

Universidade Federal de Uberlândia

Faculdade de Matemática

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

**MODELAGEM DE POLIEDROS DE ARQUIMEDES
VIA CINEMA 4D**

João Barbosa Ramos



Uberlândia-MG

2024

João Barbosa Ramos

MODELAGEM DE POLIEDROS DE ARQUIMEDES VIA CINEMA 4D

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção de título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de concentração: Matemática

Linha de pesquisa: Geometria

Orientador(a): Aldicio José Miranda



Uberlândia-MG

2024

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

R175 Ramos, João Barbosa, 1991-
2024 Modelagem de Poliedros de Arquimedes Via Cinema 4D
[recurso eletrônico] / João Barbosa Ramos. - 2024.

Orientador: Aldicio José Miranda.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2024.298>
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Matemática. I. Miranda, Aldicio José, 1977-,
(Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-
graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT UFU				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Profissional, 02, PROFMAT				
Data:	Vinte e cinco de abril de dois mil e vinte e quatro	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	16:00
Matrícula do Discente:	12212PFT008				
Nome do Discente:	João Barbosa Ramos				
Título do Trabalho:	Modelagem de Poliedros de Arquimedes Via Cinema 4D				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Não há				

Reuniu-se em webconferência pela plataforma *Google Meet* a Banca Examinadora, aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), assim composta pelos(as) professores(as) doutores(as): Hellen Monção de Carvalho Santana - UFTM; Germano Abud de Rezende - IME/UFU e Aldicio José Miranda - IME/UFU, orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Prof. Dr. Aldicio José Miranda, apresentou a Comissão Examinadora e juntamente com o candidato agradeceram a presença de todos. Posteriormente, o presidente concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

Dando continuidade, o senhor presidente concedeu a palavra para os examinadores que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final considerando o candidato:

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Hellen Monção de Carvalho Santana, Usuário Externo**, em 25/04/2024, às 15:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Germano Abud de Rezende, Professor(a) do Magistério Superior**, em 25/04/2024, às 15:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Aldicio José Miranda, Professor(a) do Magistério Superior**, em 25/04/2024, às 15:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5345121** e o código CRC **6CCF71C5**.

Dedico este trabalho à minha família: ao meu pai Antônio, à minha mãe Geralda, aos meus irmãos Tiago, Tamires e Lucas, e a cada familiar que sonha em alcançar altos patamares acadêmicos. Em especial, dedico este trabalho à minha falecida mãe, que lutou e se sacrificou muito para que eu alcançasse este momento tão feliz em minha vida. Sei o quanto ela se orgulhava e almejava que cada membro da família conseguisse estudar e alcançar seus sonhos através da educação.

Agradecimentos

Primeiramente, quero agradecer a Deus por mais esta conquista e pela oportunidade de ter realizado um mestrado que era um sonho e que eleva meu patamar como profissional. Ao professor Aldicio Miranda, orientador e amigo, que me ensinou muito mais do que posso expressar neste trabalho, sempre solícito, incentivador, elogioso e comprometido, e que despertou em mim o desejo de aprender mais sobre o *software* Cinema 4D, modelagem 3D e linguagem LaTeX.

À minha família, que se mostrou uma importante base de apoio emocional e motivacional na realização desse curso.

Aos meus colegas e amigos do Mestrado, em especial à Karol, Renato, Adilson, Herbert, Wellington e Guilherme, com os quais compartilhei este objetivo, desejo todo o sucesso do mundo como mestres que se tornarão.

Aos meus professores, Walter Motta, Germano, Ariosvaldo, Aldicio, Taciana, Evaneide, Wally, Rafael Rossato, Marcus Bronzi e Dulce Mary, que compartilharam um pouco de seus vastos conhecimentos e contribuíram imensamente para minha formação acadêmica.

Aos coordenadores do Profmat, Lígia, Francielle, Fábio e Ana Paula, que sempre foram muito solícitos para que cumpríssemos todos os prazos e etapas necessárias para a conclusão do mestrado.

Aos meus amigos da Escola Estadual Professor Batistinha, que sempre me apoiaram e confiaram em minha capacidade de concluir este mestrado, mesmo quando eu estava descontente com meu desempenho. Em especial, aos meus amigos Ângelo, Vinícius e Leonardo, que sempre confiaram em meu potencial e buscavam ter notícias sobre minha vida acadêmica na UFU. Um agradecimento especial às diretoras Laurita e Keila, que sempre foram compreensivas com os imprevistos que a vida acadêmica gerava na rotina de trabalho escolar.

Aos meus amigos da Escola Estadual Olegário Maciel, em especial ao Renato, Eurico, Valmira, Carlos, Wesley, Tércio, Rozana, Natelson e Adelson, que sempre me incentivaram e se interessa-

ram pela minha vida acadêmica na UFU. Em especial, à minha falecida amiga Érika, que propôs o desafio de realizarmos este mestrado, e ao Renato, amigo de estudos, incentivador e que sempre acreditou em minha capacidade de superar as dificuldades do mestrado.

Aos meus amigos da Escola Estadual Caio Martins, instituição que escolhi para esta nova fase da minha carreira e onde desenvolvi as atividades deste trabalho. Em especial, à minha amiga Amanda, que me propôs este novo desafio, sempre muito prestativa, apoiadora e entusiasta de uma educação transformadora, à diretora Áurea, que me recebeu muito bem na escola, sendo uma importante fonte de apoio e demonstrando confiança em meu trabalho. À minha amiga Magda, sempre com uma mensagem de incentivo ao perceber meu cansaço e abalo emocional diante do desafio de conciliar trabalho e vida acadêmica.

Meus agradecimentos para os pais do meu amigo e colega de curso Renato, Nilza e Santos, que abriram as portas de sua casa, oferecendo um local de repouso entre as viagens e nos incentivando a seguir firmes no desafio de concluir o mestrado.

Meus agradecimentos aos meus professores e colegas do início da minha jornada acadêmica na UFMG, em especial ao meu amigo Daniel Martins, a minha primeira grande referência como professor, sendo de profunda importância no início da minha caminhada acadêmica.

Na certeza de que esquecerei de mencionar alguém importante, quero agradecer a todos os meus amigos que fazem com que eu me sinta realizado como profissional e como amigo, que me apoiam e compartilham comigo cada conquista e momentos difíceis.

RAMOS, J. B. .*Modelagem de Poliedros de Arquimedes Via Cinema 4D*. 2024. 127p. Dissertação de Mestrado , Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

O Cinema 4D é um software de criação 3D que abrange a modelagem, animação, texturização e renderização de objetos. O objetivo é apresentar uma breve introdução de modelagem 3D com o Cinema 4D e usar essa ferramenta para modelar Poliedros de Arquimedes. Esses poliedros pertencem a uma classe especial de sólidos tridimensionais convexos, nomeados em homenagem ao matemático grego Arquimedes. As faces desses poliedros são polígonos regulares de mais de um tipo e existem apenas treze deles. Para modelar esses poliedros, primeiro é preciso fazer um estudo sobre suas propriedades geométricas e métodos de construções a partir de outros poliedros regulares e adaptar essas medidas às ferramentas do software. O Cinema 4D oferece uma abordagem versátil e flexível para explorar formas matemáticas geométricas interessantes, pois possui ferramentas avançadas de modelagem poligonal. **Palavras-chave:** Geometria euclidiana, Sólidos de Platão, Sólidos de Arquimedes, Cinema 4D, Modelagem 3D.

RAMOS, J. B. .*Modeling Archimedes Polyhedra Via Cinema 4D*. 2024. 127p. M. Sc. Dissertation , Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

Cinema 4D is 3D creation software that includes modeling, animation, texturing, and rendering of objects. The objective is to provide a brief introduction to 3D modeling with Cinema 4D and to utilize this tool for modeling Archimedean Polyhedra. These polyhedra belong to a special class of convex three-dimensional solids, named after the Greek mathematician Archimedes. The faces of these polyhedra consist of regular polygons of more than one type, and there are only thirteen of them. To model these polyhedra, it is first necessary to conduct a study on their geometric properties and construction methods based on other regular polyhedra, and then adapt these measurements to the software tools. Cinema 4D offers a versatile and flexible approach to exploring interesting geometric mathematical shapes with its advanced polygonal modeling tools. **Keywords:** Euclidean geometry, Plato's Solids, Archimedes' Solids, Cinema 4D, 3D Modeling.

Sumário

Lista de Figuras	iv
Lista de Tabelas	viii
Introdução	1
1 Dos Poliedros Platônicos aos Arquimedianos	3
1.1 Os Sólidos de Platão	3
1.2 Os Sólidos de Arquimedes	5
1.3 Operações para Obtenção dos Sólidos de Arquimedes	7
1.3.1 Sólidos de Arquimedes Obtidos por Truncamento	7
1.3.2 Sólidos de Arquimedes Obtidos por Expansão	8
1.3.3 Sólidos de Arquimedes Obtidos por Snubificação	8
2 Introdução ao Cinema 4D	10
2.1 Principais Características	10
2.2 Instalação	11
2.3 Interface do Cinema 4D	12
2.4 Tela do Programa	12
2.4.1 Menus do Cinema 4D	14
2.4.2 Barras de Ferramentas ou Paletas do Cinema 4D	18
3 Os Sólidos de Platão no Cinema 4D	23
3.1 Raio da Esfera Circunscrita ao Tetraedro de Aresta a	23
3.2 Raio da Esfera Circunscrita ao Hexaedro de Aresta a	25
3.3 Raio da Esfera Circunscrita ao Octaedro de Aresta a	26
3.4 Raio da Esfera Circunscrita ao Dodecaedro de Aresta a	27
3.5 Raio da Esfera Circunscrita ao Icosaedro de Aresta a	29

3.6	Criando um Sólido de Platão no Cinema 4D	30
4	Modelagem por Truncamento via Cinema 4D	33
4.1	Modelagem do Tetraedro Truncado	33
4.1.1	Criando um Tetraedro Truncado de Aresta b no C4D	34
4.2	Modelagem do Cubo Truncado	36
4.2.1	Criando um Cubo Truncado de Aresta b no C4D	37
4.3	Modelagem do Octaedro Truncado	39
4.3.1	Criando um Octaedro Truncado de Aresta b no C4D	39
4.4	Modelagem do Cuboctaedro	41
4.4.1	Criando um Cuboctaedro de Aresta b no C4D	41
4.5	Modelagem do Dodecaedro Truncado	43
4.5.1	Criando um Dodecaedro Truncado de Aresta b no C4D	44
4.6	Modelagem do Icosaedro Truncado	46
4.6.1	Criando um Icosaedro Truncado de Aresta b no C4D	47
4.7	Modelagem do Icosidodecaedro	48
4.7.1	Criando um Icosidodecaedro de Aresta b no C4D	49
5	Modelagem por Truncamento Misto via Cinema 4D	50
5.1	Modelagem do Rombicosidodecaedro	50
5.1.1	Criando um Rombicosidodecaedro de Aresta b no C4D	54
5.2	Modelagem do Rombicuboctaedro	55
5.2.1	Criando um Rombicuboctaedro de Aresta b no C4D	56
5.3	Modelagem do Cuboctaedro Truncado	58
5.3.1	Criando um Cuboctaedro Truncado de Aresta b no C4D	60
5.4	Modelagem do Icosidodecaedro Truncado	62
5.4.1	Criando um Icosidodecaedro Truncado de Aresta c no C4D	66
6	Modelagem por Snubificação via Cinema 4D	68
6.1	Modelagem do Cubo <i>Snub</i>	68
6.1.1	Criando um Cubo <i>Snub</i> de Aresta b no C4D	71
6.2	Modelagem do Dodecaedro <i>Snub</i>	73
6.2.1	Criando um Dodecaedro <i>Snub</i> de Aresta b no C4D.	78
7	Discussão das Atividades	79
7.1	Apresentação das Atividades	79

7.2	Desenvolvimento da Atividade A.1	81
7.3	Desenvolvimento da Atividade A.2	82
7.4	Questionário Sobre as Atividades Realizadas	82
7.5	Depoimentos dos Estudantes Sobre as Atividades	83
8	Considerações Finais	85
A	Atividades	87
A.1	Atividade 1: Modelagem dos Poliedros de Arquimedes Via Cinema 4D	88
A.1.1	Modelagem de um Tetraedro Truncado a Partir de um Tetraedro Regular de Aresta $a = 72\text{ cm}$	88
A.1.2	Modelagem de um Cubo Truncado de Aresta $b = 50\text{ cm}$	91
A.1.3	Modelagem de um Cuboctaedro de Aresta $b = 60\text{ cm}$	94
A.1.4	Modelagem de um Icosidodecaedro de Aresta $b = 40\text{ cm}$	97
A.1.5	Modelagem de um Icosaedro Truncado por Truncamento do Icosaedro de Aresta $a = 90\text{ cm}$	100
A.2	Atividade 2: Verificação da Relação de Euler	104
B	Questionário	106
B.1	Atividade 1 - Contextualização e Modelagem com Cinema 4D	106
B.2	Atividade 2 - Verificação da Relação de Euler	107
B.3	Avaliação Geral	108
B.4	Comentários Adicionais	108
B.5	Depoimento	108
	Referências Bibliográficas	109

Lista de Figuras

1.1	Sólidos de Platão conforme seu <i>Timeu</i> .	4
1.2	Criação do Tetraedro Truncado através do truncamento do Tetraedro.	8
1.3	Expansão do Cubo para obtenção do Rombicuboctaedro.	8
1.4	Criação do Cubo <i>Snub</i> pelo processo de snubificação.	9
2.1	Tela do C4D	13
2.2	Diretório de objetos no menu <i>Object Manager</i>	16
2.3	Vistas obtidas ao utilizar a opção Alternar Visualização Ativa (<i>Toggle Active View</i>)	18
2.4	Ferramenta <i>Atom Array</i> aplicada ao octaedro regular.	19
2.5	Em 1 está o ícone do gerenciador de materiais e, em 2 foi criado o material metal e aplicado ao dodecaedro.	20
2.6	Efeito Bevel aplicado ao cubo (à esquerda), ao vértice (centro) e à aresta (à direita).	22
3.1	Tetraedro circunscrito.	23
3.2	Hexaedro circunscrito.	25
3.3	Octaedro circunscrito.	26
3.4	Dodecaedro circunscrito.	27
3.5	Quadrilátero inscrito.	27
3.6	Diagonal do pentágono de aresta a .	28
3.7	Icosaedro circunscrito.	29
3.8	Triângulo ABC inscrito em uma circunferência de diâmetro $\overline{BC} = d$.	29
3.9	Objetos 3D da paleta de objetos.	31
3.10	Criando um objeto platônico.	31
3.11	Construindo um tetraedro de aresta $a = 80\text{ cm}$.	32
3.12	Renomeando um objeto no C4D.	32
3.13	Tetraedro de aresta $a = 80\text{ cm}$.	32

4.1	Construção de um tetraedro truncado.	34
4.2	Transformação da face triangular do tetraedro em hexágono regular.	34
4.3	Localização do <i>Bevel Deformer</i> no C4D.	35
4.4	Aplicação do <i>Bevel Deformer</i> ao poliedro platônico criado no Menu <i>Object Manager</i>	35
4.5	Etapa final da modelagem do tetraedro truncado no C4D.	35
4.6	Tetraedro Truncado.	36
4.7	Modelagem do cubo truncado.	36
4.8	Recorte lateral do cubo truncado em construção.	37
4.9	Etapa final da modelagem do cubo truncado no C4D.	38
4.10	Cubo Truncado.	38
4.11	Construção de um octaedro truncado.	39
4.12	Recorte da face triangular do octaedro.	39
4.13	Etapa final da modelagem do octaedro truncado no C4D.	40
4.14	Octaedro Truncado.	40
4.15	Criação do cuboctaedro.	41
4.16	Obtenção das faces triangulares do cuboctaedro.	41
4.17	Etapa final da modelagem do cuboctaedro no C4D.	42
4.18	Cuboctaedro.	42
4.19	Criação do dodecaedro truncado.	43
4.20	Corte das faces pentagonais do dodecaedro.	43
4.21	Linhas diagonais do dodecaedro no C4D.	44
4.22	Etapa final da modelagem do dodecaedro truncado no C4D.	45
4.23	Dodecaedro Truncado.	45
4.24	Transformação de um icosaedro em icosaedro truncado.	46
4.25	Corte da face triangular do icosaedro.	46
4.26	Etapa final da modelagem do icosaedro truncado no C4D.	47
4.27	Icosaedro Truncado.	47
4.28	Criação do icosidodecaedro.	48
4.29	Truncamento de um icosaedro de aresta α : recorte da face triangular.	48
4.30	Etapa final da modelagem do icosidodecaedro truncado no C4D.	49
4.31	Icosidodecaedro.	49
5.1	Icosaedro formando um rombicosidodecaedro.	51
5.2	Construção do rombicosidodecaedro.	51
5.3	Construção do rombicosidodecaedro.	51

5.4	Triângulos <i>EQT</i> e <i>EAC</i>	53
5.5	Etapa final da modelagem do rombicosidodecaedro no C4D.	54
5.6	Rombicosidodecaedro.	54
5.7	Criação de um rombicuboctaedro pelo truncamento do cubo.	55
5.8	Construção do rombicuboctaedro.	55
5.9	Obtenção da face do rombicuboctaedro.	56
5.10	Etapa final da modelagem do rombicuboctaedro no C4D.	57
5.11	Rombicuboctaedro.	57
5.12	Criação do cuboctaedro truncado.	58
5.13	Cuboctaedro em construção.	58
5.14	Obtendo as faces octogonais de aresta <i>b</i>	59
5.15	Localização do <i>Normal Scale</i> no C4D.	60
5.16	Desenho das demais faces do cuboctaedro truncado.	61
5.17	Transformação do hexaedro no cuboctaedro truncado.	61
5.18	Cuboctaedro Truncado.	61
5.19	Processo de criação do icosidodecaedro truncado.	62
5.20	Construção de um icosidodecaedro.	62
5.21	Ângulo diedral entre duas faces adjacentes do dodecaedro regular.	63
5.22	Altura do pentágono.	63
5.23	Desenho das faces quadradas e hexagonais.	66
5.24	Construção do icosidodecaedro truncado.	67
5.25	Icosidodecaedro Truncado.	67
6.1	Construção do cubo <i>snub</i>	69
6.2	Localização do <i>Normal Rotate</i> no C4D.	71
6.3	Transformação do hexaedro em cubo <i>snub</i>	72
6.4	Cubo <i>Snub</i>	72
6.5	Construção do dodecaedro <i>snub</i>	73
6.6	Construindo o dodecaedro <i>snub</i>	78
6.7	Dodecaedro <i>Snub</i>	78
7.1	Apresentação da operação de truncamento para a modelagem dos Sólidos de Arquimedes.	80
7.2	Condições métricas para a construção do icosidodecaedro.	80
7.3	Modelagem do tetraedro truncado por um dos grupos.	81
7.4	Modelagem do cubo truncado por um dos alunos.	81

7.5	Modelagem do cuboctaedro por um dos grupos.	81
7.6	Modelagem do icosaedro truncado por um dos grupos.	82
7.7	Modelagem do icosidodecaedro truncado por um dos grupos.	82
A.1	Modelagem de um tetraedro truncado de aresta b	88
A.2	Paleta de Objetos 3D.	89
A.3	Criando o tetraedro no Cinema 4D.	90
A.4	Aplicação do <i>Bevel Deformer</i> ao tetraedro.	90
A.5	Configuração do <i>Bevel Deformer</i> no Menu de Atributos.	90
A.6	Tetraedro truncado de aresta b	91
A.7	Construção do cubo truncado.	91
A.8	Paleta de Objetos 3D.	92
A.9	Criando o hexaedro no Cinema 4D.	92
A.10	Aplicação do <i>Bevel Deformer</i> ao hexaedro.	93
A.11	Configuração do <i>Bevel Deformer</i> no Menu de Atributos.	93
A.12	Cubo truncado de aresta $b = 50\text{ cm}$	94
A.13	Construção de um cuboctaedro de aresta $b = 60\text{ cm}$	94
A.14	Paleta de Objetos 3D.	95
A.15	Criando um octaedro no Cinema 4D.	95
A.16	Aplicação do <i>Bevel Deformer</i> ao octaedro.	96
A.17	Configuração do <i>Bevel Deformer</i> no Menu de Atributos.	96
A.18	Cuboctaedro de aresta $b = 60\text{ cm}$	96
A.19	Construção do icosidodecaedro de aresta $b = 40\text{ cm}$	97
A.20	Paleta de Objetos 3D.	98
A.21	Criando o tetraedro no Cinema 4D.	98
A.22	Removendo as linhas diagonais das faces do dodecaedro.	99
A.23	Aplicação do <i>Bevel Deformer</i> ao dodecaedro.	99
A.24	Configuração do <i>Bevel Deformer</i> no Menu de Atributos.	100
A.25	Icosidodecaedro de aresta $b = 40\text{ cm}$	100
A.26	truncamento de um icosaedro de aresta $a = 90\text{ cm}$	100
A.27	Paleta de Objetos 3D.	101
A.28	Criando o tetraedro no Cinema 4D.	102
A.29	Aplicação do <i>Bevel Deformer</i> ao tetraedro.	102
A.30	Configuração do <i>Bevel Deformer</i> no Menu de Atributos.	103
A.31	Icosaedro truncado de aresta b	103

Lista de Tabelas

1.1	Número de vértices (V), arestas (A) e faces (F) nos Sólidos de Platão.	5
1.2	Sólidos de Arquimedes.	6
1.3	Quantidades de vértices, arestas e faces nos sólidos arquimedianos.	7
3.1	Raio da esfera circunscrita ao poliedro de Platão de aresta a	30
A.1	Saldo de vértices.	104
A.2	Saldo de arestas.	104
A.3	Faces novas dos Sólidos de Arquimedes.	105
A.4	Relação de Euler nos Sólidos de Arquimedes.	105

Introdução

O principal objetivo deste trabalho é modelar os poliedros de Arquimedes via o software Cinema 4D, desenvolvido pela Maxon [5]. Os Poliedros de Arquimedes pertencem a uma classe especial de sólidos tridimensionais convexos, nomeados em homenagem ao matemático grego Arquimedes. As faces desses poliedros são polígonos regulares de mais de um tipo e existem apenas treze deles.

O Cinema 4D, ou simplesmente C4D, é um poderoso software de criação 3D que abrange a modelagem, animação, texturização e renderização de objetos. Esta ferramenta oferece uma abordagem versátil e flexível para explorar formas matemáticas geométricas interessantes, pois possui ferramentas avançadas de modelagem poligonal, permitindo a criação precisa e detalhada das faces, vértices e arestas dos poliedros. Além do mais, o Cinema 4D oferece suporte para trabalhar com gráficos de curvas e superfícies parametrizadas.

Neste trabalho, é apresentada uma breve introdução de modelagem 3D com o Cinema 4D, uma descrição completa de como modelar cada um dos treze poliedros de Arquimedes, nos Capítulos 4, 5 e 6. Nos Apêndices A e B, são apresentadas duas propostas de atividades cujos objetivos são a modelagem de alguns dos poliedros de Arquimedes em sala de aula, utilizando o C4D, e a observação da relação de Euler nos objetos criados. Para fazer o uso adequado da ferramenta C4D, antes é preciso fazer um estudo sobre as propriedades geométricas dos poliedros platônicos e dos arquimedianos, como, por exemplo, comprimentos de arestas, ângulos internos das faces, ângulos entre faces e relação entre essas medidas e, posteriormente adaptar essas medidas às ferramentas do software.

Com o aprendizado, os resultados podem ser utilizados em muitas aplicações, desde visualizações científicas e educacionais, projetos de *design*, impressão 3D e até produção de conteúdo digital. Instituições de ensino que possuem impressora 3D, poderão imprimir poliedros para as aulas de geometria, cartas ou figuras com relevo para estudantes com deficiência visual, chassis de carrinho para trabalhar com arduíno e muitas outras aplicações. Observa-se que o Cinema 4D é livre para estudantes e professores para uso educacional.

É importante destacar que todas as figuras utilizadas tanto para representação dos sólidos de Arquimedes e de Platão, quanto para realizar os estudos geométricos necessários para a modelagem de cada um dos poliedros de Arquimedes, são de autoria própria.

Dos Poliedros Platônicos aos Arquimedeanos

Neste capítulo, faremos uma contextualização histórica das descobertas dos sólidos de Platão e, por conseguinte, dos poliedros de Arquimedes. Tal abordagem se faz necessária, uma vez que os poliedros de Arquimedes são originados através de operações sobre os sólidos de Platão, sendo elas: truncamento, expansão e snubificação. Explicaremos também cada uma dessas operações, as quais utilizaremos para a modelagem dos sólidos de Arquimedes via Cinema 4D.

1.1 Os Sólidos de Platão

Segundo Eves (2004) [2], Platão foi um filósofo e matemático grego que nasceu em 427 a.C, em Atenas, e faleceu em 347 a.C.. Entre as suas principais contribuições para a filosofia e ciências está a criação da Academia, em Atenas, por volta de 371 a.C, instituição criada com fins sistemáticos de pesquisa científica e filosófica [2].

Eves [2] destaca a influência de Platão na maioria dos trabalhos matemáticos mais importantes do século IV a.C, os quais, de acordo com o autor, foram feitos por discípulos ou amigos do fundador da Academia, tornando-se uma ponte entre a matemática dos antigos pitagóricos e a escola de Alexandria [2].

Platão era um estudioso dos poliedros conhecidos como regulares, os quais são compostos por faces regulares de um só tipo: triângulos, quadrados ou pentágonos. O matemático grego os descre-

veu em seu *Timeu*¹ e apresenta os passos para as construções dos únicos cinco sólidos regulares: o Tetraedro, o Hexaedro, o Octaedro, o Dodecaedro e o Icosaedro. Entretanto, Eves [2] destaca que os poliedros regulares são, de forma errônea, atribuídos a Platão, uma vez que estes são tratados matematicamente no Livro XIII dos *Elementos* de Euclides e, conforme o primeiro escólio desse livro, as descobertas do Tetraedro, do Hexaedro e do Dodecaedro se devem aos pitagóricos, enquanto as do Icosaedro e Octaedro se devem a Teeto [2].

Em seu *Timeu* [4], Platão associou quatro dos poliedros regulares aos quatro elementos: o Tetraedro ao fogo, o Octaedro ao ar, o Icosaedro à água e o Hexaedro à terra. O Dodecaedro por sua vez foi associado por Platão ao universo em sua totalidade. A Figura 1.1 ilustra os cinco poliedros regulares conforme descreve Platão:



Figura 1.1: Sólidos de Platão conforme seu *Timeu*.

Eves (2004) [2] apresenta a explicação dada pelo matemático, astrônomo e numerologista alemão Johann Kepler (1571-1630) para as associações de *Timeu*. Intuitivamente, Kepler assumiu que, dos sólidos regulares, o de maior e o de menor volume são, respectivamente, o Tetraedro e o Icosaedro. Adotando uma relação volume-umidade, isto é, quanto maior é o volume do sólido, maior é a sua umidade, o matemático associou o Tetraedro ao fogo, por ser mais seco, enquanto o Icosaedro foi relacionado à água. O Hexaedro foi associado à terra por proporcionar maior estabilidade ao assentar-se sobre uma de suas faces quadrangulares. Como gira facilmente, o Octaedro, ao ter dois vértices

¹"*Timeu*" [4] é um diálogo criado por Platão, no qual o autor faz relatos de temas relacionados à geometria e à cosmologia. Nesse contexto, Platão apresenta os cinco poliedros regulares e os passos para as construções de cada um deles.

opostos entre os dedos polegar e indicador, teria a instabilidade do ar. O Dodecaedro, por sua vez, foi associado ao universo, pois possui doze faces, enquanto o zodíaco possui doze seções.

Como os sólidos platônicos são poliedros convexos, vale a relação de Euler: $V - A + F = 2$, sendo V , A e F as quantidades de vértices, arestas e faces do sólido, respectivamente. Tal relação pode ser verificada na Tabela 1.1 abaixo:

Sólido de Platão	Vértices (V)	Arestas (A)	Faces (F)
Tetraedro	4	6	4
Cubo	8	12	6
Octaedro	6	12	8
Dodecaedro	20	30	12
Icosaedro	12	30	20

Tabela 1.1: Número de vértices (V), arestas (A) e faces (F) nos Sólidos de Platão.

1.2 Os Sólidos de Arquimedes

Segundo Assis (2008) [1], Arquimedes de Siracusa nasceu por volta de 287 a.C. e viveu a maior parte de sua vida em Siracusa, uma cidade localizada na costa da Sicília, na atual Itália, que naquela época fazia parte do mundo grego. Além disso, é relatado que Arquimedes também teria passado um período no Egito e possivelmente estudado em Alexandria, considerada o epicentro da ciência grega naquela época, onde teve contato com os sucessores do matemático Euclides, que viveu por volta de 300 a.C. [1].

Muitas das obras de Arquimedes se encontravam na Biblioteca de Alexandria, uma das maiores da antiguidade, que fazia parte do famoso museu de Alexandria, na Grécia. Entretanto estando sob domínio romano entre 30 a.C e 400 d.C, após cerco ao imperador romano Júlio César, no palácio de Alexandria por volta de 400 a.C. muitas obras de Arquimedes devem ter sido fatalmente perdidas devido a um incêndio que atingiu um depósito de livros (Assis, 2008, p 13) [1].

Arquimedes tem contribuições na Física, Matemática, astronomia e engenharia. Assis (2008) [1] aponta que algumas de suas obras se encontravam em bibliotecas européias, em manuscritos do século XV e XVI, copiados de dois manuscritos do século IX ou X, em grego. Um desses manuscritos, do século IX ou X, segundo o autor, pertenceu ao humanista George Valla, que ensinou em Veneza entre 1486 e 1499, tendo desaparecido entre 1544 e 1564, não havendo mais registros do paradeiro deles. Conforme Assis [1], esse manuscrito apresentava, na sequência, as seguintes obras: *Sobre a Esfera e o Cilindro*, *Medida do Círculo*, *Sobre Conóides e Esferóides*, *Sobre as Espirais*, *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, *O Contador de Areia*, *Quadratura da Parábola*, comentários de Eutócius em

relação às obras *Sobre a Esfera e o Cilindro*, *Sobre a Medida do Círculo*, e *Sobre o Equilíbrio dos Planos*.

Em um de seus trabalhos, Arquimedes apresenta sua descoberta sobre os poliedros semirregulares, os quais se diferem dos sólidos platônicos por serem compostos por faces regulares de mais de um tipo. Sobre o trabalho com esses sólidos, de acordo com Assis (2008) [1], Arquimedes apresenta os únicos 13 poliedros semirregulares existentes e descreve as suas construções, cujas faces [...] "são polígonos regulares mas tendo diferentes números de lados, como quadrados e triângulos eqüiláteros" (Assis, 2008, p. 30) [1]. Estes poliedros são, em função desse estudo, denominados Sólidos Arquimedianos ou Sólidos de Arquimedes. A Tabela 1.2 ilustra todos os 13 sólidos de Arquimedes:

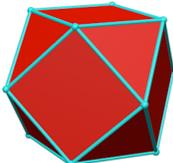
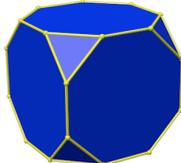
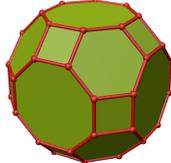
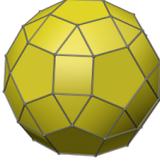
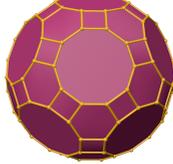
Tetraedro Truncado	Cuboctaedro	Cubo Truncado
		
Octaedro Truncado	Rombicuboctaedro	Cuboctaedro Truncado
		
Icosidodecaedro	Dodecaedro Truncado	Icosaedro Truncado
		
Rombicosidodecaedro	Icosidodecaedro Truncado	Cubo Snub
		
Dodecaedro Snub		
		

Tabela 1.2: Sólidos de Arquimedes.

Uma das particularidades dos poliedros semirregulares, apontadas por Melo (2014) [6] é que em

torno de cada vértice há sempre o mesmo arranjo de polígonos, sendo esta uma das características fundamentais destes sólidos.

Os sólidos de Arquimedes também satisfazem a relação de Euler, como podemos observar através da Tabela 1.3 abaixo:

Sólidos de Arquimedes	Vértices (V)	Arestas (A)	Faces (F)
Tetraedro Truncado	12	18	8
Cuboctaedro	12	24	14
Cubo Truncado	24	36	14
Octaedro Truncado	24	36	14
Rombicuboctaedro	24	48	26
Cuboctaedro Truncado	48	72	26
Icosidodecaedro	30	60	32
Dodecaedro Truncado	60	90	32
Icosaedro Truncado	60	90	32
Rombicosidodecaedro	60	120	62
Icosidodecaedro Truncado	120	180	62
Cubo <i>Snub</i>	24	60	38
Dodecaedro <i>Snub</i>	60	150	92

Tabela 1.3: Quantidades de vértices, arestas e faces nos sólidos arquimedianos.

1.3 Operações para Obtenção dos Sólidos de Arquimedes

As operações para a obtenção dos Sólidos Arquimedianos são: truncamento, expansão e snubificação. É importante ressaltar que, qualquer uma das três operações sozinha não é suficiente para a obtenção de todos os Sólidos de Arquimedes, assim, podemos classificá-los de acordo com o método utilizado para criá-los. Apresentaremos, a seguir, cada uma das operações acima e os Poliedros de Arquimedes originados por cada uma delas.

