UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Camila Gasparin Magnaguagno

UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DE FRAÇÕES UTILIZANDO MATERIAL MANIPULATIVO BASEADA NOS PRINCÍPIOS DA ENGENHARIA DIDÁTICA

Santa Maria, RS
2024

Camila Gasparin Magnaguagno

UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DE FRAÇÕES UTILIZANDO MATERIAL MANIPULATIVO BASEADA NOS PRINCÍPIOS DA ENGENHARIA DIDÁTICA

Dissertação do Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional realizado na Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Orientador: Profª. Draª. Luciane Gobbi Tonet

Santa Maria
2024

Magnaguagno, Camila Gasparin
UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DE FRAÇÕES UTILIZANDO MATERIAL MANIPULATIVO BASEADA NOS PRINCÍPIOS DA ENGENHARIA DIDÁTICA / Camila Gasparin Magnaguagno.- 2024.
121 p.; 30 cm

Orientadora: Luciane Gobbi Tonet
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2024

1. Frações 2. Material Manipulativo 3. Engenharia Didática 4. Ensino Fundamental I. Tonet, Luciane Gobbi II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, CAMILA GASPARIN MAGNAGUAGNO, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

Camila Gasparin Magnaguagno

UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DE FRAÇÕES UTILIZANDO MATERIAL MANIPULATIVO BASEADA NOS PRINCÍPIOS DA ENGENHARIA DIDÁTICA

Dissertação do Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional realizado na Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em 27 de fevereiro de 2023:

____
Profª. Draª. Luciane Gobbi Tonet (UFSM)
(Presidente/Orientador)

____
Profª. Draª. Karine Faverzani Magnago (UFSM)

____
Profª. Draª. Elizangela Dias Pereira (UNIPAMPA)

Santa Maria, RS
2024

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é fruto do apoio e investimento de diversas pessoas, às quais sou imensamente grata.

Primeiramente, agradeço aos meus pais e ao meu irmão por me apoiarem e incentivarem a realizar este sonho. Sem seu suporte emocional, físico e financeiro esta conquista seria impossível.

Agradeço também ao meu namorado, que com sua racionalidade, paciência e persistência me ajuda a trilhar os caminhos que me aproximam dos meus sonhos.

Um presente inesperado, porém, de valor inestimável foi a turma que encontrei no mestrado. Colegas, obrigada pelas trocas, pelo apoio, pelas risadas. Vocês tornaram esse momento uma divertida e edificante aventura. Em especial, obrigada à Carine e sua família por me acolherem da maneira mais amorosa que alguém pode sonhar.

Obrigada a todos os professores, por sua dedicação e empenho a este curso em que vejo tanto poder para transformar a educação brasileira. Em particular, a minha orientadora, professora Luciane, pelas trocas especiais que tivemos. Obrigada por acreditar nas minhas ideias e me presentear com relatos da sua experiência.

Aos amigos, por entenderem a ausência e acreditarem que eu seria capaz nos momentos em que eu mesma duvidava. Vocês tornam a vida melhor.

Por fim, a todos os alunos que já dividiram seu processo de aprendizagem comigo. É uma honra e um prazer ensinar e aprender com vocês. Este trabalho é por e para vocês, e todos os estudantes que merecem um ensino de qualidade.

RESUMO

UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DE FRAÇÕES UTILIZANDO MATERIAL MANIPULATIVO BASEADA NOS PRINCÍPIOS DA ENGENHARIA DIDÁTICA

AUTOR: Camila Gasparin Magnaguagno
ORIENTADOR: Luciane Gobbi Tonet

Motivado por um incômodo das autoras quanto à falta de naturalidade dos alunos, dos diversos níveis de educação, para resolver questões envolvendo frações, este trabalho busca propor uma abordagem com utilização de material manipulativo para melhorar este contexto. O objetivo é abordar as operações entre números fracionários de forma que os alunos percebam seu significado, sem a necessidade de memorizar algoritmos que por vezes são confusos para eles. Baseando-se nas quatro etapas propostas na metodologia da engenharia didática, desenvolve-se uma sequência didática com oito atividades que utilizam as frações circulares e as réguas fracionárias. As atividades foram construídas de forma que as operações com frações têm como base a equivalência de frações e foram aplicadas em uma turma de 6° ano do Ensino Fundamental. A partir desta atividade, pôde-se constatar uma melhora na compreensão dos alunos acerca do conteúdo, bem como um aumento da confiança que os mesmos sentem ao trabalhar com o conteúdo. Destaca-se que atividades que exigem o protagonismo dos alunos geram certa resistência inicialmente, mas que os alunos conseguem desenvolver sua autonomia ao longo das aplicações. Ainda, a mediação do professor é essencial, tanto na potencialização das aprendizagens quanto na pontuação de eventuais equívocos por parte dos estudantes.

Palavras-chave: Frações, Material Manipulativo, Engenharia Didática, Ensino Fundamental.

Santa Maria, RS
2024

ABSTRACT

AN APPROACH TO TEACHING FRACTIONS USING MANIPULATIVE MATERIALS BASED ON THE PRINCIPLES OF DIDACTIC ENGINEERING

AUTHOR: Camila Gasparin Magnaguagno
ADVISOR: Luciane Gobbi Tonet

Motivated by the authors' discomfort regarding the lack of naturalness of students, from different levels of education, to resolve issues related to fractions, this work seeks to propose an approach using manipulative material to improve this context. The objective is to approach operations between fractional numbers in such a way that students understand their meaning, without the need to memorize algorithms that are sometimes confusing for them. Based on the four steps proposed in the didactic engineering methodology, a didactic sequence is developed with eight activities that use circular fractions and fractional rulers. The activities were constructed so that operations with fractions are based on the equivalence of fractions and were applied to a 6th year elementary school class. From this activity, it was possible to see an improvement in students' understanding of the content, as well as an increase in the confidence they themselves feel when working with the content. It is noteworthy that activities that deactivate students' protagonism generate some resistance initially, but that students develop their autonomy throughout the applications. Even so, the teacher's mediation is essential, both in enhancing learning and in identifying possible mistakes on the part of students.

Keywords: Fractions, Manipulative Material, Didactic Engineering, Elementary Education.

Santa Maria, RS
2024

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
EI	Educação Infantil
EF	Ensino Fundamental
EM	Ensino Médio
MMC	Mínimo Múltiplo Comum
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Natural de Caxias do Sul, no interior do Rio Grande do Sul, a autora deste trabalho, por sempre ter sido estimulada com jogos e atividades, desenvolveu desde cedo um bom raciocínio lógico, que levou à facilidade na compreensão da Matemática. Já no Ensino Médio, seu interesse foi então despertado para a disciplina, ao aprender a Regra de Cramer para o cálculo de determinantes e ficar fascinada com a engenhosidade de quem obteve tal resultado. Foi onde sua curiosidade intensificou fortemente para esta ciência.

Apesar da facilidade individual da autora, observava que aqueles a sua volta não tinham a mesma relação, que o que era para ela lógico, para os demais era sem sentido. A pior parte era o sofrimento gerado para alguns, que após resultados negativos, sentiam-se bloqueados em relação à disciplina.

Com o intuito de propagar a Matemática como uma ciência bela, divertida e lógica, iniciou no curso de Licenciatura em Matemática em 2015. Ao longo dos quatro anos de graduação, atuou em diversos projetos e conheceu realidades bem distintas das quais estava acostumada. Nesse período, em seus projetos, buscava maneiras lúdicas de trabalhar com a Matemática.

Ao terminar a graduação, começou lecionando, em maio de 2019, na rede pública de ensino, em uma escola de Ensino Médio. Atuou, até 2023, nesta mesma escola, tendo passado pelas três séries do Ensino Médio. Em fevereiro de 2023, migrou para a rede privada de ensino, em uma escola de Ensino Fundamental, atuando com sexto, sétimo e nono anos.

Após iniciar o trabalho de frações com o Ensino Fundamental, observou que o grau de conhecimento destes alunos era bastante similar ao dos alunos do Ensino Médio, tendo a maioria parado na parte introdutória de frações. Fazia sentido falar em a parte do todo, numerador e denominador, porém se restringia a isso. Quando chegava na hora de operar, e muitas vezes ao trabalhar equivalências, os alunos não sabiam como proceder. A dúvida que mais aparecia é “Tem que fazer o MMC?”. Apesar de os professores revisarem com frequência como operar com frações, notou-se que os alunos nunca sabiam como suceder quando se deparavam com tais situações, o que mostrava uma falta de significado nas operações com frações.

Ao discorrer sobre as consequências do ensino tradicional de frações, Nunes (2003) afirma que:

> A primeira coisa é que se aprende e se esquece. Se perguntarmos para a maioria das pessoas como é que se divide urna fração pela outra, a resposta é que não sabem mais, já esqueceram. Se souberem fazer a divisão, passando o

> número de baixo do tracinho para cima e o de cima para baixo e depois multiplicando, não sabem por que a divisão se faz desse jeito. Essa é uma aprendizagem que se esquece; quem não se esquece de como fazer a conta, se esquece do por que fazer assim.

Ao relatar suas observações para a professora orientadora, esta comentou que o mesmo panorama era presenciado no Ensino Superior, fazendo com que os alunos tivessem dificuldade na aquisição de novos conteúdos pela falta de conhecimento sobre frações. Sobre este mesmo aspecto discorrem Campos e Rodrigues (2007, p. 70):

> A prática de sala de aula, entretanto, revela que mesmo alunos de nível médio ou superior apresentam dificuldades no trato com as frações e demonstram não conhecer aspectos relevantes do conceito de número racional, o que acarreta prejuízos à compreensão de novos conceitos matemáticos.

A partir destas situações, chega-se à seguinte questão: *Como abordar as operações entre números fracionários de forma que os alunos percebam seu significado?* Para explorar tal questão, optou-se por utilizar o material manipulativo das frações circulares. A partir delas, e baseando-se nos princípios da Engenharia didática, uma metodologia de investigação que se caracteriza por um esquema experimental fundamentado na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino, desenvolveu-se a prática pedagógica que aqui se apresenta.

No Capítulo 2, explana-se sobre os referenciais teóricos que norteiam este trabalho, dissertando sobre as orientações presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) acerca do ensino e da aprendizagem de frações; apresenta-se os princípios da engenharia didática; elenca-se aspectos importantes do livro “Materiais Manipulativos para o Ensino de Frações e Números Decimais”, integrante da Coleção Mathemoteca, escrito por Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz e que inspirou diversas das atividades propostas.

No Capítulo 3 é apresentada a prática pedagógica desenvolvida seguindo os princípios da engenharia didática e suas quatro etapas. Além de um questionário para análises prévias e suas considerações, são apresentadas oito atividades desenvolvidas e seus resultados, bem como um questionário para análises posteriores e avaliação.

No Capítulo 4 são apresentadas as conclusões finais deste trabalho.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo está dividido em três seções, apresentando alguns temas importantes para o desenvolvimento do trabalho. Na primeira seção, são abordadas orientações presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) acerca do ensino e da aprendizagem de frações, documento que baliza o ensino em todo o país e que será o ponto de vista considerado na execução deste trabalho. Na segunda seção, são apresentados os princípios da engenharia didática, metodologia que guiará a prática pedagógica proposta. Por fim, são elencados aspectos importantes do livro "Materiais Manipulativos para o Ensino de Frações e Números Decimais", integrante da Coleção Mathemoteca, de autoria de Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz.

2.1 O ENSINO DE FRAÇÕES SEGUNDO A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento norteador das aprendizagens essenciais que devem ser desenvolvidas por todos os alunos ao longo das etapas da Educação Básica. Seu principal objetivo é balizar a educação de qualidade em todo o País, estabelecendo um patamar de aprendizagem e desenvolvimento que é direito de todos os alunos.

O documento apresenta competências gerais, desenvolvidas em diferentes etapas e áreas do conhecimento, e competências específicas referentes a cada área do conhecimento e componentes curriculares, de forma mais particular. Através de códigos, um sequenciamento das aprendizagens é feito da seguinte forma:

XX 00 YY 11

- O primeiro par de letras (XX) indica a Etapa de Ensino (EI, EF ou EM).
- O primeiro par de números (00) indica o ano (ou bloco de anos) a que se refere a aprendizagem ou habilidade.
- O segundo par de letras (YY) é uma abreviação do componente curricular ou da área (no caso de Ensino Médio).
- O último par de números indica a posição da aprendizagem ou da habilidade na numeração sequencial do ano (ou do bloco de anos) – no caso do Ensino Médio, o primeiro número desta última sequência indica a que competência específica a habilidade está relacionada.

Por exemplo: EF04MA09 identifica que é uma habilidade do Ensino Fundamental a ser desenvolvida no 4° ano pelo componente curricular/área de Matemática, estando na nona posição em relação às habilidades deste ano.

Ao longo do texto, na etapa do Ensino Fundamental, para a Área da Matemática, há um destaque acerca da importância das experimentações:

> Apesar de a Matemática ser, por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados, é de fundamental importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática. (BRASIL, 2018)

Assim, espera-se que, com a articulação dos seus diversos campos (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade), a área da Matemática garanta que os alunos relacionem "observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas" (BRASIL, 2018). Pretende-se, desta forma, desenvolver nos alunos a capacidade de identificar situações em que a matemática se apresente como uma importante aliada na resolução de problemas, aplicando e interpretando o que aprenderam em diferentes contextos.

O documento ainda destaca a importância de desenvolver o letramento matemático:

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. (BRASIL, 2018)

A partir da análise dos objetos de conhecimento e das habilidades presentes na BNCC que estejam associados à ideia de fração, criou-se o Quadro 1 a seguir:

Quadro 1 - A presença de frações na BNCC

ANO	**UNIDADES TEMÁTICAS**	**OBJETOS DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES**
4°	**Números**	Números racionais: frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100)	**(EF04MA09)** Reconhecer as frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso.
5°	**Números**	Representação fracionária dos números racionais:	**(EF05MA03)** Identificar e representar frações (menores e maiores que a

		reconhecimento, significados, leitura e representação na reta numérica	unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso.
		Comparação e ordenação de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência	**(EF05MA04)** Identificar frações equivalentes. **(EF05MA05)** Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica.
		Cálculo de porcentagens e representação fracionária	**(EF05MA06)** Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.
6°	**Números**	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	**(EF06MA07)** Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. **(EF06MA08)** Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica. **(EF06MA09)** Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora. **(EF06MA10)** Resolver e elaborar

			problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
	Probabilidade e estatística	Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista)	**(EF06MA30)** Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.
7°	**Números**	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador	**(EF07MA05)** Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos. **(EF07MA06)** Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos. **(EF07MA07)** Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas. **(EF07MA08)** Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. **(EF07MA09)** Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.

		Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações	**(EF07MA10)** Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica. **(EF07MA11)** Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias. **(EF07MA12)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.
8°	**Números**	Potenciação e radiciação	**(EF08MA02)** Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.
		Dízimas periódicas: fração geratriz	**(EF08MA05)** Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.
9°	**Álgebra**	Razão entre grandezas de espécies diferentes	**(EF09MA07)** Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.
	Números	Potências com expoentes negativos e fracionários	**(EF09MA03)** Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.

Fonte: Brasil (2018). Adaptado pela autora.

Percebe-se que as frações são um objeto do conhecimento majoritariamente relacionado à área de números, aparecendo desde o 4º ano do Ensino Fundamental. Ao chegarem ao sexto ano, etapa em que foi desenvolvido este trabalho, espera-se que os alunos sejam capazes de reconhecer e dar significado à representação fracionária dos números racionais, bem como compreendam a sua leitura e representação na reta numérica. Ainda, devem comparar e ordenar estes números, tanto na representação decimal quanto na fracionária, utilizando a noção de equivalência. Também deve estar presente o cálculo de porcentagens e representação fracionária. Todos estes tópicos serão revisados a partir das tarefas propostas adiante, culminando na habilidade de operar com frações (somar, subtrair, multiplicar e dividir).

2.2 ENGENHARIA DIDÁTICA

Surgida na didática da matemática no início da década de 1980, a engenharia didática objetivava denominar uma forma do trabalho didático comparável ao trabalho de um engenheiro que, para realizar um projeto preciso, necessita se apoiar em conhecimentos científicos do seu domínio e submeter-se a um controle de tipo científico, embora seja obrigado a trabalhar sobre objetos mais complexos que os já estudados. (ARTIGUE, 1996)

Vista como metodologia de investigação, a engenharia didática caracteriza-se por um esquema experimental baseado na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino. Este processo consta de quatro etapas: análises prévias; concepção e análise *a priori*; experimentação; análise *a posteriori* e avaliação. Diferente de outras investigações experimentais, a validação nesta metodologia é essencialmente interna, a partir do confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*. (ARTIGUE, 1996)

A seguir, serão descritas as quatro fases da metodologia de engenharia didática. Para maiores detalhes sobre o assunto, sugere-se a leitura de Artigue (1996) e Almouloud (2010).

2.2.1 Análises prévias

A concepção deste tipo de investigação ocorre a partir de um quadro teórico geral da didática e em conhecimentos didáticos já adquiridos no domínio estudado. Apoia-se, também, em algumas análises preliminares. Segundo Almouloud (2010) “um dos objetivos das análises prévias é identificar os problemas de ensino e aprendizagem do objeto de estudo e delinear de modo fundamentado a(s) questão(ões), as hipóteses, os fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa”.

A partir dessas análises, pode-se definir a questão – ou questões – da pesquisa. Vale salientar que, segundo Artigue (1996), de acordo com necessidades emergentes, as fases do trabalho são retomadas e ajustadas, sendo também as análises prévias revisitadas ao longo das demais etapas do desenvolvimento do trabalho.

No caso deste trabalho, especificamente, optou-se pela realização de um questionário, referente ao Apêndice C, que abrange tanto as noções introdutórias de frações quanto algumas operações. A partir das observações promovidas pelo questionário, elaborar-se-á a proposta didática.

2.2.2 Concepção e análise a priori

Para responder à questão definida e validar as hipóteses descritas na fase anterior, deve-se elaborar e analisar uma sequência de situações-problema. De acordo com Almouloud (2010, p. 174):

> As atividades devem ser concebidas levando-se em consideração os resultados dos estudos prévios e permitir aos alunos desenvolver certas competências e habilidades. Elas terão, essencialmente, por objetivos:
>
> - Auxiliar o aluno na construção de conhecimentos e saberes de uma maneira construtiva e significativa.
> - Desenvolver certas habilidades como, por exemplo, saber ler, interpretar e utilizar as diferentes representações matemáticas, bem com desenvolver o raciocínio dedutivo.
>
> As situações-problema devem ser concebidas de modo a permitir ao aluno agir, se expressar, refletir e evoluir por iniciativa própria, adquirindo assim novos conhecimentos. O papel do professor é o de mediador e orientador; suas intervenções devem ser feitas de maneira a não prejudicar a participação do aluno no processo de aprendizagem.

Para obter resultados positivos a partir das situações-problemas, deve-se escolher as variáveis didáticas que podem provocar as mudanças desejadas no processo de ensino e aprendizagem do objeto matemático em jogo. Artigue (1996) distingue dois tipos de variáveis: as variáveis macrodidáticas ou globais, relativas à organização global da engenharia, de forma mais ampla; e as variáveis microdidáticas ou locais, relativas à organização local da engenharia, descrevendo cada atividade proposta.

O objetivo da análise *a priori*, então, é determinar de que forma as variáveis de estudo escolhidas influenciam os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos. Isto é, busca-se compreender quais fatores estão associados aos objetivos de aprendizagem e como afetam neste processo.

Neste trabalho, esta fase consiste na elaboração de oito atividades com material manipulativo baseadas nas dificuldades apresentadas pelos alunos no questionário aplicado na etapa das análises prévias.

2.2.3 Experimentação

Este é o momento em que se coloca em prática o que foi elaborado a partir das etapas anteriores. Quando há necessidade, volta-se às etapas anteriores para corrigir e reajustar.

O processo de experimentação aqui se dará mediante a aplicação de uma sequência de oito atividades, ao longo das quais utilizar-se-á o material manipulativo como auxílio para a compreensão de diversos tópicos associados às frações. Neste processo, o papel do professor será o de elaborar as atividades e mediá-las durante sua realização, enquanto as estratégias de resolução partirão dos alunos.

2.2.4 Análise a posteriori e validação

A partir dos dados obtidos nas sessões de ensino e as produções dos alunos em sala ou fora dela, elabora-se a análise *a posteriori*. Ao final dessa etapa, surgem os resultados que contribuem para a melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre o saber analisado. Tal análise é feita a partir da análise a priori, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e problemas da pesquisa.

> Assim, a análise a posteriori depende das ferramentas técnicas (material didático, vídeo) ou teóricas (teoria das situações, contrato didático etc.) utilizadas com as quais se coletam os dados que permitirão a construção dos protocolos de pesquisa. Esses protocolos serão analisados profundamente pelo pesquisador e as informações daí resultantes serão confrontadas com a análise *a priori* realizada. O objetivo é relacionar as observações com os objetivos definidos *a priori* e estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados. Almouloud (2010, p. 177)

Nota-se, então, que as quatro fases estão intimamente relacionadas, sendo as conclusões desse processo fruto da comparação entre as etapas, com validação essencialmente interna.

Neste trabalho, a validação consiste em um questionário final respondido pelos alunos, referente ao Apêndice E, e das observações das atividades realizadas em aula.

2.3 MATERIAIS MANIPULATIVOS PARA O ENSINO DE FRAÇÕES E NÚMEROS DECIMAIS (COLEÇÃO MATHEMOTECA)

Nesta seção, apresenta-se uma síntese do livro “Materiais Manipulativos para o Ensino de Frações e Números Decimais”, de autoria de Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz.

As autoras iniciam retomando a história do uso de recursos, tais como modelos e materiais didáticos. Disserta-se sobre A Didactica Magna de Comenius (1592 – 1670); a educação ativa de Pestalozzi (1746 – 1827) e Froëbel (1782 – 1852) e a Escola Nova dos reformistas do século XX. Em especial, Claparêde, Montessori, Decroly, Dewey e Freinet são citados como exemplos de defensores de diferentes abordagens dos conteúdos para melhor aprendizagem.

> A Escola Nova tem como princípios que a educação deve ser efetivada em etapas gradativas, respeitando a fase de desenvolvimento da criança, por meio de um processo de observação e dedução constante, feito pelo professor sobre o aluno. Nesse momento, há o reconhecimento do papel essencial das crianças em todo o processo educativo, pré-disponibilizadas para aprender mesmo sem a ajuda do adulto, partindo de um princípio básico: a criança é capaz de

> aprender naturalmente. Ganham força nesse movimento a experiência, a vivência e, consequentemente, os materiais manipulativos em matemática, por permitirem que os alunos aprendessem em processo de simulação das relações que precisavam compreender nessa disciplina. (SMOLE, DINIZ; 2016, p. 10)

Uma das justificativas para a utilização dos materiais didáticos nas aulas de matemática consiste em tornar o processo de aprendizagem significativo, uma vez que, segundo as autoras, "A criança aprende o que faz sentido para ela" (SMOLE, DINIZ; 2016). Ressaltam que, além dos recursos manipulativos, é fundamental a existência de objetivos bastante claros, sendo importante a ação do professor.

> De fato, qualquer recurso didático deve servir para que os alunos aprofundem e ampliem os significados que constroem mediante sua participação nas atividades de aprendizagem. Mas são os processos de pensamento do aluno que permitem a mediação entre os procedimentos didáticos e os resultados da aprendizagem. (SMOLE, DINIZ; 2016, p. 10)

Uma segunda justificativa apresentada é a de que, sendo manipuláveis, tais recursos são concretos para os alunos. Os materiais manipulativos servem como materialização de ideias e propriedades matemáticas. A partir de simulações com tais materiais, os alunos podem formular hipóteses, inferências, observar regularidades, participando de um processo de investigação que os auxilia a desenvolver noções significativamente. (SMOLE, DINIZ; 2016, p. 12)

Ademais, há desenvolvimento da linguagem matemática a partir da utilização dos materiais manipulativos, uma vez que os alunos verbalizam e discutem ideias desenvolvidas da interação com o mesmo. Para tal, o trabalho em grupo é visto como elemento essencial.

As autoras também reforçam a importância do registro, seja ele oral ou escrito, para melhor consolidação do que está sendo aprendido. "Para o aluno, a produção de texto tem sempre a função de: organizar a aprendizagem; fazer refletir sobre o que aprendeu; construir a memória da aprendizagem; propiciar uma autoavaliação; desenvolver habilidades de escrita e de leitura." (SMOLE, DINIZ; 2016, p. 16)

Sobre o ensino e a aprendizagem de frações, as autoras salientam que há dificuldade de compreensão, refletida até em instrumentos de avaliação nacionais, e apontam algumas das causas para isso:

> Além da forma como o assunto é abordado tradicionalmente na escola, outras duas razões podem ser citadas como dificultadoras para a compreensão das frações pelos alunos. Uma delas é que há rapidamente uma ênfase excessiva na nomenclatura — introduzindo-se termos como numerador, denominador, frações equivalentes, frações próprias e impróprias — antes da compreensão do significado e dos usos do número fracionário. O segundo motivo é a inadequação do tempo de ensino e aprendizagem dedicado aos racionais na escola. Em geral, esse tema se concentra nos meses finais do ano, o que

> impede o aluno de pensar sobre eles. Passa-se um ano inteiro até que os alunos retomem novamente as noções e os conceitos referentes aos racionais. E como o tempo de ensinar não é o mesmo tempo da aprendizagem dos alunos, esse intervalo gera praticamente a necessidade de um recomeço total do tema por parte dos alunos e do professor. (SMOLE, DINIZ; 2016, p. 24)

Resumidamente, as autoras sugerem que:

- os números racionais devem aparecer de forma planejada e distribuída ao longo do ano todo, a partir do 4º ou do 5º ano do Ensino Fundamental;
- as nomenclaturas devem ser apresentadas ao aluno conforme forem necessárias para a boa comunicação e para representar quantidades fracionárias.
- é preciso trabalhar os principais significados que a fração representa, evitando a valorização excessiva de uma ideia em relação à outra:
    - Fração como parte de um todo;
    - Fração como resultado de uma divisão;
    - Fração como razão;
    - Fração como um operador;
- utilizar diferentes modelos e situações para explorar o tema.

Sobre este último item, ressalta-se que as frações aparecem em diversas situações cotidianas que, ao serem abordadas no contexto escolar, fazem sentido aos alunos, em especial quando em um contexto de resolução de problemas.

> Receitas, artigos de jornais e revistas, situações cotidianas de divisão de materiais e de medições são contextos naturais nos quais os alunos podem pensar sobre a natureza do todo; no processo de resolução dos problemas, eles têm mais chance de compreender frações como novos números que respondem a questões que não têm solução apenas usando-se os números naturais. (SMOLE, DINIZ; 2016, p. 29)

Ao trazer as frações em diferentes contextos, instiga-se a curiosidade e a familiaridade dos alunos com elas, distanciando-as da imagem negativa que frequentemente carregam. “A multiplicidade de situações-problema e a flexibilização em relação à linguagem e às técnicas formais são rotas seguras para que os alunos dos anos iniciais se aproximem das frações sem que elas se tornem vilãs da aprendizagem de matemática”. (SMOLE, DINIZ; 2016, p. 31)

No livro, são apresentados materiais específicos para desenvolver a compreensão de frações, como por exemplo, frações circulares, mosaico e tangram, bem como materiais específicos para desenvolver a compreensão de números decimais, dentre eles, novamente, as frações circulares e o Ábaco de Pinos. Nesta dissertação, restringiu-se ao uso das frações circulares para estudar as operações com frações.

As atividades propostas pelas autoras, empregando as frações circulares, são:

1. Montando discos
2. Brincando de pizzaiolo
3. Comparando frações
4. Montando frações equivalentes I
5. Maior ou menor que meio?
6. Montando frações equivalentes II
7. Composição de frações
8. Círculos coloridos e números decimais
9. Frações de quantidades

Foram utilizadas e adaptadas as atividades 1, 3, 4 e 7. Ao longo do texto, será especificado quando as atividades forem relacionadas a estas.

2.4 MAPEAMENTO

Buscou-se no banco de dissertações do PROFMAT[1] por trabalhos já publicados que versassem sobre Frações, em particular, no contexto de utilização de material concreto e/ou Engenharia Didática, voltados para o 6° ano do Ensino Fundamental. Restringiu-se a pesquisa a dissertações apresentadas a partir de 2021.

Com o filtro "frações", encontra-se 95 registros, dos quais 20 foram publicados entre 2021 e 2023. Alterando o filtro para "fração", encontra-se outros 8 registros, dos quais 2 foram publicados entre 2021 e 2023. O Quadro 2 apresenta os trabalhos relevantes destinados ao 6° ano do Ensino Fundamental para o período mencionado:

Quadro 2 – Dissertações do PROFMAT analisadas

	Ano	**Autor**	**Título**	**Proposta**
1	2021	Rozenilto José de Lima	Uma proposta de ensino e aprendizagem de frações no 6º ano do Ensino Fundamental	Elaboração de um manual de boas práticas após um levantamento dos principais problemas relacionados a aprendizagem.
2	2021	Maria Cláudia Schmitt Araujo	Uma discussão formal sobre frações na Educação Básica	Proposta de sequência didática que utiliza o Tangram construída após análise de livros didáticos.
3	2021	Mychelly Agnes Marcelo Henrique	Uma análise do ensino de frações equivalentes no contexto da pandemia	Sequência didática baseada na Engenharia Didática de Segunda Geração, com uso de material

[1] https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/

			da Covid-19 mediado pela Teoria Antropológica do Didático	concreto manipulável e do software GeoGebra.
4	2021	Michelle Cristina de Sousa Baltazar	O Ensino de Frações com o GeoGebra em Ambientes Virtuais de Aprendizagem para Estudantes do 6º Ano do Ensino Fundamental	Implementação de sequências didáticas em Ambientes Virtuais de Aprendizagem e com o uso do GeoGebra.
5	2022	Flávio Daniel Luz Rêgo	Ensino de frações em turmas do 6º ano Fundamental com uso da abordagem STEAM - (Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics)	Frações no contexto da música, com construção do monocórdio, um instrumento musical de cordas.
6	2022	Eliane Teixeira Barbosa Torres	Atividades de aprendizagem de fração por meio da Taxonomia de Bloom revisada e da BNCC	Elaboração de atividades que satisfazem os objetivos da taxonomia de Bloom revisada e da (BNCC), preenchendo lacunas deixadas por livros didáticos analisados.
7	2023	Nayara Caroline Luiz	Frações egípcias e uma sequência didática para o Ensino Fundamental	Apresenta os métodos de Fibonacci, de Golomb, o método dos Números Práticos e o Geométrico para escrever alguns tipos de frações como uma fração egípcia.
8	2023	Marciane Gambeta	Frações e o Método de Singapura	Sequência didática baseada na aplicação do Método de Singapura, com ênfase na utilização de materiais concretos e imagens.

Fonte: Autora (2024)

Destaca-se que em Henrique (2021) encontrou-se maior similaridade ao que será proposto, uma vez que segue a Engenharia Didática de Segunda Geração e utiliza material concreto manipulável. Entretanto, tal trabalho restringe-se ao tópico de equivalência de frações.

