

Naftaly Cristal Félix

# **Matemática e Astronomia: Construção de uma Disciplina Eletiva para Educação Básica**

Vitória

2024

Naftaly Cristal Félix

# **Matemática e Astronomia: Construção de uma Disciplina Eletiva para Educação Básica**

Dissertação de mestrado apresentada ao  
PROFMAT como parte dos requisitos exi-  
gidos para a obtenção do título de Mestre em  
Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



**PROFMAT**

Orientador: Prof. Dr<sup>a</sup>. Rosa Elvira Quispe Ccoyllo

Vitória

2024

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

F316m Félix, Naftaly Cristal, 1978-  
Matemática e Astronomia: Construção de uma Disciplina Eletiva para Educação Básica / Naftaly Cristal Félix. - 2024. 132 f. : il.

Orientadora: Rosa Elvira Quispe Ccoyllo.  
Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. astronomia. 2. matemática. 3. eletiva. 4. interdisciplinaridade. I. Ccoyllo, Rosa Elvira Quispe. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

---



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO**

**Centro de Ciências Exatas**

**Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT**

**“Matemática e Astronomia: Construção de uma Disciplina  
Eletiva para Educação Básica”**

**Naftaly Cristal Félix**

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 26/03/2024 por:

---

Prof.(a) Dr.(a) Rosa Elvira Quispe Ccoyllo  
Orientador(a) – UFES

---

Prof.(a) Dr.(a) Fábio Júlio da Silva Valentim  
Membro interno – UFES

---

Prof.(a) Dr.(a) Guido Gerson Espiritu Ledesma  
Membro Externo – UERJ





## Folha de Assinaturas Naftaly Cristal Félix

Data e Hora de Criação: 18/03/2024 às 07:30:41

### Documentos que originaram esse envelope:

- Folha de Assinaturas Naftaly Cristal Félix.docx (Documento Microsoft Word) - 1 página(s)



### Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: e5c37f16e52f6e9030ddbbaa5fad7eadc3f23def919439cbefbb61d59630e1e1

[SHA512]: 1a70bd24b88625705b70de8394b1c7ce8cdef4c200cfdc0600a75a52bf27fc5e1773a503f704bc92b31f9bb493cfaf6805ea1b4ea1a864e4f96ce79f39de42b

### Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope



#### ASSINADO - Fabio Julio da Silva Valentim (fabio.valentim@ufes.br)

Data/Hora: 26/03/2024 - 19:43:17, IP: 138.99.35.98, Geolocalização: [-20.368588, -40.298086]

[SHA256]: 74a513200791fe914acfd101fb755fc4f3a6f6da25666f2f2ae1ffcd266d610e



#### ASSINADO - Guido Gerson Espiritu Ledesma (guido.ledesma@ime.uerj.br)

Data/Hora: 26/03/2024 - 21:56:43, IP: 189.60.228.130, Geolocalização: [-22.913633, -43.242396]

[SHA256]: 24682c713dd7a67caed32117b80c4ba72c29101b6e21b1cd48f815912d104722



#### ASSINADO - Rosa Elvira Quispe Ccoyllo (rosa.ccoyllo@ufes.br)

Data/Hora: 26/03/2024 - 18:57:14, IP: 200.137.65.108

[SHA256]: 93f0f8650720f8172dc0b1acebca7a6fa950bfee7e0b2c4f4e586e43430a86e8

### Histórico de eventos registrados neste envelope

26/03/2024 21:56:43 - Envelope finalizado por guido.ledesma@ime.uerj.br, IP 189.60.228.130

26/03/2024 21:56:43 - Assinatura realizada por guido.ledesma@ime.uerj.br, IP 189.60.228.130

26/03/2024 21:56:37 - Envelope visualizado por guido.ledesma@ime.uerj.br, IP 189.60.228.130

26/03/2024 19:43:17 - Assinatura realizada por fabio.valentim@ufes.br, IP 138.99.35.98

26/03/2024 19:43:11 - Envelope visualizado por fabio.valentim@ufes.br, IP 138.99.35.98

26/03/2024 18:57:14 - Assinatura realizada por rosa.ccoyllo@ufes.br, IP 200.137.65.108

26/03/2024 18:57:03 - Envelope visualizado por rosa.ccoyllo@ufes.br, IP 200.137.65.108

26/03/2024 09:00:59 - Envelope registrado na Blockchain por notificacao@astenassinatura.com.br

26/03/2024 09:00:58 - Envelope encaminhado para assinaturas por notificacao@astenassinatura.com.br

18/03/2024 07:30:45 - Envelope criado por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.109

*Dedico esse trabalho a todos aqueles que dão o seu melhor na arte divina de ensinar.*

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pela existência, capacidade de raciocínio e todas as outras dádivas necessárias para que eu chegasse até este momento. Agradeço ainda à minha família pelo apoio e compreensão durante o período deste mestrado. Sou muito grato também aos meus colegas do PROFMAT, que tornaram essa jornada mais fácil e agradável, sempre dispostos a ajudar e compartilhar saberes, formando, sem sombra de dúvida, a melhor turma e a mais unida em que já estudei. Agradeço aos professores pelo ensino e pela paciência ao me ajudar em minhas dificuldades. Finalmente, agradeço a todos os que, sabendo ou não, contribuíram para esse trecho da minha jornada.

*“Ergam os olhos para o céu e vejam. Quem criou estas coisas? Foi Aquele que as faz sair  
como um exército, por número. Ele chama a todas elas por nome...”*  
*(Isaias 40:26)*

# Resumo

Um dos maiores desafios do professor de matemática, é responder para seus alunos onde está a aplicabilidade do que lhes é ensinado. A falta de interesse nas aulas de matemática está associada à ideia de que aquilo que se ensina não é útil para a vida. O caminho mais eficaz para superar esse obstáculo é a interdisciplinaridade. Ter a habilidade de enxergar matemática em outras áreas do conhecimento pode satisfazer o anseio do aprendiz no processo de construção de significado daquilo que ele aprende. Além disso, por meio de um ensino interdisciplinar, conseguimos estimular sua curiosidade e espírito investigativo. Mas o que poderia ajudar o professor de matemática nessa missão? As disciplinas Eletivas são uma ferramenta poderosa para se desenvolver interdisciplinaridade no ensino de matemática. Com elas o professor de matemática pode transladar seus estudantes para outra área do conhecimento e mostrar que a matemática está em toda parte. E por que Matemática e Astronomia? A observação dos astros sempre fascinou a humanidade ao longo da história. Este mesmo encantamento é evidente quando a mídia de modo geral, traz esse tema à tona. Matemática e Astronomia possuem diversos elementos interdisciplinares, tais como solstícios e equinócios, a lua e suas fases, a trajetória dos planetas de suas órbitas, as constelações e a dinâmica dos corpos celestes, a exploração espacial ao infinito e além. Neste trabalho, o professor encontrará elementos que contribuirão para a construção de uma disciplina Eletiva interdisciplinar envolvendo Matemática e Astronomia, capaz de tornar mais prazerosa a jornada para o conhecimento destas ciências.

**Palavras-chave:** astronomia, matemática, eletiva, interdisciplinaridade.

# Abstract

One of the biggest challenges for mathematics teachers is to respond to their students about the applicability of what they are taught. The lack of interest in mathematics classes is associated with the idea that what is taught is not useful for life. The most effective way to overcome this obstacle is interdisciplinarity. Having the ability to see mathematics in other areas of knowledge can satisfy the learner's desire in the process of constructing meaning in what he learns. Furthermore, through interdisciplinary teaching, we were able to stimulate their curiosity and investigative spirit. But what could help the mathematics teacher in this mission? Elective subjects are a powerful tool for developing interdisciplinarity in mathematics teaching. With them, mathematics teachers can transfer their students to another area of knowledge and show that mathematics is everywhere. And why Mathematics and Astronomy? Observing the stars has always fascinated humanity throughout history. This same enchantment is evident when the media in general brings this topic to light. Mathematics and Astronomy have several interdisciplinary elements, such as solstices and equinoxes, the moon and its phases, the trajectory of the planets in their orbits, the constellations and the dynamics of celestial bodies, space exploration to infinity and beyond. In this work, the teacher will find elements that will contribute to the construction of an interdisciplinary Elective course involving Mathematics and Astronomy, capable of making the journey towards knowledge of these sciences more enjoyable.

**Keywords:** astronomy, mathematics, elective, interdisciplinarity.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Sirius em Cão Maior . . . . .	20
Figura 2 – Calendário Egípcio comparado ao nosso calendário civil . . . . .	21
Figura 3 – As 36 estrelas decanais do ano . . . . .	22
Figura 4 – Relógio do sol Egípcio . . . . .	23
Figura 5 – Merkheth do sacerdote Bes, Observador das Horas no Templo de Horus em Edfu, Alto Egito . . . . .	23
Figura 6 – Karnak Clepsidra, a mais antiga já registrada . . . . .	24
Figura 7 – Calendário Hebraico com os meses e as estações . . . . .	26
Figura 8 – O deslocamento de Júpiter . . . . .	28
Figura 9 – Tamanho do sol Terra e Lua segundo Aristarco. . . . .	29
Figura 10 – Imagem da tradução latina de George Trebizond (ca. 1451) de Almagest. . . . .	31
Figura 11 – Página 24 do Códice de Dresden (edição Förstermann de 1880) . . . . .	32
Figura 12 – Pirâmide de Kukulcan . . . . .	33
Figura 13 – Datas do Ramadã entre 2022 e 2030 . . . . .	34
Figura 14 – Antigas Civilizações e suas descobertas astronômicas. A data se refere ao apogeu de cada cultura referente às descobertas astronômicas . . . . .	37
Figura 15 – Definição de Limite . . . . .	47
Figura 16 – área sob a curva . . . . .	50
Figura 17 – Soma de Riemann . . . . .	51
Figura 18 – Soma de Riemann . . . . .	52
Figura 19 – Subintervalos = 10 . . . . .	53
Figura 20 – Subintervalos = 20 . . . . .	53
Figura 21 – Subintervalos = 30 . . . . .	54
Figura 22 – Subintervalos = 50 . . . . .	54
Figura 23 – Subintervalos = 100 . . . . .	54
Figura 24 – Subintervalos = 1000 . . . . .	54
Figura 25 – Cônicas Degeneradas . . . . .	55
Figura 26 – Cônicas Não Degeneradas . . . . .	55
Figura 27 – Elipse e seus elementos . . . . .	56
Figura 28 – Elipse com focos no eixo $y$ . . . . .	57
Figura 29 – Eixo em $y$ . . . . .	58
Figura 30 – Eixo em $x$ . . . . .	59
Figura 31 – Tangente em $(x_0, y_0)$ . . . . .	60
Figura 32 – Retas paralelas ao eixo $y$ . . . . .	60
Figura 33 – reflexão da parábola . . . . .	61
Figura 34 – Elementos da Hipérbole . . . . .	62

Figura 35 – Assíntotas com focos no eixo $x$ . . . . .	63
Figura 36 – Assíntotas com focos no eixo $y$ . . . . .	64
Figura 37 – Propriedade reflexiva da hipérbole . . . . .	64
Figura 38 – Trigonometria . . . . .	65
Figura 39 – Ciclo Trigonométrico . . . . .	66
Figura 40 – Lei dos Cossenos - Triângulo Acutângulo . . . . .	67
Figura 41 – Lei dos cossenos - Triângulo Obtusângulo . . . . .	67
Figura 42 – Lei dos Senos . . . . .	68
Figura 43 – Esfera . . . . .	69
Figura 44 – Superfície Esférica . . . . .	70
Figura 45 – Elementos da Esfera . . . . .	70
Figura 46 – Ângulo Esférico . . . . .	71
Figura 47 – Geodésica . . . . .	71
Figura 48 – Fuso Esférico . . . . .	72
Figura 49 – Triângulo Esférico . . . . .	72
Figura 50 – Triângulo Esférico . . . . .	73
Figura 51 – Triângulo Esférico . . . . .	74
Figura 52 – Triângulo Esférico . . . . .	75
Figura 53 – Inserir função . . . . .	84
Figura 54 – Algoritmo de Zeller . . . . .	85
Figura 55 – Soma de Riemann . . . . .	86
Figura 56 – Regra dos Trapézios . . . . .	87
Figura 57 – $f(x) = (0, 5)x^2$ com 5 partições . . . . .	88
Figura 58 – Trajetória elíptica dos planetas . . . . .	90
Figura 59 – Bagunça no espaço . . . . .	91
Figura 60 – Localizando o Norte . . . . .	92
Figura 61 – Triângulo Isóceles . . . . .	93
Figura 62 – Latitude e Longitude . . . . .	94
Figura 63 – Os 24 Satélites nos 6 planos orbitais . . . . .	95
Figura 64 – Coordenadas Esféricas . . . . .	97
Figura 65 – Relógio do Sol . . . . .	98
Figura 66 – Foto da lua com forte aberração cromática . . . . .	100
Figura 67 – Telescópio refletor . . . . .	100
Figura 68 – Elementos da Hipérbole para Telescópio Cassegrain . . . . .	101
Figura 69 – Observatório Palomar . . . . .	102
Figura 70 – Lasca de presa de mamute encontrada numa caverna do Vale do Ach, Danúbio, Alemanha. . . . .	103
Figura 71 – Constelação do Escorpião - Uranometria de Johann Bayer . . . . .	104
Figura 72 – Hevelius - <i>Firmamentum Sobiescianum sive Uranographia</i> 1690 . . . . .	104

Figura 73 – Horizonte, Zênite e Equador celestes . . . . .	105
Figura 74 – Círculos fundamentais da esfera celeste. . . . .	106
Figura 75 – Altura e Azimute. . . . .	108
Figura 76 – Ascensão Reta e Declinação. . . . .	109
Figura 77 – Hora Sideral em duas perspectivas diferentes . . . . .	110
Figura 78 – Triângulo de Posição . . . . .	111
Figura 79 – Interface do Sky Map . . . . .	113
Figura 80 – Interface do Stellarium . . . . .	114
Figura 81 – Estrutura da Ementa de uma Eletiva . . . . .	116
Figura 82 – Cronograma da Eletiva <i>Ao Infinito e Além</i> . . . . .	123
Figura 83 – Ementa da Eletiva . . . . .	134
Figura 84 – Ementa da Eletiva . . . . .	135
Figura 85 – Ementa da Eletiva . . . . .	136
Figura 86 – Visita ao Planetário de Vitória em 2018 . . . . .	137
Figura 87 – Visita ao Planetário de Vitória em 2018 . . . . .	137
Figura 88 – Visita ao Planetário de Vitória em 2018 . . . . .	138
Figura 89 – Visita ao Planetário de Vitória em 2018 . . . . .	138

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Aproximação de $f(x)$ por valores menores que 2 . . . . .	46
Tabela 2 – Aproximação de $f(x)$ por valores maiores que 2 . . . . .	46
Tabela 3 – Escolha de $\delta < 0,005$ . . . . .	48
Tabela 4 – Relação entre $f(x)$ e $f(a)$ . . . . .	49
Tabela 5 – Aproximação à esquerda e à direita . . . . .	53
Tabela 6 – Enumeração dos meses . . . . .	78
Tabela 7 – Dia da semana e sua congruência módulo 7 . . . . .	79
Tabela 8 – Incrementos dos meses e o dia da semana . . . . .	81
Tabela 9 – Distância de 5 planetas ao Sol . . . . .	89
Tabela 10 – Distância de 5 planetas ao Sol . . . . .	90
Tabela 11 – Marcações dos planetas . . . . .	91

# Sumário

	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>16</b>
<b>1</b>	<b>ASPECTOS HISTÓRICOS DA ASTRONOMIA</b>	<b>19</b>
1.1	Astronomia Egípcia - A Contagem do Tempo	19
1.2	Astronomia Hebraica - O Calendário Agrícola	25
1.3	Astronomia Babilônica - A Trajetória de Júpiter	27
1.4	Astronomia Grega - Ciência e Racionalismo	29
1.5	Astronomia Maia - A Pirâmide de Kukulcan	30
1.6	Astronomia Islâmica - A Casa da Sabedoria	33
1.7	Astronomia na Idade Moderna - O Renascimento	35
<b>2</b>	<b>TÓPICOS DE MATEMÁTICA</b>	<b>38</b>
<b>2.1</b>	<b>Divisibilidade</b>	<b>38</b>
2.1.1	Divisibilidade	38
2.1.2	O Algoritmo da Divisão	39
<b>2.2</b>	<b>Congruência</b>	<b>42</b>
2.2.1	Propriedades das Congruências	44
<b>2.3</b>	<b>Cálculo Diferencial e Integral</b>	<b>45</b>
2.3.1	Limite	46
2.3.2	Derivada	48
2.3.3	Integral	49
<b>2.4</b>	<b>Geometria Analítica - Cônicas</b>	<b>54</b>
2.4.1	Elipse	55
2.4.2	Parábola	57
2.4.3	Hipérbole	62
<b>2.5</b>	<b>Geometria Plana - Trigonometria</b>	<b>64</b>
2.5.1	Lei dos cossenos	66
2.5.2	Lei dos Senos	68
<b>2.6</b>	<b>Geometria Esférica</b>	<b>69</b>
2.6.1	Trigonometria Esférica	73
<b>3</b>	<b>MATEMÁTICA E ASTRONOMIA</b>	<b>76</b>
<b>3.1</b>	<b>Datas do Calendário e o Algoritmo de Zeller</b>	<b>76</b>
<b>3.2</b>	<b>A Trajetória de Júpiter e o Cálculo Integral</b>	<b>85</b>
3.2.1	A Regra dos Trapézios	86
3.2.2	A Regra dos Trapézios Composta	87

<b>3.3</b>	<b>O Relógio do Sol – Geometria Plana e Analítica</b> . . . . .	<b>91</b>
3.3.1	Definindo o Norte, Latitude e Longitude . . . . .	92
3.3.2	A matemática do GPS . . . . .	94
3.3.3	Trigonometria no Relógio do Sol . . . . .	98
<b>3.4</b>	<b>As Cônicas e os Instrumentos Ópticos</b> . . . . .	<b>99</b>
<b>3.5</b>	<b>Mapeando o Céu</b> . . . . .	<b>102</b>
3.5.1	Aspectos Históricos . . . . .	102
3.5.2	A Esfera Celeste . . . . .	105
3.5.3	Sistema de Coordenadas Astronômicas . . . . .	107
3.5.3.1	Sistema Horizontal . . . . .	107
3.5.3.2	Sistema Equatorial Celeste . . . . .	108
3.5.3.3	Sistema Equatorial Local . . . . .	109
3.5.4	Triângulo de Posição . . . . .	110
3.5.5	Aplicativos e Softwares que mapeiam o céu . . . . .	112
<b>4</b>	<b>PROPOSTA DE DISCIPLINA ELETIVA - AO INFINITO E ALÉM!</b>	<b>115</b>
4.1	O que são Disciplinas Eletivas . . . . .	115
4.2	Ementa da Eletiva <i>Ao Infinito e Além</i> . . . . .	117
4.3	Programação da Eletiva <i>Ao Infinito e Além</i> . . . . .	118
4.4	Relatório das Atividades da Eletiva . . . . .	124
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>126</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>128</b>
	<b>APÊNDICE A – EMENTA DA ELETIVA</b> . . . . .	<b>134</b>
	<b>APÊNDICE B – VISITA AO PLANETÁRIO DE VITÓRIA</b> . . . . .	<b>137</b>

# Introdução

Disciplinas Eletivas na educação básica fazem parte do currículo do Novo Ensino Médio. Segundo a Lei nº 13.415/2017 que alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional ([BRASIL, 2017](#)), o currículo do estudante contará com disciplinas obrigatórias tais como Português, Matemática, Inglês; e Itinerários Formativos que apresentarão Aprofundamento Curricular, Educação Profissional e Tecnológica e disciplinas Eletivas.

Disciplinas eletivas não são exatamente metodologia de projetos, embora existam muitas semelhanças. Na metodologia da projetos o objetivo é estabelecer um padrão a ser seguido, para que se saiba como e quando as etapas devem ser cumpridas e o porquê de cada uma ser realizada. Ao final chega-se ao produto final do projeto. O trabalho com a Metodologia de Projetos é baseado na problematização ([OLIVEIRA, 2006](#)).

Em uma disciplina eletiva, porém, a atuação do estudante não precisa necessariamente estar ligada a uma problematização, mas o aspecto da curiosidade pode ser perseguido livremente pela temática escolhida. O aluno deve ser envolvido em uma temática mais abrangente, onde desenvolverá habilidades importantes, tornando-se sujeito de seu próprio conhecimento. Assim, o professor deixa de ser o único responsável pela aprendizagem do aluno e torna-se um pesquisador, o orientador do interesse de seus alunos. Ele precisa construir uma proposta temática de caráter interdisciplinar, geralmente em um semestre ou um trimestre, que vise o fortalecimento da aprendizagem dos estudantes. Na realidade, o professor de matemática tem uma problematização à sua frente: identificar as principais fragilidades dos estudantes na aprendizagem de sua disciplina e incentivar a superação delas.

As disciplinas Eletivas fortalecem a interdisciplinaridade no processo de ensino e aprendizagem. Com isso, temos a criação de sentido para os conteúdos matemáticos e a ampliação do repertório de conhecimentos do estudante. Ao planejar sua aula, o professor é desafiado a buscar formas criativas e estimulantes para desenvolver novas estruturas conceituais. A metodologia deve ter como foco gerar questionamentos, dúvidas e certezas temporárias, criar a necessidade nos estudantes pela busca de respostas, sendo ele o próprio empreendedor dessa busca. ([ICE, 2015](#)).

A relação da matemática com a astronomia é indissociável. Começando pela história antiga, quando os egípcios buscavam nos céus as explicações de fenômenos celestes, em meio a um panteão de deuses e deusas. O fruto destas observações contribuiu com a construção de um calendário, muito útil na agricultura. Tempos mais tarde, e com mais sofisticação matemática, os babilônios mapearam os céus geometricamente, procurando compreender os fenômenos astronômicos. Com a racionalidade grega foram extirpados da

astronomia a explicação mitológica. A trajetória e as órbitas planetárias foram encontradas por meio de muita observação e análise, sendo depois comprovadas matematicamente. Na atualidade ainda vemos a matemática e a astronomia andando de mãos dadas. Muito do progresso científico que nos beneficia, como por exemplo, o Sistema de Posicionamento Global - GPS, é fruto da aplicação matemática no processo de triangulação e sincronismo dos satélites. Sem isso, é impossível determinar quando e onde vai parar um foguete que tem o objetivo de chegar até outro planeta, ou mesmo se um satélite orbitará a Terra.

O objetivo principal deste trabalho, é proporcionar ao professor da educação básica, suporte necessário para que ele se sinta seguro ao construir uma disciplina Eletiva, tendo por tema Astronomia e Matemática. Foi feita uma releitura de outros trabalhos em astronomia, junto com ampla consulta a muitas referências em dissertações publicadas no acervo do Profmat (Programa de Mestrado Profissional em Matemática). Os conceitos em Astronomia que são apresentados, podem garantir ao professor conhecimento suficiente na composição da eletiva. De uma maneira secundária o professor conseguirá:

- Conhecer os aspectos históricos e conceituais da Astronomia.
- Aprofundar seu conhecimento de tópicos matemáticos relacionados com a Astronomia.
- Estruturar sua disciplina eletiva baseada na temática Astronomia e Matemática.

Para cumprir esses objetivos, as quatro seções que seguem abordarão os seguintes assuntos:

Na primeira seção será exposto um breve relato histórico da Astronomia, mostrando algumas das principais civilizações que contribuíram para o avanço e desenvolvimento desta ciência.

Na segunda, se fará uma abordagem de conceitos matemáticos que nortearão o desenvolvimento da eletiva em astronomia.

Na terceira seção, mostraremos a Matemática na Astronomia. Neste momento faremos um estudo do calendário e sua relação com a matemática dos restos (Congruência), a construção do relógio do sol e a trigonometria, da trajetória do planeta Júpiter e a Integração Numérica, dos instrumentos ópticos de observação e a propriedade reflexiva de parábolas e hipérbolas. Neste ínterim, falaremos sobre o mapeamento do céu noturno e sua relação com a geometria esférica. Faremos uma explanação sobre a utilização do *software Stellarium* e o aplicativo *Sky Map* como ferramentas digitais de ensino.

Na quarta seção consideraremos uma proposta para a construção de uma disciplina Eletiva. Para nortear esta demanda, temos a ementa da Eletiva em Astronomia, um cronograma de atividades, além de um breve relato de uma experiência aplicada na Educação Básica.

Por fim, apresentamos as considerações finais sobre todo trabalho realizado, mostrando que uma disciplina eletiva entre astronomia e matemática é muito eficaz como estratégia de ensino.

# 1 Aspectos históricos da Astronomia

As civilizações antigas observavam os fenômenos celestes com objetivos bem práticos, a saber, a construção de um calendário, a previsão das estações para a agricultura, o registro da passagem das horas e posteriormente para se orientar geograficamente (FILHO, 2014). Inicialmente, as explicações para os fenômenos celestes e astronômicos ficavam por conta das divindades. Entretanto, em tempos posteriores, a matemática foi assumindo um papel crucial no entendimento de tais fenômenos. Nesta seção destacaremos algumas das principais civilizações da antiguidade que contribuíram fortemente para o desenvolvimento da astronomia. Abordaremos a civilização egípcia, hebraica, maia, babilônica, grega, islâmica e a Europa no período do renascimento.

## 1.1 Astronomia Egípcia - A Contagem do Tempo

As observações astronômicas proporcionaram para a civilização egípcia um referencial temporal para marcar o início e o fim de cada ano. Existia uma associação entre o início do período de cheias do Rio Nilo e o surgimento da estrela Sírius na constelação de Cão Maior (veja a Figura 1). Este evento era muito importante para a agricultura egípcia pois essa era sua principal atividade econômica. Um calendário muito peculiar construído a partir destas observações foi o Calendário Estelar. Sobre a constelação de Cão Maior podemos afirmar que:

A constelação surgiu aproximadamente em 21 de junho e foi chamada de “a ascensão da deusa Sothis”. A estrela era visível pouco antes do nascer do sol e ainda é uma das estrelas mais brilhantes do céu, localizada no canto inferior esquerdo de Orion e assumindo a forma do nariz de um cachorro na constelação do Cão Maior.(KINGTUT, 2023)

Visto que o Egito se localiza no hemisfério norte, tinha-se a posição ideal para observar a estrela Polaris ou Estrela Polar. Diferente de outras estrelas que parecem ‘navegar’ pelo céu, Polaris se mantém quase que invariavelmente fixa. Sírius é uma dessas estrelas circumpolares que se ‘punha’, ou seja, passava por um período de invisibilidade de cerca de 70 dias.

A primeira vez que uma estrela reapareceu, após seu período de invisibilidade, foi muito importante para os antigos egípcios e para todos os povos antigos. Este primeiro nascer de uma estrela no céu do amanhecer no leste, pouco antes do nascer do sol, é chamado de nascer helíaco. Para os egípcios representava o fim do tempo que a estrela passou no submundo.(KINGTUT, 2023)



Figura 1 – Sirius em Cão Maior

Fonte: O Autor (2023)

Com base em suas observações astronômicas, perceberam que as cheias do rio Nilo começavam alguns dias após o nascimento helíaco de Sirius. O tempo entre duas elevações helíacas de Sírius, na latitude do Egito, é cerca de doze minutos a mais do que um ano solar. O ano solar é o tempo que o Sol, leva para retornar à mesma posição em relação aos equinócios e solstícios (PUCRS, 2023). Este período leva 365 mais  $\frac{1}{4}$  de dia.

Na prática, a classe governante egípcia precisava de um calendário simples, mas eficiente, para governar a vida cotidiana. Precisavam estar certos quanto ao início do ano, dos meses, e que cada ano tivesse o mesmo número de meses e o mesmo número de dias. Então eles introduziram um calendário civil contendo 12 meses, cada um com 30 dias, e cada mês contendo 3 semanas de 10 dias, e depois 5 dias de feriados para trazer o ano para 365 dias. Estes cinco dias de feriado marcavam o início do ano, era uma ocasião de grande banquete e celebração para os egípcios, uma espécie de feriadão nacional, muito semelhante aos dias de celebração do Carnaval na atualidade. Uma vez que estes festejos tinham caráter religioso, não era incomum que os egípcios realizassem rituais e outras comemorações, pois esses cinco feriados celebravam os aniversários de Osíris, Ísis, Hórus, Néftis e Seth, as principais deidades egípcias.

O ano civil no antigo Egito era dividido em três estações de quatro meses: Arket, época de inundações do rio Nilo; Peret, época de sementeira após a inundações; e Shemu estação da colheitas do que foi semeado (veja Figura 2) (KINGTUT, 2023).

A contagem da semana inicialmente seguia padrões de 7 ou 8 dias conforme a

**AKHET (tempo de inundação) 15 de junho a 15 de outubro**

1.....	Thoth.....	15 de junho a 15 de julho
2.....	Paophi.....	15 de julho a 15 de agosto
3.....	Athyr.....	15 de agosto a 15 de setembro
4.....	Khoyak.....	15 de setembro a 15 de outubro

**PERET (época da sementeira) 15 de outubro a 15 de fevereiro**

1.....	Tybi.....	15 de outubro a 15 de novembro
2.....	Mekhir.....	15 de novembro a 15 de dezembro
3.....	Phamenat.....	15 de dezembro a 15 de janeiro
4.....	Pharmuti.....	15 de janeiro a 15 de fevereiro

**SHEMU (a época da colheita) 15 de fevereiro a 15 de junho**

1.....	Pakhons.....	15 de fevereiro a 15 de março
2.....	Payni.....	15 de março a 15 de abril
3.....	Epiphi.....	15 de abril a 15 de maio
4.....	Mesore.....	15 de maio a 15 de junho

Figura 2 – Calendário Egípcio comparado ao nosso calendário civil

Fonte: (KINGTUT, 2023)

observação das fases da lua. Entretanto os antigos egípcios mudaram para uma forma considerada mais estável, tendo como referencial as estrelas decanais. De modo diferente das estrelas circumpolares, que se mantinham visíveis na maior parte do ano, os astrônomos egípcios perceberam que haviam estrelas que ‘nasciam’ e ‘morriam’ por um período de 10 dias. Isso ficou conhecido como *decano* e estabeleceu um novo padrão para a contagem dos dias em uma semana. Havia 36 decanos no calendário estelar egípcio o que levaria a contagem de 360 dias (10 x 36) no ano (CANHÃO, 2006).

Analisando a Figura 3, temos que a cada dez dias do movimento de translação da Terra aparece uma nova estrela. Tomemos por exemplo a estrela Sírius (Sopdet). O sacerdote egípcio na posição A, não conseguiria observá-la. Ele estaria dentro do período de invisibilidade da estrela. Estando agora na posição B2, o sacerdote não a observaria ainda (apesar de ser noite), ele precisaria esperar pouco antes do amanhecer, onde na posição B1 Sírius estaria visível. Neste momento temos o nascimento *helíaco* de Sírius, isto é, o erguer helíaco de Sírius. Em C, Sírius permanece visível toda a noite.

No momento em que a diferença entre o calendário solar e estelar era grande o suficiente para fazer com que o dia que eles previram para o início da inundação estivesse errado em mais de alguns dias, os antigos egípcios perceberam que o início da inundação dependia de um ano solar e não do nascimento helíaco da estrela Sírius. Por mais que fosse mais prático a adoção do calendário solar, visto ser mais preciso na previsão da cheia do Nilo, as fortes convicções religiosas não lhes permitiram abandonar o calendário estelar. Entretanto, este calendário civil tinha uma discrepância com o movimento de translação da Terra.

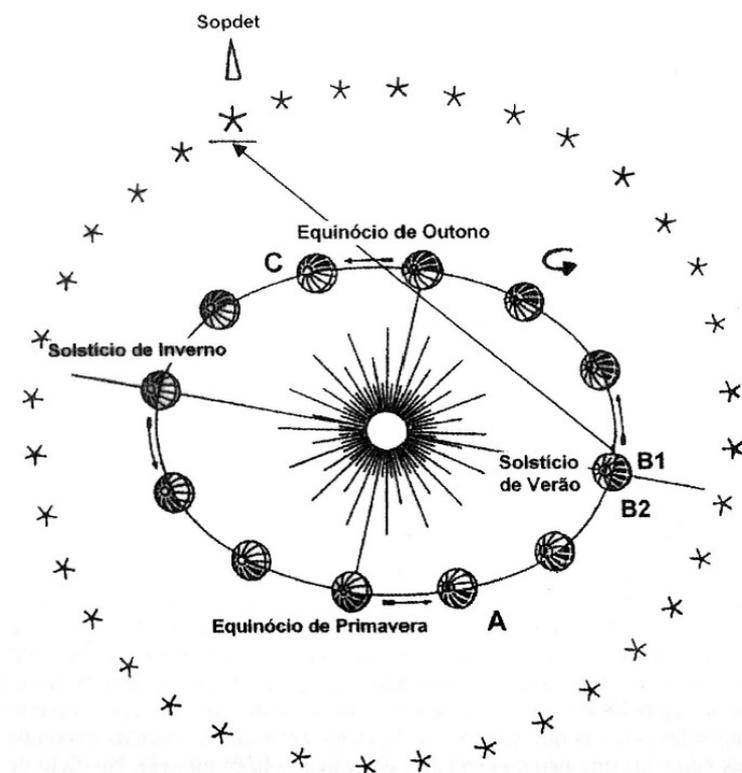


Figura 3 – As 36 estrelas decanais do ano

Fonte: (CANHÃO, 2006)

Os egípcios sabiam que este ano civil era muito curto, que faltava um quarto de dia para corresponder a uma revolução sideral completa. Também em 4236 aC ..., eles inventaram um segundo calendário astronômico fundado justamente nessa defasagem, esse atraso, de um quarto de dia por ano, no ano civil de 365 dias em relação ao sideral, ou astronômico,... O intervalo de tempo assim acumulado ao fim de quatro anos é igual a um dia. Em vez de acrescentar um dia a cada 4 anos e assim instituir um ano bissexto, os egípcios preferiram a solução magistral que consiste em seguir esse intervalo de tempo por 1.460 anos.(KINGTUT, 2023)

Assim os antigos egípcios acrescentavam 1 ano ao seu calendário após um período de 1460 anos. O longo período de espera para ajustar este cerca de 1/4 de dia levou a problemas com o sincronismo entre o calendário civil e as estações do ano. Isto significa que em algum momento, os meses de verão caíram no período de inverno. Depois de 1460 anos solares, ou quatro períodos de 365 anos, 1461 anos egípcios tinham passado. Somente uma vez a cada 1.460 anos o calendário civil coincidia com as estações.

Diferente da maioria dos povos antigos, os Egípcios iniciavam a contagem das horas do dia ao nascer do sol. Tanto as estrelas quanto a ‘passagem’ do sol pelo céu eram usados como marcadores para a contagem das horas. Para o dia, eles usavam um relógio do sol (veja a Figura 4), mas durante a noite eram usadas algumas estrelas decanais. Curiosamente foram descobertas estrelas pintadas no teto das pirâmides, supostamente

para que os faraós pudessem ver as horas.



Figura 4 – Relógio do sol Egípcio

Fonte: ([ONLINE, 2013](#))

Mesmo após o por do sol, era possível realizar a contagem das horas. Durante a noite, instrumentos de observação das estrelas associados ao registro das posições estelares contribuíram para se conhecer e mensurar o tempo.

...escribas e sacerdotes egípcios usavam o Merketet para medir o tempo à noite, através da aparência das estrelas. Para as horas de sol usavam uma régua, uma régua vertical e um fio de prumo. As marcas marcadas na base tinham nomes, cada uma delas dedicada a um deus, e indicavam as horas. ([SOCIETY, 2020](#))

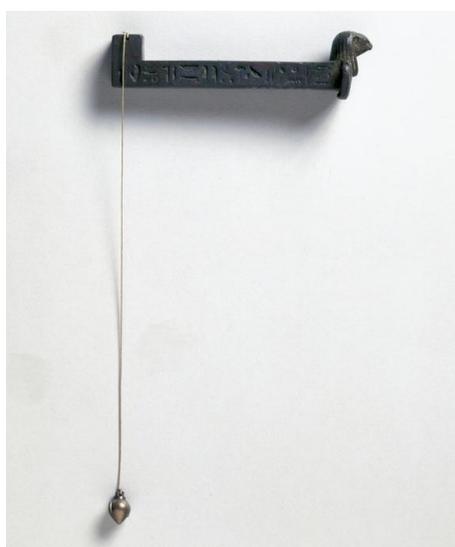


Figura 5 – Merketet do sacerdote Bes, Observador das Horas no Templo de Horus em Edfu, Alto Egito

Fonte: ([SOCIETY, 2020](#))

Cabia agora aos sacerdotes egípcios, com habilidades em astronomia, o cálculo destas horas a partir das observações. O trabalho era revisado quinzenalmente, se quisessem ter o registro das horas bem ajustado. Esta regularidade se devia à mudança no posicionamento

das estrelas, em virtude dos movimentos de rotação e translação da Terra. (CANHÃO, 2006)

Mais tarde, eles usaram relógios de água (clepsidra) para cronometrar as coisas com mais precisão do que com apenas um relógio de sol ou as estrelas. Consistia em um recipiente de cerâmica com orifícios por onde a vazão da água servia de referencial para medir a passagem das horas (veja Figura 6).

Eram recipientes de pedra, cobre ou cerâmica, de dimensões consideráveis, com uma escala horária gravada no interior, o exterior decorado com inscrições e representações de divindades horárias, e um orifício na base para escoar a água. Por causa do movimento decanal, por razões culturais, ou por ambas, os Egípcios dividiram as noites desiguais em doze partes iguais. (CANHÃO, 2006)

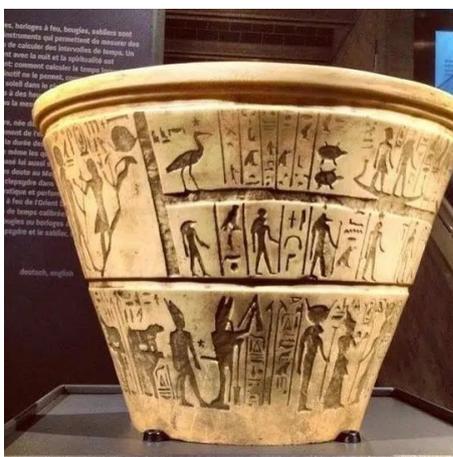


Figura 6 – Karnak Clepsidra, a mais antiga já registrada

Fonte: (IKKARO, 2021)

Os egípcios cronometravam os movimentos aparentemente regulares das estrelas no céu usando um cronômetro de intervalo igual, como um relógio de água, e isso estabeleceu a base para o sistema de cronometragem egípcio.

Outra civilização que teve notável influência no mundo ocidental, foram os Hebreus. Os Hebreus tiveram contato com a cultura egípcia por cerca de 400 anos. Mas quando saíram do Egito e entraram no território dos antigos Cananeus, precisaram se adaptar ao seu relevo montanhoso. O próximo tópico mostrará como era a contagem do tempo e de que modo a estruturação de um calendário agrícola os ajudou com a agricultura nesta nova realidade.

## 1.2 Astronomia Hebraica - O Calendário Agrícola

Um dos registros mais antigos para se compreender a cultura Hebraica, se encontra nos primeiros cinco livros da Bíblia, também conhecidos como Pentateuco, atribuído a Moisés como seu escritor. Muito antes da criação do homem, Deus forneceu a base para se medir o tempo. No livro bíblico de Gênesis, capítulo 1 e versículos 14 e 15, encontramos “luzeiros na expansão dos céus” que serviam “para épocas, e para dias, e para anos” (SAGRADA, 2015b). Isto indica que o dia solar, o ano solar e o mês lunar seriam divisões naturais do tempo, determinadas, respectivamente, pelos movimentos de translação da Terra em torno do sol, da rotação entorno de seu eixo e pelas fases da lua. Um ano de 12 meses lunares resulta ter uns 11 dias a menos do que um ano solar de 365 1/4 dias. Visto que o ano solar determina o retorno das estações, havia necessidade de se ajustar o calendário a este ano solar. Isto era feito pela adição de vários dias por ano, ou de um mês adicional durante certos anos, para compensar o que faltava aos 12 meses lunares. Este mês era chamado de Veadar ou Segundo Adar (PERSPICAZ, 2020).

A respeito da contagem das horas, vemos evidências da utilização de um relógio do sol. Encontramos uma referência disso no livro de Isaías capítulo 38 versículo 8, quando se faz menção de uma sombra, “que já tinha descido na escadaria”, voltar dez degraus (SAGRADA, 2015b). Provavelmente essa escadaria era usada para contar o tempo. O sol projetava sombras numa série de degraus, e isso era um marcador para as horas do dia. O historiador judeu, Flávio Josefo, em sua obra *Antiguidades Judaicas*, Livro X, fala desses degraus como estando “na casa”, evidentemente indicando que faziam parte duma escadaria. Talvez houvesse junto à escadaria uma coluna que recebia a luz do Sol e fazia a sombra aos poucos descer os degraus e servir de medidor do tempo (DONADO, 1997).

A antiga sociedade Hebraica era constituída basicamente de agricultores e criadores de rebanhos de ovelhas e gado. Logo era essencial manter um calendário alinhado com as estações do ano. Diferentemente dos egípcios que esperavam as cheias do rio Nilo, o relevo israelita não contava apenas com pastagens, mas em sua maioria era constituído por vales e montanhas. Os antigos habitantes daquela região, os cananeus, consideravam as chuvas como sagradas, e por isso as relacionavam com a adoração de suas deidades.