1.3.1 Sólidos de Arquimedes Obtidos por Truncamento

O processo de truncamento consiste em realizar chanfros ou cortes no poliedro platônico, removendo, de forma conveniente, partes que, na maioria dos casos, são pirâmides, a fim de se obter o sólido arquimediano como resultado final. A Figura 1.2 ilustra o processo de obtenção do Tetraedro Truncado.

Os Sólidos de Arquimedes obtidos pela operação de truncamento são: Tetraedro Truncado, Cuboctaedro, Cubo Truncado, Octaedro Truncado, Rombicuboctaedro, Cuboctaedro Truncado, Icosidodecaedro

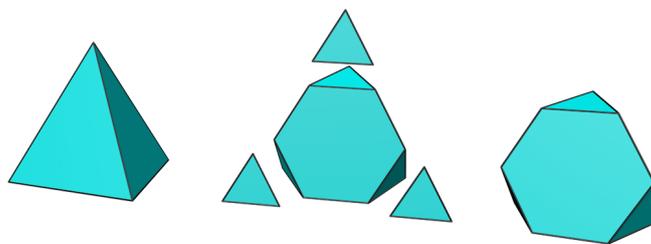


Figura 1.2: Criação do Tetraedro Truncado através do truncamento do Tetraedro.

dro, Dodecaedro Truncado, Icosaedro Truncado, Rombicosidodecaedro e o Icosidodecaedro Truncado

1.3.2 Sólidos de Arquimedes Obtidos por Expansão

A operação de expansão consiste em afastar as faces de um sólido regular ou semirregular de modo que, entre as faces separadas, sejam colocados polígonos regulares, formando assim um sólido de Arquimedes. A Figura 1.3 abaixo ilustra a obtenção do Rombicuboctaedro através do processo de expansão do cubo.

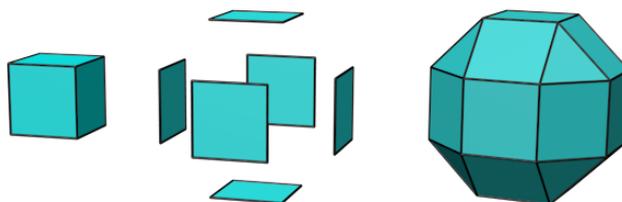


Figura 1.3: Expansão do Cubo para obtenção do Rombicuboctaedro.

Os Sólidos de Arquimedes obtidos por expansão são: o Rombicuboctaedro, o Cuboctaedro Truncado, e o Icosidodecaedro Truncado. Os dois últimos também podem ser obtidos através do truncamento de sólidos Arquimedianos, tais como sugerem suas denominações.

1.3.3 Sólidos de Arquimedes Obtidos por Snubificação

Com a operação de snubificação são obtidos dois sólidos arquimedianos: o Cubo *Snub* e o Dodecaedro *Snub*. Como os nomes já sugerem, o primeiro é obtido através da snubificação do cubo e, o segundo, do dodecaedro.

A operação de de snubificação se consiste nas seguintes etapas:

1. Afastamento das faces do objeto primitivo (cubo ou dodecaedro);

2. As faces afastadas são rotacionadas de modo que, entre seus espaços, possam ser colocados polígonos regulares, "fechando" o sólido arquimediano.

A Figura 1.4 ilustra o passo a passo acima no processo de snubificação aplicado ao cubo para a criação do Cubo *Snub*.

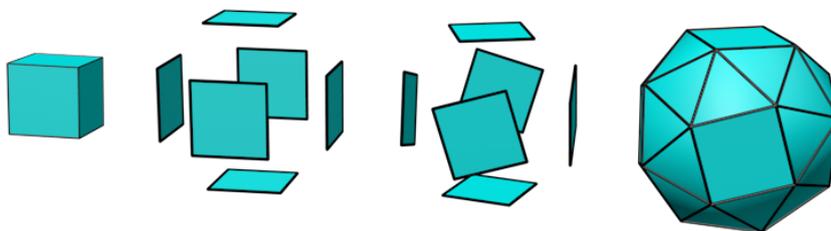


Figura 1.4: Criação do Cubo *Snub* pelo processo de snubificação.

Introdução ao Cinema 4D

O Cinema 4D é um poderoso software de criação 3D desenvolvido pela Maxon [5], que abrange a modelagem, animação, texturização e renderização de objetos. É um dos programas 3D mais populares e utilizado por profissionais de várias áreas.

Neste capítulo, apresentaremos uma breve introdução sobre esse *software*, abordando principalmente as ferramentas que iremos utilizar com a finalidade de modelagem dos Poliedros de Arquimedes. Com o cinema 4D é possível realizar chanfros, redimensionar e rotacionar faces de objetos, realçar vértices e arestas, entre outras opções de modelagem. Além disso, o Cinema 4D oferece uma abordagem versátil para explorar formas matemáticas geométricas, pois possui ferramentas avançadas de modelagem poligonal, permitindo a criação detalhada das faces, vértices e arestas de objetos geométricos. Também é possível trabalhar com objetos geométricos gerados por gráficos de funções, por exemplo curvas e superfícies parametrizadas.

2.1 Principais Características

O C4D é utilizado para uma ampla gama de aplicações, incluindo: *Design* industrial; Animação; *VFX*; *Games*; Arquitetura; *Design* gráfico. Além disso, o *software* oferece interessantes ferramentas e recursos para criar conteúdo 3D de alta qualidade. Algumas das principais funcionalidades do *software* incluem: Modelagem poligonal; Modelagem *NURBS*; Modelagem procedural; Animação de objetos e personagens; Simulações físicas; Renderização fotorrealista.

A seguir, vamos dar uma breve visão geral das principais funcionalidades do Cinema 4D:

Modelagem poligonal

A modelagem poligonal é a técnica mais comum para criar objetos 3D. Ela envolve a criação de uma malha de polígonos, que são pequenos triângulos ou quadrados que formam a superfície do objeto.

Modelagem NURBS

A modelagem NURBS é uma técnica mais sofisticada que permite criar objetos com curvas suaves e orgânicas. Ela utiliza equações matemáticas para definir as superfícies dos objetos.

Modelagem procedural

A modelagem procedural é uma técnica que permite criar objetos a partir de fórmulas matemáticas. Ela pode ser usada para criar objetos complexos com facilidade e rapidez.

Animação

A capacidade de animação é outra área em que o Cinema 4D se destaca. Com uma variedade de ferramentas de animação, incluindo *keyframes*, curvas de animação, efeitos de deformação e dinâmica, podemos dar movimentos suaves e realistas para os modelos 3D criados. Além disso, o Cinema 4D oferece a capacidade de animar personagens complexos e criar simulações de física para objetos em movimento.

2.2 Instalação

Para instalar o Cinema 4D, é necessário realizar o *download* do *software* no site oficial da *Maxon*. Para baixá-lo é preciso ter uma conta da *Maxon*. Após criar a conta, basta acessar ao site, escolher a opção *Try* no menu principal e realizar o *download* do aplicativo. Em seguida deve-se instalar o arquivo baixado, seguindo as orientações do assistente de instalação.

Após a instalação do programa, deve-se escolher uma das opções de licença do produto. Para acessar os planos, basta clicar na opção *buy*, localizada no menu inicial do site oficial da *Maxon*. Durante o desenvolvimento do projeto, utilizamos o C4D de modo completo com a licença para professor e estudante, *students and teachers*, para a qual se faz necessária uma comprovação de elegibilidade: documento de identificação estudantil ou comprovante de vínculo institucional, no caso de professores. Esta licença é exclusiva para uso educacional e não para uso comercial. No entanto, para utilizá-la livremente durante um ano, foi preciso pagar uma taxa no valor de \$20,00 (vinte dólares).

2.3 Interface do Cinema 4D

Uma das características mais marcantes do Cinema 4D é a sua intuitiva interface de usuário. Ao abrir o software, os usuários são recebidos por um ambiente bem organizado, com painéis personalizáveis que permitem adaptar a interface de acordo com suas necessidades específicas. Os principais elementos da interface incluem a visualização 3D (*viewport*), a linha do tempo de animação, o gerenciador de objetos e uma variedade de painéis de controle.

A interface do Cinema 4D é dividida em quatro áreas principais:

Área de trabalho: é a área principal do software, onde você cria e edita seus projetos.

Área de ferramentas: contém as ferramentas que você usa para criar e editar objetos.

Área de navegação: A área de navegação permite navegar pelo espaço 3D.

Área de informações: fornece informações sobre os objetos selecionados. Para navegar pela interface do Cinema 4D, você pode usar o mouse, o teclado ou os atalhos de teclado.

No próximo capítulo, vamos começar a aprender a modelar objetos 3D no Cinema 4D.

O Cinema 4D é uma ferramenta poderosa e versátil para a criação de gráficos em movimento, animações 3D e efeitos visuais. Neste capítulo, introduzimos a interface de usuário intuitiva, as capacidades de modelagem, animação, iluminação e renderização, o MoGraph, e os recursos de simulação e dinâmica que fazem do Cinema 4D uma escolha líder na indústria de design 3D. Nos próximos capítulos, aprofundaremos em cada um desses elementos, explorando técnicas e dicas para aproveitar ao máximo este software impressionante.

2.4 Tela do Programa

A interface do cinema 4D apresenta linguagem acessível e similar a de outros softwares com finalidades de modelagem e visualização 3D, o que facilita a experiência de usuários advindos de outros softwares, como *Autodesk*, *3DS Studio MAX*, *Autodesk Maya*, *Blender*, entre outros. Na Figura 2.1, apresentamos um mapa das funcionalidades do Cinema 4D:

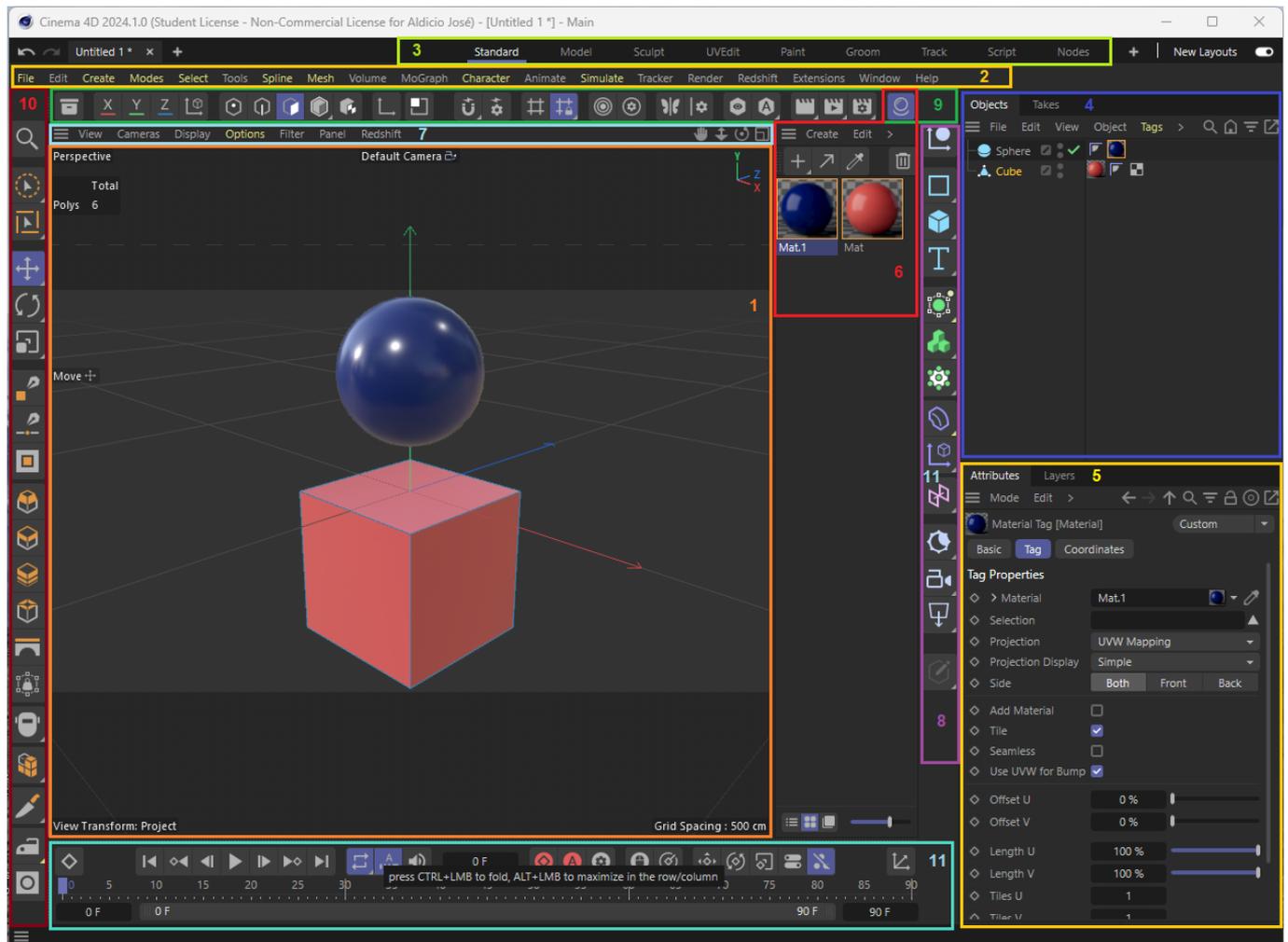


Figura 2.1: Tela do C4D

Considerando a numeração da Figura 2.1, temos os seguintes componentes da tela principal do *software*, que se encontra no *layout standard*:

1. Janela de Visualizações (*Viewport*);
2. Menu Principal;
3. Menu de *Layouts*;
4. Menu de Objetos (*Objects Manager*);
5. Menu de Atributos (*Attributes Menu*);
6. Gerenciador de Materiais (*Material Manager*);
7. Menu da Janela de Visualizações (*Viewport Menu*);
8. Paleta de Objetos (*Object Palette*);

9. Paleta de Modos (*Mode Palette*);
10. Paleta Dinâmica de Modelagem (PDM) (*Modelling Dynamic Palette*);
11. Paleta de Animação (*Timeline Palette*).

Nesta seção, apresentaremos os menus e as barras de ferramentas do programa, os quais estão organizados de modo a possibilitar acesso fácil e dinâmico às funcionalidades que melhor atendem aos objetivos do usuário.

2.4.1 Menus do Cinema 4D

O cinema 4D contém vários menus que adaptam as funcionalidades do programa às necessidades de criação do usuário: modelagem 3D, animações, simulação dinâmica entre outras. A seguir apresentaremos os menus do programa e algumas de suas opções.

Menu Principal

Este menu dá acesso às funções essenciais do software, como a de criar, gerenciar e salvar projetos 3D. São algumas das opções deste menu:

- **File:** possibilita criar e salvar projetos, além de abrir projetos pré-existent;
- **Edit:** contém as opções básicas de edição, como copiar, colar, refazer ou desfazer uma ação, configurações do projeto etc;
- **Modes:** permite a navegação entre diversos modos de edição mais adequados ao contexto da tarefa escolhida: modelagem, escultura, animação, etc. permite acesso a pontos, arestas, textura do objeto, ferramentas de animação entre outras;
- **Select:** oferece acesso a ferramentas de seleção de objetos da cena, além de seleções mais específicas, como a de arestas, vértices e faces do polígono. Este menu oferece as seguintes formas de seleção:
 - **Brush Selection:** permite a seleção de um objeto ou componente deste (ponto, aresta ou vértice) por vez;
 - **Rectangle Selection:** permite a seleção retangular de objetos ou componentes do objeto (ponto, aresta ou vértice). Esta seleção não se limita a componentes visíveis do objeto, selecionando todos os elementos não visíveis dentro da área selecionada.

- **Lasso Selection:** permite a seleção livre do(s) objeto(s) na área de visualizações, onde pode-se desenhar uma forma ao redor dos elementos que se deseja selecionar;
- **Polygon Selection:** possibilita a seleção de polígonos específicos do objeto
- **Tools:** contém diversas ferramentas que são ativadas em contextos específicos. Quando estamos editando um objeto, por exemplo, podemos utilizar as seguintes ferramentas:
 - **Move:** com esta ferramenta, podemos mover um objeto selecionado previamente ao longo dos eixos X, Y e Z;
 - **Rotate:** ao selecionarmos um objeto a utilizarmos esta ferramenta, podemos rotacioná-lo ao redor dos X, Y e Z;
 - **Scale:** esta ferramenta permite redimensionar o objeto selecionado, proporcionalmente ao tamanho original.

Menu de Layouts

Este menu apresenta possibilidade de navegação entre diversos *layouts* predefinidos, com funcionalidades para tarefas específicas. Por exemplo, para executar tarefas básicas de criação de objetos, o *layout* ideal é o *Standard*. Este é o *layout* padrão do C4D, que oferece acesso às ferramentas e painéis básicos do programa. Este será nosso *layout* de trabalho para a modelagem dos poliedros de Arquimedes. Além do *Standard*, são alguns *Layouts*:

- **Model Layout:** projetado para modelagem 3D, apresenta acesso rápido a ferramentas de modelagem, como a criação e edição de polígonos, objetos tridimensionais etc.;
- **Sculpt:** este *layout* apresenta ferramentas úteis para a escultura digital, como pincéis, opções de suavização, entre outras;
- **UV Edit:** este *layout* oferece acesso a ferramentas de manipulação e desdobramento de mapas UV;
- **Animate:** projetado para facilitar o processo de animação, disponibilizando acesso rápido a ferramentas de criação e edição de animações 3D;

Menu de Objetos (*Object Manager*)

Neste menu podemos acessar, organizar e renomear objetos criados em uma cena, como objetos 3D (cubos, esferas, objetos platônicos entre outros), luzes, câmeras etc. Na seção *Takes*, podemos realizar as configurações de cena. Ao criarmos um objeto, o menu *Object Manager* nos oferece as seguintes opções para gerenciá-lo, dentre as quais, podemos destacar:

- **File:** esta opção permite abrir, salvar e exportar o objeto criado, proporcionando também, outras opções de configurações;
- **Edit:** fornece ferramentas para edição do objeto, além de possibilitar as ações: desfazer e refazer, copiar, colar, entre outras;
- **View:** nos permite personalizar a exibição do objeto criado na janela de visualizações, possibilitando ajustes como os de grades, eixos, sobreados entre outros.
- **Objects:** permite a criação e gerenciamento de objetos na cena criada.

No menu *Object Manager*, ao criar um objeto, este se comporta como uma pasta (padrão do Cinema 4D). Desse modo, podemos aplicar aos objetos criados quaisquer ações realizáveis em pastas de um computador: renomear, arrastar, copiar, colar, criar diretórios etc.. Ao aplicarmos qualquer transformação a um objeto, como mover, rotacionar, mudar a cor etc., a transformação é aplicada a todos os objetos filhos (subpastas do objeto principal). Na Figura 2.2, podemos observar que a pasta associada ao cubo (*Cube*) criado está dentro da pasta referente à esfera (*Sphere*). Assim, a cor escolhida para a pasta *Sphere* será aplicada a todos os objetos do diretório:

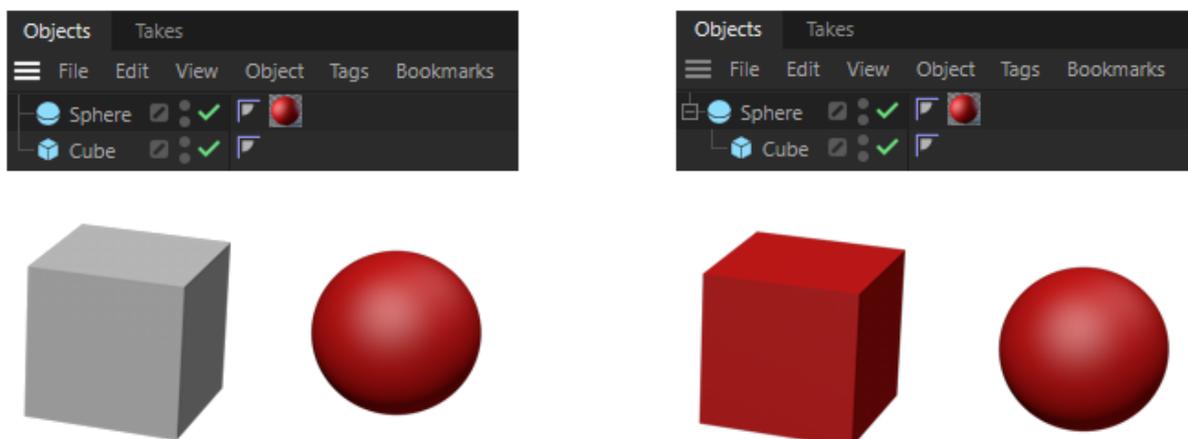


Figura 2.2: Diretório de objetos no menu *Object Manager*

Menu de Atributos (*Attributes Menu*)

Associados ao menu *Object Manager*, temos abaixo um submenu, com as opções de gerenciamento dos objetos criados. A principal função é a *Attributes* através da qual podemos gerenciar características do objeto criado, dentre as quais destacam-se:

- **Basic:** nesta opção podemos alterar o nome do objeto, tipo de material, cor etc.
- **Coordinates:** nos dá opções de transformações dos objetos criados por meio de alterações em suas coordenadas X, Y e Z, além de rotação angular do objeto e mudança de escala.
- **Object:** permite alterações relacionadas às dimensões do objeto criado, como raio ao criar objetos tridimensionais redondos, medidas dos lados. Em alguns modelos é possível alterar quantidades de segmentos, orientação etc.

Menu da Janela de Visualizações (*Viewport Menu*)

O menu da janela de visualizações, ou simplesmente o menu de visualizações, permite ao usuário escolher entre vários recursos visuais ao manipular uma cena no Cinema 4D, tais como Vista (*View*), Câmera (*Camera*), Exibição (*Display*), Mover Câmera (*Move Camera*), Girar Câmera (*Orbit Camera*), Alternar Visualização Ativa (*Toggle Active View*), entre outros. A seguir, explicaremos cada um desses recursos:

- **View:** as principais funcionalidades desta opção estão relacionadas ao controle da cena, como refazer ou desfazer uma perspectiva, enquadrar toda a vista, enquadrar apenas aspectos geométricos, entre outras ações;
- **Display:** oferece opções de visualizações do objeto da cena, como linhas do objeto, exibição de sombras, eixos, etc.;
- **Move Camera:** ao clicar e segurar com o mouse na opção , o usuário pode mover a câmera interativamente, arrastando o mouse conforme desejar;
- **Scale Camera:** ao manter pressionado o botão do mouse sobre a opção , o usuário pode, ao arrastar o mouse, controlar a escala da cena sem afetar os tamanhos reais dos objetos e do cenário.
- **Orbit Camera:** ao manter o botão do mouse pressionado sobre a opção , é possível girar o cenário ao redor de um ponto fixo ao arrastar o mouse.

- **Toggle Active View:** ao clicar no ícone , esta opção permite alternar entre os *layouts* das visualizações ativas, proporcionando diversas perspectivas de visualização do objeto, como vista 3D, vista superior e vistas laterais, como podemos ver na Figura 2.3:

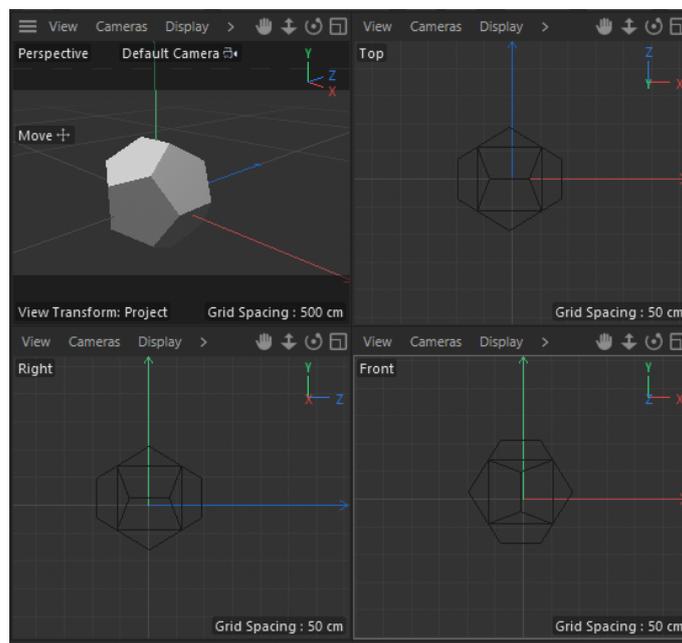


Figura 2.3: Vistas obtidas ao utilizar a opção Alternar Visualização Ativa (*Toggle Active View*)

2.4.2 Barras de Ferramentas ou Paletas do Cinema 4D

A seguir, apresentaremos as barras de ferramentas ou paletas do Cinema 4D, que estão organizadas em blocos para tarefas específicas como: criação de objetos, acesso a componentes específicos do objeto criado; coordenadas do objeto, renderização, modelagem etc. Utilizaremos uma nomenclatura que irá associar a classe de ferramentas ao conjunto de funções que estas desempenham ao modelo criado.

Paleta de Objetos

Esta paleta se localiza verticalmente, à esquerda da janela de visualizações. Nela estão as opções de criação de objetos como: primitivos em 2D e 3D, paramétricos, objetos de superfície, *NURBS* (*Non-Uniform Rational B-Splines*), *MoGraph*, textos, iluminação, câmeras entre outros. Em cada seção de objetos aparece apenas um representante da classe como ícone (por exemplo, o representante dos objetos 2D é um quadrado, dos 3D, um cubo e assim por diante). Assim, para acessar a todos os objetos primitivos 3D, por exemplo, basta clicar e segurar com o botão direito do mouse no representante *Cube*. A seguir, apresentaremos algumas das seções desta paleta.

- **Null:** ao criar o objeto *Null* e arrastar pastas referentes a outros objetos para o diretório do *Null* no menu *Objects Manager*, estes se transformam em um único objeto.
- **Seções de criação de objetos 2D, 3D e de textos:** estas três seções permitem a criação de objetos primitivos, tais como figuras em 2D (quadrados, círculos, triângulos, *Splines* (curvas), etc.) e em 3D (cubos, paralelepípedos, esferas, cilindros, etc.), assim como textos em 2D e 3D.
- **Seção Objetos Geradores:** são objetos que criam ou modificam elementos geométricos de objetos já existentes. Para que haja a transformação desejada, a pasta do objeto criado deve ser arrastada para dentro da pasta do objeto gerador. Alguns exemplos incluem:
 - **Atom Array:** transforma o objeto em uma nova estrutura de contorno, que realça seus vértices e transforma-os em esferas pequenas, enquanto as arestas são tornadas cilíndricas de raio ajustável, como mostra a Figura 2.4.

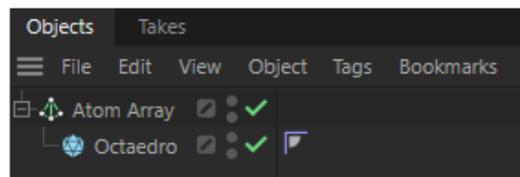


Figura 2.4: Ferramenta *Atom Array* aplicada ao octaedro regular.

- **Subdivision Surface:** utilizado para suavizar geometricamente o objeto, aumentando sua resolução e subdividindo suas faces, resultando em uma superfície mais suave.
 - **Sweep:** utilizado para gerar formas ao longo de uma Spline (Curva 2D, um caminho), criando uma forma de contorno para a nova figura.
- **Seção de Câmeras:** cria câmeras dentro da cena para possibilitar a visualização e animação do objeto de acordo com as perspectivas desejadas pelo usuário.
 - **Seção de Iluminação:** permite criar objetos de iluminação dentro da cena, controlando iluminação e sombras da mesma.

- **Ferramenta Make Editable:** converte um objeto paramétrico em um objeto poligonal editável.

Paleta de Modos (Mode Palette)

Localizada acima da janela de visualizações, esta paleta permite ao usuário o acesso às coordenadas do objeto, a componentes específicos do mesmo (pontos, face, aresta, textura), opções de renderização entre outras. A seguir, vamos apresentar as suas principais ferramentas:

- **Ferramentas de coordenadas:** permitem controle sobre os eixos X , Y e Z da cena, possibilitando, por exemplo, o bloqueio de eixos e alternância entre coordenadas cúbicas e globais;
- **Ferramentas de modos de seleção de um objeto editável:** são elas: *Points* (pontos), *Edges* (arestas), *Polygons* (polígonos ou faces), *Model* (todo o objeto) e *Texture*. Ao deixar uma delas ativada, por exemplo, a ferramenta *Points*, teremos acesso aos pontos do objeto, podendo movê-los, apagá-los, entre outras ações;
- **Material Manager:** com esta ferramenta, é possível aplicar materiais, como metais diversos, vidro e ouro, a objetos selecionados. O material aplicado a um objeto constituirá os seus elementos, incluindo superfícies, arestas, vértices, entre outros. Além disso, é possível criar o próprio material, definindo cor, transparência e outras propriedades, por meio das ferramentas no menu de atributos. Para criar um material, basta clicar no ícone , dar um duplo clique dentro do menu de materiais e configurar o material que aparece, utilizando o menu "Attributes". É possível também escolher um material pré-definido na função "Create" do Menu de Materiais (*Material Manager*). Em seguida, basta arrastar o material criado para um objeto dentro da janela de visualizações (*Viewport*) ou do menu de gerenciamento de objetos (*Object Manager*). Uma aplicação deste recurso é exemplificada na Figura 2.5:

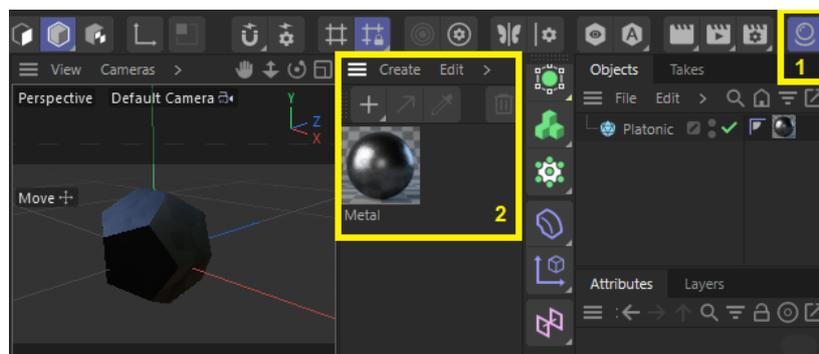


Figura 2.5: Em 1 está o ícone do gerenciador de materiais e, em 2 foi criado o material metal e aplicado ao dodecaedro.

- **Ferramentas de renderização:** permitem ao usuário a criação de imagens e animações de alta qualidade. São as seguintes:
 - **Render View (Visualização de Renderização):** renderiza a cena atualmente ativa na janela de visualizações;
 - **Render to Picture Viewer:** renderiza o projeto ativo no *Picture Viewer* (visualizador de imagens).
 - **Edit Render Settings:** permite editar as configurações de renderização da cena, incluindo formato de saída, resolução, entre outras.

Paleta Dinâmica de Modelagem (*Modelling Dinamic Palette*)

Esta paleta se localiza na lateral à esquerda da janela de visualizações. Os principais recursos de modelagem proporcionados por ela são ativados apenas para objetos editáveis e após seleção de um dos componentes específicos: pontos, faces ou arestas dos mesmos, conforme instruções do menu anterior. A seguir, apresentaremos as principais opções deste menu:

- **Seção de ferramentas de seleção:** ao clicar e segurar no representante da seção, o *Brush Selection* (seleção de pincel), aparecerão as demais opções de seleção: *Rectangle Selection* (seleção retangular), *Lasso Selection* (seleção de laço) e *Polygon Selection* (seleção de polígono(s));
- **Seção Move:** ao deixarmos selecionada esta opção, podemos mover um objeto ao longo dos eixos X , Y e Z . Ao selecionar a opção *Polygon* (face) e, clicando e segurando com o botão direito do mouse em *Move*, obtemos a opção *Move Tool*, que permite controlar o parâmetro distância ao mover uma face ao longo do eixo perpendicular a ela;
- **Seção Rotate:** ao selecionarmos a ferramenta *Rotate*, podemos mover um objeto ou um de seus componentes (ponto, vértice ou aresta) ao redor do seu centro de rotação. Com a opção *Polygon* (face) selecionada, clicando e segurando com o botão direito do mouse em *Move*, teremos acesso à ferramenta *Normal Rotate*, que possibilita controlar o parâmetro *Rotate* (em grau) ao girar a face selecionada ao redor do eixo perpendicular a ela, em graus;
- **Ferramenta Polygon Pen:** ao aplicar este recurso, podemos desenhar e editar objetos poligonais;
- **Ferramenta Bevel:** este recurso permite o chanfro ou arredondamento de cantos de um objeto editável. O *Bevel* pode ser aplicado a vértices ou arestas. Assim, denotaremos por *Bevel(A)* a

ação de aplicá-lo às arestas e *Bevel(V)* a ação de aplicá-lo a um ou mais vértices de um objeto. Para utilizar este recurso, devemos primeiramente criar o objeto e torná-lo editável aplicando a ferramenta *Make Editable* e, na barra de ferramentas de seleção de modos, escolher uma das opções: pontos (*Points*) ou arestas (*Edges*). Em seguida, basta escolher todos os pontos ou arestas aos quais se quer aplicar o chanfro e, no menu *Attributes*, escolher uma das opções de parâmetro, entre *Fixed Distance* (distância fixa), *Radial* (relativo ao raio) ou *Proportional* (proporcional), inserindo o valor correspondente à transformação desejada. A Figura 2.6 abaixo ilustra a aplicação desta ferramenta:

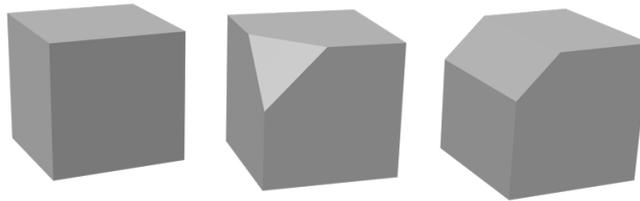


Figura 2.6: Efeito Bevel aplicado ao cubo (à esquerda), ao vértice (centro) e à aresta (à direita).