3 METODOLOGIA

Neste trabalhou, utilizou-se a metodologia da pesquisa-ação, definida por Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 112) como

> um tipo especial de pesquisa participante, em que o pesquisador se introduz no ambiente a ser estudado não só para observá-lo e compreendê-lo, mas sobretudo para mudá-lo em direções que permitam a melhoria das práticas e maior liberdade de ação e de aprendizagem dos participantes.

Em particular, serão seguidas as etapas da Engenharia didática, metodologia anteriormente apresentada no Referencial Teórico.

A prática pedagógica aqui relatada foi desenvolvida em uma turma regular do 6° ano do Ensino Fundamental, composta por 14 alunos, em uma escola da rede privada do município de Caxias do Sul (RS). Além das atividades elaboradas pela autora, vale ressaltar que a rede a qual a escola integra possui um material didático de referência de onde forem selecionados os exercícios de fixação complementares.

No Quadro 3 a seguir, destaca-se o cronograma de aplicações das atividades elaboradas:

Quadro 3 – Cronograma da aplicação das atividades

Data	**Períodos**	**Ação**
22/06	2	Aplicação do questionário para análise a *priori*.
05/07	2	Elaboração do material de frações circulares
06/07	2	Introdução às frações circulares;
10/07	1	Representando a metade;
12/07	2	Comparando frações;
13/07	2	Frações equivalentes;
17/08	1	Adição de frações;
28/08	2	Subtração de frações;
06/09	1	Multiplicação de frações;
13/09	2	Divisão de frações.
05/10	2	Aplicação do questionário para análise a *posteriore*.

Fonte: Autora (2024)

No dia 22 de junho, aplicou-se um questionário para auxiliar nas análises prévias acerca do que os alunos compreendiam do tema. Este questionário consta no Apêndice C e retrata a primeira fase da engenharia didática.

No próximo passo, os próprios alunos elaboraram o material de frações circulares, no dia 05 de julho, como pode ser visualizado na Figura 1 a seguir:

Figura 1 – Elaboração do material de frações circulares

Fonte: Autora (2024)

Na sequência, desenvolveu-se oito atividades, disponíveis no Apêndice D, versando sobre os seguintes tópicos:

1. Introdução às frações circulares;
2. Representando a metade;
3. Comparando frações;
4. Frações equivalentes;
5. Adição de frações;
6. Subtração de frações;
7. Multiplicação de frações;
8. Divisão de frações.

No dia 05 de outubro, com o objetivo de realizar a análise a *posteriore* e validação, propostas na última fase da Engenharia Didática, aplicou-se um questionário, o qual consta no Apêndice E deste trabalho.

4 DESENVOLVIMENTO DA PRÁTICA PEDAGÓGICA

O objetivo deste trabalho consistiu em abordar o conteúdo de frações por meio da utilização de material manipulativo, mais especificamente as frações circulares. O conteúdo já havia sido introduzido aos alunos no ano anterior, porém caberia agora um aprofundamento conforme proposto pela BNCC. A seguir, são apresentadas as ações realizadas com base nas quatro fases da Engenharia Didática.

4.1.1 Análises prévias

A fim de se inteirar do conhecimento prévio dos alunos sobre o conteúdo de frações, elaborou-se um questionário que consta no Apêndice C contendo dez questões específicas sobre o tema e seis perguntas sobre a relação dos alunos com frações. Cabe salientar que os alunos tiveram bastante dificuldade e demonstraram frustração relacionada ao fato de a professora não poder ajuda-los no momento, apesar de ela ter explicado que, para fins de observar os conhecimentos prévios acerca do assunto, eles deveriam tentar sozinhos. A maior parte das questões foi extraída e/ou adaptada de Ripoll *et al.* (2017).

Catorze alunos responderam ao questionário que iniciava com a seguinte questão:

Questão 1:

Preencha os $\square$ com números de forma a tornar as igualdades verdadeiras.

a) $\frac{5}{3} = \frac{\square}{6}$ c) $\frac{8}{12} = \frac{\square}{3}$ e) $\frac{9}{12} = \frac{6}{\square}$

b) $\frac{2}{3} = \frac{6}{\square}$ d) $\frac{9}{12} = \frac{3}{\square}$ f) $\frac{6}{8} = \frac{\square}{12}$

A primeira questão, envolvendo frações equivalentes, ficou em branco para 8 alunos. Alguns haviam iniciado a resolução da letra a) porém apagaram, provavelmente por insegurança. Dois alunos acertaram metade das questões e quatro acertaram menos da metade. Não foi possível observar um padrão nos erros, porém salienta-se que tiveram dificuldade em interpretar o que era necessário fazer.

Prosseguiu-se com a seguinte questão:

Questão 2:

Observando as frações $\frac{11}{6}$, $\frac{28}{15}$ e $\frac{37}{20}$:

a) Determine três frações de mesmo denominador que sejam equivalentes às frações $\frac{11}{6}$, $\frac{28}{15}$ e $\frac{37}{20}$ respectivamente.

b) Usando as frações do item a), identifique qual é a maior e qual é a menor fração entre as frações $\frac{11}{6}$, $\frac{28}{15}$ e $\frac{37}{20}$

Novamente, a questão aborda a ideia de equivalência de frações. Oito alunos deixaram em branco esta questão também, sendo que um deles escreveu "Eu não lembro o que é denominador". Dois alunos utilizaram apenas a multiplicação por 2 no numerador e no denominador, sem obter o mesmo denominador para as três. Esses dois alunos responderam erroneamente a letra b). Quatro alunos responderam de forma errônea ao menos uma das letras.

Questão 3:

Complete as sentenças a seguir com os sinais > (maior) ou < (menor) de modo a torná-las verdadeiras.

a) $\frac{1}{3} \square \frac{2}{3}$

b) $\frac{3}{5} \square \frac{2}{5}$

c) $\frac{1}{2} \square \frac{1}{5}$

d) $\frac{1}{10} \square \frac{1}{20}$

e) $\frac{1}{35} \square \frac{1}{43}$

f) $\frac{1}{99} \square \frac{1}{100}$

Quatro alunos acertaram todas as comparações nesta questão. Quatro alunos responderam corretamente a 5 dos itens propostos. Quatro alunos acertaram as letras a) e b), que continham mesmo denominador e diferentes numeradores. Um aluno acertou da c) até a f), as questões com mesmo numerador e diferente denominador. Um aluno respondeu erroneamente a todos os itens da questão.

Para a próxima questão, contextualizou-se o conteúdo a um problema envolvendo fatias de pizza.

Questão 4:

Alex, Diana e Pedro são irmãos. Sábado à noite, Pedro pediu uma pizza que já veio cortada em 8 fatias. Distraído, Pedro comeu 4 fatias e deixou o restante para seus irmãos.

a) Qual foi a fração da pizza que Pedro comeu, considerando que estava dividida em 8 fatias?

b) Ao chegar na cozinha, Diana esbravejou: "Você comeu metade da pizza, Pedro". Diana tem razão ao dizer que a fração da pizza que Pedro comeu é $\frac{1}{2}$? Por quê?

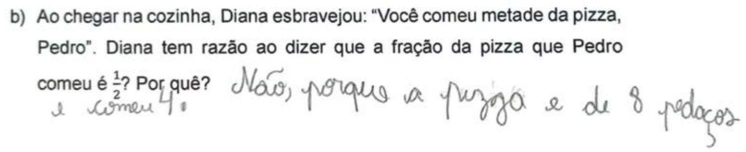
c) Se Diana comer dois dos pedaços restantes, encontre duas frações diferentes que representam a parte da pizza que Diana comeu.

Apenas um aluno não respondeu a letra (a), deixando-a em branco. Seguem listadas as respostas obtidas:

- Um aluno respondeu $\frac{8}{4}$, invertendo numerador e denominador.
- Um aluno respondeu com um desenho de uma pizza repartida em 8 partes com 4 pintadas.
- Um aluno respondeu por escrito “um meio”.
- Dez alunos responderam $\frac{4}{8}$.

Na letra b), 11 alunos responderam afirmativamente. Um aluno deixou em branco e dois alunos responderam que não estava correto. O primeiro deles, apresentou a justificativa ilustrada na Figura 2.

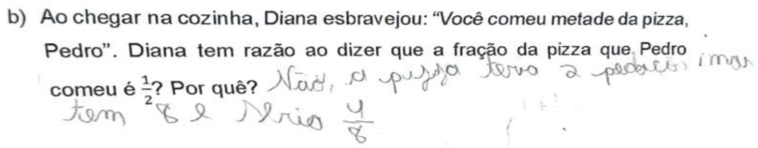
Figura 2 – Avaliação diagnóstica: Questão 4.b) Aluno 1


b) Ao chegar na cozinha, Diana esbravejou: “Você comeu metade da pizza, Pedro”. Diana tem razão ao dizer que a fração da pizza que Pedro comeu é $\frac{1}{2}$? Por quê? Não, porque a pizza é de 8 pedaços e comeu 4.

Fonte: Autora (2024)

O aluno 2, justificou a questão conforme destaca a Figura 3. Conclui-se então que estes alunos não compreendem a ideia de frações equivalentes, o que corrobora com as respostas obtidas nas questões anteriores.

Figura 3 – Avaliação diagnóstica: Questão 4.b) Aluno 2


b) Ao chegar na cozinha, Diana esbravejou: *“Você comeu metade da pizza*, Pedro”. Diana tem razão ao dizer que a fração da pizza que Pedro comeu é $\frac{1}{2}$? Por quê? Não, a pizza tevo 2 pedaços mas tem 8 e seria $\frac{4}{8}$

Fonte: Autora (2024)

Dois alunos deixaram a letra c) em branco. Dos alunos restantes, nenhum escreveu duas frações diferentes que corretamente representassem a parte da pizza comida por Diana. Segue a relação das respostas à questão:

- Quatro alunos acertaram uma das frações, respondendo $\frac{2}{8}$.
- Um aluno acertou uma das frações, respondendo $\frac{1}{4}$.

- Apareceram as frações: $\frac{2}{4}, \frac{4}{2}, \frac{8}{6}, \frac{1}{2}, \frac{6}{8}, \frac{2}{3}$.
- Vários alunos responderam simultaneamente $\frac{2}{4}$ e $\frac{4}{2}$, considerando equivalentes.

A próxima questão proposta tem por objetivo verificar a compreensão dos alunos acerca da posição dos números fracionários na reta numérica.

Questão 5:

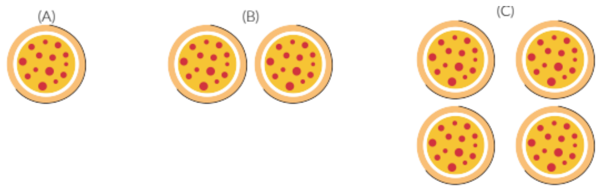
Use a reta numérica para fazer o que é pedido nos itens a seguir.

Figura 4 – Reta numérica utilizada na Questão 5

Fonte: Ripoll *et al.* (2017)

a) Marque os pontos que representam as quantidades de pizza nos casos (A), (B) e (C) a seguir.

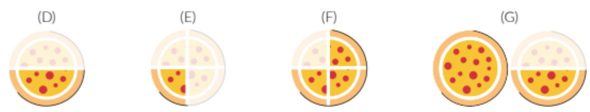
Figura 5 – Imagem auxiliar à Questão 5 item a)



Fonte: Ripoll *et al.* (2017)

b) E agora, que pontos na reta numérica representam as quantidades de pizza dos casos (D), (E), (F) e (G)?

Figura 6 – Imagem auxiliar à Questão 5 item b)



Fonte: Ripoll *et al.* (2017)

No primeiro item, 10 alunos posicionaram corretamente os números inteiros representados na Figura 4. Dois alunos fizeram marcações, porém não rotularam com as respectivas letras. Um aluno errou a marcação do ponto C, colocando no número 3, e um aluno errou a marcação de todas as quantidades, aparentemente influenciado pelas marcações das frações.

No segundo item, seis alunos posicionaram corretamente as quatro quantidades. Um aluno posicionou três corretamente, provavelmente tendo esquecido a (G). Três alunos posicionaram dois corretamente, sendo um deles (E) e (F), outro (E) e (D) e o último (D) e (G).

Um aluno posicionou todos erroneamente e outro fez apenas este segundo item, sendo que ambos não rotularam com as letras respectivas.

O questionário prossegue com a abordagem das operações entre frações.

Questão 6:

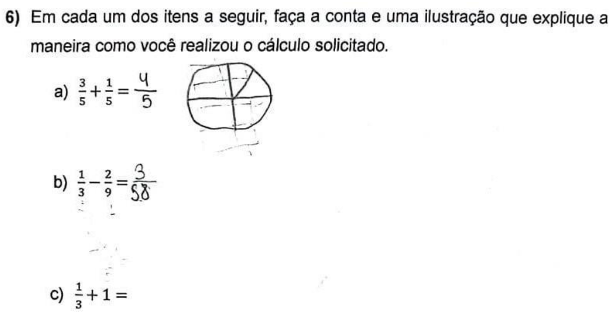
Em cada um dos itens a seguir, faça a conta e uma ilustração que explique a maneira como você realizou o cálculo solicitado.

a) $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} =$ b) $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} =$ c) $\frac{1}{3} + 1 =$

Dois alunos deixaram toda esta questão em branco. Além disso, apenas três alunos fizeram uma ilustração, conforme a questão solicitava.

Na Figura 7, o aluno apenas esboçou o inteiro dividido em 5 partes, porém não utilizou a ilustração como explicação para o cálculo. O cálculo do item b) foi apresentado sem os desenhos e, o item c), ficou sem justificativa alguma.

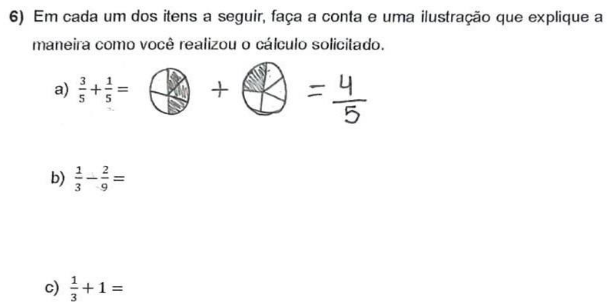
Figura 7 – Avaliação diagnóstica: Questão 6 Aluno 1



Fonte: Autora (2024)

O aluno representado na Figura 8 conseguiu, através da sua ilustração, chegar ao resultado correto da letra a). Porém, não repetiu o processo nos outros itens, deixando-os completamente em branco.

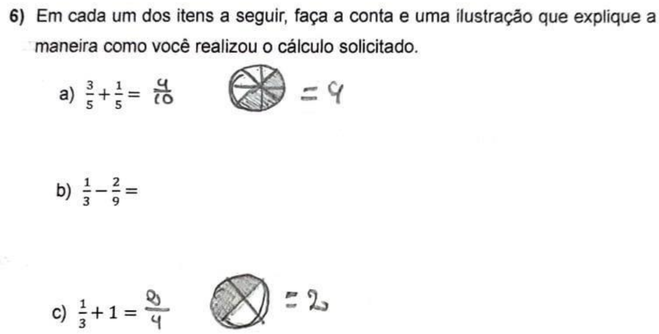
Figura 8 – Avaliação diagnóstica: Questão 6 Aluno 2



Fonte: Autora (2024)

A Figura 9 ilustra uma situação recorrente no que diz respeito a adição de frações. Neste caso, o aluno adiciona numeradores e denominadores. Observa-se também que a ilustração feita corresponde a $\frac{4}{8}$, não condizente ao resultado obtido pelo aluno. Já na letra c), o esperado era $\frac{4}{3}$. Neste caso, diferente da letra a), a ilustração corresponde ao resultado obtido pelo aluno.

Figura 9 – Avaliação diagnóstica: Questão 6 Aluno 3



6) Em cada um dos itens a seguir, faça a conta e uma ilustração que explique a maneira como você realizou o cálculo solicitado.

a) $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4}{10}$ $=4$

b) $\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=$

c) $\frac{1}{3}+1=\frac{2}{4}$ $=2$

Fonte: Autora (2024)

Oito alunos colocaram apenas a resposta, estando correta. Outros dois alunos responderam $\frac{4}{10}$, provavelmente somando numeradores e denominadores.

No item b), cinco alunos deixaram em branco. Destaca-se, ainda, as seguintes respostas:

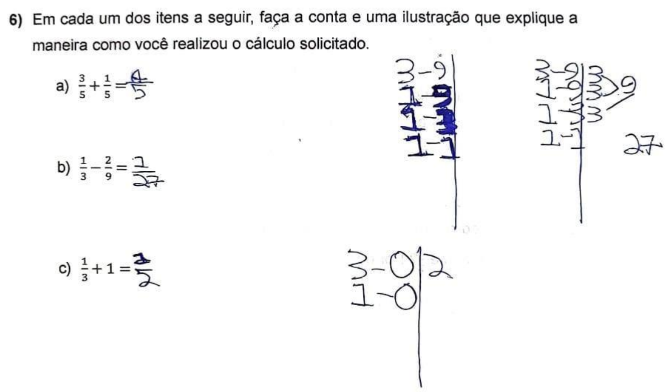
- Um aluno apresentou a resposta esperada, que seria $\frac{1}{9}$. Cabe salientar que, por estar em dúvida, o aluno colocou que seria $\frac{3}{4}$ ou $\frac{1}{9}$.
- Três alunos responderam $\frac{1}{6}$, provavelmente tendo subtraído o segundo termo do primeiro (numerador e denominador).
- Um aluno mostrou o cálculo de mínimo múltiplo comum, porém não realizou as equivalências das frações e chegou ao resultado $\frac{1}{27}$.
- Outras respostas foram $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{3}{5}$, e $\frac{3}{58}$.

Seis alunos deixaram em branco o item c). A resposta esperada era $\frac{4}{3}$, porém nenhum aluno chegou a este resultado. As respostas, bem como a quantidade de alunos que as obtiveram, seguem listadas:

- Quatro alunos responderam $\frac{2}{4}$, provavelmente somando numeradores e denominadores. Nota-se que estes compreenderam que o denominador do segundo termo é 1, e obtiveram como denominador do resultado 4 por somar os denominadores das parcelas.

- Três responderam $\frac{2}{3}$, provavelmente utilizando uma lógica parecida com a do item anterior, mas não compreendendo que o denominador do segundo termo era 1.
- Um aluno respondeu $\frac{1}{2}$, se confundindo no cálculo de MMC e pensando que o denominador do segundo termo é zero, conforme ilustra a Figura 10.

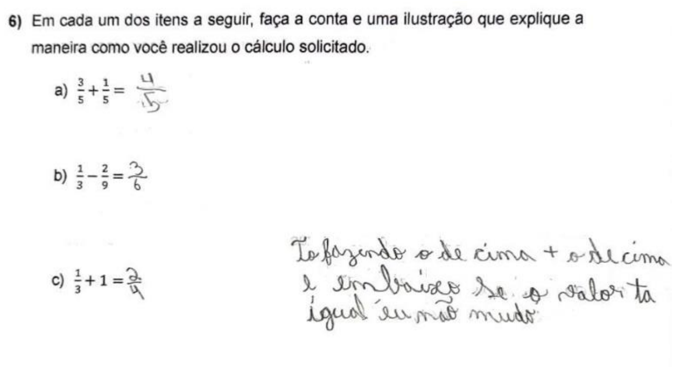
Figura 10 – Avaliação diagnóstica: Questão 6 Aluno 4



Fonte: Autora (2024)

Um aluno justificou seu raciocínio de forma escrita, conforme a Figura 11.

Figura 11 – Avaliação diagnóstica: Questão 6 Aluno 5



Fonte: Autora (2024)

A questão 7 também aborda operações, porém de forma mais livre.

Questão 7:

Calcule as operações indicadas, da forma que achar mais conveniente

a) $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=$

b) $\frac{5}{9}-\frac{3}{9}=$

c) $\frac{3}{10}+\frac{4}{5}=$

d) $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=$

e) $\frac{1}{8}+\frac{1}{7}=$

f) $\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=$

g) $2-\frac{1}{2}=$

h) $\frac{2}{6}+2-\frac{2}{3}=$

i) $\frac{2}{5}+\frac{2}{7}-\frac{2}{3}$

Os mesmos dois alunos que não resolveram a questão anterior também deixaram esta em branco. No Quadro 4 está um resumo do desempenho dos alunos nesta questão, apresentando o resultado esperado e as quantidades de alunos que acertaram, erraram ou não responderam:

Quadro 4 – Desempenho dos alunos na questão 7

Item	Resposta esperada	Responderam corretamente	Responderam erroneamente	Não responderam
a)	$\frac{5}{7}$	9	3	2
b)	$\frac{2}{9}$	6	6	2
c)	$\frac{11}{10}$	0	9	3
d)	$\frac{1}{6}$	0	8	6
e)	$\frac{15}{56}$	0	9	5
f)	$\frac{23}{20}$	0	9	5
g)	$\frac{3}{2}$	0	6	8
h)	$\frac{5}{3}$	0	5	9
i)	$\frac{2}{105}$	0	6	8

Fonte: Autora (2024)

O que se salienta nesta questão é que os alunos compreendem razoavelmente bem a adição e subtração com mesmo denominador, porém realizam de maneira similar as operações quando há denominadores diferentes envolvidos. Desta forma, adicionam numeradores e denominadores, o que gerou resultados como $\frac{2}{0}$ no item b) e $\frac{0}{0}$ no item g).

A ideia de frações equivalentes não apareceu nas resoluções, exceto por um aluno que lembrava ser necessário calcular o MMC, porém apenas substituía os denominadores antigos pelo resultado do MMC, sem determinar o numerador que tornava as frações equivalentes. Um dos alunos invertia numerador e denominador nestas operações, provavelmente por lembrar que isso é necessário em algum momento, mais especificamente no que se refere à divisão de frações.

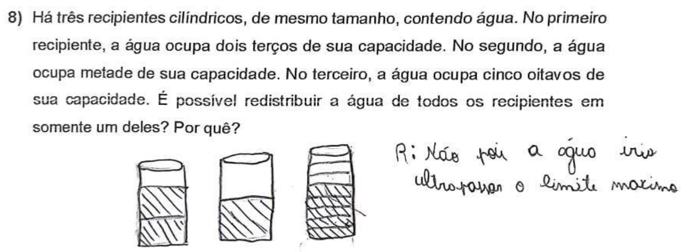
A próxima questão aborda a adição de frações no contexto de um problema sobre capacidade de recipientes.

Questão 8:

Há três recipientes cilíndricos, de mesmo tamanho, contendo água. No primeiro recipiente, a água ocupa dois terços de sua capacidade. No segundo, a água ocupa metade de sua capacidade. No terceiro, a água ocupa cinco oitavos de sua capacidade. É possível redistribuir a água de todos os recipientes em somente um deles? Por quê?

A resposta esperada é que não seria possível, pois a quantidade de água, somada, resulta em $\frac{43}{24}$ de um recipiente, isto é, mais de um inteiro. Sete alunos não responderam. Dois alunos responderam que um recipiente seria suficiente, porém não justificaram. Dois alunos apenas responderam que um recipiente não seria suficiente. Apenas um aluno sinalizou a conta que deveria ser feita $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\right)$, mas não conseguiu resolvê-la. Quatro alunos responderam que não era possível, dos quais dois fizeram ilustrações, estando uma delas ilustrada na Figura 12.

Figura 12 – Avaliação diagnóstica: Questão 8


8) Há três recipientes cilíndricos, de mesmo tamanho, contendo água. No primeiro recipiente, a água ocupa dois terços de sua capacidade. No segundo, a água ocupa metade de sua capacidade. No terceiro, a água ocupa cinco oitavos de sua capacidade. É possível redistribuir a água de todos os recipientes em somente um deles? Por quê?

R: Não pois a água iria ultrapassar o limite maximo

Fonte: Autora (2024)

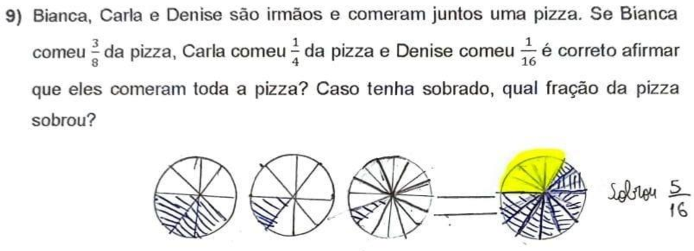
Na questão que segue, aborda-se frações equivalentes e adição de frações utilizando pedaços de pizza.

Questão 9:

Bianca, Carla e Denise são irmãs e comeram juntos uma pizza. Se Bianca comeu $\frac{3}{8}$ da pizza, Carla comeu $\frac{1}{4}$ da pizza e Denise comeu $\frac{1}{16}$ é correto afirmar que elas comeram toda a pizza? Caso tenha sobrado, qual fração da pizza sobrou?

A resposta esperada é que é incorreto afirmar que comeram toda a pizza, tendo sobrado $\frac{5}{16}$ dela. O Aluno 1 utilizou ilustrações e chegou ao resultado correto, conforme ilustra a Figura 13.

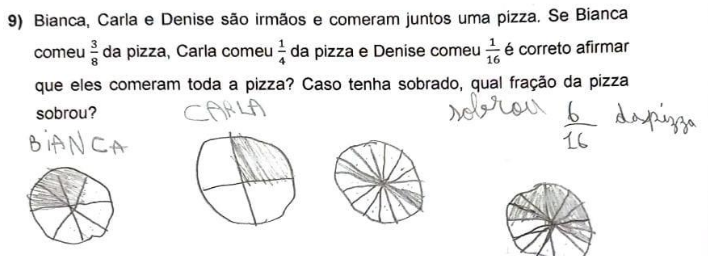
Figura 13 – Avaliação diagnóstica: Questão 9 Aluno 1



Fonte: Autora (2024)

O Aluno 2 obteve $\frac{6}{16}$ conforme a Figura 14.

Figura 14 – Avaliação diagnóstica: Questão 9 Aluno 2



Fonte: Autora (2024)

Um aluno realizou a adição corretamente, chegando a $\frac{11}{16}$, porém não observou que o solicitado era quanto sobrou, ficando sua resposta incompleta por erro de interpretação. Um terceiro aluno utilizou ilustrações, mas afirmou terem comido metade da pizza.

Dois alunos responderam $\frac{5}{28}$, provavelmente tendo feito a soma errônea de numeradores e denominadores. Um aluno respondeu que comeram cinco fatias, sobrando onze, provavelmente tendo comparado a soma dos pedaços com o todo dividido em 16 desses pedaços. Nestes dois últimos casos, percebe-se que não há a observação por parte dos alunos de que esses pedaços comidos pelos irmãos têm tamanhos diferentes. Seis alunos não responderam esta questão.

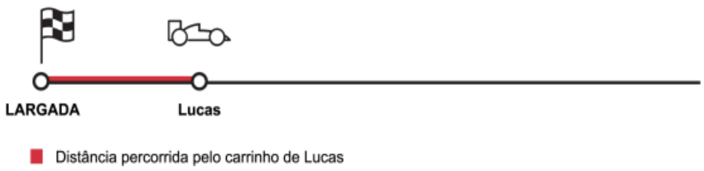
A última questão aborda a equivalência de frações e a fração como um operador no contexto de uma corrida de carrinhos de brinquedo.

Questão 10:

Lucas, Matheus, Heitor, Rafael, Enzo, Nicolas, Lorenzo, Guilherme e Samuel estavam brincando de empurrar seus carrinhos de brinquedo para ver qual carrinho ia mais longe em uma pista reta.

A figura a seguir mostra o quão longe foi o carrinho de Lucas e onde ele parou na pista com relação ao ponto de largada.

Figura 15 – Ilustração da Questão 10



Fonte: Ripoll *et al.* (2017)

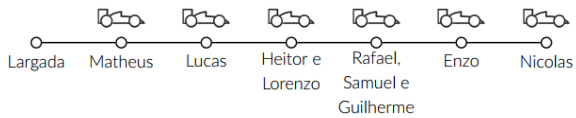
Sabe-se que:

- O carrinho de Matheus só conseguiu ir até a metade da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.
- O carrinho de Heitor conseguiu ir até $\frac{3}{2}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.
- O carrinho de Rafael conseguiu ir até $\frac{4}{2}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.
- O carrinho de Enzo conseguiu ir até $\frac{5}{2}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.
- O carrinho de Nicolas conseguiu ir até $\frac{6}{2}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.
- O carrinho de Lorenzo conseguiu ir até $\frac{6}{4}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.
- O carrinho de Guilherme conseguiu ir até o dobro da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.
- O carrinho de Samuel conseguiu ir até $\frac{6}{3}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.

Com essas informações, marque as posições de parada dos carrinhos de todos os amigos de Lucas. Os carrinhos de Rafael e Samuel pararam no mesmo lugar? Explique.

Conforme a versão do professor da atividade presente em Ripoll *et al.* (2017), espera-se chegar à seguinte conclusão:

Figura 16 – Resposta esperada da Questão 10



Fonte: Ripoll et al. (2017)

Apenas dois alunos afirmaram que, sim, os carrinhos de Rafael e Samuel pararam no mesmo lugar. Um deles justificou que “$\frac{4}{2}$ é equivalente a $\frac{6}{3}$” e outro que “na representação de fração é igual”. Um desses dois posicionou todos os carros adequadamente e o outro não, utilizando apenas o espaço entre a largada e o carrinho de Lucas.

Seis alunos responderam negativamente à pergunta, alguns justificando que $\frac{4}{2}$ é diferente de $\frac{6}{3}$. Ao posicionar os carrinhos, percebe-se que os alunos compreendem onde fica a metade e o dobro da distância, porém não localizam corretamente as demais medidas. Um aluno posicionou apenas Matheus (a metade), porém não desenvolveu o resto da questão.

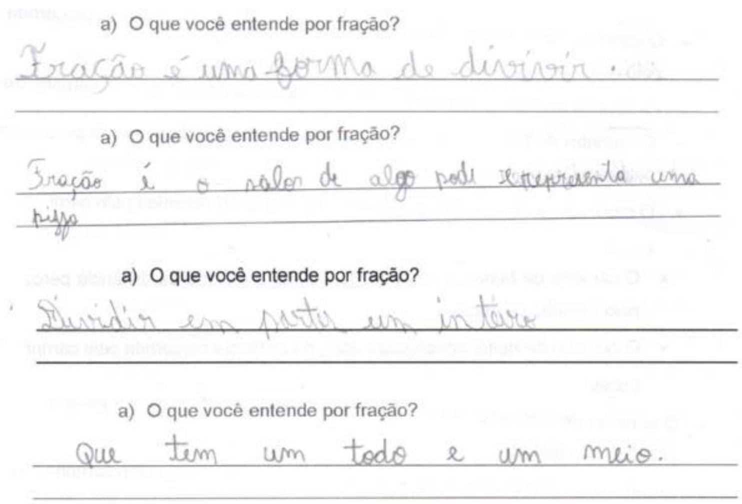
A partir de agora, analisar-se-á as seis perguntas referentes à relação dos alunos com frações.

---

a) O que você entende por fração?