A estação chuvosa começava com as chuvas temporãs por volta de meados de outubro e continuava até o tempo das chuvas serôdias, que terminavam por volta de meados de abril. (De 11:14) Seguiam-se então cinco meses em geral sem chuvas, sendo o calor e a seca aliviados por abundante orvalho que caía à noite e que refrescava o solo e as plantas.(PERSPICAZ, 2020)

Vemos que a observação e o registro deste calendário agrícola era fundamental para a sobrevivência da cultura hebraica. Suas festividades e rituais religiosos dependiam dos produtos da terra e de sacrifícios de animais (veja Figura 7).

Entre os séculos IV e II a.C. o mundo sofreu forte influência da cultura grega, devido à expansão do império pelos macedônios. Isso ficou conhecido como helenização do mundo antigo. A cultura Hebraica não ficou de fora. Sobre esta influência grega:

Só encontramos registros sobre uma forma definitivamente fixada ou padronizada do calendário judaico no quarto século da nossa Era Comum (c. 359 EC), quando Hilel II especificou que os anos intercalares de 13 meses deviam ser o 3.º, o 6.º, o 8.º, o 11.º, o 14.º, o 17.º e o 19.º ano de cada 19 anos. Tal ciclo de 19 anos costuma ser chamado de ciclo metônico, segundo o matemático grego Méton (do quinto século AEC),

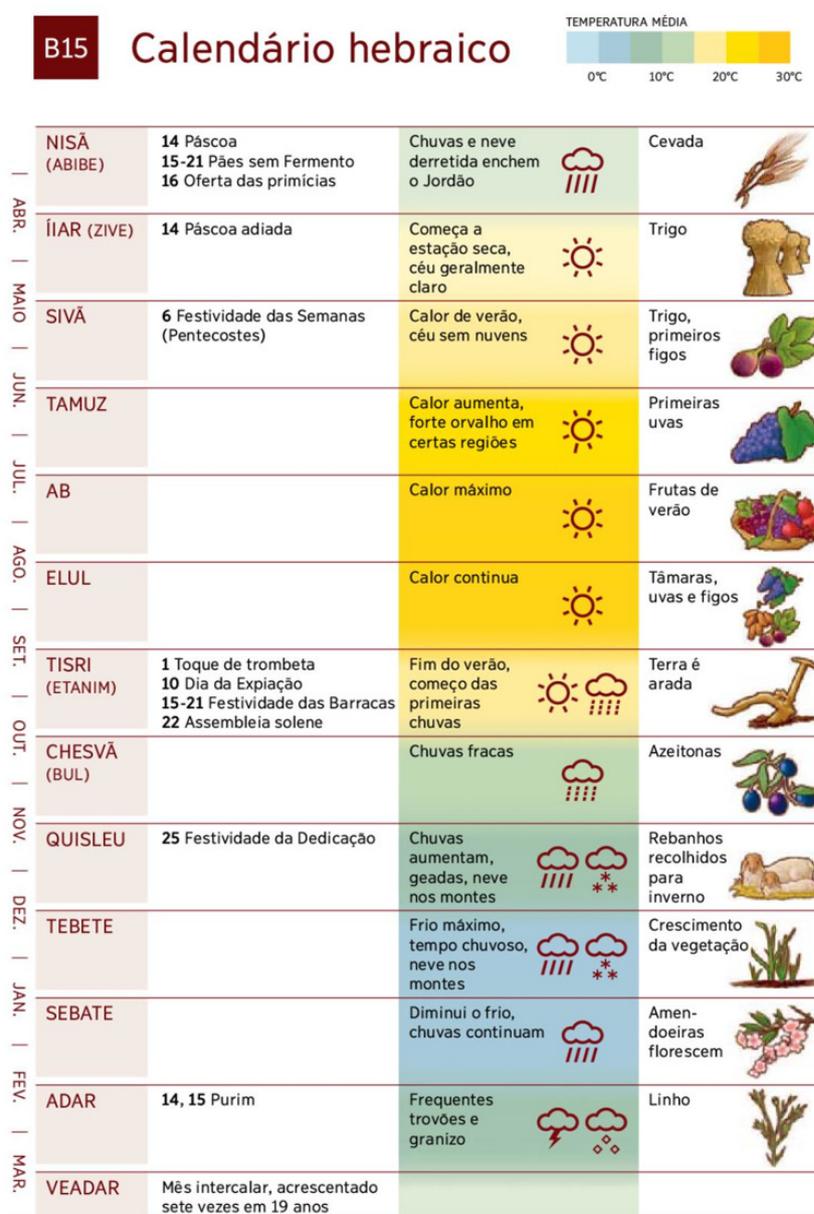


Figura 7 – Calendário Hebraico com os meses e as estações

Fonte: (SAGRADA, 2015a)

embora haja também evidência de que esse ciclo foi aperfeiçoado antes dele pelos babilônios. Este ciclo leva em conta que a cada 19 anos as luas nova e cheia caem no mesmo dia do ano solar. ([PERSPICAZ, 2020](#))

Assim, passaram a adotar em seu calendário o ciclo de Méton, que tinha um sistema de anos lunares que se repetia a cada 19 anos. Mesmo com a substituição do calendário grego pelo calendário Juliano em 46 a.C., os judeus por razões religiosas conservaram o ciclo metônico em seu calendário até os dias de hoje ([MOURÃO, 1987](#)). Com esse ajuste entre o calendário lunar e o solar, foi possível controlar as diferenças de cronometragem que poderiam afetar a chegada exata das estações do ano.

Mas os Hebreus não eram a única civilização antiga a utilizar um calendário lunar com esse auste a cada 19 anos. Após os hebreus, os babilônicos se tornariam uma potência mundial em seus dias. O próximo tópico tratará da astronomia da antiga Babilônia. Veremos como eles combinavam a astronomia e a matemática tornando suas descobertas fascinantes.

### 1.3 Astronomia Babilônica - A Trajetória de Júpiter

Os babilônios acreditavam fortemente que cada evento particular de suas vidas era influenciado pela astronomia.

Os astrônomos babilônios, que também eram sacerdotes, acreditavam que todos os acontecimentos terrestres - o clima, o preço dos grãos, o nível dos rios - estavam ligados ao movimento dos planetas e estrelas. E de todas as forças que influenciam nosso mundo, nenhuma foi tão importante como Marduk, o patrono de Babilônia - ele foi associado a Júpiter. ([GIZBRASIL, 2016](#))

As crenças, as divindades e os conhecimentos matemáticos se misturavam para os babilônios. Guiados por uma mistura de fé e ciência, conseguiram notáveis avanços na agricultura, astronomia, arquitetura e na administração do que se tornou um vasto império no 6º século a.C. . Semelhante ao calendário Hebreu, eles dividiram o ano em doze meses lunares, e com um mês adicional incluído em alguns momentos, para sincronizar as festas, associadas a datas no calendário, com as estações.

Os nomes dos meses babilônicos eram: Nisanu, Adaru, Simanu, Du'uzu, Abu, Ululu, Tashritu, Arakhsamna, Kislimu, Tebetu, Shabatu, Adaru. Um mês Adaru adicional, o Adaru II, era intercalado seis vezes em cada ciclo de 19 anos, menos no décimo sétimo. Neste ano, inseria-se o mês Ululu II. ([CALENDARIOS.INFO, 2023](#))

Mais de mil anos antes dos primeiros telescópios, os astrônomos babilônios acompanhavam o movimento dos planetas no céu noturno, usando aritmética simples. Mas não havia evidencia de que usassem geometria, gráficos e Figuras na astronomia. As

descobertas arqueológicas indicavam a presença de matemática em exercícios nas escolas de escribas (DMUC, 2023)

É um fato bem conhecido que os babilônios eram astrônomos matemáticos bastante hábeis, que preservavam seus conhecimentos em centenas de tabuletas de argila. Uma autoridade em astroarqueologia, Mathieu Ossendrijver, da Universidade Humboldt de Berlim, descobriu algo revelador ao traduzir 4 tabuinhas cuneiformes (Textos A, B, C, D catalogados no museu Britânico desde 1881). Para acompanhar a trajetória do planeta Júpiter, eles usavam uma técnica de cálculo que se baseava em uma Figura trapezoidal e que se acreditava ser conhecida apenas séculos mais tarde na Europa.

O “texto A”, agora decodificado, descreve um procedimento para calcular o deslocamento de Júpiter através do plano da eclíptica, o caminho que o Sol parece seguir através das estrelas ao longo de um ano. De acordo com o texto, os babilônios faziam isso acompanhando a velocidade de Júpiter como uma função do tempo e determinavam a área sob a curva tempo-velocidade. (GIZBRASIL, 2016)

Os matemáticos babilônicos usavam uma notação para a velocidade, que relacionava a posição angular e o tempo. Estava muito claro para eles que o produto do tempo e da velocidade resultava no deslocamento. E isto era numericamente igual à área do trapézio cujas bases eram o registro da velocidade de Júpiter, e a altura era o tempo decorrido entre as duas observações do planeta (veja Figura 8).

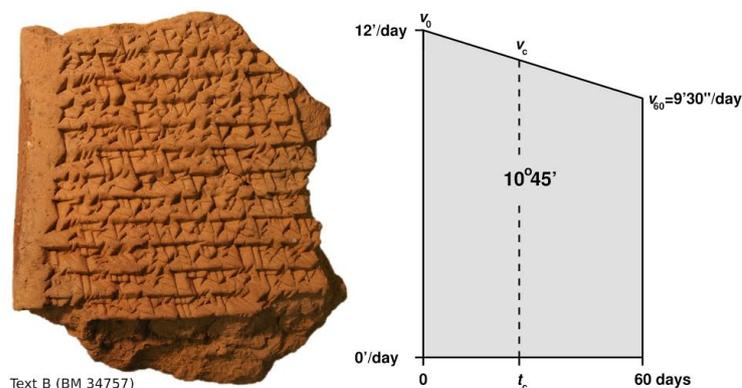


Figura 8 – O deslocamento de Júpiter

Fonte: (GIZBRASIL, 2016)

Cerca de dois séculos mais tarde, outra civilização exerceria forte influência no mundo antigo. Trata-se da civilização Grega. O período conhecido como Helenístico foi o apogeu desta civilização. O próximo tópico falará sobre suas descobertas astronômicas pautadas na lógica e no pensamento racional.

## 1.4 Astronomia Grega - Ciência e Racionalismo

Quando a civilização grega atingiu seu apogeu, ela comandava um vasto império que se estendeu para o oriente. Isso contribuiu para que pudessem assimilar os conhecimentos produzidos pelas civilizações conquistadas. Este processo de assimilação de outra cultura, seja por causa de conquistas militares ou mesmo por causa do comércio, parecia ser muito comum e muito vantajoso para o progresso, e certamente não seria diferente no campo da astronomia e da matemática.

As trocas comerciais e culturais ocorridas entre estes diferentes povos fizeram com que os gregos conhecessem parte do que já se conhecia entre os povos do crescente fértil. Por isso, pode-se considerar que um dos primeiros pensadores a desenvolver um pensamento astronômico na Grécia Antiga tenha sido Tales de Mileto, o mesmo que foi responsável pelo desenvolvimento do pensamento matemático. Isso porque Tales de Mileto era comerciante e viajante, e teve contato com as culturas egípcias e mesopotâmicas. (RODRIGUES, 2018)

Assim notamos que a astronomia para os gregos, a começar por Tales de Mileto, tinha um caráter tipicamente matemático que envolvia observações e deduções. Apesar da influência de suas deidades e seus mitos, a sociedade grega estava inclinada a entender os fenômenos da natureza á luz da racionalidade e da lógica. Podemos listar alguns avanços da época, tais como, as teorias geocentrista (a Terra como centro do universo) e heliocentrista (o sol como centro do universo), o cálculo de distâncias astronômicas, o cálculo do volume tanto da Lua, como da Terra e do Sol, e a nomeação de muitas constelações do hemisfério norte.

Aristarco de Samos foi o primeiro cientista a propor o heliocentrismo (a Terra orbita em torno do Sol). Embora em sua obra não explicita o termo, mas Aristarco acreditava que um corpo tão grande como o Sol não poderia orbitar um corpo tão pequeno como a Terra. Isso antecipou as conclusões de Nicoláu Copérnico em cerca de 2000 anos.

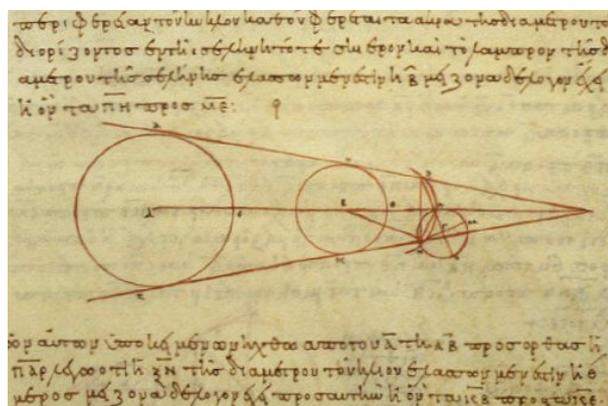


Figura 9 – Tamanho do sol Terra e Lua segundo Aristarco.

Fonte: (RODRIGUES, 2018)

Outro grande nome de destaque na astronomia grega foi Hiparco de Nicéia (c.190-c.120 a.C.). Sobre as realizações de Hiparco, temos que:

...construiu um observatório na ilha de Rodes, onde fez observações durante o período de 147 a 127 a.C. Como resultado, ele compilou um catálogo com a posição no céu e a magnitude de 850 estrelas. A magnitude, que especificava o brilho da estrela, era dividida em seis categorias, de 1 a 6, sendo 1 a mais brilhante, e 6 a mais fraca visível a olho nu. (KEPLER, 2018a)

Sem a utilização de qualquer instrumento óptico tais como telescópios ou lunetas, Hiparco fez importantes contribuições para a astronomia em seu tempo, desde a dedução da direção dos pólos celestes, até mesmo a precessão, que é a variação da direção do eixo de rotação da Terra devido à influência gravitacional da Lua e do Sol, que leva cerca de 26 000 anos para completar um ciclo. Hiparco também deduziu o valor correto de  $8/3$  para a razão entre o tamanho da sombra da Terra e o tamanho da Lua e também que a distância da Lua à Terra era 59 vezes o raio da Terra (o valor correto é 60). Ele determinou a duração do ano com uma margem de erro de 6 minutos (KEPLER, 2018a).

A civilização romana foi fortemente influenciada pela cultura grega. No mundo romano, um cientista que se destacou nos estudos de Astronomia foi Cláudio Ptolomeu. Nascido em Alexandria, Egito, por volta de 100 d.C. a 170 d.C., desenvolveu importantes trabalhos em matemática, astronomia, geografia e cartografia. Apesar da forte influência de mitos na astronomia, a principal obra de Ptolomeu foi o *Almagesto* (veja a Figura 10). A obra adota o modelo geocêntrico, contendo um extenso catálogo estelar. Foi um dos textos científicos mais influentes de todos os tempos, sendo a principal fonte de informação sobre a astronomia no império bizantino, no mundo árabe e na Europa ocidental, ao longo da idade Média e Renascença, até o século XVI. O tratado também forneceu informações acerca da obra do matemático grego Hiparco, a qual teve seu original perdido. Curiosamente, o título da obra em grego era “*He Megále Syntaxis*”, que significa “A Grande Coleção”. Os árabes traduziram o adjetivo “Grande” por “Megíste”, ou seja “Máximo”. Com o tempo *Al Magiste*, gerou a palavra “*Almagesto*”.(JR., 2006)

Agora olhando para o continente americano, por volta do século VI d.C., temos a Civilização Maia. O próximo tópico, abordará descobertas arqueológicas que mostram como sua matemática era amplamente utilizada na compreensão da astronomia.

## 1.5 Astronomia Maia - A Pirâmide de Kukulcan

A civilização Maia se dedicou muito à astronomia e a partir da observação dos corpos celestes construíram um calendário composto por meses de 29 dias, e um ano com 365 dias.

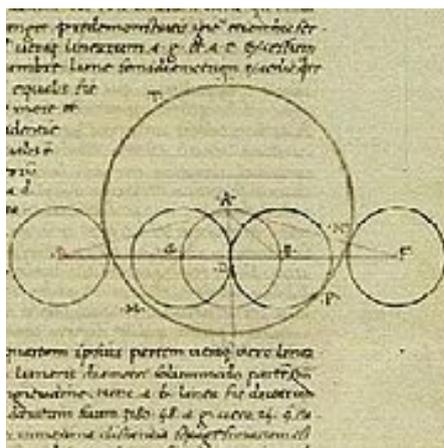


Figura 10 – Imagem da tradução latina de George Trebizond (ca. 1451) de Almagest.

Fonte: (TREBIZOND'S, 1451)

A contagem do tempo entre os maias era realizada pelo uso de dois calendários. O primeiro, chamado Tzolkin, possuía 260 dias divididos em 20 períodos de 13 dias. Esse calendário era utilizado para a marcação das principais festividades religiosas dos maias. O segundo, conhecido como Haab, era utilizado no controle dos fenômenos naturais e na contagem de qualquer fenômeno desvinculado da esfera religiosa. (SOUSA, 2023)

No período em que a Europa estava na Idade Média, a civilização maia se tornou muito avançada no campo da matemática e da astronomia.

Os maias calcularam, por exemplo, que Vênus passa pela Terra a cada 583,935 dias, algo espantosamente próximo do número correto, que conhecemos hoje: entre 583,920 e 583,940. Também definiram que o ciclo lunar dura 29,53086 dias (atualmente os astrônomos falam em 29,54059). Os maias registraram que o Sol completa seu ciclo em 365,2420 dias, enquanto que na atualidade esse número está definido em 365,2422. (CORDEIRO, 2018).

Um dos poucos registros astronômicos da cultura maia que sobreviveram à barbárie espanhola no período de sua invasão, foi o Códice de Dresden (veja a Figura 11). Nele encontramos rituais, anotações de eclipses e um calendário baseado nas observações astronômicas do planeta Vênus. Segundo a cultura maia, Vênus exercia grande importância para se determinar quando ir à guerra, qual o período de semeadura e de colheitas.

O códice retrata hieróglifos, numerais e Figuras, e contém calendários de rituais e adivinhações, cálculos das fases de Vênus, eclipses do sol e da lua, instruções relacionadas às cerimônias de ano novo e descrições das localizações do Deus da Chuva, que culminam em uma miniatura de página inteira mostrando um grande dilúvio. (LIBRARY, 1200)

O desenvolvimento na astronomia estava associado aos avanços matemáticos. O sistema de numeração dos maias era vigesimal, ou seja, eles contavam de vinte em vinte unidades. Com símbolos tais como o olho, o ponto e o traço, eles construíram seu sistema



Figura 11 – Página 24 do Códice de Dresden (edição Förstermann de 1880)

Fonte: ([LIBRARY](#), 1200)

de numeração de maneira sofisticada, a ponto de ter uma representação para o numeral zero.

Os maias se ocuparam com a construção de um importante monumento que evidenciava a influência da astronomia em sua civilização.

A pirâmide de Kukulcán, situada na cidade arqueológica Chichen Itzá, no Estado mexicano de Yucatán, é um calendário em pedra construída pelos Maias, que também marca os solstícios e equinócios, datas muito importantes para o ciclo agrícola dos antigos povos que habitavam a região. “Kukul” significa sagrado ou divino e “can”, serpente. ([SOUSA](#), 2023)

Sabemos que os equinócios de primavera e de outono marcam o dia em que as horas de claridade e de escuridão são iguais. Esse fenômeno acontece apenas em duas ocasiões no ano. O objetivo da pirâmide Kukulcan era relacionar a serpente sagrada com os períodos de equinócio de primavera (20 ou 21 de março) e de outono (21 ou 22 de setembro), pois a sombra da escada desenhava uma serpente, conhecida como “A descida de Kukulcan”. Este fenômeno só ocorre graças ao perfeito alinhamento da construção destes degraus com a posição do sol (veja Figura 12).

A seguir passaremos a uma consideração sobre a civilização Islâmica. A pesar da



Figura 12 – Pirâmide de Kukulcan

Fonte: ([PNGTREE, 2023](#))

característica marcante da religiosidade, veremos que a astronomia e a matemática têm seu lugar privilegiado nesta cultura.

## 1.6 Astronomia Islâmica - A Casa da Sabedoria

Enquanto o período medieval marca uma era de declínio no desenvolvimento científico para o Ocidente, e por consequência um declínio na astronomia, no Oriente o mundo islâmico vive um período de grande avanço no conhecimento. Podemos destacar pelo menos duas razões principais que contribuíram para isso: o contato com as obras clássicas gregas e a tolerância religiosa.

No século IX, a maioria dos textos científicos gregos foram traduzidos para o árabe, incluindo a “*Sintaxe*” de Ptolomeu, o ápice da astronomia antiga. Foi por meio dessas traduções que as obras gregas mais tarde se tornaram conhecidas na Europa... O segundo ímpeto veio das observâncias religiosas islâmicas, que apresentavam uma série de problemas na astronomia matemática, principalmente relacionados à cronometragem. Ao resolver esses problemas, os estudiosos islâmicos foram muito além dos métodos matemáticos gregos. ([GINGERICH, 1986](#))

Os primeiros duzentos anos do império muçulmano, após a unificação das tribos árabes sob o governo teocrático de Maomé, foram dedicados a uma expansão militar e territorial. Somente após isso a produção científica encontrou terreno fértil para se desenvolver. Com a fundação da capital do império em Bagdá no ano de 762 d.C., as obras dos sábios gregos foram sendo traduzidas. Dessa forma o conhecimento em astronomia foi se mesclando aos saberes da época.

O patrono mais vigoroso desse esforço foi o califa al-Ma'mun, que ascendeu ao poder em 813. Al-Ma'mun fundou uma academia chamada Casa da Sabedoria e colocou Hunayn ibn Ishaqal-'Ibadi, um cristão nestoriano

com um excelente domínio do grego, no comando. Hunayn tornou-se o mais célebre de todos os tradutores de textos gregos. Ele produziu versões árabes de Platão, Aristóteles e seus comentadores, e traduziu as obras dos três fundadores da medicina grega, Hipócrates, Galeno e Dioscórides. (GINGERICH, 1986)

As observâncias religiosas dos muçulmanos passaram a exigir um conhecimento bem apurado da astronomia da época. Isto porque assim como os hebreus, eles tinham um calendário mensal lunar e seguiam o ciclo metônico de 19 anos. Como vimos anteriormente, no ciclo metônico haviam sete anos com um mês adicional distribuídos ao longo de 19 anos para que as estações do ano se mantivessem regulares com o calendário civil. Também havia a questão do mês sagrado de Ramadã. Ramadã é o 9º mês do calendário islâmico. A contagem do tempo nesse calendário é feita de acordo com os movimentos da Lua e, por isso, o Ramadã inicia em uma data diferente todos os anos, chegando a ocorrer em cada uma das 4 estações no período de 30 anos. Trata-se de um tempo considerado sagrado para os muçulmanos, pois se acredita que durante esse período o Arcanjo Gabriel entregou os primeiros versos do Alcorão ao profeta Maomé. O Ramadã dura entre 29 e 30 dias, sendo iniciado ao surgimento da primeira lua nova após Shaban, o oitavo mês do calendário islâmico, e seu término ocorre quando a lua nova é vista novamente.

Calendário Gregoriano	Calendário islâmico	Início do Ramadã	Término do Ramadã (Início do Shawwal)
2022	1443	2 de abril	1 de maio
2023	1444	23 de março	20 de abril
2024	1445	11 de março	10 de abril
2025	1446	1 de março	30 de março
2026	1447	18 de fevereiro	20 de março
2027	1448	8 de fevereiro	9 de março
2028	1449	28 de janeiro	26 de fevereiro
2029	1450	16 de janeiro	14 de fevereiro
2030	1451	5 de janeiro	4 de fevereiro
2030	1452	26 de dezembro	24 de janeiro de 2031

Figura 13 – Datas do Ramadã entre 2022 e 2030

Fonte: (ROGALSKI, 2022)

O principal tradutor de obras matemáticas e astronômicas era um pagão chamado Thabit ibn Qurra. Thabit era originalmente um cambista no mercado de Harran, uma

cidade no norte da Mesopotâmia, que era o centro de um culto astral. Seu profundo conhecimento em línguas estrangeiras, como o grego, fez com que ele se ocupasse com a tradução de obras clássicas como os Elementos de Euclides, e de outros importantes textos matemáticos como os de Pitágoras, Arquimedes, Pappus, Platão, Aristóteles, entre outros. Com isso, atribui-se a ele a produção de mais de 100 tratados científicos, incluindo um comentário sobre o Almagesto.

Outro astrônomo matemático da Casa da Sabedoria foi Al-Khwarizmi, cuja obra Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa-l-muqābala (Livro da Restauração e do Balanceamento), dedicada a Al-Ma'mun, é considerado o precursor dos estudos de Álgebra. Embora não tenha sido particularmente impressionante como uma conquista científica ajudou a introduzir métodos hindus e gregos no mundo islâmico. (GINGERICH, 1986)

No próximo tópico veremos que a Europa não permaneceu nas trevas do conhecimento matemático e astronômico. Destacaremos os principais avanços no período que ficou conhecido como Renascimento.

## 1.7 Astronomia na Idade Moderna - O Renascimento

Alguns séculos antes da exploração europeia se iniciar nas Américas, os saberes do Oriente fluíram para o Ocidente com as campanhas militares conhecidas como Cruzadas. Isso favoreceu o contato não apenas com a sabedoria oriental, mas acima de tudo, o acesso às obras gregas clássicas da antiguidade, que foram traduzidas e preservadas pelos muçulmanos. Nicolau Copérnico foi um dos que se destacaram por suas hipóteses astronômicas.

Nicolau Copérnico representou o Renascimento na astronomia. Copérnico (1473-1543) foi um astrônomo polonês com grande inclinação para a matemática. Estudando na Itália, ele leu sobre a hipótese Heliocêntrica proposta (e não aceita) por Aristarco de Samos (310-230 a.C.), e achou que o Sol no centro do Universo era muito mais razoável do que a Terra. Copérnico registrou suas ideias num livro - *De Revolutionibus* - publicado no ano de sua morte. (FILHO, 2014)

O dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601), de família muito rica, construiu seu próprio observatório numa ilha doada pelo rei Frederico II da Dinamarca. Com esse observatório, Brahe fez registros muito precisos das posições dos planetas durante anos seguidos. Diferente de Copérnico, Brahe defendia o geocentrismo onde as órbitas dos planetas eram circulares, o Sol orbitava em torno da Terra e os outros planetas em torno do Sol. Foi mais tarde, com o alemão Johannes Kepler (1571-1630) que o heliocentrismo se firmou completamente.

Kepler descobriu que o sistema de Copérnico funcionava perfeitamente, desde que fossem usados elipses ao invés dos círculos da trajetória dos

planetas, com o Sol em um de seus dois focos. Com isso, Kepler chegou a partir da primeira lei e novamente confrontando com os dados Ticho Brahé, à segunda lei, e conseqüentemente na terceira lei. (PORTO, 2000)

Em resumo, as leis de Kepler são descritas da seguinte maneira: todos os planetas do sistema solar executam trajetórias elípticas, tendo o sol como um dos focos; a linha que liga o sol aos planetas varre áreas iguais em tempos iguais; o quadrado dos períodos das órbitas dos planetas é proporcional ao cubo de suas distâncias médias ao sol.

Com Galileu Galilei (1564-1642) o método científico vai ganhando mais força e expressividade. Isso graças as suas observações astronômicas com uma luneta telescópica. Apesar de não ser sua a invenção deste instrumento, em 1609 ele construiu sua própria luneta, aprimorando-a para observação astronômica. Suas descobertas cimentaram enfaticamente o modelo heliocêntrico de Copérnico para o sistema solar.

Os experimentos de Galileu foram bastante importantes para o desenvolvimento da nossa atual mecânica. Uma série de observações feitas por Galileu ao planeta Vênus, mostraram que o Sol, e não a Terra, era o centro do Sistema Solar. Com relação às observações feitas por Galileu, podemos destacar descobrimentos das manchas solares, as montanhas da Lua e as fases de Vênus."(PORTO, 2000)

Ainda faltaria um refinamento para a plena aceitação do modelo heliocêntrico, uma vez que existiam questionamentos bem relevantes, a saber, por que os corpos insistem em cair para o centro da Terra e não para o Sol, já que este é o centro do universo? Por que não somos atirados para fora da terra, como ocorre num carrossel em rotação? Por que uma pedra atirada para cima, volta para nossas mãos? Por que as estrelas parecem não se mover? (PORTO, 2000) A peça que faltava foi entregue pelo Cavaleiro da Rainha Ana da Inglaterra, Sir Isaac Newton (1643-1727). Newton pôde explicar o movimento dos planetas em torno do Sol, assumindo a hipótese de uma força dirigida ao Sol, que produz uma aceleração que força a velocidade do planeta a mudar de direção continuamente. Como foi que Newton descobriu a Lei da Gravitação Universal? Por analisar o movimento da Lua em torno da Terra e as leis de Kepler (FILHO, 2014).

Pelo que foi considerado, podemos afirmar que apenas os aspectos históricos por si já poderiam constituir a ementa para uma Eletiva, onde trabalharíamos com Astronomia e História. Entretanto, o objetivo deste trabalho é destacar a associação intrínseca da matemática e a astronomia. A próxima seção terá por foco os aspectos matemáticos.

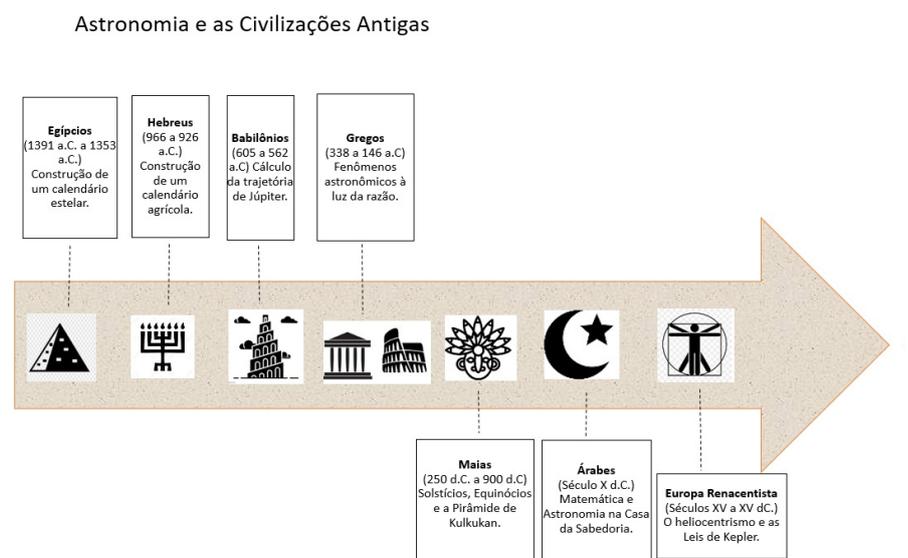


Figura 14 – Antigas Civilizações e suas descobertas astronômicas. A data se refere ao apogeu de cada cultura referente às descobertas astronômicas

Fonte: O Autor

## 2 Tópicos de matemática

Neste Capítulo destacaremos os principais conceitos matemáticos relacionados com os tópicos abordados pela astronomia que farão parte da ementa da Eletiva. Utilizaremos como referências bibliográficas: Hefez (2016), Melo (2014), Wilhelm (2018), Mendes (2017), Canalle (2010), Jesus (2018), Rocha (2013), Ávila (2020), Barbosa (2018), Lima (2011), Bezerra (2019), Neto (2013) e Leithold (1994). Apesar de nosso enfoque principal ser a educação básica e não o ensino superior, alguns tópicos trarão definições e demonstrações que serão imprescindíveis para dar lastro ao professor, sem contudo perder o aspecto pragmático e interdisciplinar tão característicos da disciplina Eletiva, como veremos no capítulo 4.

### 2.1 Divisibilidade

Nesta seção, definiremos a divisibilidade e suas principais propriedades, abordaremos o algoritmo da divisão de Euclides, falaremos da parte inteira da divisão de um número racional (MELO, 2014). Esses tópicos terão sua aplicabilidade na seção 3.1 do capítulo 4.

#### 2.1.1 Divisibilidade

**Definição 2.1.1.** *Sejam  $a$  e  $b$  dois números inteiros, com  $a \neq 0$ . Dizemos que  $a$  divide  $b$  quando existe um inteiro  $q$  tal que  $b = aq$ . Se  $a$  divide  $b$  também dizemos que  $a$  é um divisor de  $b$ , que  $b$  é um múltiplo de  $a$  ou que  $b$  é divisível por  $a$ . Com a notação  $a|b$  indica-se que  $a$  divide  $b$ . Também com a notação  $a \nmid b$  indica-se que  $a$  não divide  $b$ .*

**Teorema 2.1.2.** *Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  números inteiros. Então:*

- i. Se  $a|b$  e  $b|c$  então  $a|c$ ;*
- ii. Se  $a|b$  e  $a|c$  então  $a|(b+c)$  e  $a|(b-c)$ ;*
- iii. Se  $a$  e  $b$  são positivos e  $a|b$  então  $0 < a \leq b$ ;*
- iv. Se  $a|b$  e  $b|a$  então  $a = b$  ou  $a = -b$ .*

*Demonstração:*

- i. Se  $a|b$  e  $b|c$  então existem inteiros  $k_1$  e  $k_2$  tais que  $b = ak_1$  e  $c = bk_2$ . Assim temos:  $c = ak_1k_2$ , tomando  $k \in \mathbb{Z}$ , tal que  $k = k_1k_2$ , temos  $c = ak$ , e portanto  $a|c$ .*

ii. Se  $a|b$  e  $a|c$  então  $b = ak_1$  e  $c = ak_2$ , para alguns  $k_1$  e  $k_2$  inteiros. Logo  $b+c = ak_1+ak_2 = a(k_1+k_2)$ . Portanto  $a|(b+c)$ . Ademais,  $-c = a(-k_2)$  temos  $b-c = a(k_1-k_2)$ . Logo  $a|(b-c)$ .

iii. Se  $a|b$ , sendo ambos positivos, então  $b = ak$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ); Sendo  $k \geq 1$ , multiplicamos ambos os membros por  $a$ , temos  $b = ak \geq a > 0$ .

iv. Se  $a|b$  e  $b|a$  então:

$$b = ak_1 \tag{i}$$

$$a = bk_2 \tag{ii}$$

com  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ . Substituindo  $b$  em (ii) temos:

$$a = (ak_1)k_2$$

$$a = ak_1k_2 \implies a = 0 \text{ ou } k_1k_2 = 1$$

Se  $a = 0$ , então  $b = 0$  de (i), logo  $a = b$ .

Se  $k_1k_2 = 1$ , sendo  $k_1$  e  $k_2$  inteiros, então  $k_1 = k_2 = 1$  ou  $k_1 = k_2 = -1$ .

Se  $k_1 = k_2$ , então  $a = b$ . Se  $k_1 = k_2 = -1$ , então  $a = -b$

■

## 2.1.2 O Algoritmo da Divisão

Para o próximo teorema será utilizado o Princípio da Boa Ordenação (PBO), que afirma: “*Todo conjunto não-vazio de inteiros limitado inferiormente, contém um menor elemento*” (HEFEZ, 2016).

**Teorema 2.1.3.** *Dados dois inteiros  $a$  e  $b$ ,  $b > 0$ , existe um único par de inteiros  $q$  e  $r$  tais que:  $a = bq + r$ , com  $0 \leq r < |b|$ . Vale ainda que  $r = 0$  se, e só se,  $b|a$ .*

Demonstração: Se  $a < b$ , existem  $q = 0$  e  $r = a$ . Para  $a = b$ , existem  $q = 1$  e  $r = 0$ . Vamos supor que  $a > b$ . Considere o conjunto  $S = \{a - nb, \text{ tal que } n \in \mathbb{Z} \text{ e } r = a - nb \geq 0\}$ . Em outras palavras,  $S$  é o conjunto de todos os números inteiros não negativos que podem ser obtidos subtraindo de  $a$  um múltiplo inteiro de  $b$ . Pela propriedade Arquimediana, existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $n(-b) > -a$ , logo  $a - nb > 0$ , provando que  $S$  não é vazio. Sendo  $S$  um conjunto não vazio de números inteiros não negativos, então pelo princípio da Boa Ordenação, existirá um menor elemento  $r$  de  $S$ . Vamos provar que  $r$  satisfaz:  $0 \leq r < b$ . Se  $b|a$ , então  $r = 0$  e nada mais temos a provar. Se, por outro lado,  $b \nmid a$ , então  $r \neq b$ , e, portanto, basta mostrar que não pode ocorrer  $r > b$ . Suponha que  $r > b$ , logo  $r = c + b$ , para algum  $c$  inteiro, tal que  $c > 0$ . Então:

$$c = r - b \tag{i}$$

$$r = a - nb \tag{ii}$$

Substituindo (ii) em (i):

$$c = a - nb - b$$

$$c = a - (n + 1)b$$

Daí teríamos  $c \in S$ , com  $0 < c < r$ . Absurdo, pois por hipótese  $r$  é o menor elemento de  $S$ . Portanto, temos que  $a = bq + r$  com  $0 < r < b$ , o que prova a existência de  $q$  e  $r$ .

Para garantirmos a unicidade, vamos supor que existam  $q_1$  e  $r_1$  tais que  $a = bq_1 + r_1$  com  $0 < r_1 < b$ . Nesse caso:  $a = bq + r$  e  $a = bq_1 + r_1$ , logo:

$$bq + r = bq_1 + r_1$$

$$bq - bq_1 = r_1 - r$$

$$b(q - q_1) = r_1 - r$$

Logo,  $b$  divide  $(r_1 - r)$ . Como  $0 \leq r_1 < b$  e  $0 \leq r < b$  temos que  $|r_1 - r| < b$  e como  $b|(r_1 - r)$  devemos ter  $r_1 - r = 0$ , portanto  $r_1 = r$ . Logo  $bq_1 = bq$ , então  $q = q_1$ . ■

O número  $q$  é chamado quociente e o número  $r$  resto. Como o quociente e o resto são únicos, podemos definir duas importantes funções: a **função quociente** e a **função resto** (HEFEZ, 2016).

**Definição 2.1.4.** Denotando  $q_b(a)$  o quociente da divisão do número  $a$  por  $b$ , definimos a função quociente por  $b$  como:

$$\begin{aligned} q_b : \mathbb{Z} &\longmapsto \mathbb{Z} \\ a &\longmapsto q_b(a) \end{aligned}$$

**Definição 2.1.5.** Denotando por  $r_b(a)$  o resto da divisão de  $a$  por  $b$ , definimos a função resto por:

$$\begin{aligned} r_b : \mathbb{Z} &\longmapsto \mathbb{Z} \\ a &\longmapsto r_b(a) \end{aligned}$$

**Exemplo 2.1.6.** Dados os números inteiros  $a = 17$  e  $b = 3$ , temos que  $q_3(17) = 5$  e  $r_3(17) = 2$ . E ainda, dados os números inteiros  $a = -17$  e  $b = 3$ , temos que  $q_3(-17) = -6$  e  $r_3(-17) = 1$ .

Em sua obra *Os Elementos*, especificamente no Livro VII, Euclides afirmou: “Um número é uma parte de um número, o menor, do maior, quando meça exatamente o maior. E partes, quando não meça exatamente. E o maior é um múltiplo do menor, quando seja medido exatamente pelo menor” (BICUDO, 2009). Em outras palavras, dados números inteiros  $a$  e  $b$  com  $a \geq b$ , ou  $a$  é um múltiplo de  $b$  ou está entre dois de seus múltiplos consecutivos. E de fato, a partir da Definição 2.1.5, temos o seguinte resultado:

**Corolário 2.1.7.** *Dados dois números inteiros  $a$  e  $b$ , com  $b > 0$ , existe um único número inteiro  $n$ , tal que,  $nb \leq a < (n + 1)b$ .*

De fato, pela divisão euclidiana temos que existem  $q, r \in \mathbb{Z}$  com  $0 \leq r < b$ , tais que  $a = bq + r$ .

$$0 \leq r < b$$

$$bq + 0 \leq bq + r < bq + b$$

$$bq \leq bq + r < bq + b$$

$$bq \leq bq + r < (q + 1)b$$

Tomando  $n = q$ , temos:

$$nb \leq a < (n + 1)b.$$

O Corolário 2.1.7, nos leva a outra importante definição. Sendo  $r$  o resto da divisão de  $a$  por  $b$ , então:

$$0 \leq r < b,$$

somando os membros por  $q_b(a)b$ , temos,

$$q_b(a)b + 0 \leq q_b(a)b + r < q_b(a)b + b$$

$$q_b(a)b \leq q_b(a)b + r < (q_b(a) + 1)b$$

$$q_b(a)b \leq a < (q_b(a) + 1)b,$$

dividindo os membros por  $b$ , temos,

$$\frac{q_b(a)b}{b} \leq \frac{a}{b} < \frac{(q_b(a) + 1)b}{b}$$

$$q_b(a) \leq \frac{a}{b} < q_b(a) + 1$$

**Definição 2.1.8.** *O número inteiro  $q_b(a)$ , será o maior inteiro menor ou igual do que o número racional  $\frac{a}{b}$ .*

Também chamada de *parte inteira* da divisão do número racional  $\frac{a}{b}$ , denotaremos com o símbolo  $\left[ \frac{a}{b} \right]$ .

**Exemplo 2.1.9.**  $\left[ \frac{9}{2} \right] = 4$ , pois  $9 = 4 \cdot 2 + 1$

Esse resultado nos ajuda a encontrar o número de múltiplos de  $b$ , dentro de um intervalo delimitado por dois inteiros  $a$  e  $c$ .