- **Ferramenta Extrude:** ao aplicar o *Extrude* a vértices, faces ou arestas de um objeto 3D, ocorre a extrusão do componente selecionado, isto é, este é movido para o interior ou exterior do objeto, proporcionando profundidade ao mesmo.

Os Sólidos de Platão no Cinema 4D

No C4D, os poliedros de Platão são dados em função do raio r da esfera circunscrita ao poliedro. Neste capítulo, vamos estudar a relação entre o raio r da esfera circunscrita a cada poliedro e a medida da sua aresta a . Em resumo, resolveremos para cada sólido platônico o seguinte problema: *sendo a a medida da aresta do sólido platônico e r o raio da esfera circunscrita a ele, determine r em função de a* . Ao final do capítulo, mostraremos como criar um sólido platônico de aresta específica no C4D.

3.1 Raio da Esfera Circunscrita ao Tetraedro de Aresta a

Para calcularmos o raio r da esfera circunscrita ao tetraedro de aresta a considere o esboço na Figura 3.1 abaixo, de aresta a e altura $x = \overline{AE}$, inscrito em uma esfera de raio r e centro O :

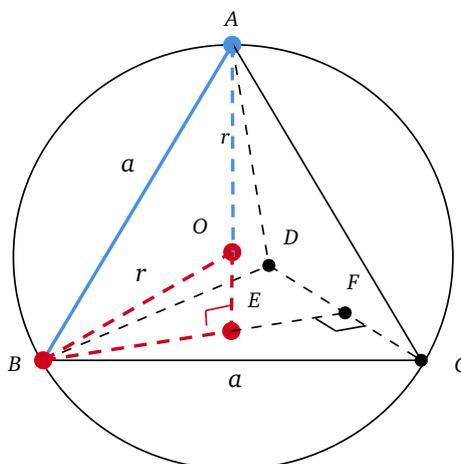
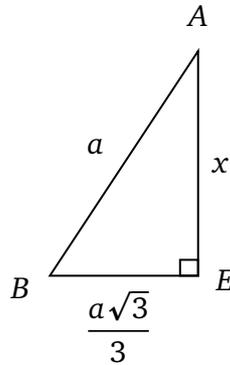


Figura 3.1: Tetraedro circunscrito.

Como o ponto E coincide com o baricentro do triângulo equilátero BCD de altura $\overline{BF} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, então $\overline{BE} = \frac{2}{3}\overline{BF} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Vamos utilizar este resultado para obtermos a altura $\overline{AE} = x$ do triângulo ABE abaixo:



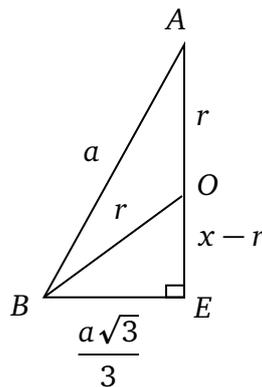
Aplicando-se o Teorema de Pitágoras ao triângulo ABE :

$$a^2 = x^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$x^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} = \frac{6a^2}{9}$$

$$x = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Para obtermos a em função de r , considere os triângulos ABE e OBE abaixo:



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OBE , temos:

$$\overline{OB}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EO}^2$$

$$r^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{3} - r\right)^2$$

$$r^2 = \frac{3a^2}{9} + \frac{6a^2}{9} - 2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot r + r^2$$

$$0 = a^2 - \frac{2ar\sqrt{6}}{3}$$

$$a = \frac{2r\sqrt{6}}{3}.$$

Desse modo, o raio da esfera que circunscribe o tetraedro de aresta a é:

$$r = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

3.2 Raio da Esfera Circunscrita ao Hexaedro de Aresta a

O raio r da esfera circunscrita ao hexaedro de aresta a é igual à metade da sua diagonal. Considere o hexaedro $ABCDEFGH$ representado na figura 3.2 abaixo:

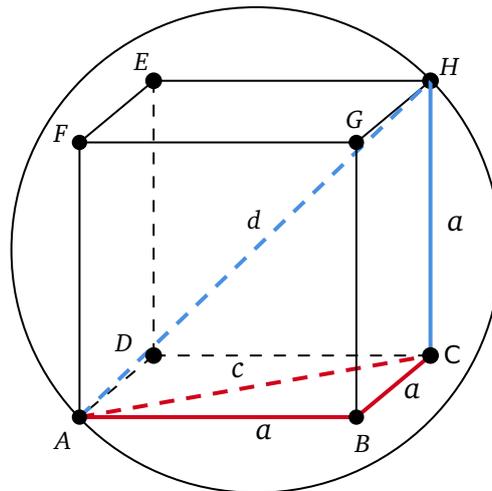


Figura 3.2: Hexaedro circunscrito.

Considere os triângulos ABC e HAC com $\overline{AH} = d$ e $\overline{AC} = c$. Ao aplicarmos o Teorema de Pitágoras ao triângulo ABC , obtemos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

$$c^2 = a^2 + a^2$$

$$c^2 = 2a^2$$

$$c = \sqrt{2a^2}$$

$$c = a\sqrt{2}.$$

Assim, pelo mesmo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo HAC :

$$(\overline{HA})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{CH})^2$$

$$d^2 = c^2 + a^2$$

$$d^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2$$

$$d^2 = 2a^2 + a^2$$

$$d^2 = 3a^2$$

$$d = a\sqrt{3}.$$

Assim, como $d = a\sqrt{3}$ é o diâmetro da esfera circunscrita ao hexaedro de aresta a , então $r = \frac{d}{2}$, isto é:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

3.3 Raio da Esfera Circunscrita ao Octaedro de Aresta a

Considere um esboço do octaedro regular $EABCFD$ (Figura 3.3) de aresta a , inscrito em uma esfera de centro O e raio $r = \overline{OB}$:

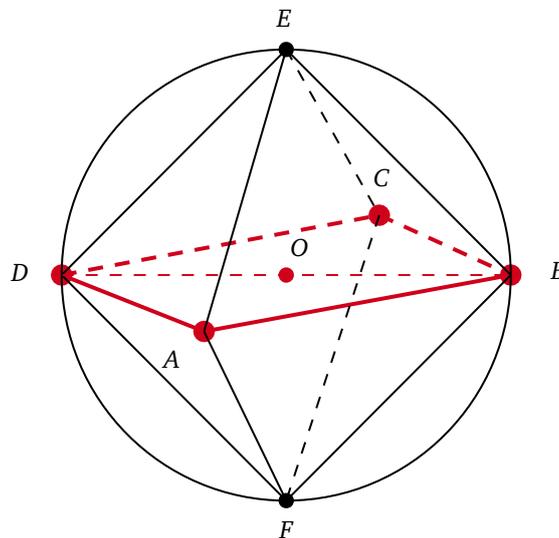


Figura 3.3: Octaedro circunscrito.

Como o centro O da esfera é o ponto médio da diagonal DB do quadrado $ABCD$, e como $\overline{DB} = a\sqrt{2}$, então $r = \frac{1}{2}\overline{DB}$, isto é:

$$r = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

3.4 Raio da Esfera Circunscrita ao Dodecaedro de Aresta a

Para calcularmos o raio r da esfera circunscrita ao dodecaedro de aresta a , vamos utilizar o fato de que este é igual à metade da diagonal do cubo a ele inscrito, como mostra a Figura 3.4 abaixo:

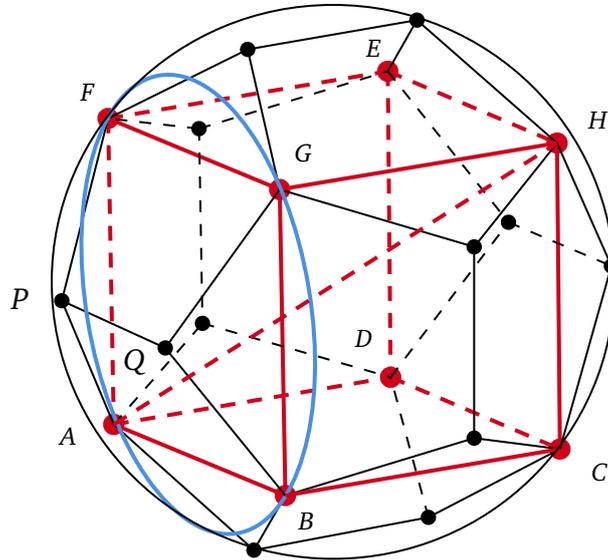


Figura 3.4: Dodecaedro circunscrito.

Observe que o prisma $ABCDEFGH$ de fato se trata de um cubo, uma vez que suas faces são quadriláteros inscritíveis de arestas congruentes, pois correspondem à diagonais de pentágonos regulares de aresta a . Observe na Figura 3.4 que $FG \parallel PQ \parallel AB$, portanto a face $ABGF$ do prisma $ABCDEFGH$ é um paralelogramo. Temos, portanto que o plano que contém a face $ABGF$ intersecta a esfera circunscrita ao dodecaedro, gerando a seção da Figura 3.5, isto é, o quadrilátero $ABGF$ inscrito em uma circunferência que passa pelos seus vértices.

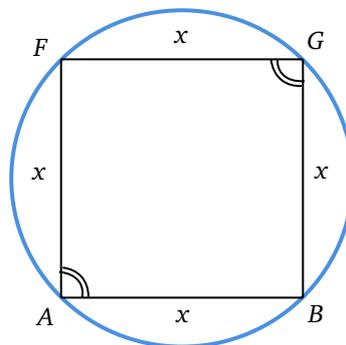


Figura 3.5: Quadrilátero inscrito.

Como se trata de um paralelogramo, os ângulos opostos são congruentes, isto é $\widehat{FAB} = \widehat{FGB} = \alpha$. Além disso, como $ABGF$ é inscritível, a soma dos seus ângulos opostos é igual a 180° , isto é:

$$\hat{F}AB + \hat{F}GB = 180^\circ$$

$$\alpha + \alpha = 180^\circ$$

$$2\alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 90^\circ$$

O que mostra que a face é de fato um quadrado. Analogamente mostra-se que as demais faces são quadradas, isto é, $ABCDEFGH$ é um cubo.

Agora vamos calcular a medida da aresta do cubo inscrito, que é igual à medida da diagonal do pentágono regular de aresta a . Considere o Pentágono $PQRST$ de aresta a da Figura 3.6.

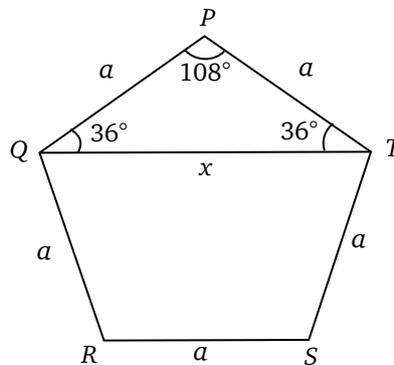


Figura 3.6: Diagonal do pentágono de aresta a .

Aplicando-se a Lei dos Cossenos ao triângulo PQT , dado que $\cos(36^\circ) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$, obtemos:

$$\overline{PT}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{QT}^2 - 2\overline{PQ} \cdot \overline{QT} \cos(36^\circ)$$

$$a^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cos(36^\circ)$$

$$x^2 - 2ax \cos(36^\circ) = 0$$

$$x(x - 2a \cos(36^\circ)) = 0$$

$$x - 2a \cos(36^\circ) = 0 \quad (\text{pois } x > 0)$$

$$x = 2a \cos(36^\circ) = 2a \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$x = \frac{a + a\sqrt{5}}{2}.$$

Como a diagonal do cubo mede $x\sqrt{3}$ então o raio da esfera circunscrita ao dodecaedro de aresta a mede $r = \frac{1}{2}x\sqrt{3}$, ou seja:

$$r = \frac{(a + a\sqrt{5})\sqrt{3}}{4}.$$

3.5 Raio da Esfera Circunscrita ao Icosaedro de Aresta a

Para calcularmos o raio da esfera circunscrita ao icosaedro de aresta a , vamos observar que seu diâmetro é equivalente à distância d entre os vértices B e C do poliedro inscrito, que são diametralmente opostos, como mostra a Figura 3.7.

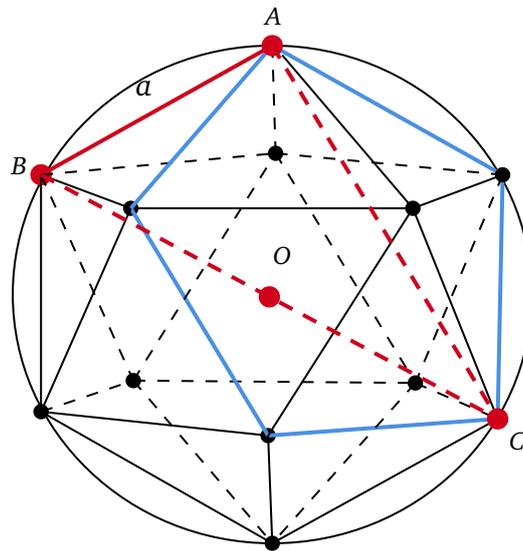


Figura 3.7: Icosaedro circunscrito.

Além disso, podemos observar que as faces triangulares que se encontram em um mesmo vértice formam uma pirâmide de base pentagonal regular, de aresta a . Vamos considerar o triângulo ABC da Figura 3.8, inscrito na circunferência de diâmetro $\overline{BC} = d$.

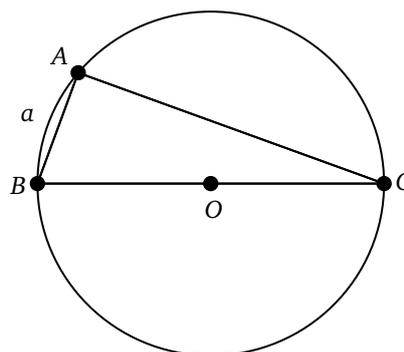


Figura 3.8: Triângulo ABC inscrito em uma circunferência de diâmetro $\overline{BC} = d$.

Como BC é um diâmetro, o triângulo ABC é retângulo em A . Sabemos também que AC é uma diagonal do pentágono regular de aresta a , assim $\overline{AC} = \frac{(1 + \sqrt{5}) \cdot a}{2}$ e, como $\overline{AB} = a$, pelo Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \\ d^2 &= a^2 + \left(\frac{(1 + \sqrt{5})a}{2} \right)^2 \\ d^2 &= a^2 + \frac{(1 + \sqrt{5})^2 a^2}{4} \\ d^2 &= \frac{4a^2 + (1 + 2\sqrt{5} + 5)a^2}{4} \\ d^2 &= \frac{(10 + 2\sqrt{5})a^2}{4} \\ \therefore d &= \sqrt{\frac{(10 + 2\sqrt{5})a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2}. \end{aligned}$$

O raio r da esfera circunscrita ao icosaedro é igual à $\frac{1}{2} \cdot d$, logo:

$$r = \frac{a \cdot \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

A Tabela 3.1 abaixo relaciona os raios das esferas circunscritas aos sólidos platônicos de aresta a :

Sólido de Platão	Fórmula para o Raio (r)
Tetraedro	$r = \frac{a\sqrt{6}}{4}$
Hexaedro (Cubo)	$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
Octaedro	$r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
Dodecaedro	$r = \frac{a(1 + \sqrt{5})\sqrt{3}}{4}$
Icosaedro	$r = \frac{a\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$

Tabela 3.1: Raio da esfera circunscrita ao poliedro de Platão de aresta a .

3.6 Criando um Sólido de Platão no Cinema 4D

Como exemplo, vamos criar um objeto platônico com uma aresta de medida específica a . Para alcançar isso, é necessário acessar a classe de objetos 3D disponível na Paleta de Objetos (*Object Palette*). Para visualizar todas as opções dessa paleta, basta clicar e manter pressionado o mouse sobre o ícone  (*Cube*), conforme ilustrado na Figura 3.9 abaixo:

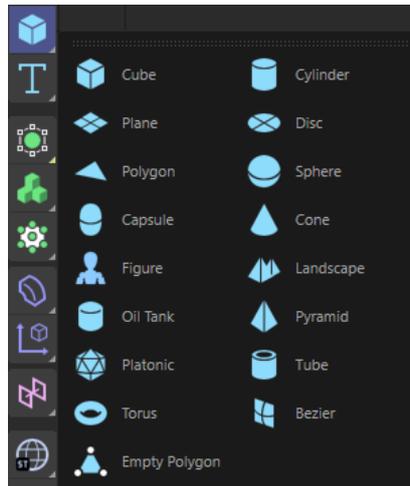


Figura 3.9: Objetos 3D da paleta de objetos.

Clicando no ícone  (*Platonic*), criamos um objeto platônico na janela de visualizações, que pode ser observado na Figura 3.10.

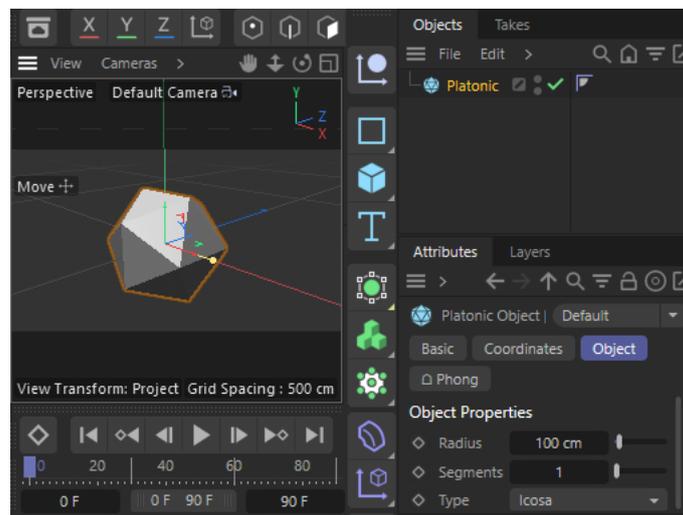


Figura 3.10: Criando um objeto platônico.

No Menu de Atributos (*Attribute Menu*), em *Object*, devemos escolher, na opção Tipo (*Type*), qual tipo de Sólido Platônico queremos criar entre: Tetraedro (*Tetra*), Hexaedro (*Hexa*), Octaedro (*Octa*) e Icosaedro (*Icosa*). Por padrão, os sólidos criados terão raio igual a 100 cm

Para criarmos um sólido platônico de aresta a , devemos utilizar a relação entre raio e aresta do mesmo, conforme Tabela 3.1. Assim, se queremos um tetraedro de aresta $a = 80 \text{ cm}$, selecionamos *Tetra* em *Type* e inserimos o raio $r = \frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{80 \cdot \sqrt{6}}{4} = 20\sqrt{6} \simeq 48.9898$, como na Figura 3.11 abaixo:

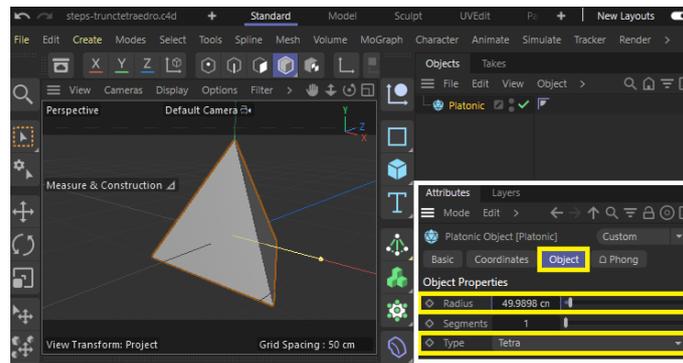


Figura 3.11: Construindo um tetraedro de aresta $a = 80 \text{ cm}$.

Podemos renomear o sólido objeto criado com clique duplo sobre *Platonic*, no Menu *Object Manager*, conforme ilustra a Figura 3.12 abaixo:



Figura 3.12: Renomeando um objeto no C4D.

Para verificarmos que a medida da aresta do tetraedro criado é de fato 80 cm , utilizaremos o recurso *Measure & Construction*, conforme o passo a passo abaixo:

1. Torne o tetraedro editável selecionando-o no Menu de Objetos (*Object Manager*) e clicando no ícone  na Paleta de Objetos (*Object Palette*);
2. Na paleta de modos, clique no ícone  para escolher a opção "Pontos" (*Points*);
3. Clique em "Tools" no Menu Principal, escolha a opção "Guide" em "Tools" e "Measure & Construction" em "Guide";
4. Na Janela de Visualizações (*Viewport*), escolha dois pontos no tetraedro e verifique a distância entre eles, conforme ilustrado na Figura 3.13.

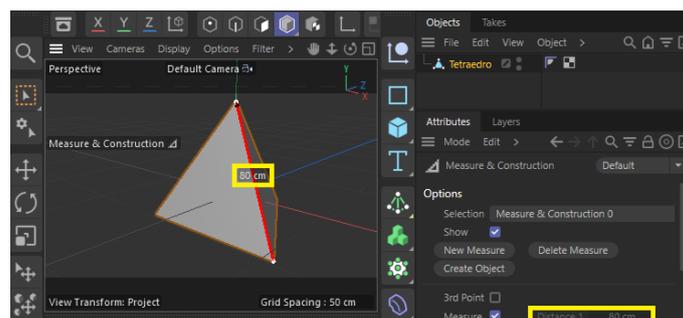


Figura 3.13: Tetraedro de aresta $a = 80 \text{ cm}$.

Modelagem por Truncamento via Cinema

4D

Neste capítulo, apresentaremos os Poliedros de Arquimedes obtidos pela operação mais básica de truncamento: o corte de pirâmides em um dado poliedro de Platão, cujas bases se tornam as novas faces do sólido arquimediano a ser construído. Para modelar esses sólidos via Cinema 4D, em cada seção, obteremos as condições métricas necessárias para a modelagem do Poliedro de Arquimedes desejado, com uma aresta específica de medida b . Assim, descobriremos qual é a medida a do Sólido de Platão que origina o sólido arquimediano a ser criado, bem como a medida da aresta lateral da pirâmide a ser retirada. Com esses dados em mãos, criaremos um passo a passo para obtenção do Sólido de Arquimedes a ser modelado.

4.1 Modelagem do Tetraedro Truncado

O Tetraedro Truncado é composto por 8 faces regulares (sendo 4 triângulos e 4 hexágonos), 12 vértices e 18 arestas. Para construir um tetraedro truncado, é necessário remover do tetraedro dado, as pirâmides cujas bases, relativas a cada vértice do sólido platônico, são triângulos regulares, e os lados destes triângulos compõem as faces hexagonais do sólido arquimediano resultante. Esse procedimento está ilustrado na Figura 4.1:

Para obter as faces hexagonais de aresta b , analisamos o recorte da face triangular na Figura 4.2. Notamos que os triângulos retirados são equiláteros, também com aresta b . Observe que $\hat{A\hat{D}E} = 60^\circ$, pois é suplementar em relação a um dos ângulos inscritos no hexágono regular de medida 120° .

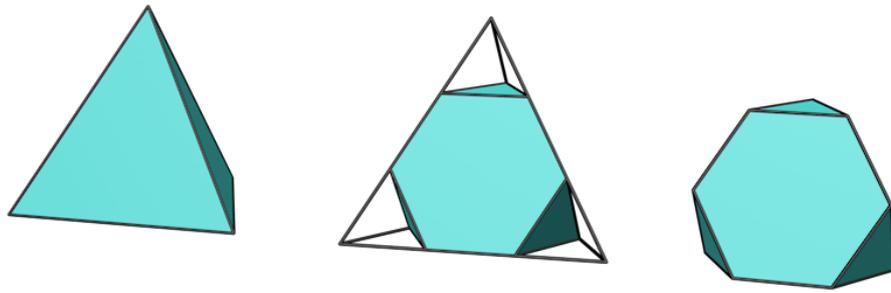


Figura 4.1: Construção de um tetraedro truncado.

Analogamente, mostra-se que $\hat{AED} = 60^\circ$. Assim, o triângulo ADE é equilátero, isto é: $b = x$. Segue que $a = b + 2x$, portanto, $a = 3b$.

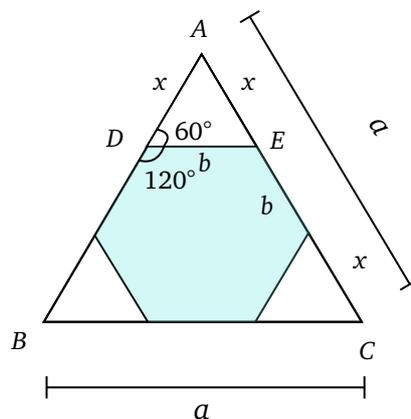


Figura 4.2: Transformação da face triangular do tetraedro em hexágono regular.

Para modelarmos um tetraedro truncado de aresta b , como $a = 3b$, o raio do tetraedro regular medirá $r = \frac{3b\sqrt{6}}{4}$ e, a aresta lateral da pirâmide a ser cortada mede $b = \frac{a}{3}$.

4.1.1 Criando um Tetraedro Truncado de Aresta b no C4D

Seguem-se os passos para a criação do tetraedro truncado de aresta b :

1. Crie um objeto primitivo, um tetraedro regular, ajustando, no C4D, o raio em $r = \frac{3b\sqrt{6}}{4}$ ($r \approx 1.837117b$), conforme procedimento da Seção 3.6;
2. Na Paleta de Objetos, clique e segure na opção Bend para exibir os demais objetos da categoria. Selecione o objeto Bevel Deformer, como ilustra a Figura 4.3;
3. No Menu *Object Manager*, arraste o objeto *Bevel* para dentro do tetraedro criado, conforme diretório da Figura 4.4;

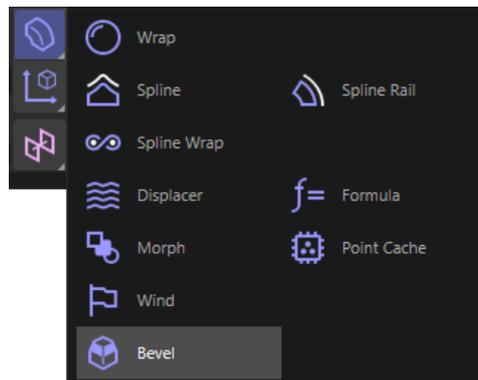


Figura 4.3: Localização do *Bevel Deformer* no C4D.

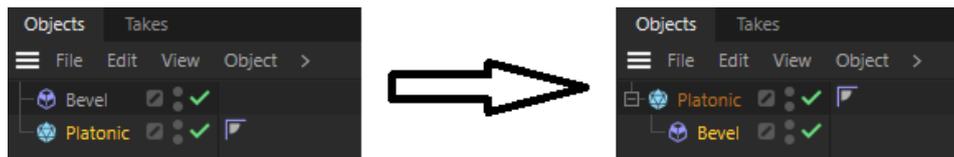


Figura 4.4: Aplicação do *Bevel Deformer* ao poliedro platônico criado no Menu *Object Manager*.

4. No Menu *Object Manager*, selecione o objeto *Bevel*. Em *Option*, no Menu de Atributos, selecione *Points* em *Component Mode*, *Fixed Distance* em *Offset Mode* e, em *Offset*, insira o valor de b , conforme a Figura 4.5:

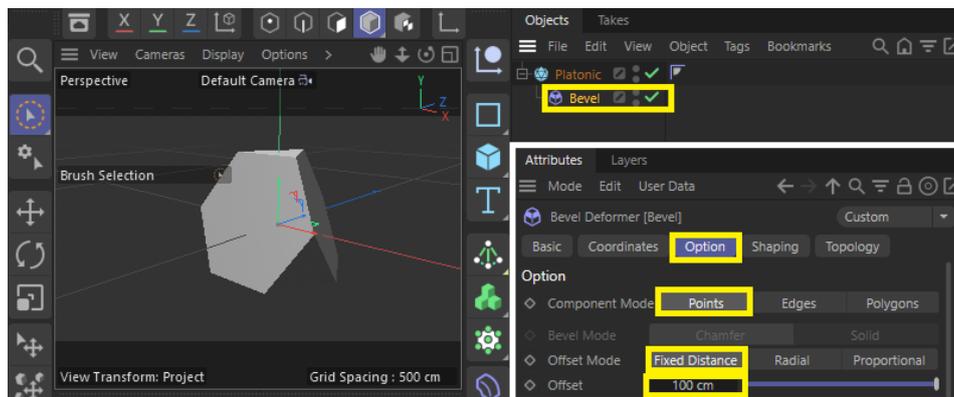


Figura 4.5: Etapa final da modelagem do tetraedro truncado no C4D.

5. Para finalizar, no Menu *Object Manager*, clique com o botão direito sobre o *Platonic* e aplique a opção *Connect Object + Delete*. Desse modo, o tetraedro e o *Bevel* se tornarão um único objeto.

O tetraedro truncado a seguir (Figura 4.6) foi modelado para ter aresta $b = 100 \text{ cm}$, assim, o raio utilizado para o tetraedro foi $r = \frac{3 \cdot 100\sqrt{6}}{4} = 75\sqrt{6} \simeq 183.7117 \text{ cm}$. Em seguida, foi aplicado todo o procedimento descrito acima.

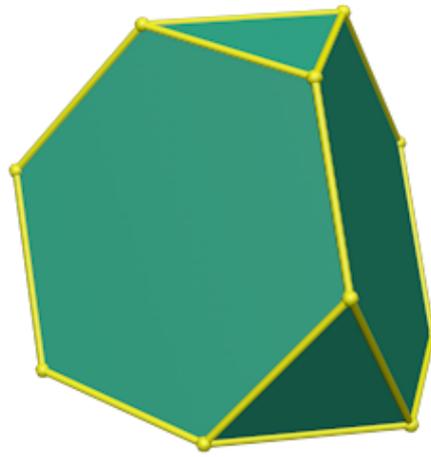


Figura 4.6: Tetraedro Truncado.

4.2 Modelagem do Cubo Truncado

O Cubo Truncado é um sólido de Arquimedes que possui 14 faces regulares (sendo elas 8 triângulos e 6 octógonos), 24 vértices e 36 arestas. Este sólido é obtido através do truncamento do hexaedro regular, do qual são retiradas, a partir de cada vértice, as pirâmides de base triangular regular. Além disso, os lados desses triângulos regulares são também as arestas dos octaedros regulares do cubo truncado construído. Esse procedimento está ilustrado na Figura 4.7 abaixo:

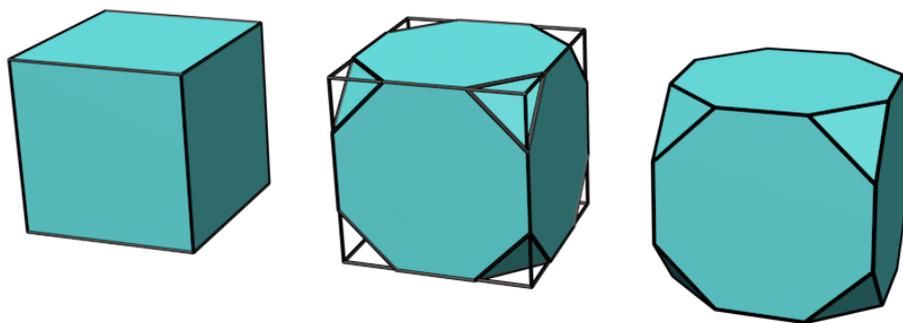


Figura 4.7: Modelagem do cubo truncado.

Para obtermos um cubo truncado de aresta b , deveremos obter o valor x a ser cortado do cubo de aresta a de modo a obtermos o octógono de aresta b , conforme ilustra a Figura 4.8:

Observe, na Figura 4.8, que $a = b + 2x$. Além disso, aplicando-se o teorema de Pitágoras ao triângulo AEF , obtemos a equação $b^2 = 2x^2$. Para determinarmos x em função de a , devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} a = b + 2x \\ b^2 = 2x^2 \end{cases}$$

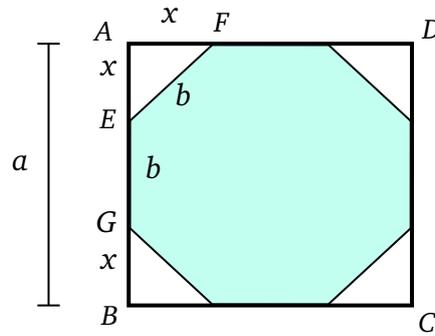


Figura 4.8: Recorte lateral do cubo truncado em construção.

$$a = b + 2x \quad (4.1)$$

$$b^2 = 2x^2 \quad (4.2)$$

Da equação 4.2 obtemos:

$$x = \frac{b}{\sqrt{2}} \quad (4.3)$$

Substituindo-se a equação 4.3 na equação 4.1, obtemos $a = b(1 + \sqrt{2})$.

Assim, substituindo-se $a = b(1 + \sqrt{2})$ em $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, obtemos $r = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{6})b$.

4.2.1 Criando um Cubo Truncado de Aresta b no C4D

1. Crie um objeto primitivo, um hexaedro regular, ajustando, no C4D, o raio em $r = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{6}) \cdot b$ ($r \approx 2.09077b$), conforme procedimento da Seção 3.6;
2. Proceda como nos itens 2 e 3 da Subseção 4.1.1 para criar e gerenciar o objeto *Bevel Deformer*;
3. No Menu *Object Manager*, selecione o objeto *Bevel*. Em *Option*, no Menu de Atributos, selecione *Points* em *Component Mode*, *Fixed Distance* em *Offset Mode* e, em *Offset*, insira o valor $x = \frac{b}{\sqrt{2}}$ ($x \approx 0.7071068b$), conforme a Figura 4.9;
4. Para conectar os objetos criados, no Menu *Object Manager*, clique com o botão direito sobre *Platonic* criado e aplique a opção *Connect Object + Delete*.

