÇÃO PARA O ENEM: uma proposta motivada por observações em uma escola pública do Ceará / José Cicero Boaventura Alves da Costa. Juazeiro do Norte, 2024.

79p. il.

Dissertação. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Regional do Cariri - URCA.

Orientador(a): Prof. Me. Mario de Assis Oliveira

1.Conteúdos, 2.Currículo, 3.Enem, 4.Matemática, 5.Proporcionalidade; I.Título.

CDD: 510

O ENSINO DE RAZÃO E PROPORÇÃO PARA O ENEM: uma proposta motivada por observações em uma escola pública do Ceará

JOSÉ CICERO BOAVENTURA ALVES DA COSTA

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Aprovada em: 14/05/2024

BANCA EXAMINADORA

Mario de Assis Oliveira

Prof. Me. Mario de Assis Oliveira (Orientador)
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Prof. Dr. Alexsandro Coelho Alencar
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Júnio Moreira de Alencar

Prof. Dr. Júnior Moreira de Alencar
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Dedico a todos, que porventura ou por querer, possam ser beneficiados pelos resultados deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiro a Deus, por minha existência, por tudo que tenho e por tudo que sou; a toda minha família, especialmente minha mãe Francisca Alves da Costa, que sempre me ensinou o valor do conhecimento e minha esposa Rejanea Costa, por todo incentivo e motivação durante minha jornada neste curso.

Agradeço aos meus professores no mestrado, Prof. Me. Pedro Ferreira (*in memorian*), Prof. Dr. Flávio França, Prof. Dr. Jocel Faustino, Prof. Me. Mario de Assis, Prof. Dr. José Tiago, Profa. Ma. Valéria Gerônimo, Profa. Dra. Leidmar Vieira e Prof. Dr. Alexsandro Coelho, por tudo que nos ensinaram com muito afinco e zelo, em particular ao meu orientador Prof. Me. Mario de Assis por sua disponibilidade, companheirismo e comprometimento ao me conduzir na construção deste trabalho.

"Saber não é o bastante, é preciso aplicar. Querer não é o bastante, é preciso fazer."

(Bruce Lee)

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIAÇÕES E SIGLAS

Andifes – Associação Nacional dos Dirigentes das Instituições Federais de Ensino Superior

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CE – Ceará

(Coded/CED) – Coordenadoria Estadual de Formação Docente e Educação a Distância

Covid-19 – Coronavírus disease 2019

Crede 19 – 19ª Coordenadoria Regional de Desenvolvimento da Educação

EEMTI – Escola de Ensino Médio em Tempo Integral

EJA – Educação Para Jovens e Adultos

Enem – Exame Nacional do Ensino Médio

Fies – Fundo de Financiamento Estudantil

IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

Inep – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais

Ocem – Orientações Curriculares Para o Ensino Médio

PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

PCNs – Parâmetros Curriculares Nacionais

Pisa– Programa Internacional de Avaliação de Alunos

PPL – Pessoas Privadas de Liberdade

ProUni – Programa Universidade para Todos

Saeb – Avaliação da Educação Básica

Seduc – Secretaria da Educação do Estado do Ceará

Sige – Sistema Integrado de Gestão Escolar

Sisedu – Sistema Online de Avaliação, Suporte e Acompanhamento Educacional

Sisu – Sistema de Seleção Unificada

Spaece – Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará

RESUMO

Esta pesquisa tem por objetivo geral explicitar a relevância de se ensinar o conteúdo de razão e proporção no ensino médio, visando uma preparação de qualidade dos alunos para o Enem. Neste propósito, o presente trabalho: apresenta as fundamentações legais e pedagógicas, os objetivos formativos e as intencionalidades curriculares do ensino médio e do Enem, e como o Enem influencia o currículo de matemática da escola brasileira; expõe as fundamentações e as orientações legais para o ensino de razão e proporção na escolarização básica brasileira; exibe alguns índices de aprendizagem de razão e proporção em escolas públicas computados pelo Spaece, relevantes para a proposta deste trabalho; e mostra uma análise de como, os conteúdos razão e proporção são cobrados no Enem. Aqui também destacamos alguns dados indicadores da aprendizagem de razão e proporção gerados pelo Sisedu de uma escola pública de ensino médio do Ceará, que servem como motivação preliminar para o desenvolvimento desta pesquisa, e apresentamos uma revisão teórica de razão, proporção e proporcionalidade entre grandezas, fundamentada teoricamente a nível de ensino médio, seguida de algumas aplicações relevantes por meio de questões aplicadas no Enem.

Palavras-chave: Conteúdos; currículo; Enem; matemática; proporcionalidade.

ABSTRACT

This research has the general objective of explaining the relevance of teaching the content of ratio and proportion in high school, aiming at quality preparation of students for the Enem. For this purpose, the present work: presents the legal and pedagogical foundations, the training objectives and the curricular intentions of high school and Enem, and how Enem influences the mathematics curriculum of Brazilian schools; exposes the legal foundations and guidelines for teaching ratio and proportion in Brazilian basic schooling; displays some ratio and proportion learning indices in public schools computed by Spaece, relevant to the purpose of this work; and shows an analysis of how ratio and proportion contents are charged in Enem. Here we also highlight some data indicating the learning of ratio and proportion generated by Sisedu from a public high school in Ceará, which serve as a preliminary motivation for the development of this research, and we present a theoretical review of ratio, proportion and proportionality between quantities, theoretically based at high school level, followed by some relevant applications through questions applied in Enem.

Keywords: Contents; curriculum; Enem; mathematics; proportionality.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira (Lei nº 9.394/1996), conhecida por LDB, define e regulariza a organização da educação brasileira com base nos princípios presentes na Constituição Federal, e, de acordo com o artigo 22 desta lei, “A educação básica tem por finalidade, desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores” (Brasil, 1996, art. 22), sendo que, esta última finalidade é responsabilidade fundamentalmente do ensino médio, uma vez que entre as seus objetivos específicos incluem-se a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando.

Para prosseguir em estudos posteriores, tendo acesso a uma vaga na universidade pública ou privada, o estudante brasileiro tem duas opções de processos seletivos: o vestibular, no caso da maioria das instituições de ensino superior estaduais e privadas, e o Exame Nacional do Ensino Médio – Enem, que é a forma de ingresso para as instituições federais, mas que também é adotado por IES de outras esferas, sendo este processo o que mais se destaca atualmente na inclusão de jovens brasileiros na faculdade, devido sua abrangência em todo o território nacional e seu alinhamento com vários programas federais de incentivo ao ingresso e permanência de jovens no ensino superior. Em consequência deste destaque, o Enem influencia significativamente as práticas didáticas e os processos pedagógicos na escola brasileira de educação básica, neste sentido Medeiros e Neto (2018, p. 148), inferem que: “O Enem tem direcionado as mudanças na educação nacional no sentido de influenciar a forma de se trabalhar em sala de aula, para que a aplicação dos conteúdos na vida cotidiana seja mais evidenciada e dê mais sentido ao estudo por parte dos estudantes”

Desta forma, é possível deduzir que o Enem se configura como um instrumento indicador das competências e habilidades que devem ser desenvolvidas nas práticas de ensino e os conteúdos que precisam ser contemplados pelo currículo escolar na educação básica brasileira, muito embora essas competências e habilidades estejam definidas na Base Nacional Comum Curricular - BNCC. Daí é possível deduzir que se faz importante o professor de matemática do ensino médio alinhar sua prática de ensino com processos que preparem seus alunos para o Enem, concentrando-se em um currículo escolar e em metodologias que valorizem os conteúdos matemáticos mais recorrentes neste processo seletivo, tão bem quanto entender os motivos pelos quais tais conteúdos são contemplados neste exame e a relação didática destes conteúdos com outras áreas da Matemática.

Ao se investigar quais os conteúdos e temas de matemática da educação básica são mais explorados na prova do Enem, alguns trabalhos e dados estatísticos, que serão citados e referenciados aqui nos capítulos seguintes, mostram que por um breve estudo desta prova, inspecionando edições de anos anteriores, não há dificuldades em se constatar quais conteúdos de matemática básica se destacam neste processo seletivo, por estarem presentes em uma expressiva quantidade de questões, e que dentre estas, são muito comuns questões que exploram a resolução de problemas que exigem conhecimentos relativos a razão e proporção, pois elas evidenciam-se em frequência e quantidade em todas edições da prova de matemática do Enem até então.

Tradicionalmente, razão e proporção são conteúdos de matemática da educação básica abordados intensamente no currículo de matemática do ensino fundamental, isso ocorre devido às orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs, que tem sido o principal documento orientador do currículo brasileiro de matemática desde o final da década de 90 e que orienta que o estudante dos anos finais do ensino fundamental esteja familiarizado com o "reconhecimento de números racionais em diferentes contextos cotidianos e históricos e exploração de situações-problema em que indicam relação parte/todo, quociente, razão ou funcionam como operador" (Brasil,1998, p. 71), e com a "resolução de situações-problema que envolvem a ideia de proporcionalidade, incluindo os cálculos com porcentagens, pelo uso de estratégias não-convencionais" (Brasil,1998, p.72).

Daí é de se esperar, teoricamente, que alunos de ensino médio estejam familiarizados com estes conteúdos e mostrem pouca dificuldade em resolver problemas ou questões do Enem que envolvam estes tópicos, porém em algumas realidades escolares não é difícil encontrar alunos que cursam ou já terminaram o ensino médio e relatam dificuldade em executar esta tarefa. Este fato é comprovado pelos dados estatísticos gerados pelo Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará – Spaece e pelo Sistema Online de Avaliação Suporte e Acompanhamento Educacional – Sisedu da Secretaria da Educação do Estado do Ceará – Seduc , ambos dos anos de 2022 e 2023, que detalharemos adiante e que mostram o quanto os alunos do ensino médio nas escolas de públicas do Ceará demonstraram certa dificuldade na resolução de itens que exigem o mínimo domínio dos conceitos de razão e proporção, no período observado.

Essas realidades nos sugerem que é relevante o desenvolvimento e produção de trabalhos que fomentem no professor de matemática do ensino médio a valorização de intervenções pedagógicas e materiais didáticos capazes de oportunizar aos seus alunos um estudo e aprendizado de razão e proporção de maneira mais madura e significativa, a fim de, entre outros benefícios dentro do processo de ensino-aprendizagem da matemática, prepará-los para o Enem. Neste intento, este trabalho tem por objetivo geral evidenciar porque é relevante a retomada do ensino de razão e proporção no ensino médio, visando ao preparo dos estudantes para o Enem e destacar as implicações didáticas, conceituais e formativas da efetivação desta ação.

Para a realização de seu objetivo, este trabalho se desenvolve em cinco capítulos, além desta introdução, da seguinte maneira:

No Capítulo 2, caracterizamos o ensino médio e o Enem, expondo suas fundamentações legais e pedagógicas, seus objetivos sociais e formativos e a correlação entre eles, destacando de que forma o Enem influencia o currículo de matemática na escola de educação básica, em particular no ensino médio.

No Capítulo 3, explanamos e fazemos algumas considerações sobre a fundamentação e orientação legal para o ensino de razão e proporção na escolarização básica brasileira; mostramos alguns índices do Spaece de aprendizagem de razão e proporção em escolas públicas computados nos anos de 2014, 2016 e 2022, relevantes para os objetivos deste trabalho; e destacamos como, e o quanto, razão e proporção é cobrado no Enem.

No Capítulo 4, descrevemos o fenômeno que motivou o desenvolvimento deste trabalho, e o objeto de estudo que delimita nossos objetivos. Nesse capítulo, também, caracterizamos o Sisedu e mostramos dados estatísticos desse sistema sobre indicadores da aprendizagem de razão e proporção na Escola de Ensino Médio em Tempo Integral São Pedro – EEMTI São Pedro, computados nos anos de 2021, 2022 e 2023, que se caracterizam como elemento promotor de reflexão e motivação preliminar para as finalidades didáticas desta pesquisa.

No Capítulo 5, apresentamos algumas considerações sobre a revisão do conceito e propriedades dos números fracionários, preliminares à apresentação dos conceitos de razão e proporção e suas e aplicações para os alunos de ensino médio; apresentamos uma revisão teórica de razão, proporção e proporcionalidade entre grandezas, fundamentada em conceitos matemáticos peculiares ao nível de ensino médio e algumas aplicações relevantes para a contextualização deste tema em sala de aula por meio de questões de edições passadas do Enem.

Por fim, no Capítulo 6, escrevemos as considerações finais, onde fazemos uma retrospectiva das motivações e intencionalidades deste trabalho e explicitamos os resultados qualitativos do mesmo.

Com isso, almejamos contribuir de maneira significativa para a melhoria da pratica de ensino da matemática no ensino médio, por meio de um documento que sirva de material de estudo, motivação e orientação para o aperfeiçoamento do processo de ensino nessa trajetória escolar final, objetivando um desenvolvimento de qualidade dos estudantes para a cidadania, em particular contribuindo de forma efetiva e direta no processo de aprimoramento destes na busca de bons resultados na prova de matemática do Enem.

2 A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO E O ENEM

2.1 Caracterização e objetivos formativos do ensino médio

A LDB (Lei nº 9.394/1996), garante em seus quatro primeiros artigos, que a educação básica é dever da família e do estado, e este último tem a obrigação de efetivá-la por meio de instrumentos e processos que zelem por uma educação pública de qualidade pautada nos ideais de igualdade, liberdade, pluralismo e respeito, e com condições para o acesso e permanência na escola para todo cidadão brasileiro. Em seu artigo 21, a LDB coloca que a educação escolar no Brasil deve ser composta por duas fases: educação básica, formada pela educação infantil, ensino fundamental e ensino médio; e educação superior.

O ensino médio, segundo Brasil (1996, p. 24, etapa final da educação básica, deve ter duração mínima de três anos e como finalidades, entre outras, o fortalecimento e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos pelo estudante no ensino fundamental e a preparação básica deste estudante para a cidadania, capacitando-o para continuar aprendendo e se adaptando às novas condições de trabalho ou estudos posteriores

Quanto aos seus objetivos curriculares de ensino, como as demais etapas da educação básica, os do ensino médio são definidos pela Base Nacional Comum Curricular – BNCC que, segundo Brasil (2023), é o documento federal regulamentador que aponta o conjunto de aprendizagens fundamentais que todo aluno deve desenvolver ao longo das etapas e modalidades da educação básica, e tem como objetivo principal nortear a educação no país através da normatização dos padrões de aprendizagem e aspectos formativos a que todo os alunos brasileiros têm direito.

De acordo com Brasil (1996,p. 17), esses objetivos de ensino são organizados, no ensino médio, em quatro áreas do conhecimento: Linguagens e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Ciências Humanas e Sociais Aplicadas; distribuídos em uma carga horária mínima anual de oitocentas horas (com proposta legal de ampliação para mil horas, segundo Lei nº 13.415, de 2017) distribuídas por um mínimo de duzentos dias letivos.

Por fim, dentre as diversas garantias e demandas elencadas pela LDB para o ensino médio, ela ainda incube a conclusão do ensino médio como pré-requisito legal para o acesso ao ensino superior, em instituições públicas ou privadas, de qualquer estudante da educação básica por meio de “processo seletivo que considerará as competências e as habilidades definidas na Base Comum Curricular” (Brasil, 1996, p. 33); Sendo, nas últimas décadas, o

Enem o principal destes processos seletivos, como explanaremos com mais afinco no tópico seguinte, explanação esta que estimulará uma percepção da necessidade de o professor de matemática do ensino médio alinhar sua prática de ensino com processos que preparem seus alunos para o Enem, concentrando-se em um currículo escolar e em metodologias que valorizem os conteúdos matemáticos mais recorrentes neste processo seletivo, tão bem quanto entender os motivos pelos quais tais conteúdos são contemplados nesse exame e a relação didática desses conteúdos com outras áreas do conhecimento.

2.2 O que é o Enem e seus objetivos

O Exame Nacional do Ensino Médio – Enem, foi criado em 1998 pelo Ministério da Educação – MEC, com a publicação da Portaria nº 438, como mecanismo de avaliação do desempenho do estudante da educação básica, tendo entre seus objetivos: conferir ao participante parâmetro para autoavaliação e fornecer subsídios às diferentes modalidades de acesso à educação superior. Se constituindo de uma prova de múltipla escolha e uma redação, avaliando as competências e as habilidades desenvolvidas pelos estudantes ao longo do ensino fundamental e médio, indispensáveis à vida acadêmica, ao mundo do trabalho e ao exercício da cidadania, com base em uma matriz de competências especificamente definida pelo organizador da prova (Brasil, 1998, p. 178).

Por orientação dessa portaria, o Enem ocorre anualmente, tendo como organizador da prova o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais – INEP, com a responsabilidade de planejar, operacionalizar e normatizar o Enem, e também avaliá-lo continuamente com o propósito de atualizar o processo, em articulação permanente com as intencionalidades do MEC, com especialistas em avaliação educacional, com as instituições de ensino superior e com as secretarias de educação (Brasil, 1998, p. 180).

Para se ter uma ideia de sua abrangência, segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE (2023), a primeira edição do Enem, em 1998, contou com aproximadamente 157 mil estudantes inscritos, número que cresceu anualmente para no seu 4ª ano, em 2001, alcançar o número de 1,6 milhão de inscritos. Continuamente o exame passou por várias mudanças legais e melhorias técnicas, que a cada edição dinamizaram o processo e atribuíram várias vantagens para os seus participantes e incentivos para que as instituições de ensino superior, públicas e privadas, integrassem seus processos seletivos aos resultados deste exame.