**Corolário 2.1.10.** *Dados os inteiros  $a, b$  e  $c$ , tais que  $0 < b < a < c$ , então o número de múltiplos de  $b$  entre  $a$  e  $c$  é dado por*

i.  $\left\lfloor \frac{c}{b} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a-1}{b} \right\rfloor$ , se incluirmos  $a$  na contagem.

ii.  $\left\lfloor \frac{c}{b} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ , se não incluirmos  $a$  na contagem.

**Exemplo 2.1.11.** Quantos múltiplos de 7 existem de 22 a 56? Neste exemplo,  $a = 22$  e estará incluído na contagem.  $\left\lfloor \frac{56}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{22-1}{7} \right\rfloor = 8 - 3 = 5$

A próxima seção tratará de um conceito muito importante em aritmética, a matemática dos restos ou Congruência. (HEFEZ, 2016)

## 2.2 Congruência

**Definição 2.2.1.** Sejam  $a$  e  $b$  dois inteiros quaisquer e seja  $m$  um inteiro positivo, diremos que  $a$  e  $b$  são congruentes módulo  $m$ , se os restos de sua divisão euclidiana por  $m$  são iguais. Notação:  $a \equiv b \pmod{m}$ .

Quando a relação  $a \equiv b \pmod{m}$  for falsa então diremos que  $a$  e  $b$  não são congruentes, e usaremos a notação  $a \not\equiv b \pmod{m}$ .

**Exemplo 2.2.2.** Observe os exemplos:

- $15 \equiv 5 \pmod{10}$ , pois  $15 = 10 \cdot 1 + \mathbf{5}$  e  $5 = 10 \cdot 0 + \mathbf{5}$
- $50 \equiv 1 \pmod{7}$ , pois  $50 = 7 \cdot 7 + \mathbf{1}$  e  $1 = 7 \cdot 0 + \mathbf{1}$
- $-20 \equiv -11 \pmod{3}$ , pois  $-20 = 3 \cdot (-7) + \mathbf{1}$  e  $-11 = 3 \cdot (-4) + \mathbf{1}$
- $14 \not\equiv 8 \pmod{5}$ , pois  $14 = 5 \cdot 2 + \mathbf{4}$  e  $8 = 5 \cdot 1 + \mathbf{3}$

Uma maneira mais direta para verificar se dois números são congruentes módulo  $m$ , é apresentada no teorema a seguir.

**Teorema 2.2.3.** Para  $a, b, m \in \mathbb{Z}$  com  $m > 1$ , temos que  $a \equiv b \pmod{m}$  se, e somente se,  $m|a - b$ .

Demonstração: Para  $a$  e  $b$  inteiros, pelo teorema da divisão euclidiana existirão  $q_1, q_2, r_1$  e  $r_2$  inteiros tal que,  $a = mq_1 + r_1$  com  $0 \leq r_1 < m$  e  $b = mq_2 + r_2$  com  $0 \leq r_2 < m$ . Se  $a = b$ , a demonstração é trivial, logo considere  $a > b$  (a demonstração para  $a < b$  é análoga).

$\Rightarrow$ ) Se  $a \equiv b \pmod{m}$ , então pela Definição 2.2.1, eles têm o mesmo valor para o resto quando divididos por  $m$ . Assim  $r_1 = r_2$ . Com isso:

$$a - b = mq_1 + r_1 - (mq_2 + r_2)$$

$$a - b = m(q_1 - q_2) + r_1 - r_2$$

$$a - b = m(q_1 - q_2) + 0$$

Como  $q_1$  e  $q_2$  são números inteiros,  $m|a - b$ .

$\Leftarrow$ ) Agora, tenha por hipótese que  $m|a - b$ , temos que  $a - b = m(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$ . Por hipótese,  $m$  divide o primeiro membro da equação, logo dividirá o segundo membro também. Logo existe  $k$  inteiro tal que  $|r_1 - r_2| = mk$ . Como  $0 \leq r_1 < m$  e  $0 \leq r_2 < m$ , então  $|r_1 - r_2| < m$ . daí temos que:

$$-m < r_1 - r_2 < m$$

$$m \cdot (-1) < mk < m \cdot 1$$

Pela lei do cancelamento para os números inteiros, temos que,  $-1 < k < 1$ , onde  $k = 0$ , uma vez que este é o único número inteiro entre -1 e 1. Por  $r_1$  e  $r_2$  serem números inteiros, então  $|r_1 - r_2| = 0$ . Com isso  $r_1 = r_2$ . ■

Outra análise que podemos fazer a partir da Definição 2.1.5, dada a unicidade do resto da divisão, é definir  $r_m$ , uma função dos restos da divisão de um inteiro qualquer, por  $m$ . Vemos que esta função não é injetiva. Se  $r_m$  fosse injetiva, teríamos  $a \neq b \implies r_m(a) \neq r_m(b)$ . De fato, tome  $a < b$ , inteiros e ainda  $m < b$ :

$$a = mq_1 + r_1 \implies a - mq_1 = r_1 \tag{i}$$

$$b = mq_2 + r_2 \implies b - mq_2 = r_2 \tag{ii}$$

Subtraindo (ii) de (i) temos:

$$a - b = m(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$$

Visto que  $a - b, q_1 - q_2 \in \mathbb{Z}$ , quando  $m|(a - b)$ , então  $r_1 = r_2$ . Isso acontece no caso particular onde  $a$  e  $b$  pertencem a uma sequência, onde  $m$  faz parte da lei de formação.

**Exemplo 2.2.4.** Observe a sequência de números: 1, 4, 7, 10 e suas respectivas divisões por 3. Note que todos os restos são iguais a 1.

$$1 = 3 \cdot 0 + 1$$

$$4 = 3 \cdot 1 + 1$$

$$7 = 3 \cdot 2 + 1$$

$$10 = 3 \cdot 3 + 1$$

$$13 = 3 \cdot 4 + 1$$

Concluimos também que  $r_m$  não é sobrejetiva. Uma vez que  $0 \leq r < m$ , os restos da divisão de um inteiro por  $m$  pertencerão ao conjunto  $R = \{0, 1, \dots, m - 1\}$ , e  $R$  por sua vez é subconjunto de  $\mathbb{Z}$ .

### 2.2.1 Propriedades das Congruências

**Teorema 2.2.5.** *Seja  $m$  um inteiro positivo fixo ( $m > 0$ ) e sejam  $a, b, c$  e  $d$  inteiros quaisquer. Verificam-se as seguintes propriedades:*

- i.  $a \equiv a \pmod{m}$ .*
- ii. Se  $a \equiv b \pmod{m}$ , então  $b \equiv a \pmod{m}$ .*
- iii. Se  $a \equiv b \pmod{m}$  e  $b \equiv c \pmod{m}$ , então  $a \equiv c \pmod{m}$ .*
- iv. Se  $a \equiv b \pmod{m}$  e  $c \equiv d \pmod{m}$ , então  $a + c \equiv b + d \pmod{m}$  e  $ac \equiv bd \pmod{m}$ .*
- v. Se  $a \equiv b \pmod{m}$ , então  $a + c \equiv b + c \pmod{m}$  e  $ac \equiv bc \pmod{m}$ .*
- vi. Se  $a \equiv b \pmod{m}$ , então  $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ , para todo inteiro positivo  $n$ .*

Demonstração:

- i. Como  $m|0$  então  $m|(a - a)$ , o que resulta pelo Teorema 2.2.3,  $a \equiv a \pmod{m}$ .
- ii. Se  $a \equiv b \pmod{m}$  temos que  $m|a - b$  logo,  $a - b = mk_1$  para algum  $k_1$  inteiro. Nesse caso, existe um  $k = -k_1$ , tal que  $-(a - b) = mk$ , assim  $b - a = mk$ , logo  $m|b - a$ . Portanto,  $b \equiv a \pmod{m}$ .
- iii. Se  $a \equiv b \pmod{m}$  e  $b \equiv c \pmod{m}$ , então existem inteiros  $k_1$  e  $k_2$  tais que:  $a - b = mk_1$  e  $b - c = mk_2$ . Somando membro a membro as duas igualdades acima, temos:

$$a - b + b - c = m(k_1 + k_2)$$

$$(a - c) = mk$$

onde  $k_1 + k_2 = k, k \in \mathbb{Z}$ . Logo temos que  $m|(a - c)$ , ou seja,  $a \equiv c \pmod{m}$ .

- iv. Se  $a \equiv b \pmod{m}$  e se  $c \equiv d \pmod{m}$ , pelo Teorema 2.2.3, temos que  $m|(a - b)$  e  $m|(c - d)$ , ou seja,  $a - b = mk_1$  e  $c - d = mk_2$ , para  $k_1$  e  $k_2$  inteiros. Agora somando membro a membro das equações, temos:

$$a - b + c - d = m(k_1 + k_2)$$

$$(a + c) - (b + d) = mk$$

onde  $k_1 + k_2 = k, k \in \mathbb{Z}$ . Portanto podemos concluir que  $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ . No caso do produto  $ac \equiv bd \pmod{m}$ , temos que: se  $a \equiv b \pmod{m}$  e  $c \equiv d \pmod{m}$ , então

$$a - b = mk_1$$

$$c - d = mk_2.$$

Multiplicando ambos os membros de  $a - b = mk_1$  por  $c$  e de  $c - d = mk_2$  por  $b$ , temos:

$$ac - bc = mck_1$$

$$bc - bd = mbk_2.$$

Agora, somando as igualdades acima membro a membro, temos:

$$ac - bc + bc - bd = mck_1 + mbk_2$$

$$ac - bd = m(ck_1 + bk_2)$$

onde  $k_1 + k_2 = k, k \in \mathbb{Z}$ . Portanto  $m|ac - bd \implies ac \equiv bd \pmod{m}$ .

v. Se  $a \equiv b \pmod{m}$ , temos que  $a - b = mk$ . Somando e subtraindo  $c$  no primeiro membro, temos;

$$a - b + c - c = mk$$

$$(a + c) - (b + c) = mk$$

Assim, podemos concluir que  $a + c \equiv b + c \pmod{m}$ . Sobre  $ac \equiv bc \pmod{m}$ , temos que,  $a - b = mk$ . Multiplicando os dois membros da equação por  $c$ , temos:

$$ac - bc = mkc.$$

Logo, pelo Teorema 2.2.3,  $m|(ac - bc) \implies ac \equiv bc \pmod{m}$ .

vi. Se  $a \equiv b \pmod{m}$  então  $m|(a - b)$  e como sabemos:  $a^n - b^n = (a - b)[a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + a^{n-4}b^3 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}]$ . Como  $m|a - b$  então  $m|(a^n - b^n)$ . Finalmente temos que  $a^n \equiv b^n \pmod{m}$  para todo inteiro positivo  $n$ .

■

A próxima seção abordará noções básicas do cálculo diferencial e integral. Trataremos de uma aplicação em cálculo numérico ao falar da Regra dos Trapézios no capítulo 3.

## 2.3 Cálculo Diferencial e Integral

Aprender Cálculo pode ser uma experiência muito empolgante e estimulante, uma vez que é a base para o desenvolvimento de toda Matemática e suas muitas realizações no mundo moderno. Para o professor de matemática, rever os conceitos básicos de Limite, Derivada e Integral, contribuirá na compreensão de suas aplicações em astronomia.

### 2.3.1 Limite

Para estabelecer a definição de *Limite*, tomemos primeiramente a função  $f : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \frac{2x^2-3x-4}{x-2}$ . Note que neste caso  $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ . Analisaremos os valores de  $f(x)$ , quando  $x$  se aproxima de 2, por valores menores que 2, conforme a Tabela 1. Por outro lado, observe o que acontece quando nos aproximamos de 2, por

Tabela 1 – Aproximação de  $f(x)$  por valores menores que 2

$x$	$f(x) = \frac{2x^2-3x-4}{x-2}$
1	4
1,25	4,5
1,50	5
1,75	5,50
1,9	5,8
1,99	5,98
1,999	5,998

Fonte: O Autor (2023)

valores maiores que 2, conforme a Tabela 2.

Tabela 2 – Aproximação de  $f(x)$  por valores maiores que 2

$x$	$f(x) = \frac{2x^2-3x-4}{x-2}$
3	8
2,75	7,50
2,50	7,0
2,25	6,50
2,1	6,2
2,01	6,02
2,001	6,002

Fonte: O Autor (2023)

Note que nas duas tabelas, à medida que  $x$  se aproxima de 2,  $f(x)$  se aproximará de 6. Perceba também, que quando o módulo da diferença entre  $x$  e 2 é 0,001, o módulo da diferença entre  $f(x)$  e 6 é 0,002. Com isso, podemos tornar os valores de  $f(x)$  tão próximos de 6 como quisermos, basta tomar um valor para  $x$  bem próximo de 2. Então podemos ter  $|f(x) - 6|$  tão pequeno quanto desejarmos, tomando  $|x - 2|$  suficientemente pequeno. Esta relação é comumente simbolizada em matemática pelas letras gregas  $\epsilon$  e  $\delta$ . Assim, considerando  $f(x) = \frac{2x^2-3x-4}{x-2}$ , dado um número  $\epsilon$  positivo qualquer, existe  $\delta > 0$ , tal que podemos tornar  $|f(x) - 6| < \epsilon$ , tomando  $|x - 2| < \delta$  (com  $|x - 2| \neq 0$ ) suficientemente pequeno, tal que se  $0 < |x - 2| < \delta$  então  $|f(x) - 6| < \epsilon$ . De modo geral, chegamos à seguinte definição:

**Definição 2.3.1.** *Seja  $f$  uma função definida para todo número em algum intervalo aberto contendo  $a$ , exceto possivelmente no próprio número  $a$ . O limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $a$  será  $L$ , escrito como*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

*se a seguinte afirmativa for verdadeira: Dado  $\epsilon > 0$  qualquer, existe  $\delta > 0$ , tal que se  $0 < |x - a| < \delta$  então  $|f(x) - L| < \epsilon$ .*

Veja a Figura 15.

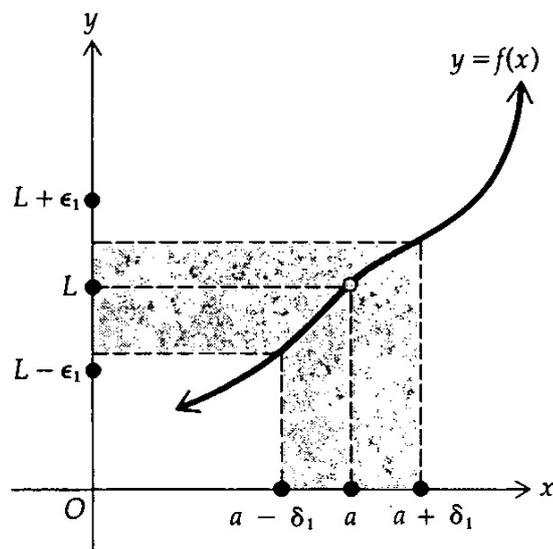


Figura 15 – Definição de Limite

Fonte: (LEITHOLD, 1994)

**Exemplo 2.3.2.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida por  $f(x) = 2x - 5$ . Suponha que  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$ . Vamos determinar  $\delta > 0$  para  $\epsilon = 0,01$ .*

Se  $0 < |x - 3| < \delta$  então  $|f(x) - 1| < \epsilon$ . Dado  $\epsilon = 0,01$ , temos:

$$|f(x) - 1| < 0,01$$

$$|2x - 5 - 1| < 0,01$$

$$|2x - 6| < 0,01$$

$$2(|x - 3|) < 0,01$$

$$\frac{2(|x - 3|)}{2} < \frac{0,01}{2}$$

$$|x - 3| < 0,005$$

Com isso uma escolha adequada para  $\delta$  é 0,005. Exemplificando este fato observe a tabela 3:

Tabela 3 – Escolha de  $\delta < 0,005$ 

$x$	$ x - 3 $	$f(x)$	$ f(x) - 1 $
3,004	$ 3,004 - 3  = 0,004$	6,008	$ 1,008 - 1  = 0,008$
3,003	$ 3,003 - 3  = 0,003$	6,006	$ 1,006 - 1  = 0,006$
3,002	$ 3,002 - 3  = 0,002$	6,004	$ 1,004 - 1  = 0,004$
3,001	$ 3,001 - 3  = 0,001$	6,002	$ 1,002 - 1  = 0,002$
2,999	$ 2,999 - 3  = 0,001$	5,998	$ 0,998 - 1  = 0,002$
2,998	$ 2,998 - 3  = 0,002$	5,996	$ 0,996 - 1  = 0,004$
2,997	$ 2,997 - 3  = 0,003$	5,994	$ 0,994 - 1  = 0,006$
2,996	$ 2,996 - 3  = 0,004$	5,992	$ 0,992 - 1  = 0,008$

Fonte: O Autor (2023)

Nesse exemplo, qualquer número positivo menor do que 0,005 pode ser usado no lugar de 0,005 como sendo o  $\delta$  requerido (LEITHOLD, 1994).

### 2.3.2 Derivada

Existem diversas interpretações para o conceito matemático de *Derivada*. O mais comum é o geométrico, onde *Derivada* é a inclinação da reta tangente a uma curva. E também, de suma importância e com inúmeras aplicações, está o algébrico, onde *Derivada* é a taxa de variação de uma função dada. Mas é no conceito matemático de *Limite*, que podemos estabelecer, de maneira sólida, uma definição para *Derivada*.

**Definição 2.3.3.** *Seja  $f$  uma função definida para algum intervalo aberto contendo  $\mathbf{a}$ , diremos que  $f$  é derivável em  $\mathbf{a}$  se existir o limite*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

*Neste caso, tal limite será denominado a derivada de  $f$  em  $\mathbf{a}$ , sendo denotado por  $f'(a)$ .*

Retomando o Exemplo 2.3.2, onde  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = 2x - 5$ , onde  $0 < |x - 3| < \delta \rightarrow |f(x) - 1| < \epsilon$ . Daí:

$$|2x - 5 - 1| < \epsilon$$

$$|2x - 6| < \epsilon$$

$$2 \cdot |x - 3| < \epsilon$$

$$|x - 3| < \frac{\epsilon}{2}$$

Assim vemos que uma escolha adequada para  $\delta$  é  $\frac{\epsilon}{2}$ . Isto indica que se tomarmos um número  $\delta$  para estabelecer uma vizinhança entre  $x$  e  $\mathbf{a}$ , teremos o dobro deste número na vizinhança entre  $f(x)$  e  $f(a)$ . Logo, deduzimos que a razão  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  deve ser aproximadamente 2

Tabela 4 – Relação entre  $f(x)$  e  $f(a)$ 

$x$	$f(x)$	$ x - 3 $	$ f(x) - 1 $
0	-5	3	6
0,25	-4,5	2,75	5,50
0,50	-4	2,50	5,0
0,75	-3,5	2,25	4,50
0,9	-3,2	2,1	4,2
0,99	-3,02	2,01	4,02
0,999	-3,002	2,001	4,002

Fonte: O Autor (2023)

(veja tabela 4), e de fato, operando algebricamente concluímos que para  $x$  diferente de  $a$ , essa razão é exatamente igual a 2.

O símbolo  $f'$  foi introduzido pelo matemático francês Joseph Luis Lagrange (1736-1813). Isso indica que a função  $f'$  é a derivada da função  $f$  e seu valor em  $x$  é  $f'(x)$ . Se para o gráfico da função  $f$ , tivermos o par ordenado  $(x, y)$ , tal que  $y = f(x)$ , então  $y'$  também será usado como notação para a derivada de  $f$ . Assim podemos expressar:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

onde  $\Delta y$  é chamado incremento de  $y$ , denotando a variação no valor da função quando  $x$  varia de  $\Delta x$ . Anteriormente, o matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) usava o símbolo  $\frac{dy}{dx}$  como notação para derivada. É provável que Leibniz considerasse  $dy$  e  $dx$  como pequenas variações de  $y$  e  $x$  e a derivada de  $y$  em relação a  $x$  como a razão de  $dy$  sobre  $dx$  quando  $dy$  e  $dx$  se tornavam muito pequenos.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Vale ressaltar que o conceito de *Limite*, como concebemos atualmente, não era conhecido por Leibniz (LEITHOLD, 1994).

### 2.3.3 Integral

Neste momento, dissertaremos sobre duas concepções acerca do conceito de Integral: a Integral enquanto operação de antidiferenciação e a Integral como área de uma região sob uma curva. A antidiferenciação ou antiderivada, é a operação inversa da derivada.

**Definição 2.3.4.** Uma função  $F$  será chamada de antiderivada de uma função  $f$  num intervalo  $I$  se  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x$  em  $I$ .

**Exemplo 2.3.5.** Se  $F$  for definida por:  $F(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$  então,  $F'(x) = 9x^2 + 4x$ . Assim, se  $f$  for a função definida por  $f(x) = 9x^2 + 4x$ , logo afirmamos que  $f$  é a derivada de

$F$  e que  $F$  é uma antiderivada de  $f$ . Notamos que, toda função com os valores funcionais  $3x^3 + 2x^2 + C$ , onde  $C$  é uma constante qualquer, é uma antiderivada de  $f$ .

Assim, antidiferenciação é o processo para se encontrar o conjunto de todas as antiderivadas de uma dada função. O Símbolo  $\int$  denota a operação de antidiferenciação e escrevemos:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Encontrar a área de um polígono, está associada à ideia intuitiva de recortar este polígono em triângulos e em seguida somar as áreas desses triângulos. Mas quando não se tratar de um polígono e sim de uma região delimitada sob uma curva? Para esta situação ficará definida a área dessa região como uma integral definida. Vale aqui estabelecer a diferença entre a integral definida e a indefinida. A integral definida, como é assim chamada, se refere a um número real, enquanto a integral indefinida é uma família de funções. Considere agora uma região  $A$  no plano, conforme a Figura 16. A região  $A$  é

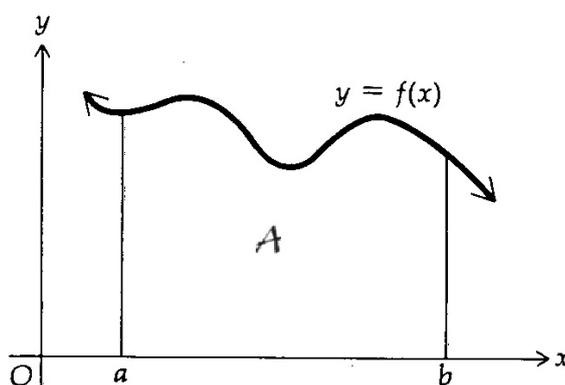


Figura 16 – área sob a curva

Fonte: (LEITHOLD, 1994)

delimitada pelo eixo  $x$ , pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ , e pela curva tendo a equação  $y = f(x)$ , onde  $f$  é uma função contínua no intervalo fechado  $[a, b]$  (para uma consideração mais detalhada sobre continuidade, veja Neto (2022), página 83). Agora vamos definir uma região poligonal retangular contida em  $A$ . Primeiramente, criamos uma partição  $P$  de  $[a, b]$ , tal que

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}.$$

Dividimos o intervalo fechado  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos,  $I_1 = [x_0, x_1]$ ,  $I_2 = [x_1, x_2], \dots$ ,  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ ,  $\dots$ ,  $I_n = [x_{n-1}, x_n]$ . Seja  $[x_{i-1}, x_i]$  o  $i$ -ésimo subintervalo. Como  $f$  é contínua no intervalo fechado  $[a, b]$ , ela é contínua em cada um dos subintervalos. Em cada subintervalo, escolha um número  $c_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n-1, n$ ) de modo arbitrário. Logo  $f(c_i)(x_i - x_{i-1})$  é a área do retângulo de lados  $(x_i - x_{i-1})$ ,  $f(c_i)$ , se o valor de  $f(c_i)$  é positivo.

Como o tamanho do intervalo pode variar, chamaremos de *norma* da partição o maior desses intervalos e será representada pelo símbolo  $\|P\| = \max \{|x_i - x_{i-1}|: 1 \leq i \leq n\}$ . A soma de todos esses retângulos no intervalo  $[a, b]$  será dada por:  $f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(c_i)(x_i - x_{i-1}) + \dots + f(c_n)(x_n - x_{n-1})$ , representado pelo símbolo matemático para somatórios,

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Este somatório também é conhecido como *Soma de Riemann* (veja Figura 17). Observando

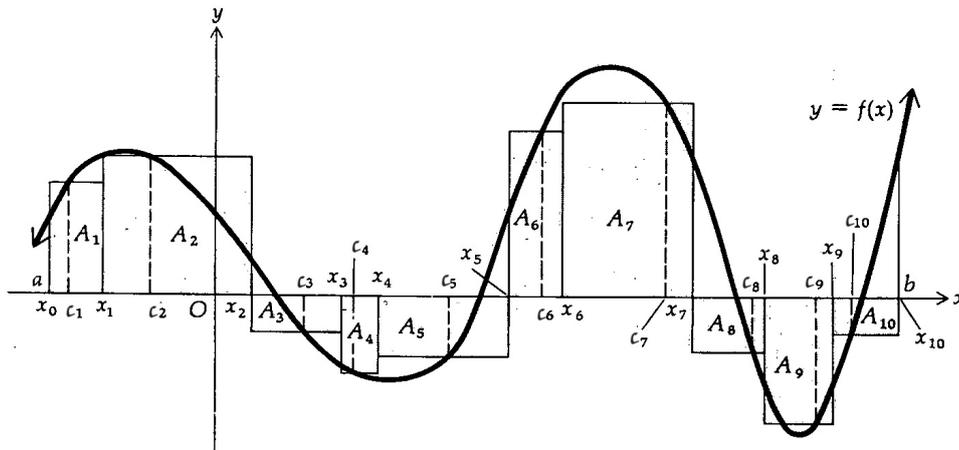


Figura 17 – Soma de Riemann

Fonte: (LEITHOLD, 1994)

a função  $f$ , conforme ilustrado na Figura 17, quando os valores de  $f(c_i)$  forem negativos, o valor  $f(c_i)(x_i - x_{i-1})$  será negativo, representando o valor negativo da área do retângulo. Neste caso, uma interpretação geométrica da *Soma de Riemann* é a soma das medidas das áreas que estão acima do eixo  $x$  com os negativos das medidas das área dos retângulos que estão abaixo do eixo  $x$ .

Agora, se passarmos a refinar o tamanho desses intervalos  $x_i - x_{i-1}$ , tão pequenos quanto quisermos, tal que a norma da partição tenda a zero, a soma das áreas dos retângulos de *Riemann* tenderá a um limite, e este por sua vez, será numericamente igual a área sob a curva do gráfico de  $f$  (veja Figura 18). Denotando  $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$ , podemos enunciar a seguinte definição:

**Definição 2.3.6.** *Seja  $f$  uma função definida no intervalo fechado  $[a, b]$ . Então  $f$  será integrável em  $[a, b]$  se existir um número  $I$  satisfazendo a seguinte condição: para todo  $\epsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que toda partição  $P$ , tal que  $\|P\| < \delta$ , com  $c_i$  no intervalo fechado  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , temos*

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta_i x - I \right| < \epsilon,$$

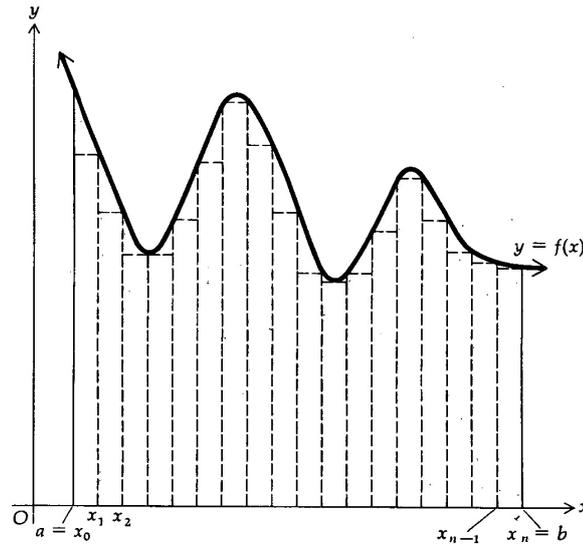


Figura 18 – Soma de Riemann

Fonte: (LEITHOLD, 1994)

que denotaremos por

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)(\Delta_i x) = I$$

**Teorema 2.3.7.** *Toda função contínua  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável.*

Demonstração: Dado  $\epsilon > 0$ , por  $f$  ser contínua no intervalo fechado  $[a, b]$ , existe  $\delta > 0$ , tal que se  $x, y \in [a, b]$ ,  $|x - y| < \delta$  então  $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$ . Seja  $P$  uma partição de  $[a, b]$  cujos intervalos tem todos comprimentos menores que  $\delta$ . Em todo intervalo  $[c_{i-1} - c_i]$  de  $P$ , existem  $x_i, y_i$ , tais que  $m_i$  é o ínfimo de  $f(x_i)$  no intervalo  $[c_{i-1} - c_i]$  e  $M_i$  é o supremo de  $f(y_i)$  no intervalo  $[c_{i-1} - c_i]$ , de onde  $M_i - m_i < \frac{\epsilon}{b-a}$ . Portanto  $\sum (M_i - m_i) \cdot (c_i - c_{i-1}) < \epsilon$ , e pela definição 2.3.6  $f$  é integrável. Para mais detalhes sobre esta demonstração, veja Neto (2022), página 214.

**Exemplo 2.3.8.** *Seja  $f$  uma função polinomial, definida por  $f(x) = x^2$ , vamos utilizar Soma de Riemann para estimar a área sob o gráfico, no intervalo  $[0, 1]$ .*

No intervalo  $[0, 1]$ , seja  $P = \{0; 0,25; 0,5; 0,75; 1\}$  uma partição equiespaçada com  $\Delta x = 0,25$ , com os seguintes subintervalos:  $[0; 0,25]$ ,  $[0,25; 0,5]$ ,  $[0,5; 0,75]$ ,  $[0,75; 1]$ . Escolhendo  $c_i$  como o menor valor em cada subintervalo, temos:

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta_i x = 0^2 \cdot (0,25) + (0,25)^2 \cdot (0,25) + (0,5)^2 \cdot (0,25) + (0,75)^2 \cdot (0,25)$$

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta_i x = 0,218$$

Agora escolheremos  $c_i$  como o maior dos valores em cada subintervalo.

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta_i x = (0,25)^2 \cdot (0,25) + (0,5)^2 \cdot (0,25) + (0,75)^2 \cdot (0,25) + (1)^2 \cdot (0,25)$$

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta_i x = 0,468$$

Logo a área da região sob a curva do gráfico de  $f$  varia entre os valores 0,218 e 0,468. Se aumentarmos o número de subintervalos, com se pode observar na tabela 5 abaixo, observamos que os valores à esquerda e à direita se aproximam de 0,333 (observe também as Figuras 18, 19, 20, 21, 22 e 23).

Subintervalos	Soma à esquerda	Soma à direita
10	0,2850000	0,3850000
20	0,3087500	0,3587500
30	0,3168519	0,3501852
50	0,3234000	0,3434000
100	0,3283500	0,3383500
1000	0,3328335	0,3338335

Tabela 5 – Aproximação à esquerda e à direita

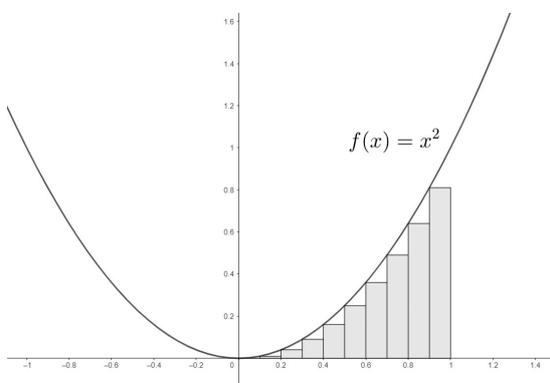


Figura 19 – Subintervalos = 10

Fonte: O Autor (2023)

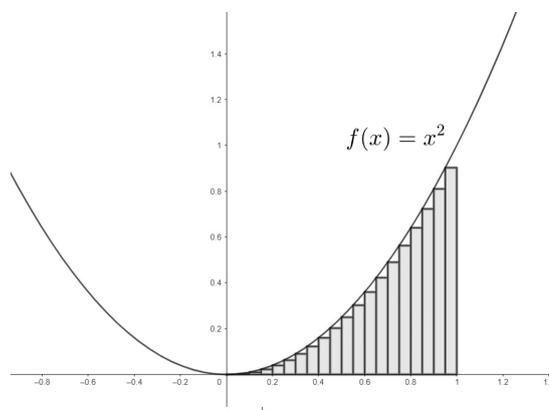


Figura 20 – Subintervalos = 20

Fonte: O Autor (2023)

O símbolo  $\int$  é chamado sinal de integração. O sinal de integração se assemelha à letra  $S$  maiúscula, o que é apropriado, pois a integral definida é o limite de uma soma. Tanto a integral definida quanto a indefinida possuem o mesmo símbolo. Portanto se  $f$  for uma função definida no intervalo fechado  $[a, b]$ , então a integral definida de  $f$  de  $a$  até  $b$ , representada por  $\int_a^b f(x)dx$ , será dada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta_i x.$$

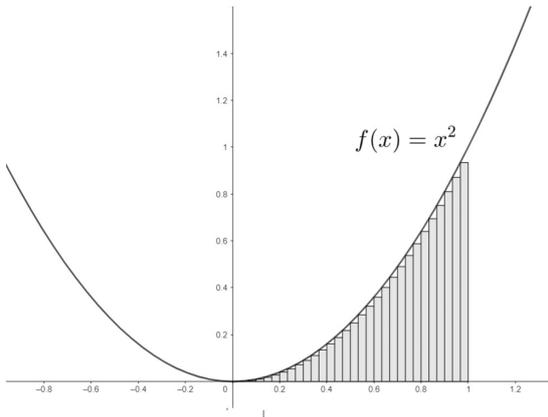


Figura 21 – Subintervalos = 30

Fonte: O Autor (2023)

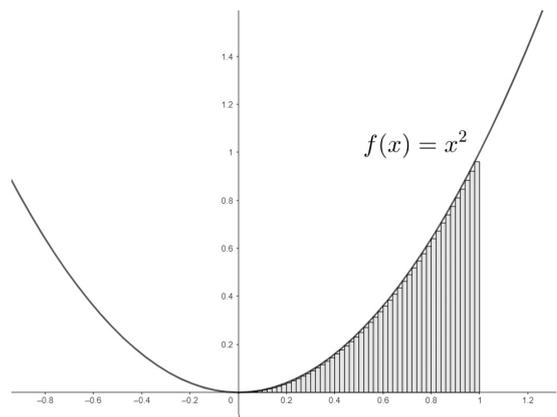


Figura 22 – Subintervalos = 50

Fonte: O Autor (2023)

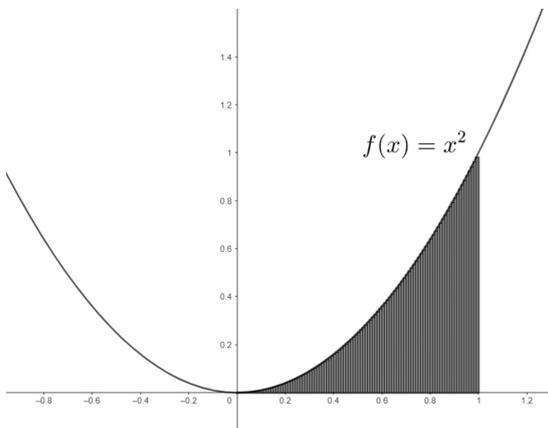


Figura 23 – Subintervalos = 100

Fonte: O Autor (2023)

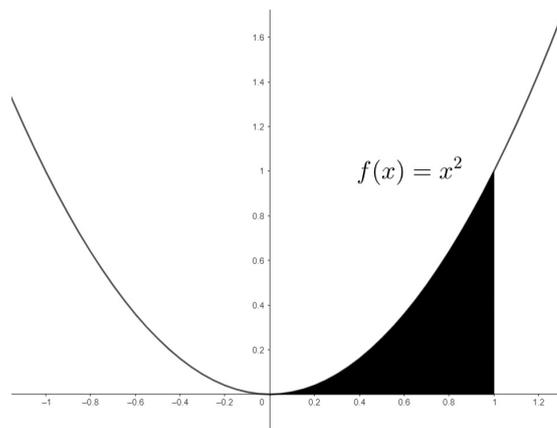


Figura 24 – Subintervalos = 1000

Fonte: O Autor (2023)

Esta comparação nos permite abstrair algumas coisas interessantes, a saber,  $f(x)$  sendo considerado como a altura do retângulo,  $dx$  a base e  $\int_a^b$  o limite das somas das áreas dos retângulos (LEITHOLD, 1994).

A próxima seção tratará das cônicas. O estudo de suas definições e propriedades (principalmente a reflexiva), terão grande importância na construção de instrumentos de observação astronômica, como se verá no capítulo 3.

## 2.4 Geometria Analítica - Cônicas

Para os antigos gregos, as cônicas eram curvas geradas ou encontradas, na intersecção de um plano que atravessa um cone. Ampliando essa perspectiva, temos que cônicas

são figuras geométricas obtidas a partir da secção de um plano com um cone duplo. Seja  $C$  o cone obtido na rotação da reta  $r$  ao redor do ponto  $O$ . Dado um plano  $\pi \subset \mathbb{R}^3$ , temos duas possibilidades, ou  $O \in \pi$  ou  $O \notin \pi$ . Em ambos os casos, a interseção do cone  $C$  com o plano  $\pi$  determina uma cônica. No caso em que  $O \in \pi$ , a cônica é degenerada e pode ser uma reta, um par de retas, ou um ponto (veja Figura 25). No caso em que  $O \notin \pi$ , a cônica é suave e pode ser uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole (veja Figura 26).

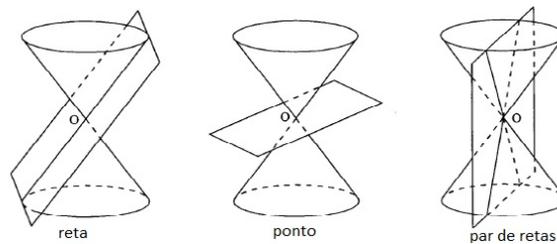


Figura 25 – Cônicas Degeneradas

Fonte: O Autor (2023)

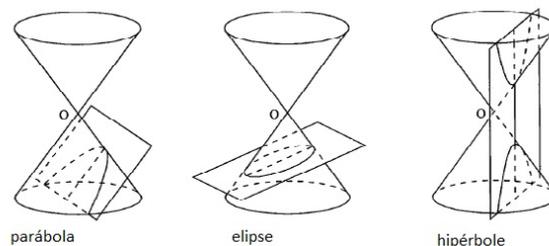


Figura 26 – Cônicas Não Degeneradas

Fonte: O Autor (2023)

A geometria grega, apesar do seu brilhantismo, não tinha operacionalidade. E isto só vai acontecer com a Álgebra, como princípio unificador. A sistematização aconteceria no século XVII, quando álgebra e geometria se complementariam, criando a geometria analítica. Na geometria analítica, as seções cônicas são definidas como lugares geométricos, um conjunto de pontos que verificam uma certa propriedade. Com isso, elas ganharam uma expressão algébrica, ampliando ainda mais sua importância e aplicabilidade. Para uma consideração desse processo histórico, desde a percepção intuitiva das cônicas pelos gregos até a geometria analítica, veja [Quintas \(2018\)](#). Em nossas definições, propriedades e aplicações passaremos a utilizar a geometria analítica.

### 2.4.1 Elipse

Uma elipse é o conjunto de pontos em um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$  é uma constante. Esses dois pontos são chamados focos. Para obter a

equação mais simples para uma elipse, colocamos os focos no eixo  $x$  de um plano cartesiano, tal que  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$  como na Figura 27. Seja  $2a > 0$ , a soma das distâncias

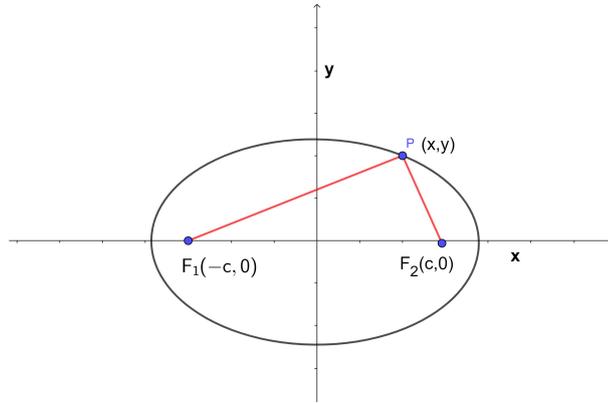


Figura 27 – Elipse e seus elementos

Fonte: O Autor (2023)

a partir de um ponto na elipse até os focos. Então, se  $P(x, y)$  é um ponto na elipse temos que  $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ , isto é:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\end{aligned}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$\begin{aligned}x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\ 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 4a^2 - 4cx \\ a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a^2 - cx\end{aligned}$$

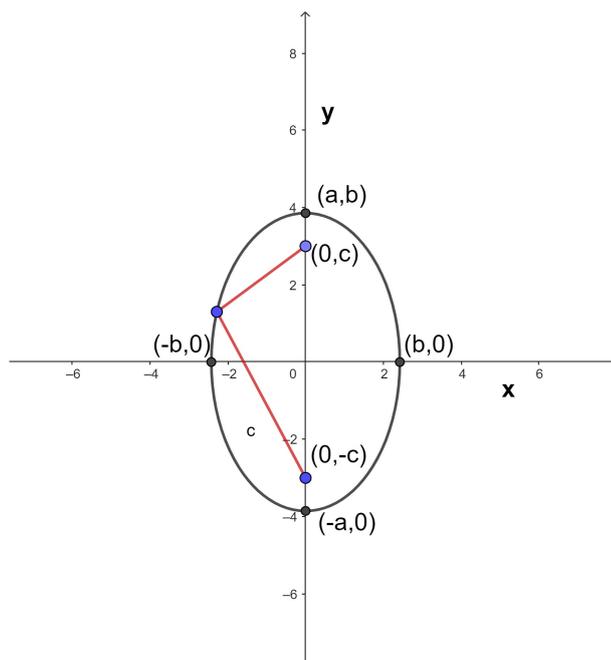
Elevamos ao quadrado novamente, obtemos:

$$\begin{aligned}a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\ a^2 \cdot x^2 + a^2(-2xc) + a^2 \cdot c^2 + a^2 \cdot y^2 &= a^4 + a^2 \cdot (-2cx) + c^2x^2 \\ a^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot c^2 + a^2 \cdot y^2 &= a^4 + c^2x^2 \\ a^2 \cdot x^2 - c^2x^2 + a^2 \cdot y^2 &= a^4 - a^2 \cdot c^2 \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2 \cdot y^2 &= a^2(a^2 - c^2)\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade triangular no triângulo  $F_1F_2P$ , vemos que  $2c < 2a$ , assim  $c < a$  e, portanto,  $a^2 - c^2 > 0$ . Por conveniência, seja  $b^2 = a^2 - c^2$ . Então a equação da elipse torna-se  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ , ou se ambos os lados forem divididos por  $a^2b^2$ , temos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como  $b^2 = a^2 - c^2 < a^2$ , segue que  $b < a$ . Para  $y = 0$  temos  $x = -a$  ou  $x = +a$ . Os pontos correspondentes  $(a, 0)$  e  $(-a, 0)$  são chamados de vértices, e o segmento de reta

Figura 28 – Elipse com focos no eixo  $y$ 

Fonte: O Autor (2023)

que une os vértices é dito eixo principal. Os outros dois vértices da elipse,  $(0, b)$  e  $(0, -b)$ , são encontrados quando fazemos  $x = 0$ , dessa forma  $y = -b$  ou  $y = +b$ .