Apenas quatro alunos interpretaram essa questão como esperado pela pesquisadora, respondendo, ou seja, explicando o que era frações para eles, como pode ser observado na Figura 17, que apresenta uma compilação da resposta de quatro alunos:

Figura 17 – O que os alunos entendem por fração


a) O que você entende por fração?

Fração é uma forma de divisão.

a) O que você entende por fração?

Fração é o valor de algo pode representa uma pizza

a) O que você entende por fração?

Dividir em parte um inteiro

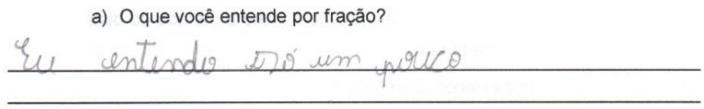
a) O que você entende por fração?

Que tem um todo e um meio.

Fonte: Autora (2024)

Observa-se que, para eles, é forte a ligação com a divisão. A ideia de "todo", "inteiro" e "partes" também foi mencionada. Um aluno não respondeu e os demais responderam com o que sabiam ou não do conteúdo, como ilustra a Figura 18.

Figura 18 – O que os alunos entendem por fração 2


a) O que você entende por fração?

Eu entendo só um pouco

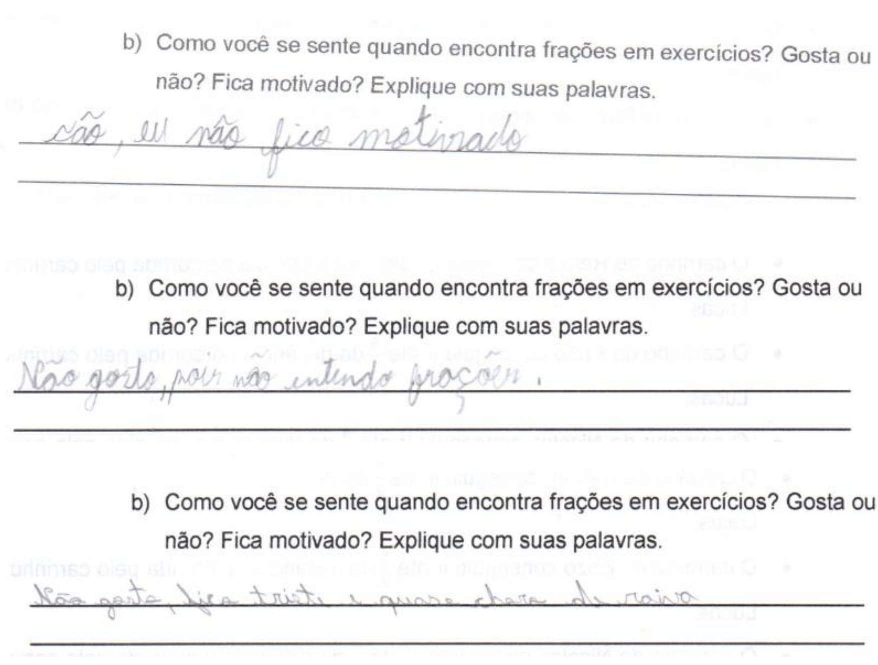
Fonte: Autora (2024)

---

b) Como você se sente quando encontra frações em exercícios? Gosta ou não? Fica motivado? Explique com suas palavras.

Oito alunos responderam que não gostam e/ou não se sentem motivados. Algumas destas respostas estão na compilação apresentada na Figura 19 a seguir:

Figura 19 – Relação dos alunos com frações


b) Como você se sente quando encontra frações em exercícios? Gosta ou não? Fica motivado? Explique com suas palavras.

não, eu não fico motivado

b) Como você se sente quando encontra frações em exercícios? Gosta ou não? Fica motivado? Explique com suas palavras.

Não gosto, por não entendo frações.

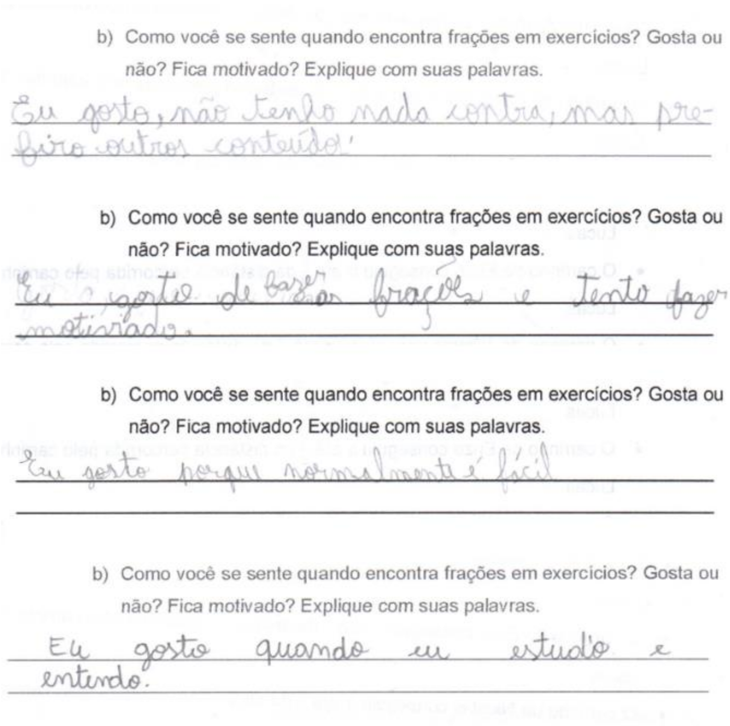
b) Como você se sente quando encontra frações em exercícios? Gosta ou não? Fica motivado? Explique com suas palavras.

Não gosto, fico triste e quase choro de raiva

Fonte: Autora (2024)

Seis alunos responderam que gostam e/ou sentem-se motivados, constando algumas destas respostas na compilação a seguir:

Figura 20 – Relação dos alunos com frações 2



b) Como você se sente quando encontra frações em exercícios? Gosta ou não? Fica motivado? Explique com suas palavras.

Eu gosto, não tenho nada contra, mas prefiro outros conteúdos.

b) Como você se sente quando encontra frações em exercícios? Gosta ou não? Fica motivado? Explique com suas palavras.

Eu gosto de fazer frações e tento fazer motivado.

b) Como você se sente quando encontra frações em exercícios? Gosta ou não? Fica motivado? Explique com suas palavras.

Eu gosto porque normalmente é fácil

b) Como você se sente quando encontra frações em exercícios? Gosta ou não? Fica motivado? Explique com suas palavras.

Eu gosto quando eu estudo e entendo.

Fonte: Autora (2024)

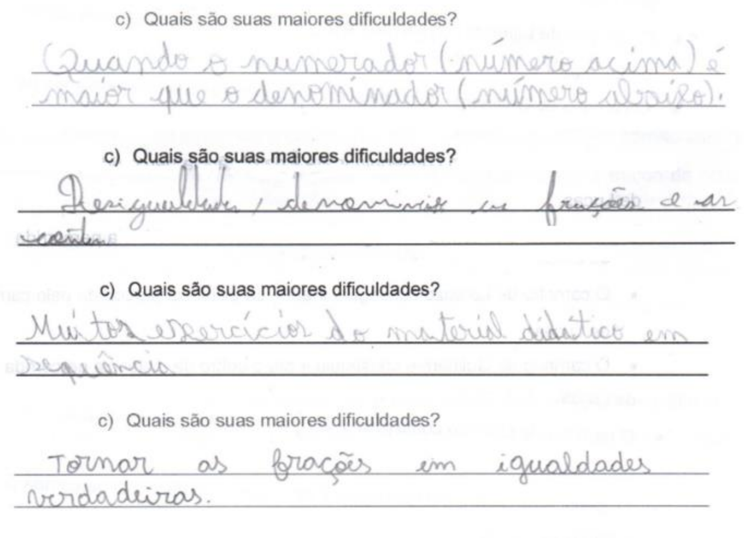
Pode-se perceber por estas respostas que gostar ou não do conteúdo está relacionado, na maioria das vezes, com a capacidade de compreendê-lo. Assim, espera-se que após rever o conteúdo, os alunos o compreendam de maneira mais significativa, melhorando sua relação com as frações.

---

c) Quais são suas maiores dificuldades?

Dois alunos não souberam responder. Um aluno respondeu “nada”. Sete responderam algo relacionado a frações, “quase tudo” ou “tudo”. Quatro alunos deram respostas mais específicas, conforme ilustra a compilação da Figura 21:

Figura 21 – Maiores dificuldades dos alunos com frações


c) Quais são suas maiores dificuldades?
(Quando o numerador (número acima) é maior que o denominador (número abaixo).
c) Quais são suas maiores dificuldades?
Desigualdade, denominar as frações e as contas
c) Quais são suas maiores dificuldades?
Muitos exercícios do material didático em sequência
c) Quais são suas maiores dificuldades?
Tornar as frações em igualdades verdadeiras.

Fonte: Autora (2024)

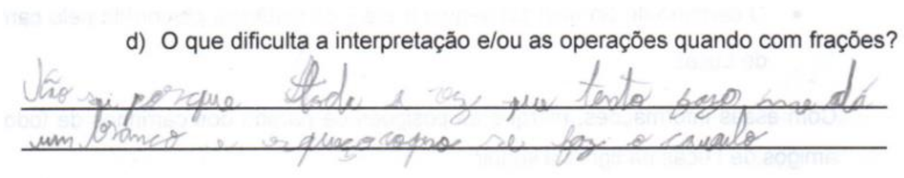
Destacando-se a última resposta, percebe-se que na resolução da avaliação diagnóstica o aluno foi capaz de detectar dificuldades específicas em sua aprendizagem. A primeira e a segunda respostas também podem ser associadas às questões que os alunos realizaram. Já a terceira resposta destaca as dificuldades em experiências anteriores do aluno, relacionada com a quantidade de exercícios.

---

d) O que dificulta a interpretação e/ou as operações quando com frações?

Cinco alunos não responderam ou responderam que não sabiam. Salienta-se o comentário da Figura 22 a seguir:

Figura 22 – Dificuldades na interpretação e/ou operação

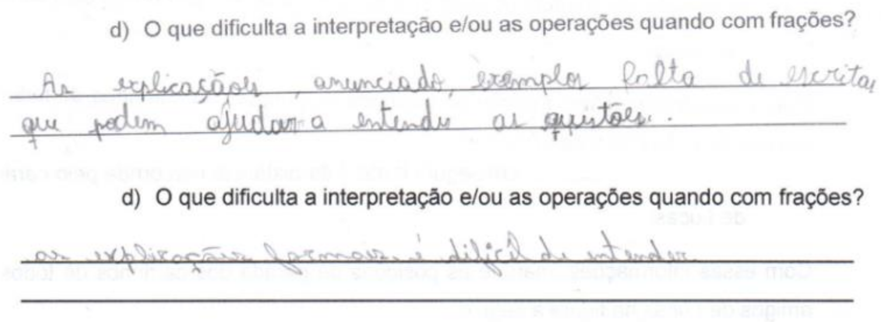

d) O que dificulta a interpretação e/ou as operações quando com frações?
Não sei porque toda vez que tento faço me dá um branco e esqueço como se faz o cálculo

Fonte: Autora (2024)

Pode-se inferir que este aluno não se sente seguro/não realizou exercícios de fixação o suficiente ou então que fica nervoso quando resolve questões envolvendo o conteúdo.

Dois alunos fizeram menção às explicações, com os comentários compilados na Figura 23:

Figura 23 – Dificuldades na interpretação e/ou operação 2


d) O que dificulta a interpretação e/ou as operações quando com frações?

As explicações, enunciado, exemplos falta de escrita, que podem ajudar a entender as questões.

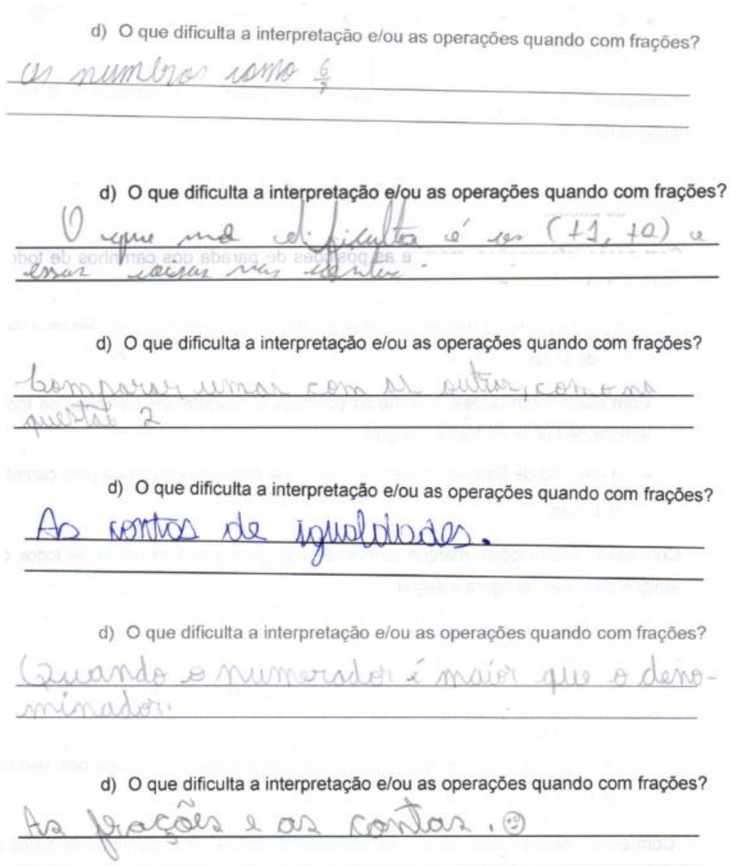
d) O que dificulta a interpretação e/ou as operações quando com frações?

as explicações [illegible] difícil de entender.

Fonte: Autora (2024)

Desta forma, pode-se relacionar uma falta de familiaridade entre a linguagem formal ou a forma como os enunciados são descritos e a dificuldade que os alunos sentem. Outros alunos foram mais específicos, apresentando as respostas compiladas na Figura 24:

Figura 24 – Dificuldades na interpretação e/ou operação 3


d) O que dificulta a interpretação e/ou as operações quando com frações?

os números como $\frac{6}{7}$

d) O que dificulta a interpretação e/ou as operações quando com frações?

O que me dificulta é os (+1, +2) e errar coisas nas contas.

d) O que dificulta a interpretação e/ou as operações quando com frações?

Comparar uma com a outra, com a questão 2

d) O que dificulta a interpretação e/ou as operações quando com frações?

As contas de igualdades.

d) O que dificulta a interpretação e/ou as operações quando com frações?

Quando o numerador é maior que o denominador.

d) O que dificulta a interpretação e/ou as operações quando com frações?

As frações e as contas. ☹

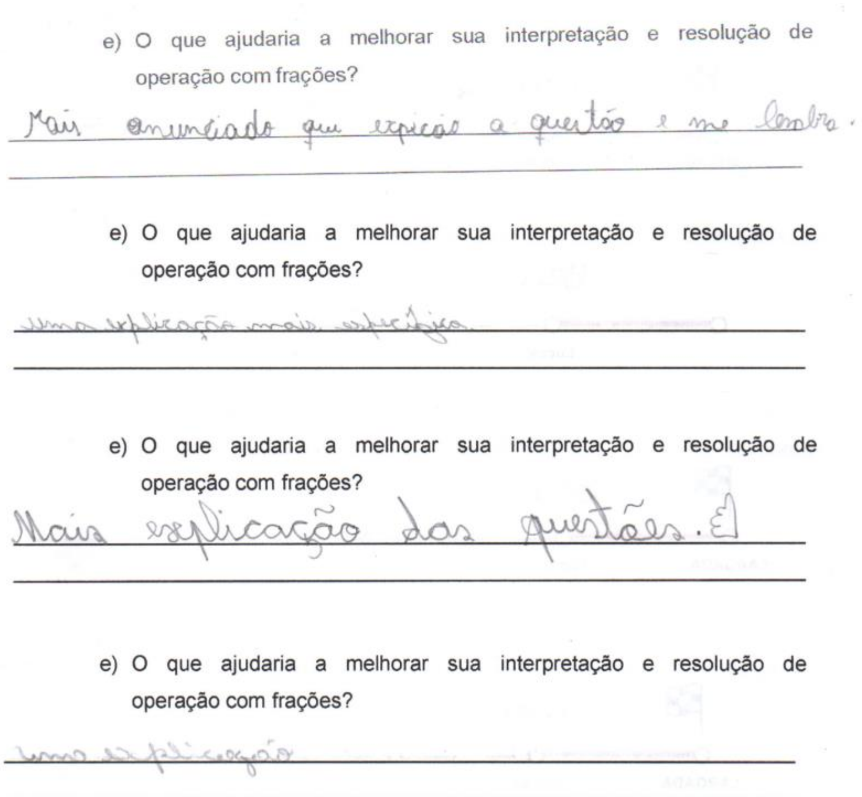
Fonte: Autora (2024)

---

e) O que ajudaria a melhorar sua interpretação e resolução de operação com frações?

Três alunos responderam não saber. Um aluno respondeu “nada”. Um aluno comentou sobre os enunciados e três alunos se referiram às explicações, conforme compilado na Figura 25:

Figura 25 – Facilitadores da interpretação e/ou operação


e) O que ajudaria a melhorar sua interpretação e resolução de operação com frações?

Mais enunciado que expicae a questão e me lembra.

e) O que ajudaria a melhorar sua interpretação e resolução de operação com frações?

uma explicação mais especifica

e) O que ajudaria a melhorar sua interpretação e resolução de operação com frações?

Mais explicação das questões.

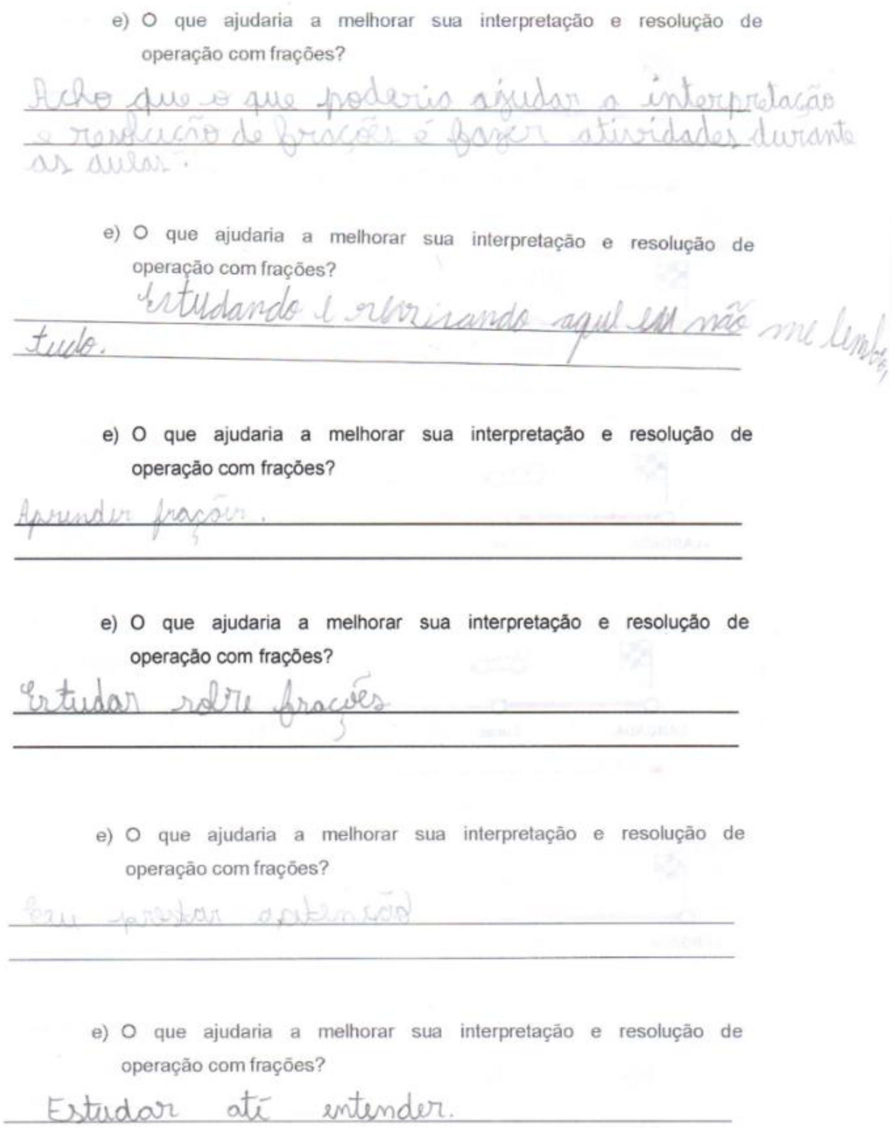
e) O que ajudaria a melhorar sua interpretação e resolução de operação com frações?

uma explicação

Fonte: Autora (2024)

Os demais alunos responderam com comentários relacionados ao estudo do conteúdo conforme compilado na Figura 26:

Figura 26 – Facilitadores da interpretação e/ou operação 2


e) O que ajudaria a melhorar sua interpretação e resolução de operação com frações?

Acho que o que poderia ajudar a interpretação e resolução de frações é fazer atividades durante as aulas.

e) O que ajudaria a melhorar sua interpretação e resolução de operação com frações?

Estudando e revisando aquil que não me lembro tudo.

e) O que ajudaria a melhorar sua interpretação e resolução de operação com frações?

Aprender frações.

e) O que ajudaria a melhorar sua interpretação e resolução de operação com frações?

Estudar sobre frações

e) O que ajudaria a melhorar sua interpretação e resolução de operação com frações?

Eu prestar atenção

e) O que ajudaria a melhorar sua interpretação e resolução de operação com frações?

Estudar até entender.

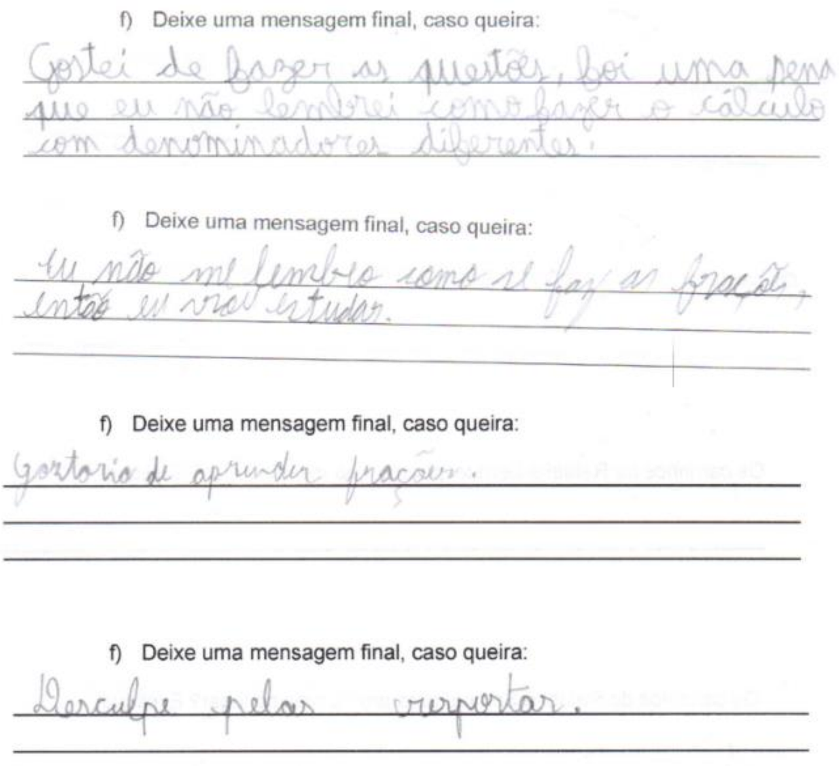
Fonte: Autora (2024)

---

f) Deixe uma mensagem final, caso queira:

Destacam-se as seguintes respostas, compiladas na Figura 27:

Figura 27 – Comentários finais dos alunos sobre a avaliação diagnóstica


f) Deixe uma mensagem final, caso queira:

Gostei de fazer as questões, foi uma pena que eu não lembrei como fazer o cálculo com denominadores diferentes.

f) Deixe uma mensagem final, caso queira:

Eu não me lembro como se faz as frações, então eu vou estudar.

f) Deixe uma mensagem final, caso queira:

Gostaria de aprender frações.

f) Deixe uma mensagem final, caso queira:

Desculpe pelas respostas.

Fonte: Autora (2024)

Após esta análise inicial, chega-se à seguinte questão: *Como abordar as operações entre números fracionários de forma que os alunos percebam seu significado?*

As hipóteses para responder tal questão são que trabalhando de forma visual/geométrica, os alunos compreenderão melhor a ideia de equivalência de frações e, consequentemente, entenderão como operar. Espera-se que o material manipulativo sirva de estímulo à aprendizagem e que, com o trabalho em grupo, os alunos possam se ajudar e absorver os conceitos envolvidos de forma conjunta.

4.1.2 Concepção e análise a priori

A partir das dificuldades observadas nas análises prévias, optou-se por trabalhar com o material manipulativo, pois espera-se:

- fortalecer a ideia de equivalência de frações
- explicitar comparações com frações para então generalizá-las
- compreender as operações entre frações por meio das equivalências, ajudando na compreensão dos alunos.

Para facilitar a leitura, as atividades elaboradas nesta etapa serão apresentadas na seção seguinte.

4.1.3 Experimentação

Nesta seção, serão abordadas as atividades elaboradas utilizando materiais manipulativos para melhor compreensão de frações equivalentes e operações com frações. Num primeiro momento, descreve-se a montagem do material para futura aplicação em aula. Na sequência, apresentar-se-á as oito atividades com os resultados observados.

4.1.3.1 Montagem do material

A primeira etapa desta proposta consiste na montagem do material pelos próprios alunos permitindo familiarização com o mesmo e compreensão de onde surgem as frações do todo. A professora entregou os moldes impressos, disponíveis no Apêndice F, e os alunos deveriam recortá-los. Esta atividade teve duração de um período e meio de aula, em torno de 90 minutos, sendo que alguns alunos tiveram que terminar em casa. Sugere-se também que seja feita uma versão do professor, para que possa comentar quando necessário e retomar as atividades. Aqui, foi colocado velcro atrás de cada uma das peças e utilizou-se de um mural de tecido para posiciona-las, conforme mostra a Figura 28:

Figura 28 – Frações circulares no mural da sala

Fonte: Autora (2024)

Para desenvolver a atividade, os alunos se dividiram em duplas ou trios, a sua escolha. Assim que a professora começou a entregar as folhas com as frações circulares, os alunos identificaram que se trataria de uma atividade sobre frações. Além disso, começaram a nomear o que estava sendo representado, antes de qualquer comentário da professora. Notou-se que recordavam bem da leitura de frações: um inteiro, um meio, um terço, um quarto, um quinto, um sexto, um sétimo, um oitavo, um nono e um décimo.

Assim que todos haviam recebido suas folhas, a professora pediu que pegassem uma cor de cada vez e, com os alunos, fez a identificação das frações representadas. Em cada fração dos círculos, os alunos deveriam anotar quanto representava $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$. Além disso, foi solicitado que, antes de recortarem, os alunos colocassem suas iniciais no verso de cada fração do círculo, para evitar que trocassem as peças ao longo das atividades.

Figura 29 – Alunos montando seu material de frações circulares

Fonte: Autora (2024)

Alguns comentários interessantes surgiram conforme os alunos iam se familiarizando. Por exemplo, enquanto identificavam as peças que representavam um quarto, um aluno perguntou se, então, as quatro peças juntas formavam quatro quartos.

Conforme vários alunos foram terminando de recortar, foi solicitado que tentassem montar um inteiro com as peças, sem repetir cores, antecipando a atividade da aula seguinte.

Figura 30 – Alunos montando um inteiro sem repetir cores

Fonte: Autora (2024)

Na Figura 30, ilustra-se o resultado de dois estudantes, que conseguiram formar o inteiro da única maneira possível com as peças entregues. Ressalta-se que estes alunos normalmente têm dificuldades em matemática, o que os deixou muito animados por terem completado a tarefa primeiro. Vários círculos ficaram aproximados ao inteiro e, na sequência das atividades, será trabalhado o porquê dos resultados obtidos.

Nas próximas seções, disserta-se sobre cada uma das atividades aplicadas. Juntamente a cada atividade, explora-se as respostas obtidas pelos alunos.

4.1.3.2 Atividade 1: Introdução às frações circulares

Novamente, os alunos se reuniram nos grupos formados nas aulas anteriores. Foi entregue então o roteiro da primeira atividade com as peças, retomando o que já havia sido introduzido na aula anterior, com a montagem do inteiro com e sem repetição de cores. Estas questões foram selecionadas e/ou adaptadas de Smole e Diniz (2016).

Questão 1:

De que forma podemos obter um inteiro utilizando peças de uma cor só? E sem repetir cores? Registre abaixo suas conclusões.

A forma exata de montar o inteiro com o material que os alunos dispunham era reunindo as peças representantes de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$. Entretanto, como que a diferença entre as peças não é tão grande e, principalmente, por se tratar de algo confeccionado com papel e recortado manualmente, algumas outras delas, juntas, davam a impressão de formar um inteiro. Quando os alunos apresentavam esta resolução, a professora dizia que era algo aproximado à resposta correta. Os alunos ficaram curiosos sobre o que queria dizer ser aproximado e a professora comentou que, no futuro, justificaria. Mas, para isso, seria necessário compreender a operação de adição de frações. Uma alternativa para facilitar a visualização seria a confecção do material em peças maiores.

Vários alunos montaram o inteiro utilizando apenas uma cor com a peça única preta. A professora disse que estava certo, mas solicitou que pensassem em outras formas, o que eles fizeram. A Figura 31 ilustra os alunos registrando o que foi feito com o material.

Figura 31 – Alunos registrando o que foi feito com o material manipulativo

Fonte: Autora (2024)

Dá-se prosseguimento a atividade por meio da segunda questão.

Questão 2:

De que forma podemos obter metade do inteiro utilizando peças de uma cor só? E sem repetir cores? Registre abaixo suas conclusões.

Alguns alunos conseguiram resolvê-la rapidamente, tendo em vista a similaridade com a questão anterior. A maneira exata era reunindo as peças $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$, porém vários alunos conseguiram aproximações.

Na questão seguinte, abordou-se a unicidade das respostas dadas às questões anteriores.

Questão 3:

As formas representadas por você nas questões 1 e 2 são as únicas possíveis?

Essa questão gerou uma discussão entre os alunos. Eles imaginavam que não eram formas únicas, principalmente as que poderiam repetir a cor, mas não conseguiam formar outras exatas com o material que dispunham. Sem repetir cores, de forma exata, as representações eram únicas, porém, se considerassem as formas aproximadas que obtiveram, eram diversas.

Definiu-se, então, juntamente com os alunos, que seria considerada apenas a forma exata, sendo a representação única.

Foi dado prosseguimento no estudo das comparações entre as peças.

Questão 4:

Podemos dizer que pegar duas peças verdes é o mesmo que pegar 2 partes de um círculo cortado em 5 partes iguais, ou seja, 2 de 5.

a) Como você representaria essa situação na forma de fração?

b) Como lemos esta fração?