Tais atualizações fizeram o Enem, de acordo com Brasil (2014), alcançar o número recorde próximo de 9,5 milhões de candidatos na sua 17° edição, no ano de 2014.

Destas atualizações, Souza Júnior (2021) destaca a criação do Novo Enem pela Portaria INEP nº 109, de 27 de maio de 2009, com apoio da Associação Nacional dos Dirigentes das Instituições Federais de Ensino Superior – Andifes, determinando que a prova a partir de então serviria para avaliar tanto o desempenho do aluno concluinte do ensino médio, quanto avaliar também os alunos ingressantes nos cursos superiores. Esta portaria fez também a metodologia de aplicação da prova mudar, passando de 63 perguntas que eram aplicadas em um único dia, para 180 perguntas, além da redação, aplicadas em dois dias em um mesmo final de semana, no sábado e domingo, metodologia válida de 2009 a 2017, que mudaria a partir de 2018 após uma consulta pública, passando a ser aplicada em dois domingos consecutivos.

Esta portaria "representa um marco na educação brasileira, especialmente, no que se refere às provas padronizadas de larga escala" (Souza Júnior, 2021, p. 6), visto que daí em diante o Enem passa a se caracterizar como o principal meio de ingresso ao ensino superior para o estudante brasileiro até hoje, por possibilitar que qualquer estudante use sua nota neste exame para concorrer a uma vaga em um curso universitário em instituições públicas de ensino superior, em sua grande maioria federais, pelo Sistema de Seleção Unificada – Sisu, ou pelo Programa Universidade para Todos – ProUni, que concede bolsas de estudos integrais ou parciais a estudantes de cursos de graduação em instituições privadas de educação superior, ou ainda, pelo Fundo de Financiamento Estudantil – Fies do MEC, que viabiliza o ingresso e permanência de estudantes em universidades privadas por todo país por meio de financiamento. O Enem, com a esta portaria também passa a oferecer a possibilidade de qualquer cidadão obter a certificação de conclusão do ensino médio por meio de sua nota nesta prova, sendo esta última possiblidade excluída pela Portaria MEC n° 468, de 3 de abril de 2017.

A respeito da influência do Enem sobre o aperfeiçoamento dos processos didáticos e formativos da educação escolar básica, o Inep defende que o Enem é de fundamental importância para o processo desenvolvimento do ensino médio, escrevendo:

> O Enem tem, ainda, papel fundamental na implementação da Reforma do Ensino Médio, ao apresentar, nos itens da prova, os conceitos de situação-problema, interdisciplinaridade e contextualização, que são, ainda, mal compreendidos e pouco habituais na comunidade escolar. A prova do Enem, ao entrar na escola, possibilita a discussão entre professores e alunos dessa nova concepção de ensino preconizada pela LDB, pelos Parâmetros Curriculares Nacionais [...] (Brasil, 2005, p. 8)

Neste sentido o Inep divulga, em 2005, um documento intitulado: "Exame Nacional do Ensino Médio (Enem): fundamentação teórico-metodológica"; objetivando servir de sugestão para uma implementação da reforma do ensino médio, promovendo reflexões sobre possíveis transformações pedagógicas nas práticas de ensino em toda a educação básica, especialmente no ensino médio, tão bem quanto apresentando, e justificando teoricamente, as habilidades e competências formativas que devem ser desenvolvidas na educação básica escolar nas quatro áreas do conhecimento: Linguagens e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Deste modo, de maneira geral, Souza Júnior conclui que:

> Com relação ao Currículo e às práticas educacionais, é certo afirmar que o Enem se tornou um norteador relevante para o planejamento escolar, desde o ensino fundamental, e mais intensamente nas séries finais do ensino médio, modificando o trabalho docente e promovendo a discussão acerca da interdisciplinaridade, conhecimentos divididos por competências e itens elaborados a partir de forma a valorizar o entendimento e não a mera memorização. (Souza Júnior, 2021, p. 10).

Concluindo, podemos presumir, que o Enem é um dos principais fomentadores de transformação do o ensino médio no brasil, contribuindo significativamente de forma positiva para o aperfeiçoamento do sistema de educação brasileiro, mudando de maneira perceptível o modo ensino, provocando mudanças nos currículos, nas práticas didáticas e ideais pedagógicos em todos os níveis escolares.

2.3 Influência do Enem no currículo de matemática do ensino médio

Em uma visão técnica e superficial, o currículo escolar seria, meramente, um documento que determina as disciplinas, ou conteúdos e a carga horário ministrada em uma escola ou curso específico. Contudo, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM, documento orientador do MEC, nos aponta que:

> O currículo, enquanto instrumentação da cidadania democrática, deve contemplar conteúdos e estratégias de aprendizagem que capacitem o ser humano para a realização de atividades nos três domínios da ação humana: a vida em sociedade, a atividade produtiva e a experiência subjetiva, ... (Brasil, 2000, p.15).

Nesse sentido, o currículo escolar do ensino médio deve, além de listar conteúdo e determinar tempos didáticos, funcionar como um objeto de orientação de todo o processo de ensino e aprendizagem, determinando a trajetória que os alunos devem percorrer no processos de aquisição do conhecimento.

Para a BNCC Ensino Médio, “Os sistemas de ensino e as escolas devem construir seus currículos e suas propostas pedagógicas, considerando as características de sua região, as culturas locais, as necessidades de formação e as demandas e aspirações dos estudantes" (Brasil, 2018, p. 471). Ou seja, a prática de ensino de matemática, desenvolvida na sala de aula, precisa estar em conformidade com os conteúdos propostos pela orientação curricular comum formal, visando a universalizar o conhecimento técnico-cientifico; e no currículo de Matemática da escola de ensino médio, devem estar indicados os conteúdos que serão estudados e as atividades de ensino, objetivando o entendimento e a aplicabilidade das habilidades e competências aprendidas, na vida real dos alunos, no mundo do trabalho e acadêmico.

Nessa linha pedagógica, os PCNEM trazem em seu texto a proposta de um currículo escolar que evite a compartimentalização e favoreça a interdisciplinaridade, que incentive o raciocínio e a capacidade de aprender (Brasil, 2000). Para cumprir esta premissa curricular o ENEM se estrutura em uma matriz elaborada pelo Inep que associa competências e habilidades formativas a conteúdos escolares, de forma que:

> O Exame é estruturado a partir de uma matriz que indica a associação entre os conteúdos, competências e habilidades básicas, próprias ao jovem e jovem adulto, na fase de desenvolvimento cognitivo e social correspondente ao término da escolaridade básica. Considera como referências norteadoras: a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), os Parâmetros Curriculares Nacionais, as Diretrizes do Conselho Nacional de Educação sobre a Educação Básica e os textos da reforma do ensino médio (Brasil, 2022, p.11)

De acordo com Inep,

> competências são as modalidades estruturais da inteligência, ou melhor, ações e operações que utilizamos para estabelecer relações com e entre objetos, situações, fenômenos [...]. As habilidades decorrem das competências adquiridas e referem-se ao plano imediato do saber fazer (Brasil, 2022, p.11).

Atualmente, o documento elaborado pelo Inep, chamado de Matriz de Referência do Enem, apresenta 7 competências e 30 habilidades avaliadas na prova de matemática desse exame, que se associam a conteúdos específicos de Matemática do ensino fundamental e ensino médio.

Endossando a relação do Enem com o currículo do ensino médio, o Inep em seu documento "Exame Nacional do Ensino Médio (Enem): fundamentação teórico-metodológica" esclarece que o Enem, mesmo antes de se tornar o principal meio de ingresso às universidades e mudar sua configuração, se propunha a fundamentar uma reforma curricular do ensino médio pelo fato de utilizar, nos itens desse exame, as concepções de situação problema, interdisciplinaridade e contextualização, mas que estes conceitos eram menos compreendidos e pouco usuais no cotidiano escolar (Brasil, 2005, p. 8).

Essas premissas curriculares, presentes nesses documentos influenciadores do sistema educacional brasileiro, em consonância com a importância do Enem para os estudantes que desejam ingressar em um curso superior, apontam que esse exame exerce forte influência sobre o currículo escolar da educação básica brasileira, em especial sobre o currículo de Matemática do ensino médio, estimulando uma valorização e priorização curricular dos conteúdos e temas matemáticos que mais se associam às orientações da Matriz de Referência dessa prova.

Medeiros e Neto (2018), em seu trabalho, reforçam este pressuposto afirmando que, "os princípios do enem têm servido para influenciar a reformulação de currículos escolares, tanto quanto a formulação de novas abordagens e novas metodologias cada vez mais presentes em todos os níveis de ensino" (Medeiros; Neto, 2018, p. 160).

Pode-se conclui ainda, que o Enem impacta diretamente o desenvolvimento de procedimentos didáticos e intencionalidades pedagógicas no ensino da Matemática do ensino médio, ao fomentar por sua metodologia, que avalia os estudantes por meio de questões contextualizadas de forma interdisciplinar, práticas de ensino que se apoiam na resolução de problemas e no exercício do raciocínio lógico, características que, segundo a BNCC,

> [...] colocam a área de matemática e suas tecnologias diante da responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes, para promover ações que estimulem e provoquem seus processos de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar criativos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos e que favoreçam a tomada de decisões orientadas pela ética e o bem comum (Brasil, 2018, p. 518).

Enfim, é correto afirmar que o Enem se transformou em um importante parâmetro de qualidade para o planejamento escolar de modo geral, em toda a escola de educação básica, sendo de forma mais intensa no ensino médio, modificando as práticas de ensino e motivando a discussão acerca da interdisciplinaridade, agrupamento dos conhecimentos por competências e um modelo de avalição escolar que sobrepõe o entendimento e a mera memorização de conteúdos.

Assim, todo professor de Matemática do ensino médio que busca estar atualizado com as exigências formativas da sociedade e que procura ter uma prática de ensino significativa e relevante para seus alunos, deve assumir a responsabilidade de nivelar sua prática docente com os parâmetros avaliativos do Enem, valorizando um currículo de Matemática que considere conteúdos inerentes às habilidades e competências cobradas nessa prova, que é tão importante para o estudante e influente para a educação básica brasileira.

3 RAZÃO E PROPORÇÃO NA ESCOLA DE EDUCAÇÃO BÁSICA

3.1 O ensino de razão e proporção na educação básica brasileira

Sem dúvida, a Matemática está presente na vida de qualquer pessoa, desde as primícias da humanidade até hoje, indo do simples ato de contar objetos até os mais sofisticados resultados da ciência e tecnologia, que dependem da Matemática para se concretizarem, desta maneira não se pode negar que a Matemática é onipresente no cotidiano humano.

Para a BNCC Edição Final, atualmente o principal instrumento norteador e normativo do currículo escolar, baseada nos PCNs e outros instrumentos legais normativos da educação brasileira, "o conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da educação básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais" (Brasil, 2018, p. 265).

Dessa maneira, o ensino da Matemática na escola básica exerce um papel primordial, tanto na construção do conhecimento, como na construção da cidadania, assim é tarefa dos professores da educação básica propiciar aos alunos possibilidades de aprender e vivenciar a Matemática, de forma que o saber matemático seja percebido na vida desses alunos, de forma prática e útil, tornando esses educandos cidadãos críticos e ativos na transformação de suas realidades.

Nesse sentido, a BNCC leva em conta que:

> Os diferentes campos que compõem a matemática reúnem um conjunto de ideias fundamentais que produzem articulações entre eles: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. Essas ideias fundamentais são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento (Brasil, 2018, p. 268).

Dessa consideração, podemos destacar que, o ensino e aprendizagem de razão e proporção, um dos conteúdos base do conceito de proporcionalidade na educação escolar básica, se faz de extrema importância para a vida do aluno, visto ainda que, é de senso comum entre profissionais da Matemática, que estes conteúdos e conceitos se caracterizam como pré-requisitos para estudos posteriores e entendimento de conceitos científicos de outras áreas do conhecimento, em especial os conceitos e relações que serão futuramente utilizadas no decorrer das vidas dos alunos no mundo escolar, no mundo do trabalho, ou na compreensão do ambiente em que vivem.

Alguns trabalhos de pesquisa na área de Educação Matemática destacam a relevância do estudo do conceito de proporcionalidade na escola básica, a exemplo destes, podemos citar o trabalho sobre procedimentos de resolução de problemas, de Isva Maria Almeida Barreto, que nos aponta:

> As relações proporcionais se constituem em um dos conceitos matemáticos mais presentes no cotidiano, pois constantemente nos deparamos com situações para as quais é necessário a mobilização de certos processos cognitivos que colocam em prática as noções relacionadas com este conceito. De modo que certos problemas do mundo real são facilmente interpretados quando há viabilidade de se raciocinar por meio proporções (Barreto, 2021, p. 11);

E o trabalho de Raiana Lazzaretti, que, ao nos mostrar uma análise de como os livros didáticos tratam o conteúdo de razão e proporção no ensino fundamental, destaca que "o conteúdo de razão e proporção é relativamente simples em matemática, além de fazer parte da compreensão de outros conteúdos, [...] (Lazzaretti, 2022, p. 20).

Ao encontro com a conclusão desta última autora, a BNCC recomenda que na educação básica, o ensino de proporcionalidade, precisa fazer parte do estudo de operações com os números naturais, operações com os números racionais, problemas com áreas, funções, probabilidade etc. Além disso, esse conceito também se destaca em muitas atividades do dia a dia de outras áreas do conhecimento, como, por exemplo, no comércio, na química, na estatística etc." (Brasil, 2018, p. 268).

A LDB determina que os currículos do ensino fundamental e do ensino médio devem obedecer a uma base nacional comum, e qualquer sistema de ensino ou estabelecimento escolar pode complementar esta base, para atender características e necessidades formativas regionais e locais (Brasil, 1996). Este desígnio legal efetiva a inclusão dos conteúdos de razão e proporção no ensino de Matemática da educação básica brasileira, por meio das orientações e normatização nacional sobre os currículos escolares, e sobre as especificações didático pedagógicas na produção e distribuição dos livros didáticos, preconizadas pelos PCNs, PCNEM e pela BNCC.

Segundo Brasil (1998), os PCNs é um documento orientador disposto em nove áreas de conhecimentos, ou disciplinas: Língua Portuguesa, Matemática, História, Geografia, Ciências Naturais, Educação Física, Arte e Língua Estrangeira; e que divide o ensino fundamental em quatro ciclos, cada ciclo é constituído de dois anos. Pelos PCNs, em Matemática, o quarto ciclo, correspondente aos dois últimos anos de ensino fundamental, é o período onde se deve ensinar e se aprender razão e proporção, pois, embora, Lazzaretti (2022) nos alerta que no terceiro ciclo encontram-se as orientações para o ensino dos números racionais, inclusive na forma fracionária, proporcionando um primeiro contato dos alunos com a ideia de razão, para os PCNs é apenas no quarto ciclo que deve ocorrer o processo de ensino de:

> - Identificação da natureza da variação de duas grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais (afim ou quadrática), expressando a relação existente por meio de uma sentença algébrica e representando-a no plano cartesiano.
> - Resolução de problemas que envolvem grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais por meio de estratégias variadas, incluindo a regra de três.
> - Resolução de situações-problema envolvendo grandezas determinadas pela razão de duas outras (densidade e velocidade) ou pelo produto (energia elétrica: kWh). (Brasil, 1998, p. 87 e 90).

Já os PCNEM organizam a proposta curricular do ensino médio em três áreas do conhecimento, destacando que há um inter-relacionamento de objetos de estudo, ou conteúdos, dentro de cada uma delas ao escrever:

> A organização em três áreas – Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias e Ciências Humanas e suas Tecnologias – tem como base a reunião daqueles conhecimentos que compartilham objetos de estudo e, portanto, mais facilmente se comunicam, criando condições para que a prática escolar se desenvolva numa perspectiva de interdisciplinaridade (Brasil 2000, p.18).

Nos PCNEM, a discussão curricular, as orientações pedagógicas e indicações das competências específicas que os alunos deverão alcançar ao concluir o ensino médio, são apresentadas em um documento específico para cada uma das áreas do conhecimento. No documento que trata da área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias encontramos a seção destinada às orientações curriculares de matemática onde, "os conteúdos básicos estão organizados em quatro blocos: Números e Operações, Funções, Geometria, Análise de Dados e Probabilidade" (Brasil, 2006, p. 70).

Diferente dos PCNs do ensino fundamental, os PCNEM não elencam orientações curriculares ou por ciclo, e nem sugerem o ensino de conteúdos por série, como defende o documento Orientações Curriculares Para o Ensino Médio – Ocem precursor dos PCNEM, do MEC:

> No tratamento desses conteúdos, deve-se buscar o equilíbrio na atenção aos diversos ramos da Matemática. Deve-se, igualmente, afastar-se da compartimentalização e procurar ampliar as ocasiões de articulação entre os diferentes temas, atendendo a requisitos de diversidade, e lembrar-se de que um mesmo conceito matemático pode ser abordado em mais de um dos blocos de conteúdo (Brasil, 2006, p. 95).

Assim, os PCNEM se ocupam em realizar orientações curriculares gerais para cada área do conhecimento e apontar habilidades em cada uma delas, que devem ser desenvolvidas com os alunos durante todo o ensino médio.