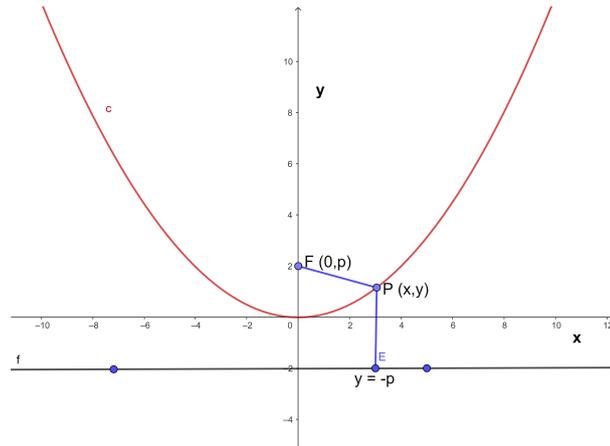
A equação da Elipse não muda se  $x$  for trocado por  $-x$  ou  $y$  for trocado por  $-y$ , logo, a elipse é simétrica em relação a ambos os eixos. Note que, se os focos coincidirem, então  $c = 0$ ,  $a = b$  e a elipse torna-se um círculo com raio  $r = a = b$ . Se os focos de uma elipse estiverem localizadas no eixo  $y$  em  $\{(0, c), (0, -c)\}$ , então podemos encontrar sua equação trocando  $x$  e  $y$  conforme a Figura 28.

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

### 2.4.2 Parábola

Uma parábola é o conjunto de pontos em um plano cujas distâncias a um ponto fixo  $F$ , denominada foco, e a uma reta fixa chamada diretriz, são iguais. A distância do foco à diretriz se chama parâmetro. O vértice da parábola se encontra no ponto médio entre o foco e a diretriz. Obteremos uma equação particularmente simples para uma parábola, se colocarmos o vértice na origem  $O$  e sua diretriz paralela ao eixo  $x$ , como na Figura 29. Se o foco  $F$  for o ponto  $(0, p)$ , então a diretriz tem a equação  $y = -p$ . Se  $P(x, y)$  for um ponto qualquer na parábola, então a distância de  $P$  até o foco é

$$d(P, F) = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}.$$

Figura 29 – Eixo em  $y$ 

Fonte: O Autor (2023)

A distância de  $P$  à diretriz pode ser calculada pela expressão

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by + 0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são os coeficientes da equação da reta diretriz na forma geral, com  $x_0$  e  $y_0$ , como as coordenadas do ponto  $P$  (para uma demonstração desta fórmula veja [Silva \(2013b\)](#)). A equação da reta diretriz na forma geral é  $y + p = 0$ , onde,  $a = 0$ ,  $b = 1$  e  $c = p$ . Logo temos:

$$d(P, r) = \frac{|0 \cdot x + 1 \cdot y + p|}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$$

$$d(P, r) = |y + p|$$

Fazendo  $d(P, F) = d(p, r)$ , temos:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|$$

Obtemos uma equação equivalente elevando ambos membros ao quadrado:

$$x^2 + (y - p)^2 = |y + p|^2$$

$$x^2 + y^2 - 2yp + p^2 = y^2 + 2yp + p^2$$

$$x^2 = 4yp$$

Se o foco da parábola for  $(p, 0)$  e diretriz  $x = -p$ , onde  $p > 0$ , obteremos a equação  $y^2 = 4px$ . Quando o vértice se encontra no ponto  $(h, k)$  e a diretriz é paralela ao eixo  $OX$ , a equação da parábola é  $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ . Caso a diretriz seja paralela ao eixo  $OY$ , temos  $(y - h)^2 = 4p(x - k)^2$  (veja Figura 30).

Uma importante propriedade da parábola pode ser provada matematicamente. Trata-se da propriedade reflexiva da parábola. Quando um raio incide sobre uma superfície

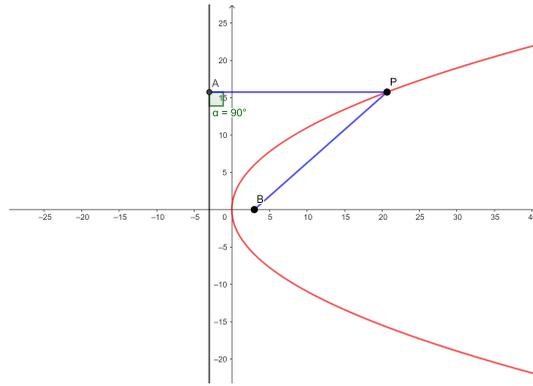


Figura 30 – Eixo em x

Fonte: O Autor (2023)

refletora plana, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão (NETTO, 2015). Neste contexto, a superfície parabólica pode ser substituída pela parábola que é a interseção dessa superfície com o plano que contém o raio incidente, o raio refletido e o eixo de rotação (igual ao eixo da parábola). O ângulo refletido tem a mesma medida do ângulo de incidência em relação a uma reta normal, perpendicular à reta tangente no ponto de incidência. A tangente de uma parábola no ponto P, é a reta que tem em comum com a parábola esse único ponto P e tal que todos os demais pontos da parábola estão do mesmo lado dessa reta. Sobre isso temos o seguinte teorema:

**Teorema 2.4.1.** *Se a parábola é o gráfico da função  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , sua tangente no ponto  $P = (x_0, y_0)$ , onde  $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ , é a reta que passa por esse ponto e tem inclinação  $2ax_0 + b$ .*

Geometricamente, supondo  $a > 0$ , vamos provar que para todo  $x \neq x_0$ , então  $ax^2 + bx + c > ax_0^2 + bx_0 + c + (2ax_0 + b)(x - x_0)$ , onde  $(2ax_0 + b)(x - x_0) = y_1$  (veja Figura 31).

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 & ax^2 + bx + c - [a(x_0)^2 + bx_0 + c + (2ax_0 + b)(x - x_0)] \\
 = & ax^2 + bx + c - [a(x_0)^2 + bx_0 + c + 2ax_0x + bx - 2a(x_0)^2 - bx_0] \\
 = & ax^2 - a(x_0)^2 - 2ax_0x + 2a(x_0)^2 \\
 = & ax^2 - 2ax_0x + a(x_0)^2 \\
 = & a(x - x_0)^2 > 0
 \end{aligned}$$

Note que o termo  $(x - x_0)^2$  sempre será positivo. Para que se tenha  $(x - x_0)^2 = 0$ , então  $x = x_0$ . Concluimos neste caso que o ponto  $(x_0, y_0)$  é o único comum entre a parábola e a reta tangente e todos os outros pontos da parábola estarão apenas em um

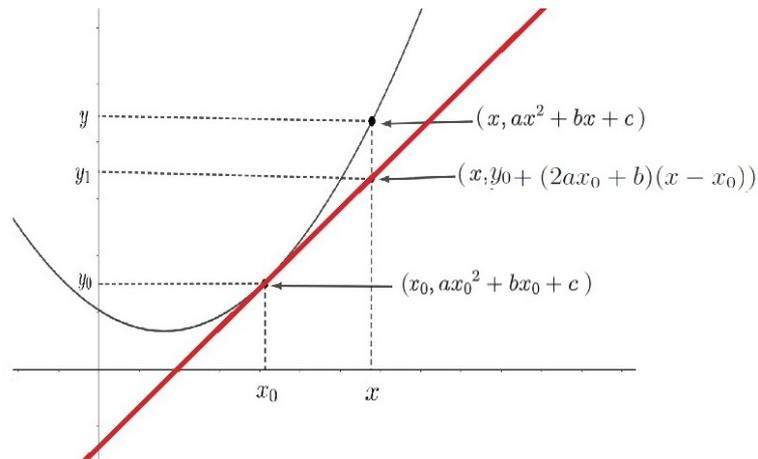


Figura 31 – Tangente em  $(x_0, y_0)$

Fonte: O Autor (2023)

semiplano delimitado pela reta tangente. Logo esta reta é tangente à parábola neste ponto. Mesmo na situação em que  $a < 0$  teríamos todos os pontos da parábola no semiplano abaixo da reta tangente. Uma vez bem definida a tangente, vemos que apesar de todas as retas paralelas ao eixo de simetria de uma parábola ter apenas um ponto em comum com ela, elas não são tangentes, pois há pontos da parábola em ambos semiplanos por ela determinados (veja Figura 32).

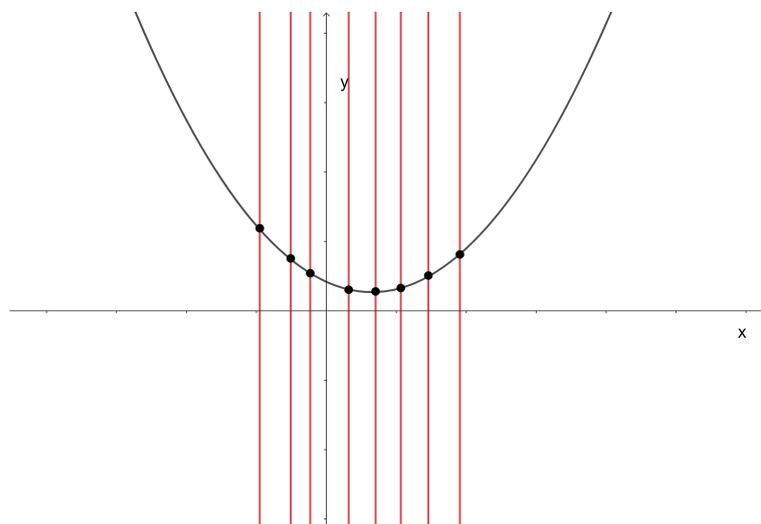


Figura 32 – Retas paralelas ao eixo y

Fonte: O Autor (2023)

Considerando a parábola sendo o gráfico da função  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , tome  $P(x, y)$  um ponto pertencente a parábola. Vamos calcular a inclinação da reta  $FQ$  que une o foco  $F$  ao ponto  $Q$ , pé da perpendicular baixada de  $P$  sobre a diretriz  $d$  (veja Figura 33). Caso  $P$  seja vértice da parábola, logo  $P = (-\frac{b}{2a}, 0)$ , daí a o coeficiente angular da

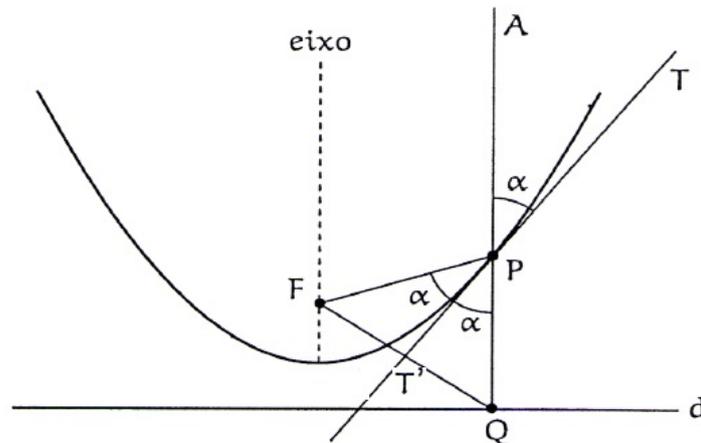


Figura 33 – reflexão da parábola

Fonte: O Autor (2023)

reta tangente no ponto P seria:

$$m = 2ax + b \implies m = 2a\left(-\frac{b}{2a}\right) + b \implies m = -b + b \implies m = 0$$

Então a reta  $FQ$  seria horizontal. Sendo as coordenadas do Foco  $F = (m, k + \frac{1}{4a})$  e  $Q = (x, k - \frac{1}{4a})$  onde  $m = -\frac{b}{2a}$  e  $k$  é a ordenada do vértice da parábola, caso P não seja vértice da parábola,  $FQ$  terá a seguinte inclinação:

$$\begin{aligned} \tan(FQ) &= \frac{k - \frac{1}{4a} - (k + \frac{1}{4a})}{x - m} \\ \tan(FQ) &= -\frac{2}{4a} \cdot \frac{1}{x - (-\frac{b}{2a})} \\ \tan(FQ) &= -\frac{2}{4a} \cdot \frac{1}{(x + \frac{b}{2a})} \\ \tan(FQ) &= -\frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{(\frac{2ax+b}{2a})} \\ \tan(FQ) &= -\frac{1}{2a} \cdot \left(\frac{2a}{2ax+b}\right) \\ \tan(FQ) &= -\frac{1}{2ax+b} \end{aligned}$$

Com isso concluímos que  $FQ$  e  $PT'$  são perpendiculares, pois a tangente de  $FQ$  é o oposto do inverso da tangente de  $PT'$ . Sendo o  $\triangle FPQ$  isósceles, o  $\triangle FPT' \equiv \triangle QPT'$  pelo caso especial Cateto Hipotenusa. Então  $F\hat{P}T' \equiv Q\hat{P}T'$ , e como  $A\hat{P}T$  é ângulo oposto pelo vértice com  $Q\hat{P}T'$ , o ângulo  $F\hat{P}T' \equiv A\hat{P}T$  (veja Figura 33). Este argumento matemático é bem mais forte, pois comprova que o ângulo de incidência em um ponto tangente a uma parábola é igual ao ângulo de reflexão (LIMA, 2011).

### 2.4.3 Hipérbole

Uma hipérbole é o conjunto de todos os pontos em um plano cujo módulo da diferença entre as distâncias a dois pontos  $F_1$  e  $F_2$  (os focos), é uma constante  $2a > 0$ . Se  $P(x, y)$  é um ponto da hipérbole, devemos ter  $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$ . Essa definição é ilustrada na Figura 34:

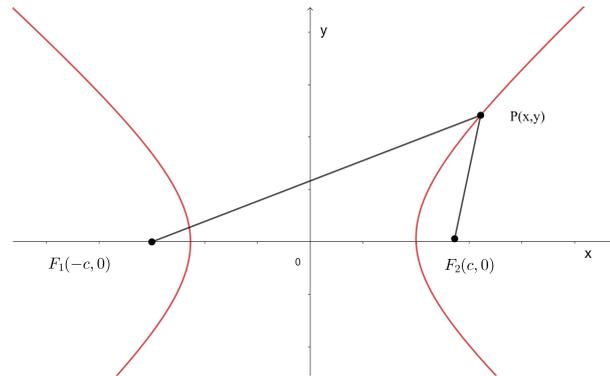


Figura 34 – Elementos da Hipérbole

Fonte: O Autor (2023)

A obtenção da equação da hipérbole quando os focos estão sobre o eixo  $x$  é análoga à obtenção dada anteriormente para uma elipse. Assim, se a hipérbole tem os focos  $\{(-c, 0), (c, 0)\}$  e  $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$ , considerando  $d(P, F_1) > d(P, F_2)$ , temos que:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado temos:

$$\begin{aligned}x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\ 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 4cx - 4a^2 \\ a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= cx - a^2.\end{aligned}$$

Elevamos ao quadrado novamente, obtemos:

$$\begin{aligned}a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\ a^2x^2 + a^2(-2xc) + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 + a^2(-2cx) + c^2x^2 \\ a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 + c^2x^2 \\ a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2).\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade triangular no triângulo  $F_1F_2P$ , vemos que  $2c > 2a$ , assim  $c > a$  e, portanto,  $c^2 - a^2 > 0$ . Por conveniência, seja  $b^2 = c^2 - a^2$ , então  $-b^2 = a^2 - c^2$ . Daí segue que:

$$(-b^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(-b^2)$$

Dividindo os membros da equação por  $-a^2b^2$ , temos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Os pontos  $(a, 0)$  e  $(-a, 0)$  são os vértices da hipérbole. A partir da equação acima vemos que a hipérbole é simétrica em relação a ambos os eixos, pois se trocarmos  $x$  por  $-x$  ou  $y$  por  $-y$ , a equação não se altera, e obtemos também:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} \geq 1$$

Isso mostra que  $x^2 \geq a^2$ , assim  $|x| = \sqrt{x^2} \geq a$ . Portanto temos  $x \geq a$  ou  $x \leq -a$ . Isso significa que a hipérbole consiste em duas partes, chamadas ramos. Tais ramos se aproximam das assíntotas  $y = \pm \frac{b}{a}x$ , isto é, eles chegam arbitrariamente próximos das assíntotas, conforme Figura 35.

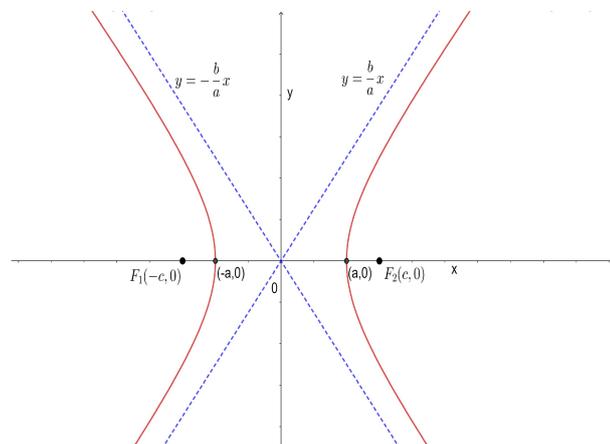


Figura 35 – Assíntotas com focos no eixo  $x$

Fonte: O Autor (2023)

Se os focos da hipérbole estiverem sobre o eixo  $y$  obtemos a equação:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

De onde temos  $y \geq a$  ou  $y \leq -a$ . Seus focos são  $(0, c)$  e  $(0, -c)$ , onde  $c^2 = a^2 + b^2$ , os pontos  $(0, a)$  e  $(0, -a)$  seus vértices e  $y = \pm(\frac{a}{b})x$ , suas assíntotas, como ilustrado na Figura 36.

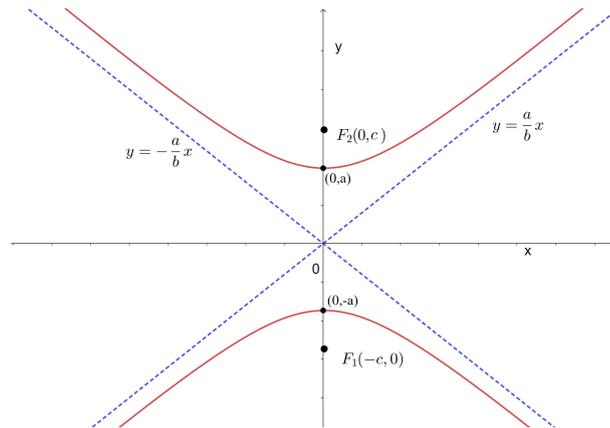


Figura 36 – Assíntotas com focos no eixo  $y$

Fonte: O Autor (2023)

Assim como no caso da parábola, a hipérbole tem uma notável propriedade reflexiva. A partir de um ponto qualquer podemos traçar um segmento de reta dirigido a um dos focos da hipérbole. Este segmento encontra o correspondente ramo da hipérbole num ponto, e se a partir deste traçarmos outro segmento que faça com a curva um ângulo igual ao do primeiro segmento, o segundo segmento passa pelo outro foco (veja Figura 37). Para a demonstração desta propriedade veja [Silva \(2013a\)](#), página 49.

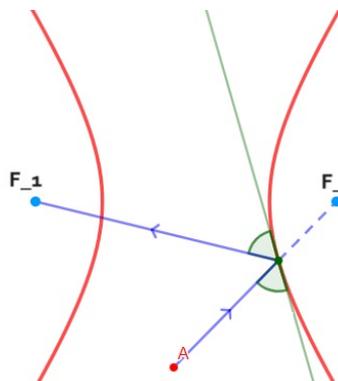


Figura 37 – Propriedade reflexiva da hipérbole

Fonte: O Autor (2023)

## 2.5 Geometria Plana - Trigonometria

Vamos definir as razões trigonométricas do ângulo agudo. Dado um ângulo agudo  $XOY = \alpha$ , toma-se por construção um ponto  $P$  qualquer do lado  $OY$  e traça-se a perpendicular  $PA$  ao lado  $OX$ , obtendo o triângulo retângulo  $OAP$ , retângulo em  $A$ .

**Definição 2.5.1.** *As razões trigonométricas associadas ao ângulo  $\alpha$  são:*

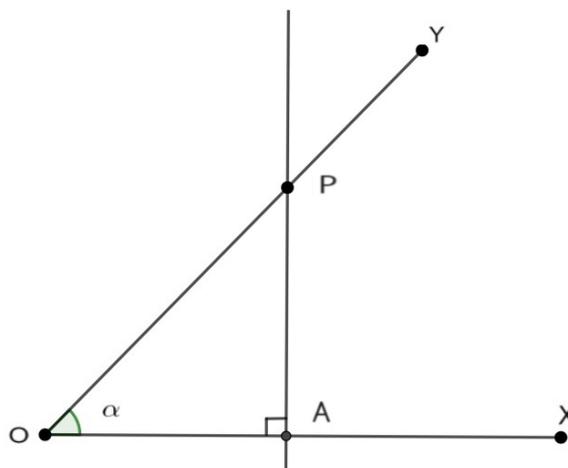


Figura 38 – Trigonometria

Fonte: o Autor (2023)

- i. Seno do ângulo  $XOY$ :  $sen\alpha = \frac{AP}{OP}$
- ii. Cosseno do ângulo  $XOY$ :  $cos\alpha = \frac{OA}{OP}$
- iii. Tangente do ângulo  $XOY$ :  $tan\alpha = \frac{AP}{OA}$

As razões trigonométricas mais conhecidas e utilizadas são as de ângulos agudos ( $A < 90^\circ$ ). Em algumas situações envolvendo cálculos de distâncias por meio da medida de ângulos, existe a necessidade de utilizarmos razões de ângulos obtusos ( $90^\circ < A < 180^\circ$ ). Para definir as razões trigonométricas para ângulos obtusos, utilizaremos o ciclo trigonométrico.

No plano cartesiano, o ciclo trigonométrico é o círculo  $\Upsilon$ , centrado na origem  $O(0,0)$ , com raio unitário de comprimento  $2\pi$  (NETO, 2013). Inserindo o triângulo  $OAP$  da definição 2.5.1 na circunferência  $\Upsilon$ , cada vértice estará associado a um par ordenado  $(x, y)$ . Assim  $O(0,0)$ ,  $A(x,0)$  e  $P(x,y)$ . A partir do ângulo suplementar de  $\alpha$ , temos no segundo quadrante o triângulo  $OA'P'$ , reto em  $A'$ , e simétrico de  $OAP$  (veja a Figura 39). Da mesma maneira, o triângulo  $OA'P'$  tem cada vértice associado a um par ordenado, de modo que,  $O(0,0)$ ,  $A'(-x,0)$  e  $P'(-x,y)$ .

Em relação às definições de Seno e Cosseno (2.5.1) e como o raio de  $\Upsilon$  é unitário, temos:

$$sen\alpha = \frac{AP}{OP} \rightarrow sen\alpha = AP$$

$$cos\alpha = \frac{OA}{OP} \rightarrow sen\alpha = OA$$

Da mesma maneira, para  $180^\circ - \alpha$ , temos:

$$sen(180^\circ - \alpha) = \frac{A'P'}{OP'} \rightarrow sen(180^\circ - \alpha) = A'P'$$

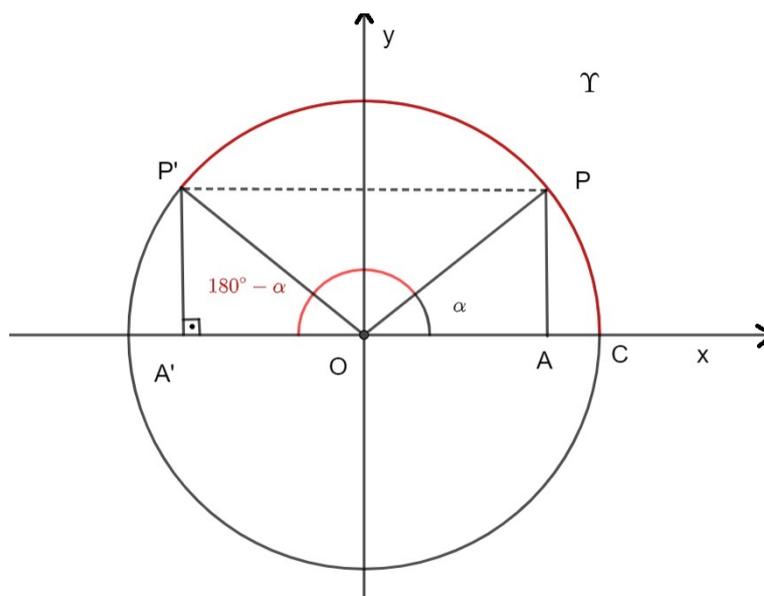


Figura 39 – Ciclo Trigonométrico

Fonte: o Autor (2023)

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{OA'}{OP'} \rightarrow \cos(180^\circ - \alpha) = OA'$$

Assim os valores de Seno e Cosseno serão numericamente iguais aos valores de projeções nos eixos cartesianos  $y$  e  $x$  respectivamente. Isso nos leva a seguinte definição:

**Definição 2.5.2.** *O seno de um ângulo obtuso é igual ao seno do suplemento desse ângulo. O cosseno de um ângulo obtuso é o oposto do cosseno do suplemento desse ângulo.*

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(180^\circ - \alpha)$$

$$\operatorname{cos} \alpha = -\operatorname{cos}(180^\circ - \alpha)$$

Poderá encontrar mais detalhes referente a esta definição em [Neto \(2013\)](#).

### 2.5.1 Lei dos cossenos

A Lei dos Cossenos é uma relação muito útil que envolve os três lados do triângulo e o cosseno de um dos ângulos. Podemos enunciar-la como: o quadrado de um dos lados do triângulo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado entre eles.

Para demonstrá-la considere um triângulo  $ABC$ , acutângulo, ou seja, com todos os ângulos internos menores que  $90^\circ$ . Seja  $\hat{A} < 90^\circ$  o ângulo escolhido, e  $D$  a projeção do vértice  $B$  sobre a reta  $AC$  (veja a Figura 40). Sejam  $AB = c$ ,  $AC = b$  e  $BC = a$ . Como

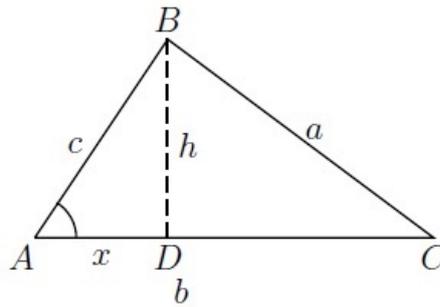


Figura 40 – Lei dos Cossenos - Triângulo Acutângulo

Fonte: o Autor (2023)

$\hat{A} < 90^\circ$  então  $D$  está na semirreta  $AC$ . Seja  $AD = x$ . Assim  $DC = |b - x|$ . No triângulo  $BDC$  o teorema de Pitágoras fornece:

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + |b - x|^2 \\ a^2 &= h^2 + b^2 + x^2 - 2bx. \end{aligned}$$

No triângulo  $BDA$  temos, pelo mesmo teorema,  $h^2 = c^2 - x^2$ . Substituindo ficamos com:

$$\begin{aligned} a^2 &= c^2 - x^2 + b^2 + x^2 - 2bx \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bx. \end{aligned}$$

Entretanto, em qualquer uma das Figuras tem-se  $\frac{x}{c} = \cos \hat{A}$  ou seja,  $x = c \cdot \cos \hat{A}$ . Substituindo esse valor de  $x$  na última relação encontramos  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$

Agora considere o triângulo  $ABC$ , obtusângulo, ou seja, contendo um ângulo interno maior que  $90^\circ$  e menor que  $180^\circ$ . Seja  $D$  a projeção do vértice  $B$  sobre a reta  $AC$ . Neste caso,  $D$  está na semirreta oposta à semirreta  $AC$  (veja a Figura 41). Como no caso

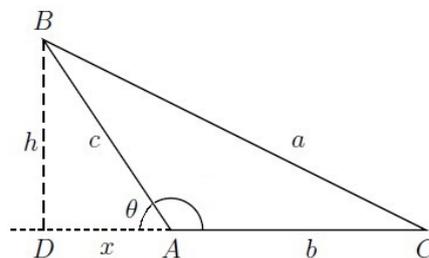


Figura 41 – Lei dos cossenos - Triângulo Obtusângulo

Fonte: o Autor (2023)

anterior,  $AD = x$  e  $\theta = 180^\circ - \hat{A}$ , o ângulo externo de  $ABC$ . A aplicação do teorema de Pitágoras no triângulo  $BDC$ , temos:

$$a^2 = h^2 + (b + x)^2$$

$$a^2 = h^2 + b^2 + x^2 + 2bx \quad (i)$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo  $BDA$ , temos:

$$c^2 = h^2 + x^2$$

Substituindo  $h^2 + x^2$  em (i), temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bx.$$

Porém, neste caso,  $\cos\theta = \frac{x}{c}$  e, conseqüentemente,  $\cos\hat{A} = -\frac{x}{c}$ , ou seja,  $x = -c \cdot \cos\hat{A}$ . Substituindo na relação anterior ficamos com  $a^2 = b^2 + c^2 + 2b(-c \cdot \cos\hat{A})$ , ou seja,  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{A}$ , que coincide exatamente com a relação para triângulos acutângulos (ALMEIDA, 2023).

### 2.5.2 Lei dos Senos

Com a lei dos Senos, será possível determinar a medida de um lado desconhecido de um triângulo qualquer, uma vez que saibamos o valor do ângulo oposto a este lado, e de outro ângulo com seu respectivo lado oposto. Será possível também calcular a medida de um ângulo, se soubermos o valor de seu lado oposto, junto com a medida de outro ângulo e seu respectivo lado oposto.

Podemos enunciar melhor esta relação como: a razão entre um lado do triângulo e o seno do ângulo oposto é igual ao diâmetro da circunferência circunscrita (PRECIOSO, 2023). A Figura 42 mostra o triângulo  $ABC$ , com lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , inscrito em uma circunferência de raio  $R$ . Traçamos o diâmetro  $BD$ . Assim, o ângulo  $B\hat{C}D$  é reto e os ângulos  $B\hat{A}C$  e  $B\hat{D}C$  possuem a mesma medida, pois subtendem o mesmo arco  $BC$ . O seno do ângulo  $B\hat{D}C$  é igual a  $\frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}$ . Então,  $\text{sen}A = \frac{a}{2R}$ , ou seja,  $\frac{a}{\text{sen}A} = 2R$ .

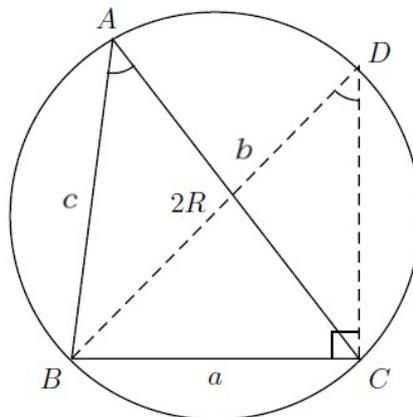


Figura 42 – Lei dos Senos

Esta relação mostra que a razão entre um lado do triângulo e o seno do ângulo oposto é igual ao diâmetro da circunferência circunscrita e, naturalmente, essa relação vale qualquer que seja o lado escolhido. A Lei dos Senos no triângulo ABC é escrita assim:  $\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} = 2R$ , onde R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

## 2.6 Geometria Esférica

O Plano Celeste é considerado uma esfera de raio infinito, tendo o observador na Terra em seu centro. Uma vez que o planeta Terra é um elipsoide quase esférico e levemente achatado nos polos, entendemos que a geometria plana não contém os elementos necessários que nos ajudem a compreender o plano celeste. Por isso precisamos de uma geometria não euclidiana, a geometria esférica (BEZERRA, 2019). Seguem suas principais definições.

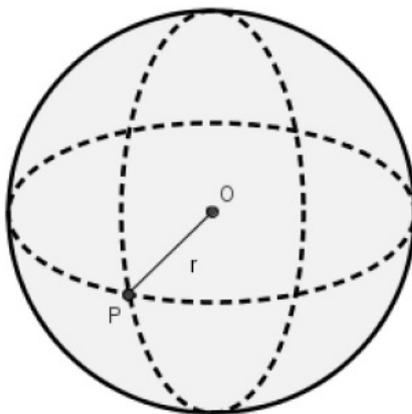


Figura 43 – Esfera

Fonte: (BEZERRA, 2019)

**Definição 2.6.1.** *Esfera de centro  $O$  de raio  $r > 0$  é o conjunto dos pontos  $P$  do espaço, tais que, a distância entre  $O$  e  $P$  seja menor ou igual do que  $r$ , isto é,  $d(O, P) \leq r$ .*

**Definição 2.6.2.** *Superfície Esférica: Chama-se superfície esférica de centro  $O$  e raio  $r$  ao conjunto dos pontos  $P$  do espaço, tais que, a distância entre  $O$  e  $P$  seja igual a  $r$ , isto é,  $d(O, P) = r$ .*

**Definição 2.6.3.** *Diâmetro da superfície esférica: É o segmento de reta que contém o centro da esfera e cujos extremos pertencem à superfície esférica.*

**Definição 2.6.4.** *Círculo máximo: A interseção de uma superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é uma circunferência de mesmo centro e mesmo raio, que é o raio da superfície esférica.*

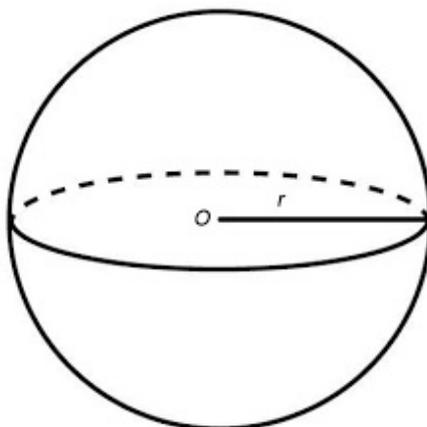


Figura 44 – Superfície Esférica

Fonte: (BEZERRA, 2019)

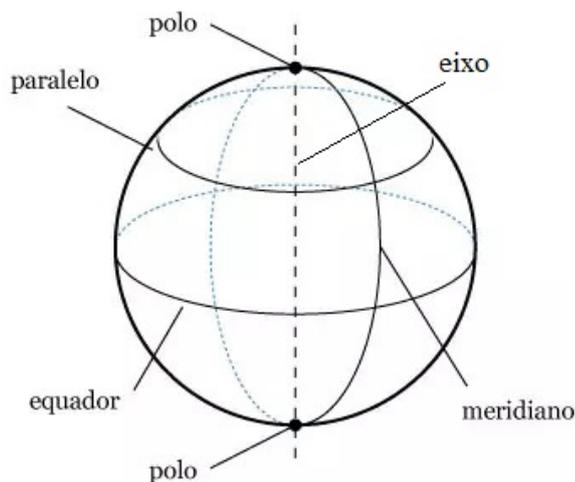


Figura 45 – Elementos da Esfera

Fonte: (BEZERRA, 2019)

**Definição 2.6.5.** *Elementos notáveis da superfície esférica:*

- *Eixo:* é qualquer reta que contém o centro  $O$ .
- *Polos:* são os pontos de interseção do eixo com a superfície esférica.
- *Paralelo:* é a circunferência cujo plano é perpendicular ao eixo.
- *Equador:* é a circunferência máxima cujo plano é perpendicular ao eixo.
- *Meridiano:* é uma semicircunferência máxima cujo plano contém o eixo e liga os polos.

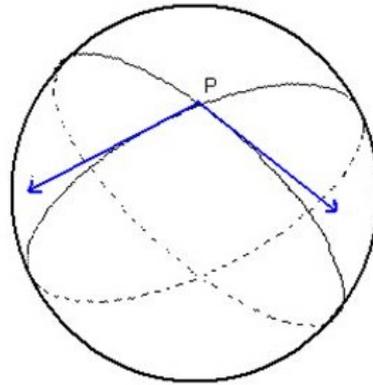


Figura 46 – Ângulo Esférico

Fonte: (BEZERRA, 2019)

**Definição 2.6.6.** *Ângulo esférico:* é o ângulo formado por dois arcos de circunferências máximas; quando dois arcos de circunferência máxima se intersectam, o ângulo  $\alpha$  formado por esses dois arcos é o ângulo entre as semirretas tangentes a esses arcos.

**Definição 2.6.7.** *Geodésica:* é a curva, contida na superfície esférica, que minimiza a distância entre dois pontos distintos. Ou seja, é o comprimento do menor arco de circunferência máxima que passa por dois pontos.

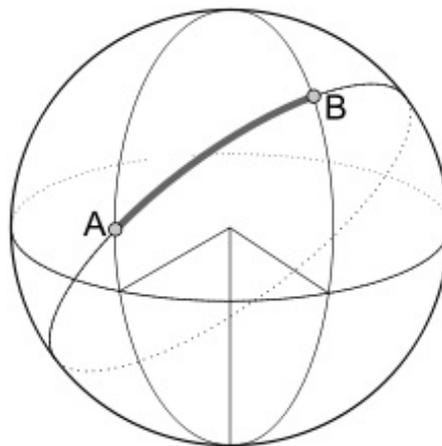


Figura 47 – Geodésica

Fonte: (BEZERRA, 2019)

**Definição 2.6.8.** *Fuso Esférico:* é a região da superfície esférica compreendida entre dois meridianos. Esses meridianos possuem dois pontos em comum, diametralmente opostos, que são os vértices do fuso e os meridianos são os lados do fuso.

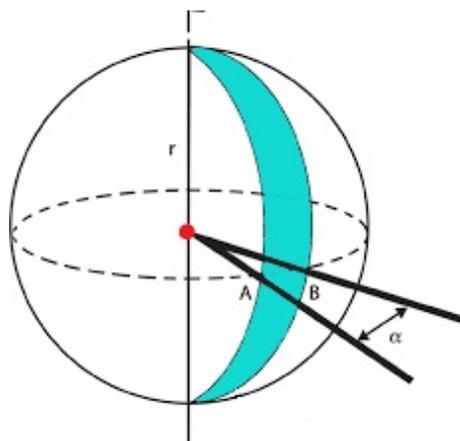


Figura 48 – Fuso Esférico

Fonte: (BEZERRA, 2019)

**Definição 2.6.9.** *Triângulo Esférico:* é a superfície limitada por três arcos de circunferências máximas, contida em algum hemisfério, sendo estes arcos menores que uma semicircunferência máxima.

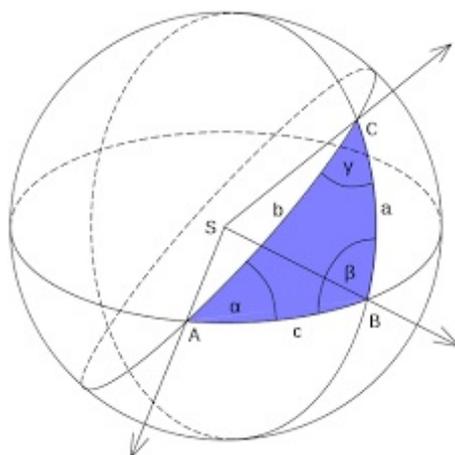


Figura 49 – Triângulo Esférico

Fonte: (BEZERRA, 2019)

Dois círculos máximos determinam dois fusos diametralmente opostos em uma esfera. A geodésica é um conceito muito importante na geometria esférica. Se na geometria euclidiana a menor distância entre dois pontos no plano é um segmento de reta, na geometria esférica esse papel é da geodésica.

Sobre os triângulos esféricos podemos relacionar as seguintes propriedades:

- A soma dos ângulos de um triângulo esférico é sempre maior que  $180^\circ$  e menor do que  $540^\circ$  e não é constante, dependendo do triângulo. De fato, o excesso a  $180^\circ$  é diretamente proporcional à área do triângulo.

- A soma dos lados de um triângulo esférico é maior do que zero e menor do que  $180^\circ$ .
- Os lados maiores estão opostos aos ângulos maiores no triângulo.
- A soma de dois lados do triângulo é sempre maior do que o terceiro lado, e a diferença é sempre menor.
- Cada um dos lados do triângulo é menor do que  $180^\circ$  e isso se aplica também aos ângulos.