Agora, monte em sua mesa um círculo azul, um vermelho e um verde.

c) Explique o que significa:

   i) pegar 1 peça azul:

   ii) pegar 3 peças vermelhas:

   iii) pegar 1 peça verde:

d) Faça a representação fracionária do que você explicou no item anterior.

Ressalta-se, em particular, que o enunciado desta atividade era mais longo do que o habitual de forma que os alunos não conseguiam extrair as informações essenciais para realiza-la. Entretanto, com a mediação da professora, os alunos compreenderam o que era solicitado. Notou-se, também, que para o aluno é muito natural responder utilizando a escrita por extenso das frações, necessitando do intermédio da professora para escrever na forma fracionária. Acredita-se que um exemplo introdutório, inserido logo após o texto, auxiliaria os alunos a completar com êxito a atividade. Também, na impressão do material, foi utilizado verde claro e verde escuro, e não estava explícito qual dos dois utilizar. Enfatiza-se aqui a resistência dos alunos a questões que não apresentem ordens diretas, exigindo que eles interpretem o que está sendo solicitado.

Questão 5:

Selecione as peças do material e monte em sua mesa as seguintes frações. Em seguida, faça o registro:

a) $\frac{6}{8}$

b) $\frac{4}{9}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{7}{10}$

Os alunos não tiveram dificuldades nesta questão, sendo do estilo ao qual já estão familiarizados. Notou-se dúvida na hora de pintar, por exemplo $\frac{6}{8}$, se eles deveriam pintar na cor do círculo dividido em 6 ou 8 partes. A professora disse então que deveriam pintar da cor das peças que utilizaram para fazer a construção. Percebe-se, assim, a necessidade de reforçar que está sendo representado seis partes do círculo dividido em oito partes, isto é, seis oitavos; logo, a cor deve ser do círculo dividido em oito.

Com isso, encerrou-se a primeira atividade proposta.

4.1.3.3 Atividade 2: Representando a metade

Esta atividade foi realizada em duplas ou trios, à escolha dos alunos.

Questão 1:

Utilize as frações circulares para resolver as questões a seguir:

Alex, Diana e Pedro são irmãos. Sábado à noite, Pedro pediu uma pizza que já veio cortada em 8 fatias. Distraído, Pedro comeu 4 fatias e deixou o restante para seus irmãos.

(a) Qual foi a fração da pizza que Pedro comeu, considerando que estava dividida em 8 fatias?

(b) Ao chegar na cozinha, Diana esbravejou: "Você comeu metade da pizza, Pedro". Diana tem razão ao dizer que a fração da pizza que Pedro comeu é 1/2? Por quê?

(c) Utilizando seu material e considerando a pizza como um inteiro, represente de outras formas a metade da pizza. Registre abaixo.

(d) Se Diana comer dois dos pedaços restantes, encontre duas frações diferentes que representam a parte da pizza que Diana comeu.

(e) Represente com seu material e registre no círculo abaixo as fatias comidas por Pedro e Diana. Tente descobrir quanto sobrou para Alex.

(f) Como poderíamos dividir a pizza igualmente para 3 pessoas? Registre.

(g) Como podemos dividir 5 pizzas para 3 pessoas?

Os itens (a), (b) e (d) desta atividade foram retirados de Ripoll *et al.* (2017) e constavam também nas análises prévias. Já os itens (f) e (g) foram retirados de Smole e Diniz (2016).

Os itens (a) e (b) foram resolvidos sem dificuldades pelos estudantes, mostrando que eles conseguem escrever a fração que representa a parte do todo e também associam a ideia de metade com outras frações além do $\frac{1}{2}$.

No item (c), que solicitava "outras formas" de representação da metade, começa-se a observar que a interpretação das questões é um dos principais problemas dos alunos. A maioria dos alunos repetiu as frações já mencionadas nos itens anteriores, como $\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{8}$. A professora solicitou que estes alunos buscassem outras representações, de acordo com o enunciado da questão. Alguns alunos foram resistentes em fazer tais alterações.

No item (d), novamente a interpretação gerou erros. A questão pedia "a parte **da pizza** que Diana comeu", com relação aos 8 pedaços iniciais, porém os alunos fizeram a fração com base nos 4 pedaços restantes, provavelmente em função da primeira informação, que era "dois dos pedaços restantes". Assim, muitos responderam com $\frac{2}{4}$ ao invés de $\frac{2}{8}$.

Na questão (e) os alunos conseguiram preencher tranquilamente as fatias comidas, mas estavam inseguros sobre o significado de quanto sobrou, então a mediação da professora foi importante para a compreensão dos alunos.

Durante o tempo de aula, nem todos alunos chegaram nas questões (f) e (g), tendo que finalizar em casa.

Nesta atividade, notou-se mais interpretações inadequadas, então a professora optou por fazer a correção com os alunos na aula seguinte. O momento da correção se mostrou bastante produtivo. Utilizando as peças com velcro em um quadro de tecido, a professora corrigiu todas as questões, o que foi bom para os alunos exporem para toda a turma suas ideias, potencializando e reforçando suas conclusões.

Na questão (g) alguns alunos haviam conseguido propor a divisão, mas nenhum concluiu que poderia ser dada uma pizza inteira para cada um. A professora mostrou isso na correção, fazendo uma conexão com números mistos, que eles já conheciam.

4.1.3.4 Atividade 3: Comparando frações

Esta atividade foi realizada em um período, com os alunos dispostos em círculo. As questões foram extraídas e/ou adaptadas de Ripoll *et al.* (2017).

Questão 1:

Utilize as frações circulares para completar as sentenças a seguir com os sinais de $>$ (maior) ou $<$ (menor) de modo a torná-las verdadeiras.

a) $\frac{1}{3}\square\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{5}\square\frac{2}{5}$ c) $\frac{2}{10}\square\frac{9}{10}$

Questão 2:

As frações do Exercício 1 possuem, todas, o mesmo denominador. O que podemos observar ao compará-las?

Questão 3:

Utilize as frações circulares para completar as sentenças a seguir com os sinais de $>$ (maior) ou $<$ (menor) de modo a torná-las verdadeiras.

a) $\frac{1}{2}\square\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{3}\square\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{4}\square\frac{1}{9}$

Questão 4:

As frações do Exercício 3 possuem, todas, o mesmo numerador 1 e diferentes denominadores. O que podemos observar ao compará-las?

Nesta atividade, notou-se que os alunos têm bastante dificuldade para compreender e diferenciar os sinais $<$ e $>$, o que interfere ao analisar se eles estavam errando por não compreender qual fração era, de fato, maior, ou apenas trocavam os sinais.

Como a compreensão das questões 2 e 4 era essencial para prosseguir à questão 5, a mediação da professora foi bastante importante. Perguntas de teor mais vago, contendo expressões da forma "O que podemos observar" permitem respostas mais amplas, inclusive não esperadas pelos professores. Porém, é importante discutir a partir das ideias dos alunos para se chegar na conclusão necessária para as demais questões. Sendo assim, a professora os deixou fazerem e debaterem por um tempo e quando todos haviam pensado sobre as questões, fez a correção das atividades, usando seu material. Desta forma, pode-se auxiliar os alunos a concluírem que:

- Se as frações têm o mesmo denominador, será maior a que tiver maior numerador;
- Se as frações têm o mesmo numerador, será maior a que tiver menor denominador.

Até aqui, não foi feita uma explicação formal sobre os termos da fração, porém os alunos relembraram e foram perguntando a partir do que já haviam aprendido no ano anterior.

Questão 5:

A partir das conclusões anteriores, complete as sentenças a seguir com os sinais de $>$ (maior) ou $<$ (menor) de modo a torná-las verdadeiras e justifique:

a) $\frac{4}{5}\square\frac{4}{6}$

b) $\frac{3}{8}\square\frac{3}{7}$

c) $\frac{10}{12}\square\frac{12}{20}$

d) $\frac{1}{10}\square\frac{1}{20}$

e) $\frac{1}{35}\square\frac{1}{43}$

f) $\frac{1}{99}\square\frac{1}{100}$

Na questão 5, os alunos tiveram certa dificuldade para justificar, mas assim que a professora auxiliou a compreenderem o que era diferente em cada caso, eles conseguiram associar às conclusões que haviam elaborado. A letra (c) foi um desafio, já que não se encaixavam em nenhum dos casos destacados, porém os alunos conseguiram compreender quando analisado que $\frac{10}{12}$ está mais próximo do inteiro enquanto $\frac{12}{20}$ está mais próximo da metade. Para uma próxima aplicação, considera-se interessante alterar a ordem, colocando o item (c) no final.

4.1.3.5 Atividade 4: Frações equivalentes

Nessa atividade, foi introduzida a ideia das réguas fracionárias. Elas são uma adaptação das frações circulares, porém impressas em papel vegetal e com a identificação das partes do todo. Emprega-se o termo “régua” por serem utilizadas para mensurar quantas partes são utilizadas de um todo, assim como uma régua diz quantos milímetros ou centímetros algo mede.

No dia em que esta atividade foi aplicada, 5 dos 14 alunos da turma haviam faltado devido ao alerta de ciclone, então a turma toda trabalhou junta, dispostos na sala em formato de “U”. Como não havia réguas para todos, elas foram distribuídas e os alunos as usaram compartilhadas.

Questão 1:

Utilize as réguas fracionárias para resolver as questões a seguir:

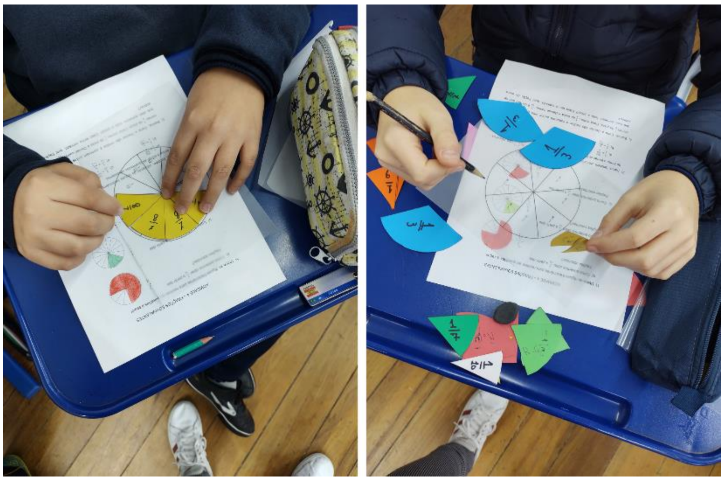
a) Como podemos obter $\frac{9}{12}$ a partir das frações coloridas?

b) Como podemos obter $\frac{3}{15}$ a partir das frações coloridas?

c) Como podemos obter $\frac{4}{16}$ a partir das frações coloridas?

Inicialmente, a mediação da professora se fez muito importante. Porém, ao longo da atividade, os alunos foram compreendendo e ajudando-se, trocando ideias e explicações. A Figura 32, a seguir, ilustra um destes momentos.

Figura 32 – Alunos realizando a Atividade 4



Fonte: Autora (2024)

Questão 2:

Agora, também utilizando as réguas fracionárias, preencha os $\square$ com números de forma a tornar as igualdades verdadeiras.

a) $\frac{5}{3} = \frac{\square}{6}$

b) $\frac{2}{3} = \frac{6}{\square}$

c) $\frac{8}{12} = \frac{\square}{3}$

d) $\frac{9}{12} = \frac{3}{\square}$

e) $\frac{9}{12} = \frac{6}{\square}$

f) $\frac{6}{8} = \frac{\square}{12}$

Na questão 2, alguns alunos já respondiam por meio de raciocínio lógico, realizando as multiplicações, mesmo sem perceber, baseando-se nos conhecimentos prévios sobre frações equivalentes advindos do ano anterior. Neste momento, não fizeram uso do material manipulativo. Entretanto, na questão (e), em que não havia um número natural pelo qual pudessem multiplicar ou dividir, não conseguiam chegar ao resultado, de forma que a professora solicitou que voltassem a usar as frações circulares e as réguas fracionárias.

Questão 3:

Bianca, Carla e Denise são irmãs e comeram juntos uma pizza. Se Bianca comeu $\frac{3}{8}$ da pizza, Carla comeu $\frac{1}{4}$ da pizza e Denise comeu $\frac{1}{16}$ é correto afirmar que eles comeram toda a pizza? Caso tenha sobrado, qual fração da pizza sobrou?

Esta questão também fazia parte das análises prévias. Os alunos resolveram utilizando a ideia de frações equivalentes, observando que $\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$ e $\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$. Porém, a professora mostrou que poderiam fazer utilizando a régua e observaram que ficava muito simples quando sobrepunham todas as peças sobre a régua de 16 partes. A proposta era utilizar a régua pois, nesse momento, não era esperado que os alunos fizessem as conversões com tanta naturalidade.

A professora corrigiu esses exercícios com os alunos e assim foi possível trocar ideias das respostas que cada um obteve. Esse momento de correção se mostra bastante importante para consolidar o que os alunos aprenderam ao realizar a atividade e sanar eventuais falhas nos raciocínios.

Após a aplicação das atividades 1 a 4, trabalhou-se com a apostila da rede de ensino, contendo os seguintes capítulos:

17. Trabalhando com números decimais e fracionários
    - Introdução
    - Transformações entre decimais e fracionários
    - Classificação das frações
    - Representação na reta numerada de números decimais e fracionários
    - Comparação entre números decimais, fracionários e naturais
    - Simplificação de frações
18. Significado das frações
    - A fração como relação entre parte e todo
    - A fração como razão
    - A fração como quociente
    - A fração como porcentagem
    - A fração como um operador

Por questões de direitos autorais, não será possível reproduzir aqui as questões e atividades propostas no material. Entretanto, vale ressaltar que os mesmos são, em sua maioria, contextualizados e baseados em situações problema, coerentes com a proposta da autora deste trabalho.

4.1.3.6 Atividade 5: Adição de frações

Esta atividade foi adaptada a partir dos trabalhos de Rodrigues (2016) e Jesus (2013).

Questão 1:

Posicione as peças lado a lado e, em seguida, utilize as réguas fracionárias para obter a soma como uma única fração. Coloque sua resposta na coluna *Resultado* no Quadro 5.

Anote em *Novo denominador* qual das réguas fracionárias foi utilizada.

Em seguida, vamos calcular o MMC dos denominadores das parcelas da soma e comparar com o novo denominador.

Quadro 5 – Adição de frações

Operação	Resultado	Novo denominador	MMC dos denominadores
$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=$			
$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=$			
$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=$			
$\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=$			

Fonte: Autora (2024)

Questão 2:

O que você pode perceber ao comparar o MMC dos denominadores das parcelas da adição com o novo denominador?

____

Os alunos realizaram esta atividade em grupos, cada um com em torno de 4 integrantes. A professora realizou a primeira operação com eles, no quadro. Os alunos compreenderam rapidamente como deveriam realizar esta questão, bem como perceberam que o novo denominador era igual ao MMC dos denominadores. A professora fez a correção assim que a maioria deles finalizou a questão. Na compilação da Figura 33 destaca-se os alunos realizando estas questões:

Figura 33 – Alunos realizando a adição de frações com material manipulativo

Fonte: Autora (2024)

A próxima questão teve por objetivo reforçar a adição de frações.

Questão 3:

Utilizando frações equivalentes, reescreva as parcelas das adições utilizando o novo denominador, ilustrando por que o resultado encontrado nos testes é verdadeiro.

a. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=$

b. $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=$

c. $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=$

d. $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=$

Novamente, a professora realizou a primeira operação com os alunos. O objetivo era obter a fração equivalente ao sobrepor as peças na régua fracionária. Os alunos logo perceberam que bastava multiplicar numerador e denominador por um mesmo número para obter as frações equivalentes. Novamente foi feita a correção da questão, a fim de enfatizar como resolver a adição de frações. Um aluno comentou, neste momento, que a partir desta explicação, esta operação fez sentido para ele.

Questão 4:

Utilizando frações equivalentes e o MMC para obter o novo denominador, realize as seguintes operações:

a. $\frac{3}{10}+\frac{4}{5}=$

b. $\frac{1}{8}+\frac{1}{7}=$

c. $\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=$

Os alunos conseguiram realizar estas atividades tranquilamente. Cabe salientar que a professora não trabalhou com os alunos o algoritmo da adição. A ideia utilizada foi sempre de pensar por quanto havia sido multiplicado o denominador e então multiplicar pelo mesmo valor o numerador.

Para complementar os estudos, utilizou-se os exercícios de fixação disponíveis no material didático, sendo a maioria deles contextualizados. Notou-se que os alunos se equivocavam ao obter a fração equivalente, alterando somente o denominador. Isso foi observado também na realização de um trabalho avaliativo. Entretanto, após a devolução do trabalho, a professora corrigiu as questões com eles e retomou a necessidade de multiplicar o numerador também para obter uma fração equivalente. Os alunos conseguiram, com esta justificativa, compreender os erros cometidos. Em um novo trabalho avaliativo de recuperação, os alunos tiveram um desempenho muito melhor.

4.1.3.7 Atividade 6: Subtração de frações

Assim como a atividade 5, esta também foi adaptada a partir dos trabalhos de Rodrigues (2016) e Jesus (2013).

Questão 1:

Posicione o subtraendo sobre o minuendo e, em seguida, utilize as réguas fracionárias para obter a diferença como uma única fração. Coloque sua resposta na coluna *Resultado* no Quadro 6. Anote em *Novo denominador* qual das réguas fracionárias foi utilizada.

Em seguida, vamos calcular o *MMC dos denominadores* das parcelas de cada subtração e comparar com o novo denominador.

Quadro 6 – Subtração de frações

Operação	Resultado	Novo denominador	MMC dos denominadores
$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} =$			
$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} =$			
$\frac{2}{3} - \frac{1}{5} =$			
$\frac{3}{4} - \frac{1}{3} =$			

Fonte: Autora (2024)

Questão 2:

O que você pode perceber ao comparar o MMC dos denominadores das parcelas da subtração com o novo denominador?

Questão 3:

Utilizando a ideia de frações equivalentes, reescreva as parcelas de cada uma das subtrações utilizando o novo denominador, ilustrando por que o resultado encontrado nos testes é verdadeiro.

a. $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} =$

b. $\frac{1}{2} - \frac{1}{8} =$

c. $\frac{2}{3} - \frac{1}{5} =$

d. $\frac{3}{4} - \frac{1}{3} =$

Questão 4:

Utilizando frações equivalentes e o MMC para obter o novo denominador, realize as seguintes operações:

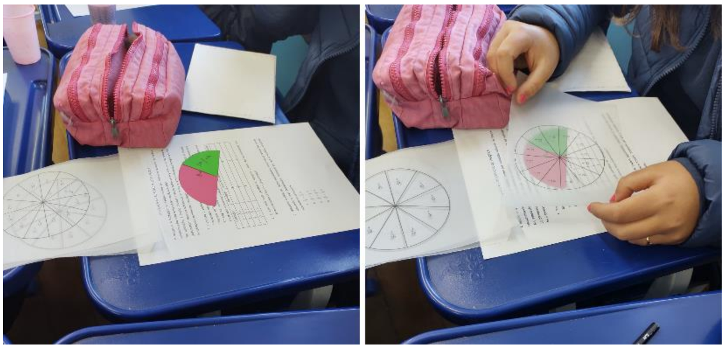
a) $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} =$

b) $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} =$

c) $2 - \frac{1}{2} =$

Como estas questões eram similares às aplicadas anteriormente, os alunos não apresentaram grandes dificuldades. A professora realizou novamente a primeira operação da Questão 1 no quadro, para que os alunos pudessem compreendê-la melhor. Inicialmente, fez-se necessário ressaltar para alguns grupos que o subtraendo deveria ser posicionado sobre o minuendo, e não ao lado, como era feito na adição. Os alunos perceberam que se manteve a igualdade entre o novo denominador e o MMC dos denominadores. Na compilação da Figura 34 observa-se um aluno realizando a atividade.

Figura 34 – Aluno realizando a subtração de frações com material manipulativo



Fonte: Autora (2024)

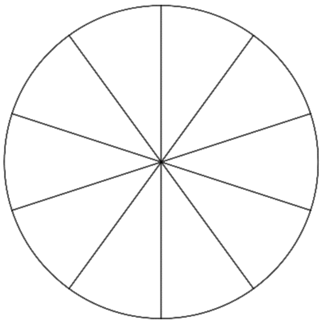
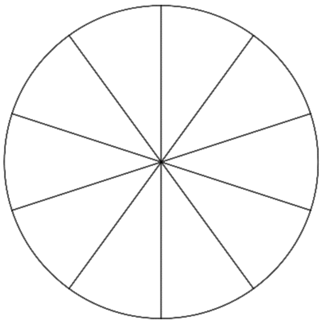
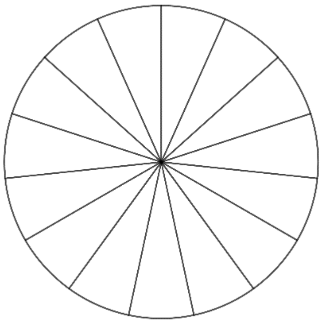
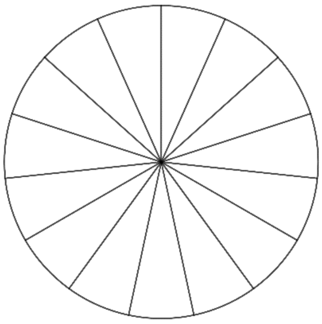
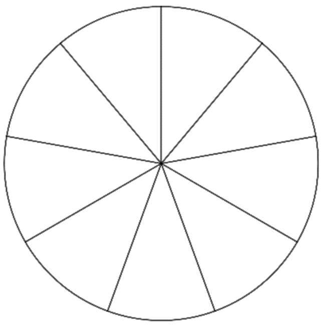
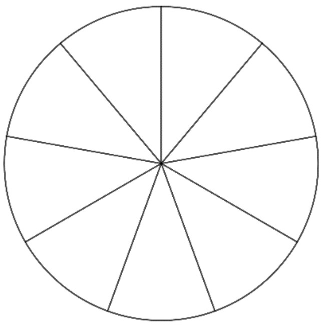
Novamente, manteve-se a ideia de fração equivalente para realizar os cálculos solicitados, sem abordagem de um algoritmo específico.

4.1.3.8 Atividade 7: Multiplicação de frações

Esta atividade foi elaborada a partir dos trabalhos de Rodrigues (2016) e Santos (2019).

Questão 1

Multiplicar frações pode ser compreendido como o ato de determinar parte de uma fração. Por exemplo: calcular $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10}$ pode ser interpretado como determinar $\frac{1}{2}$ de $\frac{4}{10}$, ou seja, devemos dividir $\frac{4}{10}$ em duas partes e pegar uma delas.

Pinte $\frac{4}{10}$ 	Pinte $\frac{1}{2}$ de $\frac{4}{10}$ 
Pinte $\frac{12}{15}$ 	Pinte $\frac{1}{3}$ de $\frac{12}{15}$ 
Pinte $\frac{6}{9}$ 	Pinte $\frac{2}{3}$ de $\frac{6}{9}$ 

Questão 2

Nos casos acima, conseguimos dividir o numerador da segunda fração pelo denominador da primeira. Entretanto, nem sempre isso acontece. Por exemplo: quanto é $\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}$?

Neste caso, vamos utilizar as réguas de frações para dividir $\frac{2}{5}$ em 3 partes iguais. Com qual das réguas podemos dividir dessa forma? Qual o resultado obtido?

Questão 3

Utilizando a régua mais apropriada, determine:

a) $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$

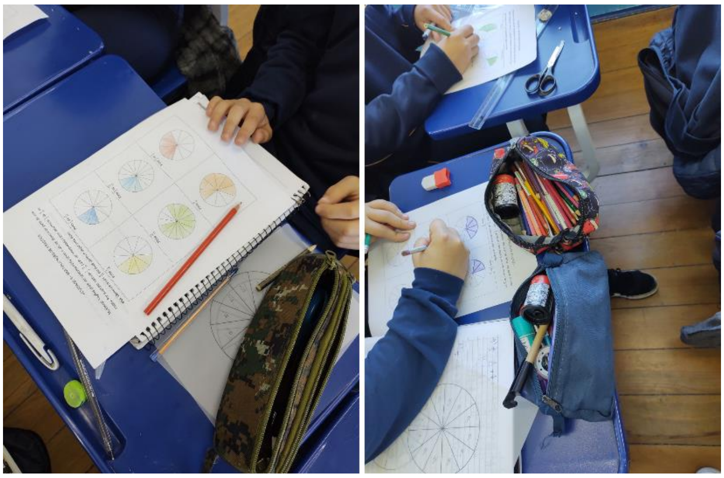
b) $\frac{3}{8} \times \frac{1}{2}$

c) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$

d) $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$

Os alunos conseguiram resolver a Questão 1 com certa tranquilidade. Alguns não se atentaram para o fato de que no último círculo deveria ser pintado $\frac{2}{3}$ de $\frac{6}{9}$, e acabaram pintando apenas $\frac{1}{3}$. Entretanto, quando a professora pontuou isso, eles compreenderam e corrigiram. Na Figura 35 é apresentado um compilado com imagens dos alunos realizando esta atividade.

Figura 35 – Alunos realizando a multiplicação de frações com material manipulativo



Fonte: Autora (2024)

A Questão 2 foi feita por toda a turma junta, com ajuda da professora. Os alunos então perceberam que deveriam pegar a régua referente ao círculo dividido em 15 partes. Foi fundamental o auxílio da professora para que compreendessem que o resultado era $\frac{2}{15}$.

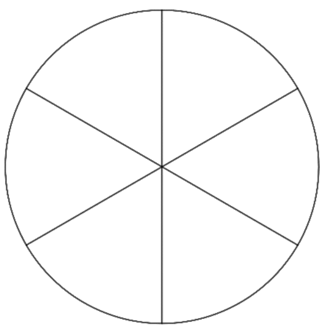
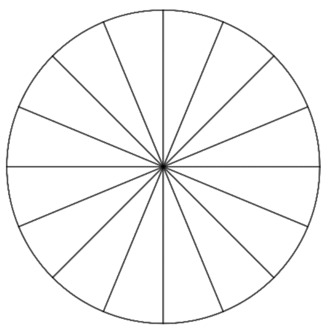
A Questão 3, dentre todas as atividades aplicadas, foi a que os alunos tiveram mais resistência e apresentaram mais dificuldade. Foi necessário que a professora fizesse várias intervenções nos grupos e explicações no quadro. Ao final da correção desta questão a professora instigou os alunos a encontrarem algum padrão entre as operações e o resultado. Os alunos não conseguiram observar que bastava multiplicar numerador por numerador e denominador por denominador, mas ficaram aliviados de ser algo mais simples do que o processo proposto pelas atividades. Sugere-se que sejam propostos mais exercícios similares nesta etapa, para que os alunos consigam visualizar melhor o padrão.

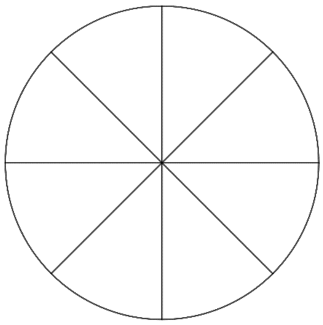
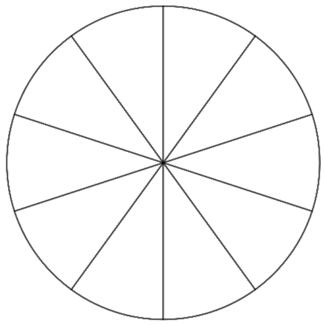
4.1.3.9 Atividade 8: Divisão de frações

Esta atividade também foi elaborada a partir dos trabalhos de Rodrigues (2016) e Santos (2019).

Questão 1

Dividir frações pode ser compreendido como o ato de determinar quantas de uma fração são necessárias para formar a outra. Por exemplo: calcular $\frac{1}{2} \div \frac{1}{6}$ significa determinar quantas vezes $\frac{1}{6}$ cabe em $\frac{1}{2}$.

Pinte $\frac{1}{2}$ utilizando $\frac{1}{6}$  Portanto, $\frac{1}{2} \div \frac{1}{6} =$	Pinte $\frac{1}{4}$ utilizando $\frac{1}{16}$  Portanto, $\frac{1}{4} \div \frac{1}{16} =$

Pinte $\frac{3}{4}$ utilizando $\frac{1}{8}$  Portanto, $\frac{3}{4} \div \frac{1}{8} =$	Pinte $\frac{2}{5}$ utilizando $\frac{1}{10}$  Portanto, $\frac{2}{5} \div \frac{1}{10} =$

Questão 2

Nos casos acima, o denominador da segunda fração é um múltiplo do denominador da primeira, bem como seus numeradores, de forma que será necessária uma quantidade inteira da segunda fração para formar a primeira. Note que:

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{6} = \frac{3}{6} \div \frac{1}{6} = 3$$

Agora, considere a seguinte divisão: $\frac{1}{3} \div \frac{2}{3}$. Ou seja, quantos $\frac{2}{3}$ são necessários para formar $\frac{1}{3}$?

Questão 3

Vamos utilizar a frações equivalentes para calcular os casos em que não estamos trabalhando com múltiplos. Por exemplo: quanto é $\frac{1}{3} \div \frac{2}{5}$?

a) Tente sobrepor a fração circular $\frac{1}{3}$ com duas frações circulares de $\frac{1}{5}$. O que aconteceu?

b) Tente sobrepor a fração circular $\frac{1}{3}$ com quatro frações circulares de $\frac{1}{5}$. O que aconteceu?

Isto quer dizer que não cabe uma quantidade inteira de $\frac{2}{5}$ em $\frac{1}{3}$. Vamos precisar determinar frações equivalentes com mesmo denominador. Que frações equivalentes a $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{3}$ têm mesmo denominador?

Portanto, $\frac{1}{3} \div \frac{2}{5} =$

Questão 4

Resolva, utilizando frações equivalentes:

a) $\frac{4}{5} \div \frac{2}{3} =$

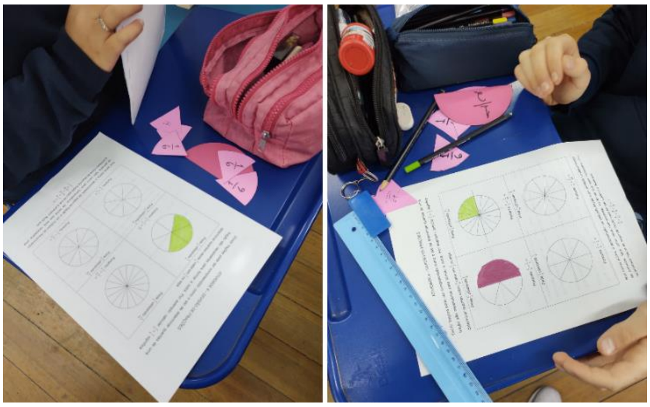
b) $\frac{3}{8} \div \frac{1}{2} =$

c) $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3}$

d) $\frac{1}{3} \div \frac{2}{3}$

Esperava-se que os alunos apresentassem mais dificuldade nesta questão, entretanto, provavelmente por ser similar à anterior, eles conseguiram compreender o que era proposto com facilidade. Na Figura 36 destaca-se imagens dos alunos realizando esta atividade.