A respeito do ensino de razão e proporção, os PCNEM não explicitam o estudo deste tema como conteúdo em si. Contudo o Ocem orienta que no ensino médio,

> Algumas vezes, de forma intencional, são retomados assuntos já tratados no ensino fundamental – é o momento de consolidar certos conceitos e ideias da matemática escolar que dependem de explicações cuja compreensão exige uma maior maturidade (Brasil, 2006, p. 70);

e expõem uma orientação que justifica a valorização do ensino de razão e proporção no ensino médio como objeto estudo, para o desenvolvimento de habilidades inerentes ao conceito de proporcionalidade, ao nos indicar que:

> No trabalho com Números e operações deve-se proporcionar aos alunos uma diversidade de situações, de forma a capacitá-los a resolver problemas do quotidiano, tais como: operar com números inteiros e decimais finitos; operar com frações, em especial com porcentagens; fazer cálculo mental e saber estimar ordem de grandezas de números; usar calculadora e números em notação científica; resolver problemas de proporcionalidade direta e inversa (Brasil, 2006, p. 70).

Por sua vez, a BNCC amparada pelo artigo 26 da LDB, "é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica" (Brasil, 2018, p. 7), logo a BNCC, diferente dos PCNs e PCNEM, que são documentos de orientação, expõem em caráter obrigatório as habilidades e competências que devem ser ensinadas e desenvolvidas com os alunos na educação básica.

A BNCC faz uma orientação curricular prescrevendo, detalhadamente, competências gerais e conhecimentos específicos para cada ano, ciclo ou etapa da educação básica, que devem ser desenvolvidos por meio de conteúdos programados, sendo que:

> Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (Brasil, 1998, p. 8).

A BNCC divide, o ensino fundamental e o ensino médio, em quatro áreas do conhecimento: Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza e Ciências Humanas e Sociais, sendo que para cada área existem competências específicas a serem desenvolvidas pelos estudantes e

> essas competências explicitam como as dez competências gerais se expressam nessas áreas”, e “para garantir o desenvolvimento das competências específicas, cada componente curricular apresenta um conjunto de habilidades. Essas habilidades estão relacionadas a diferentes objetos de conhecimento – aqui entendidos como conteúdos, conceitos e processos –, que, por sua vez, são organizados em unidades temáticas (Brasil, 1998, p. 28),

no caso da área de Matemática são cinco Unidades Temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Medidas e Grandezas, Probabilidade e Estatística, sendo que “as habilidades expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares” (Brasil, 1998, p. 29).

Na BNCC encontramos, preconizadas em quadros, as habilidades específicas a serem desenvolvidas em cada objeto do conhecimento, por unidade temática da matemática em cada ano do ensino fundamental. A seguir está exposto uma síntese, de como aparecem na BNCC, as determinações associadas ao ensino e aprendizagem de razão e proporção no ensino fundamental:

Quadro 1 - Objetos de conhecimento e habilidades conforme BNCC – 5° Ano

MATEMÁTICA		
UNIDADE TEMÁTICA	**OBJETOS DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES**
Álgebra	Grandezas diretamente proporcionais; Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais.	(EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros; (EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.

Fonte: (Brasil, 2018).

Quadro 2 - Objetos de conhecimento e habilidades conforme BNCC – 7° Ano

MATEMÁTICA		
UNIDADES TEMÁTICAS	**OBJETOS DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES**
Álgebra	Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.	(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.

Fonte: (Brasil, 2018).

Quadro 3 - Objetos de conhecimento e habilidades conforme BNCC – 8° Ano

MATEMÁTICA		
UNIDADES TEMÁTICAS	**OBJETOS DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES**
Álgebra	Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.	(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano. (EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.
	Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.	(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.

Fonte: (Brasil, 2018).

Quadro 4 - Objetos de conhecimento e habilidades conforme BNCC – 9° Ano

MATEMÁTICA		
UNIDADES TEMÁTICAS	**OBJETOS DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES**
Álgebra	Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.	(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

Fonte: (Brasil, 2018).

Já para o ensino médio, a BNCC prescreve uma organização curricular por competência específica para cada área do conhecimento, sendo para a área do conhecimento Matemática, apontadas cinco competências:

> **1.** Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
> **2.** Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
> **3.** Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos
> para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
> **4.** Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
> **5.** Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (Brasil, 2018, p. 531).

Para cada uma dessas competências específicas, a BNCC aponta habilidades que devem ser desenvolvidas pelos alunos durante todo o ensino médio, e não mais por ano ou período, como ela apresenta para o ensino fundamental, por exemplo:

Quadro 5 - Competência Específica 1, Matemática – BNCC Ensino Médio

HABILIDADES
(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções.
(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

Fonte: (Brasil, 2018).

Prosseguindo com a análise das habilidades inerentes às demais competências especificas na área da Matemática, não se vê na BNCC uma recomendação ou prescrição explícita para a tomada de razão e proporção como conteúdo programático no currículo de Matemática do ensino médio, deixando essa prescrição para as últimos anos do ensino fundamental, em especial para os últimos três dessa etapa, como vimos nos quadros 2, 3 e 4 anteriormente.

Contudo, a BNCC se detém em estimular a construção de um currículo de Matemática onde os estudantes possam, "consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração" (Brasil, 2018, p. 471). Essa prerrogativa nos permite refletir sobre perspectiva de demandar considerada atenção, à atividades de consolidação dos conceitos de proporcionalidade e comparação de grandezas por meio do ensino e aprendizagem de razão e proporção no ensino médio, indo ao encontro do que o próprio documento preza, ao afirmar:

> Na (re)elaboração dos currículos e das propostas pedagógicas, é possível adotar outras organizações, recorrendo tanto às habilidades definidas nesta BNCC quanto a outras

> que sejam necessárias e que contemplem especificidades e demandas próprias dos sistemas de ensino e das escolas (Brasil, 2018, p. 542).

Enfim, o que foi levantado até aqui, nos aponta que o ensino aprendizagem de razão e proporção na educação básica brasileira, ocorre especialmente no ensino fundamental, de maneira mais intensa nos três últimos anos desta etapa; e que conceitos de proporcionalidade e de variação ou comparação entre grandezas, inerentes ao conhecimento de razão e proporção, permeiam grande parte das habilidades e competências que devem ser desenvolvidas pelos alunos no ensino médio.

Neste pensamento, é possível concluirmos que o ensino de razão e proporção no ensino médio se torna viável, nas perspectivas curriculares legais e teóricas, tão bem quanto desejável, na perspectiva de colaborar na formação de pessoas mais atuantes na sociedade, mais capacitadas a raciocinar logicamente, entender melhor os fenômenos do mundo que as rodeiam e resolver situações problemas.

3.2 Alguns dados do Spaece sobre aprendizagem de razão e proporção

De acordo com Ceará (2017), o Governo do Estado do Ceará, por meio da Secretaria da Educação – Seduc, desde 1992, por meio do Spaece avalia a Educação Básica do Ceará de forma censitária, ao final dos 5° e 9° anos do ensino fundamental e dos 3° anos do ensino médio, nas escolas públicas estaduais e municipais, por meio de informações coletadas a cada avaliação que identificam o nível de proficiência e a evolução do desempenho dos alunos, tendo como orientação Matrizes de Referência alinhadas com as do Sistema de Avaliação da Educação Básica – Saeb. Os resultados encontrados no Spaece possibilitam a formulação de políticas educacionais a nível estadual.

Como foi discutido aqui, no tópico 3.1, razão e proporção é um tema de estudo abordado didaticamente de forma bem distribuída no currículo de Matemática dos anos finais do ensino fundamental, logo presume-se que o aluno ao iniciar o ensino médio, mostre uma relevante habilidade na resolução de problemas ou questões que exijam tal conhecimento. Contudo os dados estatísticos gerados pelo Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará – Spaece edições 2014, 2016 e 2022, apontam que o domínio de competências e habilidades para a análise e resolução de problemas e questões que envolvem conhecimentos básicos sobre razão e proporção, de muitos alunos da escola pública do Ceará, se mostra insatisfatório.

As Matrizes de Referência, usadas no Spaece apontam as habilidades básicas, essenciais para o desenvolvimento cognitivo do estudante nas disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática no decorrer da educação escolar básica. Essas habilidades são indicadas a partir do currículo de cada disciplina, organizadas em tópicos chamados de “descritores” e originam os itens que compõem os testes (Ceará, 2019).

Destacamos, no quadro abaixo, o descritor **D18** do Spaece de Matemática 9° Ano do Ensino Fundamental que avalia os conhecimentos dos alunos sobre razão e proporção, quando eles terminam o ensino fundamental e estão prestes a entrar no ensino médio:

Quadro 6 - Descritor D18 do SPAECE Matemática do 9° Ano do Ensino Fundamental

D18 - Resolver situação problema envolvendo a variação proporcional entre grandezas direta ou inversamente proporcionais.

Fonte: (Ceará, 2019)

E mostramos, na tabela abaixo, os percentuais de acertos nos dos alunos do 9° ano do ensino fundamental das escolas estaduais e municipais neste descritor, registrados nos resultados do Spaece edições 2014, 2016 e 2022.

Tabela 1 - Percentuais de acertos dos alunos de 9° Ano do Ensino Fundamental, no descritor D18 do Spaece edições 2014, 2016 e 2022.

REDE	2014	2016	2022
Estadual	51,9%	52,1%	44,5%
Municipal	53,4%	55,5%	48,8%

Fonte: (Ceará, 2023)

Segundo Ceará (2023), as edições 2015, 2017, 2018 e 2019 do Spaece não disponibilizaram este descritor na prova, ou não realizaram avalição com o 9° Ano de Ensino Fundamental, e as edições de 2020 e 2021 excepcionalmente não se realizaram devido às ações governamentais restritivas em decorrência da Pandemia de Covid-19 naquele período. Em caráter especial, a edição de 2014 avaliou os 1° Anos do Ensino Médio da escolas estaduais, com o descritor **D18**, cujo resultado nos mostrou que os alunos avaliados acertaram apenas 48,3% das questões deste descritor.

Esta última tabela e o resultado dos 1° Anos do Ensino Médio obtido pela edição 2014 do Spaece, nos mostram que, pelos anos observados, os alunos avaliados ao término do ensino fundamental têm um percentual de erro nas questões que envolvem conhecimentos de proporcionalidade entre grandezas em torno de 50%, o que indica que estes alunos adentram o ensino médio com certa necessidade de consolidação e aprofundamento na aprendizagem de conhecimentos e habilidades relativos a este conceito.

3.3 Razão e proporção na prova de matemática do Enem

De acordo com Giovanni Júnior e Castrucci (2009), “a palavra *razão* vem do latim *ratione* e é a faculdade que o ser humano tem de avaliar, julgar, ponderar ideias, estabelecer relações lógicas conhecer, compreender, raciocinar”, e em matemática, “razão entre duas grandezas de mesma espécie é o quociente dos números que exprimem as suas medidas, sempre tomadas na mesma unidade” (Giovanni Júnior; Castrucci 2009, p. 231; 235).

Em matemática, podemos entender por grandeza toda característica que pode ser medida ou contada, por exemplo, o comprimento, a área, o tempo, a capacidade, a altura, a densidade, o valor monetário, entre muitas outras. É extremamente comum nos depararmos com situações, do dia a dia, que envolvem duas ou mais grandezas que têm uma relação de dependência entre si, por exemplo: o valor pago ao se abastecer um veículo no posto de combustíveis depende do volume de combustível que é colocado no tanque do veículo no momento do abastecimento. Este simples e cotidiano exemplo ilustra como é fácil perceber em nosso entorno como duas ou mais grandezas podem se relacionar. Giovanni Júnior e Castrucci (2009, p. 268 e 288) nos mostram que, com o conhecimento básico de razão e proporção se torna possível avaliarmos se a dependência entre duas ou mais grandezas ocorre ou não de forma proporcional, e se ocorrer, é possível, por meio dos processos adequados, realizarmos previsões, estimativas ou resolver problemas com as grandezas envolvidas.

De acordo com estes autores, em matemática, o entendimento do conceito de razão e a apropriação da definição de proporção, são pré-requisitos básicos para o estudo da relação de proporcionalidade entre grandezas. Giovanni Júnior e Castrucci (2009, p. 239 e 251) destacam ainda a existência de algumas razões especiais que têm inúmeras aplicações práticas: velocidade média, escala, densidade demográfica, porcentagem etc., e definem proporção como uma sentença matemática que expressa uma igualdade entre duas razões.

Essas faculdades humanas associadas ao conceito de razão, listadas acima, têm tudo a ver com os objetivos do conhecimento matemático e suas aplicações, no planejamento, análise de problemas e tomada de decisões; e em conjunto com as considerações de Giovanni Júnior e

Castrucci (2009), sobre grandezas e proporcionalidade, mostram como o tema *razão e proporção* se constitui como um objeto de estudo essencial para a fundamentação do conhecimento matemático significativo e útil, seja na vida acadêmica, no mundo do trabalho, ou em situações cotidianas da vida em sociedade.

Considerando o que foi exposto até aqui, pode-se afirmar que, razão e proporção é um objeto matemático de ampla aplicabilidade na análise e resolução de problemas da realidade cotidiana, que possui imensa possiblidade de interação com outros temas relevantes da matemática e com outras áreas do conhecimento científico e que este objeto predomina na fundamentação de muitos outros conceitos matemáticos importantes.

Essas características fazem esse objeto de estudo ser consideravelmente requisitado nas habilidades e competências cobradas na prova de matemática do Enem, visto que essa prova avalia seus candidatos por meio de questões baseadas em problemas contextualizados em situações concretas e problemas cotidianos, portanto esse tema pode ser cobrado maneiras bem diversificadas, aparecendo combinados com outros conhecimentos de Matemática muito comuns no dia a dia, onde a análise de situações e trabalho com grandezas é recorrente.

O trabalho científico de Silva (2022) nos mostra como o Enem dá um considerável destaque para situações problema que exigem conhecimentos de razão e proporção em suas resoluções. No trabalho mencionado o autor, criteriosamente, analisa a distribuição das competências da prova de matemática do Enem dos anos de 2009, 2010, 2015, 2016, 2021 e 2022, realizando uma inspeção detalhada nessas provas e construindo um levantamento dos conteúdos explorados nas questões, como se vê na tabela a seguir:

Tabela 2 - Quantitativo dos conteúdos explorados nas edições 2009, 2010, 2015, 2016, 2021 e 2022 da prova de Matemática do Enem

CONTEÚDOS	2009	2010	1015	2016	2021	2022	TOTAL
Aritmética	14	8	11	6	9	7	55
Razão, Proporção e Regra de Três	3	3	2	8	5	8	29
Porcentagem e Juros	5	7	6	7	4	3	31
Funções (definição e propriedades)	4	2	2	4	2	2	16
Função Afim	1	2	1	2	1	2	9
Função Quadrática	1	1	2	1	1	2	8
Função Exponencial	1	0	1	1	0	0	3
Função Logarítmica	0	0	1	2	0	0	3

Sequências, PA e PG	0	2	0	1	1	1	5
Matriz, Determinantes e Sistemas	0	0	0	0	2	1	3
Trigonometria	2	3	1	0	1	0	7
Geometria Plana	6	4	6	4	3	2	25
Geometria Espacial	6	10	5	5	5	8	39
Geometria Analítica	1	1	2	2	0	1	7
Análise Combinatória	3	1	2	2	2	2	12
Probabilidade	4	2	3	1	1	2	13
Estatística	4	4	3	6	8	5	30

Fonte: (Silva, 2022, p. 25)

Silva completa sua análise afirmando que:

> Analisando a tabela que traz o quantitativo dos conteúdos de matemática cobrados nas edições analisadas, percebemos que existe uma coerência e tendência no exame no que diz respeito aos principais conteúdos, aritmética, razão, proporção e regra de três, porcentagem e juros, geometria plana, geometria espacial e estatística se mantiveram como os conteúdos mais cobrados, com pequenas variações entre as edições (Silva, 2022, p. 25).

De fato, é de se esperar que razão e proporção apareça com notável frequência no Enem, pois agregando esse conteúdo aos conceitos de comparação entre grandezas, variação proporcional de grandezas e escala, é possível associar diretamente esse conteúdo a duas das sete competências, e a sete das trinta habilidades da Matriz de Referência do Enem, em Matemática, conforme listamos a seguir:

> **Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano:**
> **H10 -** Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
> **H11 -** Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.
> **H12 -** Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
> [...]
> **Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.**
> **H15 -** Identificar a relação de dependência entre grandezas.
> **H16 -** Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
> **H17 -** Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
> **H18 -** Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas (Brasil, 2009, p. 5).

Outro trabalho que tem conclusões que reafirmam nossa premissa, de o quanto razão e proporção são conceitos que aparecem nas questões do Enem com notável frequência , é o trabalho de Rodrigues (2013), onde o autor investiga quais as competências e habilidades em Matemática, de acordo com a Matriz de Referência, mais recorrentes nas questões das provas do Enem das edições 2009, 2010, 2011, 2012 e 2013, mostrando o resultado desta análise na seguinte tabela:

Tabela 3 - Distribuição das sete Competências nas edições 2009, 2010, 2011 e 2012 da prova de Matemática do ENEM.