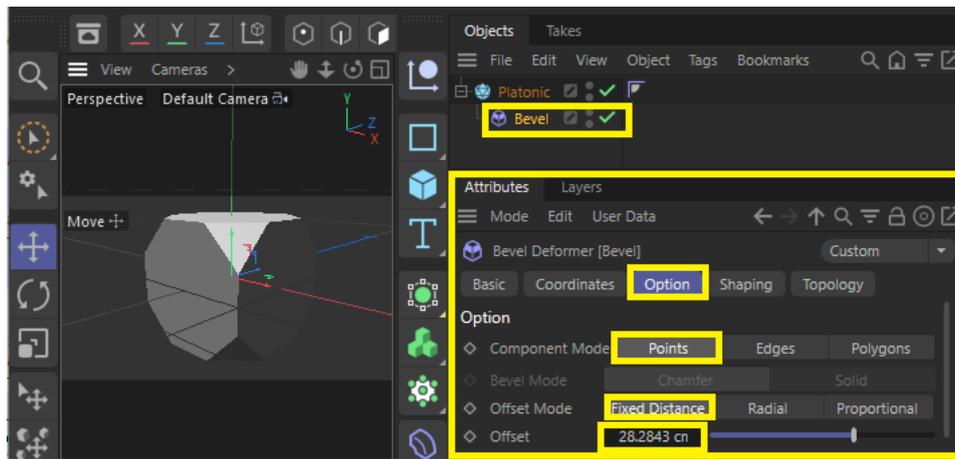


Figura 4.9: Etapa final da modelagem do cubo truncado no C4D.

O cubo truncado da Figura 4.10 foi criado para ter aresta $b = 40 \text{ cm}$, assim, $r = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{6}) \cdot 40 \simeq 83.631 \text{ cm}$ e, para o *Bevel*, em *Offset Mode*, na opção *Fixed Distance*, o *Offset* foi ajustado em $x = \frac{40}{\sqrt{2}} \simeq 28.2843 \text{ cm}$.

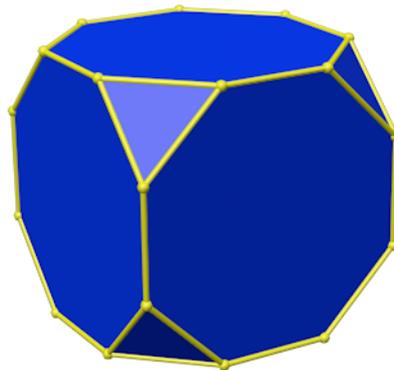


Figura 4.10: Cubo Truncado.

4.3 Modelagem do Octaedro Truncado

O Octaedro Truncado possui 14 faces regulares, sendo 6 faces quadradas e 8 faces hexagonais, além de 24 vértices e 36 arestas. Este sólido é originado pelo truncamento do Octaedro regular, que é um sólido de Platão composto por 8 faces triangulares regulares, 12 vértices e 6 arestas. De um octaedro dado são retiradas as pirâmides de base quadrada a partir de cada vértice. Dessa maneira, cada lado do quadrado também se torna uma aresta de um dos hexágonos regulares do sólido arquimediano obtido. O procedimento é ilustrado na Figura 4.11 abaixo:

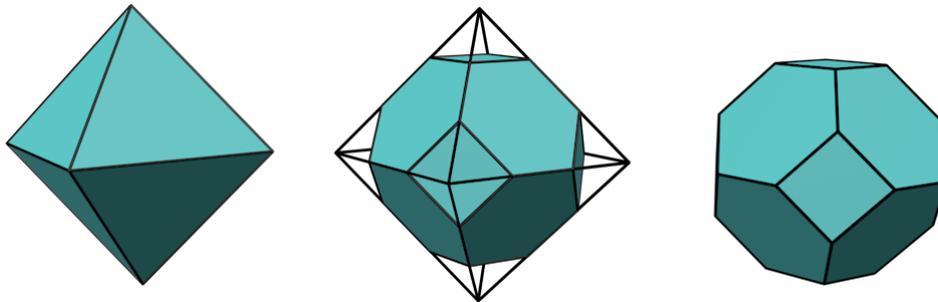


Figura 4.11: Construção de um octaedro truncado.

Para transformarmos cada face triangular de aresta a em hexágono de aresta b , deveremos proceder como no caso do tetraedro truncado, assim, sabemos que $b = \frac{a}{3}$, conforme ilustra a Figura 4.12 abaixo:

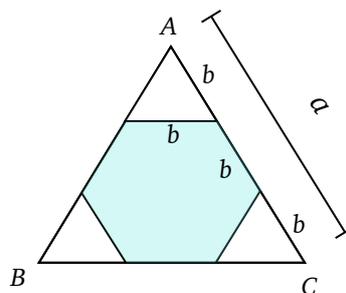


Figura 4.12: Recorte da face triangular do octaedro.

Observe que, sendo $a = 3b$, logo o raio da esfera circunscrita ao octaedro mede $r = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{3b\sqrt{2}}{2}$, e o valor para o *offset* do *bevel(A)* na opção *fixed distance* é igual a b .

4.3.1 Criando um Octaedro Truncado de Aresta b no C4D

1. Crie um objeto primitivo, um octaedro regular, ajustando, no C4D, o raio em $r = \frac{3b\sqrt{2}}{2}$ ($r \approx 2.12132$), conforme procedimento da Seção 3.6;

2. Proceda como nos itens 2 e 3 da Subseção 4.1.1 para criar e gerenciar o objeto *Bevel Deformer*;
3. No Menu *Object Manager*, selecione o objeto *Bevel*. Em *Option*, no Menu de Atributos, selecione *Points* em *Component Mode*, *Fixed Distance* em *Offset Mode* e, em *Offset*, insira o valor b , conforme a Figura 4.13:

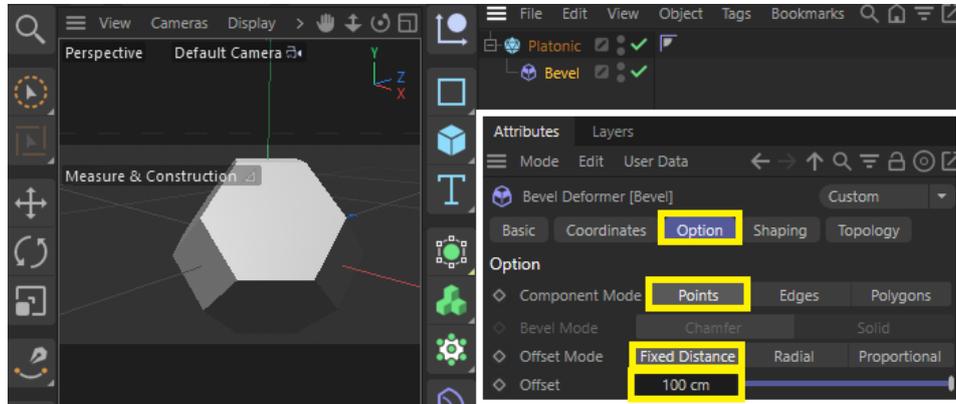


Figura 4.13: Etapa final da modelagem do octaedro truncado no C4D.

4. Para conectar os objetos criados, no Menu *Object Manager*, clique com o botão direito sobre *Platonic* criado e aplique a opção *Connect Object + Delete*.

O octaedro truncado da Figura 4.14 a seguir foi modelado para que sua aresta tenha medida $b = 100 \text{ cm}$, assim, o raio do octaedro é $r = \frac{3 \cdot 100\sqrt{2}}{2} \simeq 212.132 \text{ cm}$, e na ferramenta *Bevel*, em *Offset Mode* na opção *Fixed Distance*, o *Offset* foi ajustado em $b = 100 \text{ cm}$.

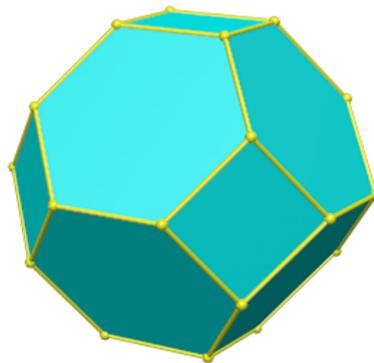


Figura 4.14: Octaedro Truncado.

4.4 Modelagem do Cuboctaedro

O Cuboctaedro é um sólido de Arquimedes que possui 14 faces regulares, sendo 8 triangulares e 6 quadrangulares, além de 12 vértices e 24 arestas. Assim como o Octaedro Truncado, este sólido é gerado pelo processo de truncamento de um octaedro regular. Nesse procedimento, são removidas as pirâmides de bases quadradas relativas aos vértices do octaedro dado. Os lados desses quadrados são, então, transformados nas faces triangulares do sólido arquimediano resultante. Esse processo pode ser visualizado na Figura 4.15 abaixo:

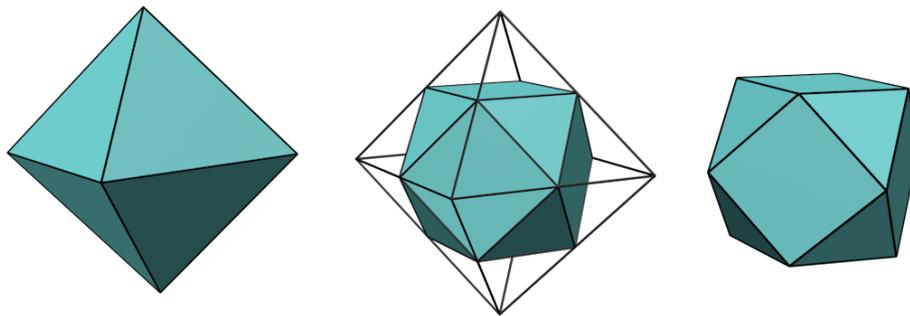


Figura 4.15: Criação do cuboctaedro.

A Figura 4.16 ilustra o que acontece com as faces triangulares do octaedro. Observe que, como o triângulo ADE é isósceles, pois $\overline{AD} = \overline{AE} = x$, então $\hat{ADE} = \hat{AED} = 60^\circ$. Daí segue o $\triangle ADE$ é equilátero, e assim, $b = x$. Teremos então que $b = \frac{a}{2}$, ou seja, $a = 2b$.

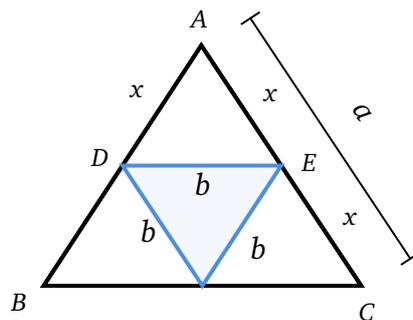


Figura 4.16: Obtenção das faces triangulares do cuboctaedro.

Assim, como $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, temos que $r = b\sqrt{2}$, e, a aresta da pirâmide a ser cortada mede b .

4.4.1 Criando um Cuboctaedro de Aresta b no C4D

1. Crie um objeto primitivo, um octaedro regular, ajustando, no C4D, o raio em $r = b\sqrt{2}$ ($r \approx 1.4142b$), conforme procedimento da Seção 3.6;

2. Proceda como nos itens 2 e 3 da Subseção 4.1.1 para criar e gerenciar o objeto *Bevel Deformer*;
3. No Menu *Object Manager*, selecione o objeto *Bevel*. Em *Option*, no Menu de Atributos, selecione *Points* em *Component Mode*, *Fixed Distance* em *Offset Mode* e, em *Offset*, insira o valor b , conforme a Figura 4.17:

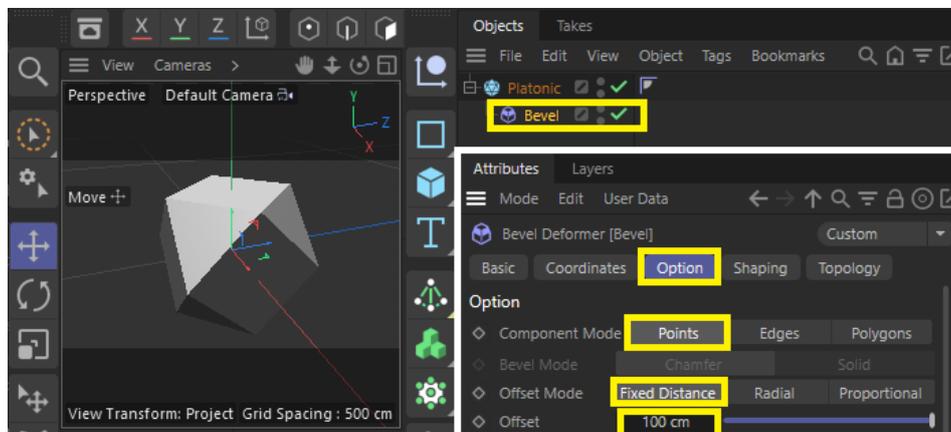


Figura 4.17: Etapa final da modelagem do cuboctaedro no C4D.

4. Para conectar os objetos criados, no Menu *Object Manager*, clique com o botão direito sobre *Platonic* criado e aplique a opção *Connect Object + Delete*.

Para construirmos um cuboctaedro de aresta $b = 100 \text{ cm}$, por exemplo, criamos um octaedro regular de $r = 100\sqrt{2} \simeq 141.4213 \text{ cm}$, e, ao aplicarmos a ferramenta bevel aos seus pontos, em *Offset Mode*, ajustamos na opção *Fixed Distance*, *Offset* para o valor $b = 100 \text{ cm}$. Desse modo, obtemos o cuboctaedro, ilustrado Figura 4.18 abaixo:

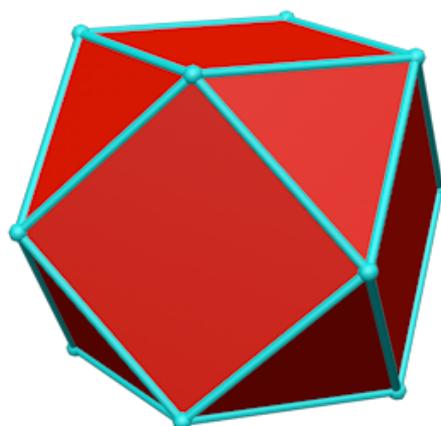


Figura 4.18: Cuboctaedro.

4.5 Modelagem do Dodecaedro Truncado

O Dodecaedro truncado é um poliedro de Arquimedes com 32 faces regulares, sendo 20 triângulos e 12 decágonos, além de 60 vértices e 90 arestas. Esse sólido é obtido pelo truncamento do Dodecaedro, um Sólido de Platão com 12 faces triangulares regulares, 30 arestas e 20 vértices. Para criar um dodecaedro truncado, são removidas as pirâmides cujas bases, relativas a cada vértice do dodecaedro regular dado, são triângulos equiláteros. Esses triângulos constituem os lados que formam as arestas das faces decagonais do sólido arquimediano. O processo descrito está ilustrado na Figura 4.19 abaixo:

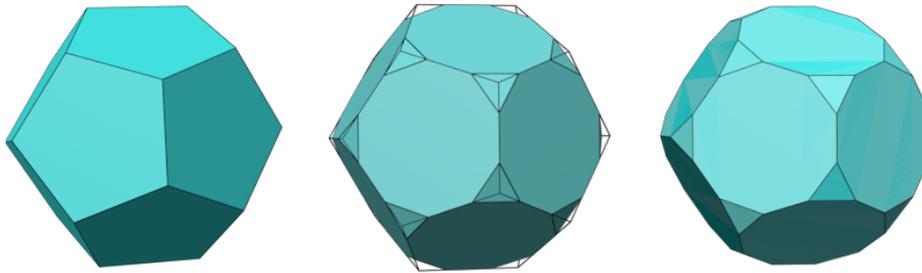


Figura 4.19: Criação do dodecaedro truncado.

Ao retirarmos as pirâmides triangulares para obtermos o dodecaedro truncado, as faces pentagonais serão transformadas em decágonos, conforme mostra a Figura 4.20 abaixo:

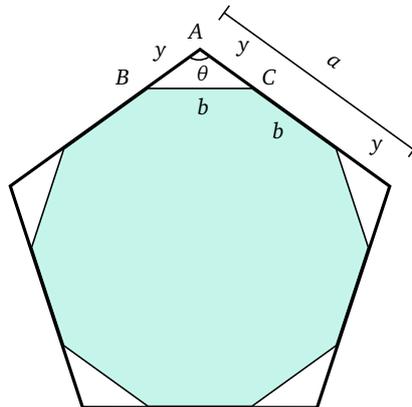


Figura 4.20: Corte das faces pentagonais do dodecaedro.

Para determinarmos o valor de y na Figura acima, utilizamos o fato de que $a = b + 2y$ e aplicamos a lei dos cossenos ao triângulo ABC . Dado que $\theta = 108^\circ = \frac{2\pi}{5}$ em radianos, obtemos o seguinte sistema::

$$\begin{cases} b + 2y = a \\ b^2 = 2y^2 + 2y^2 \cos(2/5 \pi) \end{cases}$$

Cuja solução é dada por:

$$y = \frac{2a}{\sqrt{5} + 5}.$$

Como $y = \frac{2a}{\sqrt{5} + 5}$ e $b = a - 2y$, obtemos $a = \frac{\sqrt{5} + 5}{1 + \sqrt{5}}b$. Portanto, como $r = \frac{\sqrt{3} \cdot (1 + \sqrt{5})}{4} \cdot a$, substituindo-se a em função de b , teremos:

$$r = \frac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} + 5) \cdot b}{4}.$$

Como $y = \frac{2a}{\sqrt{5} + 5}$, e $a = \frac{\sqrt{5} + 5}{1 + \sqrt{5}}b$, teremos:

$$y = \frac{2}{\sqrt{5} + 1} \cdot b.$$

4.5.1 Criando um Dodecaedro Truncado de Aresta b no C4D

Para Criar um dodecaedro truncado de aresta b , seguimos o passo a passo:

1. Crie um objeto primitivo, um dodecaedro regular, ajustando, no C4D, o raio em $r = \frac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} + 5) \cdot b}{4}$ ($r \approx 3.133309b$), conforme procedimento da Seção 3.6;
2. Selecione o dodecaedro criado no Menu *Object Manager* e torne-o editável, selecionando a opção ;
3. Com a opção  (Linhas) selecionada na Paleta de Modos e a opção  (seleção de pincel) na Paleta Dinâmica de Modelagem, na Janela de Visualização selecione as linhas diagonais do dodecaedro e exclua-as com *Alt+Delete*;

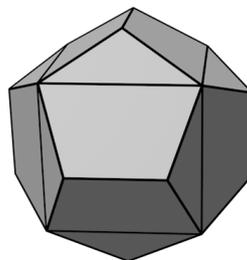


Figura 4.21: Linhas diagonais do dodecaedro no C4D.

4. Para acessar linhas atrás, clique e segure na opção  no Menu da Janela de Visualização e arraste o mouse convenientemente para girar a câmera;
5. Proceda como nos itens 2 e 3 da Subseção 4.1.1 para criar e gerenciar o objeto *Bevel Deformer*;
6. No Menu *Object Manager*, selecione o objeto *Bevel*. Em *Option*, no Menu de Atributos, selecione *Points* em *Component Mode*, *Fixed Distance* em *Offset Mode* e, em *Offset*, insira o valor $y = \frac{2}{\sqrt{5} + 1} \cdot b$ ($y \approx 0.618033b$), conforme a Figura 4.22:

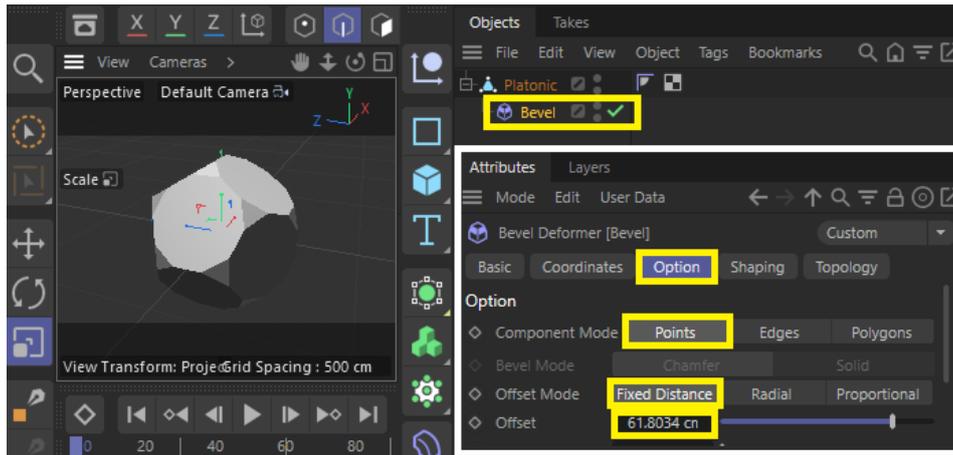


Figura 4.22: Etapa final da modelagem do dodecaedro truncado no C4D.

7. Para conectar os objetos criados, no Menu *Object Manager*, clique com o botão direito sobre *Platonic* criado e aplique a opção *Connect Object + Delete*.

Para modelarmos o dodecaedro truncado de aresta $b = 100$, como o da Figura 4.23 teremos $r = \frac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} + 5) \cdot 100}{4} \approx 313.331 \text{ cm}$ e, no *Bevel*, em *Offset Mode*, na opção, em *Fixed Distance*, *Offset* igual a $y = \frac{2}{\sqrt{5} + 1} \cdot 100 \approx 61.8034 \text{ cm}$.

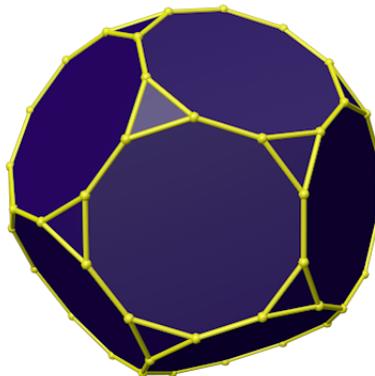


Figura 4.23: Dodecaedro Truncado.

4.6 Modelagem do Icosaedro Truncado

O Icosaedro Truncado é um poliedro de Arquimedes que possui 32 faces regulares, sendo 12 pentágonos e 20 hexágonos, além de 60 vértices e 90 arestas. Este sólido é obtido através da truncatura do Icosaedro regular, um sólido de Platão composto por 20 triângulos equiláteros, 12 vértices e 30 arestas. Nesse processo, são cortadas de um icosaedro dado, as pirâmides cujas bases relativas aos vértices do poliedro platônico são pentágonos regulares. As arestas dos pentágonos regulares compõem as faces hexagonais do sólido arquimediano. O processo mencionado está ilustrado na Figura 4.24.

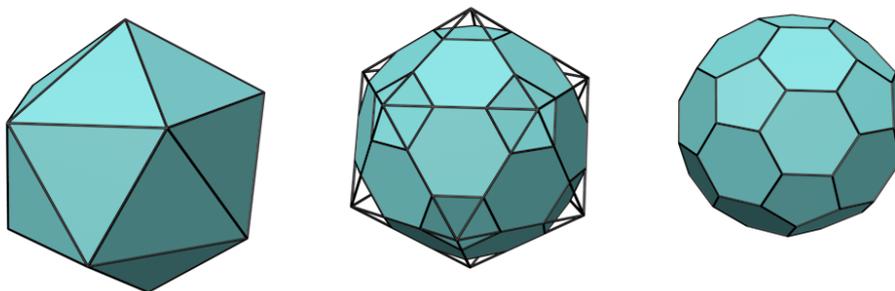


Figura 4.24: Transformação de um icosaedro em icosaedro truncado.

Da face triangular regular do icosaedro dado, formaremos o hexágono regular do icosaedro truncado, assim, como no caso do tetraedro truncado, a aresta deste hexágono mede $b = \frac{a}{3}$. Veja o recorte da face triangular na Figura 4.25:

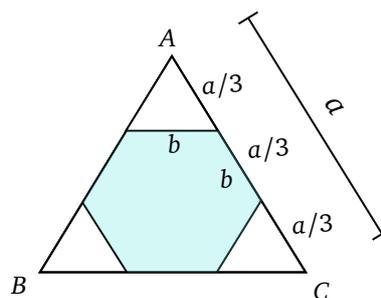


Figura 4.25: Corte da face triangular do icosaedro.

Desse modo, como $a = 3b$, obtemos que $r = \frac{3b\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, e a aresta do pirâmide a ser cortada mede $b = \frac{a}{3}$. A seguir, apresentaremos o processo de modelagem de um icosaedro truncado no Cinema 4D.

4.6.1 Criando um Icosaedro Truncado de Aresta b no C4D

1. Crie um objeto primitivo, um icosaedro regular, ajustando, no C4D, o raio em $r = \frac{3b\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ ($r \approx 2.853169b$), conforme procedimento da Seção 3.6;
2. Proceda como nos itens 2 e 3 da Subseção 4.1.1 para criar e gerenciar o objeto *Bevel Deformer*;
3. No Menu *Object Manager*, selecione o objeto *Bevel*. Em *Option*, no Menu de Atributos, selecione *Points* em *Component Mode*, *Fixed Distance* em *Offset Mode* e, em *Offset*, insira o valor b , conforme a Figura 4.26:

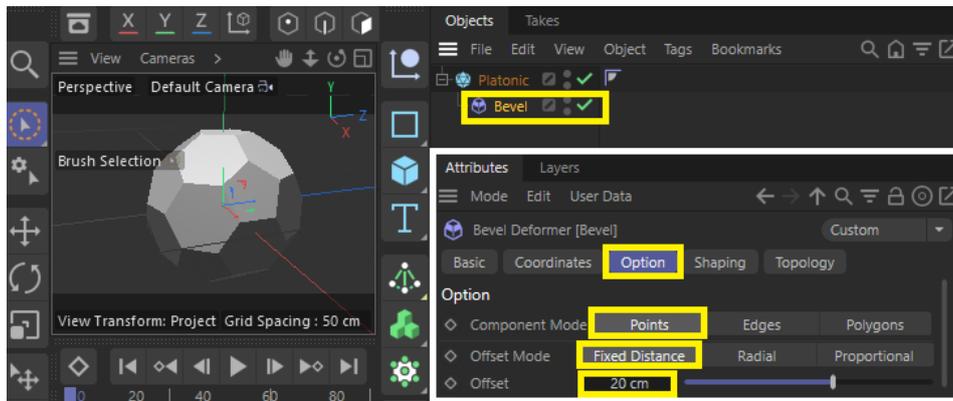


Figura 4.26: Etapa final da modelagem do icosaedro truncado no C4D.

4. Para conectar os objetos criados, no Menu *Object Manager*, clique com o botão direito sobre *Platonic* criado e aplique a opção *Connect Object + Delete*.

Para obter um icosaedro truncado de aresta $b = 20\text{ cm}$ como na Figura 4.27, criamos um icosaedro de raio $r = \frac{3 \cdot \sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \approx 57.0634\text{ cm}$, seguindo todo o procedimento descrito acima.

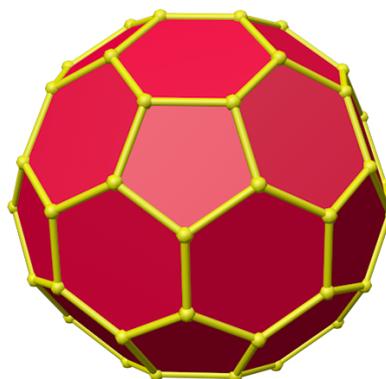


Figura 4.27: Icosaedro Truncado.

4.7 Modelagem do Icosidodecaedro

O Icosidodecaedro é um sólido de Arquimedes que possui 32 faces regulares, sendo 20 faces triangulares e 12 faces pentagonais, além de 20 vértices e 60 arestas. Este sólido pode ser obtido através do truncamento do Icosaedro ou do Dodecaedro, por isso recebe o nome dos dois poliedros platônicos. Iremos modelar o Icosidodecaedro por do truncamento do Icosaedro. De um icosaedro dado, são removidas as pirâmides cujas bases relativas a cada vértice deste, são pentágonos regulares. Os lados desses pentágonos regulares formam as arestas dos triângulos equiláteros do do icosidodecaedro desejado, conforme ilustrado na Figura 4.28 abaixo.

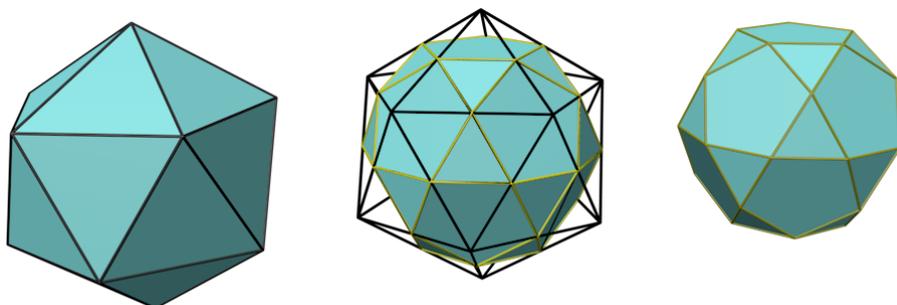


Figura 4.28: Criação do icosidodecaedro.

Ao retirarmos as pirâmides de base pentagonais, podemos observar a transformação similar à do cuboctaedro, assim, sabemos que $b = \frac{a}{2}$, pois o triângulo ADE é equilátero, conforme ilustra a Figura 4.29.

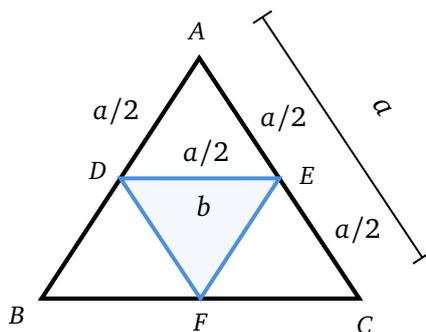


Figura 4.29: Truncamento de um icosaedro de aresta a : recorte da face triangular.

Para construirmos um icosidodecaedro de aresta b , como $r = \frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ e $a = 2b$, teremos $r = \frac{2b\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$. A aresta lateral da pirâmide a ser cortada mede $b = \frac{a}{2}$.

4.7.1 Criando um Icosidodecaedro de Aresta b no C4D

1. Crie um objeto primitivo, um icosaedro regular, ajustando, no C4D, o raio em $r = \frac{b\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$ ($r \approx 1.902113b$), conforme procedimento da Seção 3.6;
2. Proceda como nos itens 2 e 3 da Subseção 4.1.1 para criar e gerenciar o objeto *Bevel Deformer*;
3. No Menu *Object Manager*, selecione o objeto *Bevel*. Em *Option*, no Menu de Atributos, selecione *Points* em *Component Mode*, *Fixed Distance* em *Offset Mode* e, em *Offset*, insira o valor b , conforme a Figura 4.30:

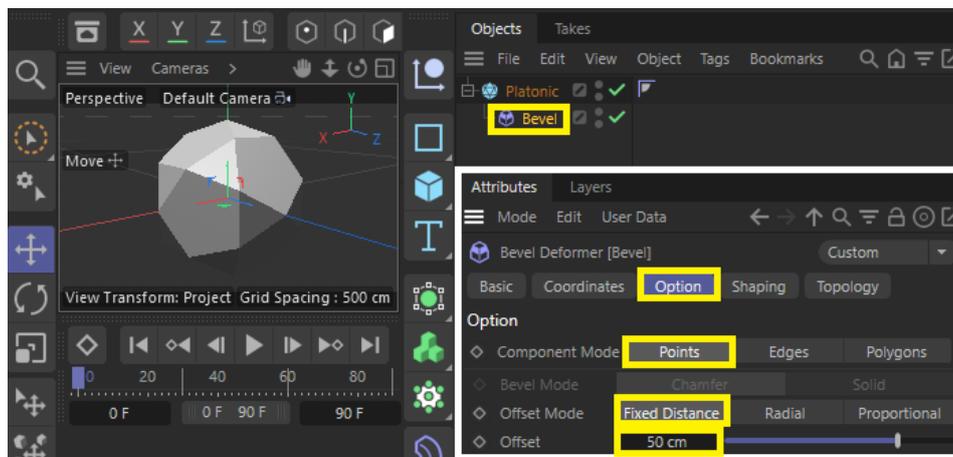


Figura 4.30: Etapa final da modelagem do icosidodecaedro truncado no C4D.

4. Para conectar os objetos criados, no Menu *Object Manager*, clique com o botão direito sobre *Platonic* criado e aplique a opção *Connect Object + Delete*.

Desse modo, teremos criado o icosidodecaedro, representado na Figura 4.31. Para criarmos um icosidodecaedro de aresta $b = 50\text{ cm}$, devemos criar um icosaedro de raio $r = \frac{50\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2} = 25\sqrt{10+2\sqrt{5}} \approx 95.1057\text{ cm}$, seguindo o procedimento descrito acima.

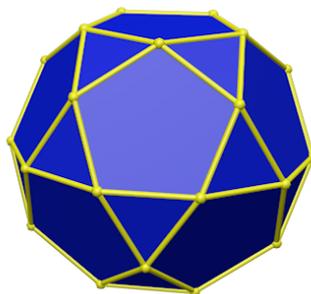


Figura 4.31: Icosidodecaedro.

Modelagem por Truncamento Misto via Cinema 4D

Alguns Sólidos de Arquimedes são obtidos por truncamentos de partes variadas. São retirados, de modo conveniente, pedaços diferentes do sólido arquimediano ou platônico, afim de se obter as faces regulares que compõem o Sólido de Arquimedes a ser construído. A esse tipo de truncamento, daremos o nome de truncamento misto, por exigir várias estratégias de cortes, e não somente o apresentado anteriormente, que se consiste em retirar pirâmides do objeto primitivo para obter o sólido arquimediano.