Figura 36 – Alunos realizando a divisão de frações com material manipulativo



Fonte: Autora (2024)

A Questão 2 foi resolvida pela turma juntamente com a professora. Na questão 3, presumia-se que compreendessem que não cabe uma quantidade inteira de $\frac{2}{5}$ em $\frac{1}{3}$, então a professora fez com os alunos o exercício de determinar frações equivalentes a estas com mesmo denominador.

A Questão 4 foi realizada com maior facilidade em comparação com a Questão 3 da atividade anterior, provavelmente em função da similaridade entre elas. Alguns alunos conseguiram estabelecer um padrão para os resultados conforme desenvolviam a atividade, isto é, que o objetivo era fazer uma multiplicação cruzada para chegar no resultado. Sendo assim, a professora optou por trabalhar sempre desta forma com a divisão, apenas apresentando a ideia de que se pode multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda, resultado este obtido de forma espontânea e natural pelos alunos.

4.1.4 Análise a posteriori e validação

Nesta seção, será analisado um questionário respondido pelos alunos ao término das aplicações. Ele é composto por oito perguntas, sendo as seis primeiras relacionadas ao que os alunos concluíram das atividades e as duas últimas questões da OBMEP que abordam as operações com frações. Os catorze alunos da turma responderam ao formulário e as respostas foram compiladas a seguir:

Questão 1:

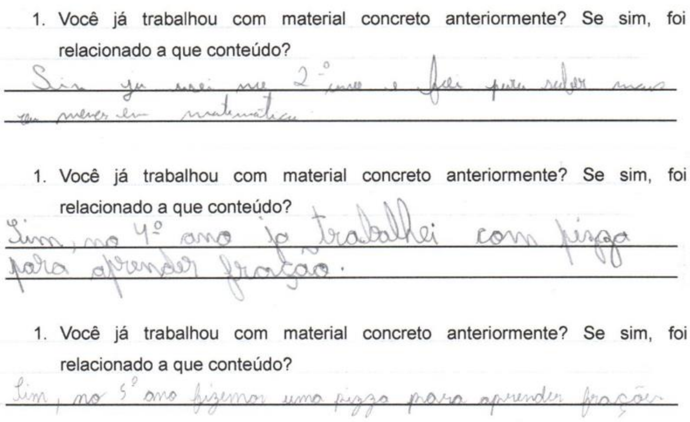
Você já trabalhou com material concreto anteriormente? Se sim, foi relacionado a que conteúdo?

No momento desta aplicação, surgiu o questionamento por parte dos alunos sobre o que seria "material concreto". A professora explicou que seriam materiais utilizados como forma de compreender melhor o conteúdo, exemplificando com o material dourado e pizzas para trabalhar frações. Alguns alunos verbalizaram terem lembrado de trabalhar com esses materiais.

Dois alunos responderam negativamente a esta pergunta.

Cinco alunos responderam afirmativamente e indicaram em que ano utilizaram o material. Um aluno respondeu ter utilizado no 2° ano para "saber mais ou menos em matemática", porém não explicitou qual foi o material utilizado. Dois alunos mencionaram terem trabalhado com pizzas no 4° ano para aprender sobre frações, enquanto dois alunos mencionaram terem trabalhado com pizzas no 5° ano para aprender sobre frações. Destaca-se que podem ter trabalhado nos dois anos com esta atividade, ou que confundiram em que ano foi realmente abordado. No compilado da Figura 37 observa-se algumas destas respostas:

Figura 37 – Utilização de material manipulativo na trajetória escolar


1. Você já trabalhou com material concreto anteriormente? Se sim, foi relacionado a que conteúdo?

Sim eu usei no 2° ano e foi para saber mais ou menos em matemática

1. Você já trabalhou com material concreto anteriormente? Se sim, foi relacionado a que conteúdo?

Sim, no 4º ano já trabalhei com pizza para aprender frações.

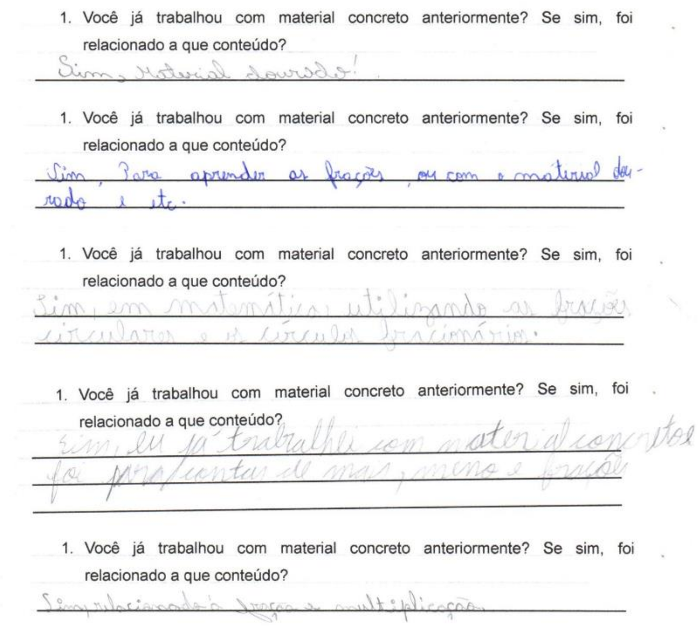
1. Você já trabalhou com material concreto anteriormente? Se sim, foi relacionado a que conteúdo?

Sim, no 5º ano fizemos uma pizza para aprender frações

Fonte: Autora (2024)

Outros cinco alunos responderam positivamente, tendo mencionado material dourado (2), aprendizagem de frações (4), contas de "mais ou menos" (1) e multiplicação (1). A Figura 38 apresenta um compilado destas respostas:

Figura 38 – Utilização de material manipulativo na trajetória escolar 2



1. Você já trabalhou com material concreto anteriormente? Se sim, foi relacionado a que conteúdo?

Sim, material dourado!

1. Você já trabalhou com material concreto anteriormente? Se sim, foi relacionado a que conteúdo?

Sim, Para aprender as frações, ou com o material dou-rado e etc.

1. Você já trabalhou com material concreto anteriormente? Se sim, foi relacionado a que conteúdo?

Sim, em matemática, utilizando as frações circulares e os círculos fracionários.

1. Você já trabalhou com material concreto anteriormente? Se sim, foi relacionado a que conteúdo?

Sim, eu já trabalhei com material concretos foi pra contas de mais, menos e frações

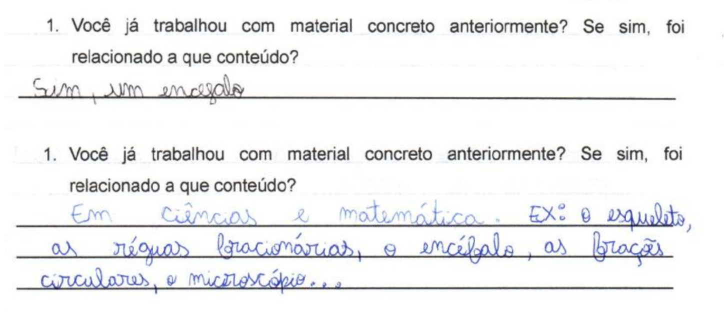
1. Você já trabalhou com material concreto anteriormente? Se sim, foi relacionado a que conteúdo?

Sim, relacionado à frações e multiplicação

Fonte: Autora (2024)

Dois alunos responderam positivamente e incluíram na resposta a disciplina de ciências, conforme apresentado no compilado da imagem Figura 39.

Figura 39 – Utilização de material manipulativo na trajetória escolar 3



1. Você já trabalhou com material concreto anteriormente? Se sim, foi relacionado a que conteúdo?

Sim, um encéfalo

1. Você já trabalhou com material concreto anteriormente? Se sim, foi relacionado a que conteúdo?

Em ciências e matemática. EX: o esqueleto, as réguas fracionárias, o encéfalo, as frações circulares, o microscópio...

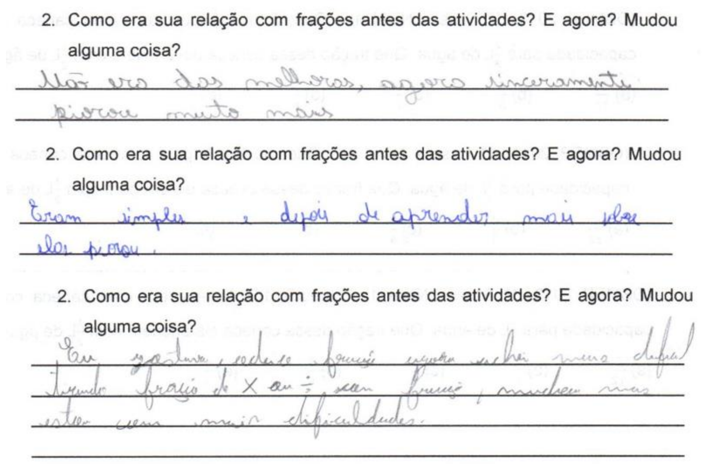
Fonte: Autora (2024)

Questão 2:

Como era sua relação com frações antes das atividades? E agora? Mudou alguma coisa?

Dois alunos afirmaram que sua relação com frações que já não era positiva, piorou. Além disso, um aluno afirmou que gostava e agora odeia. Provavelmente, como os alunos haviam trabalhado apenas a parte inicial de frações, como o conteúdo foi aprofundado, consideraram mais difícil. A Figura 40 apresenta um compilado com as respostas destes alunos.

Figura 40 – Relação dos alunos com o conteúdo de frações


2. Como era sua relação com frações antes das atividades? E agora? Mudou alguma coisa?

Não era das melhores, agora sinceramente piorou muito mais

2. Como era sua relação com frações antes das atividades? E agora? Mudou alguma coisa?

Eram simples e depois de aprender mais elas elas piorou.

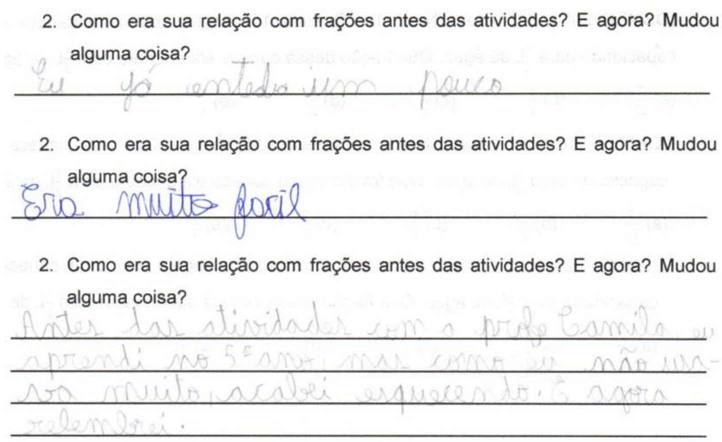
2. Como era sua relação com frações antes das atividades? E agora? Mudou alguma coisa?

Eu gostava, achava frações muito achei meio difícil tirando fração de X ou ÷ com frações, mudou mas estou com mais dificuldades.

Fonte: Autora (2024)

Dois alunos afirmaram já entender antes ou ter facilidade, e um terceiro afirmou já ter aprendido, porém como não havia mais trabalhado com o conteúdo, esqueceu. A Figura 41 apresenta um compilado com as respostas destes alunos.

Figura 41 – Relação dos alunos com o conteúdo de frações 2


2. Como era sua relação com frações antes das atividades? E agora? Mudou alguma coisa?

Eu já entedia um pouco

2. Como era sua relação com frações antes das atividades? E agora? Mudou alguma coisa?

Era muito facil

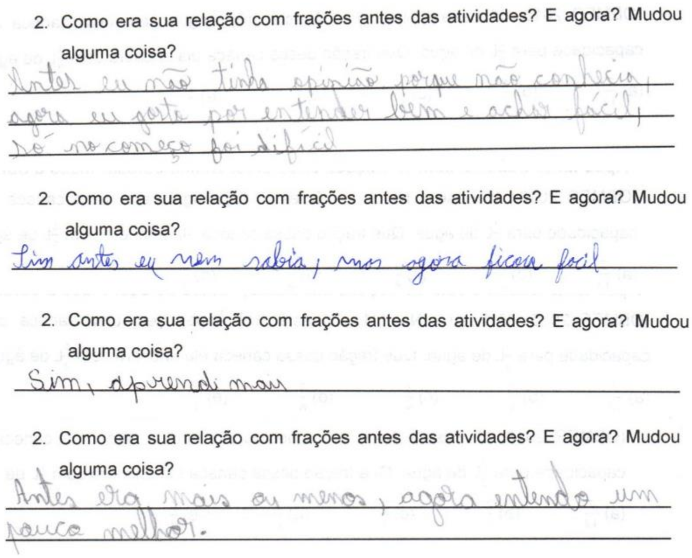
2. Como era sua relação com frações antes das atividades? E agora? Mudou alguma coisa?

Antes das atividades com a profª Camila eu aprendi no 5º ano mas como eu não usava muito, acabei esquecendo. E agora relembrei.

Fonte: Autora (2024)

Dois alunos afirmaram não saber o conteúdo antes das atividades, mas que agora achavam fácil. Um aluno respondeu que aprendeu mais após as atividades e outro descreveu ter uma relação “mais ou menos” com o conteúdo anteriormente, mas que agora passou a entender melhor. A Figura 42 apresenta um compilado destas respostas:

Figura 42 – Relação dos alunos com o conteúdo de frações 3


2. Como era sua relação com frações antes das atividades? E agora? Mudou alguma coisa?

Antes eu não tinha opinião porque não conhecia, agora eu gosto por entender bem e achar fácil, só no começo foi difícil

2. Como era sua relação com frações antes das atividades? E agora? Mudou alguma coisa?

Sim antes eu nem sabia, mas agora ficou fácil

2. Como era sua relação com frações antes das atividades? E agora? Mudou alguma coisa?

Sim, aprendi mais

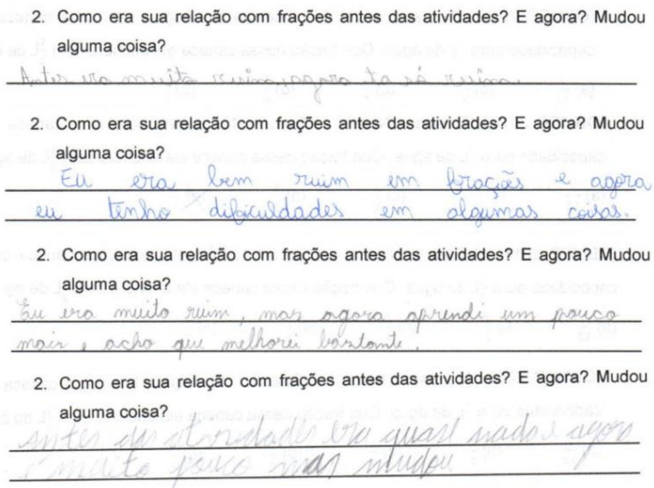
2. Como era sua relação com frações antes das atividades? E agora? Mudou alguma coisa?

Antes era mais ou menos, agora entendo um pouco melhor.

Fonte: Autora (2024)

Por fim, três alunos responderam ter uma relação ruim com o conteúdo antes das atividades e terem progredido, enquanto um quarto afirmou não saber quase nada e agora saber um pouco. A Figura 43 apresenta um compilado destas respostas:

Figura 43 – Relação dos alunos com o conteúdo de frações 4


2. Como era sua relação com frações antes das atividades? E agora? Mudou alguma coisa?

Antes era muito ruim, agora [illegible]

2. Como era sua relação com frações antes das atividades? E agora? Mudou alguma coisa?

Eu era bem ruim em frações e agora eu tenho dificuldades em algumas coisas.

2. Como era sua relação com frações antes das atividades? E agora? Mudou alguma coisa?

Eu era muito ruim, mas agora aprendi um pouco mais, acho que melhorei bastante.

2. Como era sua relação com frações antes das atividades? E agora? Mudou alguma coisa?

antes das atividades era quase nada agora é muito pouco mas mudou

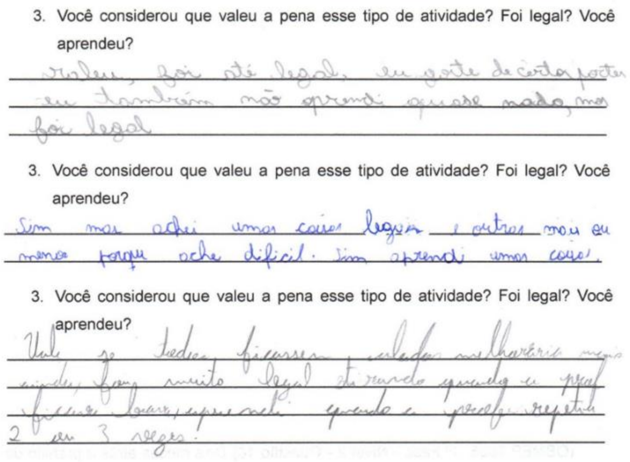
Fonte: Autora (2024)

Questão 3:

Você considerou que valeu a pena esse tipo de atividade? Foi legal? Você aprendeu?

Apenas um aluno respondeu que aprendeu pouco, apesar de considerar as atividades legais e afirmar ter valido a pena. Outro aluno considerou que aprendeu e que algumas atividades foram legais, porém outras não tanto por serem difíceis. Um terceiro aluno mencionou que valeu a pena e seria ainda melhor se os colegas fizessem “calados”. Destaca-se que neste tipo de atividade, realizado em grupos e que necessita da troca de ideias, alguns alunos realmente podem estranhar a diferença de uma aula simplesmente expositiva, em que apenas o professor fala. Estas três respostas foram compiladas e resultaram na Figura 44 :

Figura 44 – Considerações dos alunos acerca da validade das atividades


3. Você considerou que valeu a pena esse tipo de atividade? Foi legal? Você aprendeu?

valeu, foi até legal, eu gostei de certas partes eu também não aprendi quase nada, mas foi legal

3. Você considerou que valeu a pena esse tipo de atividade? Foi legal? Você aprendeu?

Sim mas achei umas coisas legais e outras mais ou menos porque achei difícil. Sim aprendi umas coisas.

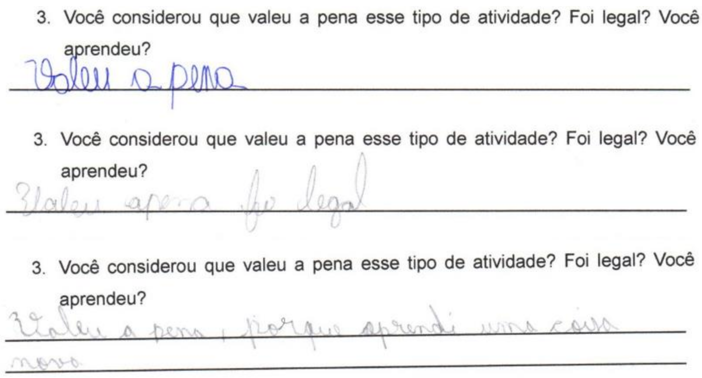
3. Você considerou que valeu a pena esse tipo de atividade? Foi legal? Você aprendeu?

Vale se todos ficassem calados melhoraria mas ainda foi muito legal estudando quando a prof ficava louca, aprendi quando a prof repetia 2 ou 3 vezes!

Fonte: Autora (2024)

Três alunos responderam de forma sucinta, afirmando que “valeu a pena”. Um destes destacou que aprendeu algo novo. Observe na Figura 45 um compilado destas respostas:

Figura 45 – Considerações dos alunos acerca da validade das atividades 2


3. Você considerou que valeu a pena esse tipo de atividade? Foi legal? Você aprendeu?

Valeu a pena

3. Você considerou que valeu a pena esse tipo de atividade? Foi legal? Você aprendeu?

Valeu a pena foi legal

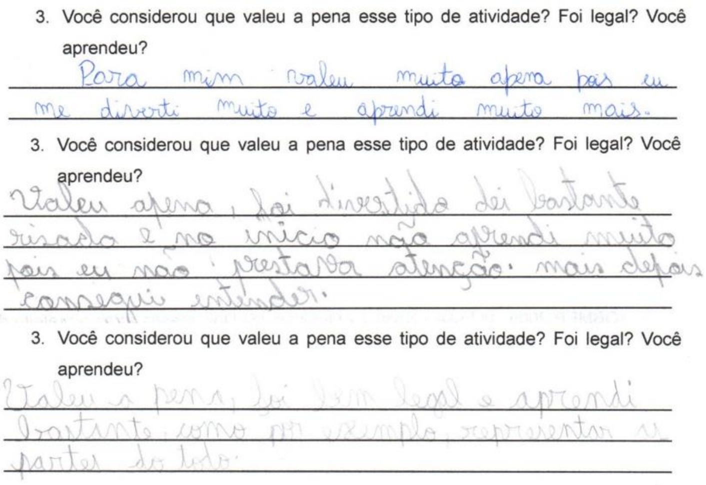
3. Você considerou que valeu a pena esse tipo de atividade? Foi legal? Você aprendeu?

Valeu a pena, porque aprendi uma coisa novo

Fonte: Autora (2024)

Os demais oito alunos responderam afirmativamente a todas as perguntas, considerando que as atividades foram válidas, divertidas e geraram aprendizado. Destacam-se algumas respostas compiladas na Figura 46:

Figura 46 – Considerações dos alunos acerca da validade das atividades 3


3. Você considerou que valeu a pena esse tipo de atividade? Foi legal? Você aprendeu?

Para mim valeu muito apena pos eu me diverti muito e aprendi muito mais.

3. Você considerou que valeu a pena esse tipo de atividade? Foi legal? Você aprendeu?

Valeu apena, foi divertido dei bastante risada e no inicio não aprendi muito pois eu não prestava atenção. mais depois consegui entender.

3. Você considerou que valeu a pena esse tipo de atividade? Foi legal? Você aprendeu?

Valeu a pena, foi bem legal e aprendi bastante, como por exemplo, representar as partes do todo.

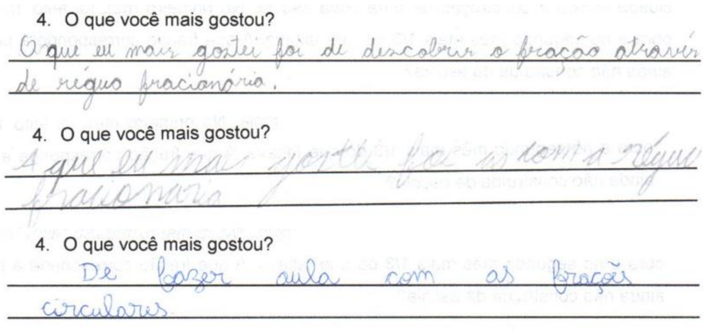
Fonte: Autora (2024)

Questão 4:

O que você mais gostou?

Dois alunos afirmaram gostar de usar as réguas fracionárias, enquanto outro aluno preferiu as frações circulares. Na Figura 47 estão compiladas estas respostas. Provavelmente, o que o primeiro aluno quis dizer com “descobrir a fração através de régua fracionária” se refere ao processo de determinar a fração equivalente.

Figura 47 – O que os alunos mais gostaram


4. O que você mais gostou?

O que eu mais gostei foi de descobrir a fração através de régua fracionária.

4. O que você mais gostou?

A que eu mai gostte foi a com a régua fracionaria

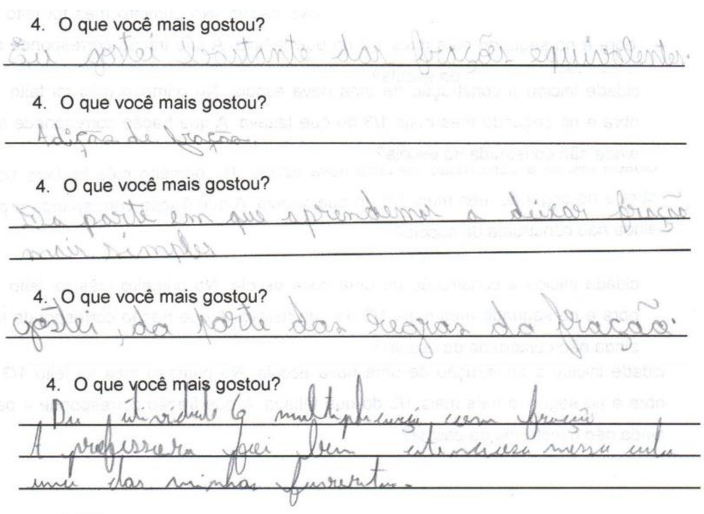
4. O que você mais gostou?

De fazer aula com as frações circulares

Fonte: Autora (2024)

Cinco alunos especificaram tópicos, sendo eles: frações equivalentes, adição de fração, deixar a fração mais simples (frações irredutíveis), regras de fração (provavelmente se refere a como realizar as operações), multiplicação de frações. As respostas estão compiladas na Figura 48:

Figura 48 – O que os alunos mais gostaram 2



Fonte: Autora (2024)

Destaca-se o comentário do quinto aluno, que gostou da atividade por a professora ter sido mais atenciosa. Apesar de a turma ter poucos alunos em comparação com a maioria das escolas, ainda assim, quando fazemos atividades que envolvem materiais manipulativos para observar padrões os alunos sentem-se inseguros, já que não é algo que estão habituados a fazer. Uma das formas de auxiliá-los foi o trabalho em grupo, entretanto ainda sentem a necessidade da validação do professor.

Três alunos fizeram comentários mais gerais, tendo um respondido que gostou de tudo, outro que gostou das atividades em grupo e um terceiro que gostava “quando as primeiras folhas eram fáceis”. Sobre esta última resposta, salienta-se que as atividades foram elaboradas de forma que aumentassem a complexidade, no início tendo tópicos familiares aos alunos e então apresentando novas ideias.

Dois alunos responderam sobre assuntos gerais da disciplina e não sobre as atividades com o material manipulativo. Um respondeu que gostou mais da “multiplicação de número com vírgula” enquanto outro mencionou cálculo com porcentagem, raiz quadrada e cúbica e outras. Por fim, um aluno respondeu com as suas disciplinas preferidas, geografia e história.

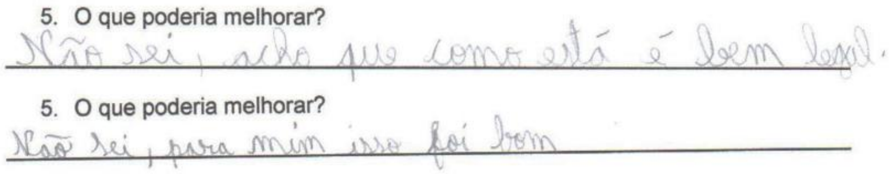
Questão 5:

O que poderia melhorar?

Quatro alunos responderam que nada precisaria melhorar, sendo que apenas dois justificaram. Um desses afirmou que tudo está bem e outro que “eu realmente não aprendi muita coisa mas é bom para pessoas que conseguem gravar as coisas, eu vou tentar começar a gostar disso.” Destaca-se que a ideia por trás das atividades é justamente que não seja necessário que os alunos memorizem algoritmos para trabalhar com frações, mas sim que compreendam o processo que leva às resoluções. Entretanto, como mencionado pelo aluno, ainda há essa mentalidade que associa os processos matemáticos à memorização.

Três alunos responderam não saber o que poderia melhorar, tendo dois destes comentado positivamente sobre a forma como foi desenvolvido. Na Figura 49 é apresentado um compilado das respostas dos alunos:

Figura 49 – Sugestões dos alunos para melhorar


5. O que poderia melhorar?
Não sei, acho que como está é bem legal.
5. O que poderia melhorar?
Não sei, para mim isso foi bom

Fonte: Autora (2024)

Dois alunos responderam com partes do conteúdo que não entenderam muito bem: a divisão de frações e o cancelamento. O cancelamento foi apresentado pela professora ao longo da realização de exercícios de multiplicação de frações, como forma de simplificar os cálculos que os alunos realizavam. Alguns alunos tentaram utilizar esta técnica na divisão, porém não funciona da mesma forma. Outras respostas foram mais atividades em grupo, mais fáceis e “um pouco de tudo”. Um aluno compreendeu a pergunta como solicitando algo que ele, pessoalmente poderia melhorar, e respondeu “Sim, eu poderia”.

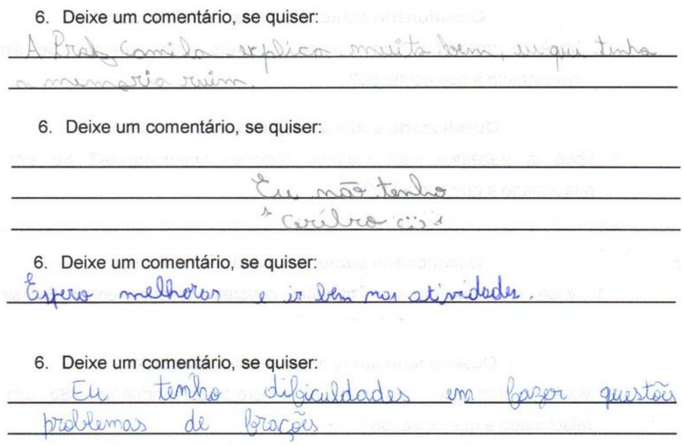
Um aluno comentou acerca do desenvolvimento das atividades e da professora, dizendo que “A atenção da prof, mudar todo mundo de lugar e explicar com mais clareza”. Reitera-se que a professora sempre realizava uma explicação formal do conteúdo após a realização das atividades, mas nota-se que as aulas mais dinâmicas e ativas não são positivas para todos alunos, sendo que alguns ainda conectam a aprendizagem às explicações do professor.

Questão 6:

Deixe um comentário, se quiser:

Diversos comentários foram relacionados à professora, particularmente, entretanto quatro destacam-se como relevantes à pesquisa, estando compilados na Figura 50:

Figura 50 – Comentários dos alunos



Fonte: Autora (2024)

Os dois primeiros comentários mostram uma falta de confiança dos alunos em suas capacidades, o que por vezes afeta a aprendizagem em matemática. Além disso, novamente é ressaltada a ideia de memorização do conteúdo apesar de não ser o foco da abordagem que foi proposta. O terceiro comentário mostra uma autopercepção de que é possível melhorar, validando seu conhecimento através das atividades realizadas. Por fim, uma aluna destacou o que em sala se mostrou um dos principais problemas dos alunos, que é a resolução de questões que envolvem a interpretação em situações problema. As duas próximas questões serão analisadas e trarão mais pontos para discussão.