COMPETÊNCIAS	2009	2010	2011	2012	TOTAL
Competência 2	11	12	9	8	40
Competência 3	11	3	14	8	**36**
Competência 1	12	9	7	4	32
Competência 7	5	6	5	8	24
Competência 6	3	6	6	5	20
Competência 5	3	6	2	7	18
Competência 4	0	3	2	5	**10**

Fonte: (Rodrigues, 2013, p. 5)

O resultado observado nesta tabela nos indica que, nas edições observadas, a ocorrência das competências 3 e 4, que são as competências da Matriz de Referência do Enem que sugerem o domínio de razão e proporção na análise e resolução de problemas, apresentam um índice de ocorrência de um pouco mais de 25%.

Destacamos ainda o trabalho de Amorielle (2018), onde a autora faz um estudo técnico baseado na prova de matemática do Enem edição 2017, edição que não é contemplada nas análises dos dois trabalhos que citamos anteriormente, realizando qual das competências e habilidades da Matriz de Referência do Enem é enfatizada em cada questão dessa prova. Os resultados por ela encontrados são mostrados na tabela a seguir:

Tabela 4 - Distribuição das sete Competências na edição 2017 da prova de Matemática do ENEM.

COMPETÊNCIAS	NÚMERO DE QUESTÕES	PERCENTUAL
1	9	20,00%
2	6	13,33%
3	6	13,33%

4	5	11,11%
5	8	17,78%
6	5	11,11%
7	6	13,33%
Total	45	100,00%

Fonte: (Amorielle, 2018, p. 27)

O resultado mostrado nesta tabela vai ao encontro do resultado da tabela de Rodrigues (2013), indicando que na prova de matemática do Enem 2017, o índice de ocorrência das competências 3 e 4, que estamos considerando, é de 13,33% e 11,11% respectivamente, que somados, representam que um pouco mais de 24% das questões dessa prova abordam o tema razão e proporção como proposta avaliativa.

Os resultados desses trabalhos aqui expostos nos mostram a forte tendência de ocorrência de um notável número de questões associadas ao tema razão e proporção em toda edição da prova de Matemática do Enem desde 2009, o que nos permite deduzir que é um tema que se destaca nesse exame, sendo contemplado por várias das habilidades solicitadas nas questões dessa prova, ou ainda fundamentando e suportando a aplicação de outros conceitos de Matemática importantes (como porcentagem, que aparece em problemas de estatística e matemática financeira; razões trigonométricas, que aprecem em problemas de trigonometria etc.) em situações de estudo, interpretação e resolução de problemas.

Disto, é possível concluir, reforçando o que defendemos aqui, no final do tópico 3.1 e baseados nos dados mostrados no tópico 3.2, que promover oportunidades para os alunos revisitarem o estudo de razão e proporção, revendo sua conceitualização e aplicabilidade de maneira mais madura e aprofundada no ensino médio, se configura como uma excelente oportunidade para o professor de Matemática do ensino médio alinhar sua prática didática e sua proposta curricular com conteúdos matemáticos realmente significativos e aplicação imediata na realidade, em especial para alunos ou turmas que têm por objetivos formativos acessarem um curso universitário por meio do Enem.

4 O OBJETO DE ESTUDO E AS MOTIVAÇÕES DESTA PESQUISA

4.1 Caracterização do objeto de estudo

De acordo com Diascânio (2020, p. 30), em uma pesquisa científica, “objeto de estudo” é o assunto específico de que se deve tratar a pesquisa, e é recomendável que o pesquisador opte por um objeto com características peculiares ao seu cotidiano profissional ou acadêmico e com seu domínio de conhecimento. Este autor, também define “fenômeno investigado” como um problema, uma dúvida ou dificuldade, teórica ou prática, no conhecimento de certa situação de real importância social, para a qual é preciso encontrar uma explicação ou solução, ele acrescenta que a percepção do fenômeno investigado deve ser o ponto de partida para o trabalho de pesquisa.

O presente trabalho tem como objetivo articular uma discussão sobre a necessidade em direcionar atividades didáticas que oportunizem o estudo de razão e proporção, e conceitos matemáticos relativos, no ensino médio; discutir como realizar intervenções didáticas nesse sentido e ainda, propor um material de orientação e fundamentação curricular para professores de matemática, em especial do ensino médio, interessados em ensinar esse conteúdo aos seus alunos que visam ter acesso ao ensino superior via Enem. A intensão de realizar esta tarefa surge de observações realizadas no cotidiano escolar em turmas de ensino médio da Escola de Ensino Médio em Tempo Integral São Pedro – EEMTI São Pedro.

A EEMTI São Pedro é uma escola da Rede Estadual de Ensino do Ceará, localizada na área urbana do município de Caririaçu, CE. Subordinada tecnicamente a 19ª Coordenadoria Regional de Desenvolvimento da Educação – Crede 19, que de acordo com as matrícula dos últimos quatro anos letivos registradas no Sige Escola (Sistema Integrado de Gestão Escolar da Seduc - CE) atende uma média de 350 alunos anualmente, distribuídos em turmas de Ensino Médio de Tempo Integral e turmas noturnas de Educação Para Jovens e Adultos – EJA.

A EEMTI São Pedro, há alguns anos, tem uma política pedagógica voltada para promover atividades e projetos que estimulem e motivem seus alunos a entrarem na faculdade após o ensino médio. Para isso, ela tem se dedicado a desenvolver ações educacionais de incentivo à participação desses alunos no Enem. Algumas dessas ações estão registradas na plataforma Sigae (Sistema de Gestão para o Avanço Contínuo da Educação) do Projeto Jovem de Futuro, desenvolvido pelo Instituto Unibanco: Disciplinas Eletivas Matemática para o Enem, Semana da Matemática, Recomposição de Matemática, Intensivo para o Space e Enem, entre outras;

Como resultado positivo da execução dessas ações, podemos observar as taxas positivas de participação de seus alunos das turmas de 3° anos do ensino médio nas últimas edições do Enem, como mostramos na tabela a seguir:

Tabela 5 - Taxas de participação dos alunos de 3° Ano do Ensino Médio da EEMTI São Pedro na prova das últimas edições do ENEM.

ANO DE EDIÇÃO	ALUNOS INSCRITOS	ALUNOS QUE REALIZARAM A PROVA	TAXA DE PARTICIPAÇÃO
2021	39	37	75,5%
2022	69	59	85,5%
2023	101	85	84,1

Fonte: (Sige/Enem. EEMTI São Pedro, 2023)

Essa dinâmica de valorização do Enem no plano pedagógico de trabalho da EEMTI São Pedro tem motivado seus alunos, professores e gestores a pensarem juntos no desenvolvimento de um currículo escolar que valorize disciplinas, conteúdos e temas de estudo que sejam relevantes às características avaliativas do exame, e que também articule ações direcionadas de ensino e estudo desses conteúdos e temas.

Nesse sentido, na EEMTI São Pedro, particularmente na área de Matemática, se optou em se observar quais conteúdos ou temas dessa área merecem destaque como objetos de estudo para atividades direcionadas de ensino, ou para tê-los como objetos de estudo complementares na grade curricular e serem comtemplados no plano de curso dos professores de Matemática.

Essa observação, se realizou em três vias de estudo informal:

- Na escuta de relatos de alunos que já participaram de edições anteriores do Enem, mencionando suas percepções, dificuldades e sugestões;
- Na breve inspeção de provas de edições anteriores do Enem, analisando as habilidades e competências exigidas que mais se destacaram nessas provas;
- E em pesquisas na internet, que direcionaram a busca para dados estatísticos fornecidos por empresas que prestam serviços educacionais e promovem cursos preparatórios para o Enem, e que indicam os conteúdos e temas mais cobrados em edições anteriores da prova de Matemática do Enem.

Essa observação destacou que, na prova de Matemática do Enem, há uma notável ocorrência de questões que tratam de problemas que exigem conhecimentos de conceitos temas matemáticos relacionados com o conteúdo “razão e proporção”, como proporcionalidade, escala, porcentagem, regra de três etc.

Dessas observações realizadas na EEMTI São Pedro, e na perspectiva inicial de contribuir com o processo de preparação de seus alunos para a prova de matemática do Enem, surge o interesse de se investigar mais a fundo o grau de relevância dado pela prova de Matemática do Enem ao conteúdo razão e proporção, tão bem quanto investigar a relação dos alunos do ensino médio com esse conteúdo em series anteriores, e embasar uma reflexão pedagógica no sentido de traçar estratégias de como oportunizar o ensino, ou revisão, no ensino médio de razão e proporção de forma mais madura e significativa para os alunos.

4.2 Alguns dados do Sisedu sobre aprendizagem de razão e proporção

Despertado o interesse inicial em investigar formalmente os níveis de relevância do tema “razão e proporção” para a prova do Enem, considerou-se antes diagnosticar os níveis de dificuldade ou de afinidade que alunos de ensino médio demonstram com esse tema. Para realizar este diagnóstico preliminar na EEMTI São Pedro utilizou-se dados do Sistema Online de Avaliação, Suporte e Acompanhamento Educacional – Sisedu, dos anos letivos de 2021, 2022 e 2023.

De acordo com Ceará (2020), o Sisedu é uma plataforma do Governo do Estado do Ceará gerida pela Coordenadoria Estadual de Formação Docente e Educação a Distância (Coded/CED) que se ocupa em identificar, através de realização de avaliações diagnósticas no início de cada semestre letivo, as estratégias de pensamento na resolução de problemas dos estudantes durante as avaliações. Desta forma o Sisedu detecta as principais habilidades onde os estudantes precisam melhorar, tendo como base a Matriz de Referência e níveis de desempenho do Spaece.

Para realizar o processo de avaliação o Sisedu se baseia na sua Matriz dos Saberes.

> Na Matriz dos Saberes os descritores, chamados Saberes, são condensados de conhecimentos e competências, que integram aspectos conceituais, técnicos e contextuais relacionadas a objetos de conhecimento e objetivos de aprendizagem. Os saberes, por definição, são observáveis e mensuráveis, o que permite a aplicação de técnicas como a Teoria de Resposta a Item. Para tornar o diagnóstico mais preciso, cada saber é estratificado em habilidades em uma sequência gradativa, do ponto de vista cognitivo. Algumas dessas habilidades correspondem a descritores das matrizes de referência do Spaece e SAEB e representam um ponto de convergência das habilidades precedentes no arranjo da Matriz dos Saberes (Ceará, 2023a, p. 3).

Na Matriz de Saberes de Matemática do Sisedu, encontramos o Saber número 4, o qual avalia quinze habilidades associadas à compreensão e resolução de problemas e questões que abordam o tema razão e proporção, conforme mostramos no quadro a seguir:

Quadro 7 - Saber e habilidades referentes a conhecimentos relativos ao tema razão e proporção, avaliados pela Matriz de Referência Sisedu.

SABER 04: Identificar e utilizar relações de proporcionalidade entre grandezas numéricas.
(S4H1) Reconhecer, em diferentes contextos, aplicações e problemas, relações de proporcionalidade direta ou inversa entre grandezas ou entre suas variações.
(S4H2) Relacionar números racionais a razões entre grandezas ou entre suas variações, expressando, em particular, a taxa de variação (percentual) entre essas grandezas.
(S4H3) Reconhecer - em gráficos, tabelas e outros suportes - relações de proporcionalidade entre grandezas ou entre variações dessas grandezas.
(S4H4) Compreender as relações entre razões, frações e suas representações decimais, inclusive quando expressas na forma de porcentagem.
(S4H5) Compreender a relação de proporcionalidade inversa em termos de proporcionalidade direta entre uma grandeza e o recíproco de outra.
(S4H6) Resolver problemas, motivados por diferentes contextos e aplicações, que envolvam a variação proporcional entre grandezas direta ou inversamente proporcionais.
(S4H7) Resolver problema que envolva porcentagens.
(S4H8) Compreender e efetuar cálculos, bem como resolver problemas, que envolvam duas ou mais grandezas direta ou inversamente proporcionais (e.g., divisão em partes proporcionais).
(S4H9) Determinar termos desconhecidos em uma proporção a partir dos termos dados.
(S4H10) Compreender e utilizar corretamente propriedades operacionais de razões e proporções, inclusive quando expressas na forma das chamadas "regras de três", combinando grandezas direta e/ou inversamente proporcionais.
(S4H11) Formular e resolver problemas que envolvam grandezas relativas, como velocidades, densidades, fluxos, vazões e outras taxas de variação entre grandezas, motivadas por diversos contextos e aplicações.
(S4H12) Reconhecer, em diferentes contextos, aplicações e problemas, quando grandezas não são proporcionais, direta ou inversamente.
(S4H13) Compreender e aplicar o conceito de juros como correção de valores no tempo, identificando a aplicação de juros simples em gráficos e tabelas e reconhecendo que a diferença entre valor presente e valor futuro de um ativo financeiro é proporcional ao tempo, no regime de juros simples.

(S4H14) Interpretar, modelar e resolver problemas, no contexto da Matemática Financeira, relativos a acréscimos, descontos, valores presente e futuro, débitos, créditos, poupança, consumo, investimento e outras grandezas envolvidas na educação financeira.
(S4H15) Formular e resolver problemas, motivados por diversos contextos e aplicações, envolvendo acréscimos/decréscimos aritméticos (e.g., juros simples).

Fonte: (Ceará 2023b, p. 6)

A seguir destacamos, em tabelas, de percentuais de acerto das turmas de ensino médio da EEMTI São Pedro em itens da avaliação diagnóstica do Sisedu que tratam do Saber 04, e suas respectivas habilidades, coletadas nos anos de 2021, 2021 e 2023:

Tabela 6 - Percentuais de acerto em itens referentes ao Saber 04 da Matriz de Referência de Matemática do SISEDU, turmas de 1° Ano do Ensino Médio

OFERTA/PERÍODO AVALIADO	PERCENTUAL DE ACERTO
2021.1	49,15%
2021.2	38,84%
2022.1	26,19%
2022.2	25,91%
2023.1	38,87%
2023.2	51,47%

Fonte: (Sisedu. EEMTI São Pedro, 2023)

Tabela 7 - Percentuais de acerto em itens referentes ao Saber 04 da Matriz de Referência de Matemática do Sisedu, turmas de 2° Ano do Ensino Médio

OFERTA/PERÍODO AVALIADO	PERCENTUAL DE ACERTO
2021.1	54,72%
2021.2	44,67%
2022.1	26,13%
2022.2	32,27%
2023.1	15,26%
2023.2	41,52%

Fonte: (Sisedu. EEMTI São Pedro, 2023)

Tabela 8 - Percentuais de acerto em itens referentes ao Saber 04 da Matriz de Referência de Matemática do Sisedu, turmas de 3° ano do Ensino Médio

OFERTA/PERÍODO AVALIADO	PERCENTUAL DE ACERTO
2021.1	27,78%
2021.2	37,35%
2022.1	24,71%
2022.2	18,25%
- - - - -	- - - - -
2023.2	45,51%

Fonte: (Sisedu. EEMTI São Pedro, 2023)

As tabelas apresentadas mostram que, nas turmas avaliadas e nos períodos considerados, é muito recorrente os alunos acertarem menos de 50% das questões que avaliam o Saber 04 do Sisedu. Disto é possível concluir que se faz coerente, pedagogicamente, demandar esforços no desenvolvimento e execução de ações que promovam o ensino ou estudo de razão e proporção e conceitos relativos para alunos no nível escolar aqui investigados.

Embora a investigação, e as conclusões preliminares sobre o fenômeno observado se refiram em particular aos alunos da EEMTI São Pedro, ela se estende a uma realidade mais abrangente, de acordo o tópico 3.2, onde expomos alguns dados do Spaece sobre aprendizagem de razão e proporção na educação básica cearense. Isso maximiza a relevância de buscarmos, por meio desta pesquisa, contribuir para o desenvolvimento da valorização e inserção do conteúdo razão e proporção no plano de curso do professor de matemática do ensino médio, visando a favorecer não só essas duas realidades, mas qualquer escola, professor ou aluno que busque alternativas de fundamentação teórica para apoiar, motivar ou orientar ações didáticas voltadas para uma preparação de qualidade de estudantes para a prova de matemática do Enem.

5 RAZÃO E PROPORÇÃO PARA O ENEM

5.1 Algumas considerações sobre frações para o Enem

Segundo Boyer (1996), “os homens da Idade da Pedra não usavam frações, mas com o advento de culturas mais avançadas durante a Idade do Bronze parece ter surgido a necessidade do conceito e de notação para frações. As inscrições hieroglíficas egípcias têm uma notação especial para frações unitárias, isto é, com numerador um”. (Boyer, 1996, p. 9). Esse texto de Boyer ilustra bem há quanto tempo as frações, ou números fracionários, estão presentes em atividades na história humana, tempo de presença que destaca sua importância para o desenvolvimento da Matemática e de outras ciências até os dias atuais.

“Os números fracionários surgiram da necessidade de representar uma medida que não tem uma quantidade inteira de unidades, isto é, da necessidade de repartir a unidade de medida” (Giovanni Júnior; Castrucci 2009a, p. 164), sendo que atualmente eles têm a seguinte notação: $\frac{n}{d}$ ou n/d, sendo n e d números inteiros, com $d \neq 0$.

Nesta notação o número d chama-se denominador da fração, ele indica em quantas partes iguais a unidade de medida será repartida; e o número n chama-se numerador, indicando a quantidade de partes da divisão inicial que desejamos representar ou considerar, por exemplo, caso uma barra de chocolate seja dividida em 5 partes iguais, se comermos 3 destas partes, escrevemos que restou $\frac{2}{5}$ (lê-se: dois quintos) da barra de chocolate.