### 2.6.1 Trigonometria Esférica

Na geometria esférica não basta apenas conhecer dois ângulos de um triângulo para se determinar o terceiro, como ocorre na geometria plana. Para isso se faz necessário conhecer no mínimo três elementos: ou três ângulos, ou três lados, ou dois lados e um ângulo, ou um ângulo e dois lados (KEPLER, 2018b).

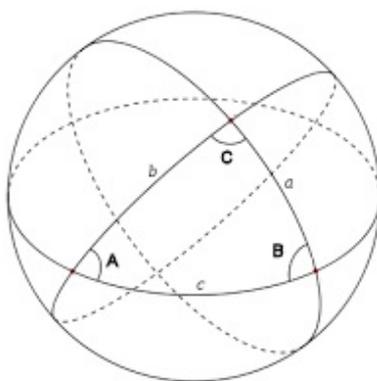


Figura 50 – Triângulo Esférico

Fonte: (SARAIVA, 2012)

Na Figura 50 os lados do triângulo esférico  $ABC$  são arcos de círculos máximos da esfera. Utilizamos letras maiúsculas ( $A$ ,  $B$  e  $C$ ) para os ângulos internos e letras minúsculas ( $a$ ,  $b$  e  $c$ ) para os lados. Seja  $ABC$  um triângulo esférico como na Figura 51, chamando os lados  $BC$  de  $a$ ,  $CA$  de  $b$  e  $AB$  de  $c$ . O lado  $a$  mede o ângulo  $BOC$  subtendido no centro da esfera  $O$  pelo arco de grande círculo  $BC$ . Similarmente,  $b$  é medido pelo ângulo  $AOC$  e  $c$  pelo ângulo  $AOB$ .

Seja  $AD$  a tangente em  $A$  do grande círculo  $AB$  e  $AE$  a tangente em  $A$  do grande círculo  $AC$ . Neste caso, a reta  $OA$  é perpendicular a  $AD$  e  $AE$ . Por construção,  $AD$  está no plano do grande círculo  $AB$ . Portanto, estendendo a reta  $OB$ , ela interceptará a tangente  $AD$  no ponto  $D$ . Observe ainda que  $OC$  interceptará a tangente  $AE$  em  $E$ .

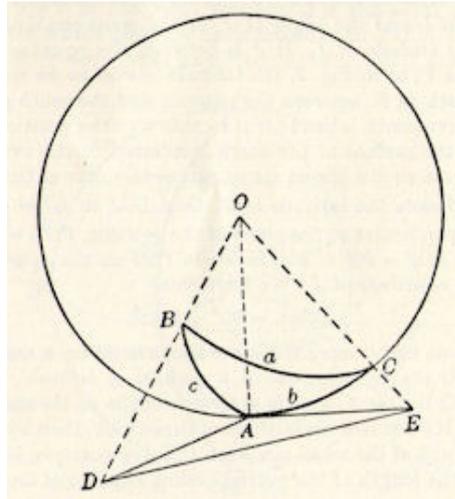


Figura 51 – Triângulo Esférico

Fonte: (SARAIVA, 2012)

O ângulo esférico  $BAC$  é definido como o ângulo entre as tangentes, em  $A$ , aos grandes círculos  $AB$  e  $AC$ . Logo,  $BAC = DAE$  (ângulo plano), e chamamos de  $\hat{A}$ .

No triângulo plano  $OAD$ , o ângulo  $O\hat{A}D$  é  $90^\circ$  (o ângulo reto está no meio do nome do triângulo) e o ângulo plano  $A\hat{O}D$  é idêntico ao ângulo  $AOB$ , que chamamos de  $c$ . Lembrando que:

$$AD = OA \cdot \tan(c)$$

$$OD = OA \cdot \sec(c)$$

Do triângulo plano  $OAE$  podemos deduzir:

$$AE = OA \cdot \tan(b)$$

$$OE = OA \cdot \sec(b)$$

E do triângulo plano  $DAE$  temos:

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2AD \cdot AE \cdot \cos\hat{A}$$

$$DE^2 = OA^2[\tan^2(c) + \tan^2(b) - 2\tan(b) \cdot \tan(c) \cdot \cos\hat{A}]$$

Do triângulo plano  $DOE$ :

$$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2OD \cdot OE \cdot \cos\hat{O}$$

Como  $DOE = BOC = a$ ,

$$DE^2 = OA^2[\sec^2(c) + \sec^2(b) - 2\sec(b) \cdot \sec(c) \cdot \cos(a)]$$

das quais obtemos

$$\sec^2(c) + \sec^2(b) - 2\sec(b) \cdot \sec(c) \cdot \cos(a) = \tan^2(c) + \tan^2(b) - 2\tan(b) \cdot \tan(c) \cdot \cos\hat{A}$$

Como:

$$\sec^2(c) = 1 + \tan^2(c)$$

$$\sec^2(b) = 1 + \tan^2(b)$$

Então:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sen(b) \cdot \sen(c) \cdot \cos \hat{A}$$

Assim obtemos uma fórmula trigonométrica que relaciona o ângulo esférico  $\hat{A}$  com três de seus lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Esta fórmula foi deduzida a partir da lei dos cossenos.

Podemos também deduzir com a lei dos senos. Considerando o triângulo esférico  $ABC$  da Figura 52, dos triângulos retângulos planos  $APM$  e  $OMA$ , que compartilham o lado  $AM$ , temos que:

$$AM = OA \cdot \sen(c) = \frac{AP}{\sen(B)}$$

Temos ainda que, os triângulos planos  $ONA$  e  $APN$ , compartilham o lado  $AN$ . Daí:

$$AN = OA \cdot \sen(b) = \frac{AP}{\sen(C)}$$

$$\frac{AP}{OA} = \sen(c) \cdot \sen(B) = \sen(b) \cdot \sen(C)$$

$$\frac{\sen(b)}{\sen(B)} = \frac{\sen(c)}{\sen(C)}$$

A mesma igualdade vale para a razão  $\frac{\sen(a)}{\sen(A)}$ . Esta então é a lei dos senos no triângulo esférico:

$$\frac{\sen(a)}{\sen(A)} = \frac{\sen(b)}{\sen(B)} = \frac{\sen(c)}{\sen(C)}$$

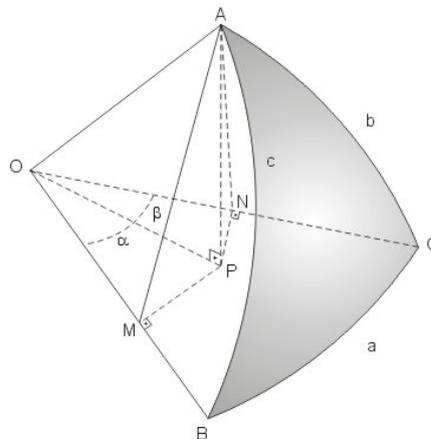


Figura 52 – Triângulo Esférico

Fonte: (SANTIAGO, 2012)

## 3 Matemática e Astronomia

Nesta seção, abordaremos temas específicos em astronomia com aplicações matemáticas. Ela terá um caráter mais interdisciplinar onde apresentaremos sugestões práticas a serem aplicadas em sala de aula. Iniciaremos com uma explanação sobre uma característica do calendário do mundo ocidental, a saber, o ano bissexto. Veremos como o Algoritmo de Zeller nos ajuda a determinar o dia da semana de uma data específica. A seguir, uma importante aplicação do Cálculo Diferencial e Integral ao se determinar a trajetória de um planeta. Também abordaremos aplicações de geometria plana na construção do Relógio do Sol. Destacaremos como o estudo das cônicas está presente na construção de instrumentos de observação astronômica. Por fim, vamos entender a aplicação da geometria esférica no processo de mapeamento do céu noturno.

### 3.1 Datas do Calendário e o Algoritmo de Zeller

O Algoritmo de Zeller, que foi descoberto pelo matemático alemão Julius Christian Johannes Zeller (1822 - 1899), tem como objetivo principal descobrir qual é o dia da semana correspondente a uma determinada data do passado ou do futuro. Uma data  $(d, m, A)$  será constituída por três números, onde  $d$  representa o dia,  $m$  representa o mês e  $A$  representa o ano. Para iniciarmos a construção do algoritmo, determinaremos algumas adaptações:

- o algoritmo terá validade a partir do ano 1601;
- precisaremos determinar a quantidade de anos bissextos desde 1600;
- colocaremos os meses de janeiro e fevereiro no final do ano, portanto adotaremos março como o primeiro mês. Por exemplo: 11 de setembro de 2001 será representado por  $(11, 07, 2001)$ .

O ano bissexto possui 366 dias e foi instituído pelo Papa Gregório em 24 de fevereiro de 1582, com o objetivo de corrigir 10 dias entre o calendário Juliano (criado por Júlio César em 46 a.C.) e o calendário solar. No calendário Juliano o ano era estimado em 365,25 dias. Mas mesmo esta aproximação não é exata, e como consequência temos um dia a menos a cada 128 anos. Em contra partida a cada 128 anos o calendário Gregoriano se adianta em 1 dia. Para resolver este problema, e assim tentar uma aproximação em relação ao ano sideral, decidiu-se eliminar alguns anos bissextos. Só seriam bissextos os anos centenários que fossem divididos por 400. ([HEFEZ, 2016](#))

**Proposição 3.1.1.** *Considerando a validade do algoritmo de Zeller a partir de 1601, para o intervalo  $]1600, A]$ , tem-se que:*

i. o número de anos múltiplos de 4 é

$$\left[ \frac{A}{4} \right] - 400.$$

ii. o número de anos centenários que não são bissextos é

$$\left[ \frac{A}{100} \right] - \left[ \frac{A}{400} \right] - 12.$$

iii. o número de anos bissextos é

$$B = \left[ \frac{A}{4} \right] - \left[ \frac{A}{100} \right] + \left[ \frac{A}{400} \right] - 388.$$

Demonstração:

i. Pelo Corolário 2.1.10, podemos determinar o número de múltiplos de 4 para o intervalo  $]1600, A]$ , como segue:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{A}{4} \right] - \left[ \frac{1600}{4} \right] \\ \left[ \frac{A}{4} \right] - 400 \end{aligned}$$

ii. O número de anos centenários desde o ano de 1601 até o ano A é dado por:

$$\left[ \frac{A}{100} \right] - \left[ \frac{1600}{100} \right] \tag{a}$$

e o número de anos centenários bissextos do ano 1601 ao ano A é dado por

$$\left[ \frac{A}{400} \right] - \left[ \frac{1600}{400} \right] \tag{b}$$

Subtraindo (a) de (b) temos o número de anos centenários que *não são bissextos*:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{A}{100} \right] - \left[ \frac{1600}{100} \right] - \left( \left[ \frac{A}{400} \right] - \left[ \frac{1600}{400} \right] \right) \\ \left[ \frac{A}{100} \right] - \left[ \frac{A}{400} \right] - \left[ \frac{1600}{100} \right] + \left[ \frac{1600}{400} \right] \\ \left[ \frac{A}{100} \right] - \left[ \frac{A}{400} \right] - 16 + 4 \\ \left[ \frac{A}{100} \right] - \left[ \frac{A}{400} \right] - 12 \end{aligned}$$

iii. Por fim para obtermos o número de anos bissextos  $B$  basta fazer  $i - ii$ :

$$B = \left[ \frac{A}{4} \right] - 400 - \left( \left[ \frac{A}{100} \right] - \left[ \frac{A}{400} \right] - 12 \right)$$

$$B = \left[ \frac{A}{4} \right] - \left[ \frac{A}{100} \right] - 388$$

■

Para os meses, temos um problema quanto à padronização, pois olhando um calendário é fácil perceber que os meses não tem todos o mesmo número de dias. Os meses de Janeiro, Março, Maio, Julho, Agosto, Outubro e Dezembro têm 31 dias, enquanto que os meses de Abril, Junho, Setembro e Novembro possuem 30 dias. O mês de fevereiro terá 28 dias, e em anos bissextos terá 29 dias. Esse motivo explica porque enumeramos os meses começando em Março e terminando em Fevereiro. (veja tabela 6)

Tabela 6 – Enumeração dos meses

mês	número
Março	1
Abril	2
Maio	3
Junho	4
Julho	5
Agosto	6
Setembro	7
Outubro	8
Novembro	9
Dezembro	10
Janeiro	11
Fevereiro	12

Fonte: O Autor (2023)

Seja  $S$  o dia da semana em função da data  $(d, m, A)$ , então  $S(d, m, A)$  relacionará o dia da semana com uma posição numérica, conforme Tabela 7. Por isso é preciso determinar uma fórmula para achar o dia da semana do primeiro dia do mês de março, a saber,  $(1,1,A)$ . A partir daí, se consegue determinar o dia da semana em que cai o 1º dia de cada mês  $m$  do mesmo ano, isto é,  $(1, m, A)$ . Para obter o 1º dia da semana de um mês  $m$  de um ano  $A$ , devemos somar o número de dias desse mês  $m$  ao seu 1º dia da semana. Por exemplo, 5 de Março de 2023, foi um domingo. Para determinar que dia da semana será o 5 de abril, devemos somar 31 dias ao dia 5, resultando em 36. Observe ainda que os dias da semana estão enumerados de 1 a 7. E este ciclo se repete de sete em sete. Por isso utilizamos a aritmética dos restos. Assim, dias 12, 19 e 26, também serão domingo. O dia

Tabela 7 – Dia da semana e sua congruência módulo 7

Dia da semana	$S(d,m,A)$	$(\text{mod } 7)$
Domingo	1	1
Segunda	2	2
Terça	3	3
Quarta	4	4
Quinta	5	5
Sexta	6	6
Sábado	7	0

Fonte: O Autor (2023)

33 (se existisse) também seria domingo. Logo o dia 5 de abril, será quarta-feira, três dias após o domingo.

Uma vez que Março é o primeiro mês da contagem, vamos determinar o dia da semana de 1º de Março de um ano  $A$  qualquer, com  $A > 1600$ . Seja  $s$  o dia da semana correspondente a 1º de março de 1601. Como 1601 foi um ano não bissexto, verificamos que existem 365 dias entre o 1º de março de 1601 e 1º de março de 1602. Assim, como  $365 \equiv 1 \pmod{7}$ , o dia 1º de março de 1602 será  $s + 1 \pmod{7}$ .

Para próximo ano, 1603, que também não é bissexto, também existem 365 dias entre o 1º de março de 1602 e 1º de março de 1603. Como  $365 \equiv 1 \pmod{7}$ , o dia 1º de março de 1603 será  $s + 1 + 1 \pmod{7}$ .

Agora, 1604 é um ano bissexto, logo existem 366 dias entre o 1º de março de 1603 e 1º de março de 1604. Como  $366 \equiv 2 \pmod{7}$ , o dia 1º de março de 1604 será  $s + 1 + 1 + 2 \pmod{7}$ . Então, sempre que o ano não é bissexto, acrescenta-se 1 dia ao 1º de março do ano subsequente, e caso o ano seja bissexto, acrescenta-se 2 dias.

Para exemplificar, suponha que 1º de Março de 1601 fosse um domingo. Então o 1º de Março de 1602 seria uma segunda-feira, e o 1º de Março de 1603 seria uma terça-feira. Mas o 1º de Março de 1604 seria uma quinta-feira. Com esse entendimento, somaremos a este dia da semana  $s$ , em uma congruência módulo 7, a quantidade de anos entre o ano  $A$  e 1600 (ou seja,  $A - 1600$ ) juntamente com cada ano bissexto neste período, que representaremos por  $B$ .

$$S(d, m, A) = s + A - 1600 + B \pmod{7}$$

$$S(d, m, A) = s + A - 1600 + \left[ \frac{A}{4} \right] - \left[ \frac{A}{100} \right] + \left[ \frac{A}{400} \right] - 388 \pmod{7}.$$

Como

$$-1600 - 388 = -1988 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$S(d, m, A) = s + A + \left[ \frac{A}{4} \right] - \left[ \frac{A}{100} \right] + \left[ \frac{A}{400} \right] \pmod{7}.$$

Agora, como o dia 1º de Março de 2023 foi quarta, logo  $S(1, 1, 2023) = 4$ . Substituindo na equação anterior, temos:

$$S(d, m, A) = s + A + \left[ \frac{A}{4} \right] - \left[ \frac{A}{100} \right] + \left[ \frac{A}{400} \right] \pmod{7}$$

$$4 = s + 2023 + \left[ \frac{2023}{4} \right] - \left[ \frac{2023}{100} \right] + \left[ \frac{2023}{400} \right] \pmod{7}$$

$$4 = s + 2023 + 505 - 20 + 5 \pmod{7}$$

$$4 = s + 2513 \pmod{7}$$

$$4 = s + 0 \pmod{7}$$

$$4 = s \pmod{7}.$$

Precisamos observar como esse dia  $s$  se comporta com o passar dos meses. Sabemos que 1º de Março de 1601 foi uma quarta. Então para o dia 1º de abril desse ano  $A$ , devemos somar 31 dias ao 1º de março. Como  $31 \equiv 3 \pmod{7}$ , temos então:

$$S(1, 2, A) = 3 + S(1, 1, A) \pmod{7}$$

$$S(1, 2, A) = 3 + 4 \pmod{7}$$

$$S(1, 2, A) = 7 \pmod{7}.$$

Logo o 1º dia do mês de Abril do ano  $A$  será Sábado.

Para o dia 1º de maio desse ano  $A$ , devemos somar 30 dias ao 1º de abril. Como  $30 \equiv 2 \pmod{7}$ . Temos:

$$S(1, 3, A) = 2 + S(1, 2, A) \pmod{7}$$

$$S(1, 3, A) = 2 + 7 \pmod{7}$$

$$S(1, 3, A) = 2 \pmod{7}.$$

Logo o dia 1º de maio do ano  $A$  será Segunda-feira.

Para o dia 1º de junho desse ano  $A$ , devemos somar 31 dias ao 1º de maio. Já vimos anteriormente que  $31 \equiv 3 \pmod{7}$ . Teríamos então:

$$S(1, 4, A) = 3 + S(1, 3, A) \pmod{7}$$

$$S(1, 4, A) = 3 + 2 \pmod{7}$$

$$S(1, 4, A) = 5 \pmod{7}.$$

Logo o 1º dia do mês de Junho do ano  $A$  será quinta.

Como posto anteriormente, com exceção de Fevereiro, os meses são de 30 dias ou 31 dias. Ora,  $30 \equiv 2 \pmod{7}$  e  $31 \equiv 3 \pmod{7}$ . Sendo  $s$  o 1º de março, temos que o

1º de abril será  $s + 3$  e o 1º de maio será  $s + 3 + 2$  e assim sucessivamente, conforme se observa na tabela 8.

Temos então, 11 incrementos, ou valores a serem somados com  $s$  (que neste caso é 4) num total de 29 dias. Com isso, os valores da coluna  $S(d, m, A) \pmod{7}$ , da tabela 8, seriam constantes, que somadas à expressão  $A + \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor \pmod{7}$ , indicariam o dia da semana correspondente ao dia 1º de cada mês subsequente.

É agora necessário encontrar uma função que dê para cada mês o incremento que lhe corresponde. Zeller encontrou a função que leva seu nome  $[(2, 6)m - 0, 2] - 2$ , por um processo de tentativas e erros em que  $m$  representa o número do mês. Trabalhando um pouco com a função de Zeller, temos que:

$$\begin{aligned} & [(2, 6)m - 0, 2] - 2 \\ & \left\lfloor \frac{26}{10}m - \frac{2}{10} \right\rfloor - 2 \\ & \left\lfloor \frac{2}{10}(13m - 1) \right\rfloor - 2 \\ & \left\lfloor \frac{13m - 1}{5} \right\rfloor - 2 \end{aligned}$$

Tabela 8 – Incrementos dos meses e o dia da semana

Mês	Dias	Dias (mod 7)	Incrementos	$S(d, m, A)$	$S(d, m, A) \pmod{7}$	Dia da semana
Março	31	3	0	4	4	quarta
Abril	30	2	3	7	0	sábado
Maio	31	3	5	9	2	segunda
Junho	30	2	8	12	5	quinta
Julho	31	3	10	14	0	sábado
Agosto	31	3	13	17	3	terça
Setembro	30	2	16	20	6	sexta
Outubro	31	3	18	22	1	domingo
Novembro	30	2	21	25	4	quarta
Dezembro	31	3	23	27	6	sexta
Janeiro	31	3	26	30	2	segunda
Fevereiro	28	0	29	33	5	quinta

Fonte: O Autor (2023)

Exemplificando como a função de Zeller nos ajuda a encontrar esses incrementos, temos que para o 1º mês (Março):

$$\left\lfloor \frac{13 \cdot 1 - 1}{5} \right\rfloor - 2$$

$$2 - 2 = 0$$

Para o 2º mês (abril) :

$$\left[ \frac{13 \cdot 2 - 1}{5} \right] - 2$$

$$5 - 2 = 3.$$

A função de Zeller contribui com o ajuste dos incrementos ou somas de dias na passagem entre os meses. Assim ele cumpre um papel importante na sistematização de um algoritmo que nos permite determinar o dia da semana de qualquer data a partir do ano de referência escolhido, a saber 1600.

Logo, em um ano  $A$ , teremos então para uma data  $(1, 1, A)$ , a implementação de “ $A - 1600$ ” dias  $(\text{mod } 7)$  somados aos dias da função de Zeller. Entretanto, se esse ano  $A$  for bissexto, temos que o mês de fevereiro (último mês do ano conforme tabela 6) terá um dia a mais.

Implementando a função de Zeller aos anos bissextos ( $B$ ), e considerando que 1º de Março de 1600 foi quarta ( $s = 4$ ) temos:

$$S(1, m, A) \equiv \left( 4 + \left[ \frac{13m - 1}{5} \right] - 2 + A + \left[ \frac{A}{4} \right] - \left[ \frac{A}{100} \right] + \left[ \frac{A}{400} \right] \right) \pmod{7}$$

$$S(1, m, A) \equiv \left( 2 + \left[ \frac{13m - 1}{5} \right] + A + \left[ \frac{A}{4} \right] - \left[ \frac{A}{100} \right] + \left[ \frac{A}{400} \right] \right) \pmod{7}$$

Note que para esta última expressão, vemos que o dia 1º do mês passou a estar relacionado com a constante 2. Com isso podemos estabelecer uma relação biunívoca entre o dia  $d$  do mês e o dia  $s$  da semana. Por exemplo,  $S(1, m, A) = 2$ ,  $S(2, m, A) = 3$ ,  $S(3, m, A) = 4$  e assim por diante. Assim  $s = d + 1$ . Com isso temos:

$$S(d, m, A) \equiv \left( d + 1 + \left[ \frac{13m - 1}{5} \right] + A + \left[ \frac{A}{4} \right] - \left[ \frac{A}{100} \right] + \left[ \frac{A}{400} \right] \right) \pmod{7}$$

**Exemplo 3.1.2.** *Que dia da semana caiu 21/07/1978?*

Temos,  $d = 21$ ,  $m = 5$  (veja Tabela 6) e  $A = 1978$

$$S(d, m, A) \equiv \left( 21 + 1 + \left[ \frac{13 \cdot 5 - 1}{5} \right] + 1978 + \left[ \frac{1978}{4} \right] - \left[ \frac{1978}{100} \right] + \left[ \frac{1978}{400} \right] \right) \pmod{7}$$

$$S(d, m, A) \equiv 21 + 1 + 12 + 1978 + 494 - 19 + 4 \pmod{7}$$

$$S(d, m, A) \equiv 2491 \pmod{7}$$

$$S(d, m, A) \equiv 6 \pmod{7}$$

Portanto 21/07/1978 caiu na Sexta-feira, conforme Tabela 7.

**Exemplo 3.1.3.** *Que dia da semana caiu 27/03/2017?*

Temos,  $d = 27$ ,  $m = 1$  (veja Tabela 6) e  $A = 2017$

$$S(d, m, A) \equiv \left( 27 + 1 + \left\lfloor \frac{13 \cdot 1 - 1}{5} \right\rfloor + 2017 + \left\lfloor \frac{2017}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2017}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2017}{400} \right\rfloor \right) \pmod{7}$$

$$S(d, m, A) \equiv 27 + 1 + 2 + 2017 + 504 - 20 + 5 \pmod{7}$$

$$S(d, m, A) \equiv 2536 \pmod{7}$$

$$S(d, m, A) \equiv 2 \pmod{7}$$

Portanto 27/03/2017 caiu na Segunda-feira, conforme Tabela 7.

Uma metodologia que pode estimular os alunos em sala de aula, fazendo uso do Algoritmo de Zeller, é o desenvolvimento de jogos no ambiente educacional. Esta metodologia é chamada de *gamificação*. Podemos desenvolver um aplicativo para telefone utilizando *softwares*, ou mesmo uma planilha eletrônica em um laboratório de informática, onde o algoritmo de Zeller seria usado de forma lúdica. Pode-se encontrar uma sugestão de atividade com uma planilha do editor de planilhas *Microsoft Excel*, em [Fernandes \(2020\)](#).

O professor precisará inicialmente apresentar o *Microsoft Excel*, e suas principais fórmulas e funções. No menu principal temos a aba “Fórmulas”, clicando neste temos “Inserir Função” (veja Figura 54). Aqui encontramos as principais funções a serem utilizadas nessa atividade, a saber:

- SOMA: soma todos os números em um intervalo de dados;
- SE: retorna um valor se uma condição for verdadeira e um outro valor se for falsa;
- MULT: multiplica todos os números dados como argumentos e retorna o produto;
- QUOCIENTE: retorna a parte inteira de uma divisão.

Para esta atividade, vale ressaltar que a escolha das células fica a critério do professor. A função de Zeller escolhida tem o formato:

$$(d, m, A) \equiv \left( d + 1 + \left\lfloor \frac{13 \cdot m - 1}{5} \right\rfloor + A + \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor \right) \pmod{7}$$

Na célula A1, digitamos  $d$  (onde  $1 \leq d \leq 31$ ); na célula B1, digitamos  $m$  (onde  $1 \leq m \leq 12$ ); e na célula C1 digitamos  $A$  (onde  $A > 1600$ ). Uma vez que colocamos os meses de janeiro e fevereiro no final do ano, e março como o primeiro mês, basta criar uma fórmula de condição baseada nas células B2, C2. Quando for digitado 1 ou 2 na célula B2, a célula K2 (escolhida pelo Autor) deverá retornar como valor corrigido conforme tabela 6, e nesse caso o ano atual será ajustado para o ano anterior. Usando a função “SE”, temos:

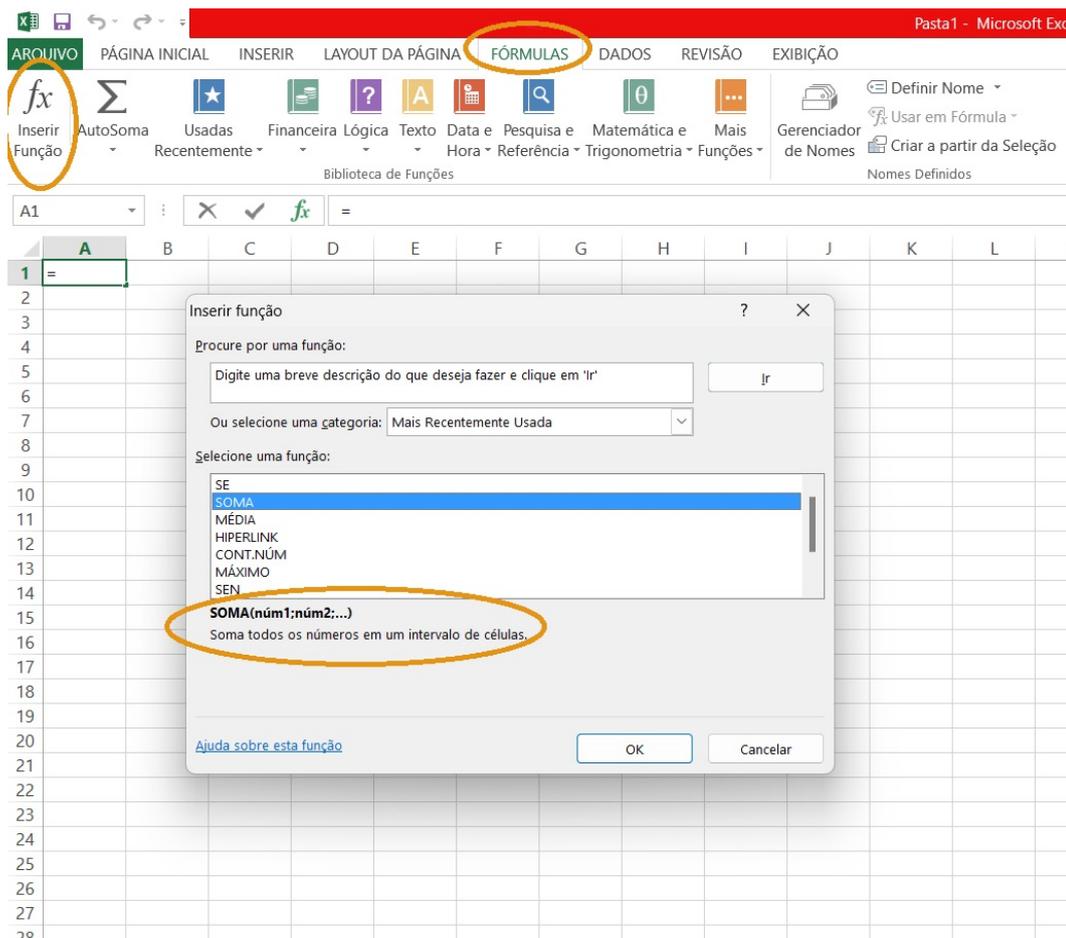


Figura 53 – Inserir função

Fonte: O Autor (2023)

- K2: =SE(B2>=3;B2-2;B2+10)
- L2: =SE(B2<=2;C2-1;C2)

Em seguida, usamos as fórmulas relacionadas a data, mês e ano:

- (data) F2: =A2+1
- (mês) G2: =(MULT(13;K2)-1)
- (mês) H2: =QUOCIENTE(G2;5)
- (ano) I2: =L2+QUOCIENTE(L2;4)+QUOCIENTE(L2;400)-QUOCIENTE(L2;100)

Depois a soma das células e o resto da divisão por 7:

- F4: =F2+H2+I2
- H4: =F4-(MULT(7;QUOCIENTE(F4;7)))

Para finalizar a atividade, faremos uma tabela com duas células, sendo uma superior intitulada “DIA DA SEMANA”, e uma célula inferior onde usaremos a função “SE” de maneira composta. A função “SE” pode ser aninhada <sup>1</sup>, onde várias condições devem ser indicadas para encontrar o resultado. Como a função “SE” é dividida entre afirmativa verdadeira ou falsa, basta preencher a alternativa falsa com uma nova condição “SE”, como se pode observar a seguir:

- DIA DA SEMANA: =SE(H5=1;"Domingo";SE(H5=2;"Segunda-Feira";SE(H5=3;"Terça-Feira";SE(H5=4;"Quarta-Feira";SE(H5=5;"Quinta-Feira";SE(H5=6;"Sexta-Feira";SE(H5=0;"Sábado"))))))))

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	<b>Dia</b>	<b>Mês</b>	<b>Ano</b>		<b>m</b>	<b>A</b>	<b>d+1</b>	<b>13m -1</b>		<b>[(13m -1)/5]</b>	<b>A + A/4 + A/400 - A/100</b>
2	21	7	1978		5	1978	22	64		12	2457
3											
4											
5	DIA DA SEMANA				<b>S(d,m,A) ≡ d+1+[(13m -1)/5] +A + A/4 + A/400 - A/100 (mod 7)</b>						<b>Resto da divisão por 7</b>
6	Sexta-Feira				2491						6

Figura 54 – Algoritmo de Zeller

Fonte: O Autor (2023)

A função de Zeller é uma demonstração de como a aritmética envolvida com divisibilidade de inteiros e a matemática dos restos, deram sua contribuição notável na compreensão de nosso calendário. Mas os fenômenos astronômicos, na maioria das vezes, sempre necessitaram de uma matemática mais avançada para serem estudados. A seguir, trataremos das aplicações do Cálculo no estudo de trajetórias planetárias.

### 3.2 A Trajetória de Júpiter e o Cálculo Integral

A descoberta arqueológica na antiga babilônia sobre o cálculo da trajetória de Júpiter, vista no Capítulo 1, evidencia que a matemática e a astronomia sempre andaram de mãos dadas. Os astrônomos babilônicos souberam determinar a velocidade de translação do planeta relacionando sua posição angular com o tempo deste percurso contado em dias. Para encontrar o deslocamento bastava realizar o produto da velocidade pelo tempo. Mas esta tarefa não é fácil quando a velocidade varia. Nestes casos, métodos mais eficientes podem ser determinados recorrendo ao Cálculo Diferencial e Integral.

O cálculo diferencial e integral como conhecemos foi desenvolvido no século XVII e tinha por objetivo resolver problemas matemáticos daquela época, a saber, determinar a

<sup>1</sup> “Aninhar” se refere à prática de unir várias funções em uma única fórmula.

reta tangente a uma curva, o comprimento de uma curva, da área de uma região sob a curva e do volume de um sólido. Uma importante relação a partir daí, foi perceber que a taxa de variação de uma função, em determinado intervalo, é numericamente igual ao coeficiente angular da reta tangente da curva relacionada ao gráfico desta função no mesmo intervalo. Ao que parece, os astrônomos babilônicos usavam uma técnica de integração numérica que mais tarde ficou conhecida como Regra dos Trapézios (WILHELM, 2018). Passaremos agora a dissertar sobre essa técnica de integração. Para isso, a próxima parte retomará alguns conceitos elementares sobre Integral, apresentados da subseção 2.3.3.

### 3.2.1 A Regra dos Trapézios

Pelo teorema 2.3.7, toda função monótona e contínua em um dado intervalo  $[a, b]$ , onde  $a$  e  $b \in \mathbb{R}$ , é integrável.

Conforme exemplificado em 2.3.8, seja  $P_k$  uma partição equiespaçada do intervalo  $[a, b]$ , tal que  $P_k = \{a = x_0 < x_1 < x_2, \dots, x_k = b\}$ , onde  $\Delta = \frac{b-a}{k}$ . Se aumentarmos infinitamente o número  $k$  de partições neste intervalo  $[a, b]$ , de modo que  $\Delta x$  tenda a 0, a soma das áreas dos retângulos de Riemann tenderá a um limite, e este por sua vez, será numericamente igual a área sob a curva do gráfico de  $f$  (veja Figura 55). Daí temos a seguinte igualdade:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

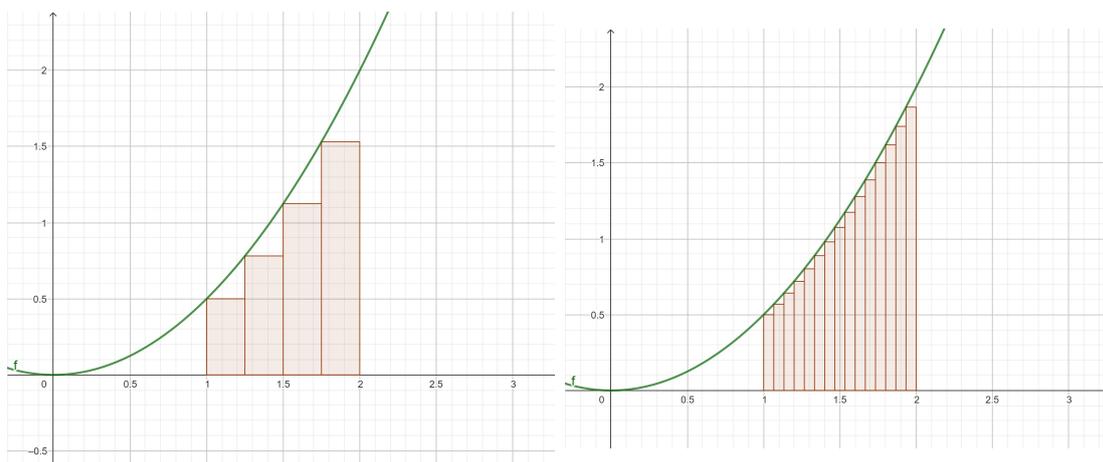


Figura 55 – Soma de Riemann

Fonte: O autor (2023)

No contexto geométrico, essa operação representa o cálculo da área da região sob a curva  $f(x)$ , para  $x$ ,  $a < x \leq b$  e acima do eixo das abcissas. Entretanto existem casos onde a solução analítica não é possível, já que a função é de elevada complexidade ou mesmo desconhecida, e aí podemos recorrer aos métodos numéricos (PILLING, 2010). A

regra dos trapézios, ou Trapézios Simples consiste em aproximar a área sob a curva da função  $f(x)$ , a partir da área de um trapézio, dada pela equação:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b - a).$$

Observe que, analogamente ao cálculo da área de um trapézio temos: base maior=  $f(b)$ , base menor=  $f(a)$ , altura=  $b - a$  (veja a Figura 56). Temos em particular que para  $f(x) = 0,5x^2$ ,  $a = 2$  e  $b = 3$ , a base maior será:  $f(2) = 2$ ; a base menor será:  $f(1) = 0,5$ ; e a altura:  $2 - 1 = 1$ . Daí:

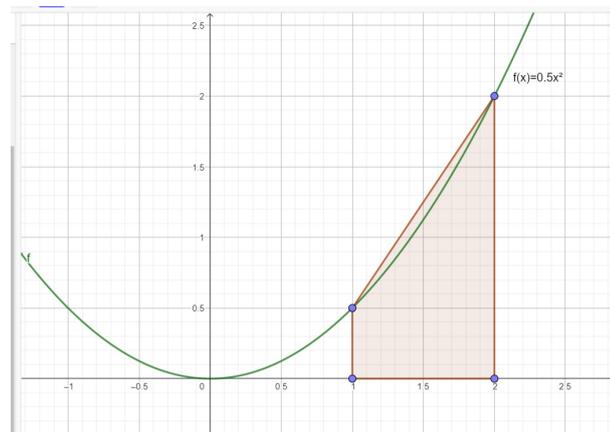


Figura 56 – Regra dos Trapézios

Fonte: O Autor (2023)

$$\int_1^2 (0,5)x^2 dx \approx \frac{2 + 0,5}{2} \cdot (2 - 1) \approx 1,25$$

Temos um erro ao aproximar a área sob a curva  $f(x) = (0,5)x^2$ .

$$\int_1^2 (0,5)x^2 dx = (0,5) \cdot \left( \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right) = 0,5 \cdot \frac{7}{3} = 1,166\dots$$

Vamos calcular o erro com 4 casas decimais:

$$1,2500 - 1,1666 = 0,0834$$

$$0,0834 \div 1,1666 = 0,0714$$

$$0,0714 \cdot 100 = 7,14\%$$

### 3.2.2 A Regra dos Trapézios Composta

Com o objetivo de minimizar o erro no uso da Regra dos trapézios simples, podemos aumentar o número de trapézios no dado intervalo. Ao decompor esse intervalo em sub-intervalos cada vez mais pequenos aplicamos nesses sub-intervalos a regra dos trapézios

simples. O intervalo  $[a, b]$  é particionado em  $n$  segmentos:  $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_i \leq \dots \leq x_n = b$ . Se definirmos  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ , e considerando que  $x_0 = a$  e  $x_n = b$ , pode-se tomar o limite quando  $n \rightarrow \infty$  para obter:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{b-a}{2n} \right) \left( f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + f(x_i) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n) \right)$$

Esta técnica se chama regra trapezoidal composta. Ela é dada pela equação:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{2} (f_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{2} (f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n)$$

Retomando o exemplo da Figura 56 vamos criar 5 partições de modo que:

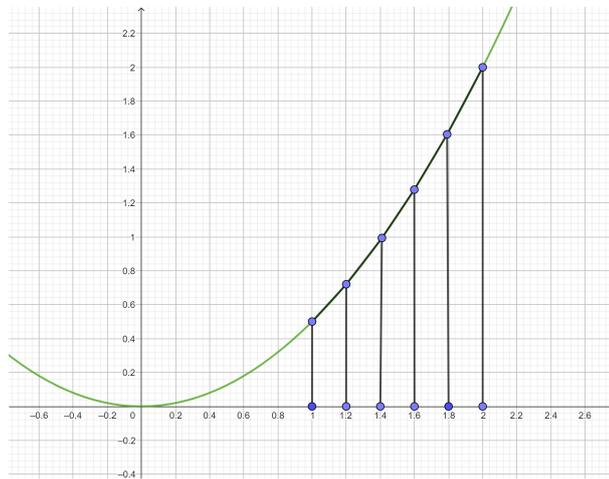


Figura 57 –  $f(x) = (0,5)x^2$  com 5 partições

Fonte: O Autor (2023)

$$i = 5$$

$$\Delta x = \frac{(2 - 1)}{5}$$

$$\Delta x = 0,2$$

$$f(1) = 0,5$$

$$f(1,2) = 0,72$$

$$f(1,4) = 0,98$$

$$f(1,6) = 1,28$$

$$f(1,8) = 1,62$$

$$f(2) = 2$$

$$\int_1^2 0,5x^2 dx \approx \frac{0,2}{2}(0,5 + 2 \cdot (0,72 + 0,98 + 1,28 + 1,62) + 2)$$

$$\int_1^2 0,5x^2 dx \approx 1,17$$

Agora calculando o erro temos:

$$1,1700 - 1,1666 = 0,0034$$

$$0,0034/1,1666 = 0,0029$$

$$0,0029 \cdot 100 = 0,29\%$$

Portanto, com uma margem de erro menor em comparação à regra do Trapézio simples, a Regra dos Trapézio Composta se mostra mais confiável ([WILHELM, 2018](#)).