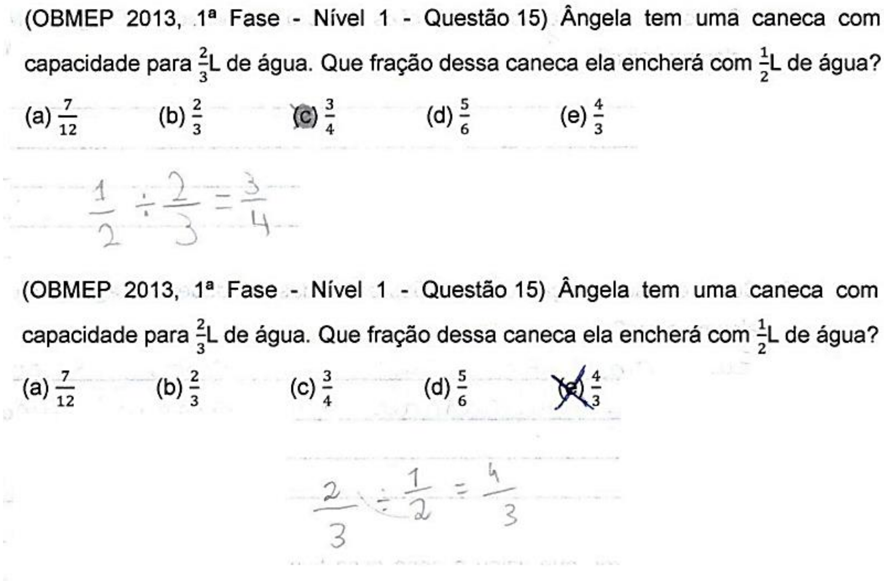
Questão 7:

(OBMEP 2013, 1ª Fase - Nível 1 - Questão 15) Ângela tem uma caneca com capacidade para $\frac{2}{3}$ L de água. Que fração dessa caneca ela encherá com $\frac{1}{2}$ L de água?

(a) $\frac{7}{12}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{5}{6}$ (e) $\frac{4}{3}$

Nesta questão, era esperado que os alunos realizassem a divisão de $\frac{1}{2}$ por $\frac{2}{3}$, resultando em $\frac{3}{4}$. Quatro alunos assinalaram corretamente, porém não apresentaram desenvolvimento. Dois alunos apresentaram a conta e obtiveram o resultado correto. Outros dois alunos dividiram $\frac{2}{3}$ por $\frac{1}{2}$, obtendo o resultado $\frac{4}{3}$. O compilado da Figura 51 apresenta cada um dos casos mencionados

Figura 51 – Resposta dos alunos à questão 7



(OBMEP 2013, 1ª Fase - Nível 1 - Questão 15) Ângela tem uma caneca com capacidade para $\frac{2}{3}$L de água. Que fração dessa caneca ela encherá com $\frac{1}{2}$L de água?

(a) $\frac{7}{12}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{5}{6}$ (e) $\frac{4}{3}$

$\frac{1}{2} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$

(OBMEP 2013, 1ª Fase - Nível 1 - Questão 15) Ângela tem uma caneca com capacidade para $\frac{2}{3}$L de água. Que fração dessa caneca ela encherá com $\frac{1}{2}$L de água?

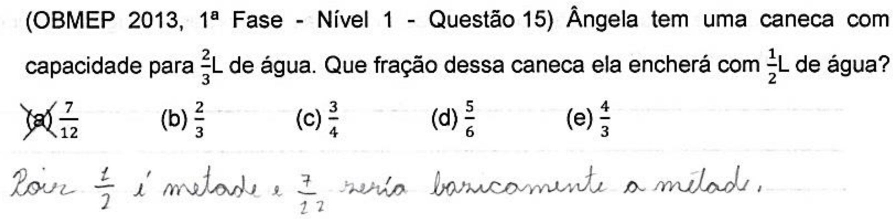
(a) $\frac{7}{12}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{5}{6}$ (e) $\frac{4}{3}$

$\frac{2}{3} \div \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$

Fonte: Autora (2024)

Um aluno realizou a adição de $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2}$, obtendo $\frac{7}{6}$, que não está nas alternativas, então assinalou a que considerou mais próxima, (a). Outro aluno assinalou a alternativa (a), utilizando a comparação de frações, conforme apresentado na Figura 52:

Figura 52 – Resposta do aluno 3 à questão 7



(OBMEP 2013, 1ª Fase - Nível 1 - Questão 15) Ângela tem uma caneca com capacidade para $\frac{2}{3}$L de água. Que fração dessa caneca ela encherá com $\frac{1}{2}$L de água?

(a) $\frac{7}{12}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{5}{6}$ (e) $\frac{4}{3}$

Pois $\frac{1}{2}$ é metade e $\frac{7}{12}$ seria basicamente a metade.

Fonte: Autora (2024)

Outros quatro alunos não apresentaram desenvolvimento, tendo dois assinalados a alternativa (b), um a alternativa (d) e outro a alternativa (e).

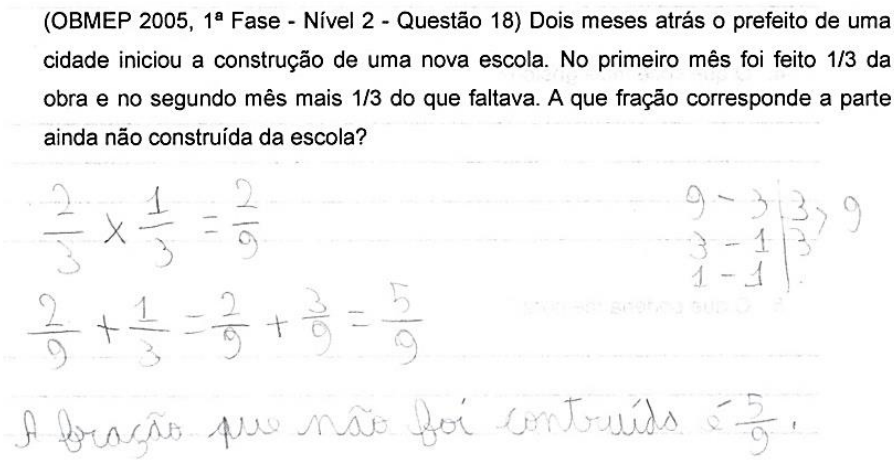
Questão 8:

(OBMEP 2005, 1ª Fase - Nível 2 - Questão 18) Dois meses atrás o prefeito de uma cidade iniciou a construção de uma nova escola. No primeiro mês foi feito 1/3 da obra e no segundo mês mais 1/3 do que faltava. A que fração corresponde a parte ainda não construída da escola?

Nesta questão, para determinar o que já foi construído, os alunos deveriam adicionar $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{9}$, que corresponde a um terço do que faltava, obtendo $\frac{5}{9}$. Por fim, como a pergunta é referente a parte não construída, o correto é $\frac{4}{9}$.

Apenas um aluno chegou próximo ao resultado, porém faltou interpretar que seu cálculo se referia à parte construída. Entretanto, foi capaz de calcular um terço do que faltava, o que nenhum outro aluno fez. Na Figura 53 pode-se observar como o aluno procedeu:

Figura 53 – Resposta do aluno à questão 8



(OBMEP 2005, 1ª Fase - Nível 2 - Questão 18) Dois meses atrás o prefeito de uma cidade iniciou a construção de uma nova escola. No primeiro mês foi feito 1/3 da obra e no segundo mês mais 1/3 do que faltava. A que fração corresponde a parte ainda não construída da escola?

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{5}{9}$$

A fração que não foi contruída é $\frac{5}{9}$.

Fonte: Autora (2024)

Oito alunos responderam $\frac{1}{3}$, provavelmente considerando que a parte construída foi $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Sendo assim, ainda faltaria $\frac{1}{3}$. Percebe-se aqui o erro de interpretação, já que o enunciado afirma que no segundo mês foi construído um terço do que faltava, não do todo. Dois alunos responderam $\frac{2}{3}$, apenas somando $\frac{1}{3}$ com $\frac{1}{3}$.

Outras respostas obtidas, porém, sem justificativas, foram $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{6}$.

5 CONCLUSÃO

Ao longo deste trabalho, foi desenvolvida uma proposta didática com o objetivo de abordar as operações entre números fracionários de forma que os alunos percebam seu significado. Para tal finalidade, utilizou-se da Engenharia Didática e suas quatro etapas, além de utilizar material manipulativo, avançando nos conteúdos a partir da ideia de equivalência de frações.

Na etapa das análises prévias, observou-se que os alunos não dominavam a ideia de frações equivalentes e como obtê-las. Eram capazes, em sua maioria, de identificar várias representações para a metade $\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{8}\right)$, porém não conseguiam analisar casos mais complexos. Como este tópico é fundamental para o aprofundamento no estudo das frações, identificou-se essa falha nos demais tópicos analisados, como na soma e subtração de frações. Quando se operava com mesmo denominador, a maioria dos alunos era capaz de resolver corretamente, entretanto, com denominadores diferentes, os alunos não eram capazes de avaliar a falta de equivalência nos resultados obtidos.

Nas perguntas pessoais, que buscavam analisar a relação e sentimentos dos alunos com frações, pôde-se perceber que gostar ou não do conteúdo está relacionado, na maioria das vezes, com a capacidade de compreendê-lo. Sendo assim, a maioria dos alunos não tinha uma relação positiva com o tópico pesquisado.

Observada a dificuldade com relação às equivalências e ao significado das operações, optou-se por trabalhar com o material manipulativo. Utilizou-se as frações circulares (peças de papel colorido que representavam a unidade dividida em partes) e as réguas fracionárias (papel vegetal no qual foi impressa a unidade dividida em partes). As frações circulares foram impressas e entregues para serem recortadas pelos próprios alunos.

Durante a montagem do material, os alunos estavam bastante entusiasmados, sendo capazes de identificar as partes do todo antes mesmo da professora expor que trabalhariam com frações, além de dominarem a nomenclatura. O desafio de montar um inteiro com peças de cores diferentes motivou alunos que normalmente não apresentam interesse nas atividades de Matemática.

Na atividade introdutória às frações circulares, o trabalho em grupo mostrou-se positivo, promovendo trocas de ideias entre os alunos. Notou-se dificuldade dos alunos na questão cujo enunciado era mais extenso, de forma que não conseguiam extrair as informações essenciais para realiza-la. Considera-se importante, mesmo que gere certa resistência, colocar este tipo de enunciado para que os alunos ampliem suas habilidades de interpretação.

Na atividade sobre representações da metade, destaca-se novamente a dificuldade dos alunos na interpretação de questões que não têm comandos diretos. O momento da correção foi importante para os alunos exporem para toda a turma suas ideias, potencializando e reforçando suas conclusões.

Na atividade sobre comparação de frações, constatou-se que os alunos têm bastante dificuldade para compreender e diferenciar os sinais < e >. Ainda, como algumas perguntas tinham teor mais vago, permitiam respostas mais amplas, inclusive não esperadas pelos professores. Assim, foi importante debater durante a realização das questões iniciais para se chegar na conclusão necessária para as demais.

Os alunos gostaram bastante da atividade sobre frações equivalentes, na qual foram introduzidas as réguas fracionárias. Alguns alunos eram capazes de obter as frações equivalentes através do que aprenderam no ano anterior, dispensando o material manipulativo. Entretanto, na situação em que não havia um número natural pelo qual pudessem multiplicar ou dividir para obter a equivalência, foi necessário que voltassem a utilizar o material. Ressalta-se a importância do momento de correção das atividades para a consolidação do que os alunos aprenderam ao realizar a atividade e para sanar eventuais falhas nos raciocínios.

A atividade sobre adição de frações foi importante para que os alunos compreendessem o sentido que há em obter frações equivalentes para realizar a adição de frações de numeradores diferentes. A professora não trabalhou com os alunos o algoritmo da adição, utilizando a ideia sempre de pensar por quanto havia sido multiplicado o denominador e então multiplicar pelo mesmo valor o numerador.

Como as questões da atividade sobre subtração de frações eram similares às aplicadas anteriormente, os alunos não apresentaram grandes dificuldades. Destaca-se que conforme são realizadas estas atividades que exigem a autonomia dos alunos, os mesmos vão se acostumando a explorarem o material e tirarem suas conclusões. Assim, apesar de resistirem em alguns momentos, mostra-se positivo para o desenvolvimento dos alunos na resolução de problemas.

A atividade sobre multiplicação de frações foi a que os alunos tiveram mais resistência e apresentaram mais dificuldade. Foi necessário que a professora fizesse várias intervenções nos grupos e explicações no quadro. Os alunos não conseguiram generalizar o processo da multiplicação de frações sozinhos, de forma que poderia ser positivo acrescentar mais atividades introdutórias para que pudessem observar um padrão.

A atividade de divisão de frações, na qual era esperado que os alunos tivessem mais dificuldades, surpreendeu positivamente. Este é mais um exemplo de como os desafios geram autonomia para os alunos, já que seu bom desempenho nessa atividade provavelmente veio por ser similar à anterior. Desta vez, os alunos conseguiram observar um padrão na divisão de frações, o que os deixou extremamente felizes.

Ressalta-se também a relação entre as habilidades matemáticas com a autoestima dos alunos, que, ao conseguirem realizar as questões, sentiam-se orgulhosos de si mesmos. Aqueles que não eram capazes, entretanto, apresentavam mais resistência a este tipo de atividade, já que na aula tradicional cabe a eles apenas escutar e copiar, o que consideram mais fácil do que se desafiarem nas atividades propostas. Isto foi observado também nas análises *a posteriori*. Como sugestão, trabalhar com atividades que façam sentido para elas talvez possa atenuar essa percepção de que não gostam apenas por as atividades serem mais difíceis.

Nas aplicações finais, diversos alunos deixavam em casa seus kits com as frações circulares, de forma que se originavam grandes grupos de trabalho. Nota-se que, quando os grupos são grandes e diversos alunos estão sem seu material, alguns acabam apenas copiando o que os colegas que têm o material fizeram, prejudicando a eficiência da atividade. Se possível, deixar os kits na escola evitaria este problema.

Destaca-se que na sala de aula há uma diversidade de personalidades, gostos e realidades, de forma que as opiniões dos alunos não serão únicas. Alunos que são mais tímidos e inseguros com relação à matemática podem se sentir desconfortáveis com esse tipo de atividade, preferindo quando a explicação parte da professora. Da mesma forma, alunos que têm dificuldade de concentração quando há conversas, pois este tipo de atividade se baseia na troca das observações dos alunos, o que pode atrapalhar alguns. Entretanto, o objetivo desta atividade é também desenvolver a autonomia dos alunos perante situações desafiadoras, o que não é enfatizado quando apenas a professora traz explicações. Assim, destaca-se a importância do momento de correção das atividades, para que todos os alunos tenham a possibilidade de expor suas ideias e do professor fazer as análises e explicações que achar pertinente.

Pensando nos resultados positivos agregados, no desenvolvimento da autonomia e na compreensão das operações com frações a partir de equivalências, a autora pretende utilizar novamente a sequência de atividades aqui proposta. O tempo das atividades está adequado e a montagem dos kits pelos alunos foi um momento de revisão de conceitos trabalhados em anos anteriores. No caso de aplicação em turmas maiores, sugere-se uma atenção especial ao momento de correção, uma vez que a possibilidade de mediação do professor em cada grupo fica reduzida.

6 BIBLIOGRAFIA

ALMOULOUD, Saddo Ag. Fundamentos da didática da matemática. Curitiba-PR: Editora UFPR, 2010.

ARAUJO, Maria Cláudia Schmitt. **Uma discussão formal sobre frações na Educação Básica**. 2021. 84 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Santa Catarina, Blumenau, 2021. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/226982/PMTM-B0007-D.pdf?sequence=-1&isAllowed=y. Acesso em: 20 abr. 2024.

ARTIGUE, Michelle; BRUN, Jean. Didáctica das matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

BALTAZAR, Michelle Cristina de Sousa. **O Ensino de Frações com o GeoGebra em Ambientes Virtuais de Aprendizagem para Estudantes do 6º Ano do Ensino Fundamental**. 2021. 123 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2021. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6211&id2=171053851. Acesso em: 20 abr. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. 2018.

CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; RODRIGUES, Wilson Roberto. A idéia de unidade na construção do conceito do número racional. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Universidade Federal de Santa Cataria, UFSC, Florianópolis, SC, v2. 4, p. 68-93, 2007. Disponível em: < https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12992 >. Acesso em: 10 jan. 2024.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

GAMBETA, Marciane. **FRAÇÕES E O MÉTODO DE SINGAPURA**. 2023. 150 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2023. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=7139&id2=171056678. Acesso em: 20 abr. 2024.

HENRIQUE, Mychelly Agnes Marcelo. **Uma análise do ensino de frações equivalentes no contexto da pandemia da Covid-19 mediado pela Teoria Antropológica do Didático**. 2021. 175 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Rondonópolis, Rondonópolis, 2021. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6624&id2=171055308. Acesso em: 20 abr. 2024.

JESUS, Amanda Botega Masson de. **Uma proposta de ensino de frações voltada para a construção do conhecimento**. 2013. 71 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2013. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=748&id2=27160. Acesso em: 20 dez. 2023.

LIMA, Rozenilto José de. **UMA PROPOSTA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**. 2021. 63 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal Rural do Semiárido, Mossoró, 2021. Disponível em: https://repositorio.ufersa.edu.br/server/api/core/bitstreams/11bb33ff-6841-48ed-bf37-8f765a37a0a2/content. Acesso em: 20 abr. 2024.

LUIZ, Nayara Caroline. **Frações egípcias e uma sequência didática para o Ensino Fundamental**. 2023. 54 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Santa Catarina, Blumenau, 2023. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=7313&id2=171056753. Acesso em: 20 abr. 2024.

NUNES, Terezinha. Criança pode aprender frações. E gosta! In: GROSSI, Ester Pilar (org.). **Por que ainda há quem não aprende**? A teoria. Petrópolis, RJ: Vozes, 2003. 204 p.

RÊGO, Flávio Daniel Luz. **ENSINO DE FRAÇÕES EM TURMAS DO 6º ANO FUNDAMENTAL COM USO DA ABORDAGEM STEAM - (SCIENCE, TECHNOLOGY, ENGINEERING, ARTS AND MATHEMATICS)**. 2022. 63 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade do Federal do Pará, Belém, 2022. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6864&id2=171054282. Acesso em: 20 abr. 2024.

RIPOLL, Cydara Cavedon *et al* (ed.). **Frações no Ensino Fundamental**. 2. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2017. 210 p. Disponível em: https://livroaberto.uniriotec.br/wp-content/uploads/sites/57/2023/08/fracao_livro_professor_impressao.pdf. Acesso em: 20 dez. 2023.

RODRIGUES, Marta Rejane Reis. **O uso de material concreto para estimular a aprendizagem do conteúdo de frações numa turma da primeira série do ensino médio**. 2016. 28 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro, 2016. Disponível em: http://www.univasf.edu.br/~tcc/000007/000007a3.pdf. Acesso em: 20 dez. 2023.

SANTOS, Solange Ferreira dos. **O Uso do Tangram como Proposta no Ensino de Frações**. 2019. 134 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Goiás, Jataí, 2019. Disponível em: https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/1208/o/Disserta%C3%A7%C3%A3o.pdf. Acesso em: 20 dez. 2023.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Materiais Manipulativos para o Ensino de Frações e Números Decimais** – Vol. 3: Coleção Mathemoteca. Penso Editora, 2016.

TORRES, Eliane Teixeira Barbosa. **ATIVIDADES DE APRENDIZAGEM DE FRAÇÃO POR MEIO DA TAXONOMIA DE BLOOM REVISADA E DA BNCC**. 2022. 77 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, A Universidade do Estado de Mato Grosso, Sinop, 2022. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6676&id2=171054605. Acesso em: 20 abr. 2024.

APÊNDICE A – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, Camila Gasparin Magnaguagno, responsável pela pesquisa *Uma proposta de sequência didática para o estudo de frações a partir das dúvidas comuns provenientes de alunos do Ensino Fundamental*, convido seu filho(a) a participar como voluntário deste estudo.
Por meio desta pesquisa, pretende-se identificar os conhecimentos prévios dos alunos do ensino fundamental da Escola Cenecista de Ensino Fundamental São Vicente, acerca dos conceitos, representações e operações envolvendo o conteúdo de frações.
Acredita-se na importância desta pesquisa porque nota-se resistência na resolução de questões envolvendo números fracionários, além do considerável número de erros ao tratar de operações com estes. O desenvolvimento deste estudo seguirá o roteiro assim planejado: coleta de dados a partir de questionário diagnóstico, análise dos dados coletados e proposta de intervenção que contribua para sanar as dificuldades identificadas. A participação do estudante consistirá em responder ao questionário diagnóstico.
Sendo a participação de seu filho(a) voluntária, o mesmo não receberá benefício financeiro. Os gastos necessários para a participação na pesquisa serão assumidos pelos pesquisadores.
É possível que o estudante não saiba responder corretamente às questões propostas, no entanto espera-se que, a partir da análise dos resultados, o presente estudo colabore positivamente para a prática do ensino e aprendizagem de alguns tópicos envolvendo frações.
Durante todo o período da pesquisa o estudante terá a possibilidade de tirar qualquer dúvida ou pedir qualquer outro esclarecimento.
O estudante tem garantida a possibilidade de não aceitar participar ou de retirar sua permissão a qualquer momento, sem nenhum tipo de prejuízo pela sua decisão.
As informações desta pesquisa serão confidenciais e poderão ser divulgadas, apenas, em eventos ou publicações, sem a identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre sua participação. Também serão utilizadas imagens, caso necessário.

Autorização
Eu, ______________________________________, após a leitura ou a escuta da leitura deste documento e ter tido a oportunidade de conversar com o pesquisador responsável para esclarecer todas as minhas dúvidas, estou suficientemente informado, ficando claro que a participação de meu filho(a) é voluntária e que posso retirar este assentimento a qualquer momento sem penalidades ou perda de qualquer benefício. Estou ciente também dos objetivos da pesquisa, dos procedimentos aos quais o estudante será submetido, dos possíveis danos ou riscos deles provenientes e da garantia de confidencialidade. Diante do exposto e de espontânea vontade, expresso minha concordância na participação de meu filho(a) neste estudo e assino este termo em duas vias, uma das quais foi-me entregue.

Assinatura do responsável: ____

Assinatura do responsável pela obtenção do TALE: ___________________________

Caxias do Sul, ____ de _____________ de 2023.

APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Autorização

Eu, ____, após a escuta da leitura deste documento e ter tido a oportunidade de conversar com o pesquisador responsável para esclarecer todas as minhas dúvidas, estou suficientemente informado, ficando claro que minha participação é voluntária e que posso retirar este consentimento a qualquer momento sem penalidades ou perda de qualquer benefício. Estou ciente também dos objetivos da pesquisa, dos procedimentos aos quais serei submetido, dos possíveis danos ou riscos deles provenientes e da garantia de confidencialidade. Diante do exposto e de espontânea vontade, expresso minha concordância em participar deste estudo e assino este termo em duas vias, uma das quais foi-me entregue.

Assinatura do voluntário: ____

Assinatura do responsável pela obtenção do TCLE: ________________________

Caxias do Sul, ____ de ______________ de 2023.

APÊNDICE C – ANÁLISE PRÉVIA

As questões a seguir têm por objetivo verificar o nível de compreensão dos estudantes sobre alguns tópicos envolvendo frações. Elas foram extraídas e adaptadas de Ripoll *et al.* (2017).

1) Preencha os $\square$ com números de forma a tornar as igualdades verdadeiras.

a) $\frac{5}{3} = \frac{\square}{6}$ c) $\frac{8}{12} = \frac{\square}{3}$ e) $\frac{9}{12} = \frac{6}{\square}$

b) $\frac{2}{3} = \frac{6}{\square}$ d) $\frac{9}{12} = \frac{3}{\square}$ f) $\frac{6}{8} = \frac{\square}{12}$

2) Observando as frações $\frac{11}{6}, \frac{28}{15}$ e $\frac{37}{20}$:

a) Determine três frações de mesmo denominador que sejam equivalentes às frações $\frac{11}{6}, \frac{28}{15}$ e $\frac{37}{20}$ respectivamente.

b) Usando as frações do item a), identifique qual é a maior e qual é a menor fração entre as frações $\frac{11}{6}, \frac{28}{15}$ e $\frac{37}{20}$

3) Complete as sentenças a seguir com os sinais > (maior) ou < (menor) de modo a torná-las verdadeiras.

a) $\frac{1}{3} \square \frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{2} \square \frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{35} \square \frac{1}{43}$

b) $\frac{3}{5} \square \frac{2}{5}$ d) $\frac{1}{10} \square \frac{1}{20}$ f) $\frac{1}{99} \square \frac{1}{100}$

4) Alex, Diana e Pedro são irmãos. Sábado à noite, Pedro pediu uma pizza que já veio cortada em 8 fatias. Distraído, Pedro comeu 4 fatias e deixou o restante para seus irmãos.

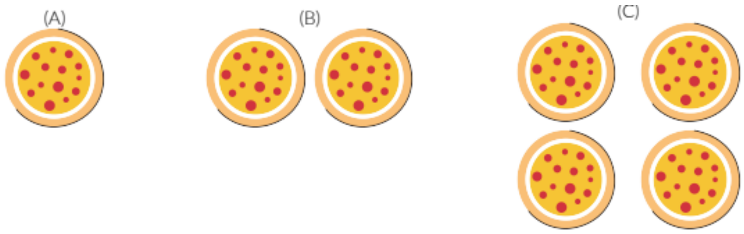
a) Qual foi a fração da pizza que Pedro comeu, considerando que estava dividida em 8 fatias?

b) Ao chegar na cozinha, Diana esbravejou: “Você comeu metade da pizza, Pedro”. Diana tem razão ao dizer que a fração da pizza que Pedro comeu é $\frac{1}{2}$? Por quê?

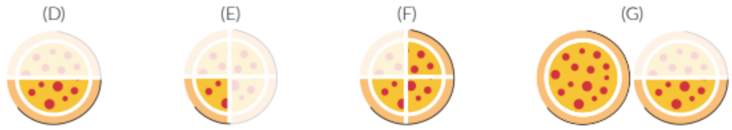
c) Se Diana comer dois dos pedaços restantes, encontre duas frações diferentes que representam a parte da pizza que Diana comeu.

5) Use a reta numérica para fazer o que é pedido nos itens a seguir.

a) Marque os pontos que representam as quantidades de pizza nos casos (A), (B) e (C) a seguir.



b) E agora, que pontos na reta numérica representam as quantidades de pizza dos casos (D), (E), (F) e (G)?



6) Em cada um dos itens a seguir, faça a conta e uma ilustração que explique a maneira como você realizou o cálculo solicitado.

a) $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} =$

b) $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} =$

c) $\frac{1}{3} + 1 =$

7) Calcule as operações indicadas, da forma que achar mais conveniente

a) $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} =$

b) $\frac{5}{9} - \frac{3}{9} =$

c) $\frac{3}{10} + \frac{4}{5} =$

d) $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} =$

e) $\frac{1}{8} + \frac{1}{7} =$

f) $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} =$

g) $2 - \frac{1}{2} =$

h) $\frac{2}{6} + 2 - \frac{2}{3} =$

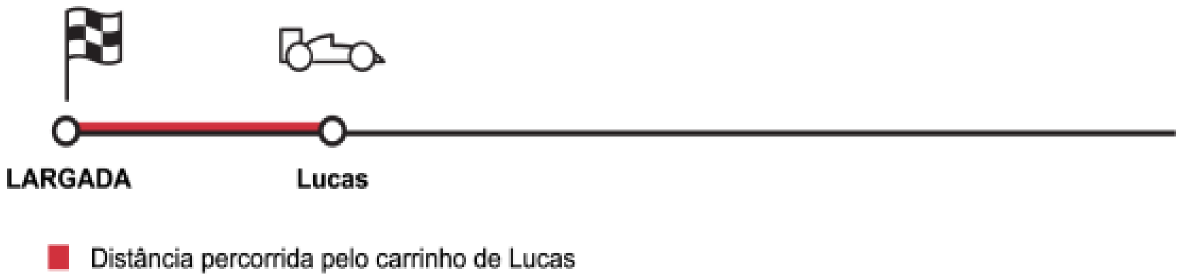
i) $\frac{2}{5} + \frac{2}{7} - \frac{2}{3} =$

8) Há três recipientes cilíndricos, de mesmo tamanho, contendo água. No primeiro recipiente, a água ocupa dois terços de sua capacidade. No segundo, a água ocupa metade de sua capacidade. No terceiro, a água ocupa cinco oitavos de sua capacidade. É possível redistribuir a água de todos os recipientes em somente um deles? Por quê?

9) Bianca, Carla e Denise são irmãos e comeram juntos uma pizza. Se Bianca comeu $\frac{3}{8}$ da pizza, Carla comeu $\frac{1}{4}$ da pizza e Denise comeu $\frac{1}{16}$ é correto afirmar que eles comeram toda a pizza? Caso tenha sobrado, qual fração da pizza sobrou?

10) Lucas, Matheus, Heitor, Rafael, Enzo, Nicolas, Lorenzo, Guilherme e Samuel estavam brincando de empurrar seus carrinhos de brinquedo para ver qual carrinho ia mais longe em uma pista reta.

A figura a seguir mostra o quão longe foi o carrinho de Lucas e onde ele parou na pista com relação ao ponto de largada.



Sabe-se que:

- O carrinho de Matheus só conseguiu ir até a metade da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.
- O carrinho de Heitor conseguiu ir até $\frac{3}{2}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.
- O carrinho de Rafael conseguiu ir até $\frac{4}{2}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.
- O carrinho de Enzo conseguiu ir até $\frac{5}{2}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.
- O carrinho de Nicolas conseguiu ir até $\frac{6}{2}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.
- O carrinho de Lorenzo conseguiu ir até $\frac{6}{4}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.
- O carrinho de Guilherme conseguiu ir até o dobro da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.
- O carrinho de Samuel conseguiu ir até $\frac{6}{3}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.

Com essas informações, marque as posições de parada dos carrinhos de todos os amigos de Lucas na figura a seguir.

Os carrinhos de Rafael e Samuel pararam no mesmo lugar? Explique.

Após realizar estas atividades e com sua experiência, responda:

a) O que você entende por fração?

b) Como você se sente quando encontra frações em exercícios? Gosta ou não? Fica motivado? Explique com suas palavras.

c) Quais são suas maiores dificuldades?

d) O que dificulta a interpretação e/ou as operações quando com frações?

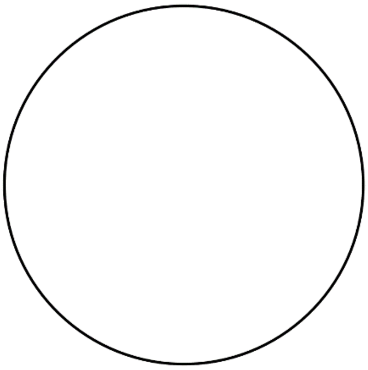
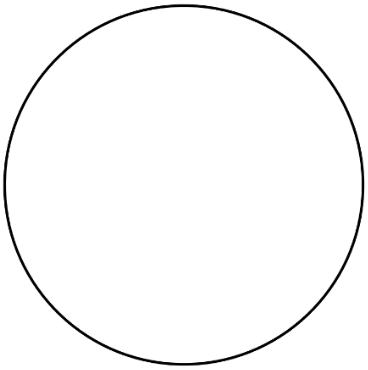
e) O que ajudaria a melhorar sua interpretação e resolução de operação com frações?

f) Deixe uma mensagem final, caso queira:

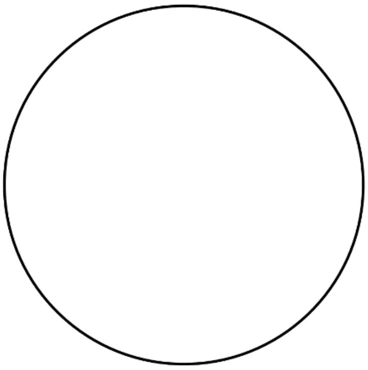
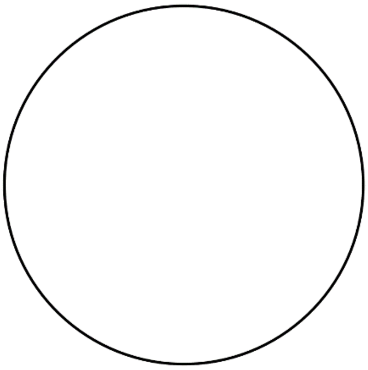
APÊNDICE D – SEQUÊNCIA DIDÁTICA PROPOSTA

ATIVIDADE 1 – INTRODUÇÃO ÀS FRAÇÕES CIRCULARES

1) De que forma podemos obter um inteiro utilizando peças de uma cor só? E sem repetir cores? Registre abaixo suas conclusões.