Segundo Giovanni Júnior e Castrucci (2018), o estudo detalhado dos números fracionários (suas características algébricas, classificações, nomenclaturas, propriedades operacionais e aplicações práticas imediatas) é tratado detalhadamente na escola de educação básica, no currículo de Matemática do ensino fundamental, e no ensino médio. De acordo com Dante (2008), pode ser abordado de maneira mais formal e abrangente por meio da Teoria dos Conjuntos, caracterizando o Conjunto dos Números Racionais, representado geralmente nos livros didáticos por $\mathbb{Q}$, cuja definição é:

$$\mathbb{Q} = \left\{x, tal\ que\ x = \frac{a}{b}, com\ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\ e\ b \neq 0\right\}$$

De acordo com Giovanni Júnior e Castrucci (2009) a familiaridade com o conceito e propriedades do números fracionários é a base essencial para a compreensão dos conceitos de razão e proporção e de suas aplicações, sendo os conceitos, as definições e situações operatórias tratadas no estudo de razão e proporção, todos fundamentados ou suportados pelas frações e suas propriedades algébricas.

Nesse sentido, destacamos que, para o estudo proveitoso de razão e proporção, preliminarmente é recomendável o aluno ter certa familiaridade com os números fracionários, seu conceito, propriedades algébricas e operações. Cabendo ao professor, se necessário, promover atividades de recomposição ou aprofundamento, mesmo que breves, no estudo das frações e suas propriedades algébricas antes de se dedicar ao ensino de razão e proporção.

Admitindo que, no ensino médio, os alunos possuem certa experiência com os números fracionários e um maior grau de maturidade cognitiva, em relação ao ensino fundamental, é possível recomendar que estas atividades de recomposição ou aprofundamento, sejam realizadas por situações operatórias mais comuns nas questões do Enem que contextualizam aplicações dos números fracionários, fazendo breves retomadas de propriedades operatórias e algébricas desses números, quando necessário.

A seguir, destacamos três exemplos, cada um mostrando uma questão de edições passadas da prova de matemática do Enem, sendo que cada uma dessas questões contextualiza uma situação problema, que aparecem comumente na prova, que exigem conhecimentos básicos sobre frações para suas soluções.

EXEMPLO 5.1.1

Figura 1 – Questão, do Enem PPL 2011, sobre cálculo de fração.

QUESTÃO 148

Uma agência de viagens de São Paulo (SP) está organizando um pacote turístico com destino à cidade de Foz do Iguaçu (PR) e fretou um avião com 120 lugares.

Do total de lugares, reservou $\frac{2}{5}$ das vagas para as pessoas que residem na capital do estado de São Paulo, $\frac{3}{8}$ para as que moram no interior desse estado e o restante para as que residem fora dele.

Quantas vagas estão reservadas no avião para as pessoas que moram fora do estado de São Paulo?

A 27
B 40
C 45
D 74
E 81

Fonte: (Inep, 2011, p. 22)

Uma solução:

O número de vagas reservadas para as pessoas que moram na capital de São Paulo será:

$$\frac{2}{5} \cdot 120 = \frac{2 \cdot 120}{5} = 48,$$

e o número de vagas reservadas para as pessoas que moram no interior de São Paulo será:

$$\frac{3}{8} \cdot 120 = \frac{3 \cdot 120}{8} = 45.$$

Logo, o número de vagas restantes que serão reservadas para as pessoas que moram fora do estado de São Paulo será:

$$120 - (48 + 45) = 27.$$

Portanto, o gabarito da questão é (A).

Outra solução:

Podemos calcular o número de vagas pedido fazendo: $120 - \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{8}\right) . 120,$ de onde obtemos, 120 – 93 = 27, que é a resposta. Logo o gabarito da questão é (A).

EXEMPLO 5.1.2

Figura 2 – Questão, do Enem 2013, que envolve o cálculo de porcentagem.

QUESTÃO 168

O contribuinte que vende mais de R$ 20 mil de ações em Bolsa de Valores em um mês deverá pagar Imposto de Renda. O pagamento para a Receita Federal consistirá em 15% do lucro obtido com a venda das ações.

Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Um contribuinte que vende por R$ 34 mil um lote de ações que custou R$ 26 mil terá de pagar de Imposto de Renda à Receita Federal o valor de

(A) R$ 900,00.
(B) R$ 1 200,00.
(C) R$ 2 100,00.
(D) R$ 3 900,00.
(E) R$ 5 100,00.

Fonte: (Inep, 2013, p. 28)

Uma solução:

O lucro do contribuinte, neste caso, será de (34.000 – 26.000) = 8.000 reais, e ele deve pagar 15% deste lucro à Receita Federal, portanto é só calcularmos:

$$\frac{15}{100} \cdot 8.000 = \frac{15\ .\ 8\ 000}{100} = \text{R\$ } 1.200.$$

Portanto o gabarito da questão é (B).

EXEMPLO 5.1.3

Figura 3 – Questão, do Enem 2016, sobre ordenação de frações.

QUESTÃO 136

Nas construções prediais são utilizados tubos de diferentes medidas para a instalação da rede de água. Essas medidas são conhecidas pelo seu diâmetro, muitas vezes medido em polegada. Alguns desses tubos, com medidas em polegada, são os tubos de $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{4}$.

Colocando os valores dessas medidas em ordem crescente, encontramos

Ⓐ $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{4}$

Ⓑ $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{3}{8}$

Ⓒ $\frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}$

Ⓓ $\frac{3}{8}, \frac{5}{4}, \frac{1}{2}$

Ⓔ $\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}$

Fonte: (Inep, 2016, p. 19)

Uma solução:

Primeiro vamos encontrar as frações equivalentes a cada uma das frações dadas, de modo que essas novas frações tenham o mesmo denominador. Para isso, observemos que o mínimo múltiplo comum dos denominadores, neste caso, é 8, daí vem que, multiplicando os termos de $\frac{1}{2}$ por 4 obtemos que $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$, e multiplicando os termos de $\frac{5}{4}$ por 2, que $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$. Com os mesmos denominadores, fica fácil perceber que $\frac{3}{8} < \frac{4}{8} < \frac{10}{8}$, então, $\frac{3}{8} < \frac{1}{2} < \frac{5}{4}$. Portanto o gabarito da questão é (C).

Outra solução:

Podemos escrever a representação decimal das frações, em cada uma delas dividindo seu numerador por seu denominador, obtendo:

$$\frac{1}{2} = 0{,}500 \qquad \frac{3}{8} = 0{,}375 \qquad \frac{5}{4} = 1{,}250$$

Como 0,375 < 0,500 < 1,250, concluímos que $\frac{3}{8} < \frac{1}{2} < \frac{5}{4}$, e que o gabarito da questão é (C).

5.2 Revisão de razão e proporção por questões do Enem

Iezzi, Hazzan, Degensanjn (2006) iniciam o estudo do conceito de razão com a seguinte situação:

> Suponhamos que num determinado ano as vendas de uma empresa tenham sido de 300 mil reais e que as do ano seguinte tenham sido de 450 mil reais. Poderíamos comparar esses dois números, esses dois valores dizendo que sua diferença é de 150 mil reais. No entanto, a diferença não nos oferece uma ideia relativa do crescimento das vendas.
> Outra forma de efetuarmos a comparação poderia ser dividindo as vendas do segundo ano pelas vendas do primeiro, isto é 450 **:** 300 que é igual a 1,5. Assim dizemos que as vendas do segundo ano são uma vez e meia maiores que as do primeiro. Essa segunda forma de comparação é chamada de razão (Iezzi, Hazzan, Degensanjn, 2006. p. 1).

Na situação apresentada, a segunda comparação dos dois números foi realizada usando uma divisão. O quociente obtido é a razão entre esses dois números, tomados na ordem considerada. Daí, de forma geral, segundo Iezzi, Hazzan, Degensanjn (2006): Dados a e b dois números, com $b \neq 0$, denomina-se *razão* entre a e b ou *razão* de a para b o quociente de a por b, representado por $\frac{a}{b}$, ou por ou $a : b$.

Cabem aqui, ainda, duas observações: “O número a é chamado de *antecedente*, e b é denominado *consequente*. Quando a e b forem medidas de uma mesma grandeza, elas devem ser expressas na mesma unidade de medida” (Iezzi, Hazzan, Degensanjn, 2006. p. 1).

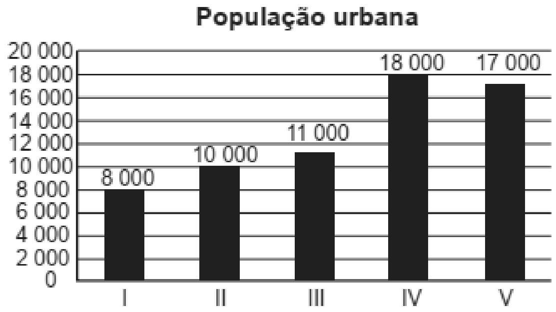
A seguir, mostramos dois exemplos com questões de provas do Enem de edições passadas, e suas respectivas soluções comentadas, que ilustram algumas situações e aplicações do estudo de razão.

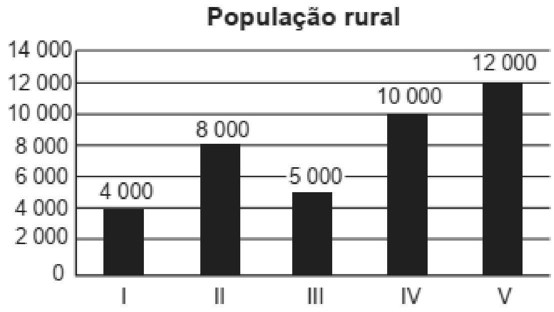
EXEMPLO 5.2.1

Figura 4 – Questão, do Enem 2019, sobre o uso de razão para comparar taxas.

Questão 179

A taxa de urbanização de um município é dada pela razão entre a população urbana e a população total do município (isto é, a soma das populações rural e urbana). Os gráficos apresentam, respectivamente, a população urbana e a população rural de cinco municípios (I, II, III, IV, V) de uma mesma região estadual. Em reunião entre o governo do estado e os prefeitos desses municípios, ficou acordado que o município com maior taxa de urbanização receberá um investimento extra em infraestrutura.





Segundo o acordo, qual município receberá o investimento extra?

(A) I
(B) II
(C) III
(D) IV
(E) V

Fonte: (Inep, 2019, p. 30)

Uma solução:

Sendo T_I, T_{II}, T_{III}, T_{IV} e T_V as taxas de urbanização dos municípios I, II, III, IV e V, respectivamente, dadas pela razão indicada no enunciado, teremos:

$$T_I = \frac{8000}{8000 + 4000} = \frac{2}{3} \cong 0{,}66 \qquad T_{IV} = \frac{18000}{18000 + 10000} \cong \frac{9}{14} = 0{,}64$$

$$T_{II} = \frac{10000}{10000 + 8000} = \frac{5}{9} \cong 0{,}55 \qquad T_V = \frac{170000}{170000 + 12000} = \frac{17}{29} \cong 0{,}58$$

$$T_{III} = \frac{11000}{11000 + 5000} = \frac{11}{16} \cong 0{,}57$$

Daí é fácil perceber que T_I é a maior das taxas de urbanização, então o município I receberá o investimento extra. Logo, o gabarito da questão é (A).

Neste exemplo 5.2.1, vale comentar, que a taxa de urbanização da cidade I está indicando que a cada 3 habitantes desta cidade, 2 deles moram na zona urbana da cidade.

EXEMPLO 5.2.2

Figura 5 – Questão, do Enem PPL 2020, que usa razão na resolução de problema.

Questão 147

Após o término das inscrições de um concurso, cujo número de vagas é fixo, foi divulgado que a razão entre o número de candidatos e o número de vagas, nesta ordem, era igual a 300. Entretanto, as inscrições foram prorrogadas, inscrevendo-se mais 4 000 candidatos, fazendo com que a razão anteriormente referida passasse a ser igual a 400. Todos os candidatos inscritos fizeram a prova, e o total de candidatos aprovados foi igual à quantidade de vagas. Os demais candidatos foram reprovados.

Nessas condições, quantos foram os candidatos reprovados?

- A 11 960
- B 11 970
- C 15 960
- D 15 970
- E 19 960

Fonte: (Inep, 2020, p. 19)

Uma solução:

Sendo, C o número inicial de candidatos inscritos no concurso e V o número de vagas, pela primeira razão indicada no enunciado, podemos escrever que:

(i) $$\frac{C}{V} = 300 \Longrightarrow C = 300V.$$

Com a inscrição de mais 4.000 candidatos, pela segunda razão indicada no enunciado, podemos escrever que:

(ii) $$\frac{C + 4\,000}{V} = 400 \Longrightarrow C + 4\,000 = 400V.$$

Usando o valor de C da equação (i) na equação (ii) e resolvendo a equação obtida, encontramos que $V = 40$.

Daí, da igualdade (i), vem que $C = 300 \cdot 40 = 12\,000$ candidatos, e o número de candidatos reprovados será

$$(12.000 + 4.000) - 40 = 15.960.$$

Logo, o gabarito da questão é (C).

Agora, vamos analisar a seguinte situação, exposta em uma questão do Enem 2014 a seguir, para tratarmos do conceito e definição de proporção:

Figura 6 – Questão, do Enem PPL 2014, que usa o conceito de proporção.

QUESTÃO 178

Um confeiteiro deseja fazer um bolo cuja receita indica a utilização de açúcar e farinha de trigo em quantidades fornecidas em gramas. Ele sabe que uma determinada xícara utilizada para medir os ingredientes comporta 120 gramas de farinha de trigo e que três dessas xícaras de açúcar correspondem, em gramas, a quatro de farinha de trigo.

Quantos gramas de açúcar cabem em uma dessas xícaras?

A) 30
B) 40
C) 90
D) 160
E) 360

Fonte: (Inep, 2014, p. 30)

Neste caso, pelo enunciado três xícaras comportam (4 · 120) gramas de açúcar, logo, se escrevermos a razão entre a quantidade de xícaras e a quantidade de gramas de açúcar correspondente, ao simplificarmos a fração obtida, teremos: $\frac{3}{480} = \frac{1}{160}$. Esta segunda fração, na igualdade, nos diz que 1 xícara está para 160g de açúcar, que o que queríamos saber, para resolver o problema.

De forma geral, “dadas duas razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, à sentença de igualdade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ chamamos de *proporção*. Os valores a e d são denominados *extremos*, e b e c são chamados *meios*” (Iezzi, Hazzan, Degensanjn, 2006. p. 2).

Ao chamarmos os valores a e d de extremos, e os valores e b e c são de meios, estamos nos referindo as posições que estes valores ocupam na proporção, quando as razões são escritas na notação de divisão. Desta forma:

$$a : b = c : d$$

Na expressão acima, é fácil observar que, b e c estão no meio, e a e d estão nas extremidades.

Tomando a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e multiplicando membro a membro por $(b \cdot d)$, já que por definição de razão b e d são diferentes de zero, obtemos que:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Esta última expressão é uma propriedade das proporções, muito útil, e é descrita por Iezzi, Hazzan, Degensanjn (2006) como: “Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios. Resumidamente, em toda proporção os produtos cruzados são iguais” (Iezzi, Hazzan, Degensanjn, 2006. p. 2).

EXEMPLO 5.2.3

Aqui destacamos uma questão do Enem que pode ser resolvida por meio da propriedade dos produtos cruzados nas proporções:

Figura 7 – Questão, do Enem 2011, que usa as propriedades das proporções.

QUESTÃO 171

Nos últimos cinco anos, 32 mil mulheres de 20 a 24 anos foram internadas nos hospitais do SUS por causa de AVC. Entre os homens da mesma faixa etária, houve 28 mil internações pelo mesmo motivo.

Época. 26 abr. 2010 (adaptado).

Suponha que, nos próximos cinco anos, haja um acréscimo de 8 mil internações de mulheres e que o acréscimo de internações de homens por AVC ocorra na mesma proporção.

De acordo com as informações dadas, o número de homens que seriam internados por AVC, nos próximos cinco anos, corresponderia a

A 4 mil.
B 9 mil.
C 21 mil.
D 35 mil.
E 39 mil.

Fonte: (Inep, 2011, p. 28)

Uma solução:

De acordo com o enunciado, podemos escrever a razão entre o acréscimo de internações de mulheres nos próximos cinco anos e o número de mulheres que foram internadas nos últimos cinco anos, que é, nessa ordem, igual a $\frac{8000}{32000} = \frac{1}{4}$.

Sendo A é o acréscimo de homens que serão internados nos próximos cinco anos, e que nos últimos cinco anos foram internados 28 mil homens, para que o acréscimo A ocorra na mesma proporção que ocorreu nas internações de mulheres, deve valer a igualdade:

$$\frac{A}{28000} = \frac{1}{4}.$$

Usando a propriedade dos produtos cruzados, nesta última proporção e, resolvendo a equação obtida, vem que A = 7.000. Então, o número de internações de homens nos próximos cinco anos, seria de (28.000 + 7.000) = 35.000. Portanto o gabarito da questão é (D).

EXEMPLO 5.2.4

Aqui, mostramos uma questão onde podemos utilizar proporção para discutir técnicas de resolução de problemas de porcentagem:

Figura 8 – Questão, do Enem 2006, que trata de proporção e porcentagem.