O currículo da Educação Básica não contempla o estudo de Cálculo Diferencial e Integral conforme apresentado nesta seção. Entretanto o professor pode desenvolver uma atividade lúdica mostrando a dinâmica da trajetória dos planetas em torno de uma estrela, tal qual o nosso sistema solar. Uma atividade que pode ser desenvolvida encontra-se em [Pacheco \(2017\)](#), página 46. A atividade tem como objetivo simular os movimentos dos planetas de acordo com o modelo heliocêntrico por meio do uso do próprio corpo dos estudantes. Um dos objetivos é que o estudante entenda que esse movimento é mais rápido quando o planeta está mais perto do Sol.

Para esta atividade iremos utilizar apenas os 5 planetas mais próximos do Sol: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte e Júpiter. Os estudantes farão uma pesquisa sobre esses planetas, levantando informações tais como, sua distância em relação ao Sol, velocidade de translação, distância orbital (veja tabela 9). Esta atividade considera as órbitas dos planetas como círculos. Caso fossem elipses, precisaríamos das distâncias de cada planeta

Tabela 9 – Distância de 5 planetas ao Sol

Planeta	Distância ao Sol	Circunferência da Órbita	Velocidade de translação
Mercúrio	58.000.000 km	365.000.000 km	132.000 km h
Vênus	108.000.000 km	679.000.000 km	116.000 km h
Terra	150.000.000 km	939.000.000 km	107.000 km h
Marte	228.000.000 km	1.500.000.000 km	87.000 km h
Júpiter	778.340.000 km	4.888.000.000 km	46.500 km h

Fonte: O Autor (2023)

no Periélio (momento em que o planeta está mais próximo do Sol) e no Afélio (momento em que o planeta está mais distante do Sol). A média dessas distâncias é o centro da elipse. A partir daí, encontramos a posição dos dois focos, ao se determinar a distância do Sol ao centro da elipse. Para finalizar, utilizando uma escala apropriada, pegamos uma corda ou barbante com o comprimento igual a soma do Afélio com o Periélio. Daí,

traçamos a trajetória elíptica por fixar a corda ou barbante nos dois focos, esticando-a e contornando o formado da elipse (veja Figura 58).

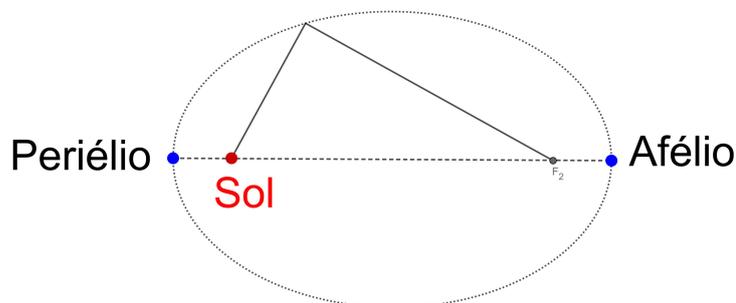


Figura 58 – Trajetória elíptica dos planetas

Fonte: O Autor (2023)

A tabela 10 mostra as distâncias aproximadas dos planetas ao Sol e as medidas reduzidas na escala de 1:100.000.000.000 (um para cem bilhões). Além de barbante, os

Tabela 10 – Distância de 5 planetas ao Sol

Planeta	Distância ao Sol em km	Redução para cm
Mercúrio	58.000.000 km	58 cm
Vênus	108.000.000 km	108 cm
Terra	150.000.000 km	150 cm
Marte	228.000.000 km	228 cm
Júpiter	778.340.000 km	778,34 cm

Fonte: O Autor (2023)

estudantes poderão utilizar fita colorida para marcar a trajetória dos planetas que irão representar. A quantidade de marcações em cada órbita corresponde, aproximadamente, ao período de cada planeta em sua órbita dividido pelo tempo de duas semanas (14 dias), de maneira a garantir que, se todos os personagens (que aqui representam os planetas) derem passos ao mesmo tempo, indo de uma marca até a seguinte, eles completarão suas respectivas revoluções na proporção correta existente entre os períodos dos planetas.

A Figura 59 mostra como deverá ficar a representação dos estudantes nas suas posições na órbita de cada planeta. Depois de todas as etapas finalizadas, os estudantes começam a simulação dos movimentos dos planetas alinhados, como se fossem iniciar uma corrida.

Seja por meio de uma análise matemática mais profunda ou simplesmente pela ludicidade no ensino, encontramos maneiras de ajudar os estudantes a perceber como o cálculo numérico explica as trajetórias planetárias.

Tabela 11 – Marcações dos planetas

Planeta	Período de Translação	Marcações
Mercúrio	88 dias	6
Vênus	224 dias	16
Terra	365 dias	26
Marte	686 dias	50
Júpiter	4.380 dias	286

Fonte: O Autor (2023)

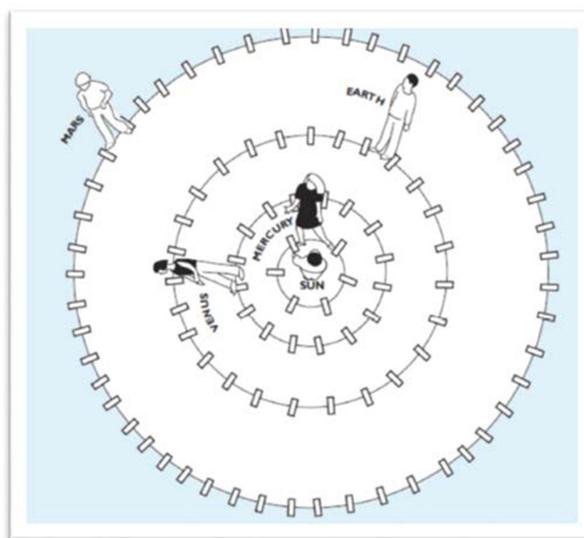


Figura 59 – Bagunça no espaço

Fonte: (PACHECO, 2017)

A próxima consideração mostrará como utilizar conhecimentos matemáticos de maneira mais instrumental. Passaremos a dissertar sobre o relógio do sol.

### 3.3 O Relógio do Sol – Geometria Plana e Analítica

O relógio de Sol é uma das formas mais primitivas de orientação temporal que se tem conhecimento. Possui dois componentes básicos e fundamentais: o instrumento que produz a sombra, o qual recebe o nome de gnômon e a superfície que a projeta definida como quadrante no qual são registrados as linhas horárias. Mas antes de falar de seu funcionamento, precisamos considerar alguns conceitos geográficos e matemáticos para a atividade de construção do relógio do sol.

### 3.3.1 Definindo o Norte, Latitude e Longitude

Vamos definir neste momento o conceito de Norte. Existem pelo menos três tipos de Norte que devemos levar em consideração para explorar a construção de um relógio do sol com uma turma de estudantes. Trata-se do Norte Geográfico, o Norte Magnético e o Norte Cartográfico. O Norte Geográfico ou Norte Verdadeiro é dado pelo eixo de rotação da terra. Já o Norte Magnético é dado pela agulha de uma bússola que fica em um dos polos do campo magnético terrestre. Estes dois nortes não são coincidentes, e a depender da localização no globo podem dar uma diferença muito grande. Enquanto o Norte Geográfico é fixo, o Norte Magnético está se movimentando ao longo dos séculos causando assim uma diferença angular entre eles (TIMBÓ, 2001). Esse ângulo formado entre a direção geográfica e a magnética é definido para cada lugar, para cada época. Temos também o Norte Cartográfico que é medido a partir da direção das linhas verticais em cartas topográficas.

Para o relógio do sol, precisamos determinar o norte geográfico. Vamos abordar duas estratégias e suas implicações matemáticas.

De acordo com Mendes (2017):

A sombra projetada de uma estaca fincada perpendicularmente ao solo - entre o nascer do sol e o meio dia - ocorre o movimento de ascensão do sol. Nascendo no horizonte, a sombra projetada pela estaca vai diminuindo e na parte da tarde volta a aumentar, logo em algum momento as sombras projetadas pela parte da manhã e pela parte da tarde serão iguais. A marcação desses dois momentos formará um ângulo que dividido ao meio (bissetriz do ângulo) teremos uma reta que é justamente a linha norte sul.

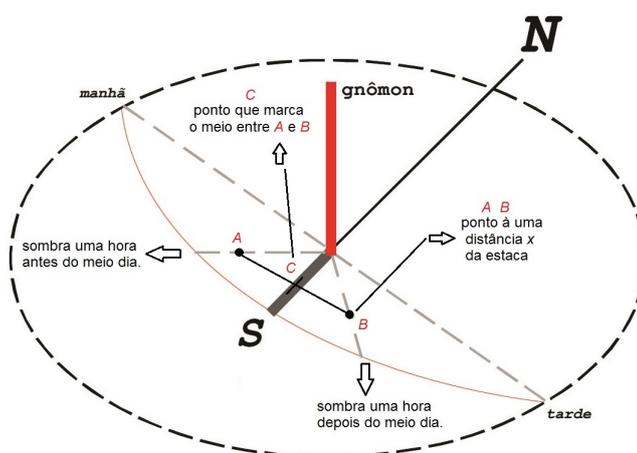


Figura 60 – Localizando o Norte

Fonte: (PAMPA, 2013)

Matematicamente falando, temos certeza deste fato pois, os pontos cardeais são

perpendiculares, logo a sombra da manhã e a sombra da tarde neste experimento, formam um triângulo isósceles cuja base é paralela à linha leste e oeste.

**Proposição 3.3.1.** *Em um triângulo isósceles, a mediatriz relativa à base, a bissetriz relativa ao ângulo oposto ao da base, a mediana e a altura relativas à base, coincidem.*

Demonstração:

Seja o triângulo isósceles ABC, tal que os lados AB e AC possuem a mesma medida, o ângulo  $\hat{B}$  possui mesma medida que o ângulo  $\hat{C}$  e M é o ponto médio do lado BC. Assim, pela definição de mediana temos que o segmento AM é mediana relativa ao lado BC e ao vértice A. Com isso o segmento AM divide o triângulo ABC em dois triângulos congruentes, AMC e AMB pelo caso Lado Lado Lado ( $\triangle AMC \equiv \triangle AMB$ , leia-se: triângulo AMC congruente ao triângulo AMB).

Daí temos que por  $B\hat{A}M \equiv M\hat{A}C$ , então o segmento AM é bissetriz de  $B\hat{A}C$ . Também, como os triângulos AMC e AMB são congruentes, temos que  $B\hat{M}A \equiv C\hat{M}A$ . Uma vez que os ângulos são suplementares então os ângulos  $B\hat{M}A$  e  $C\hat{M}A$  são retos ( $B\hat{M}A + C\hat{M}A = 180^\circ \rightarrow B\hat{M}A = C\hat{M}A = 90^\circ$ ). Daí, o segmento AM passa na mediatriz relativa à base BC, onde M é seu ponto médio. Logo o segmento AM é a altura do triângulo ABC. Assim, temos que  $\overline{AM}$  é bissetriz, mediana, e altura relativa à base. ■

Com isso, a determinação da direção Norte-Sul fica bem definida.

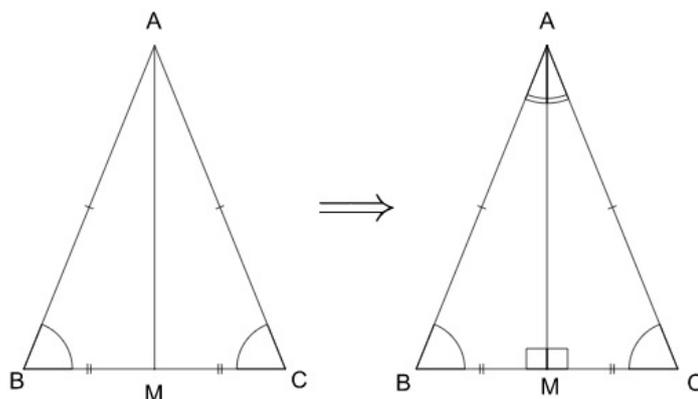


Figura 61 – Triângulo Isósceles

Fonte: (THOMÉ, 2022)

A Latitude é a coordenada geográfica ou geodésica definida na esfera, no elipsoide de referência ou na superfície terrestre, sendo que ela dá o ângulo entre o plano do equador e a normal à superfície de referência. De modo semelhante, a Longitude é definida como a distância em graus de qualquer ponto da Terra em relação ao meridiano de Greenwich. O meridiano de Greenwich é o meridiano principal, sendo que esse é igual a  $0^\circ$  e seu

antimeridiano igual a  $180^\circ$ , porém ambos dividem o globo terrestre em dois hemisférios: Leste ou Oriental, e Oeste ou Ocidental (veja Figura 62).

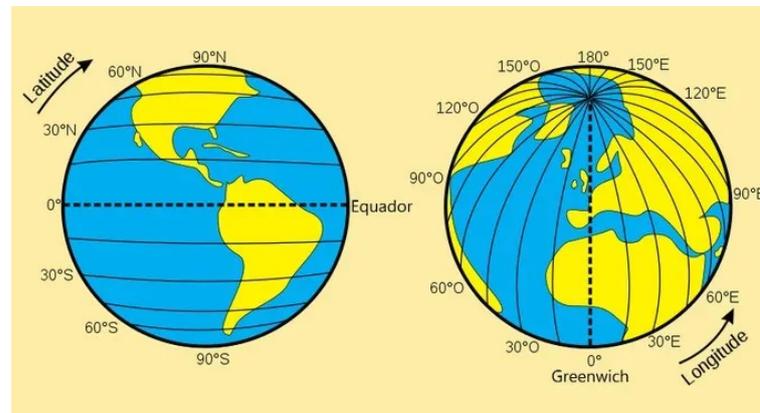


Figura 62 – Latitude e Longitude

Fonte: (THOMÉ, 2022)

### 3.3.2 A matemática do GPS

Em relação ao norte geográfico, o método mais confiável de identificação é através do Sistema de Posicionamento Global - GPS, que utiliza satélites para triangular a localização de qualquer pessoa no planeta, além de mostrar as latitudes e longitudes da localização atual.

Para entender melhor o funcionamento do GPS, temos 24 satélites que orbitam em torno da Terra, e há mais 8 deles orbitando a Terra, caso algum dos 24 principais satélites falhe. Estão a 20.200 km da superfície da Terra, colocados em uma trajetória que permite calcular a posição de qualquer objeto com um receptor de GPS. Os satélites estão organizados em 6 planos orbitais, onde cada plano possui 4 satélites equidistantes (veja Figura 63).

No sistema de triangulação do GPS, cada satélite é equipado com um relógio atômico incrivelmente preciso, que determinará a posição do receptor (pessoa ou objeto) através do cálculo do tempo entre o sinal emitido por um satélite em comparação com outros três. Basicamente, o receptor recebe três sinais com as posições conhecidas de três satélites e daí calcula sua posição no globo terrestre.

Considere conhecidas as posições de 3 satélites como  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ . Como o sinal emitido viaja a velocidade da luz  $c$ , o receptor determina sua distância de cada satélite por  $r = ct$ . No plano espacial, o satélite  $P_1$  determina uma esfera  $S_1$ , de raio  $r_1$  cujo centro é  $P_1$ . Recorrendo aos conceitos básicos de Geometria Analítica para a esfera temos,  $(x, y, z)$  a posição desconhecida do receptor e  $(a_1, b_1, c_1)$  a posição conhecida do satélite  $P_1$ . Daí a

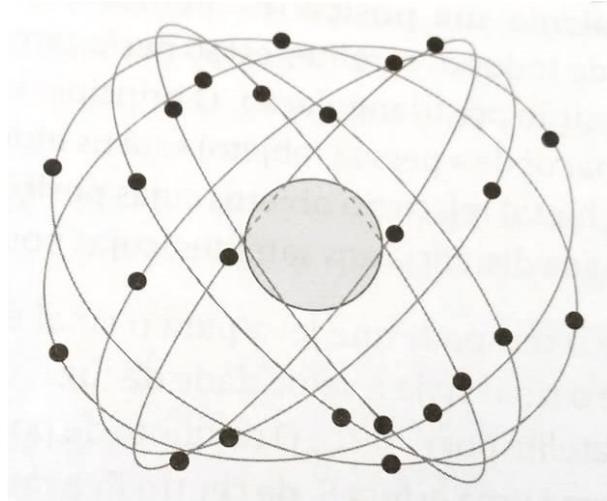


Figura 63 – Os 24 Satélites nos 6 planos orbitais

Fonte: (ROUSSEAU, 2021)

posição do receptor deve ser tal que satisfaça a equação:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = r_1^2 = c^2 \cdot t_1^2 \quad (\text{i})$$

Mas apenas a equação de  $S_1$  não é suficiente para se determinar a posição do receptor, precisamos de outro satélite emitindo um sinal para o receptor. Tomando uma segunda esfera  $S_2$  com centro em  $P_2$  e raio  $r_2$ , sendo a posição do receptor  $(x, y, z)$  desconhecida e a de  $P_2$   $(a_2, b_2, c_2)$  conhecida, temos:

$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 = r_2^2 = c^2 \cdot t_2^2 \quad (\text{ii})$$

Note que obtemos uma melhor localização, uma vez que pela intersecção das suas esferas  $S_1$  e  $S_2$  temos uma circunferência  $C_{1,2}$ . Para o receptor determinar sua posição final, faz-se necessário o sinal de mais um satélite  $P_3$ , onde teremos a esfera  $S_3$  com centro em  $P_3$  e raio  $r_3$ . Como a posição de  $P_3$   $(a_3, b_3, c_3)$  é conhecida, a equação para a posição do receptor  $(x, y, z)$  neste caso, fica:

$$(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 = r_3^2 = c^2 \cdot t_3^2 \quad (\text{iii})$$

Com isso temos a intersecção de  $S_3$  com  $C_{1,2}$ , sendo pelo menos dois pontos. Convenientemente os satélites são posicionados de modo que uma das soluções seja absurda, restando apenas as imediações da superfície terrestre.

Nestas equações são conhecidas as posições dos satélites ( $P_1, P_2$  e  $P_3$ ), bem como o tempo de cada sinal até o receptor ( $t_1, t_2$  e  $t_3$ ). Embora se tratem de equações quadráticas,

quando desenvolvemos os produtos notáveis e subtraímos (iii) de (i), obtemos:

$$\begin{aligned} x^2 - 2xa_1 + a_1^2 + y^2 - 2yb_1 + b_1^2 + z^2 - 2zc_1 + c_1^2 &= c^2t_1^2 \\ -(x^2 - 2xa_3 + a_3^2 + y^2 - 2yb_3 + b_3^2 + z^2 - 2zc_3 + c_3^2) &= -c^2t_3^2 \\ 2(a_3 - a_1)x + 2(b_3 - b_1)y + 2(c_3 - c_1)z &= c^2(t_1^2 - t_3^2) \end{aligned} \quad (\text{iv})$$

Subtraindo a equação (iii) da equação (ii), obtemos:

$$\begin{aligned} x^2 - 2xa_2 + a_2^2 + y^2 - 2yb_2 + b_2^2 + z^2 - 2zc_2 + c_2^2 &= c^2t_2^2 \\ -(x^2 - 2xa_3 + a_3^2 + y^2 - 2yb_3 + b_3^2 + z^2 - 2zc_3 + c_3^2) &= -c^2t_3^2 \\ 2(a_3 - a_2)x + 2(b_3 - b_2)y + 2(c_3 - c_2)z &= c^2(t_2^2 - t_3^2) \end{aligned} \quad (\text{v})$$

Simplificando ainda mais nossos cálculos colocamos (iv) e (v) em função de  $z$ .

$$\begin{aligned} 2(a_3 - a_1)x + 2(b_3 - b_1)y &= c^2(t_1^2 - t_3^2) - 2(c_3 - c_1)z \\ 2(a_3 - a_2)x + 2(b_3 - b_2)y &= c^2(t_2^2 - t_3^2) - 2(c_3 - c_2)z \end{aligned}$$

Aplicando a Regra de Cramer em (iv) e (v), temos:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2(a_3 - a_1) & 2(b_3 - b_1) \\ 2(a_3 - a_2) & 2(b_3 - b_2) \end{vmatrix} \\ D_x &= \begin{vmatrix} c^2(t_1^2 - t_3^2) - 2(c_3 - c_1)z & 2(b_3 - b_1) \\ c^2(t_2^2 - t_3^2) - 2(c_3 - c_2)z & 2(b_3 - b_2) \end{vmatrix} \\ D_y &= \begin{vmatrix} 2(a_3 - a_1) & c^2(t_1^2 - t_3^2) - 2(c_3 - c_1)z \\ 2(a_3 - a_2) & c^2(t_2^2 - t_3^2) - 2(c_3 - c_2)z \end{vmatrix} \\ x &= \frac{D_x}{D} \\ x &= \frac{\begin{vmatrix} c^2(t_1^2 - t_3^2) - 2(c_3 - c_1)z & 2(b_3 - b_1) \\ c^2(t_2^2 - t_3^2) - 2(c_3 - c_2)z & 2(b_3 - b_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(a_3 - a_1) & 2(b_3 - b_1) \\ 2(a_3 - a_2) & 2(b_3 - b_2) \end{vmatrix}} \quad (\text{vi}) \\ y &= \frac{D_y}{D} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 2(a_3 - a_1) & c^2(t_1^2 - t_3^2) - 2(c_3 - c_1)z \\ 2(a_3 - a_2) & c^2(t_2^2 - t_3^2) - 2(c_3 - c_2)z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(a_3 - a_1) & 2(b_3 - b_1) \\ 2(a_3 - a_2) & 2(b_3 - b_2) \end{vmatrix}} \quad (\text{vii}) \end{aligned}$$

A partir deste momento substituímos os valores de  $x$  e  $y$  na equação (iii) e obteremos uma equação quadrática que nos dará duas soluções  $z_1$  e  $z_2$ . A seguir, as substituições de  $z_1$  e  $z_2$  nas equações (vi) e (vii) nos dará os valores de  $x_1$ ,  $x_2$  e  $y_1$  e  $y_2$  (ROUSSEAU, 2021).

O próximo passo é alimentar o sistema, que faz todos os cálculos do GPS para que este nos dê o Norte Geográfico e as coordenadas Latitude e Longitude. Para isso faremos algumas importantes configurações. O Centro de nosso sistema de coordenadas será o centro da Terra. O eixo  $z$  passa pelos dois polos, orientado na direção do polo Norte. Os eixos  $x$  e  $y$  ficam ambos no plano equatorial. O eixo  $x$  positivo passa pelo ponto de longitude  $0^\circ$ . O eixo  $y$  positivo passa pelo ponto de longitude  $90^\circ$  oeste. A Latitude, portanto, é um ângulo  $\alpha$  no plano  $yz$  tal que  $\alpha \in [-90^\circ, 90^\circ]$ . A Longitude é um ângulo  $\beta$  no plano  $xy$  tal que  $\beta \in [0^\circ, 180^\circ]$ . Como o raio da Terra é de aproximadamente 6.365 km, existe um teto no cálculo da equação  $x^2 + y^2 + z^2 \approx (6.365 \pm 50)^2$ . Estes 50 km estabelecem uma zona de altitude segura para montanhas e aviões. Considerando que um receptor (objeto ou pessoa) esteja na altitude zero, onde  $R$  é o Raio da Terra, podemos determinar as coordenadas de Latitude e Longitude resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) \\ y = R \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) \\ z = R \cdot \sin(\alpha) \end{cases}$$

Como  $\alpha \in [-90^\circ, 90^\circ]$ , temos que:

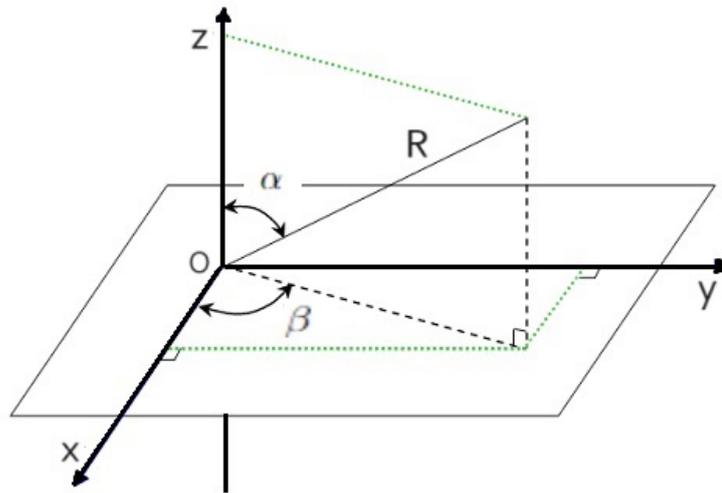


Figura 64 – Coordenadas Esféricas

Fonte: o Autor 2023

$$\alpha = \arcsen \frac{z}{R}$$

Com isso podemos facilmente calcular  $\cos(\alpha)$ . No caso da Longitude temos o sistema:

$$\begin{cases} \cos(\beta) = \frac{x}{R \cdot \cos(\alpha)} \\ \sin(\beta) = \frac{y}{R \cdot \cos(\alpha)} \end{cases}$$

A determinação do Norte Geográfico, junto com a Latitude da localidade, serão muito importantes para a construção do relógio do Sol, pois a inclinação correta do relógio do sol (ou do mostrador) deve ser a mesma da latitude local, uma vez que isso significa que a haste ou gnomo no relógio, deverá estar paralelo ao eixo de rotação da terra.

### 3.3.3 Trigonometria no Relógio do Sol

Nas aulas de geometria o professor pode utilizar o relógio de sol para ensinar medidas de ângulos, Figuras geométricas planas e também unidades de medidas. Por exemplo, o traçado do mostrador precisa ser uma semicircunferência de  $180^\circ$  com 12 divisões de  $15^\circ$ , sendo que cada  $15^\circ$  corresponde a uma hora. Ainda com o mostrador é possível descrever os conceitos de ângulos congruentes, adjacentes, complementares e suplementares. Também é possível classificar os ângulos descritos pelo mostrador com a sombra do ponteiro ou *gnomo* quanto à sua medida, a saber, o ângulo nulo, ângulos agudos, ângulo reto, ângulos obtusos e o ângulo raso. Observando a Figura 65, temos que  $w$  é o ângulo formado entre o raio de sol e a projeção vertical do gnomo. Entretanto a sombra  $PR$  projetada do gnomo a cada ângulo  $w$  corresponde um ângulo  $\theta$ . Assim, para determinar  $\theta$  em função de  $w$  observa-se o tetraedro  $POQR$ , que deve ser comparado às relações trigonométricas de suas faces planificadas constituídas pelos triângulos retângulos  $POQ$ ,  $RQO$  e  $PQR$ . No triângulo  $POQ$ , retângulo em  $O$ , verifica-se as seguintes relações:

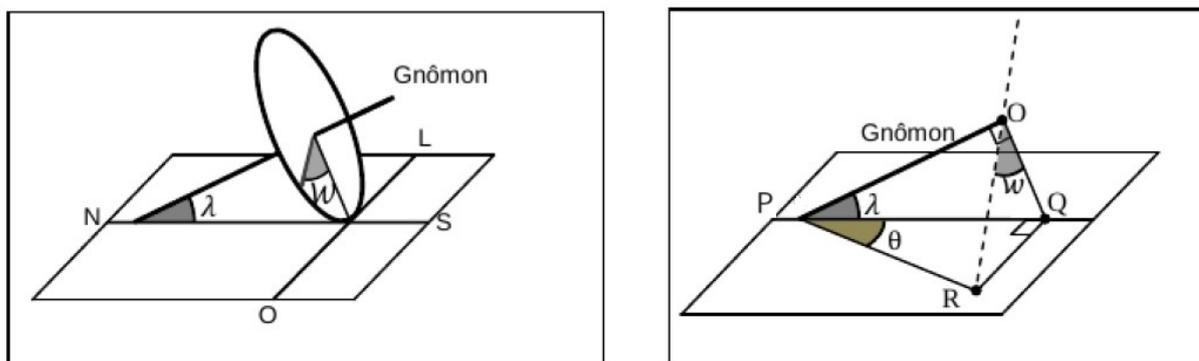


Figura 65 – Relógio do Sol

Fonte: (MENDES, 2017)

$$\tan(\lambda) = \frac{OQ}{OP}$$

Observa-se que o triângulo  $PQR$  nos dá a tangente da abertura.

$$\tan(\theta) = \frac{RQ}{PQ}$$

Do triângulo RQO, retângulo em Q, temos que:

$$\tan(w) = \frac{RQ}{OQ}$$

Ao multiplicar e dividir a  $\tan(\theta)$  pelo tamanho do segmento  $OQ$ , escrevemos a tangente do ângulo  $\theta$  no plano horizontal com relação à sombra do meio dia, como:

$$\tan(\theta) = \frac{RQ}{PQ} \cdot \frac{OQ}{OQ}$$

$$\tan(\theta) = \frac{RQ}{OQ} \cdot \frac{OQ}{PQ}$$

Utilizando a expressão para  $\tan(w)$  e  $\sin(y)$  na expressão anterior, temos:

$$\tan(\theta) = \tan(w) \cdot \sin(y)$$

$$\theta = \arctan(\tan(w) \cdot \sin(y))$$

Isso nos ajuda a perceber as relações entre o curso da sombra do ponteiro ao longo das horas e a trajetória angular percorrido por este nos planos do relógio (MENDES, 2017).

O Sol não era o único astro objeto de estudo das antigas civilizações, mesmo as que viam nele sua necessidade de registrar as passagens das horas. Mas para auxiliar nos estudos e observações de satélites como a Lua, estrelas, constelações e até mesmo galáxias distantes, foi preciso desenvolver e aprimorar lunetas e telescópios. A próxima parte falará sobre como o estudo das cônicas contribuiu para tal evolução na astronomia.

### 3.4 As Cônicas e os Instrumentos Ópticos

Uma aplicação importante da elipse está na 1ª Lei de Kepler, também conhecida como Lei das Órbitas, que é enunciada da seguinte forma: todos os planetas movem-se ao redor do Sol em órbitas elípticas, estando o Sol em um dos focos. Kepler observou que a trajetória de Marte tinha um formato de oval em relação ao Sol, e então postulou a hipótese de que a órbita dos planetas teriam forma de uma elipse, com o Sol posicionado em um dos focos (ROCHA, 2013).

Os primeiros telescópios foram construídos com lentes e funcionavam com base na refração da luz (luz sendo transmitida entre meios diferentes). São os chamados telescópios refratores. Mas essas lentes tinham alguns problemas que afetavam a nitidez das imagens observadas. Isto incluía distorção e um borrão de cores chamado aberração cromática (veja Figura 66) (HOSTI, 2021).

A compreensão da propriedade reflexiva da parábola levou matemáticos a utilizar esta forma na construção de lunetas e telescópios. Esta propriedade diz que uma reta que incide em uma parábola, com direção paralela ao eixo de simetria, é refletida e passa



Figura 66 – Foto da lua com forte aberração cromática

Fonte: (HOSTI, 2021)

pelo foco. Esses pequenos problemas dos telescópios refratores não existem nos telescópios refletores, que consistem de um espelho parabólico no fundo de um tubo. Desta maneira, os raios provenientes de um corpo celeste distante (estrela, galáxia, planeta, etc.) formam um feixe praticamente paralelo, que se refletem no espelho e formam a imagem do objeto no foco. Mas perceba que mesmo nos telescópios refletores temos um pequeno impasse: para

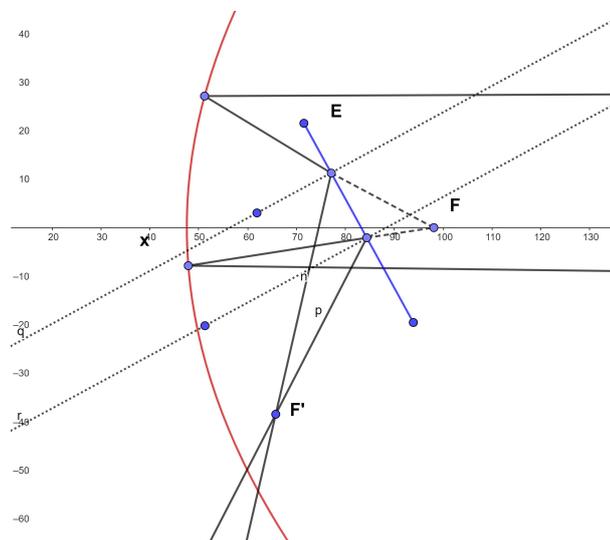


Figura 67 – Telescópio refletor

Fonte: O Autor (2023)

ver essa imagem, o observador teria de estar com seu olho posicionado no foco da parábola, mas isso é impossível na prática. Isaac Newton (1642-1727) resolveu esse problema em seu telescópio refletor, colocando um espelho plano  $E$  entre o espelho parabólico e o foco  $F$  e, com isso, os raios que iriam formar a imagem em  $F$  são novamente refletidos e vão formar

essa imagem num ponto  $F'$  fora do tubo do telescópio, onde se posicionam os olhos do observador (veja Figura 67).

Em 1672, o astrônomo francês Laurent Giovanni Cassegrain propôs a utilização de um espelho hiperbólico  $E$ , ao invés do espelho plano de Newton (veja Figura 68). Neste sistema, um dos focos da hipérbole coincide com o foco  $F$  da parábola, e agora os raios que iriam formar a imagem no foco  $F$ , são refletidos pelo espelho  $E$  e formarão essa imagem no outro foco  $F'$  da hipérbole (ÁVILA, 2020).

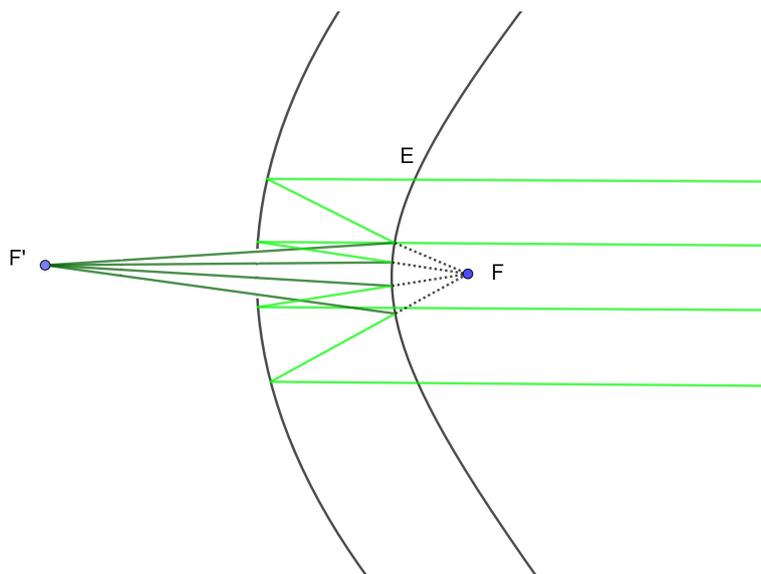


Figura 68 – Elementos da Hipérbole para Telescópio Cassegrain

Fonte: O Autor (2023)

Mas afinal, qual dos dois últimos modelos é mais vantajoso? Podemos dizer que é o espelho hiperbólico de Cassegrain por alguns motivos: No modelo de Newton, notamos que o espelho plano não pode ficar muito próximo do foco  $F$ , pois pode ocorrer do ponto  $F'$  ficar dentro do telescópio. Consequentemente, o espelho plano deve ser de tamanho razoável (para poder refletir os raios incidentes), o que pode resultar em um bloqueio significativo da luz incidente no espelho parabólico que forma a parte principal do telescópio. Já o espelho de Cassegrain, pode ser construído mais próximo ou mais afastado do foco  $F$ , mantendo-se fixa a distância  $FF'$  entre os focos da hipérbole; em consequência, o tamanho desse espelho pode ser maior ou menor. A distância entre os focos  $F$  e  $F'$  também pode ser alterada para mais ou para menos, sem mudar a posição do foco  $F$ .

Com todos esses fatos, temos uma maior flexibilidade na montagem do espelho refletor hiperbólico  $E$ , que pode ser feita de acordo com as exigências das observações (veja a Figura 68). Mas como nem tudo são flores, infelizmente as montagens de Cassegrain só começaram a ser utilizadas nos telescópios cerca de um século após terem sido propostas. Desde então passaram a ser largamente usadas, e hoje em dia estão presentes não apenas

nos telescópios óticos, mas também nos radiotelescópios. O famoso telescópio ótico do observatório de Monte Palomar, que fica a 80 km de San Diego, na Califórnia, utiliza várias montagens do tipo de Cassegrain.



Figura 69 – Observatório Palomar

Fonte: ([OBSERVATORIES, 2021](#))

## 3.5 Mapeando o Céu

Localizar e identificar objetos celestes era uma parte essencial dos antigos estudos da Astronomia. Esses registros eram feitos em cartas celestes, sem o qual, não compreenderíamos os movimentos dos corpos celestes, a distinção entre estrelas e planetas e até mesmo a descoberta de galáxias. Nesta seção dissertaremos um pouco sobre a história dos mapas celestes. A seguir, precisaremos entender a esfera celeste e suas coordenadas astronômicas. Por fim, concluiremos apresentando softwares e aplicativos, como excelentes ferramentas de ensino que visem facilitar a compreensão deste tema.

### 3.5.1 Aspectos Históricos

Para a maioria das antigas civilizações, a tomada de decisões importantes, tais como o plantio, a fertilidade feminina e até mesmo o ingresso em uma batalha, vinham sempre precedidas da observação dos astros. Por exemplo, na antiga babilônia, a astronomia e a religião se fundiam como uma só. Mesmo na atualidade acredita-se na influência da posição de corpos celestes. Há quem faça a poda de suas plantas ou mesmo o corte de seu cabelo conforme determinada fase da Lua.

Foi encontrado em 1979 em uma caverna no Vale Ach, na região de Alb-Danúbio, na Alemanha. A datação por carbono dos depósitos de cinzas ósseas encontrados ao lado da tabuinha sugere que ela tenha entre

32.500 e 38.000 anos de idade, tornando-a uma das representações mais antigas de um homem já encontrada. (WHITEHOUSE, 2003)

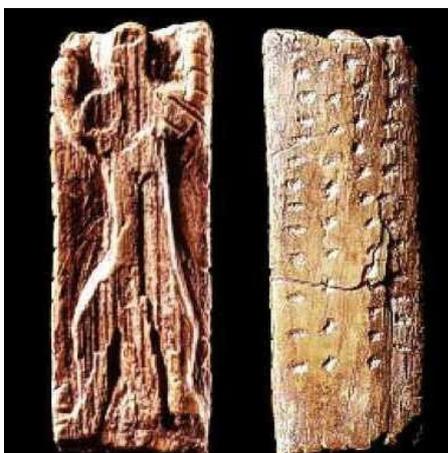


Figura 70 – Lasca de presa de mamute encontrada numa caverna do Vale do Ach, Danúbio, Alemanha.

Fonte: (WHITEHOUSE, 2003)

Fortemente influenciado pela obra O Almagesto de Ptolomeu, o astrônomo persa A'Abd al-Rahman ibn' Umar al-Sufi, mais conhecido como Alzofi (Pérsia, 903-986) fez ilustrações de estrelas mais brilhantes e até mesmo acrescentou alterações, como por exemplo, os nomes árabes para as estrelas e constelações. Publicou sua obra em 964, que ficou conhecida como "Livro de Estrelas Fixas". O livro original não sobreviveu, mas uma cópia de 1009 esta preservada na Universidade de Oxford, Inglaterra (HUSSEIN, 2021).

No período das grandes navegações, para aventurar-se mar adentro, foram muito úteis as cartas celestes, além de uma bussola, um sextante e um astrolábio. Estas foram sendo atualizadas a cada expedição em que se exploravam o oriente e o hemisfério sul. Podemos citar os registros de dois marinheiros holandeses, Pieter Dirkszoon Keyser e Frederick de Houtman, que em 1595 viajaram juntos para o que atualmente corresponde à Indonésia. “Suas compilações resultaram no globo de Jodocus Hondius, de 1601, que acrescentou 12 novas constelações do sul” (SWERDLOW, 1986).

A Uranometria de Johann Bayer, em 1603, foi a primeira carta celeste a mapear tanto o hemisfério Sul quanto o Norte. Ele passou a identificar com letras do alfabeto grego as estrelas mais brilhantes. O Uranometria continha 48 mapas das constelações de Ptolomeu, uma placa das constelações do sul e duas placas mostrando todo os hemisférios norte e sul em projeção estereográfica polar. Vemos na Figura 71, a constelação do Escorpião retratando as estrelas mais brilhantes, com rótulos de letras gregas e latinas visíveis.

O polonês Johannes Hevelius terminou sua carta celeste *Firmamentum Sobiescianum* em 1690. Tinha 56 mapas estelares, cada uma contida em duas páginas, e melhorou

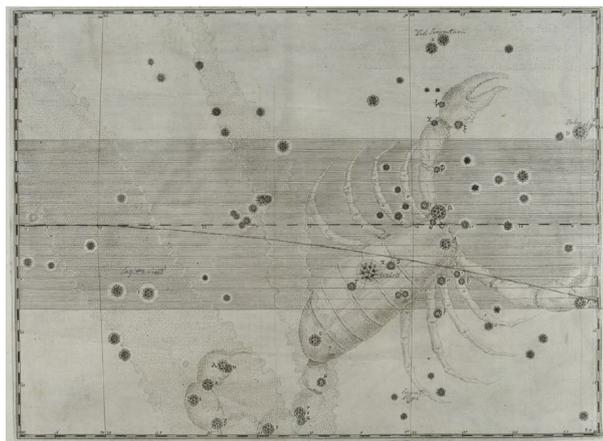


Figura 71 – Constelação do Escorpião - Uranometria de Johann Bayer

Fonte: (BAYERT, 1603)

a precisão das posições das estrelas do sul. Hevelius foi um astrônomo muito produtivo. Entre suas descobertas podemos destacar: observações das manchas solares, mapeamento da superfície lunar, a descoberta de 4 cometas bem como sua tese de que tais corpos estão em uma trajetória parabólica ao redor do sol. Ele introduziu mais 11 constelações (*Scutum*, *Lacerta*, *Canes Venatici*, entre outros) (CIENTÍFICA, 2018).