5.1 Modelagem do Rombicosidodecaedro

O Rombicosidodecaedro é um poliedro de Arquimedes que possui 62 faces regulares, sendo elas 20 triângulos, 30 quadrados e 12 pentágonos, além de 60 vértices e 120 arestas.

O Rombicosidodecaedro é obtido a partir do truncamento do Icosaedro, que possui somente faces triangulares, 20 no total, além de 30 arestas e 12 vértices. No processo de truncatura, serão produzidos os 30 quadrados entre os 20 triângulos do Icosaedro. As quantidades de triângulos permanecem, enquanto cada arranjo onde se alternam triângulos e quadrados lado a lado produz um pentágono regular no centro.

A Figura [5.1](#) ilustra a transformação de um icosaedro em rombicosidodecaedro.

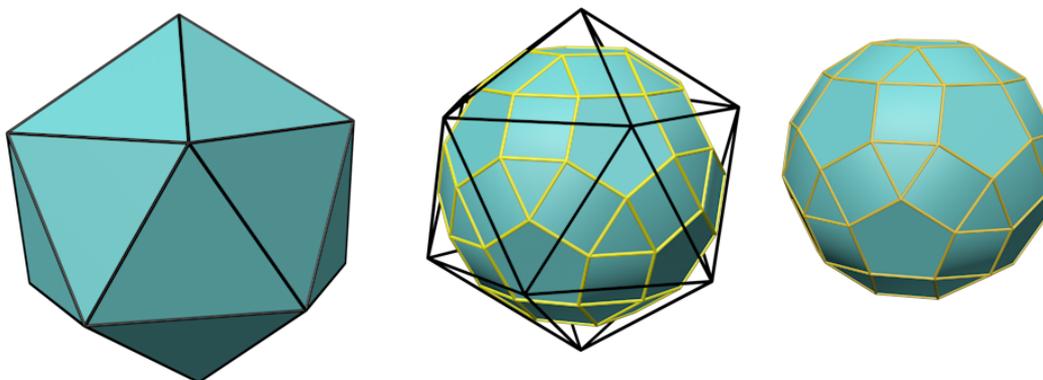


Figura 5.1: Icosaedro formando um rombicosidodecaedro.

Agora vamos calcular a relação entre a e b , onde a é a medida da aresta do icosaedro, b a medida da aresta do rombicosidodecaedro. A Figura 5.2 mostram em cor azul arestas de um icosaedro, e em cor amarela como deve ser as arestas do quadrado e do triângulo do rombicosidodecaedro:

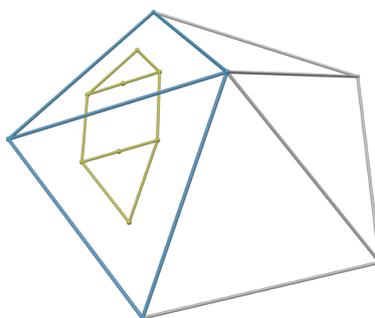


Figura 5.2: Construção do rombicosidodecaedro.

Para obtermos a relação entre a e b , considere os triângulos REF e CEA , do recorte da Figura 5.2, sendo E ponto médio de DB :

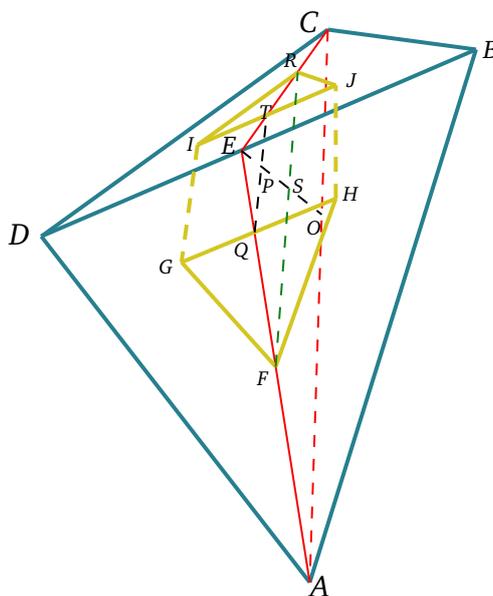
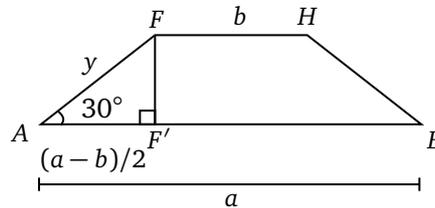


Figura 5.3: Construção do rombicosidodecaedro.

Note que no icosaedro, AC é a diagonal de um pentágono regular. Logo, $\overline{AC} = \frac{a(1 + \sqrt{5})}{2}$. Sabemos que os triângulos ABD e BCD são equiláteros de medida a . Queremos encontrar b em função de a , tal que os triângulos FGH e RIJ sejam equiláteros de medida b e o quadrilátero $GHIJ$ seja um quadrado de lado b também. Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} \overline{AE}^2 &= \overline{EO}^2 + \overline{AO}^2 \\ \overline{EO}^2 &= \overline{AE}^2 - \overline{AO}^2 \\ \overline{EO}^2 &= \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \right)^2 \\ \overline{EO} &= a \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} \right) \end{aligned}$$

Observe que o quadrilátero $AFHB$ é um trapézio isósceles com $\sphericalangle BAF = 30^\circ$:



Segue que, sendo $\overline{AF} = y$, $F' \in AB$, com $FF' \perp AB$ então $\overline{AF'} = \frac{a-b}{2}$, no triângulo retângulo FAF' , obtemos:

$$\cos(30^\circ) = \frac{\frac{a-b}{2}}{y} \rightarrow y = \frac{a-b}{\sqrt{3}}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \overline{AE} &= \overline{AF} + \overline{FQ} + \overline{QE} \\ \frac{a\sqrt{3}}{2} &= \frac{a-b}{\sqrt{3}} + \frac{b\sqrt{3}}{2} + \overline{QE} \\ \overline{QE} &= \frac{\sqrt{3}(a-b)}{6} \end{aligned}$$

Observamos aqui, que $x = \overline{QE}$ é a distância entre BD e GH . Esta medida será utilizada no Cinema 4D, para formarmos as faces quadradas entre os triângulos. Observe também que $\triangle EQT \sim \triangle EAC$, pois são triângulos isósceles tais que $\sphericalangle T\hat{E}Q \equiv \sphericalangle C\hat{E}A$, como ilustra a Figura 5.4:

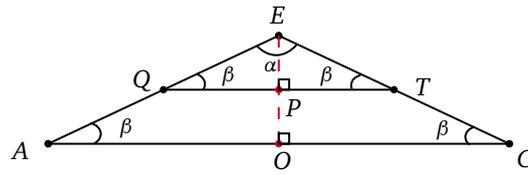


Figura 5.4: Triângulos EQT e EAC .

Desse modo, como $\overline{QT} = b$ e $\overline{AC} = \frac{a(1 + \sqrt{5})}{2}$ obtemos:

$$\frac{\overline{QT}}{\overline{EP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EO}} \Rightarrow \overline{EP} = \frac{\overline{QT} \cdot \overline{EO}}{\overline{AC}} = \frac{b \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{4}}{\frac{a(1 + \sqrt{5})}{2}} = \frac{b \cdot (3 - \sqrt{5})}{4}.$$

Por Pitágoras no triângulo retângulo EQP , como $\overline{QP} = \frac{b}{2}$:

$$\begin{aligned} \overline{EQ}^2 &= \overline{EP}^2 + \overline{QP}^2 \\ \frac{3(a - b)^2}{36} &= \frac{b^2 \cdot (3 - \sqrt{5})^2}{16} + \frac{b^2}{4}. \end{aligned}$$

Que resulta em:

$$b = \frac{a(3\sqrt{5} + 1)}{22} \simeq 0.3503729060227 a$$

e

$$a = \frac{b(3\sqrt{5} - 1)}{2} \simeq 2.8541019663 b.$$

Substituindo-se $a = \frac{b(3\sqrt{5} - 1)}{2}$ em $x = \frac{\sqrt{3}(a - b)}{6}$, obtemos:

$$x = \frac{b \cdot (\sqrt{15} - \sqrt{3})}{4} \simeq 0.5352331346596 b.$$

Como $r = \frac{a\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$, substituindo-se nesta expressão $a = \frac{b(3\sqrt{5} - 1)}{2}$, obtemos:

$$r = \frac{b\sqrt{2\sqrt{5} + 25}}{2} \simeq 2.714412273173 b.$$

5.1.1 Criando um Rombicosidodecaedro de Aresta b no C4D

1. Crie um objeto primitivo, um icosaedro regular, ajustando, no C4D, o raio em $r = \frac{b \sqrt{2 \sqrt{5} + 25}}{2}$ ($r \approx 2.714412b$), conforme procedimento da Seção 3.6;
2. Proceda como nos itens 2 e 3 da Subseção 4.1.1 para criar e gerenciar o objeto *Bevel Deformer*;
3. No Menu *Object Manager*, selecione o objeto *Bevel*. Em *Option*, no Menu de Atributos, selecione *Edges* em *Component Mode*, *Chamfer* em *Bevel Mode*, *Fixed Distance* em *Offset Mode* e, em *Offset*, insira o valor $x = \frac{b (\sqrt{15} - \sqrt{3})}{4} = (x \approx 0.535233 b)$, conforme a Figura 5.5:

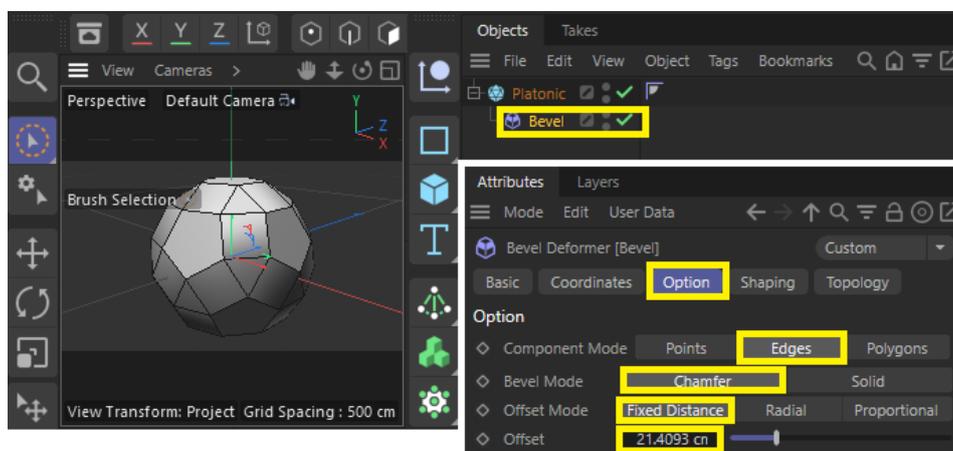


Figura 5.5: Etapa final da modelagem do rombicosidodecaedro no C4D.

4. Para conectar os objetos criados, no Menu *Object Manager*, clique com o botão direito sobre *Platonic* criado e aplique a opção *Connect Object + Delete*.

Para criar um Rombicosidodecaedro de aresta $b = 40$, como o da Figura 5.6, criamos um icosaedro de raio $r = \frac{40 \sqrt{2 \sqrt{5} + 25}}{2} \approx 108.5765 \text{ cm}$, e ajustamos o valor do *Offset*, do *Bevel*, na opção *Fixed Distance*, em $x = \frac{40 (\sqrt{15} - \sqrt{3})}{4} \approx 21.4093 \text{ cm}$.

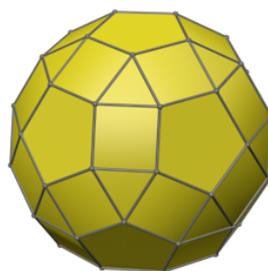


Figura 5.6: Rombicosidodecaedro.

5.2 Modelagem do Rombicuboctaedro

O Rombicuboctaedro é um sólido de Arquimedes que possui 48 arestas, 24 vértices e 26 faces regulares, sendo estas 8 triângulos e 18 quadrados. Este sólido pode ser obtido pelo truncamento do Hexaedro (Cubo) ou do Octaedro. No Cinema 4D faremos este sólido arquimediano por truncamento do Cubo, por apresentar ângulos diedrais retos, o que facilita a obtenção das medidas para truncamento. Observe a transformação do Cubo em Rombicuboctaedro, na Figura 5.7 abaixo:

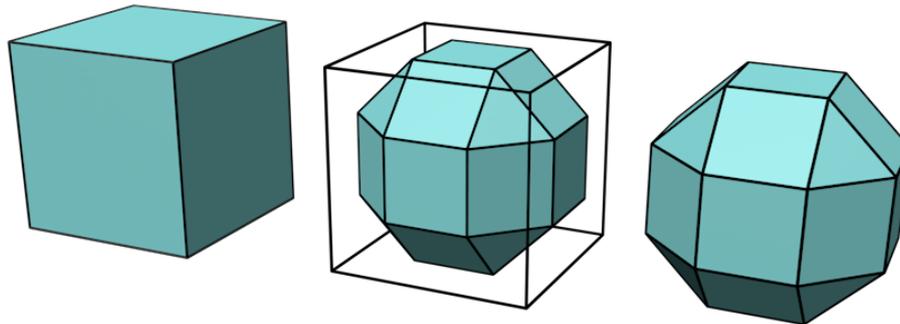


Figura 5.7: Criação de um rombicuboctaedro pelo truncamento do cubo.

Para obter este sólido no Cinema 4D, inicialmente criamos um hexaedro de aresta a e realizamos chanfros para obter quadrados de aresta b no centro de cada face do cubo. Os retângulos formados pelos lados de dois quadrados reduzidos mais próximos, como o quadrilátero $ACDE$, também devem ser quadrados de aresta b , conforme ilustra a Figura 5.8:

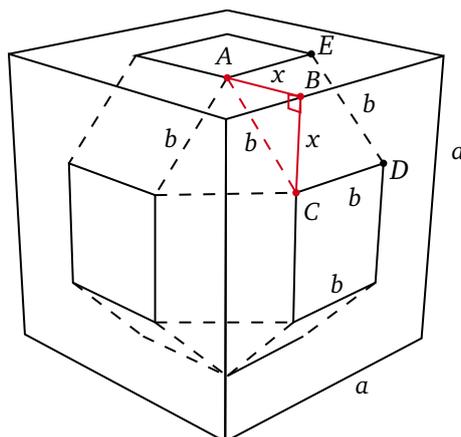
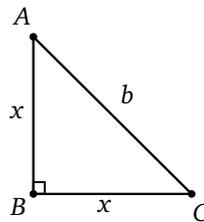


Figura 5.8: Construção do rombicuboctaedro.

Para determinarmos a relação entre as arestas de medidas a e b da Figura, inicialmente, consideremos o triângulo retângulo ABC tal que $\overline{AB} = \overline{BC} = x$:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC , obtemos $x = \frac{b\sqrt{2}}{2}$. Além disso, podemos observar na Figura 5.9 que $a = b + 2x$:

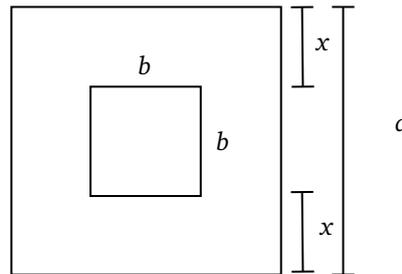


Figura 5.9: Obtenção da face do rombicuboctaedro.

Assim:

$$a = b + 2 \cdot \frac{b\sqrt{2}}{2} = (1 + \sqrt{2})b$$

Assim, devemos iniciar a construção do rombicuboctaedro criando um hexaedro cujo raio da esfera circunscrita é $r = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2} b$, isto é: $r \approx 2.09077b$.

5.2.1 Criando um Rombicuboctaedro de Aresta b no C4D

1. Crie um objeto primitivo, um hexaedro regular, ajustando, no C4D, o raio em $r = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2} b$ ($r \approx 2.09077b$), conforme procedimento da Seção 3.6;
2. Proceda como nos itens 2 e 3 da Subseção 4.1.1 para criar e gerenciar o objeto *Bevel Deformer*;
3. No Menu *Object Manager*, selecione o objeto *Bevel*. Em *Options*, no Menu de Atributos, selecione *Edges* em *Component Mode*, *Chamfer* em *Bevel Mode*, *Fixed Distance* em *Offset Mode* e, em *Offset*, insira o valor $x = \frac{b\sqrt{2}}{2}$, conforme a Figura 5.10;
4. Para conectar os objetos criados, no Menu *Object Manager*, clique com o botão direito sobre *Platonic* criado e aplique a opção *Connect Object + Delete*.

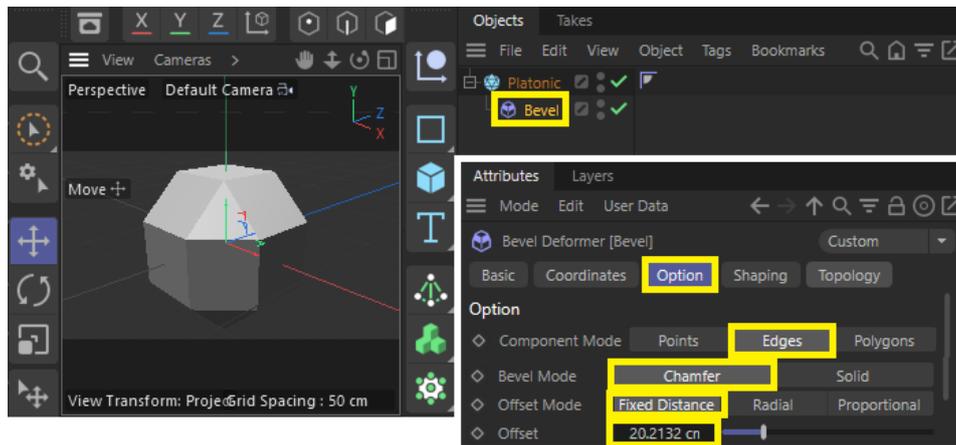


Figura 5.10: Etapa final da modelagem do rombicuboctaedro no C4D.

Para criarmos um rombicuboctaedro de aresta $b = 30 \text{ cm}$, como o da Figura 5.11, devemos, inicialmente criar um hexaedro regular de raio $r = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2} \cdot 30 \approx 62.7231 \text{ cm}$ e, para o *Bevel* aplicado às linhas do cubo (*Edges*), em *Offset* inserimos $x = \frac{30\sqrt{2}}{2} \approx 20.2132 \text{ cm}$:

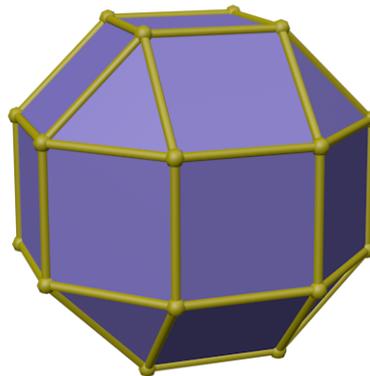


Figura 5.11: Rombicuboctaedro.

5.3 Modelagem do Cuboctaedro Truncado

O Cuboctaedro Truncado é um sólido de Arquimedes composto por 48 vértices, 72 arestas e 26 faces regulares, sendo 12 quadrados, 8 hexágonos e 6 octógonos. Este sólido arquimediano pode ser obtido através do truncamento do Hexaedro (Cubo) ou do Octaedro Truncado. Faremos o truncamento do Cubo por possuir ângulos diedrais retos, o que facilita o truncamento, uma vez que podemos utilizar o Teorema de Pitágoras para obter as medidas necessárias para a obtenção do cuboctaedro truncado. A Figura 5.12 abaixo mostra o processo de truncamento para a obtenção deste sólido.

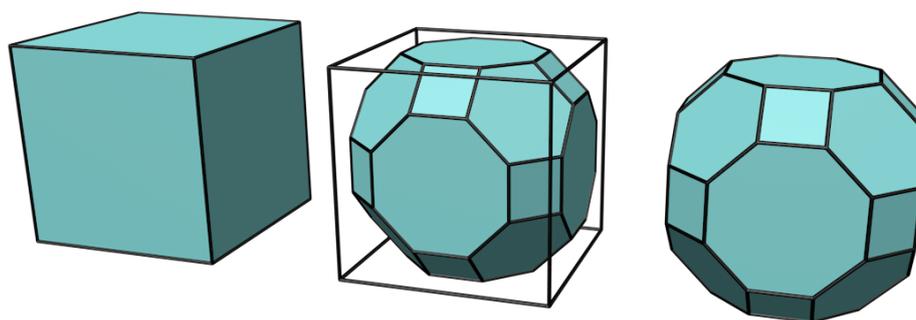


Figura 5.12: Criação do cuboctaedro truncado.

Supondo o problema resolvido, em um cubo de aresta a , temos as faces octogonais do cuboctaedro truncado de aresta b sobrepostas de modo conveniente as respectivas faces do cubo, como mostra a Figura 5.13.

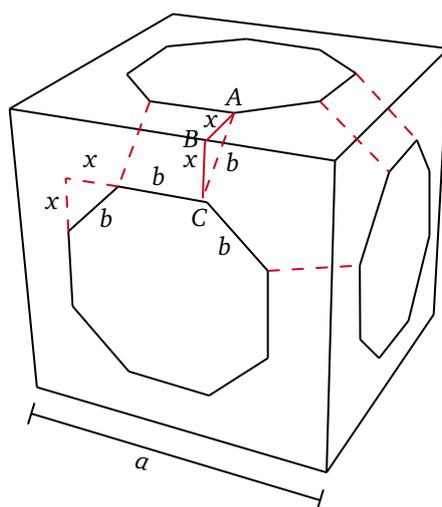


Figura 5.13: Cuboctaedro em construção.

Veremos agora como obter o octógono a partir das faces quadradas. Devemos recortar nas bordas de cada face quadrada todos os retângulos de largura x , de modo a obtermos apenas um quadrado no centro, de lado $b + 2x$, como mostra a Figura 5.14. De cada quadrado menor retiraremos em cada canto os triângulos isósceles de arestas x , x e b , para obtermos os 6 octógonos de aresta b .

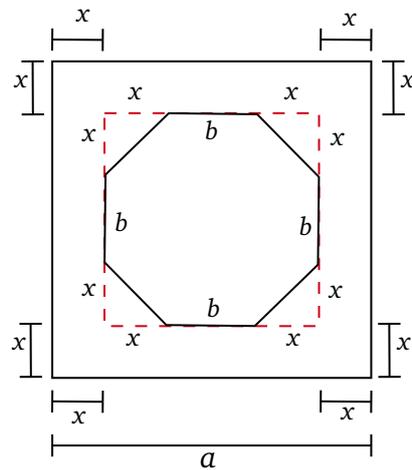
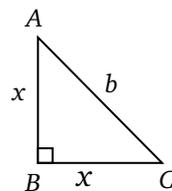


Figura 5.14: Obtendo as faces octogonais de aresta b .

Assim teremos o cuboctaedro truncado praticamente pronto, bastando desenhar as demais faces. Além disso, precisamos escrever o raio r da esfera circunscrita em função de b . Para encontrarmos a medida $\overline{BC} = x$ considere triângulo ABC abaixo:



Aplicando-se o Teorema de Pitágoras em ABC , obtemos:

$$b^2 = 2x^2$$

$$b = x\sqrt{2}$$

$$x = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{b \cdot \sqrt{2}}{2}$$

Ainda, na Figura 5.14 podemos observar que $a = b + 4x$, isto é:

$$a = b + 4 \cdot \frac{b \cdot \sqrt{2}}{2} = (1 + 2\sqrt{2})b$$

Além disso, como $a = (1 + 2\sqrt{2})b$ e o quadrado menor possui aresta $c = b + 2x = b + \frac{b \cdot \sqrt{2}}{2} = (1 + \sqrt{2})b$, portanto: $\frac{c}{a} = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} \simeq 0.6306019375$, ou seja, quadrado menor mede $c \simeq 0.6306019375 a$.

E o raio r da esfera circunscrita ao hexaedro mede:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{(1 + 2\sqrt{2}) \cdot b \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 2\sqrt{6}) \cdot b.$$

5.3.1 Criando um Cuboctaedro Truncado de Aresta b no C4D

1. Crie um objeto primitivo, um hexaedro regular, ajustando, no C4D, o raio em $r = \frac{b(\sqrt{3} + 2\sqrt{6})}{2}$ ($r \approx 3.315515b$), conforme procedimento da Seção 3.6;
2. Selecione o objeto criado no Menu *Object Manager*. Na Paleta de Objetos, clique no ícone  (*Make Editable*) para torná-lo editável.
3. No Menu *Object Manager*, clique no cubo criado. Na Paleta de Modos, ative a opção  (*Polygons*) e, com o cursor do mouse sobre a janela de visualizações, selecione todas as faces clicando em *Control+A*.
4. No menu principal do C4D, acesse *Mesh*; em *Mesh*, acesse *Clone*; em *Clone*, acesse as configurações do *Disconnect* clicando no ícone , desmarcando a opção *Preserve Group*. Isso irá separar as faces do hexaedro.
5. Mantenha todas as faces selecionadas. Na Paleta Dinâmica de Modelagem, clique e segure na opção  (*Scale*) para exibir as opções da categoria. Selecione a opção *Normal Scale*, como mostra a Figura 5.15:

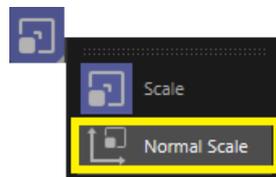


Figura 5.15: Localização do *Normal Scale* no C4D.

6. No Menu *Attributes*, ajuste *Scale* para 63.06019375% (pois a razão do quadrado menor para o maior é: 0.6306019375).
7. Com a opção  (*Points*) ativada na Paleta de Modos e o cursor do mouse sobre a janela de visualizações, clique em *Control + A* para selecionar todos os vértices do objeto criado.
8. Com todos os vértices do objeto selecionados, ative a ferramenta  (*Bevel*), disponível Paleta Dinâmica de Modelagem. No Menu de Atributos, em *Tool Option*, selecione *Fixed Distance* em *Offset Mode* e ajuste *Offset* em $x = \frac{b \cdot \sqrt{2}}{2}$ ($x \approx 0.70710678b$).
9. Com a opção  (*Points*) ativada na Paleta de Modos, utilize a opção  (*Polygon Pen*), disponível Paleta Dinâmica de Modelagem para desenhar as faces restantes (basta ligar os pontos do objeto). Veja esta etapa na Figura abaixo:

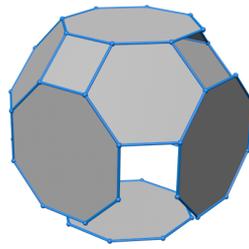


Figura 5.16: Desenho das demais faces do cuboctaedro truncado.

A construção do Cuboctaedro Truncado no C4D será como mostra a Figura 5.17 abaixo:



Figura 5.17: Transformação do hexaedro no cuboctaedro truncado.

O Cuboctaedro Truncado da Figura 5.18 abaixo foi criado para ter aresta $b = 20\text{ cm}$, assim, para o raio do hexaedro utilizamos $r = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 2\sqrt{6}) \cdot 20 \simeq 66.3103\text{ cm}$ e, para o *Bevel*, no item 8 do passo a passo anterior, utilizamos $x = \frac{20 \cdot \sqrt{2}}{2} \simeq 14.1421\text{ cm}$.

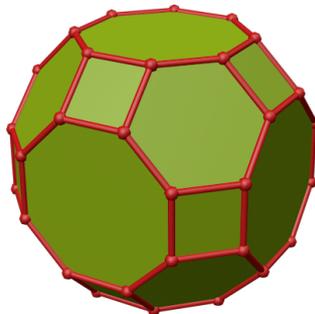


Figura 5.18: Cuboctaedro Truncado.

5.4 Modelagem do Icosidodecaedro Truncado

O Icosidodecaedro Truncado é um sólido de Arquimedes composto por 62 faces regulares, sendo 30 quadrados, 20 hexágonos e 12 decágonos, além de possuir 120 vértices e 180 arestas. Este sólido pode ser obtido pelo truncamento do Icosaedro Truncado ou do Dodecaedro Truncado. Nesta seção, vamos modelar o Icosidodecaedro Truncado através do truncamento do Dodecaedro, como ilustrado na Figura 5.19 abaixo:

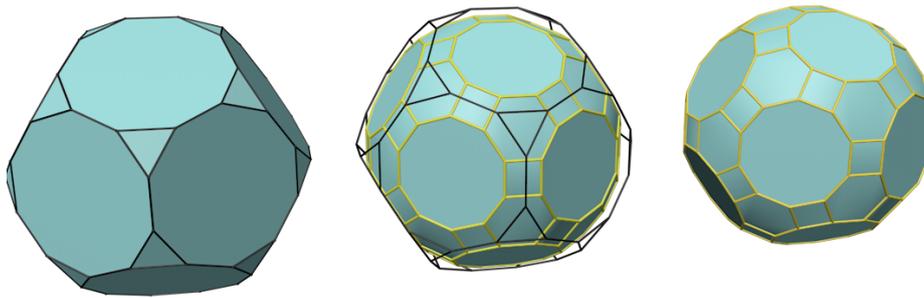


Figura 5.19: Processo de criação do icosidodecaedro truncado.

Para obtermos um icosidodecaedro truncado de aresta c , devemos realizar chanfros em um icosidodecaedro de aresta b . Ao realizarmos os cortes necessários, teremos decágonos menores, de aresta c concêntricos aos de aresta b , e os paralelogramos entre duas faces decagonais são quadrados, conforme ilustra a Figura 5.20:

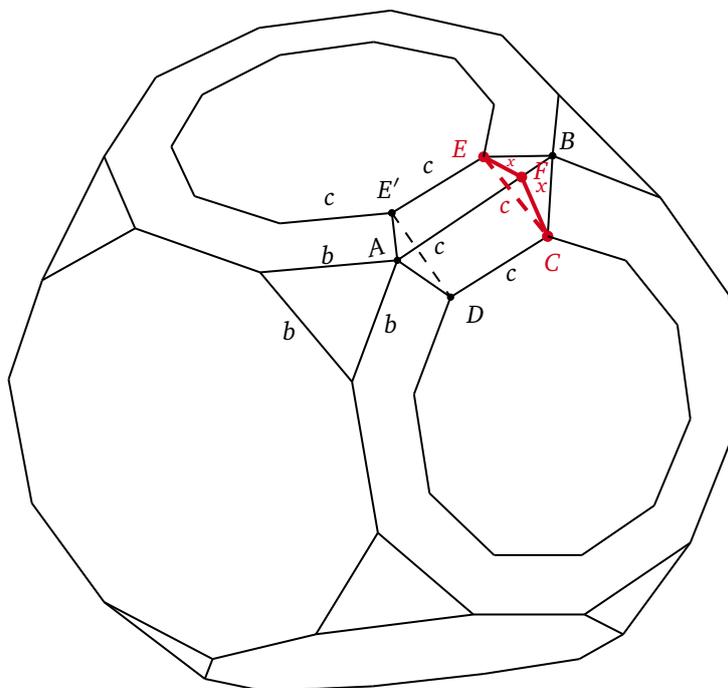


Figura 5.20: Construção de um icosidodecaedro.

No C4D, a redução do decágono de aresta b para o de aresta c ocorre em função da altura $\overline{CF} = x$ do trapézio $ABCD$. Para obtermos o valor de x aplicaremos a Lei dos Cossenos no triângulo FEC , do qual precisamos calcular, preliminarmente, o cosseno do ângulo $\angle CEF$. Podemos observar que o $\angle CEF$ é o mesmo entre duas faces de um dodecaedro regular. Desse modo, vamos calcular $\cos(\hat{JGH})$ no dodecaedro de aresta 1 da Figura 5.21 abaixo:

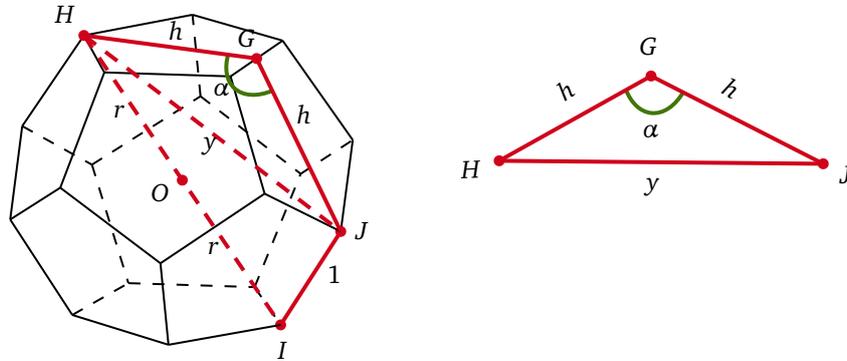


Figura 5.21: Ângulo diedral entre duas faces adjacentes do dodecaedro regular.

Precisamos obter $\overline{GH} = \overline{GJ} = h$, no pentágono de aresta 1. Como a medida da diagonal do pentágono é $d = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, temos o triângulo retângulo da Figura 5.22 abaixo:

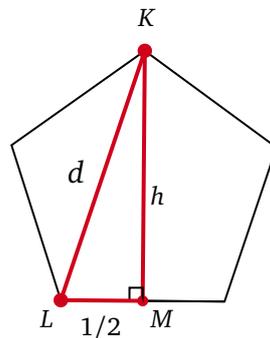
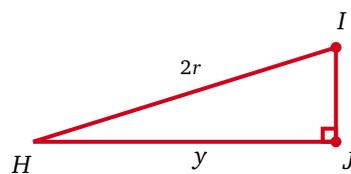


Figura 5.22: Altura do pentágono.