2) De que forma podemos obter metade do inteiro utilizando peças de uma cor só? E sem repetir cores? Registre abaixo suas conclusões.

3) As formas representadas por você nas questões 1 e 2 são as únicas possíveis?

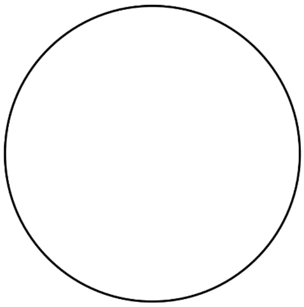
4) Podemos dizer que pegar duas peças verdes é o mesmo que pegar 2 partes de um círculo cortado em 5 partes iguais, ou seja, 2 de 5.
   a) Como você representaria essa situação na forma de fração?
   b) Como lemos esta fração?

   Agora, monte em sua mesa um círculo azul, um vermelho e um verde.

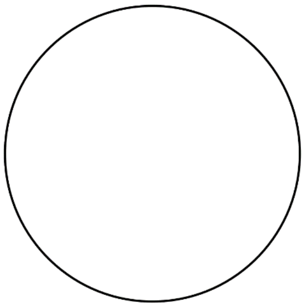
   c) Explique o que significa:
      i) pegar 1 peça azul:
      ii) pegar 3 peças vermelhas:
      iii) pegar 1 peça verde:
   d) Faça a representação fracionária do que você explicou no item anterior.

5) Selecione as peças do material e monte em sua mesa as seguintes frações. Em seguida, faça o registro:

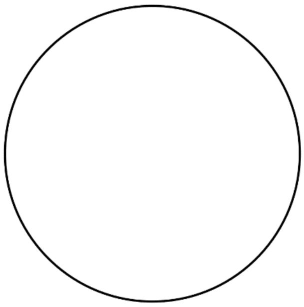
a) $\frac{6}{8}$



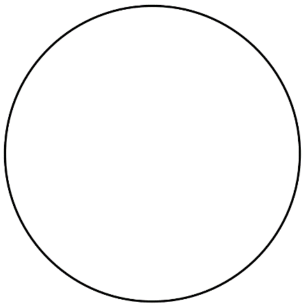
a) $\frac{4}{9}$



b) $\frac{3}{4}$



c) $\frac{7}{10}$



ATIVIDADE 2 – REPRESENTANDO A METADE

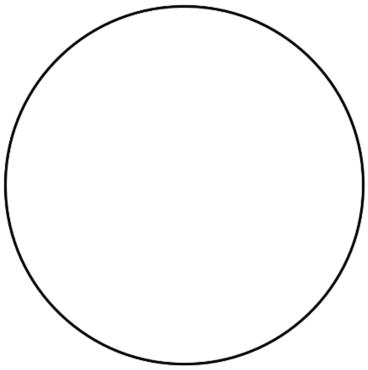
1) Utilize as frações circulares para resolver as questões a seguir:

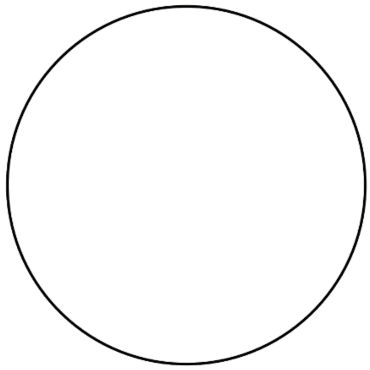
Alex, Diana e Pedro são irmãos. Sábado à noite, Pedro pediu uma pizza que já veio cortada em 8 fatias. Distraído, Pedro comeu 4 fatias e deixou o restante para seus irmãos.

a) Qual foi a fração da pizza que Pedro comeu, considerando que estava dividida em 8 fatias?

b) Ao chegar na cozinha, Diana esbravejou: “Você comeu metade da pizza, Pedro”. Diana tem razão ao dizer que a fração da pizza que Pedro comeu é $\frac{1}{2}$? Por quê?

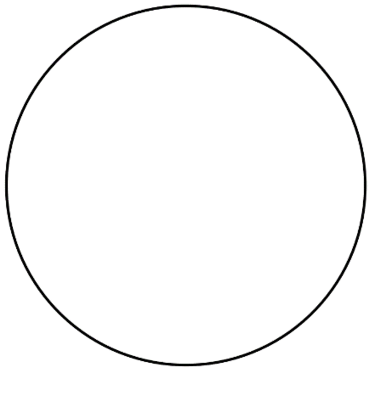
c) Utilizando seu material e considerando a pizza como um inteiro, represente de outras formas a metade da pizza. Registre abaixo:



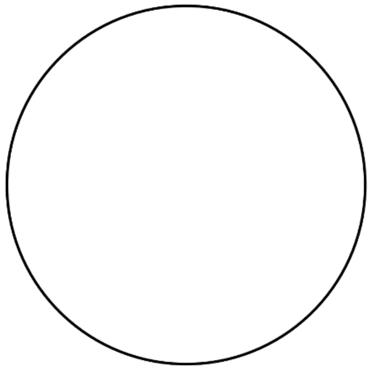


d) Se Diana comer dois dos pedaços restantes, encontre duas frações diferentes que representam a parte da pizza que Diana comeu.

e) Represente com seu material e registre no círculo abaixo as fatias comidas por Pedro e Diana. Tente descobrir quanto sobrou para Alex.



f) Como poderíamos dividir a pizza igualmente para 3 pessoas? Registre:



g) Como podemos dividir 5 pizzas para 3 pessoas?

ATIVIDADE 3 – COMPARANDO FRAÇÕES

1) Utilize as frações circulares para completar as sentenças a seguir com os sinais de $>$ (maior) ou $<$ (menor) de modo a torná-las verdadeiras.

a) $\frac{1}{3}\square\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{5}\square\frac{2}{5}$ c) $\frac{2}{10}\square\frac{9}{10}$

2) As frações do Exercício 1 possuem, todas, o mesmo denominador. O que podemos observar ao compará-las?

____

____

3) Utilize as frações circulares para completar as sentenças a seguir com os sinais de $>$ (maior) ou $<$ (menor) de modo a torná-las verdadeiras.

a) $\frac{1}{2}\square\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{3}\square\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{4}\square\frac{1}{9}$

4) As frações do Exercício 3 possuem, todas, o mesmo numerador 1 e diferentes denominadores. O que podemos observar ao compará-las?

____

____

5) A partir das conclusões anteriores, complete as sentenças a seguir com os sinais de $>$ (maior) ou $<$ (menor) de modo a torná-las verdadeiras e justifique:

a) $\frac{4}{5}\square\frac{4}{6}$ ____

b) $\frac{3}{8}\square\frac{3}{7}$ ____

c) $\frac{10}{12}\square\frac{12}{20}$ ____

d) $\frac{1}{10}\square\frac{1}{20}$ ____

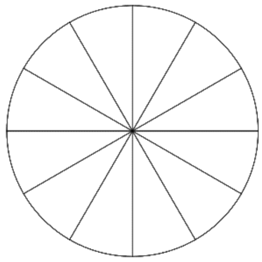
e) $\frac{1}{35}\square\frac{1}{43}$ ____

f) $\frac{1}{99}\square\frac{1}{100}$ ____

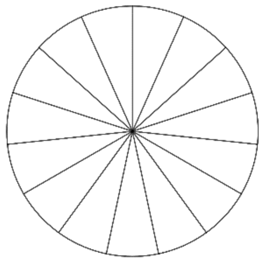
ATIVIDADE 4 – FRAÇÕES EQUIVALENTES

1) Utilize as réguas fracionárias para resolver as questões a seguir:

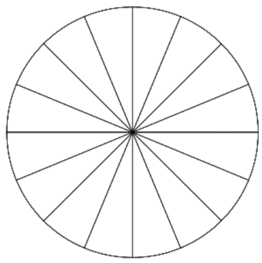
a) Como podemos obter $\frac{9}{12}$ a partir das frações coloridas?



b) Como podemos obter $\frac{3}{15}$ a partir das frações coloridas?



c) Como podemos obter $\frac{4}{16}$ a partir das frações coloridas?



2) Agora, também utilizando as réguas fracionárias, preencha os $\square$ com números de forma a tornar as igualdades verdadeiras.

a) $\frac{5}{3} = \frac{\square}{6}$

b) $\frac{2}{3} = \frac{6}{\square}$

c) $\frac{8}{12} = \frac{\square}{3}$

d) $\frac{9}{12} = \frac{3}{\square}$

e) $\frac{9}{12} = \frac{6}{\square}$

f) $\frac{6}{8} = \frac{\square}{12}$

3) Bianca, Carla e Denise são irmãos e comeram juntos uma pizza. Se Bianca comeu $\frac{3}{8}$ da pizza, Carla comeu $\frac{1}{4}$ da pizza e Denise comeu $\frac{1}{16}$ é correto afirmar que eles comeram toda a pizza? Caso tenha sobrado, qual fração da pizza sobrou?

ATIVIDADE 5 – ADIÇÃO DE FRAÇÕES

A adição e a subtração de frações podem ser realizadas utilizando as frações circulares para representar as parcelas da operação. Na adição de frações, as frações circulares correspondentes a cada parcela deverão ser colocadas lado a lado, de modo a formar parte de um círculo.

1. Posicione as peças lado a lado e, em seguida, utilize as réguas fracionárias para obter a soma como uma única fração. Coloque sua resposta na coluna *Resultado* na tabela a seguir. Anote em *Novo denominador* qual das réguas fracionárias foi utilizada.

   Em seguida, vamos calcular o *mmc dos denominadores* das parcelas da soma e comparar com o novo denominador.

Operação	Resultado	Novo denominador	mmc dos denominadores
$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=$			
$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=$			
$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=$			
$\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=$			

2. O que você pode perceber ao comparar o mmc dos denominadores das parcelas da adição com o novo denominador?

3. Utilizando a ideia de frações equivalentes, reescreva as parcelas das adições utilizando o novo denominador, ilustrando por que o resultado encontrado nos testes é verdadeiro.
   a. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=$

   b. $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=$

   c. $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=$

   d. $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=$

4. Utilizando frações equivalentes e o mmc para obter o novo denominador, realize as seguintes operações:

    a. $\frac{3}{10} + \frac{4}{5} =$

    b. $\frac{1}{8} + \frac{1}{7} =$

    c. $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} =$

ATIVIDADE 6 – SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES

A adição e a subtração de frações podem ser realizadas utilizando as frações circulares para representar as parcelas da operação. Na subtração, a fração circular correspondente ao segundo termo da operação (subtraendo) deve ser sobreposta ao primeiro termo (minuendo). A região que não foi sobreposta representa o resultado da subtração (diferença).

1. Posicione o subtraendo sobre o minuendo e, em seguida, utilize as réguas fracionárias para obter a diferença como uma única fração. Coloque sua resposta na coluna *Resultado* na tabela a seguir. Anote em *Novo denominador* qual das réguas fracionárias foi utilizada.

   Em seguida, vamos calcular o *mmc dos denominadores* das parcelas de cada subtração e comparar com o novo denominador.

Operação	Resultado	Novo denominador	mmc dos denominadores
$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} =$			
$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} =$			
$\frac{2}{3} - \frac{1}{5} =$			
$\frac{3}{4} - \frac{1}{3} =$			

2. O que você pode perceber ao comparar o mmc dos denominadores das parcelas da subtração com o novo denominador?

3. Utilizando a ideia de frações equivalentes, reescreva as parcelas de cada uma das subtrações utilizando o novo denominador, ilustrando por que o resultado encontrado nos testes é verdadeiro.
   a. $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} =$
   b. $\frac{1}{2} - \frac{1}{8} =$
   c. $\frac{2}{3} - \frac{1}{5} =$
   d. $\frac{3}{4} - \frac{1}{3} =$

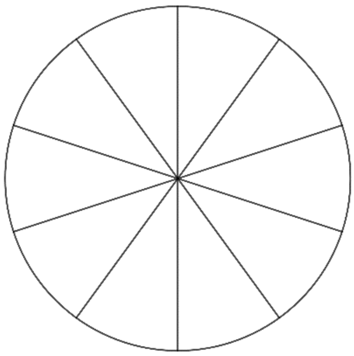
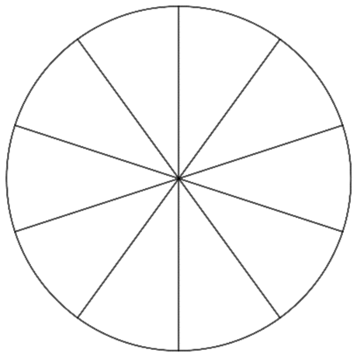
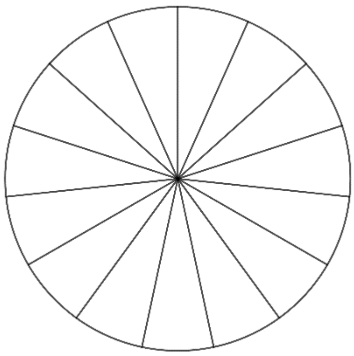
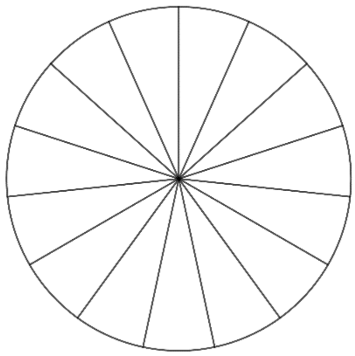
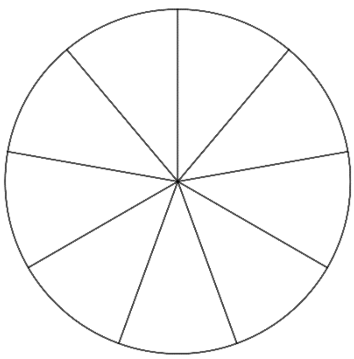
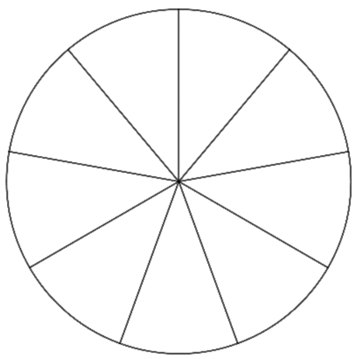
4. Utilizando frações equivalentes e o mmc para obter o novo denominador, realize as seguintes operações:
   a. $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} =$

   b. $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} =$

   c. $2 - \frac{1}{2} =$

ATIVIDADE 7 – MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES

Multiplicar frações pode ser compreendido como o ato de determinar parte de uma fração. Por exemplo: calcular $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10}$ pode ser interpretado como determinar $\frac{1}{2}$ de $\frac{4}{10}$ ou seja, devemos dividir $\frac{4}{10}$ em duas partes e pegar uma delas.

Pinte $\frac{4}{10}$ 	Pinte $\frac{1}{2}$ de $\frac{4}{10}$ 
Pinte $\frac{12}{15}$ 	Pinte $\frac{1}{3}$ de $\frac{12}{15}$ 
Pinte $\frac{6}{9}$ 	Pinte $\frac{2}{3}$ de $\frac{6}{9}$ 

Nos casos acima, conseguimos dividir o numerador da segunda fração pelo denominador da primeira. Entretanto, nem sempre isso acontece. Por exemplo: quanto é $\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}$?

Neste caso, vamos utilizar as réguas de frações para dividir $\frac{2}{5}$ em 3 partes iguais. Com qual das réguas podemos dividir dessa forma? Qual o resultado obtido?

Utilizando a régua mais apropriada, determine:

a) $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$

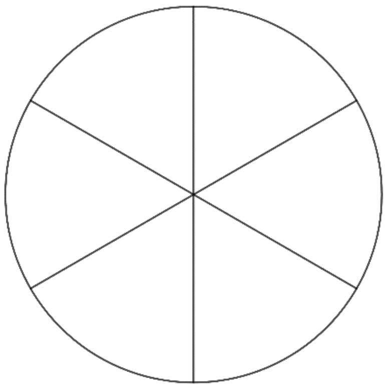
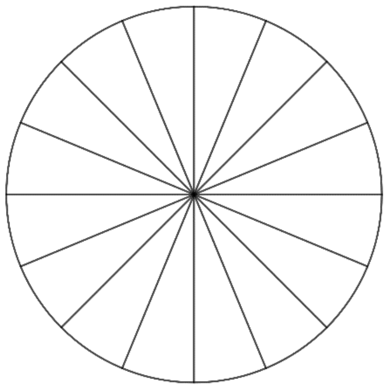
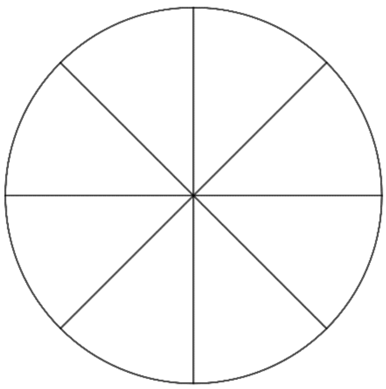
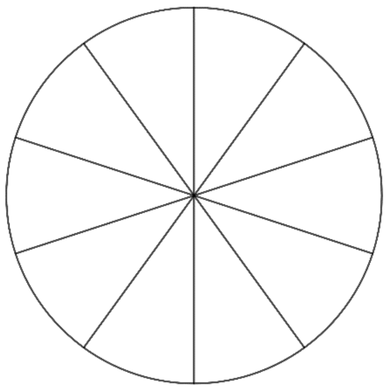
b) $\frac{3}{8} \times \frac{1}{2}$

c) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$

d) $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$

ATIVIDADE 8 – DIVISÃO DE FRAÇÕES

Dividir frações pode ser compreendido como o ato de determinar quantas de uma fração são necessárias para formar a outra. Por exemplo: calcular $\frac{1}{2} \div \frac{1}{6}$ significa determinar quantas vezes $\frac{1}{6}$ cabe em $\frac{1}{2}$ ou seja.

Pinte $\frac{1}{2}$ utilizando $\frac{1}{6}$  Portanto, $\frac{1}{2} \div \frac{1}{6} =$	Pinte $\frac{1}{4}$ utilizando $\frac{1}{16}$  Portanto, $\frac{1}{4} \div \frac{1}{16} =$
Pinte $\frac{3}{4}$ utilizando $\frac{1}{8}$  Portanto, $\frac{3}{4} \div \frac{1}{8} =$	Pinte $\frac{2}{5}$ utilizando $\frac{1}{10}$  Portanto, $\frac{2}{5} \div \frac{1}{10} =$

Nos casos acima, o denominador da segunda fração é um múltiplo do denominador da primeira, bem como seus numeradores, de forma que será necessária uma quantidade inteira da segunda fração para formar a primeira. Note que:

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{6} = \frac{3}{6} \div \frac{1}{6} = 3$$

Agora, considere a seguinte divisão: $\frac{1}{3} \div \frac{2}{3}$. Ou seja, quantos $\frac{2}{3}$ são necessários para formar $\frac{1}{3}$?

Vamos utilizar a frações equivalentes para calcular os casos em que não estamos trabalhando com múltiplos. Por exemplo: quanto é $\frac{1}{3} \div \frac{2}{5}$?

Tente sobrepor a fração circular $\frac{1}{3}$ com duas frações circulares de $\frac{1}{5}$. O que aconteceu?

____

Tente sobrepor a fração circular $\frac{1}{3}$ com quatro frações circulares de $\frac{1}{5}$. O que aconteceu?

____

Isto quer dizer que não cabe uma quantidade inteira de $\frac{2}{5}$ em $\frac{1}{3}$. Vamos precisar determinar frações equivalentes com mesmo denominador. Que frações equivalentes a $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{3}$ têm mesmo denominador?

Portanto, $\frac{1}{3} \div \frac{2}{5} =$

Resolva, utilizando frações equivalentes:

a) $\frac{4}{5} \div \frac{2}{3} =$

b) $\frac{3}{8} \div \frac{1}{2} =$

c) $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3}$

d) $\frac{1}{3} \div \frac{2}{3}$

APÊNDICE E – ANÁLISE A POSTERIORE

1. Você já trabalhou com material concreto anteriormente? Se sim, foi relacionado a que conteúdo?

___

___

___

2. Como era sua relação com frações antes das atividades? E agora? Mudou alguma coisa?

___

___

___

3. Você considerou que valeu a pena esse tipo de atividade? Foi legal? Você aprendeu?

___

___

___

4. O que você mais gostou?

___

___

___

5. O que poderia melhorar?

___

___

___

6. Deixe um comentário, se quiser:

___

___

___

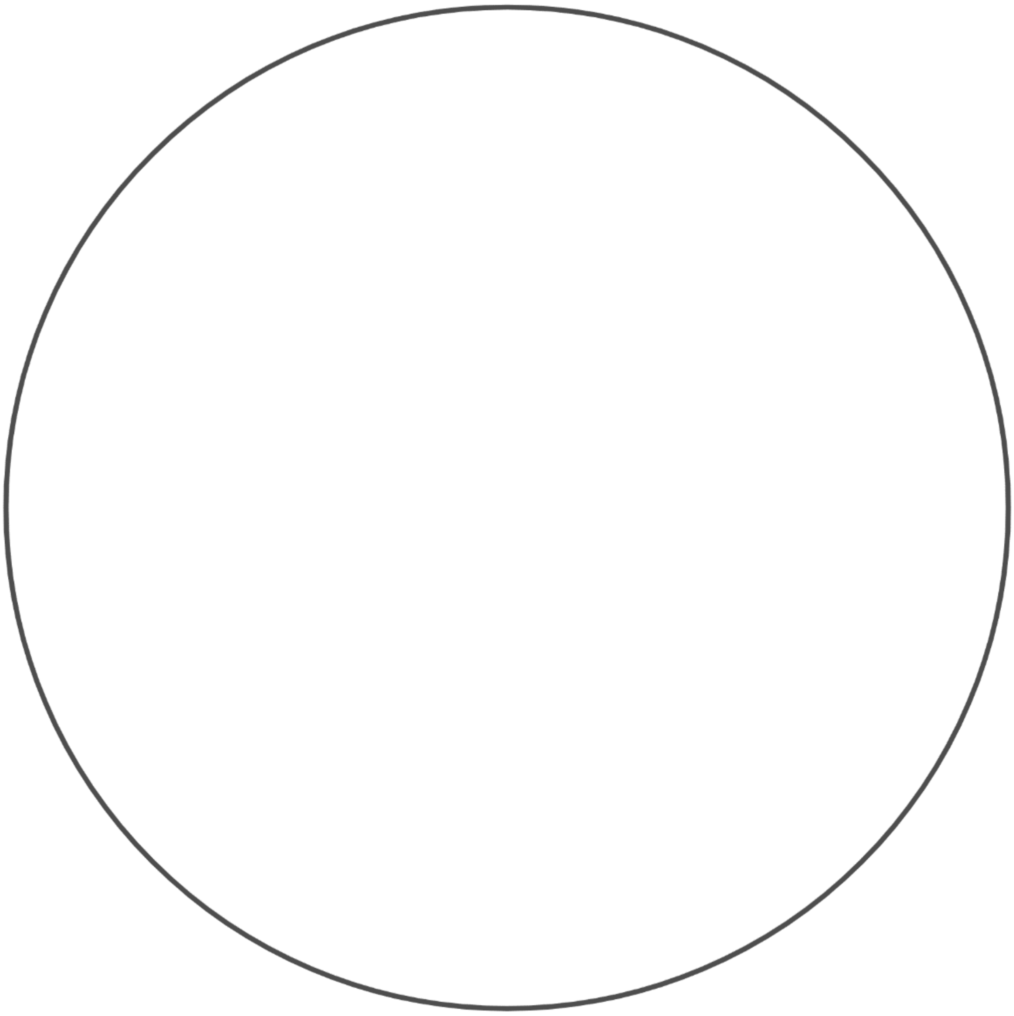
Após tanto trabalho com as frações circulares, vamos colocar mãos à obra!!!

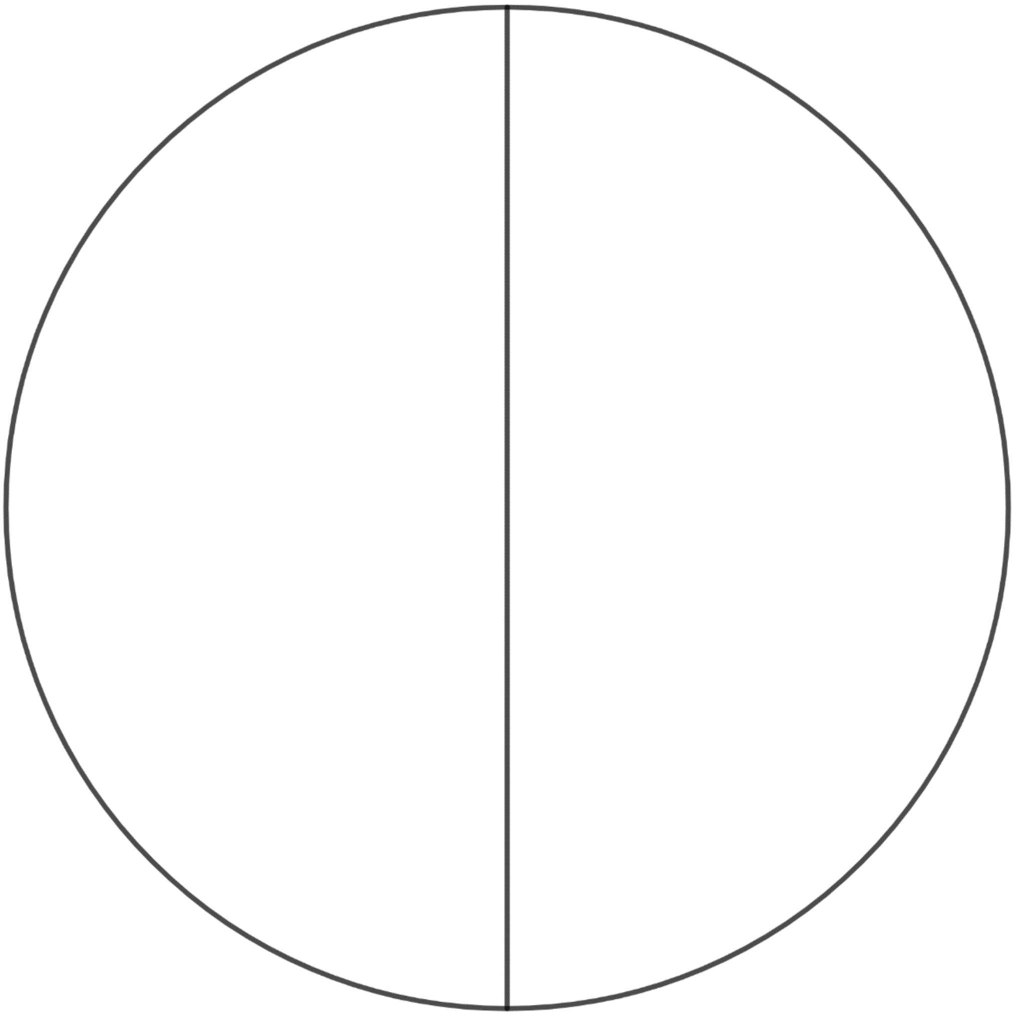
(OBMEP 2013, 1ª Fase - Nível 1 - Questão 15) Ângela tem uma caneca com capacidade para $\frac{2}{3}$L de água. Que fração dessa caneca ela encherá com $\frac{1}{2}$L de água?