Questão 49

Para se obter 1,5 kg do dióxido de urânio puro, matéria-prima para a produção de combustível nuclear, é necessário extrair-se e tratar-se 1,0 tonelada de minério. Assim, o rendimento (dado em % em massa) do tratamento do minério até chegar ao dióxido de urânio puro é de

Ⓐ 0,10%. Ⓑ 0,15%. Ⓒ 0,20%. Ⓓ 1,5%. Ⓔ 2,0%.

Fonte: (Inep, 2006, p. 15)

Uma solução:

Seja P o percentual, ou porcentagem, que 1,5 kg de urânio puro representa de 1,0 tonelada, ou de 1.000 kg de minério. Então, queremos P, tal que, $[\frac{P}{100} \cdot 1000] = 1{,}5$. Dividindo os dois membros desta equação por 1.000, resulta na proporção, $\frac{P}{100} = \frac{1{,}5}{1\,000}$.

Dividindo o numerador e o denominador da segunda razão nesta proporção por 10, resulta em:

$$\frac{P}{100} = \frac{0{,}15}{100}.$$

Por esta última igualdade, conclui-se que P = 0,15 %. Portanto o gabarito da questão é (B).

As ideias de razão entre duas grandezas e proporção, encontram-se em várias situações do cotidiano humano, seja na realidade acadêmica ou análise e resolução de problemas práticos. Um exemplo muito consistente disto encontra-se na razão chamada de *escala de redução o*u *escala de ampliação*, chamada simplesmente de *escala*, muito utilizada por profissionais da construção civil ou da indústria na confecção ou leitura de desenhos, maquetes, plantas técnicas e arquitetônicas, protótipos etc., e por quem precisa desenhar ou ler mapas.

"Denomina-se *escala* de um desenho a razão entre o comprimento considerado no desenho e o correspondente comprimento real, medidos na mesma unidade de medida. Em geral, utilizamos as medidas em centímetro para determinar uma escala" (Giovanni Júnior; Castrucci, 2009. p. 240). A seguir mostramos, como exemplos, algumas questões do Enem que destacam a recorrência do conceito e da aplicabilidade de escala, neste exame.

EXEMPLO 5.2.5

Nesta situação, é necessário relacionar as medidas informadas para identificar qual a escala utilizada:

Figura 9 - Questão, do Enem PPL 2017, sobre a aplicação de escala.

QUESTÃO 143

Uma equipe de ambientalistas apresentou um mapa de uma reserva ambiental em que faltava a especificação da escala utilizada para a sua confecção. O problema foi resolvido, pois um dos integrantes da equipe lembrava-se de que a distância real de 72 km, percorrida na reserva, equivalia a 3,6 cm no mapa.

Qual foi a escala utilizada na confecção do mapa?

- A) 1 : 20
- B) 1 : 2 000
- C) 1 : 20 000
- D) 1 : 200 000
- E) 1 : 2 000 000

Fonte: (Inep, 2017, p. 18)

Uma solução:

Temos que 72 km = 7.200.000 cm. Logo, pela definição, a escala do mapa apresentado pelo ambientalista será:

$$\frac{\text{Distância no mapa em centímetros}}{\text{Distância real em centímetros}} = \frac{3{,}6}{72.000.00} = \frac{36}{72.000.000} = \frac{1}{2.000.000}\,.$$

Portanto, a escala utilizada na confecção do mapa foi de 1: 2.000.000. Logo, o gabarito da questão é (E).

EXEMPLO 5.2.6

Nesta situação, é necessário utilizar a definição de escala e é possível utilizar a propriedade dos produtos cruzados para a conclusão da resolução do problema proposto:

Figura 10 - Questão, do Enem Digital 2020, sobre escalas.

Questão 151 - Matemática e suas Tecnologias

Uma associação desportiva contratou uma empresa especializada para construir um campo de futebol, em formato retangular, com 250 metros de perímetro. Foi elaborada uma planta para esse campo na escala 1 : 2 000.

Na planta, a medida do perímetro do campo de futebol, em metro, é

(A) 0,0005.

(B) 0,125.

(C) 8.

(D) 250.

(E) 500 000.

Fonte: (Inep, 2020, p. 66)

Uma solução:

Sendo P metros o perímetro do campo de futebol na planta, e 250 metros o perímetro do campo e futebol na realidade, usando a definição de escala, podemos escrever a proporção:

$$\frac{P}{250} = \frac{1}{2.000}$$

Utilizando a propriedade dos produtos cruzados, e resolvendo a equação obtida, vem que P = 0,125 metros. Portanto o gabarito da questão é (B).

EXEMPLO 5.2.7

A próxima questão trata de uma situação que envolve escala entre áreas. Neste caso, é preciso lembrar que a definição de escala é a razão entre as medidas lineares correspondentes dos dois objetos analisados. Na solução (I), tratamos com as medidas lineares dos dois objetos analisados usando a definição de escala, e, por fim, concluímos calculando a área pedida.

Figura 11- Questão, do Enem PPL 2017, que trata de escala entre áreas.

QUESTÃO 164

No centro de uma praça será construída uma estátua que ocupará um terreno quadrado com área de 9 metros quadrados. O executor da obra percebeu que a escala do desenho na planta baixa do projeto é de 1 : 25.

Na planta baixa, a área da figura que representa esse terreno, em centímetro quadrado, é

- (A) 144.
- (B) 225.
- (C) 3 600.
- (D) 7 500.
- (E) 32 400.

Fonte: (Inep, 2017, p. 26)

Solução (I):

Como a praça é quadrada e tem área de 9 m^2, então seu lado mede 3 metros, que corresponde a 300 centímetros, daí, sendo $\boldsymbol{l}$ a medida, em centímetros, do lado da figura que representa o terreno, pela escala dada, podemos escrever, que:

$$\frac{l}{300} = \frac{1}{25}$$

Usando a propriedade dos produtos cruzados na proporção e resolvendo a equação obtida, segue que $\boldsymbol{l}$ = 12 cm, logo a área pedida será $12^2 = 144$ cm^2. Portanto, o gabarito da questão é (A).

Para a solução (II), que é mais geral, podemos usar o fato de que, sendo $\boldsymbol{e}$ a escala entre dois objetos, e $\boldsymbol{E_a}$ e razão entre as respectivas áreas destes dois objetos, na mesma unidade de área, têm-se que:

$$\boldsymbol{E_a = e^2}$$

A demonstração desta propriedade é omitida aqui por ser extensa , contudo ela pode ser encontrada em Lima *et. al* (2011, p. 49), e é baseada no estudo das propriedades das figuras semelhantes, em geometria.

Solução (II):

Sabendo que 9 m^2 = 90.000 cm^2, e sendo S a área da figura que representa o terreno, em centímetros quadrados, pela propriedade que acabamos de ver, e pela escala dada, podemos escrever, que:

$$\frac{S}{90.000} = \left(\frac{1}{25}\right)^2 \Rightarrow \frac{S}{90.000} = \frac{1}{625}$$

Usando a propriedade dos produtos cruzados na segunda proporção e resolvendo a equação obtida, encontramos que S = 144 cm^2. Portanto o gabarito da questão é (A).

EXEMPLO 5.2.8

A próxima questão mostra uma situação que envolve a relação entre escala e os volumes de dois objetos. Para resolvê-la, vamos usar uma propriedade, que de acordo com Lima *et. al* (2011, p. 50) tem justificativa análoga à propriedade vista para a escala entre áreas.

Assim, sendo $\boldsymbol{e}$ a escala entre dois objetos, e $\boldsymbol{E_v}$ e razão entre os respectivos volumes destes dois objetos, na mesma unidade de volume, têm-se que:

$$\boldsymbol{E_v} = e^3$$

Figura 12 - Questão, do Enem 2017, que trata de escala entre volumes.

QUESTÃO 165

Em uma de suas viagens, um turista comprou uma lembrança de um dos monumentos que visitou. Na base do objeto há informações dizendo que se trata de uma peça em escala 1 : 400, e que seu volume é de 25 cm^3.

O volume do monumento original, em metro cúbico, é de

A 100.

B 400.

C 1 600.

D 6 250.

E 10 000.

Fonte: (Inep, 2017, p. 25)

Uma solução:

Sabendo que 25 cm^3 = $\frac{25}{1.000.000}$ m^3, e sendo V em metros cúbicos, o volume original do monumento, pela propriedade que acabamos de ver, e pela escala dada, podemos escrever que:

$$\frac{\frac{25}{1.000.000}}{V} = \left(\frac{1}{400}\right)^3 \Rightarrow \frac{\frac{25}{1.000.000}}{V} = \frac{1}{64.000.000}$$

Usando a propriedade dos produtos cruzados na segunda proporção e resolvendo a equação obtida, encontramos que V = 1.600 m^3. Portanto, o gabarito da questão é (C).

5.3 Grandezas diretamente proporcionais e proporcionalidade

Iezzi, Hazzan e Degensanjn (2006), nos apresentam o conceito de grandezas diretamente proporcionais a partir de uma situação, hipotética, da seguinte maneira:

> Uma pequena loja vende certo tipo de bolsa por R$ 40,00 a unidade. Chamando de ***x*** a quantidade vendida e de ***y*** a receita (em reais) proveniente da venda dessas bolsas, teremos a seguinte correspondência:

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**...**	**n**	**...**
y	40	80	120	160	200	...	40n	...

> Observe que, quando o valor de *x* dobra, também dobra o valor de *y*; quando triplica o valor de *x*, também triplica o valor de *y*, e assim por diante. Em consequência disso, a razão entre cada valor de *x* e o correspondente *y* também é constante e vale $\frac{1}{40}$. Neste caso, dizemos que as grandezas expressas por *x* e *y* são *diretamente proporcionais* (Iezzi, Hazzan, Degensanjn, 2006, p. 7)

Observemos que nesta situação, a receita *y* (em reais) é função de *x* (quantidade de bolsas vendidas), de modo que *y* = 40*x*. Usando o conceito de função, Lima *et.al* (2012), propõe uma discussão a respeito da relação de proporcionalidade entre grandezas mais rigorosa, do seguinte modo:

> Sejam *x* e *y* dois tipos de grandezas. Diz-se que *y* é *proporcional* a *x* quando:
> **1°** As grandezas *x* e *y* acham-se de tal modo relacionadas que a cada valor de *x* corresponde um valor bem determinado de *y*. Diz-se então que existe uma correspondência $x \rightarrow y$ e que *y é função* de *x*.
> Quando escrevemos $x \rightarrow y$ estamos querendo dizer que *y* é o valor que corresponde a *x*.
> **2°** Quanto maior for *x*, maior será *y*. Em símbolos: se $x \rightarrow y$ *e* $x' \rightarrow y'$ então $x < y$ implica $x' < y'$.
> **3°** Se um valor x_0 corresponde y_0 e c é um número qualquer, então o valor de *y* que corresponde a cx_0 é cy_0. Simbolicamente se $x_0 \rightarrow y_0$ então c$x_0 \rightarrow$ cy_0 (Lima *et. al*, 2012, p. 2).

Sendo c_n um número não nulo, tomando duas variáveis *x* e *y* que satisfazem essas três condições, podemos observar que:

$$\frac{c_0 y}{c_0 x} = \frac{c_1 y}{c_1 x} = \frac{c_2 y}{c_2 x} = \ldots \ldots = \frac{c_n y}{c_n x} = \frac{y}{x} = k, \text{ que implica em, } \boldsymbol{y = x \cdot k},$$

de onde tiramos ainda que, se x =1, então $y = k$. Ou seja, nessas condições existe um número k não nulo, tal que ($x \cdot k$) → y, onde, se x = 1, então 1 → k.

Resumindo, segundo Lima *et. al* (2012), se uma relação $x \to y$ satisfaz às três condições dadas acima, dizemos que *x → y é uma proporcionalidade* e o valor de c, tal que 1 → c, é o *fator de proporcionalidade* desta relação.

De fato, no caso da receita y em função do número de bolsas vendidas x, apresentado acima, é fácil perceber que se forem vendidas 10 bolsas, a receita será 400 reais, e se forem vendidas $10c_n$ bolsas a receita será $400c_n$ reais. E que para cada y' que corresponde a um x', têm-se $\frac{y'}{x'}$ = 40, e ainda, 1 → 40.

Pelo que foi mostrado até aqui, podemos afirmar que, dadas duas grandezas representadas pelos valores x e y, se existir um número k, tal que $y = x \cdot k$, para todo x, então as duas grandezas são *diretamente proporcionais* e a relação $y = x \cdot k$ é uma função de x em y, chamada *proporcionalidade*, o número k chama-se constante de proporcionalidade entre y e x.

EXEMPLO 5.3.1

A resolução da questão a seguir explora a relação de proporcionalidade entre duas grandezas que discutimos aqui:

Figura 13 - Questão, do Enem PPL 2010, sobre proporcionalidade entre grandezas.

Questão 147

O hábito de comer um prato de folhas todo dia faz proezas para o corpo. Uma das formas de variar o sabor das saladas é experimentar diferentes molhos. Um molho de iogurte com mostarda contém 2 colheres de sopa de iogurte desnatado, 1 colher de sopa de mostarda, 4 colheres de sopa de água, 2 colheres de sopa de azeite.

DESGUALDO. P. Os Segredos da Supersalada. Revista Saúde. Jan. 2010.

Considerando que uma colher de sopa equivale a aproximadamente 15 mL, qual é o número máximo de doses desse molho que se faz utilizando 1,5 L de azeite e mantendo a proporcionalidade das quantidades dos demais ingredientes?

A 5

B 20

C 50

D 200

E 500

Fonte: (Inep, 2010, p. 22)

Uma solução:

Sendo q a quantidade de azeite (em mililitros) utilizada no preparo do molho, e n o número de doses de molho que é possível fazer com q ml de azeite, para manter a proporcionalidade entre n e q, deve existir um número não nulo k, tal que:

$$n = q \cdot k$$

Pelo enunciado, 1 dose de molho corresponde 2 colheres de sopa de azeite, equivalentes a 30 ml de azeite, daí:

$$1 = 30 \cdot k \Rightarrow k = \frac{1}{30}$$

Logo, como 1,5 l = 1.500 ml, sendo n_x o número de doses de molho que corresponde a 1,5 l de azeite, vem que:

$$n_x = 1.500 \cdot \frac{1}{30} = 50 \text{ doses.}$$

Portanto o gabarito da questão é (C).

"Um tipo de processo matemático, ao mesmo tempo útil e milenar, é a chamada *regra de três*" (Lima, *et. al*, 2012, p. 5). Para deduzir este processo, que pode ser utilizando na resolução deste último problema e de muitos outros que envolvem grandezas proporcionais, consideremos duas grandezas representadas por x e y, e k a constante de proporcionalidade entre elas. Nesta relação, se x_1 corresponder a y_1 e x_2 corresponder a y_2, segue que, $y_1 = x_1 \cdot k$, que implica em $\frac{y_1}{x_1} = k$, e $y_2 = x_2 \cdot k$, que implica em $\frac{y_2}{x_2} = k$, ou seja, $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$.

Observemos, nesta última proporção, que conhecidos três dos números x_1, x_2, y_1, y_2, usando a propriedade dos produtos cruzados, descobrimos o quarto número sem a necessidade de sabermos o fator de proporcionalidade, esse é o processo chamado de *regra de três*.

A seguir, mostramos duas questões de edições passadas do Enem que podem ser resolvidas utilizando a regra de três:

EXEMPLO 5.3.2

Figura 14 - Questão, do Enem 2022, que usa Regra de Três na resolução de problema.

QUESTÃO 169

O pacote básico de um jogo para smartphone, que é vendido a R$ 50,00, contém 2 000 gemas e 100 000 moedas de ouro, que são itens utilizáveis nesse jogo.

A empresa que comercializa esse jogo decidiu criar um pacote especial que será vendido a R$ 100,00 e que se diferenciará do pacote básico por apresentar maiores quantidades de gemas e moedas de ouro. Para estimular as vendas desse novo pacote, a empresa decidiu inserir nele 6 000 gemas a mais, em relação ao que o cliente teria caso optasse por comprar, com a mesma quantia, dois pacotes básicos.

A quantidade de moedas de ouro que a empresa deverá inserir ao pacote especial, para que seja mantida a mesma proporção existente entre as quantidades de gemas e de moedas de ouro contidas no pacote básico, é

A. 50 000.
B. 100 000.
C. 200 000.
D. 300 000.
E. 400 000.

Fonte: (Inep, 2022, p. 28)

Uma solução

Pelo enunciado, 1.00.000 moedas de ouro correspondem a 2.000 gemas. Sendo N o número de moedas de ouro que corresponde 8.000 gemas, como deve ser mantida a proporcionalidade entre o número de moedas e o número de gemas, podemos escrever que $\frac{N}{100.000} = \frac{8.000}{2.000}$, de onde vem:

$$2.000 \cdot N = 100.000 \cdot 8.000 \Rightarrow N = 400.000 \text{ moedas de ouro.}$$

Portanto o gabarito da questão é (E).

EXEMPLO 5.3.2

Figura 15 - Questão, do Enem 2010, que usa Regra de Três na resolução de problema.

Questão 143

FONTES ALTERNATIVAS

Há um novo impulso para produzir combustível a partir de gordura animal. Em abril, a *High Plains Bioenergy* inaugurou uma biorrefinaria próxima a uma fábrica de processamento de carne suína em Guymon, Oklahoma. A refinaria converte a gordura do porco, juntamente com o óleo vegetal, em biodiesel. A expectativa da fábrica é transformar 14 milhões de quilogramas de banha em 112 milhões de litros de biodiesel.