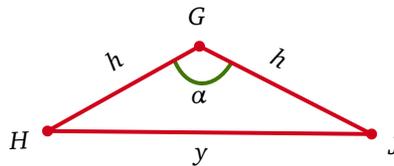
Aplicando-se o Teorema de Pitágoras ao triângulo KLM , obtemos $h = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2}$. Para obtermos o lado HJ do triângulo GHI , vamos aplicar o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo HJI , de diâmetro $\overline{HI} = 2r = \frac{(1 + \sqrt{5})\sqrt{3}}{2}$ da Figura abaixo:



Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}\overline{HI}^2 &= \overline{IJ}^2 + \overline{HJ}^2 \\ \left(\frac{(1+\sqrt{5})\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^2 &= 1^2 + y^2 \\ y^2 &= \frac{(1+2\sqrt{5}+5)\cdot 3}{4} - 1 \\ y^2 &= \frac{18+6\sqrt{5}-4}{4} \\ y^2 &= \frac{14+6\sqrt{5}}{4} = \frac{(\sqrt{5}+3)^2}{4} \\ y &= \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+3)^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}+3}{2}.\end{aligned}$$

Finalmente, voltamos ao triângulo GHI :

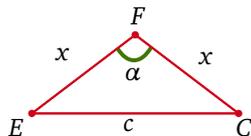


Aplicando a lei dos cossenos, obtemos:

$$\begin{aligned}\overline{HI}^2 &= \overline{GH}^2 + \overline{GI}^2 - 2\overline{GH} \cdot \overline{GI} \cdot \cos(\widehat{GHI}) \\ y^2 &= h^2 + h^2 - 2h \cdot h \cdot \cos \alpha \\ y^2 &= 2h^2 - 2h^2 \cdot \cos \alpha \\ 2h^2 \cdot \cos \alpha &= 2h^2 - y^2 \\ \cos \alpha &= \frac{2h^2 - y^2}{2h^2} \\ \cos \alpha &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{h}\right)^2 \\ \cos \alpha &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\right)^2 \\ \cos \alpha &= 1 - \frac{\sqrt{5}+5}{5} \\ \cos \alpha &= -\frac{\sqrt{5}}{5}.\end{aligned}$$

Como $\widehat{EFC} = \alpha$ agora poderemos retornar à Figura 5.20 para determinarmos x . Considere o

triângulo FEC :

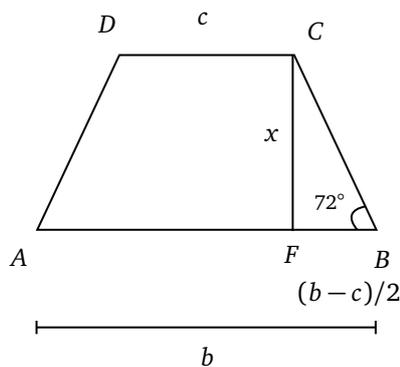


Aplicando-se a lei dos cossenos ao triângulo FEC , obtemos:

$$\begin{aligned} \overline{EC}^2 &= \overline{EF}^2 + \overline{FC}^2 - 2 \cdot \overline{EF} \cdot \overline{FC} \cdot \cos \alpha \\ c^2 &= 2x^2 - 2x^2 \cdot \cos \alpha \\ c^2 &= x^2 \cdot (2 - 2 \cdot \cos \alpha) \\ x^2 &= \frac{c^2}{2 - 2 \cos \alpha} \\ x &= \frac{c}{\sqrt{2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}} \end{aligned}$$

Simplificando-se a última expressão, obtemos $x = \frac{\sqrt{2 \cdot (5 - \sqrt{5})}}{4} c \simeq 0.58779c$.

Agora, vamos obter a relação entre as arestas do dodecaedro truncado, de medida b e a do icosidodecaedro truncado, de medida c . Considere o trapézio $ABCD$, da Figura 5.20:



No triângulo CFB :

$$\begin{aligned} \tan(72^\circ) &= \frac{x}{\left(\frac{b-c}{2}\right)} \\ x &= \frac{b-c}{2} \cdot \tan(72^\circ) \\ x &= \frac{(b-c)}{2} \cdot \sqrt{2\sqrt{5} + 5} \end{aligned}$$

Igualando-se as duas expressões obtidas para x :

$$\frac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{4} \cdot c = \frac{(b-c)}{2} \cdot \sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

Obtemos:

$$c = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \cdot b \simeq 0.7236067978b \quad \text{e,}$$

$$b = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \cdot c \simeq 1.3819660113c.$$

Assim:

$$x = \frac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{4} \cdot \frac{(5+\sqrt{5}) \cdot b}{10} = \frac{\sqrt{10(5+\sqrt{5})} \cdot b}{20} \simeq 0.4253254042b.$$

5.4.1 Criando um Icosidodecaedro Truncado de Aresta c no C4D

1. Crie um objeto primitivo, um dodecaedro truncado de aresta $b = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \cdot c$, ($b \approx 1.381966c$), realizando todo o procedimento da Seção 4.5.1;
2. Proceda como nos ítems 3 e 4 da Seção 5.3.1 para separar as faces do objeto criado.
3. Proceda como no item 5 da Seção 5.3.1 para ativar a opção  (*Normal Scale*).
4. No Menu *Attributes*, ajuste *Scale* para 72.36079%, pois $c = 0.7236079b$.
5. Exclua todas as faces triangulares, selecionando-as uma a uma e clicando em *Delete*.
6. Desenhe as faces restantes utilizando a ferramenta  (*Polygon Pen*), conforme procedimento do item 9 da Seção 5.3.1. Veja esta etapa da construção na Figura 5.23:

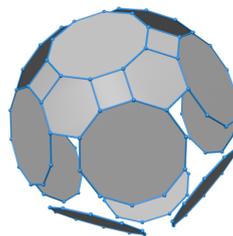


Figura 5.23: Desenho das faces quadradas e hexagonais.

Observe, na Figura 5.24, a transformação do dodecaedro truncado em icosidodecaedro truncado, de acordo com o passo a passo descrito acima:



Figura 5.24: Construção do icosidodecaedro truncado.

Para criarmos um icosidodecaedro truncado de aresta $c = 10 \text{ cm}$ (Figura 5.25) inicialmente criamos um dodecaedro truncado de aresta $b = \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right) \cdot 10 \approx 13.81966 \text{ cm}$ e procedemos de acordo com passo a passo acima.

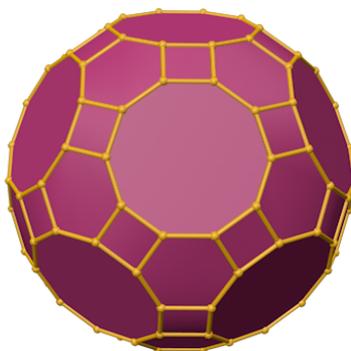


Figura 5.25: Icosidodecaedro Truncado.

Modelagem por Snubificação via Cinema

4D

Nesta seção, iremos modelar os dois Sólidos de Arquimedes obtidos pelo processo de Snubificação: o Cubo *Snub* e o Dodecaedro *Snub*. Como mencionado na Seção 1.3.3, este processo consiste nas seguintes etapas:

1. Afastamento das faces do objeto primitivo platônico (Cubo ou Dodecaedro);
2. As faces afastadas são rotacionadas de modo que, entre seus espaços, possam ser colocados polígonos regulares, "fechando" o sólido arquimediano.

Nesta seção, faremos um estudo para definir a relação entre as medidas da aresta de um cubo *snub* dado e a aresta do cubo que o origina, bem como a relação entre a medida da aresta do dodecaedro e a do dodecaedro *snub* criado a partir dele. Além disso, devemos descobrir a que ângulo se refere a etapa 2 do passo a passo acima para a construção de cada um dos poliedros que queremos criar por snubificação. É importante destacar que as construções do cubo *snub* e do dodecaedro *snub*, realizadas neste capítulo, são discutidas por Urs Hartl e Klaudia Kwickert [3].

6.1 Modelagem do Cubo *Snub*

O Cubo *Snub* é um poliedro de Arquimedes que possui 38 faces regulares, sendo elas 32 triângulos e 6 quadrados, além de 24 vértices, 60 arestas e 38 faces. Este sólido é obtido através do processo de snubificação do Cubo.

Para modelarmos o cubo *snub*, procedemos da seguinte maneira: tomamos um cubo inicial de aresta a . Em cada face desse cubo colocamos um quadrado de aresta $b < a$, com centro no centro da face do cubo e lados paralelos aos lados da face do cubo. Devemos rotacionar (centro de rotação é o centro do respectivo quadrado) por um ângulo θ todos os quadrados das seis faces e encontrar b em função de a tal que os triângulos com arestas em cor vermelha da Figura 6.1 também tenham arestas de medida b . De acordo com a Figura 6.1 sejam: $\overline{AF} = \overline{KD} = \overline{LC} = \overline{BJ} = y, \overline{AI} = \overline{GD} = \overline{MC} = \overline{BO} = x$. (Essas igualdades são devido a simetria da rotação).

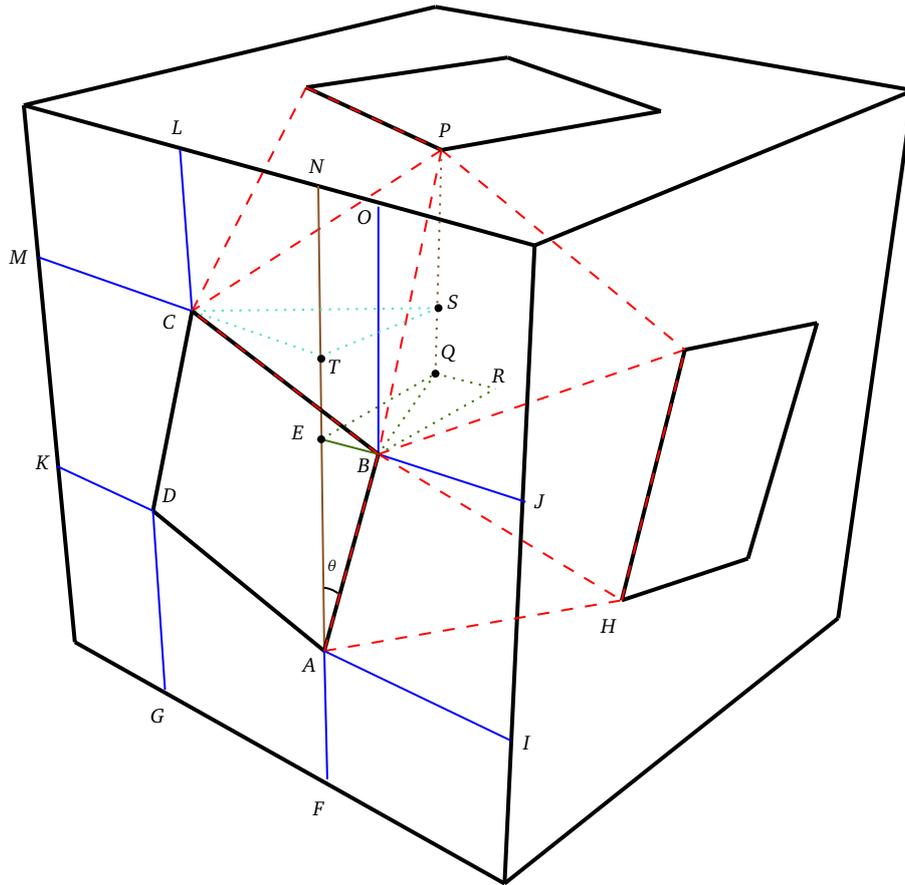


Figura 6.1: Construção do cubo *snub*.

Segue que:

$$a = \overline{FN} = \overline{FA} + \overline{AE} + \overline{EN} \Rightarrow \overline{AE} = a - y - x. \tag{6.1}$$

$$x = \overline{EJ} = \overline{EB} + \overline{BJ} = \overline{EB} + y \Rightarrow \overline{EB} = x - y. \tag{6.2}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras várias vezes, obtemos:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 \Rightarrow \overline{AB}^2 = (a - y - x)^2 + (x - y)^2. \tag{6.3}$$

$$\overline{BQ}^2 = \overline{QR}^2 + \overline{BR}^2 \Rightarrow \overline{BQ}^2 = (x - y)^2 + y^2. \quad (6.4)$$

$$\overline{PB}^2 = \overline{BQ}^2 + \overline{PQ}^2 \Rightarrow \overline{PB}^2 = (x - y)^2 + y^2 + x^2. \quad (6.5)$$

$$\overline{CS}^2 = \overline{CT}^2 + \overline{TS}^2 \Rightarrow \overline{CS}^2 = (a - 2x)^2 + y^2. \quad (6.6)$$

$$\overline{PC}^2 = \overline{CS}^2 + \overline{PS}^2 \Rightarrow \overline{PC}^2 = (a - 2x)^2 + y^2 + y^2. \quad (6.7)$$

Como $b^2 = \overline{AB}^2 = \overline{PB}^2 = \overline{PC}^2$, e, resolvendo $\overline{AB}^2 = \overline{PB}^2$ em y , obtemos:

$$y = \frac{a(a - 2x)}{2(a - x)}. \quad (6.8)$$

Resolvendo $\overline{AB}^2 = \overline{PC}^2$ em y , resulta:

$$y = \frac{x(a - x)}{a}. \quad (6.9)$$

Das duas últimas equações, segue que:

$$p := 2x^3 - 4ax^2 + 4a^2x - a^3 = 0.$$

O polinômio p tem somente uma raiz real, dada por:

$$x = \left(-\frac{\sqrt[3]{26 + 6\sqrt{33}}}{6} + \frac{4}{3\sqrt[3]{26 + 6\sqrt{33}}} + \frac{2}{3} \right) a.$$

E y é dado por:

$$y = \frac{a \left((26 + 6\sqrt{33})^{2/3} - \sqrt[3]{26 + 6\sqrt{33}} - 8 \right)}{(26 + 6\sqrt{33})^{2/3} + 2\sqrt[3]{26 + 6\sqrt{33}} - 8}.$$

Note que para cada $a > 0$, temos um único x e um único y . Substituindo, a , x e y em equações acima, obtemos:

$$b = a \sqrt[3]{-\frac{\left(\sqrt{33} (26 + 6\sqrt{33})^{2/3} - 15 (26 + 6\sqrt{33})^{2/3} - 8 \sqrt[3]{26 + 6\sqrt{33}} \sqrt{33} + 24 \sqrt[3]{26 + 6\sqrt{33}} + 192 \right)}{192}}.$$

Isolando a em função de b :

$$a = \frac{24b}{\sqrt{-3\sqrt{33} (26 + 6\sqrt{33})^{2/3} + 45 (26 + 6\sqrt{33})^{2/3} + 24 \sqrt[3]{26 + 6\sqrt{33}} \sqrt{33} - 72 \sqrt[3]{26 + 6\sqrt{33}} - 576}}.$$

Para encontrar o ângulo de rotação, observe que:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{x-y}{b} \approx 0.2834724358$$

ou:

$$\theta = \arcsen\left(\frac{x-y}{b}\right) \approx 16.46756041 \text{ graus.}$$

Observamos que as razões entre a e b são constantes e valem aproximadamente,

$$\frac{b}{a} \approx 0.4375932862,$$

e

$$\frac{a}{b} \approx 2.285227017.$$

Como $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, substituindo nesta expressão $a \approx 2.285227017$, obtemos $r \approx 1.979064650$.

6.1.1 Criando um Cubo *Snub* de Aresta b no C4D

1. Crie um objeto primitivo, um hexaedro, inserindo, no C4D, $r \approx 1.979064650b$, realizando o procedimento da Seção 3.6;
2. Proceda como nos ítems 2, 3 e 4 da Seção 5.3.1 para separar as faces do objeto criado;
3. Proceda como no item 5 da Seção 5.3.1 para ativar a opção  (*Normal Scale*);
4. No *Attributes Menu*, ajuste *Scale* para 43.7593% (pois $b \approx 0.437593a$);
5. Na Paleta Dinâmica de Modelagem, ainda com todas as faces selecionadas, clique e segure na opção  *Rotate*. Acesse a opção *Normal Rotate*, como mostra a Figura 6.2:

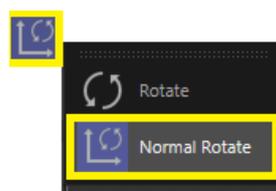


Figura 6.2: Localização do *Normal Rotate* no C4D.

6. No *Attributes Menu*, ajuste *Rotate* para 16.4676° . Assim, as faces farão o giro que permitirá a construção do cubo *snub*;

7. Desenhe as faces restantes utilizando a ferramenta  (*Polygon Pen*), conforme procedimento do item 9 da Seção 5.3.1.

A Figura 6.3 ilustra a construção do cubo *snub* seguindo os passos acima:

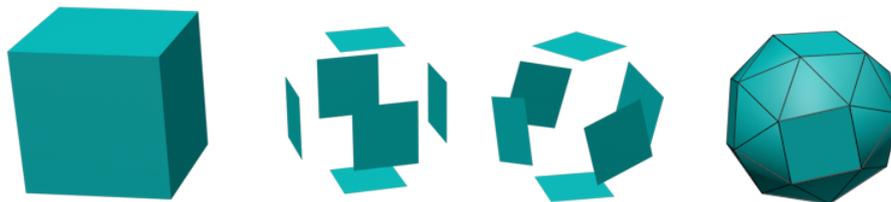


Figura 6.3: Transformação do hexaedro em cubo *snub*.

Para criar um cubo *snub* de aresta $b = 50 \text{ cm}$, como o ilustrado na Figura 6.1 criamos um hexaedro utilizando $r = 1.979064650 \cdot 50 = 98.9532325 \text{ cm}$ e seguimos o passo a passo acima.

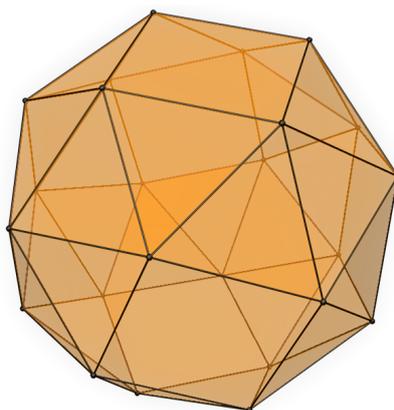


Figura 6.4: Cubo *Snub*.

6.2 Modelagem do Dodecaedro *Snub*

O Dodecaedro *Snub* é um poliedro de arquimedes que possui 60 vértices, 150 arestas e 92 faces regulares, sendo elas 80 triângulos e 12 pentágonos.

O Dodecaedro *Snub* pode ser obtido da seguinte maneira: tomamos um dodecaedro inicial de aresta a . Em cada face desse dodecaedro colocamos um pentágono de aresta $b < a$, com centro no centro da face do dodecaedro e lados paralelos aos lados da face do dodecaedro. Devemos rotacionar (centro de rotação é o centro do respectivo pentágono) por um ângulo θ todos os pentágono das faces do dodecaedro e encontrar b em função de a tal que os triângulos com vértices nos vértices dos pentágonos menores tenham aresta de comprimento b , veja a Figura 6.5.

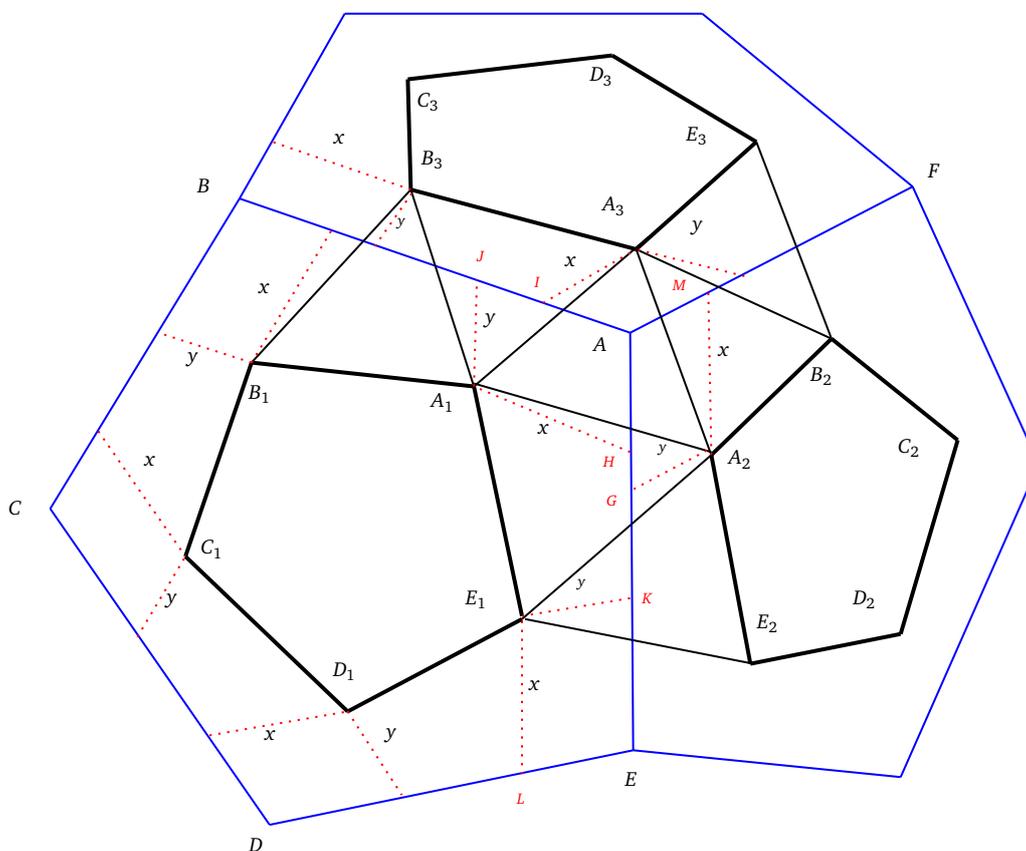


Figura 6.5: Construção do dodecaedro *snub*.

Conforme a Figura 6.5, considere o problema resolvido, isto é, os lados dos pentágonos menores em cor preta e os lados dos triângulos todos com lados medindo b . Nosso objetivo é encontrar b em função de a , onde a é a medida da aresta do dodecaedro em cor azul.

Os segmentos pontilhados em cor vermelha medindo $x > y$ são tais que os quadriláteros, EKE_1L , AJA_1H e assim por diante, são paralelogramos e por simetria todos são congruentes.

Vamos usar álgebra de vetores da Geometria Analítica para encontrar expressões para os números:

$$|\overrightarrow{A_1E_1}| = |\overrightarrow{A_1A_2}| = |\overrightarrow{E_1A_2}|.$$

Segue que:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA_1} &= \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JA_1} = \frac{x}{a} \overrightarrow{AB} + \frac{y}{a} \overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{AE_1} &= \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KE_1} = \frac{(a-x)}{a} \overrightarrow{AE} + \frac{y}{a} \overrightarrow{ED} \\ \overrightarrow{AA_2} &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AM} = \frac{x}{a} \overrightarrow{AE} + \frac{y}{a} \overrightarrow{AF}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Como,

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1E_1} + \overrightarrow{E_1A} = \overrightarrow{O},$$

temos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1E_1} &= \overrightarrow{AE_1} - \overrightarrow{AA_1} \\ \overrightarrow{A_1E_1} &= \frac{(a-x-y)}{a} \overrightarrow{AE} + \frac{y}{a} \overrightarrow{ED} - \frac{x}{a} \overrightarrow{AB}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Vamos agora decompor \overrightarrow{ED} em função de \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AE} .

Obtemos:

$$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} \text{ e } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}. \text{ Por outro lado, } \overrightarrow{BD} \text{ é paralelo a } \overrightarrow{AE} \text{ e além disso } |\overrightarrow{BD}| = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$$

é a medida da diagonal do pentágono $ABCDE$, assim $\overrightarrow{BD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \overrightarrow{AE}$. Logo,

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \overrightarrow{AE}$$

e

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ED} &= \overrightarrow{AB} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{ED} &= \overrightarrow{AB} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \overrightarrow{AE} \end{aligned}$$

Assim,

$$\overrightarrow{A_1E_1} = \frac{\left(a-x + \left(\frac{\sqrt{5}-3}{2} \right) y \right)}{a} \overrightarrow{AE} + \frac{(y-x)}{a} \overrightarrow{AB}.$$

Usando a fórmula do ângulo entre vetores: $\langle \vec{AE}, \vec{AB} \rangle = |\vec{AE}| |\vec{AB}| \cos(108^\circ) = \frac{a^2(1-\sqrt{5})}{4}$. Da identidade,

$$|\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}|^2 = \alpha^2 |\vec{u}|^2 + 2\alpha\beta \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \beta^2 |\vec{v}|^2,$$

obtemos:

$$|\vec{A_1E_1}|^2 = \left(a - x + \left(\frac{\sqrt{5}-3}{2} \right) y \right)^2 + 2 \frac{\left(a - x + \left(\frac{\sqrt{5}-3}{2} \right) y \right) (y-x) a^2(1-\sqrt{5})}{a^2} + (y-x)^2$$

$$|\vec{A_1E_1}|^2 = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2} \right) x^2 + \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{2} \right) xy + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2} \right) y^2 + \left(\frac{a(\sqrt{5}-5)}{2} \right) x + \left(\frac{a(\sqrt{5}-5)}{2} \right) y + a^2.$$

Vamos buscar agora uma expressão para $|\vec{A_1A_2}|^2$. Observe que:

$$\vec{A_1A_2} = \vec{A_1A} + \vec{AA_2}$$

$$\vec{A_1A_2} = \frac{(x-y)}{a} \vec{AE} + \frac{y}{a} \vec{AF} - \frac{x}{a} \vec{AB}$$

Como $|\vec{A_1A_2}|^2 = \langle \vec{A_1A_2}, \vec{A_1A_2} \rangle$ e $\langle \vec{AE}, \vec{AB} \rangle = \langle \vec{AE}, \vec{AF} \rangle = \langle \vec{AB}, \vec{AF} \rangle = \frac{a^2(1-\sqrt{5})}{4}$, obtemos:

$$|\vec{A_1A_2}|^2 = \frac{(3+\sqrt{5})}{2} (x^2 - xy + y^2).$$

Finalmente, para fechar o triângulo $A_1A_2E_1$, vamos encontrar uma expressão para $|\vec{A_2E_1}|^2$. Observe que:

$$\vec{A_2E_1} = \vec{A_2A} + \vec{AE_1}$$

$$\vec{A_2E_1} = -\frac{x}{a} \vec{AE} - \frac{y}{a} \vec{AF} + \frac{(a-x)}{a} \vec{AE} + \frac{y}{a} \vec{ED}$$

$$\vec{A_2E_1} = -\frac{y}{a} \vec{AF} + \frac{(a-2x)}{a} \vec{AE} + \frac{y}{a} \vec{ED}$$

$$\vec{A_2E_1} = -\frac{y}{a} \vec{AF} + \frac{\left(a - 2x + \frac{y(\sqrt{5}-1)}{2} \right)}{a} \vec{AE} + \frac{y}{a} \vec{AB}$$

Logo,

$$|\vec{A_2E_1}|^2 = 4x^2 + (-2\sqrt{5} + 2)xy - 4ax + 3y^2 + (a\sqrt{5} - a)y + a^2.$$

Em resumo:

$$|\overrightarrow{A_1E_1}|^2 = |\overrightarrow{A_1A_2}|^2 = |\overrightarrow{E_1A_2}|^2,$$

onde:

$$|\overrightarrow{A_1E_1}|^2 = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)x^2 + \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{2}\right)xy + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)y^2 + \left(\frac{a(\sqrt{5}-5)}{2}\right)x + \left(\frac{a(\sqrt{5}-5)}{2}\right)y + a^2$$

$$|\overrightarrow{A_1A_2}|^2 = \frac{(3+\sqrt{5})}{2}(x^2 - xy + y^2)$$

$$|\overrightarrow{A_2E_1}|^2 = 4x^2 + (-2\sqrt{5}+2)xy - 4ax + 3y^2 + (a\sqrt{5}-a)y + a^2.$$

Da equação $|\overrightarrow{A_1E_1}|^2 - |\overrightarrow{A_2E_1}|^2 = 0$, podemos isolar y^2 , obtendo:

$$y^2 = \frac{(\sqrt{5}+1)(-2x^2 + xy(\sqrt{5}-1) + 2ax - 2ay)}{4}. \quad (6.12)$$

Da mesma forma, da equação $|\overrightarrow{A_1A_2}|^2 - |\overrightarrow{A_2E_1}|^2 = 0$, podemos isolar y^2 , obtendo:

$$y^2 = \frac{-(\sqrt{5}+3)((5-\sqrt{5})x^2 + (-3\sqrt{5}+7)xy - 8ax + (2\sqrt{5}-2)ay + 2a^2)}{4} \quad (6.13)$$

Igualando o lado direito das duas últimas equações, e resolvendo em y , obtemos:

$$y = \frac{-(\sqrt{5}+1)((-2\sqrt{5}+6)x^2 + (\sqrt{5}a-9a)x + 2a^2)}{4a + (6\sqrt{5}-10)x} \quad (6.14)$$

Substituindo este último y na Equação 6.14 logo acima e igualando a zero, obtemos a seguinte relação em x :

$$\frac{(11+5\sqrt{5})((41\sqrt{5}-91)x^3 + (-30\sqrt{5}a+64a)x^2 + (5\sqrt{5}a^2-5a^2)x - 2a^3)}{(3\sqrt{5}x+2a-5x)^2} = 0.$$

Com $x \neq 0$, basta resolver

$$(41\sqrt{5}-91)x^3 + (-30\sqrt{5}+64a)x^2 + (5\sqrt{5}-5)a^2x - 2a^3 = 0,$$

cujas únicas soluções reais são dadas por:

$$x = \left(-\frac{1}{186} \left(6281714 + 2802410\sqrt{5} + 186\sqrt{2522364702 + 1128044106\sqrt{5}} \right)^{1/3} + \frac{186 \left(\frac{1493}{8649}\sqrt{5} + \frac{1033}{2883} \right)}{\left(6281714 + 2802410\sqrt{5} + 186\sqrt{2522364702 + 1128044106\sqrt{5}} \right)^{1/3} + \frac{53}{186}\sqrt{5} + \frac{163}{186}} \right)^{1/3}$$

Logo, uma aproximação para x e y é dada por:

$$x \approx 0.3944605378 a \quad \text{e} \quad y \approx 0.2604339435 a.$$

O valor aproximado para os lados dos pentágonos e triângulos do dodecaedro *snub* é:

$$b \approx 0.56212196 a.$$

ou

$$a \approx 1.778973374 b.$$

A expressão em forma de radical para y e para a aresta b ficou muito grande, então optamos por não colocar aqui.

Agora vamos calcular o ângulo de devemos rotacionar o pentágono menor para obtermos o Dodecaedro *Snub*.

De acordo com a Figura 6.5, basta aplicar a Lei dos Cossenos ao triângulo OAA_1 , onde O é o centro do pentágono $A_1B_1C_1D_1E_1$. Como, $\overrightarrow{AA_1} = \frac{x}{a}\overrightarrow{AB} + \frac{y}{a}\overrightarrow{AE}$, temos que

$$|\overrightarrow{AA_1}|^2 = x^2 + \frac{xy(1-\sqrt{5})}{2} + y^2.$$

Por outro lado, $|\overrightarrow{OA}|$ e $|\overrightarrow{OA_1}|$ são respectivamente os raios das circunferências circunscritas aos pentágonos de lado a e b . Sendo,

$$|\overrightarrow{AA_1}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OA_1}|^2 - 2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OA_1}|\cos(\theta),$$

temos que em graus

$$\theta \approx 13.1064024^\circ.$$

Como o raio da esfera circunscrita ao dodecaedro mede $r = \frac{a(1 + \sqrt{5})\sqrt{3}}{4}$, substituindo nesta expressão $a \approx 1.778973374 b$, obtemos $r \approx 2.492801630 b$.

6.2.1 Criando um Dodecaedro *Snub* de Aresta b no C4D.

1. Crie um objeto primitivo, um dodecaedro, inserindo, no C4D, raio $r = 2.492801630 b$, realizando o procedimento da Seção 3.6;
2. Proceda como nos ítems 2, 3 e 4 da Seção 5.3.1 para separar as faces do objeto criado;
3. Proceda como no item 5 da Seção 5.3.1 para ativar a opção  (*Normal Scale*);
4. No *Attributes Menu*, ajuste *Scale* para 56.212196% (pois $b \approx 0.56212196 a$);
5. Proceda como no item 5 da Seção 6.1.1 para ativar a ferramenta  (*Normal Rotate*);
6. No *Attributes Menu*, ajuste *Rotate* para 13.1064024° . Assim, as faces farão o giro que permitirá a construção do dodecaedro *snub*;
7. Desenhe as faces restantes utilizando a ferramenta  (*Polygon Pen*), conforme procedimento do item 9 da Seção 5.3.1.

A Figura 6.6 ilustra a construção do dodecaedro *snub* seguindo os passos acima:



Figura 6.6: Construindo o dodecaedro *snub*.

Para criar um dodecaedro *snub* de aresta $b = 40 \text{ cm}$, como o ilustrado na Figura 6.7 criamos um dodecaedro, inserindo, no C4D, $r = 2.492801630 \cdot 40 \approx 99.7120652 \text{ cm}$ e seguimos o passo a passo acima.



Figura 6.7: Dodecaedro *Snub*.

Discussão das Atividades

Neste capítulo, apresentaremos os resultados da aplicação das atividades [A.1](#) e [A.2](#), constantes no Apêndice [A](#). Estas atividades foram realizadas na turma do 3º ano do ensino Médio, da Escola Estadual Caio Martins, da rede estadual de ensino de Minas Gerais, composta por dezoito alunos.