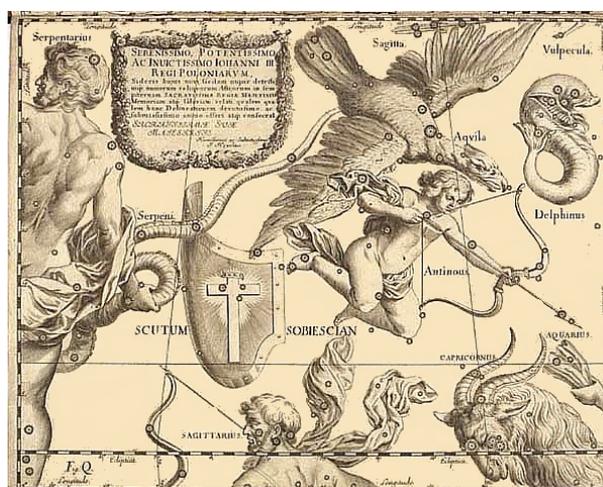


Figura 72 – Hevelius - *Firmamentum Sobiescianum sive Uranographia* 1690

Fonte: (SWERDLOW, 1986)

Como eram produzidas as cartas celestes? Que conceitos matemáticos precisaram ser dominados para que se registrasse com precisão as posição dos astros? A resposta está relacionada com o domínio de um dos mais antigos ramos da astronomia, a astrometria. A Astrometria trata da medida da posição, dimensões e movimentos dos corpos celestes, dentro de certas referências que ela define (MOURÃO, 1987). Com base na consideração sobre geometria esférica, feita na seção 2.6, passaremos a algumas aplicações em astrometria.

### 3.5.2 A Esfera Celeste

Podemos definir a esfera celeste como uma esfera imaginária, centrada na Terra, girando em torno de um eixo que podemos considerar como o prolongamento do eixo de rotação da Terra. Para o observador aqui da Terra, têm-se a impressão de se estar no meio de uma grande esfera incrustada de estrelas. Inicialmente, definiremos alguns elementos da esfera celeste que compõem o sistema de coordenadas astronômicas. Passaremos a uma definição de alguns planos e pontos na esfera celeste, uma vez que são necessários para a determinação da posição dos astros no céu (FILHO, 2014).

- Horizonte: é o plano tangente à Terra e perpendicular à vertical do lugar em que se encontra o observador. A vertical do lugar é definida por um fio a prumo. Como o raio da Terra é pequeno frente ao raio da esfera celeste, considera-se que o plano do horizonte intercepta a esfera celeste em um círculo máximo, ou seja, passa pelo centro (veja Figura 73).
- Zênite: é o ponto no qual a vertical do lugar intercepta a esfera celeste, acima do observador.

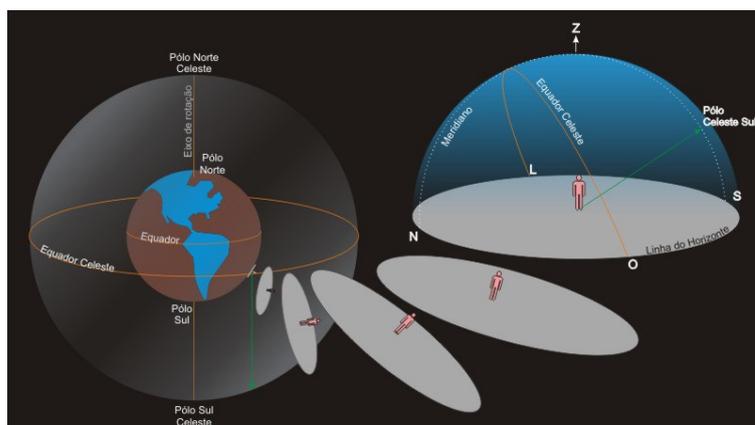


Figura 73 – Horizonte, Zênite e Equador celestes

Fonte: (FILHO, 2014)

- Nadir: é o ponto diametralmente oposto ao Zênite.
- Equador celeste: é o círculo máximo em que o prolongamento do equador da Terra intercepta a esfera celeste.
- Pólo Celeste Norte: é o ponto em que o prolongamento do eixo de rotação da Terra intercepta a esfera celeste, no hemisfério norte.
- Pólo Celeste Sul: é o ponto em que o prolongamento do eixo de rotação da Terra intercepta a esfera celeste, no hemisfério sul.

- **Círculo vertical:** é qualquer semicírculo máximo da esfera celeste que contém a vertical do lugar. Os círculos verticais começam no Zênite e terminam no Nadir.
- **Ponto Geográfico Norte (ou Ponto Cardeal Norte):** é o ponto da esfera celeste em que o círculo vertical que passa pelo Pólo Celeste Norte intercepta o horizonte.
- **Ponto Geográfico Sul:** é o ponto em que o círculo vertical que passa pelo Pólo Celeste Sul intercepta o horizonte. A linha sobre o horizonte que liga os pontos cardeais Norte e Sul chama-se linha Norte-Sul, ou linha meridiana. A linha Leste-Oeste é obtida traçando-se, sobre o horizonte, a perpendicular à linha Norte-Sul.
- **Círculos de altura:** são círculos da esfera celeste paralelos ao horizonte. São também chamados almucântaras, ou paralelos de altura.
- **Círculos horários ou meridianos:** são semicírculos da esfera celeste que contêm os dois pólos celestes. O meridiano que passa também pelo zênite se chama Meridiano Local.
- **Paralelos:** são círculos da esfera celeste paralelos ao equador celeste. São também chamados círculos diurnos.

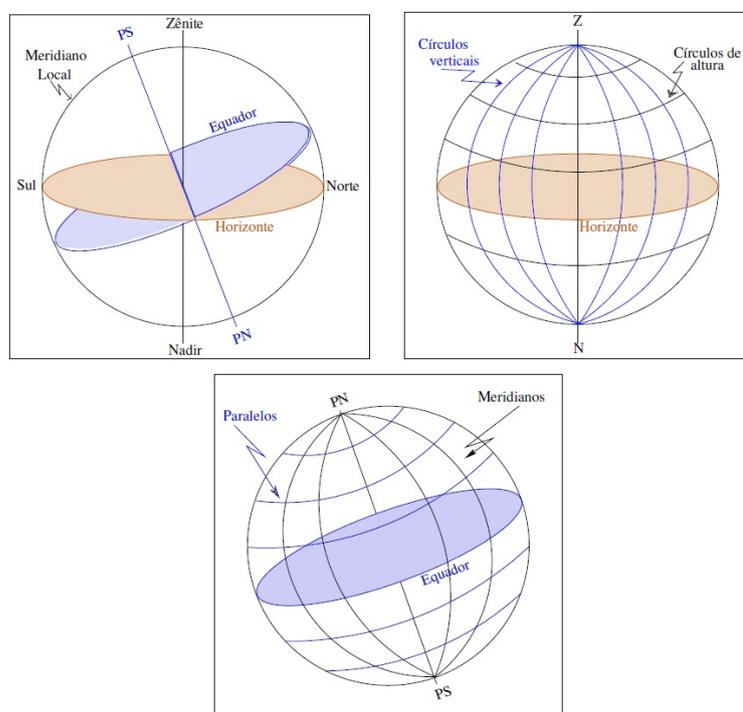


Figura 74 – Círculos fundamentais da esfera celeste.

Fonte: (FILHO, 2014)

Estando bem definidos os elementos da esfera celeste, passemos a uma consideração dos sistema de coordenadas utilizados.

### 3.5.3 Sistema de Coordenadas Astronômicas

A menção de sistema de coordenadas, geralmente nos remete às duas coordenadas geográficas, usadas para medir posições sobre a superfície da Terra.

- Longitude geográfica ( $\lambda$ ): é o arco do equador, com origem no meridiano de Greenwich e extremidade no meridiano do lugar. Varia de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  para leste ou oeste de Greenwich. Usualmente, atribui-se o sinal positivo às longitudes a leste e o sinal negativo às longitudes a oeste. Também costuma-se representar a longitude de um lugar como a diferença entre a hora do lugar e a hora de Greenwich e, nesse caso, as longitudes a oeste de Greenwich variam de 0h a  $-12$ h e as longitudes a leste de Greenwich variam de 0h a  $+12$ h.
- Latitude geográfica ( $\phi$ ): é o arco do meridiano do lugar, com origem no equador e extremidade no lugar. Varia entre  $-90^\circ$  e  $+90^\circ$ . O sinal negativo indica latitudes do hemisfério Sul e o sinal positivo hemisfério Norte.

Mas considerando a esfera celeste, temos outros sistemas de coordenadas, a saber, o Sistema Horizontal, o Sistema Equatorial Celeste e o Sistema Equatorial Local.

#### 3.5.3.1 Sistema Horizontal

Esse sistema utiliza como plano fundamental o horizonte celeste. As coordenadas horizontais são Altura e Azimute.

- Altura ( $h$ ): é o arco medido sobre o círculo vertical do astro, com origem no horizonte e fim no astro. A altura varia entre  $-90^\circ$  e  $+90^\circ$ . O complemento da altura se chama distância zenital ( $z$ ). Assim, a distância zenital é o arco medido sobre o círculo vertical do astro, com origem no zênite e fim no astro. A distância zenital varia entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$  ( $h + z = 90^\circ$ ). O sistema horizontal é um sistema local, no sentido de que é fixo na Terra.
- Azimute ( $A$ ) é o arco medido sobre o horizonte, no sentido horário (Norte, Leste, Sul e Oeste), com origem no ponto cardinal Norte e fim no círculo vertical do astro. O azimute varia entre  $0^\circ$  e  $360^\circ$ . Como o raio da Terra é pequeno frente ao raio da esfera celeste, considera-se que o plano do horizonte intercepta a esfera celeste em um círculo máximo, ou seja, passa pelo centro.

As coordenadas azimute e altura (ou azimute e distância zenital) dependem do lugar e do instante da observação e não são características do astro.

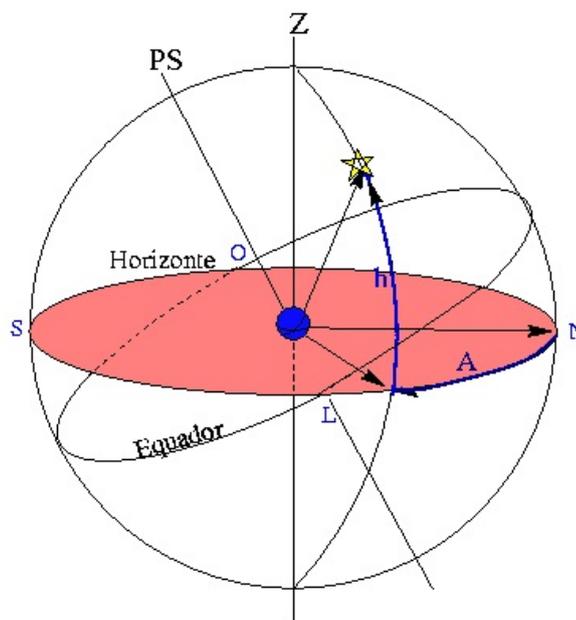


Figura 75 – Altura e Azimute.

Fonte: (FILHO, 2014)

### 3.5.3.2 Sistema Equatorial Celeste

Esse sistema utiliza como plano fundamental o equador celeste. Suas coordenadas são a ascensão reta e a declinação.

- Ascensão Reta ( $\alpha$ ) ou (AR): arco medido sobre o equador, com origem no meridiano que passa pelo ponto Áries e fim no meridiano do astro. A Ascensão Reta varia entre 0h e 24h (ou entre  $0^\circ$  e  $360^\circ$ ), aumentando para o leste. O Ponto Áries, também chamado ponto Gama ( $\gamma$ ), ou Ponto Vernal, é um ponto do equador, ocupado pelo Sol quando passa do hemisfério sul celeste para o hemisfério norte celeste, definindo o equinócio de primavera do hemisfério norte (mais ou menos em 20 de março), isto é, em uma das duas intersecções do equador celeste com a eclíptica. A eclíptica é a projeção sobre a esfera celeste da trajetória aparente do Sol observada a partir da Terra (veja a Figura 76).
- Declinação é o arco medido sobre o meridiano do astro, com origem no equador e extremidade no astro. A declinação varia entre  $-90^\circ$  e  $+90^\circ$ . O Sol tem uma trajetória orbital na esfera celeste que possui declinação em relação ao horizonte, variando entre  $-23,5^\circ$  (em 21 de dezembro aproximadamente) e  $+23,5^\circ$  (em 21 de junho aproximadamente).

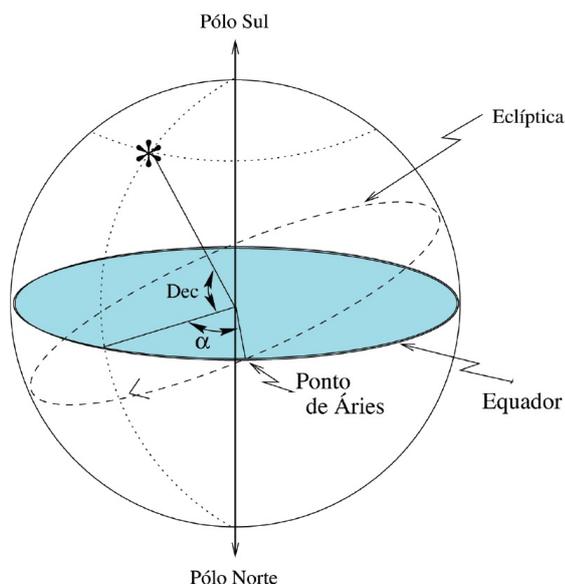


Figura 76 – Ascensão Reta e Declinação.

Fonte: (FILHO, 2014)

### 3.5.3.3 Sistema Equatorial Local

Nesse sistema, o plano fundamental continua sendo o equador, mas a coordenada medida ao longo do equador não é mais a Ascensão Reta, mas sim uma coordenada não constante chamada Ângulo Horário.

- Ângulo horário ( $H$ ) é o arco medido sobre o equador, com origem no meridiano local e extremidade no meridiano do astro. Varia entre  $-12h$  e  $+12h$ . O sinal negativo indica que o astro está a leste do meridiano, e o sinal positivo indica que ele está a oeste do meridiano.
- Hora Sideral ( $HS$ ) é o ângulo horário do ponto Áries. Pode ser medida a partir de qualquer estrela, pela relação:  $HS = H + \alpha$  (veja a Figura 77).

O sistema equatorial celeste e sistema equatorial local, juntos, definem o conceito de tempo sideral. O tempo sideral, assim como o tempo solar, é uma medida do tempo, e aumenta ao longo do dia. O ângulo horário ( $H$ ) é o ângulo entre o meridiano local e o meridiano do astro, contado no sentido do movimento diurno. O ângulo horário do astro somado à sua ascensão reta ( $\alpha$ ), define a Hora Sideral ( $HS$ ).

Estando bem definidas as coordenadas astronômicas, passaremos a considerar sua aplicação.

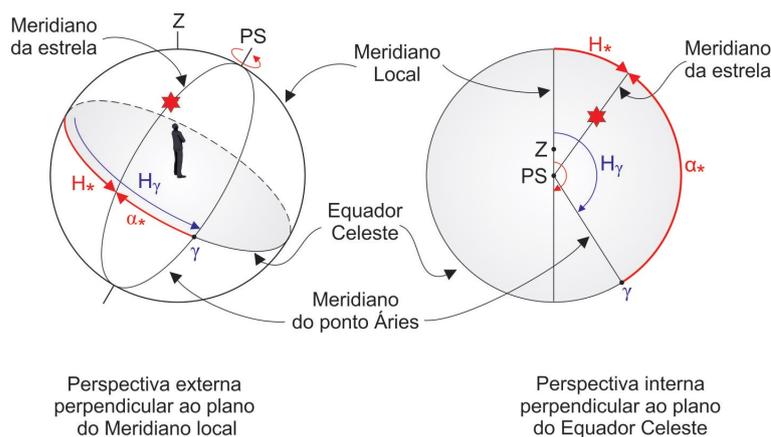


Figura 77 – Hora Sideral em duas perspectivas diferentes

Fonte: (FILHO, 2014)

### 3.5.4 Triângulo de Posição

Podemos definir triângulo de posição, o triângulo situado na esfera celeste que tem por vértices: o astro, o polo elevado e o zênite (FILHO, 2014). O triângulo de posição é usado para derivar as coordenadas do astro quando conhecida a posição geográfica do lugar, ou determinar as coordenadas geográficas do lugar quando conhecidas as coordenadas do astro. Também permite fazer as transformações de um sistema de coordenadas para outro.

Sobre a Figura 78 temos:

- latitude local :=  $\phi$
- arco entre o zênite e o pólo :=  $90^\circ - |\phi|$
- arco entre o zênite e astro :=  $z$
- ângulo entre o equador celeste e a estrela (declinação) :=  $\delta$
- arco entre o pólo e o astro :=  $90^\circ - |\delta|$
- ângulo com vértice no zênite :=  $A$  (no Hemisfério Norte) ou  $A - 180^\circ$  (no Hemisfério Sul)
- ângulo com vértice no pólo ou ângulo horário :=  $H$
- ângulo com vértice no astro :=  $F$

Aplicando a fórmula da lei dos cossenos para o triângulo esférico temos:

$$\cos(z) = \cos(90^\circ - |\phi|)\cos(90^\circ - |\delta|) + \sin(90^\circ - |\phi|)\sin(90^\circ - |\delta|)\cos H$$

$$\cos(z) = \sin(|\phi|)\sin(|\delta|) + \cos(|\phi|)\cos(|\delta|)\cos H$$

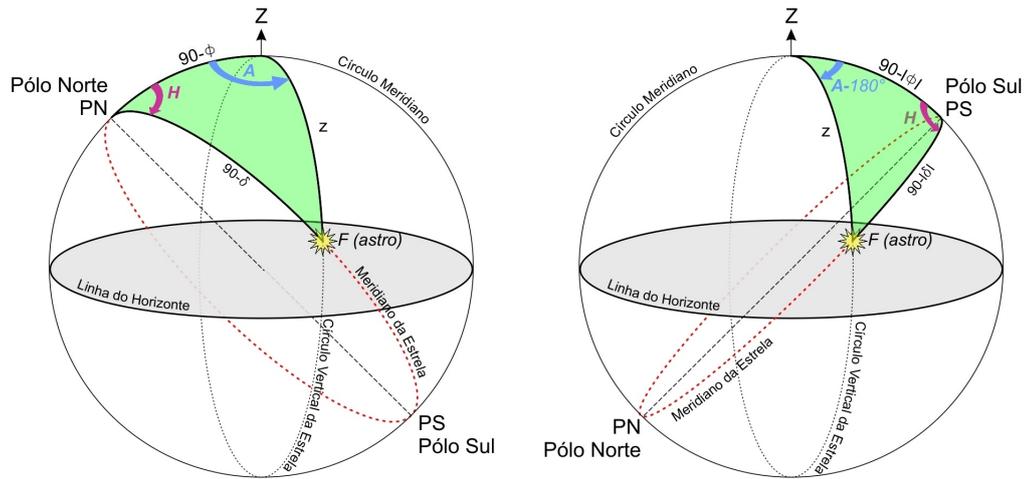


Figura 78 – Triângulo de Posição

Fonte: (FILHO, 2014)

Para isolar  $\cos H$  dividimos a equação por  $\cos(|\phi|) \cdot \cos(|\delta|)$ , com isso temos:

$$\cos H = \sec(|\phi|) \sec(|\delta|) - \tan(|\phi|) \tan(|\delta|)$$

Outra relação que podemos deduzir é:

$$\cos(90^\circ - |\delta|) = \cos(90^\circ - |\phi|) \cos(z) + \sin(90^\circ - |\phi|) \sin(z) \cos A$$

$$\sin(\delta) = \sin(|\phi|) \cos(z) + \cos(|\phi|) \sin(z) \cos A$$

Para isolar  $\cos A$  dividimos a equação por  $\cos(|\phi|) \sin(z)$ , com isso temos:

$$\cos A = \sin(|\delta|) \sec(|\phi|) \operatorname{cosec}(z) - \cot(|\phi|) \tan(z)$$

Podemos determinar o ângulo horário no ocaso ( $z = 90^\circ$ ) para uma estrela de declinação  $\delta$ , em um local de latitude  $\phi$ .

$$\cos 90^\circ = \sin(|\phi|) \sin(|\delta|) + \cos(|\phi|) \cos(|\delta|) \cos H.$$

Logo:

$$\cos H = -\tan(|\phi|) \tan(|\delta|)$$

Com essa fórmula podemos calcular, por exemplo, quanto tempo o Sol permanece acima do horizonte em um certo local e em certa data do ano, pois, para qualquer astro, o tempo de permanência acima do horizonte será duas vezes o ângulo horário desse astro no momento do nascer ou ocaso.

**Exemplo 3.5.1.** Vamos determinar quanto tempo o Sol permanece acima do horizonte, em Aracruz, ES ( $\phi = -19,81^\circ$ ), no dia do solstício de verão no HS ( $\delta = -23,43^\circ$ ).

$$\cos H = -\tan(|\phi|) \tan(|\delta|)$$

$$\cos H = -\tan(|-19,81^\circ|)\tan(|-23,43^\circ|)$$

$$\cos H = (-0,36)(0,43)$$

$$\cos H = -0,156$$

$$H = 98,97^\circ$$

Um dia é definido como uma volta completa do Sol, isto é, o Sol percorre  $360^\circ$  em 24 horas, a velocidade aparente é de:

$$V_{\text{aparente}} = \frac{360^\circ}{24}$$

$$V_{\text{aparente}} = \frac{15^\circ}{h}$$

Como tempo de permanência acima do horizonte será duas vezes o ângulo horário, temos:

$$98,97^\circ \cdot 2 = 197,94^\circ.$$

Dividindo o ângulo Horário (H) pela velocidade aparente, temos:

$$h = \frac{197,94^\circ}{15^\circ} = 13,19h$$

Logo, o Sol permanece acima do horizonte no solstício de verão em Aracruz, ES, por cerca de 13 horas e 12 minutos.

Ao apresentar estes conceitos de mapeamento dos céus com os estudantes da Educação Básica, será necessário uma abordagem mais simples sobre o tema, e que traga o conhecimento substancialmente mais acessível para eles. Com isso em mente concluiremos esta seção apresentando ferramentas digitais de ensino, com softwares e aplicativos.

### 3.5.5 Aplicativos e Softwares que mapeiam o céu

Para a educação básica, temos ferramentas poderosas de ensino para o mapeamento dos céus. Existem softwares e aplicativos que simulam as posições celestes e contribuem para um ensino significativo desta ciência.

O aplicativo *Sky Map* (sistema operacional *Android*) mostra um mapa do universo na tela do celular. Com o download gratuito feito pela *Google Play*, o serviço permite ver estrelas, planetas, constelações e outros astros. A partir do giroscópio do *smartphone*, é possível navegar pelas galáxias e descobrir a direção exata de um objeto celeste para saber onde ele está localizado no espaço. Além disso, a ferramenta disponibiliza uma galeria de fotos capturadas pelo telescópio Hubble (veja a Figura 79).

O *Stellarium* é um dos softwares mais completos que existem para observação de corpos celestes, tendo um catálogo com mais de 850 milhões de estrelas, com informações



Figura 79 – Interface do Sky Map

Fonte: O Autor (2023)

sobre praticamente todas elas. Além disso, também é possível observar planetas, nebulosas, luas e constelações, todas em suas posições reais e com grande precisão. O *Stellarium* é um dos únicos softwares de seu tipo que possui as constelações em outras culturas, tais como, Tupi-Guarani, Navajos, Maori, Maias, Zulu, só para se mencionarem algumas.

O software *Stellarium* também traz a opção de tomar a latitude e longitude de qualquer localização geográfica, com a qual é possível observar o céu em diferentes partes do mundo. A visualização é realizada em tempo real, ou em velocidade ajustável, para frente e para trás no tempo, com o qual é possível “observar” o céu a qualquer hora e lugar na Terra.

Nas versões mais recentes é possível simular e explorar a superfície da Lua, Marte, do oceano, ou até mesmo da Terra, sendo possível remover a atmosfera ou mesmo a superfície do planeta. É possível também simular eclipses e outros eventos astronômicos, que podem ser observados de diferentes posições e horários. Como é possível adiantar ou voltar no tempo, o programa permite observar a configuração do céu em qualquer época. Em sala de aula, a mera exposição do software *Stellarium* já prende a atenção dos estudantes. Ademais, eles podem visualizar outros fenômenos bem fascinantes, tais como: o Sol da meia noite, na Noruega, os meses de claridade, bem como de escuridão nas regiões árticas, entre outros (DOMINGOS; TEIXEIRA, 2021).

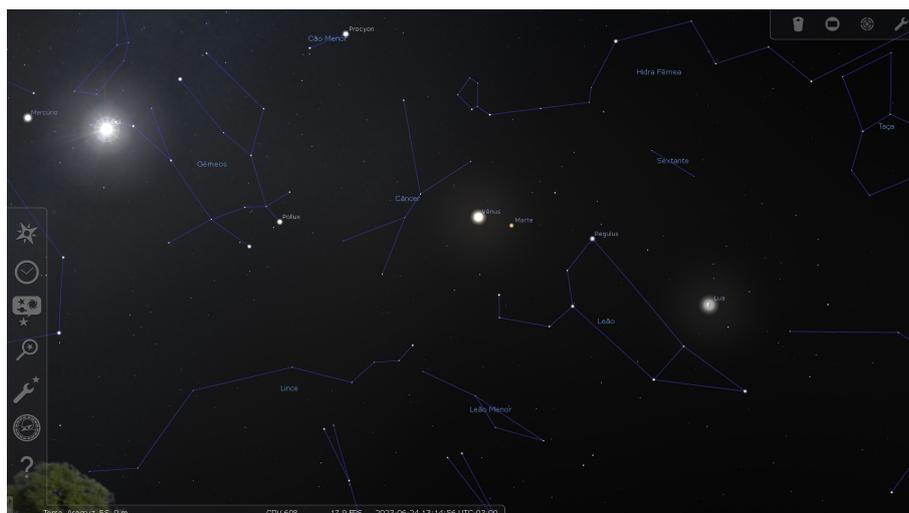


Figura 80 – Interface do Stellarium

Fonte: O Autor (2023)

## 4 Proposta de Disciplina Eletiva - *Ao infinito e Além!*

Este foi o título de uma disciplina Eletiva, aplicada aos alunos de Escola de Ensino Fundamental e Médio de Tempo Integral Henrique Coutinho, no ano de 2018, na cidade de Iúna, ES. Esse título baseava-se no bordão do personagem *Buzz Lightyaer*, astronauta que fazia parte do elenco da animação *Toy Story*, criada pelos estúdios cinematográficos da *Disney* e *Pixar* em 1995. *Toy Story* se tornou um dos marcos da cultura *pop* entre o público infanto-juvenil, sendo eleito, inclusive, a frase favorita do cinema para os britânicos, de acordo com uma pesquisa realizada pela Rádio *Times* em 2014. Com o processo de implementação do Novo Ensino Médio, Disciplinas Eletivas se enquadram na categoria de itinerários formativos. Mas o que são Disciplinas Eletivas?

### 4.1 O que são Disciplinas Eletivas

Para o Instituto de Corresponsabilidade pela Educação (ICE):

São disciplinas temáticas, oferecidas semestralmente, propostas pelos professores e/ou pelos estudantes e objetivam diversificar, aprofundar e/ou enriquecer os conteúdos e temas trabalhados nas disciplinas da Base Nacional Comum do currículo.(ICE, 2015)

Elas têm caráter interdisciplinar e o objetivo de fortalecer a aprendizagem ao procurar a aplicabilidade dos conteúdos no cotidiano dos estudantes. Entre os objetivos específicos estão: aprofundar, enriquecer e ampliar conceitos, procedimentos ou temáticas relativos a uma disciplina ou área de conhecimento; oportunizar o desenvolvimento de projetos relacionados aos interesses dos estudantes e da comunidade a que pertencem; desenvolver a autonomia e a capacidade de tomada de decisões balizadas e promover a aquisição de competências relevantes para a vida no século 21 .

Para o desenvolvimento semanal das atividades na Disciplina Eletiva, serão ministradas 2 horas-aula de 50 minutos cada, que devem ser sequenciadas. A carga horária para o ano letivo será de 80 horas-aula. São oferecidas a cada semestre a partir de um “cardápio” de temas propostos pelos professores e ou por sugestões dadas pelos estudantes. Como em qualquer situação didática, ao se planejar uma Disciplina Eletiva, os professores devem considerar a diversidade de estudantes que compõe a turma. Seus diferentes perfis são a maior riqueza que este encontro singular, mediado pelo professor, pode proporcionar. Por isso a turma da Disciplina Eletiva deve ter uma miscelânea de estudantes, com idades diferentes e série/ano diferentes. A principal afinidade será o tema da Eletiva, que foi

escolhido pelos próprios estudantes, em uma exposição planejada pelos professores junto à coordenação pedagógica. Em relação aos aspectos metodológicos, a aula na Disciplina Eletiva deve ter um caráter mais prático, aplicável, sempre podendo contar com atividades laborativas. Embora não deva ser uma regra, a metodologia de projetos pode ser um caminho.

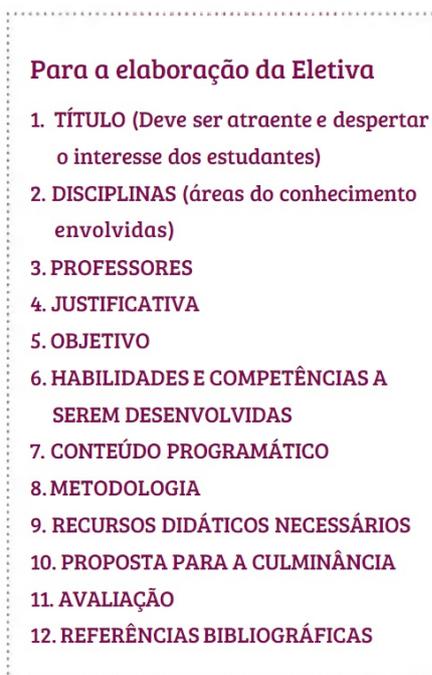
- 
- Para a elaboração da Eletiva
1. TÍTULO (Deve ser atraente e despertar o interesse dos estudantes)
  2. DISCIPLINAS (áreas do conhecimento envolvidas)
  3. PROFESSORES
  4. JUSTIFICATIVA
  5. OBJETIVO
  6. HABILIDADES E COMPETÊNCIAS A SEREM DESENVOLVIDAS
  7. CONTEÚDO PROGRAMÁTICO
  8. METODOLOGIA
  9. RECURSOS DIDÁTICOS NECESSÁRIOS
  10. PROPOSTA PARA A CULMINÂNCIA
  11. AVALIAÇÃO
  12. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Figura 81 – Estrutura da Ementa de uma Eletiva

Fonte: (ICE, 2015)

Ao final do semestre temos a Culminância das Disciplinas Eletivas. Trata-se de um momento de exposição de um produto, como resultado material que expresse a síntese da Eletiva.

É um dia, no final do semestre, no qual a escola se prepara para expor para toda a comunidade escolar o que foi produzido, em clima de compartilhamento de conhecimentos, de experiências, de aprendizados e de proposições de desafios para avançar nos próximos períodos. (ICE, 2015)

A avaliação da eletiva acontece de maneira diferente das disciplinas da base comum. Não se fazem provas, nem exercícios. Apenas os aspectos qualitativos são observados. Cada turma terá um espaço para expor os conhecimentos adquiridos, a trajetória percorrida e os valores que consolidaram. Apenas para exemplificar, podem ser desenvolvidos diversos produtos sob a forma de relatórios de projetos de pesquisa, jogos, robôs, experiências científicas, jornais, dramatizações, músicas, reportagens, HQ, curta-metragens, maquetes, etc.

Em resumo Disciplinas Eletivas não devem ser a continuidade dos trabalhos em sala de aula, ou mesmo atividades de pequenos grupos isolados na turma, nem a abordagem de temas desvinculados das disciplinas da Base Nacional Curricular Comum, ou totalmente fora de seu contexto, e principalmente não devem ser uma metodologia distante das necessidades de aprendizagem dos estudantes (ICE, 2015).

## 4.2 Ementa da Eletiva *Ao Infinito e Além*

Abaixo destacamos os pontos principais da ementa da eletiva “Ao infinito e além”, que poderão ser adaptados conforme a realidade dos estudantes em suas respectivas unidades escolares.

- Título: Ao infinito e Além.
- Objetivo: Estudar Fenômenos Astronômicos de 2018; As representações do céu e do universo em diferentes culturas; A Astronomia na música, na literatura e no cinema; Astronomia Espaço-tempo Orientação geográfica; A medida do tempo: Calendários; Movimentos da Terra; Fenômenos celestes.
- Justificativa: Partimos da necessidade de desenvolver métodos mais atraentes para auxiliar os estudantes com dificuldade em matemática, além de despertar todo o potencial criativo e autodidata de nossos alunos ao contemplarem os corpos celestes. Neste último caso, os conhecimentos em astronomia básica, criação dos primeiros calendários, movimentos dos corpos celestes, mapas astronômicos, instrumentos de observação, presentes na disciplina de Geografia e História, junto com o estudo de escalas, cálculo de distâncias astronômicas e trigonometria, presentes na disciplina de Matemática, contribuirão em muito para o aprendizado nesta eletiva.
- Objetivo: Conhecer a evolução do conhecimento astronômico desde a antiguidade até suas implicações atuais com a exploração espacial.
- Princípios do Modelo Pedagógico: Levar o estudante a colocar-se como protagonista na produção científica e na percepção de conceitos elementares de Geografia, História e Matemática Aplicada, e áreas científicas afins. Promover a educação interdimensional, tendo por foco a visita de um observatório astronômico. Proporcionar momento de visita a um ambiente para observação do céu noturno. Estimular a aplicação dos 4 pilares da educação (aprender a ser, a fazer, a aprender, a conviver) por meio de desenvolvimento de projetos. Considerar as competências para o século 21, tão evidentes na relação do homem com os processos científicos referentes a exploração espacial e previsão de fenômenos celestes. Conhecer o que é Astronomia e suas implicações para a sociedade atual;

- Conteúdo Programático de Matemática (BNCC): Grandezas e medidas, escalas, notação científica; Trigonometria no cálculo de distâncias inacessíveis; Resolver problemas que envolvam trigonometria, lei dos senos; lei dos cossenos; Compreender recorrências no calendário; Saber identificar as principais cônicas e suas propriedades; Relacionar conhecimentos prévios de geometria plana com geometria esférica.
- Conteúdo Programático de Geografia (BNCC): coordenadas astronômicas; a Terra, o Sol e a Lua; estações do ano; O Relógio do Sol; descrição do sistema solar; corpos menores do sistema solar; vida e a morte das estrelas; espectroscopia; exploração do espaço, foguetes, satélites e ônibus espaciais;
- Metodologia: atividades de sondagem, aula expositiva, pesquisa, utilização de dinâmicas, formulação de hipóteses científicas a partir observação de regularidades.
- Recursos Didáticos necessários: televisão e/ou projetor, notebook, telescópio, quadro, utensílio de laboratório de ciências, utensílios do laboratório de física, laboratório de informática.
- Proposta para Culminância: Exposição de pesquisas, experimentos, visita ao Planetário de Vitória, localizado na Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, Goiabeiras, Vitória, ES;
- Avaliação: frequência, capacidade de iniciativa e autodidatismo, concentração e foco nas explicações, curiosidade e participação do estudante, espírito gregário nas atividades em grupo.

### 4.3 Programação da Eletiva *Ao Infinito e Além*

Para apresentar uma proposta de Programação da Eletiva *Ao Infinito e Além*, tomaremos por base o Cronograma de Atividades conforme Figura 82. Cada semana que se seguirá é composta de duas aulas. A seguir um descrição de como serão desenvolvidas as aulas nas semanas subsequentes.

#### **Primeira semana**

Ocorre o Feirão das Eletivas onde as turmas são definidas.

#### **Segunda semana**

1. Tema: Poderá ser exibido um filme (por exemplo *Gravidade* - CUARÓN (2013), ou algum documentário atual sobre o espaço sideral) e até mesmo uma apresentação em *slides* trazendo elementos de arqueoastronomia.
2. Objetivos: ambientar os estudantes no cenário em que a Eletiva pretende trabalhar, a saber, o espaço sideral. Uma atividade alternativa seria fazer uma apresentação

histórica do desenvolvimento da astronomia nas primeiras civilizações. Para isso os professores poderão abordar alguns tópicos do Capítulo 1 deste trabalho.

3. Metodologia: análise de filme, a apresentação de um tema logicamente estruturado.
4. Recursos Didáticos: aparelho televisor e/ou projetor, computador e/ ou notebook.
5. Avaliação: participação, concentração e foco nas explicações.
6. Abrangência: 2 aulas.

### Terceira e quarta semana

1. Tema: A contagem do tempo.
2. Objetivos: desenvolver compreensão entre a relação dos movimentos de translação e rotação da terra e a construção de calendários. Os estudantes observarão uma apresentação das estações do ano por meio de um software educativo. Ao relacionar este tema com a confecção do calendário, terão a oportunidade de confeccionar uma planilha eletrônica para explorar o Algoritmo de Zeller. Os professores poderão utilizar as sugestões da seção 3.1.
3. Metodologia: aula expositiva com utilização de softwares educativos.
4. Recursos Didáticos: aula expositiva com *Stellarium*, aula experimental em laboratório de informática, com o software *Excel*.
5. Avaliação: participação dos estudantes, confecção de planilha eletrônica.
6. Abrangência: 4 aulas.

### Quinta semana:

1. Tema: O Relógio do Sol.
2. Objetivos: Depois de abordados os principais aspectos de nossa estrela mais próxima, os professores confeccionarão com os estudantes um relógio do sol. Poderão encontrar mais orientações sobre a confecção do relógio do Sol em Mendes (2017). O estudante precisará aprender noções básicas de geometria. Utilizando uma folha de papel e um transferidor, será traçado uma semicircunferência no centro. A seguir, os  $180^\circ$  serão divididos por 12, resultando em  $15^\circ$ . Cada grupo de  $15^\circ$  representará a passagem de uma hora no relógio do sol. Para o posicionamento do gnomon, ou haste no relógio, o estudante precisará saber a latitude local. A inclinação do gnomon, em relação ao solo, será o ângulo complementar ao da latitude local. Tratando-se de turmas mais avançadas, pode-se explorar outras relações trigonométricas, como as que foram abordadas na subseção 3.3.3.

3. Metodologia: condução de experimentos e prática de laboratório.
4. Recursos Didáticos: papel, papelão, tesoura, transferidor, lápis, borracha, palito de madeira (churrasco) e cola.
5. Avaliação: participação do estudante na confecção do relógio do sol.
6. Abrangência: 2 aulas.

### **Sexta semana**

1. Tema: Explorando o sistema solar.
2. Objetivos: simular os movimentos dos planetas de acordo com o modelo heliocêntrico por meio do uso do próprio corpo dos estudantes, permitindo assim a observação e o tempo de translação que cada planeta realiza em torno do Sol, possibilitando entender como esse movimento é mais rápido quando o planeta está mais perto do Sol. Compreender e utilizar escalas ao manipular distâncias astronômicas. Os professores terão mais orientações consultando a seção [3.2.2](#).
3. Metodologia: atividade lúdica.
4. Recursos Didáticos: os materiais que os estudantes poderão utilizar são barbante e fita colorida para marcar a trajetória dos planetas que irão representar.
5. Avaliação: participação na atividade lúdica.
6. Abrangência: 2 aulas.

### **Sétima e oitava semana**

1. Tema: Observações Astronômicas
2. Objetivos: confeccionar instrumentos de observação astronômicas, tais como, binóculos e lunetas. Os professores poderão encontrar sugestões sobre a relação dos instrumentos de observação astronômica e as cônicas na seção [3.4](#). Nessa aula, sendo possível a observar o Sol, lunetas e binóculos deverão receber tratamento com filmes radiográficos (películas de raios X) para sua segurança. Poderá ser muito útil na atividade experimental de confecção de lunetas e telescópios, as sugestões encontradas em [CIÊNCIA \(2009\)](#).
3. Metodologia: aula experimental.

4. Recursos Didáticos: um CAP branco de esgoto de 50 milímetros, ou duas polegadas; um disco de cartolina preta de cinco centímetros de diâmetro, com um furo interno de dois centímetros de diâmetro; três fitas adesivas de feltro; um conta-gotas de 100 mililitros; uma luva simples de esgoto de 50 milímetros; uma lente de óculos esférica e incolor, de dois graus positivos; 40 centímetros de tubo branco de esgoto de 50 milímetros; 40 centímetros de tubo branco de esgoto de 40 milímetros; uma lente de monóculo de fotografia. Para observação do Sol será necessário revestir a lente objetiva com filmes radiográfico.
5. Avaliação: participação do estudante nas oficinas.
6. Abrangência: 4 aulas.

### **Nona e décima semana**

1. Tema: Estudo de estrelas e constelações.
2. Objetivos: conhecer a estrutura das estrelas, suas composição e localização no universo por meio das constelações. Estudar a natureza da luz, seu espectro e unidades de medida. Este é o momento de mostrar a aplicabilidade da notação científica no registro de unidades muito pequenas. Confecção de espectroscópio com materiais recicláveis.
3. Metodologia: aula expositiva e aula experimental.
4. Recursos Didáticos: CD ou DVD, caixa (de tubo de creme dental ou análoga), tesoura, estilete, fita isolante, fita adesiva.
5. Avaliação: participação, concentração e foco nas explicações, confecção de experimento.
6. Abrangência: 4 aulas.