Revista Scientific American. Brasil, ago. 2009 (adaptado).

Considere que haja uma proporção direta entre a massa de banha transformada e o volume de biodiesel produzido.

Para produzir 48 milhões de litros de biodiesel, a massa de banha necessária, em quilogramas, será de, aproximadamente,

A) 6 milhões.
B) 33 milhões.
C) 78 milhões.
D) 146 milhões.
E) 384 milhões.

Fonte: (Inep 2010, p. 20)

Uma solução:

Pelo enunciado, há uma proporção direta entre a massa de banha transformada e o volume de biodiesel produzido, e 14.000.000 kg de banha corresponde 112.000.000 l de biodiesel. Sendo M a massa de banha que corresponde a 48.000.000 l de biodiesel, podemos escrever que $\frac{M}{14.000.000} = \frac{48.000.000}{112.000.000}$, de onde vem:

$$112.000.000 \cdot M = 14.000.000 \cdot 48.000.000 \Rightarrow M = 6.000.000 \text{ kg de banha.}$$

Portanto o gabarito da questão é (A).

Segundo Lima *et. al* (2012), uma situação inerente ao estudo de proporcionalidade é a *divisão em partes proporcionais* de um número. Para entender do que se trata este tipo de operação, o autor expõe uma definição de números proporcionais da seguinte maneira:

Diz-se que os números b_1, b_2, ..., b_n, nesta ordem, são proporcionais aos números a_1, a_2, ..., a_n, nesta ordem, se:

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \ldots = \frac{b_n}{a_n} = k$$

Desta forma, por exemplo, os números (6, 4, 8, 10), nesta ordem, são proporcionais aos números (9, 6, 12, 15), nesta ordem, onde $k = \frac{2}{3}$.

Podemos observar que, se b_1, b_2, ..., b_n, nesta ordem, são proporcionais aos números a_1, a_2, ..., a_n, nesta ordem, segue que, $b_1 = ka_1$, $b_2 = ka_2$, ... , $b_n = ka_n$, de onde podemos escrever que $(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\,k$, que implica em, $\frac{(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)}{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)} = k$.

Em posse da definição de números proporcionais, de acordo com Lima *et. al* (2012), dizemos que, dado um número *w*, dividi-lo em partes proporcionais a m_1, m_2, ..., m_n, é o mesmo que encontrar os números p_1, p_2, ..., p_n, tais que,

$$\frac{p_1}{m_1} = \frac{p_2}{m_2} = \ldots = \frac{p_n}{m_n} = k \quad e \quad w = p_1 + p_2 + \ldots + p_n.$$

É útil observarmos, pelo que foi visto a acima, que se $\frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = k$, isso implica que, $k = \left(\frac{w}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}\right)$.

EXEMPLO 5.3.3

Neste exemplo destacamos uma questão do Enem que explora conhecimentos relativos à divisão em partes proporcionais:

Figura 16 - Questão, do Enem 2020, que trata de divisão em partes proporcionais.

Questão 166 2020enem2020enem2020enem

Antônio, Joaquim e José são sócios de uma empresa cujo capital é dividido, entre os três, em partes proporcionais a: 4, 6 e 6, respectivamente. Com a intenção de igualar a participação dos três sócios no capital da empresa, Antônio pretende adquirir uma fração do capital de cada um dos outros dois sócios.

A fração do capital de cada sócio que Antônio deverá adquirir é

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{9}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{4}{3}$

Fonte: (Inep, 2020, p. 26)

Uma solução:

Sejam *a*, *b* e *c* as partes de Antônio, Joaquim e José, respectivamente, no capital investido na empresa. Pelo enunciado, estes capitais são proporcionais a 4, 6 e 6, nesta ordem, portanto deve ocorrer que $\frac{a}{4} = \frac{b}{6} = \frac{c}{6} = k$, daí temos que $a = 4k$, $b = 6k$ e $c = 6k$, que implica que o capital total da empresa é igual a $(a + b + c) = 16k$.

Para que os três sócios possuam capitais iguais, cada um deles deverá ser dono de $\frac{16k}{3}$ após a compra de Antônio, então, se q for a quantia que Antônio deve adquirir, dos outros dois sócios, têm-se que:

$$4k + q = \frac{16k}{3} \Rightarrow q = \frac{4k}{3}$$

Como Joaquim e José têm capitais, cada um deles, igual a $6k$, Antônio deve comprar $\frac{2k}{3}$ de cada um deles. Como, $\frac{2k}{3}$ representa $\frac{1}{9}$ de $6k$, o gabarito da questão é (C).

Lima *et. al* (2012), também destaca que uma grandeza pode ser proporcional a várias outras, e nos mostra um problema que exemplifica uma situação onde este conceito se apresenta:

> Trabalhando 8 horas por dia, 3 trabalhadores constroem um muro de 40 m de comprimento em 12 dias. Se o número de horas de trabalho diário for reduzido para 6 e o número de trabalhadores aumentado para 5, qual o comprimento de um muro de mesma altura que eles construíram em 15 dias? (Lima *et.al*, 2012, p. 14).

Observemos que, neste caso, admitindo que os trabalhadores mantêm uma produção constante por dia e por hora de trabalho, se dobrarmos, ou triplicarmos, ou quadruplicarmos, ..., etc., qualquer uma das outras grandezas (número de trabalhadores, número de dias ou número de horas) o comprimento de muro construído será dobrado, ou triplicado, ou quadruplicado, ..., etc. Logo, o comprimento de muro construído é diretamente proporcional às demais grandezas, e consequentemente ao produtos entre elas, ou seja, o comprimento de muro construído é função das outras grandezas (número de trabalhadores, número de dias ou número de horas).

Por este exemplo, podemos inferir que, dada uma grandeza, representada por y, e outras três grandezas, representadas por x, u e w, se y é diretamente proporcional a estas outras grandezas, então y é diretamente proporcional ao produto $(x \cdot u \cdot w)$, logo existe um número k, tal que $y = (x \cdot u \cdot w) \cdot k$, para todo valor do produto $(x \cdot u \cdot w)$.

Lima *et. al* (2012), define esta relação de proporcionalidade entre uma grandeza e várias outras de maneira mais rigorosa a partir de deduções geométricas, e usando a notação funcional conclui:

> Por simplicidade, consideremos apenas três variáveis, mas é claro que tudo o que dissermos valerá para um número qualquer delas.
> Consideremos uma grandeza cujo valor w depende dos valores x, y e z de três outras. Escrevemos então $w = f(x, y, z)$. Diremos que w é proporcional a x, y e z quando, mantendo fixos dois valores quaisquer desses valores, w for proporcional a variável restante. Quando este é o caso, tem-se
> $$\begin{aligned} w = f(x, y, z) &= f(x \cdot 1\ , y, z) = x \cdot f(1\ , y, z) \\ &= xy \cdot f(1\ , 1, z) = xyz \cdot f(1\ , 1, 1), \end{aligned}$$
>
> Portanto $w = \mathrm{k} \cdot xyz$, onde o fator de proporcionalidade é $k = (1\ , 1, 1)$.
> **Conclusão:** w é proporcional a x, y e z quando é proporcional ao produto xyz, ou seja, quando $\mathrm{w} = \mathrm{k} \cdot xyz$, sendo k o valor de w que corresponde a $x = 1$, $y = 1$ e $z = 1$. (Lima *et.al*, 2012, p. 14).

Daí, uma solução para o problema do muro, proposto logo acima por Lima *et.al* (2012), pode ser obtida usando regra de três, pois pelo enunciado, um muro de 40 m de comprimento corresponde ao trabalho realizado por 3 trabalhadores, em 12 dias, trabalhando cada um 8 horas por dia. Sendo L o comprimento do muro correspondente ao trabalho realizado por 5 trabalhadores, em 15 dias, trabalhando cada um 6 horas por dia, podemos escrever:

$$\frac{40}{L} = \frac{8 \cdot 3 \cdot 12}{6 \cdot 5 \cdot 15},$$

de onde obtemos que, L = 62,5 m de comprimento.

EXEMPLO 5.3.4

Neste exemplo mostramos uma questão do Enem expõe um problema com uma grandeza proporcional a várias outras:

Figura 17 - Questão, do Enem 2009, que trata de grandeza proporcional a várias outras.

Questão 162

Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo, e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha.

Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de

A) 920 kg.
B) 800 kg.
C) 720 kg.
D) 600 kg.
E) 570 kg.

Fonte: (Inep, 2009, p. 25)

Uma solução:

Pelo que está exposto, a quantidade de alimento arrecadado é proporcional ao número de alunos trabalhando, à quantidade de dias de arrecadação e à quantidade de horas de trabalho por dia.

Tem-se que, 120 quilogramas é a quantidade de alimentos arrecadados, correspondente ao trabalho realizado por 20 alunos, em 10 dias, 3 horas por dia. Como se juntaram ao grupo mais 30 alunos e restam 20 dias para se concluir a tarefa, trabalhando 4 horas por dia, temos que, se q for a quantidade de alimentos arrecadados, em quilogramas, correspondente ao trabalho realizado por 50 alunos, em 20 dias, trabalhando 4 horas por dia, podemos escrever que:

$$\frac{120}{q} = \frac{20 \cdot 10 \cdot 3}{50 \cdot 20 \cdot 4},$$

de onde obtemos que q = 800 kg. Logo, o total de alimento arrecadado será (120 + 800) kg, portanto o gabarito da questão é (A).

5.4 Grandezas inversamente proporcionais e proporcionalidade inversa

Há ainda outro modo de proporcionalidade entre duas grandezas, sem que elas sejam diretamente proporcionais. Iezzi, Hazzan, Degensanjn (2006), expõem este tipo de relação, da seguinte forma:

> Numa estrada a distância entre duas cidades é 240 km. Se um carro percorrer essa estrada a uma velocidade média *x* (em km/h), o tempo correspondente para ir de uma cidade a outra será *y* (em horas). Teremos a seguinte correspondência:

x	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**...**	***v***	**...**
y	24	12	8	6	4,8	...	$\frac{240}{v}$	...

> Observemos que, se a velocidade dobra, o tempo de viagem se reduz à metade; se a velocidade triplica, o tempo de viagem se reduz à terça parte, e assim por diante. Consequentemente, o produto de cada valor de *x* pelo seu correspondente *y* é constante e vale 240. Dizemos, então, que as grandezas expressas por *x* e *y* são *inversamente proporcionais* (Iezzi, Hazzan, Degensanjn, 2006, p. 7).

É fácil observar que nesta situação, o tempo *y* (em horas) é função da velocidade *x* (em km/h), tal que $y = \frac{240}{x}$.

Lima *et.al* (2012), nos disponibiliza uma apresentação mais rigorosa do conceito de grandezas inversamente proporcionais:

> Sejam *x*, *y* dois tipos de grandezas. Diz-se que *y* é *inversamente proporcional* a *x* quando:
> **1°** As grandezas *x* e *y* acham-se relacionadas de tal modo que a cada valor de *x* corresponde um valor bem determinado de *y*. Escreve-se então $x \to y$ e diz-se que *y é função* de *x*. Costuma-se também escrever $y = f(x)$.
> **2°** Quanto maior for *x*, menor será *y*. Simbolicamente: se $x \to y$ e $x' \to y'$ tem-se a implicação $x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$.

> **3°** Se y_0 é o valor de *y* que corresponde ao valor de x_0 de *x* e c é qualquer número, então ao valor cx_0 corresponde $\frac{1}{c}y_0$. Ou seja: se $x_0 \to y_0$ então $cx_0 \to \frac{1}{c}y_0$. Na notação funcional *f(cx)* = $\frac{1}{c}$ *f(x)*. (Lima *et. al*, 2012, p. 15).

Observemos que, se $x \to y$ é uma proporcionalidade inversa $1 \to k$, na terceira condição acima tomando $c = x$, decorre que o valor que corresponde a $x = x \cdot 1$ é $y = \frac{1}{x} \cdot k$, logo qualquer que seja *x* em $x \to y$ têm-se $\boldsymbol{x \cdot y = k}$.

Isto quer dizer, que quando duas grandezas *x* e *y* são inversamente proporcionais, o produto de *x* por seu correspondente *y* é constante e independe de *x*. Disto, podemos afirmar que, dadas duas grandezas representadas pelos valores *x* e *y*, se existir um número *k*, tal que $y = \frac{k}{x}$, para todo *x*, então as duas grandezas são *inversamente proporcionais* e a relação $y = \frac{k}{x}$ é uma função de *x* em *y*, chamada *proporcionalidade inversa*, e o número k chama-se *constante de proporcionalidade inversa* entre *x* e *y*.

Em algumas situações é útil observar que de $y = \frac{k}{x}$, equivale a $y = \frac{1}{x} \cdot k$, ou seja, as grandezas *x* e *y* são inversamente proporcionais se *y* for diretamente proporcional $\frac{1}{x}$.

Agora, consideremos duas grandezas representadas por *x* e *y*, e k a constante de proporcionalidade inversa entre elas. Nesta relação, se x_1 corresponder a y_1 e x_2 corresponder a y_2, segue que, $x_1 \cdot y_1 = k$ e $x_2 \cdot y_2 = k$, que implica em, $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$, ou seja, $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$.

Nesta última proporção, conhecendo três dos números x_1, x_2, y_1, y_2, e sem conhecer *k*, usando a propriedade dos produtos cruzados descobrimos o quarto número. Esse processo é a *regra de três inversa*.

EXEMPLO 5.4.1

Neste exemplo mostramos um problema que pode ser resolvido usando a regra de inversa:

Figura 18 - Questão, do Enem 2021, que usa Regra de três inversa.

Questão 159 enem2021

Em uma corrida automobilística, os carros podem fazer paradas nos boxes para efetuar trocas de pneus. Nessas trocas, o trabalho é feito por um grupo de três pessoas em cada pneu. Considere que os grupos iniciam o trabalho no mesmo instante, trabalham à mesma velocidade e cada grupo trabalha em um único pneu. Com os quatro grupos completos, são necessários 4 segundos para que a troca seja efetuada. O tempo gasto por um grupo para trocar um pneu é inversamente proporcional ao número de pessoas trabalhando nele. Em uma dessas paradas, um dos trabalhadores passou mal, não pôde participar da troca e nem foi substituído, de forma que um dos quatro grupos de troca ficou reduzido.

Nessa parada específica, com um dos grupos reduzido, qual foi o tempo gasto, em segundo, para trocar os quatro pneus?

A 6,0
B 5,7
C 5,0
D 4,5
E 4,4

Fonte: (Inep, 2021, p. 25)

Uma solução:

Pelo enunciado, 4 segundos é tempo para a troca de um pneu, que corresponde ao trabalho realizado por 3 pessoas nessa troca. Sendo, T_t segundos o tempo para a troca de um pneu, que corresponde ao trabalho realizado por 2 pessoas, e levando em conta que o tempo de troca de um pneu é inversamente proporcional ao número de pessoas que realizam a troca, podemos escrever que $\frac{4}{T_t} = \frac{2}{3}$, de onde vem:

$$2 \cdot T_t = 4 \cdot 3 \;\Rightarrow\; T_t = 6 \text{ segundos.}$$

Portanto o gabarito da questão é (A).

Assim como uma grandeza pode ser diretamente proporcional a várias outras, há situações em que encontramos uma *grandeza direta ou inversamente proporcional a várias outras*.

Pelo que vimos até aqui, sendo *w* é uma grandeza diretamente proporcional as grandezas *x*, *y* e *z* e inversamente proporcional as grandezas *u* e *v*, isso significa que *w* é diretamente proporcional a *x*, *y*, *z*, $\frac{1}{u}$ e $\frac{1}{v}$, portanto existe um número *k*, tal que

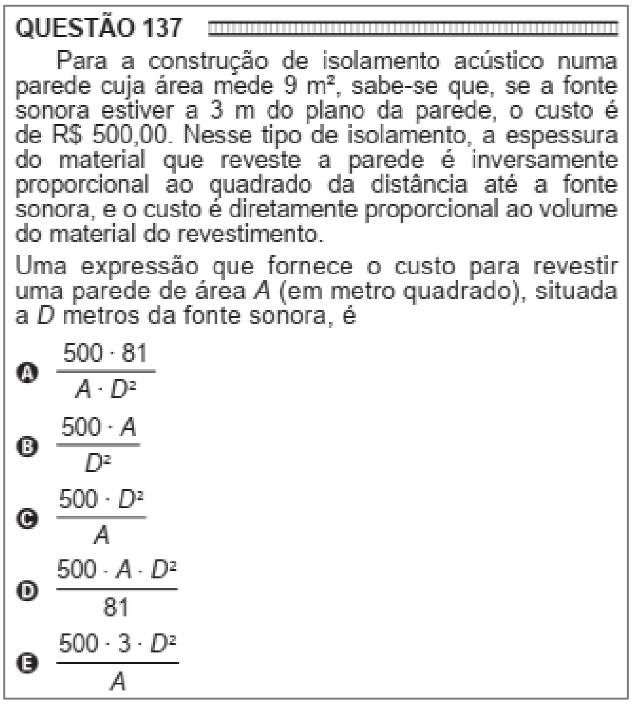
$$w = \left(x \cdot y \cdot z \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{v}\right) k.$$

Usando a notação funcional, Lima *et.al* (2012) nos explica esta relação considerando uma grandeza w que é diretamente proporcional às grandezas x, y e z e inversamente proporcional às grandezas u e v, concluindo que, "se $w = f\,(x, y, z, u, v)$ é diretamente proporcional a x, y e z e inversamente proporcional a u e v, então w é diretamente proporcional a $\frac{xyz}{uv}$" (Lima *et. al*, 2012, p. 20). O autor ainda explica que tal argumento é válido para um número qualquer de grandezas relacionadas a w.