7.1 Apresentação das Atividades

Para a apresentação das atividades, foi realizada, preliminarmente, uma contextualização sobre o tema, na qual foram apresentados os cinco Sólidos de Platão e as operações sobre eles para a obtenção dos Sólidos de Arquimedes.

Posteriormente, foi realizada uma breve revisão de alguns conceitos matemáticos relativos às determinações das condições métricas para viabilizar as construções dos Sólidos de Arquimedes propostos, como semelhança de triângulos, o Teorema de Pitágoras e a Lei dos Cossenos. Em seguida, foram apresentadas, conforme mostra a Figura [7.1](#), as operações sobre os Poliedros de Platão que originam os Sólidos de Arquimedes: truncamento, expansão e snubificação.

Na sequência, foram apresentados os treze sólidos de Arquimedes, com destaque para aqueles que seriam modelados na atividade [A.1](#): o Tetraedro Truncado, o Cubo Truncado, o Cuboctaedro, o Icosaedro Truncado e o Icosidodecaedro.

Seguindo o roteiro proposto, a Atividade [A.1](#) foi desenvolvida em grupos de três a quatro alunos, cada grupo sendo responsável pela modelagem de um dos Sólidos de Arquimedes sugeridos. Os estudantes deveriam responder os exercícios referentes às determinações das condições métricas para viabilizar a operação de truncamento para cada poliedro, as quais foram também apresentadas

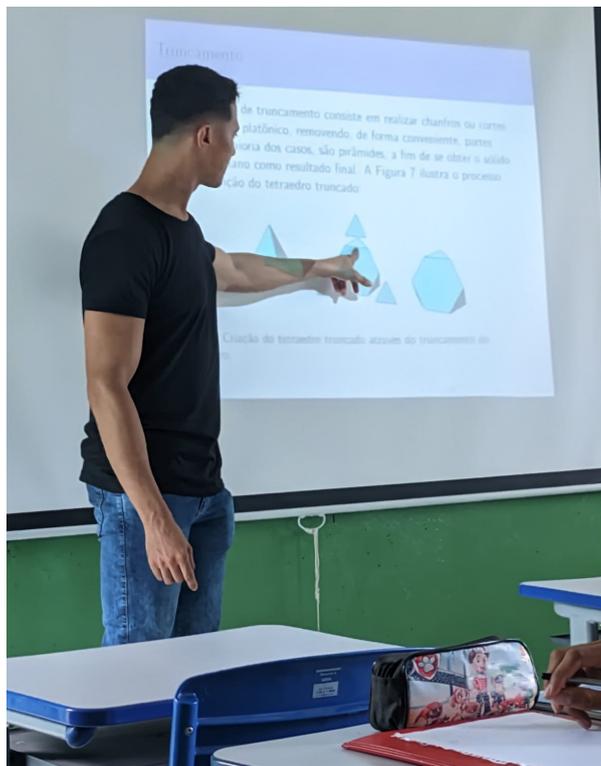


Figura 7.1: Apresentação da operação de truncamento para a modelagem dos Sólidos de Arquimedes.

pelos alunos em sala de aula, como mostra a Figura 7.2:



Figura 7.2: Condições métricas para a construção do icosidodecaedro.

Posteriormente, o professor apresentou a interface do Cinema 4D, mostrando as ferramentas que seriam utilizadas no processo de modelagem dos 5 Sólidos de Arquimedes sugeridos.

7.2 Desenvolvimento da Atividade A.1

Esta atividade se consistiu em duas etapas: na primeira, os alunos em grupos determinariam as condições métricas para a modelagem do Sólido de Arquimedes sugerido ao grupo. Na segunda etapa, o Sólido seria efetivamente criado com auxílio do Cinema 4D. A primeira etapa foi desenvolvida de forma extraclasse e, a segunda, em sala de aula, uma vez que havia apenas um *notebook* com o programa instalado para a realização da prática.

Após a determinação das condições métricas para os truncamentos, os alunos seguiram o tutorial da Atividade A.1 para as modelagens dos Poliedros de Arquimedes, contando com o apoio do professor. A Figura 7.3 a seguir mostra modelagem do Tetraedro Truncado:



Figura 7.3: Modelagem do tetraedro truncado por um dos grupos.

Na Figura 7.4 abaixo, podemos observar a modelagem do Cubo Truncado por um dos alunos:



Figura 7.4: Modelagem do cubo truncado por um dos alunos.

O próximo sólido modelado por um dos alunos foi o Cuboctaedro, como mostra a Figura 7.5.

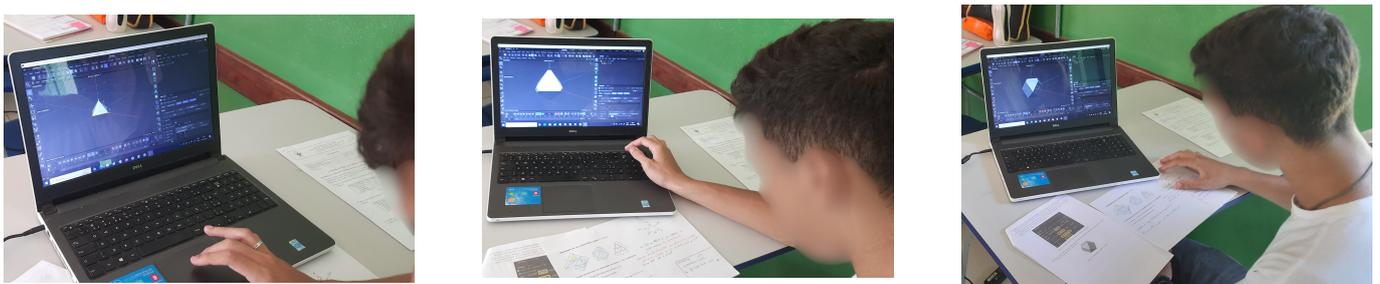


Figura 7.5: Modelagem do cuboctaedro por um dos grupos.

Na sequência, um dos alunos modelou o Icosaedro Truncado, como mostra a Figura 7.6.



Figura 7.6: Modelagem do icosaedro truncado por um dos grupos.

E, finalmente, uma das equipes realizou o truncamento do Icosidodecaedro, como mostra a Figura 7.7 a seguir.

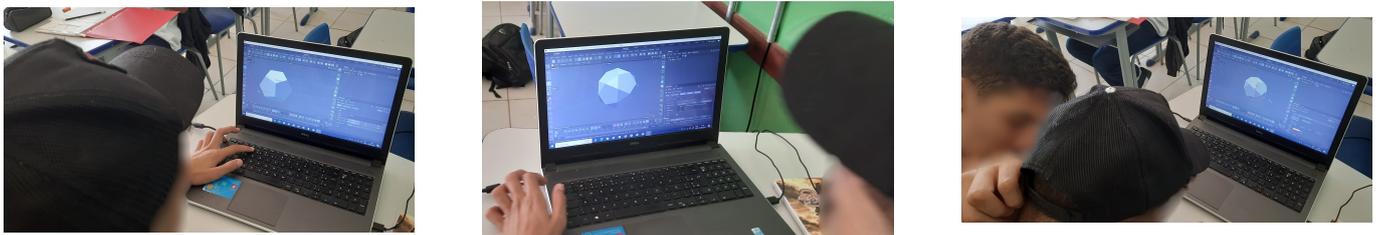


Figura 7.7: Modelagem do icosidodecaedro truncado por um dos grupos.

7.3 Desenvolvimento da Atividade A.2

Para a Atividade A.2, foi apresentada uma sequência de exercícios onde o estudante observaria, nos processos de truncamentos realizados, as transformações relativas às quantidades de vértices, arestas e faces dos Sólidos de Platão para os de Arquimedes.

Na atividade, que foi realizada de forma extraclasse, e em grupos, os estudantes deveriam perceber as quantidades de vértices e/ou arestas perdidos no processo, bem como as quantidades de vértices, arestas e faces novos, que apareciam após a modelagem de cada sólido.

Para finalizar, o estudante deveria verificar a relação de Euler nos sólidos obtidos, através do preenchimento de uma das tabelas da atividade.

7.4 Questionário Sobre as Atividades Realizadas

Após a realização das Atividades A.1 e A.2, foi aplicado um questionário, disponível no Apêndice B, para estimarmos as potencialidades do Cinema 4D na modelagem dos Sólidos de Arquimedes propostos, bem como para verificar os êxitos e falhas da sequência de atividades apresentadas com

esta finalidade de modelagem e de averiguação investigativa da relação de Euler no processo de truncamento realizado.

Ao serem questionados sobre a contextualização realizada sobre os Sólidos de Arquimedes e as operações sobre os Sólidos de Platão que os originam, 57,1% dos estudantes avaliaram como "bom", 28,6% responderam como "satisfatório" e 14,3% consideraram a contextualização inicial como "regular".

Sobre a sequência de atividades para determinar as condições métricas iniciais para as modelagens propostas, 28,6% avaliaram como excelente, enquanto 42,9% avaliaram como "bom", 14,3% avaliaram como "satisfatória" e outros 14,3% avaliaram como "regular".

Quando perguntados sobre as suas opiniões sobre o uso do software Cinema 4D para a modelagem de cada poliedro discutido na atividade, 57,1% avaliaram como "excelente", enquanto outros 14,3% avaliaram como "bom" e 28,6% como "satisfatório".

Com relação à Atividade [A.2](#), os estudantes foram questionados como foi a percepção da Relação de Euler nos sólidos obtidos. 28,6% responderam como "razoavelmente clara", 14,3% como "confusa" e outros 57,1% como "difícil de entender".

Na avaliação geral de cada estudante sobre a interação individual com a atividade proposta, 28,6% responderam como "muito satisfatória", outros 28,6% como "satisfatória", enquanto 28,6% responderam neutra e 14,3% classificaram suas interações com a abordagem proposta como "insatisfatória".

7.5 Depoimentos dos Estudantes Sobre as Atividades

Além dos questionamentos apresentados na Seção [7.4](#), os estudantes foram convidados a escrever depoimentos sobre as suas impressões das atividades desenvolvidas.

Quando solicitados descreverem as suas experiências ao observarem as transformações nas faces, vértices e arestas dos Poliedros de Platão ao se tornarem Poliedros de Arquimedes durante os processos de truncamento, os alunos realizaram os seguintes depoimentos:

- "É fascinante. As faces, vértices e arestas se reconfiguram de maneira elegante, criando novas formas e padrões geométricos intrigantes.";
- "Achei muito interessante e relativamente fácil de compreender, graças à explicação do professor e às aulas práticas com o Cinema 4D.";

- "Através da prática, fica mais fácil entender como funciona e o contexto se fixa melhor.";
- "Não consegui entender de forma clara.";
- "Não entendi muito, mas se for me aprofundar mais nisso, é bom ter pelo menos algumas aulas na informática" (no laboratório de informática).

Ao serem convidados a compartilharem quaisquer comentários, sugestões ou críticas sobre as atividades propostas, ou a relatarem suas experiências na realização da atividade, foram algumas das respostas dos estudantes:

- "Com a metodologia do professor João, eu consegui entender e também descobri uma nova forma de usar a matemática que despertou meu interesse.";
- "Gostei muito do programa Cinema 4D, ajuda bastante.";
- "Aulas criativas.".

Os comentários no questionário não eram de resposta obrigatória. Além disso, percebe-se que, como as atividades foram realizadas no período inicial do ano letivo, alguns alunos não participaram de algumas das etapas necessárias para a compreensão de todo o processo de modelagem, o que provavelmente contribuiu para algumas respostas que apontam falta de clareza nas atividades propostas.

Considerações Finais

Neste trabalho, buscamos estimar as potencialidades do Cinema 4D na tarefa específica de modelar os Poliedros de Arquimedes. Um dos objetivos deste trabalho foi apresentar o Cinema 4D, um poderoso *software* de simulação 3D, que pode ser utilizado em tarefas como modelagem, animação, texturização e renderização de objetos.

Inicialmente, buscamos conhecer as raízes históricas dos Poliedros de Arquimedes, que são obtidos através de operações sobre os 5 Poliedros de Platão: O Tetraedro, o Hexaedro, o Octaedro, o Dodecaedro e o Icosaedro.

Em seguida, buscamos conhecer as operações que transformam os Sólidos de Platão em Sólidos de Arquimedes: truncamento, expansão e snubificação. Tal conhecimento possibilitou que explorássemos as ferramentas do Cinema 4D para obtermos cada Sólido de Arquimedes.

Como os Sólidos de Platão são criados a partir da medida dos raios das esferas circunscritas a eles, foi necessário que realizássemos um estudo para determinarmos as relações métricas entre raio e aresta de cada poliedro platônico. Esse estudo foi necessário e possibilitou que criássemos Poliedros de Platão de tamanhos específicos, viabilizando a tarefa de determinar as relações entre arestas dos objetos primitivos (aqueles que sofrem as transformações em Sólidos de Arquimedes) e os sólidos arquimedianos originados a partir deles.

As atividades [A.1](#) e [A.2](#) propostas possibilitaram levar o Cinema 4D para a sala de aula, de modo que o aluno pôde explorar a modelagem e conhecer as relações matemáticas que permeiam o tema, como as relações métricas que envolvem cada processo e a famosa Relação de Euler. Tais atividades possibilitaram que os estudantes experimentassem as transformações em tempo real, com as devidas justificativas matemáticas, favorecendo a experimentação e simulação imediata desses conceitos.

Por fim, o trabalho como um todo possibilitou a exploração de algumas das ferramentas do Cinema 4D, que possui várias possibilidades de modelagem e simulação 3D. O software possibilitou a utilização de ferramentas variadas para as modelagens dos treze sólidos de Arquimedes, das quais podemos destacar: chanfreamentos a partir de arestas ou vértices, dimensionamento e rotação de faces, realce de vértices e arestas, desenho poligonal, texturização, entre outras. Nesse sentido, o Cinema 4D mais do que atendeu as expectativas do trabalho, uma vez que utilizamos pouquíssimas das suas ferramentas para alcançarmos o objetivo proposto.

Atividades: Modelagem dos Poliedros de Arquimedes

Neste Apêndice, apresentaremos algumas propostas de atividades envolvendo a modelagem de poliedros de Arquimedes por meio de truncamento, abordando aspectos métricos relacionados à construção de cada sólido e à relação de Euler. Inicialmente, na **Atividade 1** da Seção [A.1](#), faremos uma contextualização da atividade, apresentando os treze Sólidos de Arquimedes e as operações sobre os Sólidos de Platão que os originam. Posteriormente, abordaremos como problema a determinação das condições métricas necessárias para a obtenção de um sólido arquimediano específico por meio da operação de truncamento, seguindo a abordagem adotada ao longo deste trabalho.

Ainda na **Atividade 1**, com o suporte do professor, os estudantes terão a oportunidade de utilizar o software *Cinema 4D* para realizar a modelagem do poliedro discutido no exercício anterior.

Adicionalmente, os alunos realizarão a **Atividade 2**, da Seção [A.2](#), na qual convidaremos os estudantes a observarem, após o truncamento, o número de vértices, arestas e faces dos sólidos obtidos, permitindo assim a verificação da relação de Euler.

Para concluir, aplicaremos um questionário com o objetivo de avaliar a qualidade da interação dos estudantes com a atividade proposta. Essa avaliação visa proporcionar uma compreensão mais aprofundada das potencialidades do software Cinema 4D como recurso de modelagem no contexto do estudo em questão.

A.1 Atividade 1: Modelagem dos Poliedros de Arquimedes Via Cinema 4D

Nesta seção, apresentaremos uma atividade que consiste na modelagem de cinco dos Poliedros de Arquimedes via Cinema 4D: o Tetraedro Truncado, o Cubo Truncado, o Cuboctaedro, o Icosidodecaedro e o Icosaedro Truncado. A proposta busca realizar operações nos Cinco Poliedros de Platão, possibilitando estudos processuais sobre as características dos Sólidos de Arquimedes criados, como características métricas e a própria relação de Euler, que será debatida na **Atividade 2**, da Seção [A.2](#).

A.1.1 Modelagem de um Tetraedro Truncado a Partir de um Tetraedro Regular de Aresta $a = 72\text{ cm}$

O Tetraedro Truncado é um sólido arquimediano composto por 8 faces regulares (4 hexágonos e 4 triângulos). Este sólido arquimediano é obtido por meio do truncamento do Tetraedro, que é um sólido platônico composto por 4 triângulos regulares, 4 vértices, 6 arestas.

A Figura [A.1](#) abaixo ilustra o processo de truncamento para a obtenção de um tetraedro Regular de aresta $a = 72\text{ cm}$.

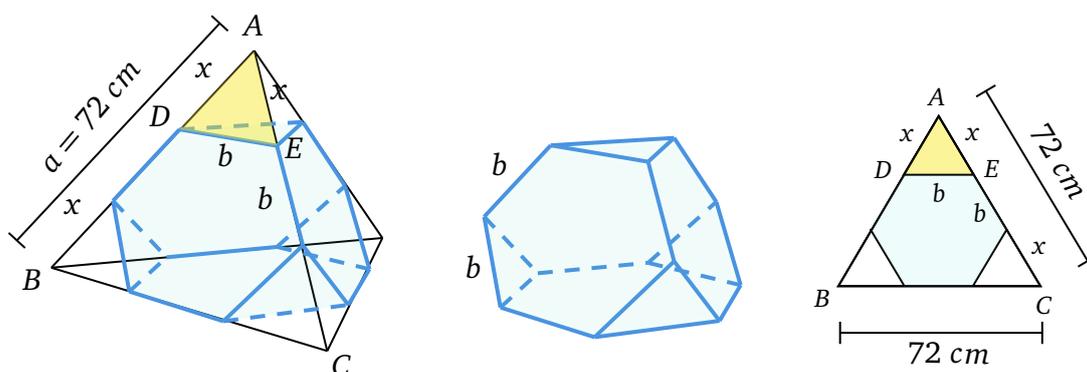


Figura A.1: Modelagem de um tetraedro truncado de aresta b .

O sólido que queremos construir será originado de um tetraedro regular de aresta $a = 72\text{ cm}$. Para o estudo do Tetraedro Truncado, considere a sequência de atividades:

Atividade: Estudo do Processo de Modelagem do Tetraedro Truncado

1. Considerando que a aresta do tetraedro regular mede $a = 72\text{ cm}$, determine:

- a) a medida x da aresta lateral da pirâmide retirada;
- b) A medida b , do tetraedro truncado obtido.

Dica 1: Verifique que os triângulos AEF e ABC são semelhantes.

Dica 2: Mostre que o triângulo AEF é equilátero.

2. Vamos agora, modelar o tetraedro obtido com o apoio da ferramenta Cinema 4D.

Com o apoio do professor, siga os passos.

- a) No Cinema 4D, o dimensionamento do sólido platônico criado é dado em função do raio r da esfera circunscrita ao mesmo. Determine r utilizando a calculadora, sabendo que, para o tetraedro de aresta a , $r = \frac{a\sqrt{6}}{4}$, isto é: $r \approx 0.6123724a$;
- b) No Cinema 4D, na Paleta de Objetos, clique e segure com o mouse no ícone  para visualizar a Paleta de Objetos 3D da Figura A.2:

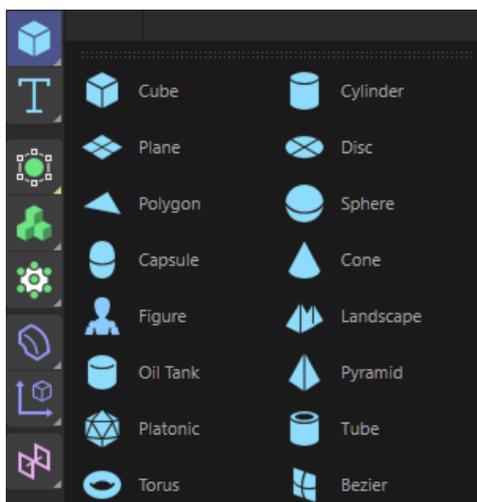


Figura A.2: Paleta de Objetos 3D.

- c) Clique no ícone  para criar o tetraedro regular. No Menu Atributtes (Menu de Atributos) que aparecerá selecione, conforme Figura A.3, *Tetra* em *Type* (Tipo), e, em *Radius* (raio), inclua o valor encontrado no *item* (a) deste exercício.
- d) Na Paleta de Objetos, clique e segure no ícone  para exibir algumas opções de modelagem. Clique no ícone  (*Bevel*) desta paleta. No *Menu Object Manager* (Gerenciador de objetos), arraste o bevel para dentro do *Platonic* (tetraedro), obtendo a sequência observada na Figura A.4 abaixo:
- e) Renomeie o objeto criado como **Tetraedro Truncado**: com clique duplo em *Platonic*, no *Menu Object Manager* (Gerenciador de Objetos), aparecerá a opção de alterar o nome do sólido.

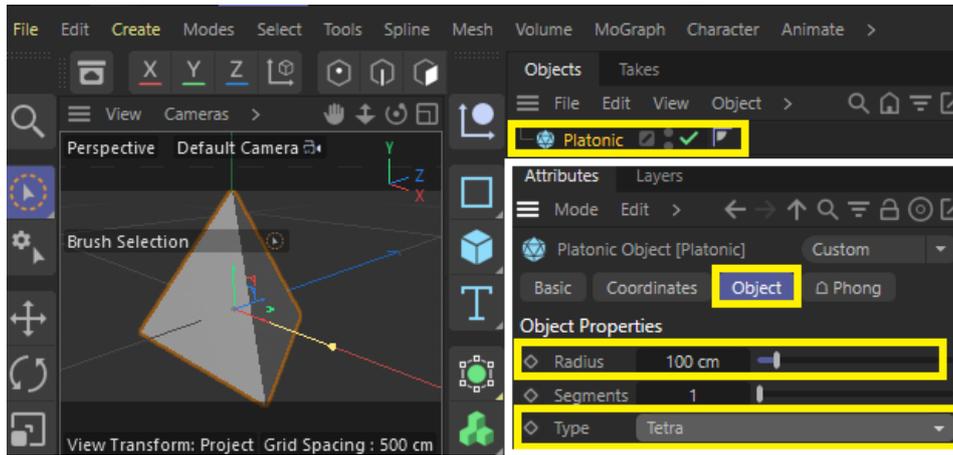


Figura A.3: Criando o tetraedro no Cinema 4D.

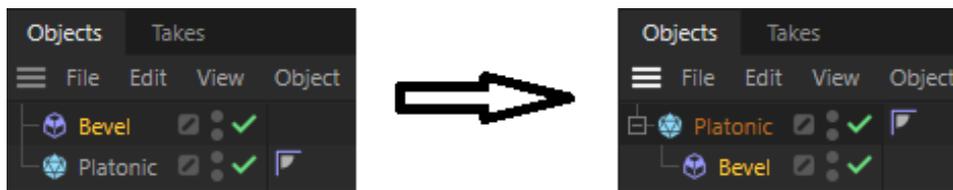


Figura A.4: Aplicação do *Bevel Deformer* ao tetraedro.

f) No Menu *Object Manager* selecione o *Bevel*. No Menu de Atributos, selecione, como na Figura A.5 as opções *Points* (em *Component Mode*) e *Fixed Distance* (em *Offset Mode*) e, em *Offset*, digite o valor de x obtido no Exercício 1 desta lista.

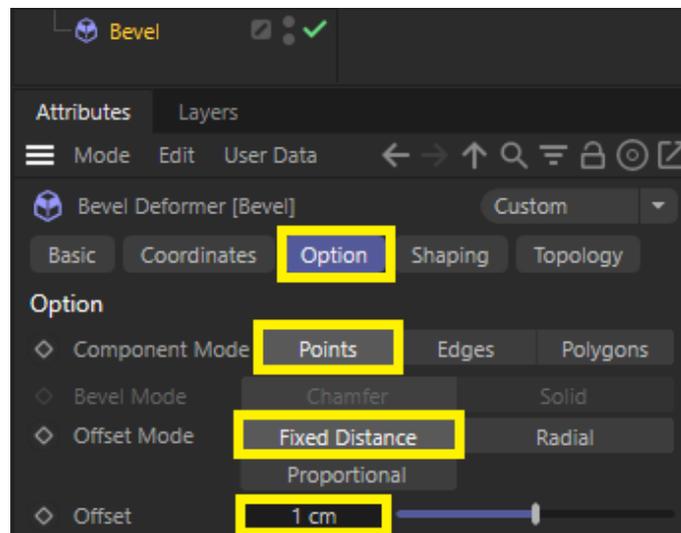


Figura A.5: Configuração do *Bevel Deformer* no Menu de Atributos.

g) Com o auxílio do professor, verifique se o objeto encontrado é de fato o tetraedro truncado de aresta b . Este será como na Figura A.6:

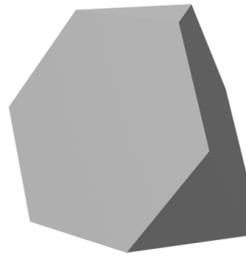


Figura A.6: Tetraedro truncado de aresta b .

A.1.2 Modelagem de um Cubo Truncado de Aresta $b = 50\text{ cm}$

O Cubo Truncado é um sólido de Arquimedes com 6 faces octagonais regulares e 8 faces triangulares regulares. Este sólido é obtido através do truncamento do Hexaedro (Cubo) que é um sólido de Platão composto por 12 arestas, 8 vértices e 6 faces quadradas. Para a obtenção deste Sólido de Arquimedes, a partir de cada vértice de um cubo dado, é retirada a pirâmide cuja base em relação ao respectivo vértice é um triângulo regular (equilátero), como podemos observar na Figura A.7. Além disso, cada aresta da base é também aresta do octaedro regular que é obtido em cada face do hexaedro.

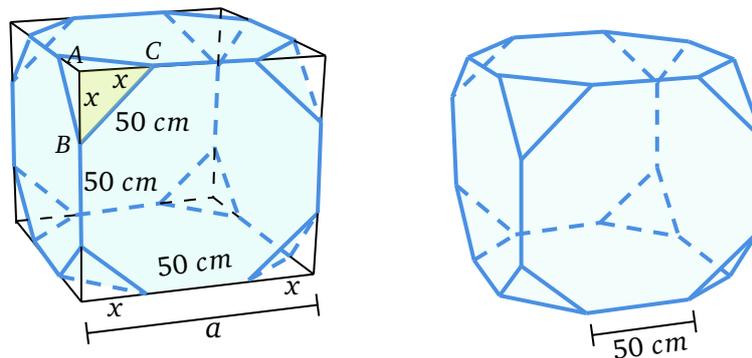


Figura A.7: Construção do cubo truncado.

Para construirmos um cubo truncado de aresta $b = 50\text{ cm}$, devemos vamos considerar a sequência de atividades a seguir.

Atividade: Estudo do Processo de Modelagem do Cubo Truncado

1. **Considerando que queremos um cubo truncado de aresta $b = 50\text{ cm}$, determine:**

- A medida x no triângulo retângulo de catetos medindo x e hipotenusa medindo 50 cm destacados na Figura A.7;
- Obter a medida a da aresta do cubo (com pelo menos quatro casas decimais).

2. **Vamos agora, modelar o cubo truncado obtido com o apoio da ferramenta Cinema 4D. Com o auxílio do professor, siga os passos.**

- a) No Cinema 4D, o dimensionamento do sólido platônico criado é dado em função do raio r da esfera circunscrita ao mesmo. Determine r utilizando a calculadora, sabendo que, r sabendo que, para o cubo de aresta a , $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, isto é: $r \approx 0.86603a$;
- b) No Cinema 4D, na Paleta de Objetos, clique e segure com o mouse no ícone  para visualizar a Paleta de Objetos 3D da Figura A.8:

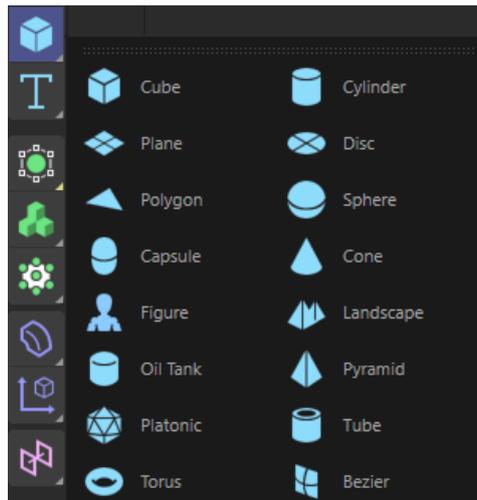


Figura A.8: Paleta de Objetos 3D.

- c) Clique no ícone  para criar o tetraedro regular. Em *Atributtes Menu* (Menu de Atributos) que aparecerá, conforme a Figura A.9 selecione *Hexa* em *Type* (Tipo), e, em *Radius* (raio), inclua o valor encontrado no *item (a)* deste Exercício.

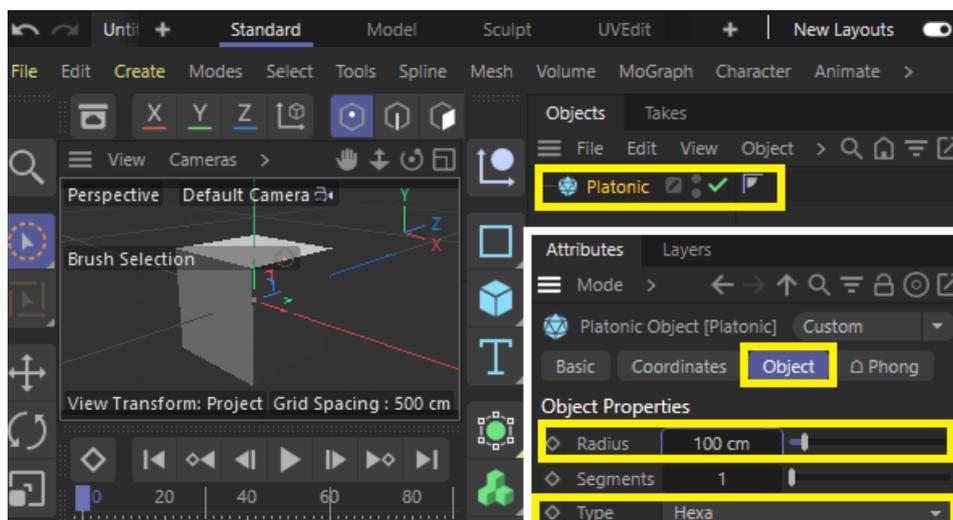


Figura A.9: Criando o hexaedro no Cinema 4D.

- d) Na Paleta de Objetos, clique e segure no ícone  para exibir algumas opções de modelagem. Clique no ícone  (*Bevel*) desta paleta. No Menu *Object Manager* (Gerenciador de Objetos), arraste o objeto *Bevel* para dentro do *Platonic* (Hexaedro), obtendo a sequência observada na Figura A.10:



Figura A.10: Aplicação do *Bevel Deformer* ao hexaedro.

- e) Renomeie o objeto criado como **Cubo Truncado**: com clique duplo em *Platonic*, no Menu *Object Manager* (Gerenciador de Objetos), aparecerá a opção de alterar o nome do sólido.
- f) No Menu *Object Manager* selecione o *Bevel*. No Menu de Atributos, selecione, como na Figura A.11 abaixo, as opções *Points* (em *Component Mode*) e *Fixed Distance* (em *Offset Mode*) e, em *Offset*, digite o valor de x obtido no Exercício 1 desta lista.

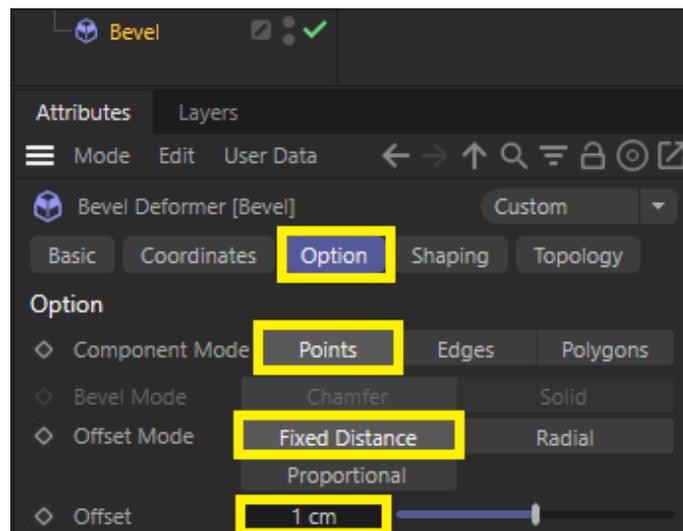


Figura A.11: Configuração do *Bevel Deformer* no Menu de Atributos.

- g) Com o auxílio do professor, verifique se o objeto encontrado é de fato o cubo truncado de aresta $b = 50\text{ cm}$. Este será como na Figura A.12:

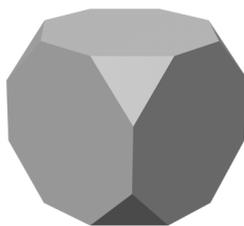


Figura A.12: Cubo truncado de aresta $b = 50\text{ cm}$.