### **Décima primeira semana**

1. Tema: A Esfera Celeste.
2. Objetivos: identificar os elementos da esfera celeste e sua relação com a posição dos corpos celestes. Para estas aulas, os professores poderão utilizar o software *stellarium*, juntamente com as definições da seção 3.5.2.
3. Metodologia: aula expositiva.
4. Recursos Didáticos: software educacional (*Stellarium*).

5. Avaliação: participação, concentração e foco nas explicações.

6. Abrangência: 2 aulas.

### **Décima segunda à décima quarta semana**

1. Tema: A corrida espacial.

2. Objetivos: estudar os aspectos históricos da corrida espacial, bem como os empenhos atuais de governos e entidades rumo ao espaço sideral. Confeccionar foguetes como atividade laborativa e lúdica. Como aplicabilidade, esta atividade pode ajudar o estudante a entender a relação entre a trajetória dos foguetes e o gráfico da função quadrática. Os professores encontrarão mais orientações na seção [2.4.2](#).

3. Metodologia: análise de filme ou documentário, aula expositiva, aula experimental, aula lúdica.

4. Recursos Didáticos: filme ou documentário sobre corrida espacial, aparelho televisor ou projetor. Para confecção do foguete pode-se encontrar algumas sugestões em [wikiHow \(2012\)](#), bem como em [Juncker \(2023\)](#).

5. Avaliação: participação, concentração e foco nas explicações.

6. Abrangência: 6 aulas.

### **Décima quinta semana**

1. Tema: observatórios astronômicos.

2. Objetivos: estudar observatórios astronômicos, radiotelescópios, telescópios espaciais. Visitação à um observatório ou Planetário.

3. Metodologia: aula expositiva.

4. Recursos Didáticos: utilização de vídeos e *slides*.

5. Avaliação: participação, concentração e foco nas explicações.

6. Abrangência: 2 aulas

As duas semanas restantes serão dedicadas à preparação da Culminância das Eletivas. Os professores organizarão a turma em grupos, onde cada grupo apresentará um tema distinto das aulas que se transcorreram ao longo do período. Na prática, este é o momento de reorganizar os experimentos produzidos, elaborar as explicações, pois a Culminância acontecerá na forma de exposição das atividades.

 <p>GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO Secretaria da Educação</p>		<p>GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO COORDENAÇÃO DO PROGRAMA ESCOLA VIVA</p>				
<p><b>CRONOGRAMA DE ATIVIDADES DA ELETIVA "AO INFINITO E ALÉM!"</b></p> <p>Professor Júlio M. Rodrigues, na Disciplina de Geografia/História. Professor Naftaly Cristal Félix, na disciplina de Matemática.</p>						
CONTEÚDO PROGRAMÁTICO			DATAS			
SEMANA	AÇÕES/ATIVIDADES	MARÇO	ABRIL	MAIO	JUNHO	JULHO
1ª	Feirão de Eletivas.	02				
2ª	Exibição do Filme " <i>Gravidade</i> ". Consideração sobre as condições físicas do espaço sideral.	09				
3ª	Estudo sobre o Sol, Estações do ano e o Calendário.	16				
4ª	Estudo sobre o Sol, Estações do ano e o Calendário.	23				
5ª	Confecção do Relógio do Sol		06			
6ª	Explorando o Sistema Solar		13			
7ª	Estudo e confecção de lunetas e telescópios.		20			
8ª	Estudo e confecção de lunetas e telescópios.		27			
9ª	Estudo das estrelas: classificação, composição, brilho.			04		
10ª	Estudo da Esfera Celeste.			18		
11ª	Confecção de Espectroscópio com materiais de baixo custo.			25		
12ª	Exploração Espacial, confecção de foguetes.				08	
13ª	Exploração Espacial, confecção de foguetes.				15	
14ª	Exploração Espacial, confecção de foguetes.				22	
15ª	Estudo sobre observatórios astronômicos, rádio telescópios e o telescópio Hubble. Visitação à um observatório ou Planetário.				27	
16ª	Preparação para a Culminância da Eletiva.					06
17ª	Culminância da Eletiva.					13

Figura 82 – Cronograma da Eletiva *Ao Infinito e Além*

Fonte: O Autor (2023)

## 4.4 Relatório das Atividades da Eletiva

Com base na ementa da Eletiva, conseguimos elaborar um cronograma de atividades para as 40 aulas ao longo de 20 semanas. As 3 semanas iniciais, foram dedicadas ao planejamento das eletivas, e as outras 17 foram aulas com os estudantes. Atualmente escolas em tempo integral e parcial, também têm desenvolvido eletivas dentro de um trimestre. Esse cronograma pode ser adaptado para esta situação por reduzir a aplicação para 13 ou 14 semanas.

O relato a seguir, traz uma experiência com uma eletiva, aplicada em 2018. Na época, procurei desenvolver as principais atividades ao longo das 17 semanas propostas na ementa. (veja o Apêndice A a Figura 83). Esta experiência inicial, pode contribuir para prática de outros professores que desejam oferecer esta disciplina.

Na primeira semana foi realizado um feirão de eletivas. Os professores proponentes se caracterizaram como astronautas e foram de sala em sala apresentando a proposta da eletiva.

Na segunda semana, foi exibido o filme *Gravidade* para ajudar a colocar o estudante no ambiente da astronomia. Com o filme os estudantes conseguiram visualizar as condições inóspitas presentes no espaço sideral. Na abertura do filme, temos a seguinte informação: “A 600 km acima do planeta Terra, a temperatura oscila entre 126°C e -100°C. Não há nada que propague ondas sonoras. Não há pressão atmosférica. Não há oxigênio. A vida no espaço é impossível”(CUARÓN, 2013).

Na terceira semana, falamos sobre o Sol, nossa estrela mais próxima. O professor de geografia conduziu a aula com explicações sobre as coordenadas geográficas da Terra. Abordamos na aula os movimentos de rotação e translação da Terra, as estações do ano e sua relação com o calendário civil. Iniciamos a confecção de um relógio do Sol, que foi testado na área externa da escola. Essa atividade se estendeu até a quarta semana. A construção do relógio de Sol foi baseada nas sugestões de Mendes (2017).

O Sol ainda foi a temática na quinta semana. Foi explicada a composição desta estrela e suas reações nucleares. Como atividade prática, revestimos binóculos do Laboratório de Ciências, com material de chapa radiográfica (Raio X). Assim foi possível fazer a observação do Sol com segurança. Para entender alguns fenômenos solares, na sexta semana utilizamos o software *Stellarium*. Conseguimos explicar o fenômeno do “Sol da meia noite” na Noruega, bem como reproduzir eclipses solares.

Na sétima semana, consideramos os instrumentos de observação astronômica. Explicamos as diferenças entre os telescópios refratores e os refletores, bem como o modelo Cassegrain. Iniciamos uma oficina para confecção de lunetas simples, com lente objetiva de óculos (de 1 grau) e ocular de monóculo de fotografia. Os estudantes foram divididos em grupos para facilitar a coleta e o custeio dos materiais. Adaptamos as sugestões

encontradas em [CIÊNCIA \(2009\)](#). Concluimos esta atividade na oitava semana.

Na nona semana, estudamos sobre as constelações, onde os estudantes passaram a explorar o aplicativo *Sky Map*. Explicamos sobre espectroscopia e confeccionamos um espectroscópio com materiais de baixo custo, adaptando as sugestões encontradas em [UFPA \(2016\)](#). Concluimos esta oficina na décima semana,

Para a décima primeira semana, consideramos a história da exploração espacial. Iniciamos exibindo o filme “Céu de Outubro” ([JOHNSTON, 1999](#)). Essa atividade se estendeu até a décima terceira semana quando iniciamos uma oficina de confecção de foguetes. Para garantir a segurança dos estudantes, utilizamos material de baixo custo (garrafa PET) e com propulsão pneumática, com base nas orientações de [wikiHow \(2012\)](#). Esta atividade prática foi concluída na décima quarta semana.

Na décima quinta semana, estudamos sobre observatórios astronômicos, rádio telescópios e telescópios espaciais. A aula foi incrementada com imagens do telescópio *Hubble*, e também foi utilizado o software *Stellarium*. Iniciamos o planejamento de uma visita ao Planetário de Vitória, localizado na Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, Vitória, ES.

Na décima sexta semana iniciamos a preparação para a Culminância da Eletiva. Os estudantes foram divididos em grupos, onde participariam de uma mostra com todos os trabalhos e experimentos desenvolvidos. Finalmente, na décima sétima semana de aula, todas as eletivas da escola estiveram reunidas em um momento de exposições de seus trabalhos. Trata-se da Culminância das Eletivas. A Eletiva de astronomia, *Ao Infinito e Além*, expôs em um mesa todos os objetos manufaturados, a saber, o relógio do Sol, o espectroscópio, as lunetas e o binóculo para observar o Sol. Uma sala de aula foi utilizada para a exibição de alguns fenômenos astronômicos por meio do software *Stellarium*.

## 5 Considerações finais

Com as novas diretrizes propostas pela Lei no 13.415/2017, acreditamos que o presente trabalho deverá enriquecer o planejamento das atividades do docente, oferecendo uma sugestão para a construção de disciplinas eletivas na área de matemática e suas tecnologias. A relação intrínseca entre a matemática e a astronomia favorecerá o desenvolvimento de atividades interdisciplinares com áreas de conhecimento afins, a saber ciências humanas e ciências da natureza.

No segundo capítulo apresentamos os aspectos históricos da astronomia. Destacamos seu desenvolvimento nas primeiras civilizações e em diversas culturas. Analisamos a construção do calendário lunissolar em algumas culturas antigas. Vimos como as discrepâncias entre o período de translação da Terra, com as estações do ano, e o calendário civil, foram ajustadas com a inclusão do ano bissexto.

O terceiro capítulo deste trabalho foi o momento de estabelecer a base matemática dos tópicos que seriam apresentados com a astronomia.

Vimos no quarto capítulo uma abordagem que poderá contribuir com tópicos bem específicos da astronomia. Destacamos os seguintes pontos principais:

- o calendário Gregoriano ajustou 10 dias ao ano civil de 1582 estabelecendo um padrão que ainda perdura no mundo ocidental. Com a aritmética dos restos aprendemos como determinar o dia da semana em que determinada data ocorreu a partir de 1582;
- uma recente revisão de tabuas cuneiforme feita pelo astroarqueólogo Mathieu Ossendrijver, da Universidade Humboldt em Berlim, Alemanha, traduziu o texto ainda não elucidado de Júpiter, que traz fortes indicações que os babilônios determinavam a trajetória deste planeta utilizando uma técnica de integração numérica: a Regra dos Trapézios;
- a construção do relógio do Sol, uma das formas milenares de se acompanhar o correr das horas durante o dia, bem como sua utilização, cujo funcionamento pode ser explicado com conhecimento elementar de geometria plana. Mesmo recorrendo a um método mais sofisticado de localização, no caso o GPS, entendemos plenamente sua dinâmica por meio da geometria analítica;
- as aplicações da propriedade reflexiva de elipse, parábola e hipérbole, não apenas nos ajudam a entender o movimento orbital dos planetas, mas também a construção de importantes instrumentos de observação astronômica, como lunetas e telescópios; e

- a necessidade de se lançar mão de uma geometria não euclidiana, a saber a geometria esférica no desenvolvimento da astrometria. Este avanço contribuiu com a construção de mapas celestes, conceitos essenciais na localização, identificação e cálculo mais preciso acerca dos astros.

No quinto Capítulo falamos sobre a estrutura da Eletiva para a Educação Básica. Entendemos que seu caráter interdisciplinar, muito contribuirá para a aprendizagem dos estudantes da Educação Básica.

Diante de tudo que consideramos, o professor da Educação Básica poderá encontrar neste trabalho uma excelente oportunidade de desenvolver a curiosidade de seus estudantes na relação entre a Matemática e a Astronomia. Tem a possibilidade de aprofundar seus conhecimentos por meio da revisão que fizemos acerca da literatura dos principais tópicos matemáticos aqui abordados. Terá que ser flexível na tomada de algumas decisões na construção de sua Disciplina Eletiva, considerando primordialmente as necessidades de aprendizagem de seus alunos. Com isso, se apropriará cada vez mais da importância de seu papel no processo educacional, “como um arquiteto da aprendizagem, um líder, um organizador e um coautor de acontecimentos, atuando junto aos jovens, oferecendo-lhes espaços e condições para o desenvolvimento pleno de seu potencial nas dimensões da racionalidade, da afetividade, da corporeidade e da espiritualidade” (ICE, 2015).

## Referências

- ALMEIDA, D. G. *Lei dos cossenos: Uma visão plural e enriquecedora para o Ensino Médio*. 2023. Disponível em: <[https://sca.profnat-sbm.org.br/profnat\\_tcc.php?id1=7359&id2=171056701](https://sca.profnat-sbm.org.br/profnat_tcc.php?id1=7359&id2=171056701)>. Acesso em 16 de Abril de 2024. Citado na página 68.
- ÁVILA, G. *A hipérbole e os Telescópios*. *Revista do Professor de Matemática (RPM)* 34. 2020. Disponível em: <<http://rpm.org.br/cdrpm/34/5.htm>>. Acesso em 09 de abril de 2023. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 101.
- BARBOSA, E. A. *Aritmética, A contagem do tempo, Congruência no Calendário*. 2018. Disponível em: <[https://sca.profnat-sbm.org.br/profnat\\_tcc.php?id1=4506&id2=160061134](https://sca.profnat-sbm.org.br/profnat_tcc.php?id1=4506&id2=160061134)>. Acesso em 09 de abril de 2023. Citado na página 38.
- BAYERT, J. *Uranometria: omnium asterismorum continens schemata, no a methodo delineata, aereis laminis expressa*. Augsburg, Alemanha: Excudit Christophorus Mangus, 1603. Citado na página 104.
- BEZERRA, L. F. *A Geometria esférica como solução para navegação astronômica*. 2019. Disponível em: <[https://sca.profnat-sbm.org.br/profnat\\_tcc.php?id1=5229&id2=171053513](https://sca.profnat-sbm.org.br/profnat_tcc.php?id1=5229&id2=171053513)>. Acesso em 19 de junho de 2023. Citado 5 vezes nas páginas 38, 69, 70, 71 e 72.
- BICUDO, I. *Os elementos/Euclides; tradução e introdução de Irineu Bicudo*. São Paulo: Editora UNESP, 2009. Citado na página 40.
- BRASIL. *LEI Nº 13.415, DE 16 DE FEVEREIRO DE 2017. Aprova o Plano Nacional de Educação PNE e dá outras providências*. Portal da Legislação, Brasília. 2017. Disponível em: <[https://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/\\_ato2015-2018/2017/lei/13415.htm](https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/13415.htm)>. Acesso em 11 de Abril 2023. Citado na página 16.
- CALENDARIOS.INFO. *O Calendário Babilônico - História dos calendários*. 2023. Disponível em: <<https://www.calendarios.info/o-calendario-babilonico/>>. Acesso em 09 de abril de 2023. Citado na página 27.
- CANALLE, J. B. G. *Oficina de Astronomia*. 2010. Disponível em: <<http://www.telescopiosnaescola.pro.br/oficina.pdf>>. Acesso em 09 de abril de 2023. Citado na página 38.
- CANHÃO, T. F. *O calendário egípcio*. 2006. Disponível em: <<https://journals.openedition.org/cultura/1296>>. Acesso em 16 de abril de 2023. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 24.
- CIENTÍFICA, D. C. de B. *Hevelius, Johannes*. 2018. Disponível em: <<https://www.encyclopedia.com/people/science-and-technology/astronomy-biographies/johannes-hevelius>>. Acesso em 8 de Novembro de 2023. Citado na página 104.
- CIÊNCIA, G. *Aprenda como montar uma luneta utilizando materiais simples*. 2009. Disponível em: <<https://redglobo.globo.com/globociencia/noticia/2012/09/aprenda-como-montar-uma-luneta-utilizando-materiais-simples.html>>. Acesso em 31 de Agosto de 2023. Citado 2 vezes nas páginas 120 e 125.

- CORDEIRO, T. *Como os maias sabiam tanto sobre astronomia?* 2018. Disponível em: <<https://super.abril.com.br/historia/como-os-maias-sabiam-tanto-sobre-astronomia/>>. Acesso em 09 de abril de 2023. Citado na página 31.
- CUARÓN, A. *Gravidade*. EUA: Warner Bros. Pictures, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 118 e 124.
- DMUC, D. de M. *Matemática na Babilônia*. 2023. Disponível em: <<https://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/Matem%C3%A1tica%20na%20Babil%C3%B3nia.htm>>. Acessado em 09 de Abril de 2023. Citado na página 28.
- DOMINGOS, R. B.; TEIXEIRA, R. R. P. *Uso do software Stellarium em atividades de ensino de astronomia*. 2021. Disponível em: <<https://periodicos.utfpr.edu.br/rbfta/article/view/13783>>. Acesso em 10 de novembro de 2023. Citado na página 113.
- DONADO, J. V. *Antiguedades Judías Libros -*. Madri, Espanha: [s.n.], 1997. Citado na página 25.
- FERNANDES, F. C. *Algoritmo de Zeller: a matemática do calendário gregoriano*. 2020. Disponível em: <[https://sca.profnat-sbm.org.br/profnat\\_tcc.php?id1=5603&id2=171053679](https://sca.profnat-sbm.org.br/profnat_tcc.php?id1=5603&id2=171053679)>. Acesso em de Novembro de 2023. Citado na página 83.
- FILHO, M. d. F. O. S. Kepler de S. O. *Astronomia e Astrofísica, Ed. Universidade/UFRGS*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014. Citado 9 vezes nas páginas 19, 35, 36, 105, 106, 108, 109, 110 e 111.
- GINGERICH, O. *Astronomia islâmica, Scientific American*. 1986. Disponível em: <[https://faculty.kfupm.edu.sa/PHYS/alshukri/PHYS215/Islamic\\_astronomy.htm](https://faculty.kfupm.edu.sa/PHYS/alshukri/PHYS215/Islamic_astronomy.htm)>. Acesso em 09 de abril de 2023. Citado 3 vezes nas páginas 33, 34 e 35.
- GIZBRASIL. *Este texto antigo de astronomia da Babilônia muda a história*. 2016. Disponível em: <<https://gizmodo.uol.com.br/calculo-astronomia-babilonia/>>. Acesso em 09 de abril de 2023. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.
- HEFEZ, A. *Aritmética, Abramo Hefez. 2ª ed. - Rio de Janeiro, RJ: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática*. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. Citado 5 vezes nas páginas 38, 39, 40, 42 e 76.
- HOSTI, B. P. *Tudo o que você quer saber sobre telescópios*. 2021. Disponível em: <<https://www.espacotempo.com.br/tudo-o-que-voce-quer-saber-sobre-telescopios/>>. Acesso em 22 de Setembro de 2023. Citado 2 vezes nas páginas 99 e 100.
- HUSSEIN, C. I. C. I. *uwar al-kawākib - Livro das Estrelas Fixas*. 2021. Disponível em: <<https://www.centroimamhusein.com/post/suwar-al-kawakib-livro-das-estrelas-fixas>>. Acesso em 18 de junho de 2023. Citado na página 103.
- ICE, I. de Corresponsabilidade pela E. *Modelo Pedagógico Metodologias de Êxito da Parte Diversificada do Currículo*. 2015. Disponível em: <[https://www.academia.edu/34883413/Modelo\\_Pedag%C3%B3gico\\_Metodologias\\_de\\_%C3%8Axito\\_da\\_Parte\\_Diversificada\\_do\\_Curr%C3%ADculo](https://www.academia.edu/34883413/Modelo_Pedag%C3%B3gico_Metodologias_de_%C3%8Axito_da_Parte_Diversificada_do_Curr%C3%ADculo)>. Acesso em 12 de Abril 2023. Citado 5 vezes nas páginas 16, 115, 116, 117 e 127.
- IKKARO. *A ampulheta ou relógio de água*. 2021. Disponível em: <[www.ikkaro.com/pt/lepsidra-reloj-agua](http://www.ikkaro.com/pt/lepsidra-reloj-agua)>. Acesso em 09 de abril de 2023. Citado na página 24.

- JESUS, A. B. de. *Identificação das Cônicas*. 2018. Disponível em: <<http://www2.uesb.br/cursos/matematica/matematicavca/wp-content/uploads/Conicas.pdf>>. Acesso em 25 de junho de 2023. Citado na página 38.
- JOHNSTON, J. *Céu de Outubro*. EUA: Universal Pictures, 1999. Citado na página 125.
- JR., W. A. R. *Cláudio Ptolomeu. Portal Graecia Antiqua, São Carlos*. 2006. Disponível em: <<https://greciantiga.org/arquivo.asp?num=0508>>. Acesso em 09 de abril de 2023. Citado na página 30.
- JUNCKER, M. *Como Fazer um Foguete de Bicarbonato de Sódio e Vinagre*. 2023. Disponível em: <<https://pt.wikihow.com/Fazer-um-Foguete-de-Bicarbonato-de-S%C3%B3dio-e-Vinagre>>. Acesso em 31 de agosto de 2023. Citado na página 122.
- KEPLER, S. O. *Astronometria*. 2018. Disponível em: <<http://astro.if.ufrgs.br/telesc/astrometria.htm>>. Acesso em 09 de abril de 2023. Citado na página 30.
- KEPLER, S. O. *Trigonometria Esférica*. 2018. Disponível em: <<http://astro.if.ufrgs.br/trigesf/trigesf.htm>>. Acesso em 09 de abril de 2023. Citado na página 73.
- KINGTUT. *Calendário Egípcio Antigo*. 2023. Disponível em: <<http://www.kingtutshop.com/freeinfo/Ancient-Egyptian-Calendar.htm>>. Acesso em 25 de janeiro 2023. Citado 4 vezes nas páginas 19, 20, 21 e 22.
- LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica. Tradução de Cyro de Carvalho Patarra*. São Paulo: Editora HARBRA, 1994. Citado 8 vezes nas páginas 38, 47, 48, 49, 50, 51, 52 e 54.
- LIBRARY, W. D. *O Códice de Dresden*. 1200. Disponível em: <[https://www.loc.gov/resource/gdcwdl.wdl\\_11621/?sp=10&st=pdf&r=-0.597%2C-0.11%2C2.194%2C2.194%2C0&pdfPage=63](https://www.loc.gov/resource/gdcwdl.wdl_11621/?sp=10&st=pdf&r=-0.597%2C-0.11%2C2.194%2C2.194%2C0&pdfPage=63)>. Acesso em 17 de abril de 2023. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.
- LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. Rio de Janeiro: Impa Rio de Janeiro, 2011. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 61.
- MELO, C. B. de. *A matemática dos restos e o calendário gregoriano*. 2014. Disponível em: <[https://sca.profmatt-sbm.org.br/profmatt\\_tcc.php?id1=1171&id2=309](https://sca.profmatt-sbm.org.br/profmatt_tcc.php?id1=1171&id2=309)>. Acesso em 09 de abril de 2023. Citado na página 38.
- MENDES, A. S. *Relógio de Sol: Proposta de ensino para o estudo de ângulos no Ensino Fundamental*. 2017. Disponível em: <[https://sca.profmatt-sbm.org.br/profmatt\\_tcc.php?id1=3566&id2=95664](https://sca.profmatt-sbm.org.br/profmatt_tcc.php?id1=3566&id2=95664)>. Acesso em 09 de abril de 2023. Citado 6 vezes nas páginas 38, 92, 98, 99, 119 e 124.
- MOURÃO, R. R. d. F. *Dicionário enciclopédico de Astronomia e Astronáutica - Ronaldo Rogério de Freitas Mourão; assistente Maria Lucia de Oliveira Mourão; prefácio de Antonio Houaiss*. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira S.A., 1987. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 104.
- NETO, A. C. M. *Geometria - Coleção PROFMAT*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 38, 65 e 66.
- NETO, A. C. M. *Fundamentos de Cálculo*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 52.

- NETTO, M. N. D. C. G. *Óptica Geométrica em uma Perspectiva Matemática*. 2015. Disponível em: <[https://sca.proformat-sbm.org.br/proformat\\_tcc.php?id1=3060&id2=85226](https://sca.proformat-sbm.org.br/proformat_tcc.php?id1=3060&id2=85226)>. Acesso em 16 de Abril de 2024. Citado na página 59.
- OBSERVATORIES, C. O. *Palomar Obsevatory*. 2021. Disponível em: <<https://sites.astro.caltech.edu/palomar/about/>>. Acesso em 31 de Agosto de 2023. Citado na página 102.
- OLIVEIRA, C. L. *A Metodologia de Projetos como recurso de ensino e aprendizagem na Educação Básica*. 2006. Disponível em: <<chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcgclefindmkaj/https://nedeja.uff.br/wp-content/uploads/sites/223/2020/05/A-Metodologia-de-Projetos-como-recurso-de-ensino.pdf>>. Acesso em 16 de Abril de 2024. Citado na página 16.
- ONLINE, C. *Relógio de sol do antigo Egípto descoberto no Vale dos Reis*. 2013. Disponível em: <<http://www.ciencia-online.net/2013/03/relogio-de-sol-do-antigo-egipto.html>>. Acesso em 09 de abril de 2023. Citado na página 23.
- PACHECO, R. C. *Atividades Lúdicas e Experimentais de Investigação em Astronomia*. 2017. Disponível em: <<https://educapes.capes.gov.br/handle/capes/565543>>. Acesso em 8 de Novembro de 2023. Citado 2 vezes nas páginas 89 e 91.
- PAMPA, C. de Astronomia da Universidade Federal do. *Experimento para encontrar o Norte verdadeiro*. 2013. Disponível em: <<https://sites.unipampa.edu.br/astrologia/2013/11/24/experimento-para-encontrar-o-norte-verdadeiro>>. Acesso em 09 de abril de 2023. Citado na página 92.
- PERSPICAZ, E. *Calendário*. 2020. Disponível em: <<https://wol.jw.org/pt/wol/d/r5/lp-t/1200000866>>. Acesso em 09 de abril de 2023. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 27.
- PILLING, S. *Cálculo Numérico*. 2010. Disponível em: <[https://www1.univap.br/spilling/CN/CN\\_Capt6.pdf](https://www1.univap.br/spilling/CN/CN_Capt6.pdf)>. Acesso em 16 de Abril de 2024. Citado na página 86.
- PNGTREE. *Chichén Itzá Pirâmide Serpiente El Templo Kukulcán Templo En México*. 2023. Disponível em: <[https://es.pngtree.com/freebackground/chichen-itza-pyramid-snake-el-templo-kukulcan-temple-in-mexico-yucatan\\_2044413.htm](https://es.pngtree.com/freebackground/chichen-itza-pyramid-snake-el-templo-kukulcan-temple-in-mexico-yucatan_2044413.htm)>. Acesso em 09 de abril de 2023. Citado na página 33.
- PORTO, D. A. *História da Astronomia: A evolução da ideia do universo da antiguidade à idade moderna*. 2000. Disponível em: <<http://www.univasf.edu.br/~militao.figueredo/MNPEF/fisicacomtemporanea/Monografias/Historia%20da%20Astronomia%20-%20Deivd%20Porto.pdf>>. Acesso em 09 de abril de 2023. Citado na página 36.
- PRECIOSO, L. dos S. *O uso de aplicativos no ensino de senos e cossenos*. 2023. Disponível em: <[https://sca.proformat-sbm.org.br/proformat\\_tcc.php?id1=3867&id2=160340122](https://sca.proformat-sbm.org.br/proformat_tcc.php?id1=3867&id2=160340122)>. Acesso em 16 de Abril de 2024. Citado na página 68.
- PUCRS, M. de Ciências e T. *O ano novo e o ano solar*. 2023. Disponível em: <[https://www.pucrs.br/mct/o-ano-novo-e-o-ano-solar/#:~:text=Um%20ano%20solar%20\(tamb%C3%A9m%20conhecido,rela%C3%A7%C3%A3o%20aos%20equin%C3%B3cios%20e%20solst%C3%ADcios.>](https://www.pucrs.br/mct/o-ano-novo-e-o-ano-solar/#:~:text=Um%20ano%20solar%20(tamb%C3%A9m%20conhecido,rela%C3%A7%C3%A3o%20aos%20equin%C3%B3cios%20e%20solst%C3%ADcios.>)>. Acesso em 12 de abril de 2023. Citado na página 20.

- QUINTAS, R. D. *Estudo das cônicas- Várias abordagens*. 2018. Disponível em: <[https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat\\_tcc.php?id1=4136&id2=95302](https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=4136&id2=95302)>. Acesso em 16 de Abril de 2024. Citado na página 55.
- ROCHA, H. B. V. da L. *As leis de Kepler*. 2013. Disponível em: <[https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat\\_tcc.php?id1=220&id2=39799](https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=220&id2=39799)>. Acesso em 09 de abril de 2023. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 99.
- RODRIGUES, P. E. *Astronomia na Grécia Antiga*. 2018. Disponível em: <<https://www.infoescola.com/historia/astronomia-na-grecia-antiga>>. Acesso em 09 de abril de 2023. Citado na página 29.
- ROGALSKI, C. F. T. *Ramadã: o que é, como funciona e datas*. 2022. Disponível em: <<https://portal.rodadecuia.com.br/geral/datas-especiais/03/04/2022/ramada-o-que-e-como-funciona-e-datas/>>. Acesso em 09 de abril de 2023. Citado na página 34.
- ROUSSEAU, C. *Matemática e Atualidade: volume 1 / Christiane Rousseau, Yvan Sant-Aubin; tradução Miguel V. S. Frasson - 2 ed*. Rio de Janeiro: SBM, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 95 e 97.
- SAGRADA, T. do Novo Mundo da B. *Calendário Hebraico*. 2015. Disponível em: <<https://wol.jw.org/pt/wol/d/r5/lp-t/1001070237>>. Acesso em 09 de Abril de 2023. Citado na página 26.
- SAGRADA, T. do Novo Mundo da B. *Tradução do Novo Mundo da Bíblia Sagrada*. 2015. Disponível em: <<https://wol.jw.org/pt/wol/binav/r5/lp-t>>. Acesso em 09 de Abril de 2023. Citado na página 25.
- SANTIAGO, B. *Apostila de Astronomia Geodésica*. 2012. Disponível em: <<http://www.if.ufrgs.br/oei/santiago/fis2005/textos/esferast.htm>>. Acesso em 21 de junho de 2023. Citado na página 75.
- SARAIVA, K. de Souza Oliveira Filho & Maria de F. O. *Astronomia e Astrofísica*. 2012. Disponível em: <<http://astro.if.ufrgs.br/trigesf/trigesf.htm>>. Acesso em 21 de junho de 2023. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 74.
- SILVA, D. M. F. da. *A hipérbole e suas aplicações*. 2013. Disponível em: <[https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat\\_tcc.php?id1=346&id2=43148](https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=346&id2=43148)>. Acesso em 01 de Abril de 2024. Citado na página 64.
- SILVA, W. M. S. da. *Uma abordagem dinâmica e inovadora para o ensino de geometria analítica no ensino médio*. 2013. Disponível em: <[https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat\\_tcc.php?id1=251&id2=28157](https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=251&id2=28157)>. Acesso em 16 de Abril de 2024. Citado na página 58.
- SOCIETY, S. . *Relógio estelar egípcio*. 2020. Disponível em: <<https://www.scienceandsociety.co.uk/results.asp?image=10314595>> Acesso em 09 de abril de 2023. Citado na página 23.
- SOUSA, R. G. *Maias - Ciências e Artes*. 2023. Disponível em: <<https://brasilecola.uol.com.br/historia-da-america/maias-ciencias-artes.htm>>. Acesso em 09 de abril de 2023. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.

- SWERDLOW, N. M. *Um catálogo de estrelas usado por Johannes Bayer*, *Jornal de História da Astronomia*. 1986. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1986JHA....17..189S/abstract>>. Acesso em 09 de abril de 2023. Citado 2 vezes nas páginas 103 e 104.
- THOMÉ, V. W. *Triângulo isósceles*. 2022. Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo\\_is%C3%B3sceles#cite\\_ref-0\\_1-1](https://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo_is%C3%B3sceles#cite_ref-0_1-1)>. Acesso em 09 de abril de 2023. Citado 2 vezes nas páginas 93 e 94.
- TIMBÓ, M. A. *Elementos de Cartografia, Departamento de Cartografia UFMG*. 2001. Disponível em: <<https://csr.ufmg.br/geoprocessamento/publicacoes/cartomensura.pdf>>. Acesso em 01 de maio de 2023. Citado na página 92.
- TREBIZOND'S, G. *Latin translation (ca. 1451) of Almagest*. 1451. Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/wiki/Almagesto#/media/Ficheiro:Almagest\\_1.jpeg](https://pt.wikipedia.org/wiki/Almagesto#/media/Ficheiro:Almagest_1.jpeg)>. Acesso em 09 de abril de 2023. Citado na página 31.
- UFPA, L. de D. *Espectroscópio caseiro*. 2016. Disponível em: <<https://labdemon.ufpa.br/optica/espectroscopio-caseiro>>. Acesso em 31 de Agosto de 2023. Citado na página 125.
- WHITEHOUSE, D. *Mapa estelar mais antigo' encontrado*. 2003. Disponível em: <<http://news.bbc.co.uk/2/hi/science/nature/2679675.stm1>>. Acesso em 07 de novembro de 2023. Citado na página 103.
- WIKIHOW, E. *Como Construir Um Foguete de Garrafa*. 2012. Disponível em: <<https://pt.wikihow.com/Construir-Um-Foguete-de-Garrafa>>. Acesso em 31 de Agosto de 2023. Citado 2 vezes nas páginas 122 e 125.
- WILHELM, V. E. *Métodos Numéricos Integração Numérica – Regra dos Trapézio*. 2018. Disponível em: <[https://docs.ufpr.br/~volmir/MN\\_15\\_integracao\\_regra\\_trapezio\\_ppt.pdf](https://docs.ufpr.br/~volmir/MN_15_integracao_regra_trapezio_ppt.pdf)>. Acesso em 09 de abril de 2023. Citado 3 vezes nas páginas 38, 86 e 89.

# APÊNDICE A – Ementa da Eletiva



GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO  
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO  
COORDENAÇÃO DO PROGRAMA ESCOLA VIVA



DISCIPLINA ELETIVA - 2018	
TÍTULO	
<b>Ao infinito e Além</b>	
DISCIPLINAS	
Geografia/História e Matemática	
PROFESSORES	
Professor Júlio M. Rodrigues, na Disciplina de Geografia/História. Professor Naftaly Cristal Félix, na disciplina de Matemática.	
JUSTIFICATIVA	
Partimos da necessidade de desenvolver métodos mais atraentes para auxiliar os alunos com dificuldade em matemática além de despertar todo potencial criativo e autodidata de nossos alunos ao contemplarem os corpos celestes. Neste último caso os conhecimentos em astronomia básica, criação dos primeiros calendários, movimentos dos corpos celestes, mapas astronômicos, instrumentos de observação, presentes na disciplina de Geografia e História, junto com o estudo de escalas, cálculo de distâncias astronômicas, trigonometria, que contribuirão em muito para o aprendizado nesta eletiva.	
OBJETIVOS	
<b>Geral</b> Conhecer a evolução do conhecimento astronômico desde a antiguidade até suas implicações atuais com a exploração espacial	
<b>Específico</b> - Levar o estudante a colocar-se como protagonista na produção científica e na percepção de conceitos elementares da Geografia, História e da Matemática aplicada e áreas científicas afins. - Promover a educação interdimensional, tendo por foco a visitação de um observatório astronômico. - Proporcionar momento de visita a um ambiente de para observação do céu noturno. - Estimular a aplicação dos 4 pilares da educação (aprender a ser, a fazer, a aprender, a conviver) por meio de desenvolvimento de projetos. - Considerar as competências para o século 21, tão evidentes na relação do homem com os processo científicos referentes a exploração espacial e previsão de fenômenos celestes. - Conhecer o que é Astronomia e suas implicações para a sociedade atual. - Reconhecer-se como um ser pequeno mas ao mesmo tempo único neste vasto Universo Espacial	
HABILIDADES E COMPETÊNCIAS A SEREM DESENVOLVIDAS	
<b>Matemática</b> - Utilizar técnicas de Desenho Geométrico na elaboração de planisférios e instrumentos astronômicos; - Resolver problemas que envolvam a lei dos senos e lei dos cossenos - Resolver problemas que envolvam operações elementares com notação científica. - Identificar grandezas direta e inversamente proporcionais e resolver problemas. - Reconhecer ordens de grandeza de medidas astronômicas.	
<b>Geografia/História</b> - Saber utilizar mapas e GPS - Utilizar os conhecimentos básicos em coordenadas geográficas	

Figura 83 – Ementa da Eletiva

Fonte: O Autor (2023)



GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO  
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO  
COORDENAÇÃO DO PROGRAMA ESCOLA VIVA



<p>- Saber comparar as ideias do Universo geostático de Aristóteles-Ptolomeu e heliostático de Copérnico-Galileu-Kepler.</p> <p>- Conhecer as relações entre os movimentos da Terra, da Lua e do Sol para a descrição de fenômenos astronômicos (duração do dia/noite, estações do ano, fases da lua, eclipses, marés etc.).</p>
<b>CONTEÚDO PROGRAMÁTICO</b>
<p><b>Astronomia e Cultura</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Representações do Céu e do universo em Diferentes Culturas;</li> <li>• A astronomia da música, na literatura e no Cinema</li> </ul> <p><b>Astronomia Espaço e Tempo</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Orientação geográfica</li> <li>• A medida do tempo</li> <li>• Calendários</li> <li>• Movimentos da Terra</li> <li>• Fenômenos Celeste</li> </ul> <p><b>Modelos Geocêntrico e heliocêntrico</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Como explicavam e previam fenômenos celestes</li> <li>• O Novo sistema solar</li> </ul> <p><b>Os Telescópios</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Estrutura e Construção</li> </ul> <p><b>Os Corpos Celestes</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Composição química dos astros</li> <li>• Classificação dos Planetas</li> <li>• Classificação das estrelas</li> <li>• Ciclo de vida das estrelas</li> </ul> <p><b>O Tamanho do Universo</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Organização do Universo Visível</li> <li>• Estrutura das Galáxias, Grupos, Aglomerados e Superaglomerados.</li> <li>• Vida Extra Terrestre</li> <li>• O homem no espaço</li> <li>• A ida do homem à Lua</li> </ul>
<b>METODOLOGIA</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aula Expositiva Dialogada</li> <li>• Utilização de softwares e aplicativos para estudo em astronomia</li> <li>• Construções de maquetes, esquemas, instrumentos de observação.</li> <li>• Utilização de filmes</li> <li>• Visitas extra classe para observação astronômica.</li> </ul>

Figura 84 – Ementa da Eletiva

Fonte: O Autor (2023)



GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO  
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO  
COORDENAÇÃO DO PROGRAMA ESCOLA VIVA



RECURSOS DIDÁTICOS NECESSÁRIOS
Computadores com internet, editor de textos e de planilhas; Televisão ou Datashow; Quadro branco e pincel atômico; Laboratório de Matemática e Física.
PROPOSTA PARA A CULMINÂNCIA
<ul style="list-style-type: none"> <li>Exposição de fotos , vídeos da visitação de espaço extraescolar para observação noturna e Planetário de Vitória-ES</li> <li>Exposição de instrumentos astronômicos produzidos no decorrer da eletiva</li> </ul>
AVALIAÇÃO
<ul style="list-style-type: none"> <li>Frequência;</li> <li>Capacidade de Iniciativa e autodidatismo;</li> <li>Concentração e Foco nas explicações;</li> <li>Curiosidade e participação do estudante;</li> <li>Espírito Gregário nas atividades em grupo</li> </ul>
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS
<ul style="list-style-type: none"> <li><a href="http://www.on.br/certificados/ens_dist_2008/site/conteudo/modulo1/4cosmologiaislamica/">http://www.on.br/certificados/ens_dist_2008/site/conteudo/modulo1/4cosmologiaislamica/</a></li> <li><a href="https://prezi.com/uta_e8ze1byq/disciplina-eletiva-de-astronomia/islamico.html">https://prezi.com/uta_e8ze1byq/disciplina-eletiva-de-astronomia/islamico.html</a></li> <li><a href="http://www.ccvalg.pt/astronomia/historia/idade_media.htm">http://www.ccvalg.pt/astronomia/historia/idade_media.htm</a></li> <li><a href="http://www.on.br/certificados/ens_dist_2008/site/conteudo/modulo1/4cosmologiaislamica/islamico.html">http://www.on.br/certificados/ens_dist_2008/site/conteudo/modulo1/4cosmologiaislamica/islamico.html</a></li> <li><a href="http://www.on.br/certificados/ens_dist_2008/site/conteudo/modulo1/1cosmologiaantiga/4cosmologiaindia.html">http://www.on.br/certificados/ens_dist_2008/site/conteudo/modulo1/1cosmologiaantiga/4cosmologiaindia.html</a></li> </ul>

Figura 85 – Ementa da Eletiva

Fonte: O Autor (2023)

## APÊNDICE B – Visita ao Planetário de Vitória

Visita ao Planetário de Vitória como parte da Culminância da Eletiva "Ao Infinito e Além"



Figura 86 – Visita ao Planetário de Vitória em 2018

Fonte: Registro de visita pedagógica feita pelo próprio autor



Figura 87 – Visita ao Planetário de Vitória em 2018

Fonte: Registro de visita pedagógica feita pelo próprio autor



Figura 88 – Visita ao Planetário de Vitória em 2018

Fonte: Registro de visita pedagógica feita pelo próprio autor



Figura 89 – Visita ao Planetário de Vitória em 2018

Fonte: Registro de visita pedagógica feita pelo próprio autor