No exemplo a seguir, mostramos um problema proposto por uma questão do Enem que explora esta relação de uma grandeza ser direta ou inversamente proporcional a várias outras:

EXEMPLO 5.4.2

Figura 19 - Questão, do Enem 2016, grandeza direta ou inversamente proporcional a várias outras.



QUESTÃO 137

Para a construção de isolamento acústico numa parede cuja área mede 9 m², sabe-se que, se a fonte sonora estiver a 3 m do plano da parede, o custo é de R$ 500,00. Nesse tipo de isolamento, a espessura do material que reveste a parede é inversamente proporcional ao quadrado da distância até a fonte sonora, e o custo é diretamente proporcional ao volume do material do revestimento.

Uma expressão que fornece o custo para revestir uma parede de área *A* (em metro quadrado), situada a *D* metros da fonte sonora, é

A) $\frac{500 \cdot 81}{A \cdot D^2}$

B) $\frac{500 \cdot A}{D^2}$

C) $\frac{500 \cdot D^2}{A}$

D) $\frac{500 \cdot A \cdot D^2}{81}$

E) $\frac{500 \cdot 3 \cdot D^2}{A}$

Fonte: (Inep, 2016, p. 17)

Uma solução:

Sejam E a espessura do material que reveste a parede, D a distância da parede até a fonte sonora, V o volume do material do revestimento e A a área a ser revestida. Como, pelo enunciado, E é inversamente proporcional ao quadrado de D, segue que $E = \left(k_1 \cdot \frac{1}{D^2}\right)$. Como $V = E \cdot A$, vem que, $V = \left(k_1 \cdot \frac{1}{D^2}\right) \cdot A$.

Sendo C o custo para revestir uma parede de área A, como, pelo enunciado C é diretamente proporcional a V, podemos escrever que $C = k_2 \cdot V$, substituindo o valor de V, obtém-se que $C = k_2 k_1 \cdot \frac{1}{D^2} \cdot A$.

O enunciado diz que, quando $D = 3$ e $A = 9$, tem-se $C = 500$, daí, substituindo estes valores na igualdade acima e obtemos que $k_2 k_1 = 500$, ou seja, $C = \frac{500 \cdot A}{D^2}$.

Portanto, o gabarito da questão é (B).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho, motivado por observações realizadas em uma escola pública de ensino médio do Ceará, buscou entender a importância, de se valorizar a promoção de atividades didáticas voltadas ao ensino e aprendizagem, para alunos do ensino médio, dos conceitos, das definições e das aplicações práticas e teóricas de razão, proporção e proporcionalidade, e também, compreender as implicações positivas do ensino destes conteúdos motivado e contextualizado por questões do Enem.

As observações acima citadas, induziram a percepção de que muitos alunos de ensino médio pleiteiam o ingresso no ensino superior por meio do Enem, e com este fim tais alunos, e seus professores de Matemática, buscam modos de maximizar o processo de preparação para essa prova, procurando entender melhor os critérios avaliativos do Enem e direcionar os esforços de ensino e estudo para conteúdos mais recorrentes nas últimas edições desse exame.

A pesquisa bibliográfica aqui desenvolvida, mostrou que razão e proporção, juntamente com outros temas e conceitos matemáticos relativos, tais como: números fracionários, porcentagem, escala, proporcionalidade, regra de três etc., são objetos relevantes das competências e habilidades avaliadas pela prova de matemática do Enem, e têm sido explorado por diversas questões nas edições passadas dessa prova.

As análises dos dados estatísticos do Spaece e do Sisedu sobre aprendizagem de razão e proporção dos alunos de ensino médio, que aqui foram expostos, demonstraram que muitos alunos de ensino médio em escolas públicas do Ceará, têm, nos últimos anos, mostrado certa dificuldade na interpretação e resolução de problemas que envolvem os conceitos matemáticos relativos à razão e proporção, embora tais conteúdos ocupem uma considerável porção do currículo escolar do ensino fundamental, como mostramos aqui pelo estudo dos documentos normativos da educação brasileira e reguladores do currículo escolar de Matemática.

A inspeção de provas de matemática de edições anteriores do Enem, em busca de questões que exploram habilidades e competências relativas ao tema razão e proporção, mostrou que é recomendável que esses conteúdos, juntamente com o conceito de proporcionalidade entre grandezas, sejam valorizados no currículo de Matemática do ensino médio, oportunizando aos alunos atividades de revisão desses conteúdos, e uma consolidação teórica mais rigorosa do que a vista no ensino fundamental, em vista do considerável nível de complexidade de algumas dessas questões. Essa inspeção também revelou que há várias questões do Enem que tratam de razão, proporção e temas relacionados, que se mostram em um nível fácil de compreensão e resolução, fazendo destas questões excelentes objetos didáticos para exemplificar ou ilustrar situações para o ensino de Matemática de forma contextualizada, especialmente para turmas ou alunos que mostram mais dificuldade no entendimento teórico desses conceitos.

Enfim, a partir desses resultados, este trabalho busca se caracterizar como um documento de consulta e orientação didática, motivação à pesquisa e à reflexão, para professores de Matemática do ensino médio interessados em diversificar sua didática no ensino de temas e conceitos matemáticos relativos à “razão e proporção”, de forma mais significativa e teoricamente melhor fundamentada, usando uma linguagem teórica mais madura, inerente às características curriculares do ensino médio e alinhada e suportada didaticamente pelas intencionalidades formativas, implícita e explicitamente propostas pela prova de matemática do Enem.

REFERÊNCIAS

AMORIELLE, Isabelle Silva. **Matemática no Ensino Médio e o Enem.** 2022. 58 f. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura de Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2018. Disponível em: < https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/192497/TCC-Isabelle%20Amorielle.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 20 nov. 2023.

BARRETO, Isva Maria Almeida. **Problemas verbais multiplicativos de quarta-proporcional: a diversidade de procedimentos de resolução.** 2001. 123 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001. Disponível em: < https://repositorio.pucsp.br/bitstream/handle/18485/1/dissertacao_isva_maria_barreto.pdf >. Acesso em: 09 jan. 2024.

BOYER, Carly. B. História da Matemática. – 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blüncher, 1996.

BRASIL. **Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), documento básico.** Brasília: Ministério da Educação (MEC). Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), 2002 Disponível em: <https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/avaliacoes_e_exames_da_educacao_basica/enem_exame_nacional_do_ensino_medio_documento_basico_2002.pdf>. Acesso em: 02 jan. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Portaria Ministerial n.º 438, de 28 de maio de 1998. Institui o Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 1º jun. 1998. Disponível em: <http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/diretrizes_p0178-0181_c.pdf>. Acesso em: 26 dez. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Orientações Curriculares Para o Ensino Médio**. Brasília. MEC. 2006. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf > Acesso em: 22 dez. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **MATRIZ DE REFERÊNCIA ENEM**. Brasília. Inep. 2009. Disponível em: < https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf > Acesso em: 13 dez. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio – Parte I: Bases Legais.** Brasília. MEC. 2000. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf > Acesso em: 16 jan. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em: 11 jan. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Notícias: ENEM - Exame bate recorde de inscritos e chega a 9,5 milhões de candidatos na edição 2014**. Brasília. 2014. Disponível em: <

http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/418-enem-946573306/20456-exame-bate-recorde-de-inscritos-e-chega-a-95-milhoes-de-candidatos-na-edicao-2014> Acesso em 04 jan. 2024.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Lei número 9394, 20 de dezembro de 1996. Disponível em: < https://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/529732/lei_de_diretrizes_e_bases_1ed.pdf >. Acesso em: 26 dez. 2023.

CEARÁ. Secretaria da Educação. **Resultados por Descritores (Spaece)**. Fortaleza. Seduc. 2023. Disponível em: < https://www.seduc.ce.gov.br/resultado-por-descritores/>. Acesso em: 15 dez. 2023.

CEARÁ. Secretaria da Educação. **SISEDU - Sistema Online de Avaliação, Suporte e Acompanhamento Educacional.** Fortaleza. Seduc. 2020. Disponível em: < https://www.seduc.ce.gov.br/resultado-por-descritores/>. Acesso em: 15 dez. 2023.

CEARÁ. Secretaria da Educação. **Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará – SPAECE**. Fortaleza. Seduc. 2017. Disponível em: < https://www.seduc.ce.gov.br/spaece/#:~:text=O%20SPAECE%2C%20na%20vertente%20Avalia%C3%A7%C3%A3o,em%20L%C3%ADngua%20Portuguesa%20e%20Matem%C3%A1tica>. Acesso em: 18 dez. 2023.

CEARÁ. Secretaria da Educação. Programa Cientista Chefe em Educação Básica. **Nota Técnica – Processo Avaliativo da Iniciativa Foco na Aprendizagem (IFA)**. Fortaleza.. Seduc. 2023a. Disponível em: < https://www.seduc.ce.gov.br/wp-content/uploads/sites/37/2021/01/Nota-Tecnica-%E2%80%93-Processo-Avaliativo-da-Iniciativa-Foco-na-Aprendizagem-IFA-0A.pdf >. Acesso em: 04 jan. 2024.

CEARÁ. Secretaria da Educação. **Conheça o Spaece.** Fortaleza. CAED/UFJF. 2019. Disponível em: < https://avaliacaoemonitoramentoceara.caeddigital.net/#!/programa>. Acesso em: 30 dez. 2023.

CEARÁ. Secretaria da Educação. Programa Cientista Chefe em Educação Básica. **Matriz Unificada de Saberes SISEDU Matemática Ensino médio**. Fortaleza.. Seduc. 2023b. Disponível em: < https://www.ced.seduc.ce.gov.br/wp-content/uploads/sites/82/2022/05/MATRIZ-MATEMATICA-1a-versao.pdf>. Acesso em: 29 dez. 2023.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: 1º Série Ensino Médio. São Paulo: Ática, 2008.
GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da Matemática – 7° ano**: Ed. Renovada. São Paulo: FTD, 2009.

DIASCÂNIO, José Maurício. **Etapas de pesquisa científica**. Rio de Janeiro: Edição e Comunicação Ltda, 2020.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da Matemática – 6° ano**: Ed. Renovada. São Paulo: FTD, 2009a.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da Matemática – 6° ano**: 4° Ed. São Paulo: FTD, 2018.

IBGE - INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM**. Disponível em: <https://ces.ibge.gov.br/base-de-dados/metadados/inep/exame-nacional-do-ensino-medio-enem.html>. Acesso em: 28 de dez. de 2023.

IEZZI, Gelson. AZZAN, Samuel. DEGENSZAJN, David. **Fundamentos de Matemática Elementar, v. 11: Matemática comercial; Matemática financeira; Estatística descritiva**. São Paulo: Atual, 2006.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Exame Nacional do Ensino Médio: Prova de Matemática e Suas Tecnologias, 2º dia, Caderno 6, Cinza, 2ª Aplicação**. 2011. Disponível em:< https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/ppl/2011/PPL_ENEM_2011_06_CINZA.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2024.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Exame Nacional do Ensino Médio: Prova de Matemática e Suas Tecnologias, 2º dia, Caderno 8, Rosa**. 2013. Disponível em:< https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2013/dia2_caderno8_rosa.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2024.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Exame Nacional do Ensino Médio: Prova de Matemática e Suas Tecnologias, 2º dia, Caderno 6, Cinza.** 2019. Disponível em:< https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2019/2019_PV_impresso_D2_CD6.pdf >. Acesso em: 11 fev. 2024.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Exame Nacional do Ensino Médio: Prova de Matemática e Suas Tecnologias, 2º dia, Caderno 6, Cinza, 2ª Aplicação**. 2020. Disponível em:< https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2020_PV_reaplicacao_PPL_D2_CD6.pdf >. Acesso em: 10 fev. 2024.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Exame Nacional do Ensino Médio: Prova de Matemática e Suas Tecnologias, 2º dia, Caderno 6, Cinza, 2ª Aplicação**. 2014. Disponível em:< https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2014/2014_PPL_PV_D2_CD6.pdf>. Acesso em: 09 fev. 2024.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Exame Nacional do Ensino Médio: Prova de Matemática e Suas Tecnologias, 2º dia, Caderno 5, Amarelo.** 2011. Disponível em:< https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2011/dia2_caderno5_amarelo.pdf >. Acesso em: 23 jan. 2024.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Exame Nacional do Ensino Médio: Prova 1 – Amarela.** 2006. Disponível em:< https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2006/2006_amarela.pdf >. Acesso em: 09 fev. 2024.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Exame Nacional do Ensino Médio: Prova de Matemática e Suas Tecnologias, 2º dia, Caderno 8, Rosa, 2ª Aplicação**. 2017. Disponível em:< https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/2017_PV_reaplicacao_PPL_D2_CD8.pdf >. Acesso em: 28 dez. 2023.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Exame Nacional do Ensino Médio: Prova de Matemática e Suas Tecnologias, ENEM Digital , 2º dia, Caderno 6, Cinza.** 2020. Disponível em< https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2020_PV_digital_D2_CD6.pdf>. Acesso em: 28 dez. 2023.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Exame Nacional do Ensino Médio: Prova de Matemática e Suas Tecnologias, 2º dia, Caderno 5, Amarelo.** 2017. Disponível em:< https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/2017_PV_impresso_D2_CD5.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2024.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Exame Nacional do Ensino Médio: Prova de Matemática e Suas Tecnologias, 2º dia, Caderno 7, Azul, 2ª Aplicação**. 2010. Disponível em:< https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2010/2010_PV_reaplicacao_PPL_D2_CD7.pdf>. Acesso em: 09 fev. 2024.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Exame Nacional do Ensino Médio: Prova de Matemática e Suas Tecnologias, 2º dia, Caderno 6, Cinza.** 2022. Disponível em:< https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2022_PV_impresso_D2_CD6.pdf>. Acesso em: 23 jan. 2024.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Exame Nacional do Ensino Médio: Prova de Matemática e Suas Tecnologias, 2º dia, Caderno 7, Azul.** 2009. Disponível em:< https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2009/dia2_caderno7_azul.pdf>. Acesso em: 22 jan. 2024.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Exame Nacional do Ensino Médio: Prova de Matemática e Suas Tecnologias, 2º dia, Caderno 7, Azul.** 2021. Disponível em:< https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2021_PV_impresso_D2_CD7.pdf>. Acesso em: 24 jan. 2024.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Exame Nacional do Ensino Médio: Prova de Matemática e Suas Tecnologias, 2º dia, Caderno 5, Amarelo.** 2016. Disponível em:< https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/2016_PV_impresso_D2_CD5.pdf>. Acesso em: 23 jan. 2024.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Ministério da Educação. **ENEM: Exame Nacional do Ensino Médio – Fundamentação Teórico - Metodológica**. Brasília. Inep. 2005. Disponível em: < https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/avaliacoes_e_exames_da_educacao_basica/enem_exame_nacional_do_ensino_medio_fundamentacao_teorico_metodologica.pdf> Acesso em: 20 jan. 2024.

LAZZARETTI, Raiana. **Uma Análise do Conteúdo de Razão e Proporção em Livros Didáticos do Ensino Fundamental.** 2022. 162 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Santa Maria, SantaMaria, 2022. Disponível em: < https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/25996/DIS_PPGEMEF_2022_RAIANA_LAZZARETTI.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 19 jan. 2024.

LIMA, Elon Lages *et. al.* **Temas e Problemas Elementares**. 3ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LIMA, Elon Lages. **Medida e Forma em Geometria: Comprimento, área, volume e semelhança**. 4ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

MEDEIROS, Ariane Dantas de. NETO, Liz Sodré. O ENEM como Ferramenta (Re) Formuladora do Currículo Escolar e da Prática Docente. **Revista Eletrônica DECT**, Vitória (ES), v. 8, n. 02, p 146-167, Agosto de 2018. Disponível em: <https://ojs.ifes.edu.br/index.php/dect/article/view/1091/664 > Acesso em: 15 dez. 2023.

RODRIGUES, Márcio Urel. **Análise das questões de matemática do novo ENEM (2009 a 2012): reflexões para professores de matemática.** Curitiba: SBEM, 2013. Disponível em: < http://www.sbemrevista.com.br/files/XIENEM/pdf/1029_804_ID.pdf>. Acesso em 14 de jan. de 2023.

SILVA, Rennan Normando de Andrade. **Análise da Distribuição das Competências da Prova de Matemática e Suas Tecnologias do Enem dos Anos 2009, 2010, 2015, 2016, 2021 e 2022.** 2022. 39 f. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura de Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Campina Grande, 2022. Disponível em: < https://repositorio.ifpb.edu.br/jspui/bitstream/177683/2632/1/TCC%20Rennan%20Normando%20de%20Andrade%20Silva.pdf>. Acesso em: 09 jan. 2024.

SOUZA JÚNIOR, Francisco Venâncio de. Uma breve história do Exame Nacional do Ensino Médio -ENEM: Avanços e ranços até a era digital. **Brazilian Journal of Development**, Curitiba, 29. dez. 2021. Disponível em: < https://ojs.brazilianjournals.com.br/ojs/index.php/BRJD/article/view/41986/pdf >. Acesso em: 28 dez. 2023.