A.1.3 Modelagem de um Cuboctaedro de Aresta $b = 60\text{ cm}$

O Cuboctaedro é um Sólido de Arquimedes que possui 8 faces triangulares e 6 faces quadrangulares. Este sólido é obtido pelo truncamento do Octaedro, um sólido platônico que possui 8 faces triangulares regulares, 12 arestas, 6 vértices. Para modelarmos um cuboctaedro de aresta b são cortadas as pirâmides cujas bases relativas a cada vértice do octaedro, de aresta a , são quadrados de aresta b . Considere a Figura A.13 abaixo para a obtenção de um cuboctaedro de aresta $b = 60\text{ cm}$:

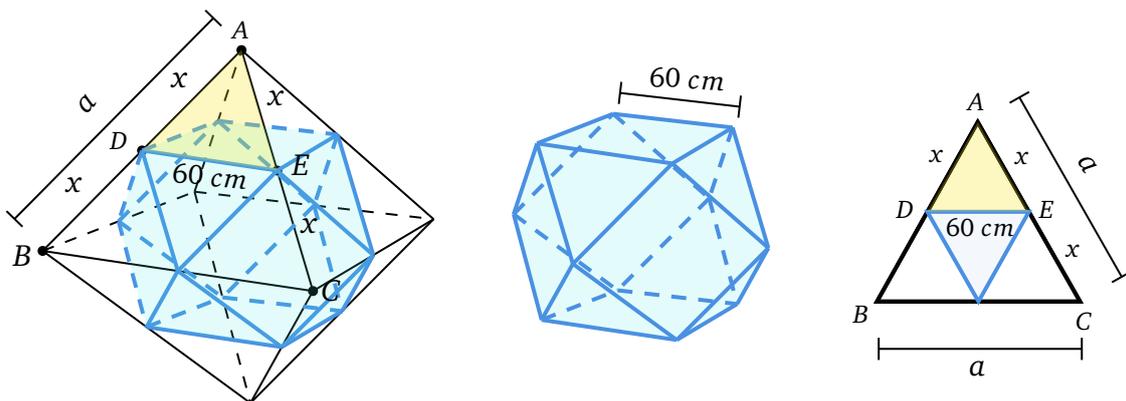


Figura A.13: Construção de um cuboctaedro de aresta $b = 60\text{ cm}$.

Para o estudo do processo de modelagem do cuboctaedro de aresta $b = 60\text{ cm}$, considere a atividade abaixo:

Atividade: Estudo do Processo de Modelagem do Cuboctaedro

1. **Considerando que queremos um cuboctaedro de aresta $b = 60\text{ cm}$, determine:**
 - a) A medida x no triângulo ADE destacados na Figura A.13;
 - b) Obter a medida a da aresta do octaedro regular.
2. **Vamos agora, modelar o cuboctaedro com o apoio da ferramenta Cinema 4D. Com o auxílio do professor, siga os passos.**

- a) No Cinema 4D, o dimensionamento do sólido platônico criado é dado em função do raio r da esfera circunscrita ao mesmo. Determine r utilizando a calculadora, sabendo que, para o octaedro de aresta a , temos $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, ou seja, $r \approx 0.7071a$;
- b) No Cinema 4D, na Paleta de Objetos, clique e segure com o mouse no ícone  para visualizar a paleta de objetos 3D como na Figura abaixo: A.14:

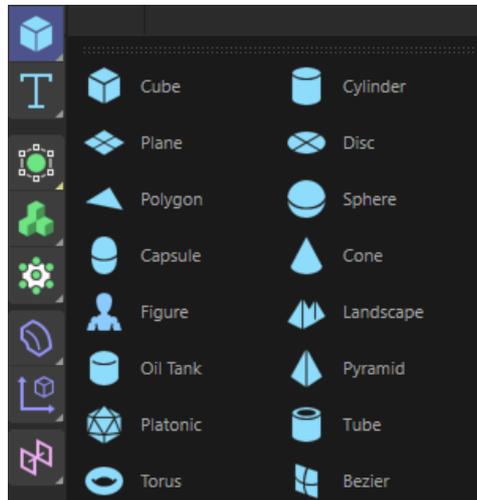


Figura A.14: Paleta de Objetos 3D.

- c) Clique no ícone  para criar o octaedro. Conforme a Figura A.15, no *Attributes Menu* (Menu de Atributos) que aparecerá, selecione *Octa* em *Type* (Tipo) e, em *Radius* (raio), inclua o valor encontrado no *item (a)* deste Exercício.

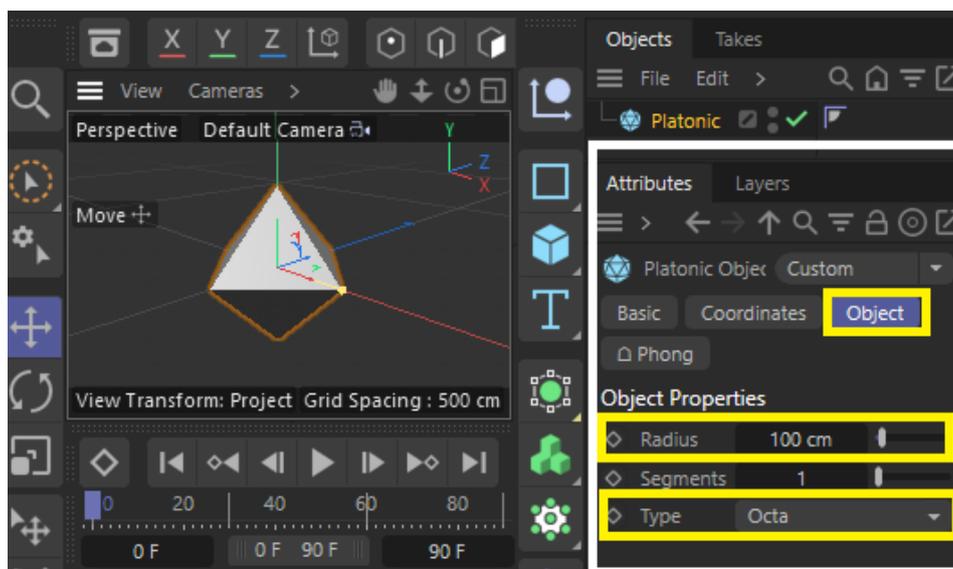


Figura A.15: Criando um octaedro no Cinema 4D.

- d) Na Paleta de Objetos, clique e segure no ícone  para exibir algumas opções de modelagem. Clique no ícone  (*Bevel*) desta paleta. No Menu *Object Manager* (Gerenciador de

Objetos), arraste o objeto *Bevel* para dentro do *Platonic* (octaedro), obtendo a sequência observada na Figura A.16:



Figura A.16: Aplicação do *Bevel Deformer* ao octaedro.

- e) Renomeie o objeto criado como **Cuboctaedro**: com clique duplo em *Platonic*, no Menu *Object Manager* (Gerenciador de Objetos), aparecerá a opção de alterar o nome do sólido.
- f) No Menu *Object Manager* selecione o *Bevel*. No Menu de Atributos, selecione, como na Figura A.17 as opções *Points* (em *Component Mode*) e *Fixed Distance* (em *Offset Mode*) e, em *Offset*, digite o valor de x obtido no Exercício 1 desta lista.

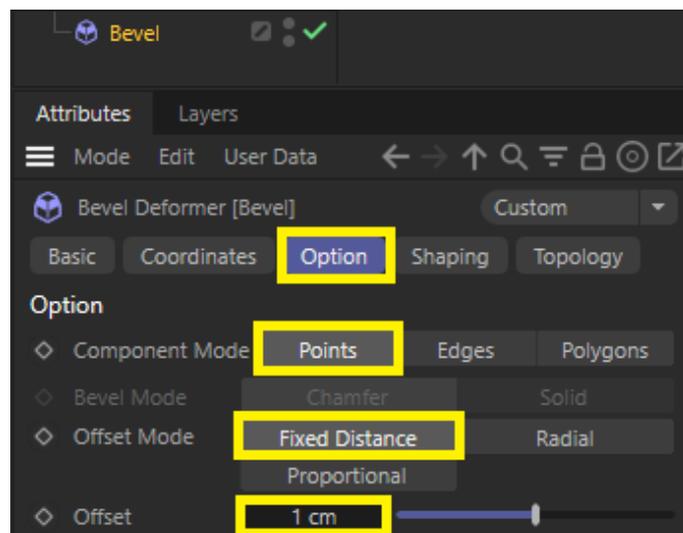


Figura A.17: Configuração do *Bevel Deformer* no Menu de Atributos.

- g) Com o auxílio do professor, verifique se o objeto encontrado é de fato o cuboctaedro de aresta $b = 60\text{ cm}$. Este será como na Figura A.18:



Figura A.18: Cuboctaedro de aresta $b = 60\text{ cm}$.

A.1.4 Modelagem de um Icosidodecaedro de Aresta $b = 40\text{ cm}$

O Icosidodecaedro é um sólido de Arquimedes que possui 32 faces, sendo 20 triângulos equiláteros e 12 pentágonos regulares. A obtenção deste sólido ocorre por truncatura do Icosaedro ou do Dodecaedro, razão pela qual recebe ambos os nomes. Neste exercício, estudaremos a obtenção deste sólido por truncatura do Dodecaedro, um sólido platônico composto por 12 faces pentagonais regulares, 30 arestas e 20 vértices.

Para realizar essa truncatura, são cortadas as pirâmides cujas bases relativas a cada vértice do dodecaedro de aresta a são triângulos regulares de aresta b , dos quais os lados também compõem os pentágonos regulares do sólido arquimediano. Considere a Figura A.19 abaixo, a qual ilustra o procedimento descrito anteriormente para a obtenção de um icosidodecaedro com aresta $b = 40\text{ cm}$:

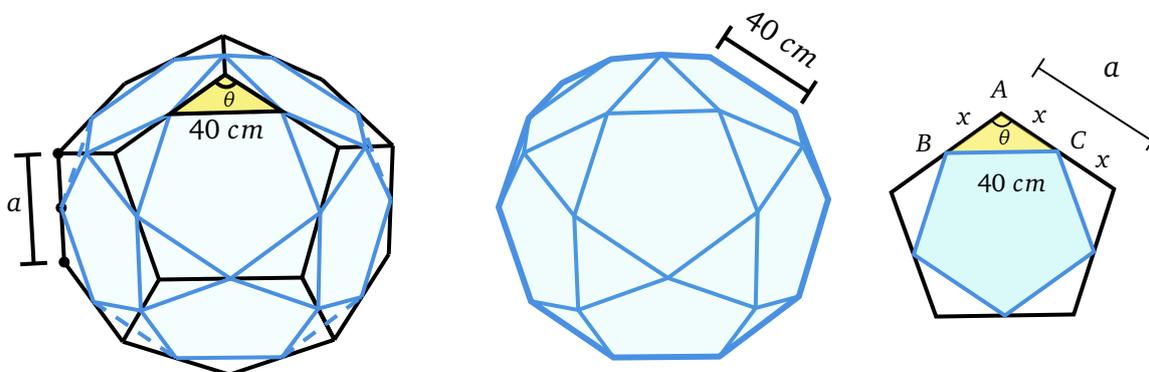


Figura A.19: Construção do icosidodecaedro de aresta $b = 40\text{ cm}$.

Para obtermos as medidas necessárias para o truncamento do Icosidodecaedro, considere a sequência de atividades:

Atividade: Estudo do Processo de Modelagem do Icosidodecaedro

1. **Considerando que queremos obter o icosidodecaedro de aresta $b = 40\text{ cm}$ a partir de um dodecaedro de aresta a , determine:**

- a) A medida $\overline{AC} = x$ no triângulo ABC ;
- b) Obter a medida a do lado do dodecaedro a ser criado.

Dica: Como $\angle ABC$ é ângulo interno de um pentágono, então $\theta = 108^\circ$. Aplique a lei dos cossenos no triângulo ABC . Use $\cos 108^\circ = -0.309$.

2. **Vamos agora, modelar o icosidodecaedro obtido com o apoio da ferramenta Cinema 4D. Com o auxílio do professor, siga os passos.**

- a) No Cinema 4D, o dimensionamento do sólido platônico criado é dado em função do raio r da esfera circunscrita ao mesmo. Determine r utilizando a calculadora, sabendo que, r sabendo que, para dodecaedro de aresta a , $r = \frac{a(1 + \sqrt{5})\sqrt{3}}{4}$, isto é: $r \approx 1.4012585a$;
- b) No Cinema 4D, na paleta de objetos, clique e segure com o mouse no ícone  para visualizar a Paleta de Objetos 3D da Figura A.20:

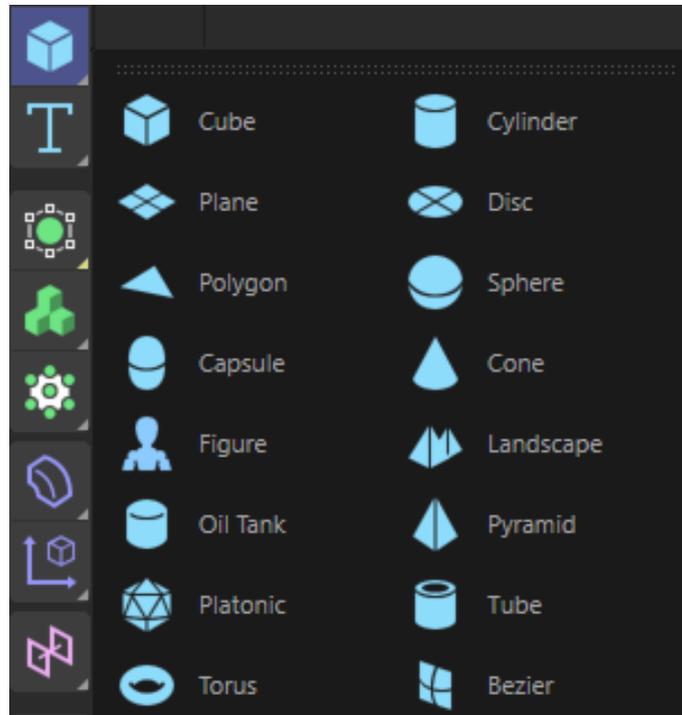


Figura A.20: Paleta de Objetos 3D.

- c) Clique no ícone  para criar o dodecaedro. Em *Attributes Menu* (Menu de Atributos) que aparecerá, selecione, como na Figura A.21, *Dodeca* em *Type* (Tipo), e, em *Radius* (raio), inclua o valor encontrado no *item (a)* deste Exercício.

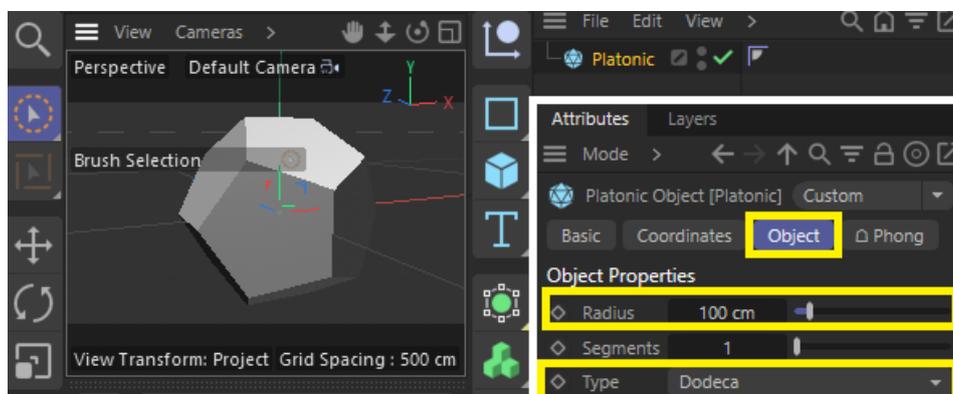


Figura A.21: Criando o tetraedro no Cinema 4D.

- d) Torne-o editável selecionando o *Platonic* no Menu *Object Manager* e clicando em  (*Make Editable*). Com a opção  *Edges* (linhas) selecionada na Paleta de Modos, selecione as li-

nhas diagonais na janela de visualizações, excluindo-as com *Alt+Delete*, conforme a Figura A.22:

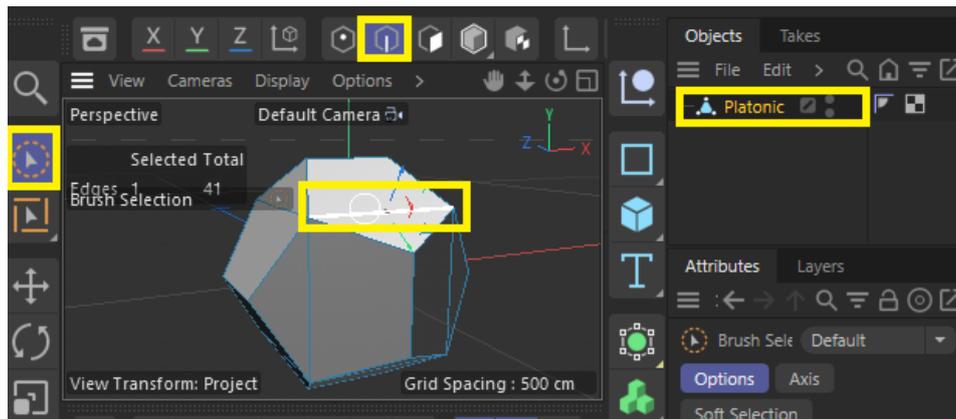


Figura A.22: Removendo as linhas diagonais das faces do dodecaedro.

- e) Na Paleta de Objetos, clique e segure no ícone  para exibir algumas opções de modelagem. Clique no ícone  (*Bevel*) desta paleta. No Menu *Object Manager* (Gerenciador de Objetos), arraste o objeto *Bevel* para dentro do *Platonic* (dodecaedro), obtendo a sequência observada na Figura A.23:



Figura A.23: Aplicação do *Bevel Deformer* ao dodecaedro.

- f) Renomeie o objeto criado como **Icosidodecaedro**: com clique duplo em *Platonic*, no Menu *Object Manager* (Gerenciador de Objetos), aparecerá a opção de alterar o nome do sólido.
- g) No Menu *Object Manager* selecione o *Bevel*. No Menu de Atributos, selecione, como na Figura A.24, as opções *Points* (em *Component Mode*) e *Proportional* (em *Offset Mode*) e, em *Offset*, digite o valor 50% (pois $a = 2b$).
- h) Com o auxílio do professor, verifique se o objeto encontrado é de fato o Icosidodecaedro. Este será como na Figura A.25:

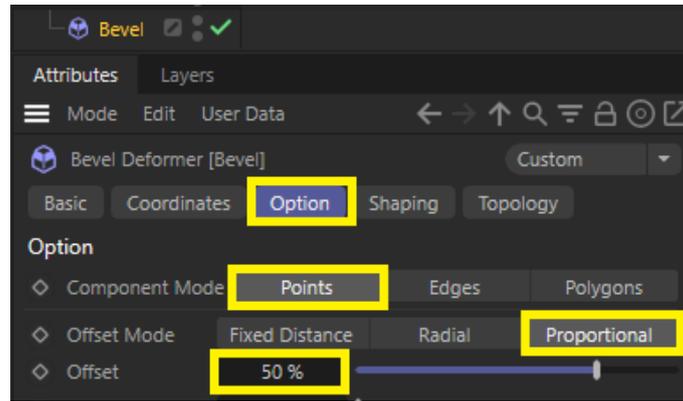


Figura A.24: Configuração do *Bevel Deformer* no Menu de Atributos.



Figura A.25: Icosidodecaedro de aresta $b = 40 \text{ cm}$.

A.1.5 Modelagem de um Icosaedro Truncado por Truncamento do Icosaedro de Aresta $a = 90 \text{ cm}$

O Icosaedro Truncado é um sólido de Arquimedes que possui 32 faces regulares, sendo 12 pentágonos e 20 hexágonos. Este sólido é obtido através da truncatura sobre o Icosaedro, que é um sólido de Arquimedes com 20 faces triangulares regulares. Para sua construção, são removidas as pirâmides de bases pentagonais regulares relativas aos vértices do icosaedro de aresta a , de modo que as arestas dessa base, de aresta b , também formem hexágonos regulares do icosaedro Truncado. Esse processo está ilustrado na Figura A.26, que apresenta o truncamento de um icosaedro de aresta $a = 90 \text{ cm}$:

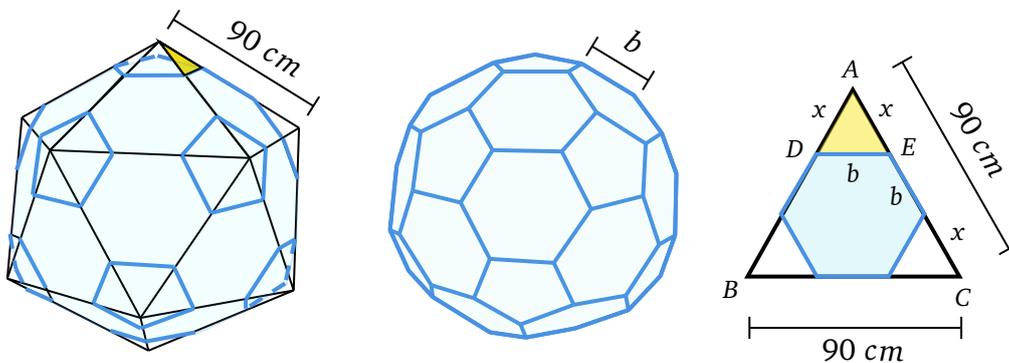


Figura A.26: truncamento de um icosaedro de aresta $a = 90 \text{ cm}$.

Para a obtenção de um icosaedro Truncado a partir do icosaedro regular de aresta $a = 90\text{ cm}$, considere a sequência de atividades.

Atividade: Estudo do Processo de Modelagem do Icosaedro Truncado

1. **Considerando que queremos obter o icosaedro truncado a partir de um icosaedro de aresta $a = 90\text{ cm}$, determine:**

- A medida x no triângulo ADE destacados na Figura A.26;
- Obter a medida b da aresta do icosaedro truncado.

2. **Vamos agora, modelar o icosaedro truncado com o apoio da ferramenta Cinema 4D. Com o auxílio do professor, siga os passos.**

- No Cinema 4D, o dimensionamento do sólido platônico criado é dado em função do raio r da esfera circunscrita ao mesmo. Determine r utilizando a calculadora, sabendo que, para icosaedro de aresta a , $r = \frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, isto é: $r \approx 0.9511a$;
- No Cinema 4D, na paleta de objetos, clique e segure com o mouse no ícone  para visualizar a Paleta de Objetos 3D da Figura A.27:

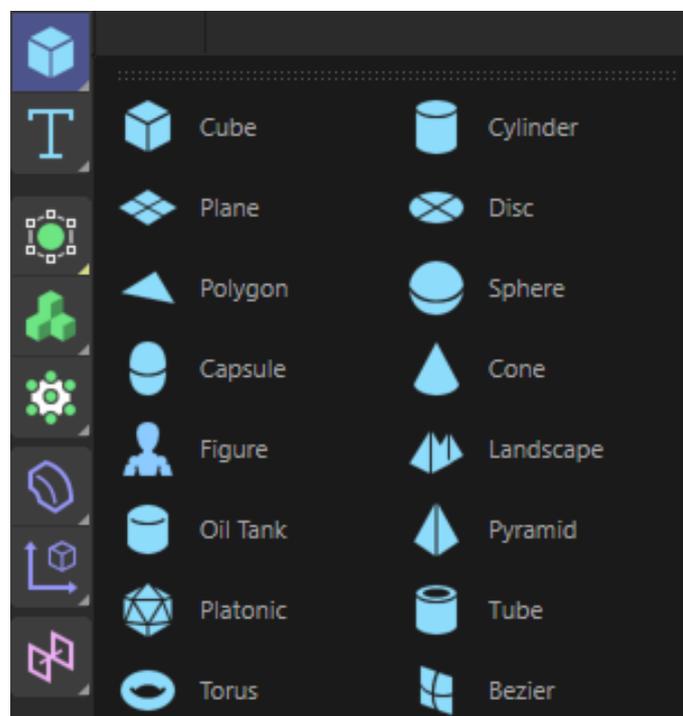


Figura A.27: Paleta de Objetos 3D.

- c) Clique no ícone  para criar o icosaedro. Em *Attributes Menu* (Menu de Atributos) que aparecerá, conforme Figura A.28, selecione *Icosa* em *Type* (Tipo) e, em *Radius* (raio), inclua o valor encontrado no *item (a)* deste Exercício.

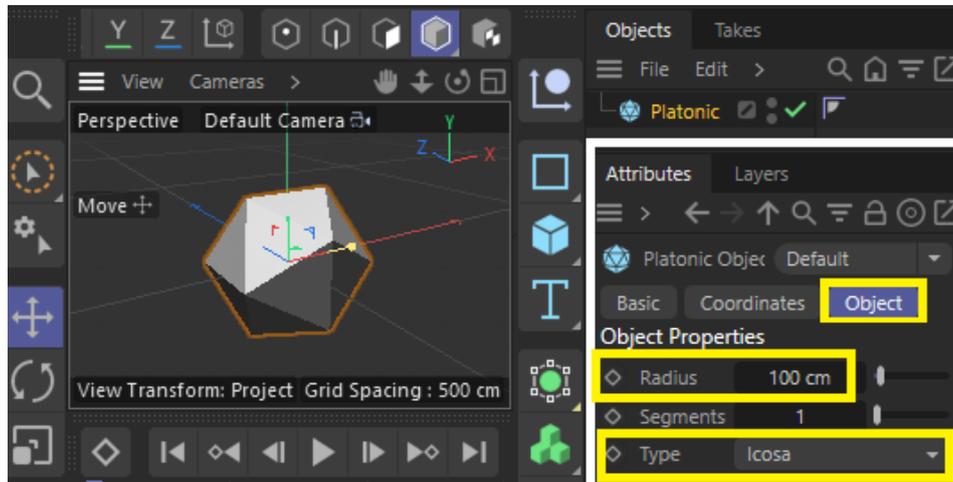


Figura A.28: Criando o tetraedro no Cinema 4D.

- d) Na Paleta de Objetos, clique e segure no ícone  para exibir algumas opções de modelagem. Clique no ícone  (*Bevel*) desta paleta. No Menu *Object Manager* (Gerenciador de Objetos), conforme a Figura A.29, arraste o objeto *Bevel* para dentro do *Platonic* (icosaedro), obtendo a sequência observada na Figura abaixo:



Figura A.29: Aplicação do *Bevel Deformer* ao tetraedro.

- e) Renomeie o objeto criado como **Icosaedro Truncado**: com clique duplo em *Platonic*, no Menu *Object Manager* (Gerenciador de Objetos), aparecerá a opção de alterar o nome do sólido.
- f) No Menu *Object Manager* selecione o *Bevel*. No Menu de Atributos, selecione, como na Figura A.30, as opções *Points* (em *Component Mode*) e *Fixed Distance* (em *Offset Mode*) e, em *Offset*, digite o valor de x obtido no Exercício 1 desta lista.
- g) Com o auxílio do professor, verifique se o objeto encontrado é de fato o icosaedro (regular). Este será como na Figura A.31:

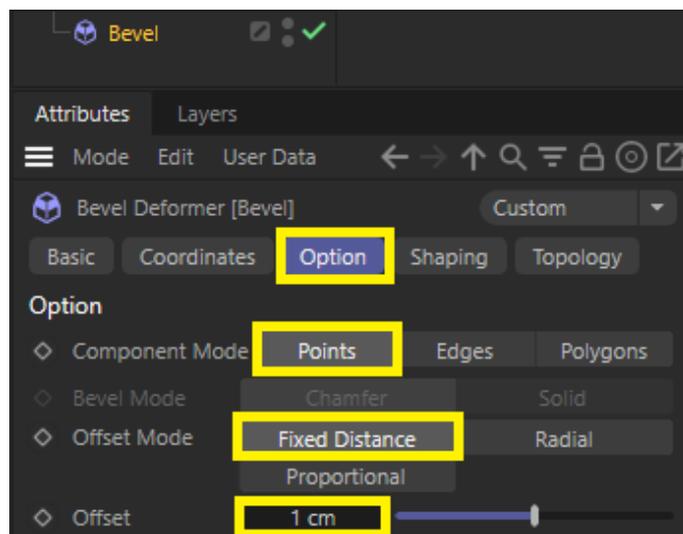


Figura A.30: Configuração do *Bevel Deformer* no Menu de Atributos.



Figura A.31: Icosaedro truncado de aresta b .

A.2 Atividade 2: Verificação da Relação de Euler

Nesta seção, será apresentada a proposta de **Atividade 2**, que consiste na utilização do processo de modelagem realizado na **Atividade 1** para a verificação da Relação de Euler, nos cinco Poliedros de Arquimedes criados.

Atividade: Verificação da Relação de Euler nos Sólidos de Arquimedes Criados

A relação de Euler é dada pela equação $V - A + F = 2$, onde V , A e F são, respectivamente, as quantidades de vértices, arestas e faces de um Poliedro convexo. Sobre cada Sólido de Arquimedes obtido, faça o que se pede em cada item:

- a) Sobre a quantidade de vértices no processo de truncamento dos Sólidos de Platão, complete a

Tabela A.1:

Sólido de Arquimedes	Vértices Novos	Vértices Retirados	Saldo
<i>Tetraedro Truncado</i>			
<i>Cubo Truncado</i>			
<i>Cuboctaedro</i>			
<i>Icosidodecaedro</i>			
<i>Icosaedro Truncado</i>			

Tabela A.1: Saldo de vértices.

- b) Sobre a quantidade de arestas no processo de truncamento dos Sólidos de Platão, complete a

Tabela A.2

Sólido de Arquimedes	Arestas Novas	Arestas Retiradas	Saldo
<i>Tetraedro Truncado</i>			
<i>Cubo Truncado</i>			
<i>Cuboctaedro</i>			
<i>Icosidodecaedro</i>			
<i>Icosaedro Truncado</i>			

Tabela A.2: Saldo de arestas.

- c) Complete a Tabela A.3 com o número de faces novas obtidas no processo de truncamento de cada Sólido de Platão:

Sólido de Arquimedes	Faces Novas
<i>Tetraedro Truncado</i>	
<i>Cubo Truncado</i>	
<i>Cuboctaedro</i>	
<i>Icosidodecaedro</i>	
<i>Icosaedro Truncado</i>	

Tabela A.3: Faces novas dos Sólidos de Arquimedes.

d) Determine as quantidades de vértices, arestas e faces dos Sólidos de Arquimedes obtidos e verifique a relação de Euler, completando a Tabela A.4:

Sólido de Platão	V	A	F	Sólido de Arquimedes	V	A	F	$V - A + F$
<i>Tetraedro</i>	4	6	4	<i>Tetraedro Truncado</i>				
<i>Hexaedro</i>	8	12	6	<i>Cubo Truncado</i>				
<i>Octaedro</i>	6	12	8	<i>Cuboctaedro</i>				
<i>Dodecaedro</i>	20	30	12	<i>Icosidodecaedro</i>				
<i>Icosaedro</i>	12	30	20	<i>Icosaedro Truncado</i>				

Tabela A.4: Relação de Euler nos Sólidos de Arquimedes.

Questionário Sobre Atividades de Modelagem de Poliedros de Arquimedes

Instruções: Por favor, responda às perguntas abaixo indicando o seu grau de satisfação ou percepção em relação às atividades propostas.

B.1 Atividade 1 - Contextualização e Modelagem com Cinema 4D

a) Contextualização e Modelagem: Como você avalia a contextualização realizada sobre os Sólidos de Arquimedes e as operações sobre os Sólidos de Platão que os originam?

- Bom
- Satisfatório
- Regular
- Insatisfatório

b) Sequência de Atividades: Como você avalia a sequência de atividades para determinar as condições métricas iniciais para as modelagens propostas?

- Excelente
- Bom

- Satisfatório
- Regular
- Insatisfatório

c) Uso do Software Cinema 4D: Qual é a sua opinião sobre o uso do software Cinema 4D para a modelagem do poliedro discutido na atividade?

- Excelente
- Bom
- Satisfatório
- Regular
- Insatisfatório

B.2 Atividade 2 - Verificação da Relação de Euler

a) Percepção da Relação de Euler: Após o truncamento, como foi sua percepção da Relação de Euler nos sólidos obtidos?

- Fácil de entender
- Razoavelmente claro
- Confuso
- Difícil de entender

b) Experiência Observando as Transformações: Descreva sua experiência ao observar as transformações nas faces, vértices e arestas dos Poliedros de Platão ao se tornarem Poliedros de Arquimedes durante os processos de truncamento.

B.3 Avaliação Geral

a) Interatividade com as Atividades: No geral, como você avalia a sua interação com as atividades propostas?

- Muito satisfatória
- Satisfatória
- Neutra
- Insatisfatória
- Muito insatisfatória

B.4 Comentários Adicionais

Compartilhe quaisquer comentários, sugestões ou críticas que você tenha sobre as atividades propostas ou sobre a sua experiência geral sobre as atividades propostas.

B.5 Depoimento

Compartilhe qualquer pensamento adicional ou experiência pessoal que você deseje fornecer sobre a sua interação com as práticas propostas.

Referências Bibliográficas

- [1] ASSIS, André Koch Torres. **Arquimedes, o centro de gravidade e a lei da alavanca**. 1ª ed. Vol. 1. Apeiron Montreal, 2008 (citado nas páginas 5, 6).
- [2] EVES, Howard Whitley et al. **Introdução à história da matemática**. Unicamp Campinas, 2004 (citado nas páginas 3, 4).
- [3] HARTL, Urs e KWICKERT, Klaudia. “**Constructing the Cubus simus and the Dodecaedron simum via paper folding**”. Em: **Geometriae Dedicata** 166 (2013), pp. 1–14. URL: <https://doi.org/10.1007/s10711-012-9781-6> (citado na página 68).
- [4] LOPES, Rodolfo et al. **Timeu-Crítias**. Imprensa da Universidade de Coimbra/Coimbra University Press, 2013 (citado na página 4).
- [5] MAXON. **Maxon: Filmmaking, Motion Design, Animation, VFX, and Editing Software**. URL: <https://www.maxon.net/> (acesso em 03/03/2024) (citado nas páginas 1, 10).
- [6] MELO, Helena Sousa. “**Os 13 sólidos Arquimedianos**”. Em: **Correio dos Açores** (2014), pp. 13–13 (citado na página 6).