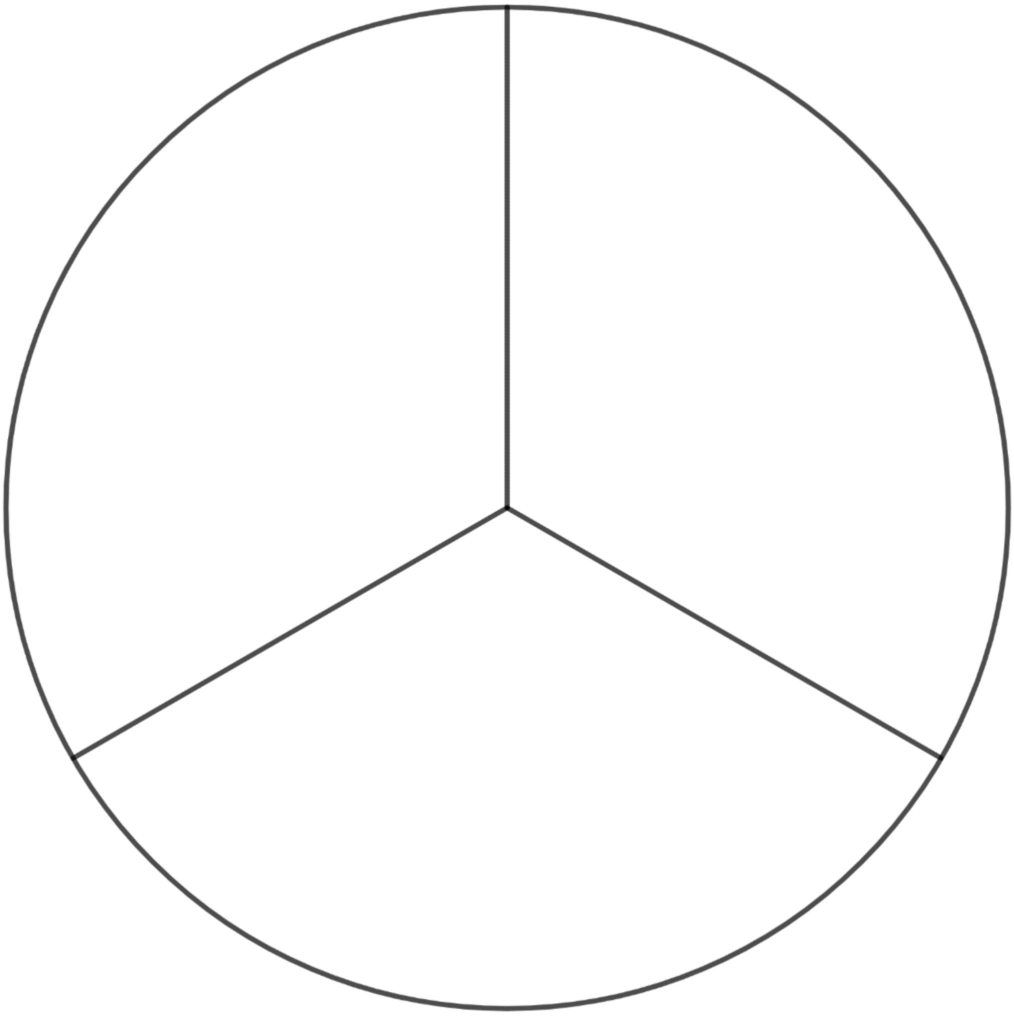
(a) $\frac{7}{12}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{5}{6}$ (e) $\frac{4}{3}$

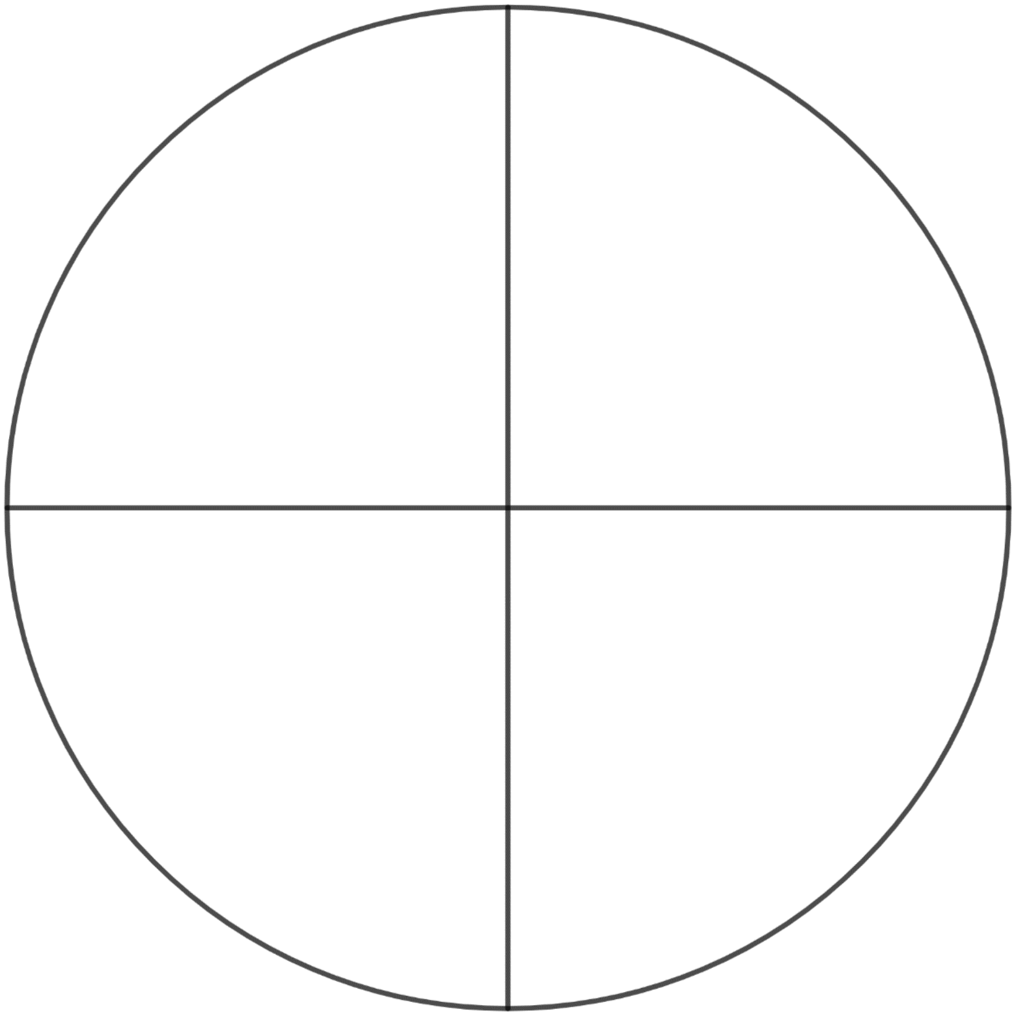
(OBMEP 2005, 1ª Fase - Nível 2 - Questão 18) Dois meses atrás o prefeito de uma cidade iniciou a construção de uma nova escola. No primeiro mês foi feito 1/3 da obra e no segundo mês mais 1/3 do que faltava. A que fração corresponde a parte ainda não construída da escola?

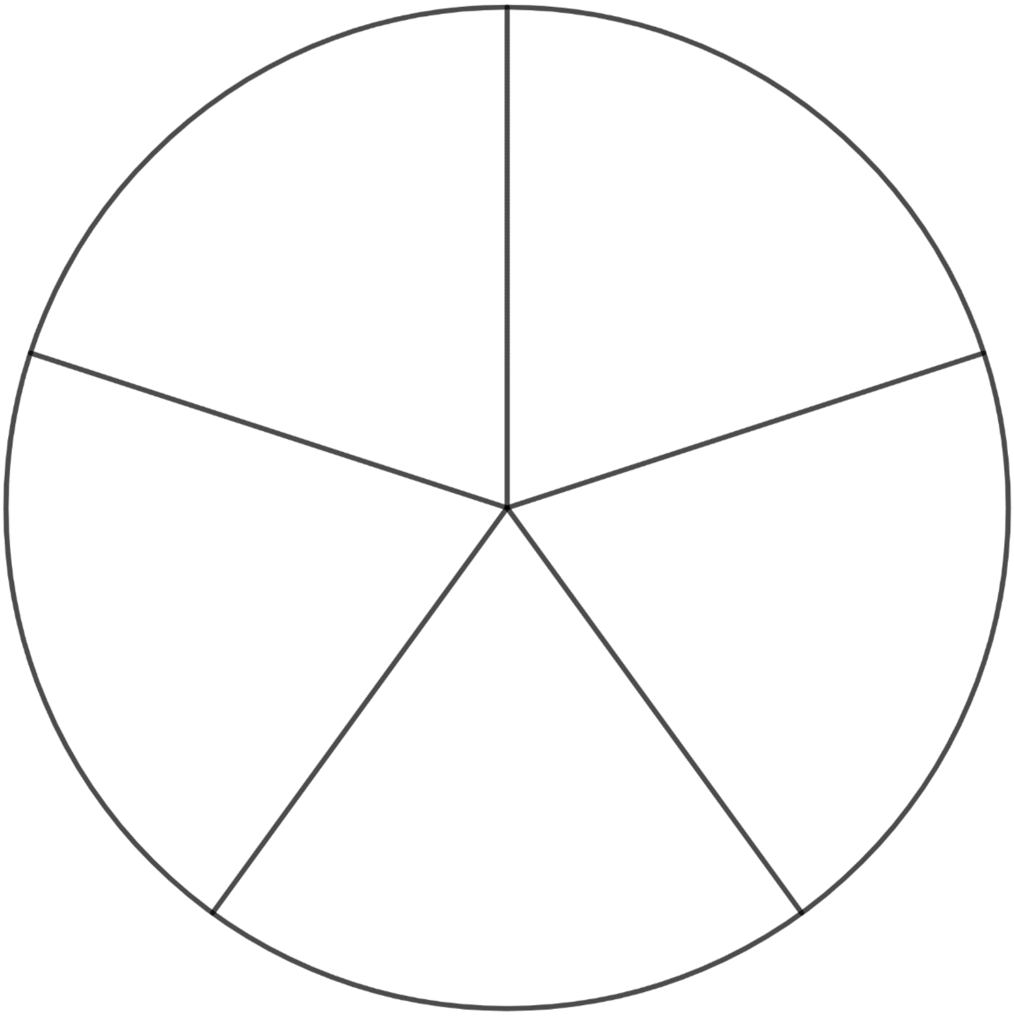
APÊNDICE F – MOLDES DAS FRAÇÕES CIRCULARES E RÉGUAS FRACIONÁRIAS

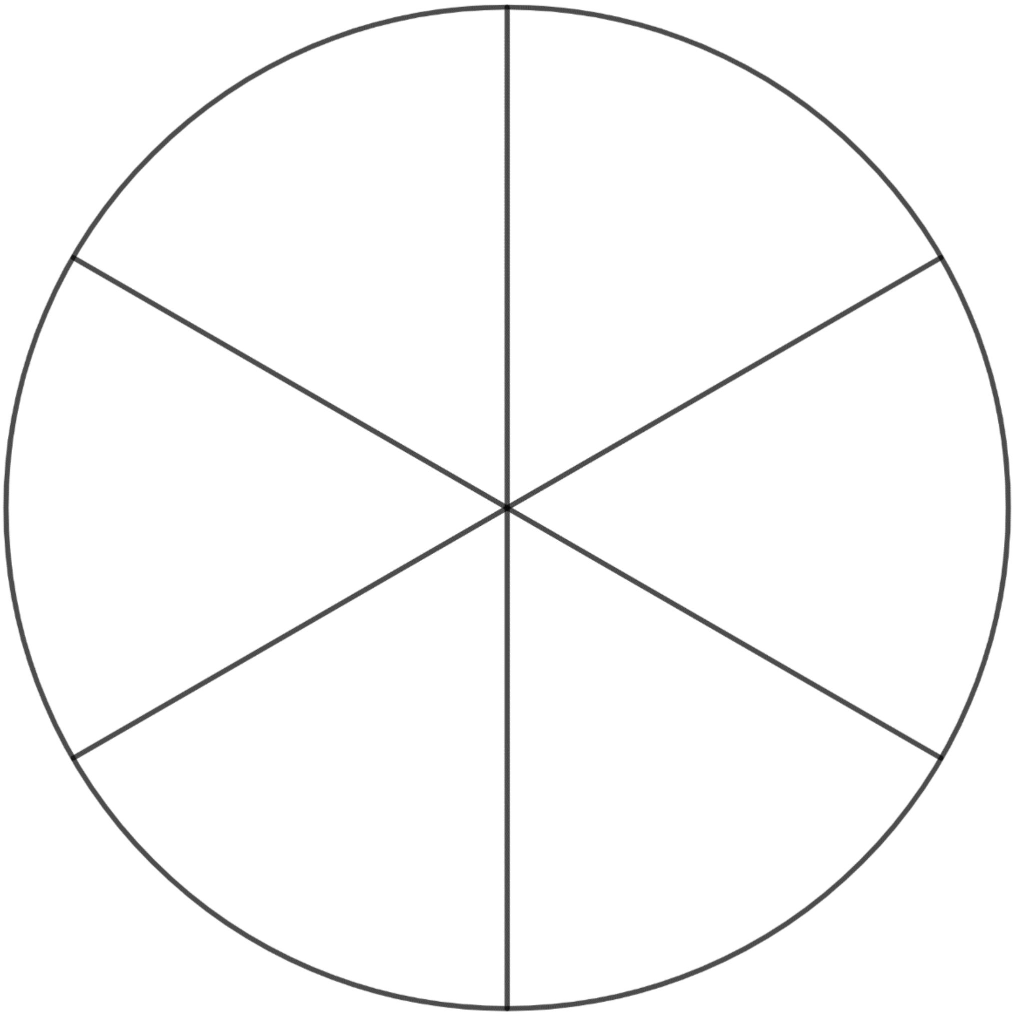


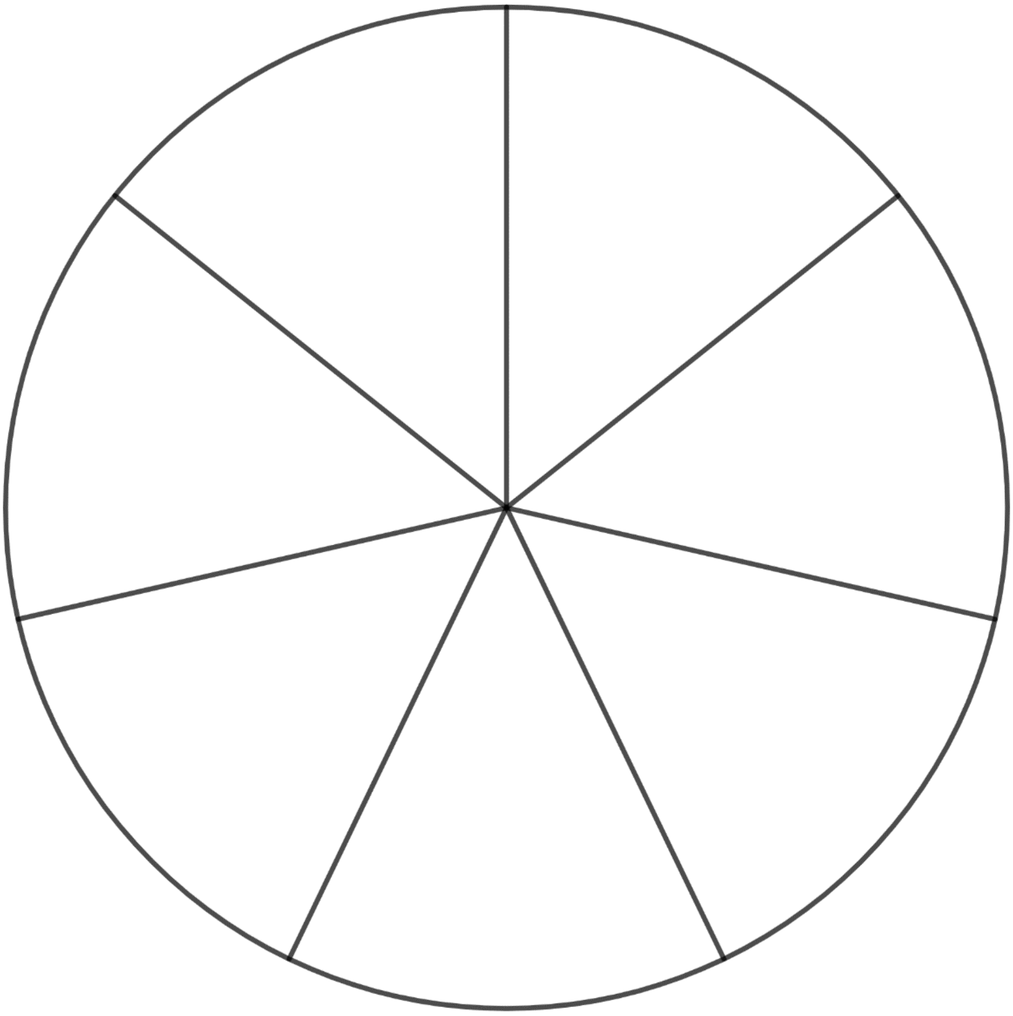


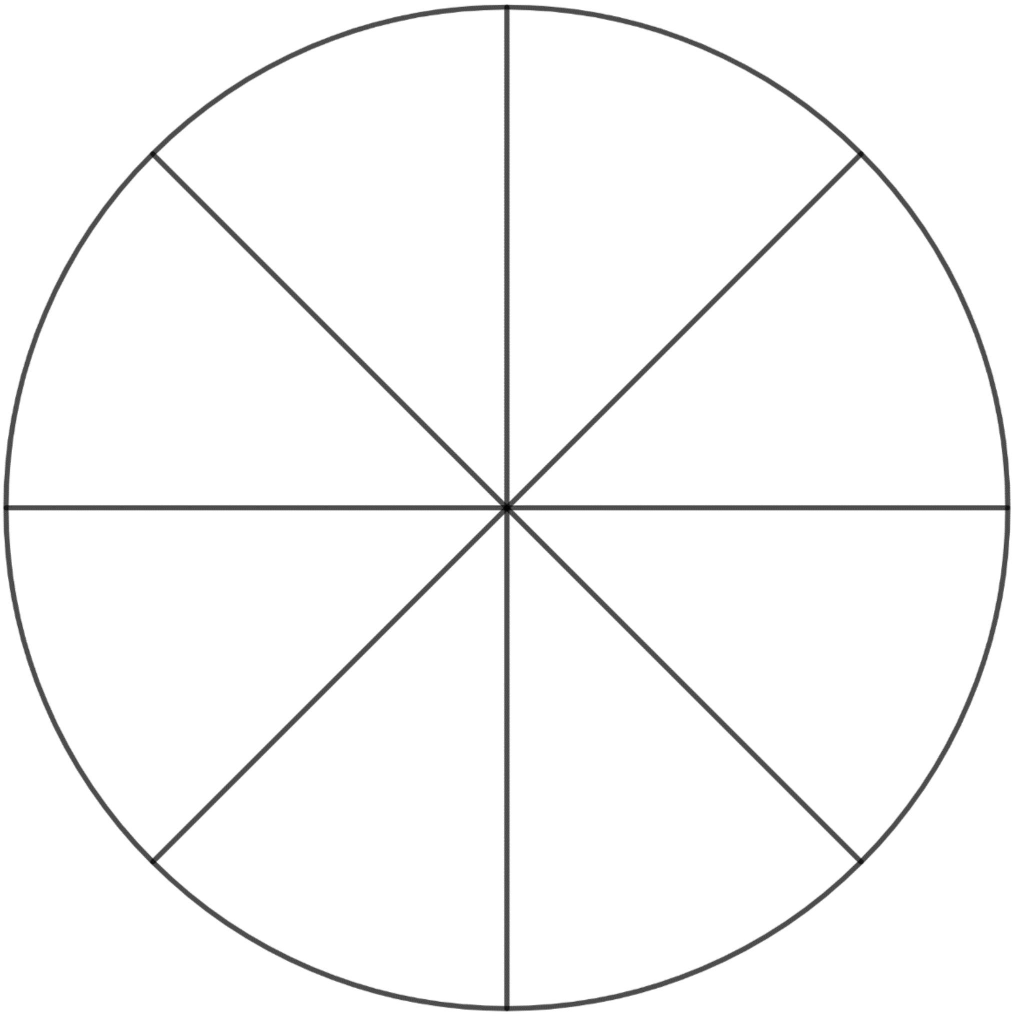


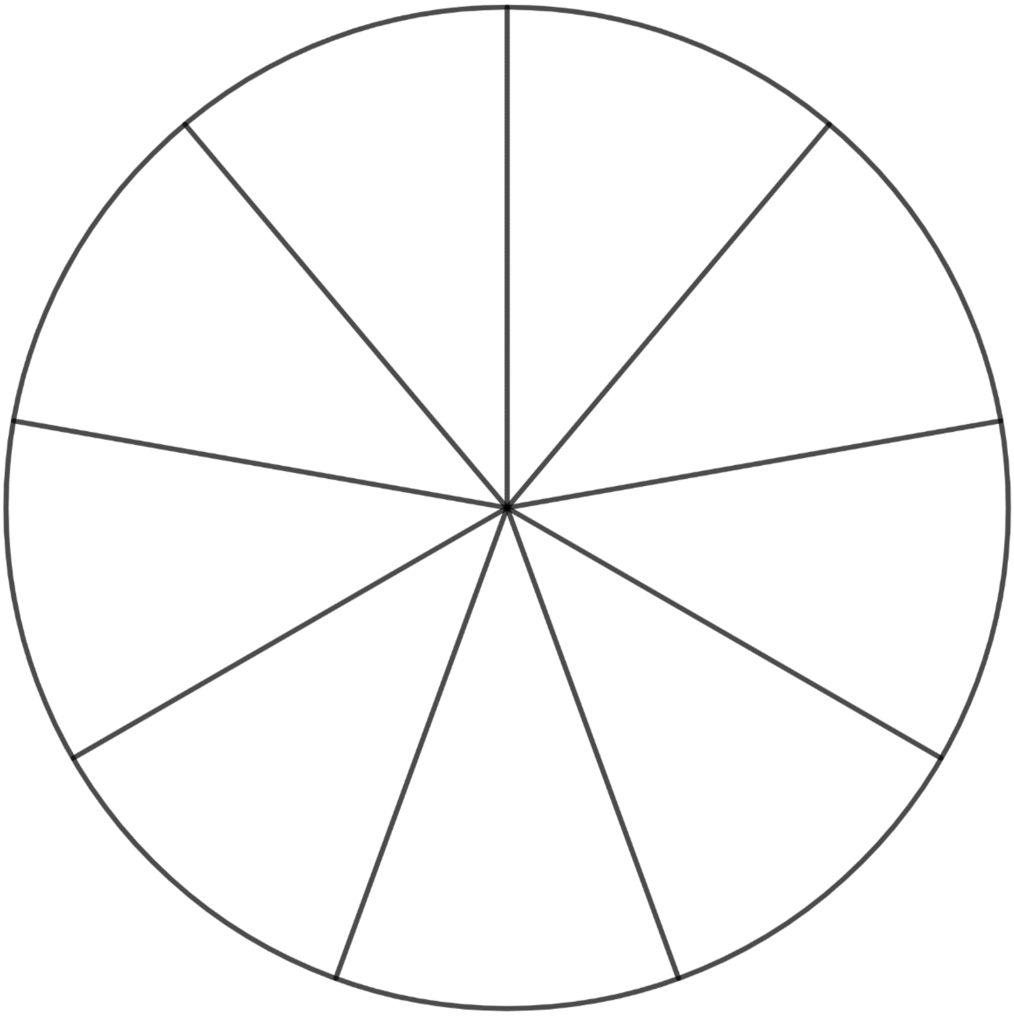


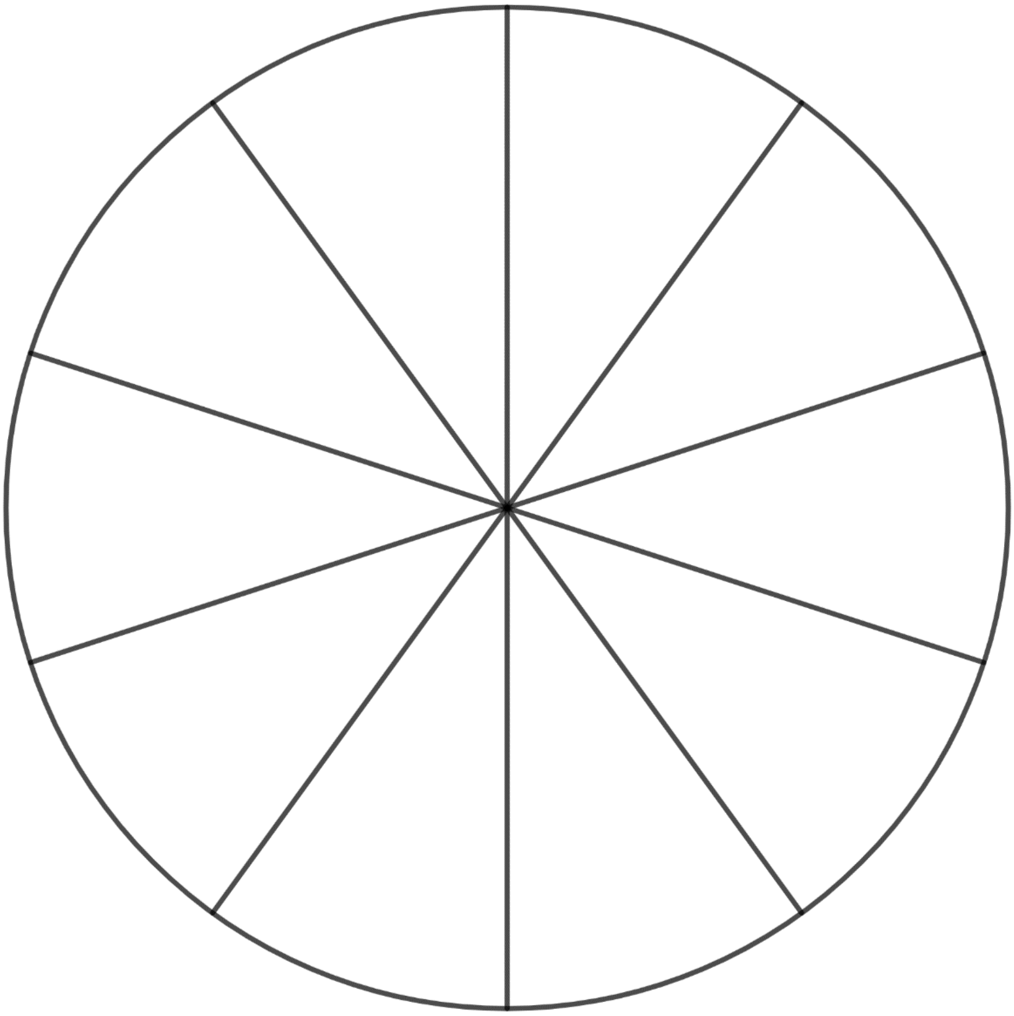


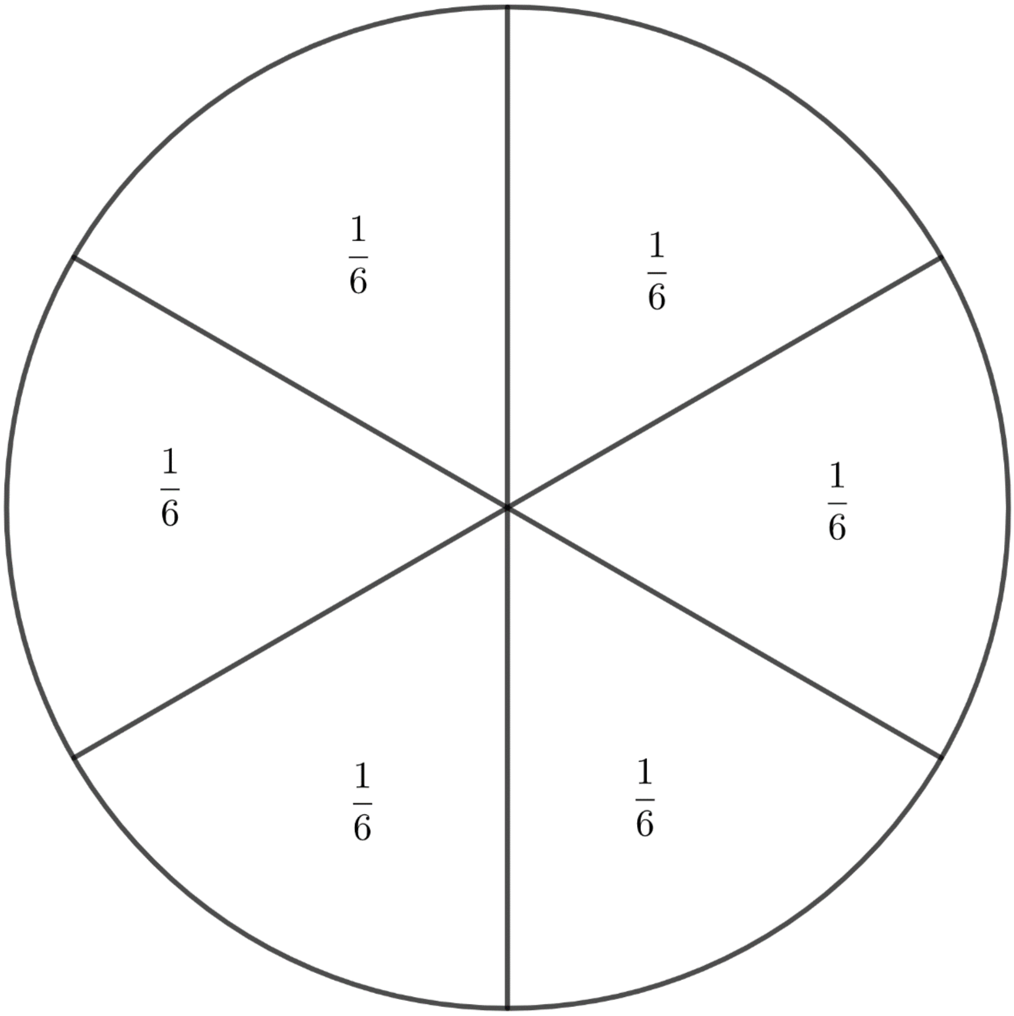




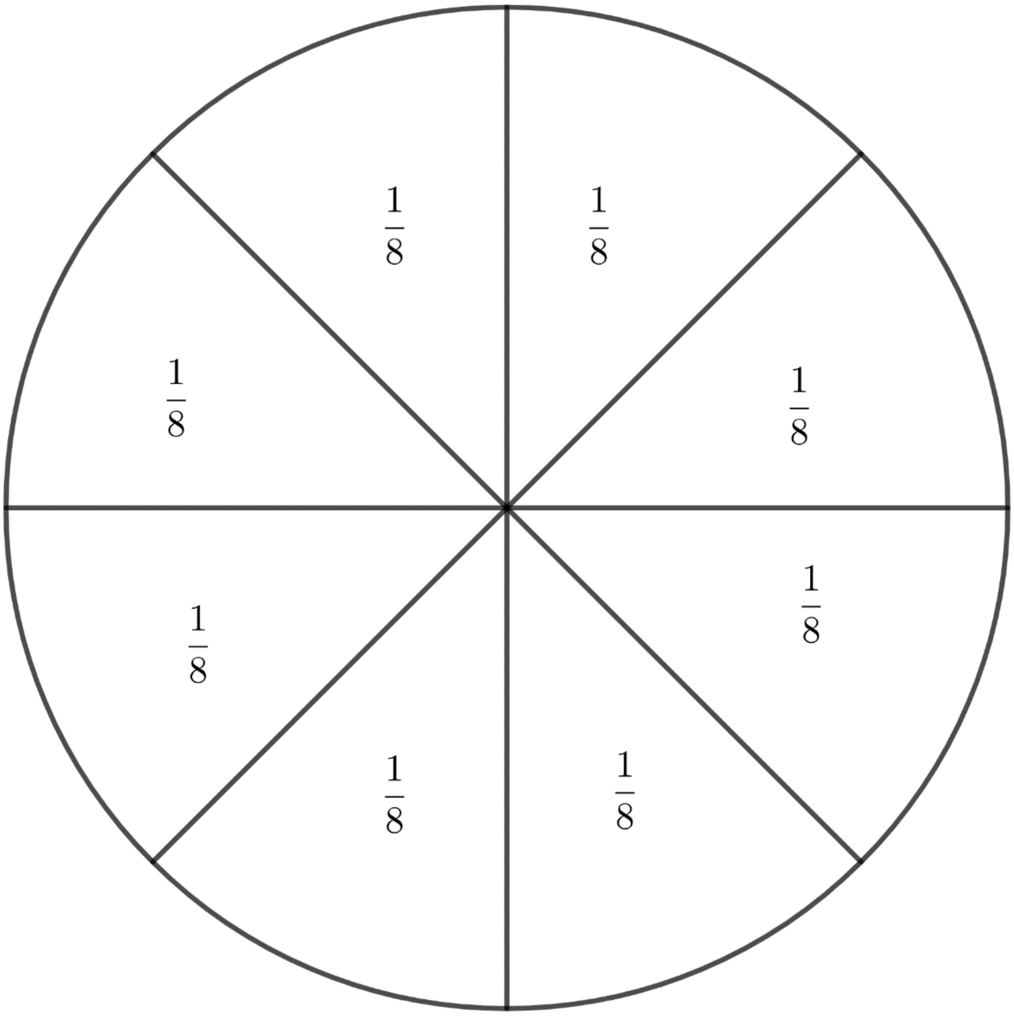


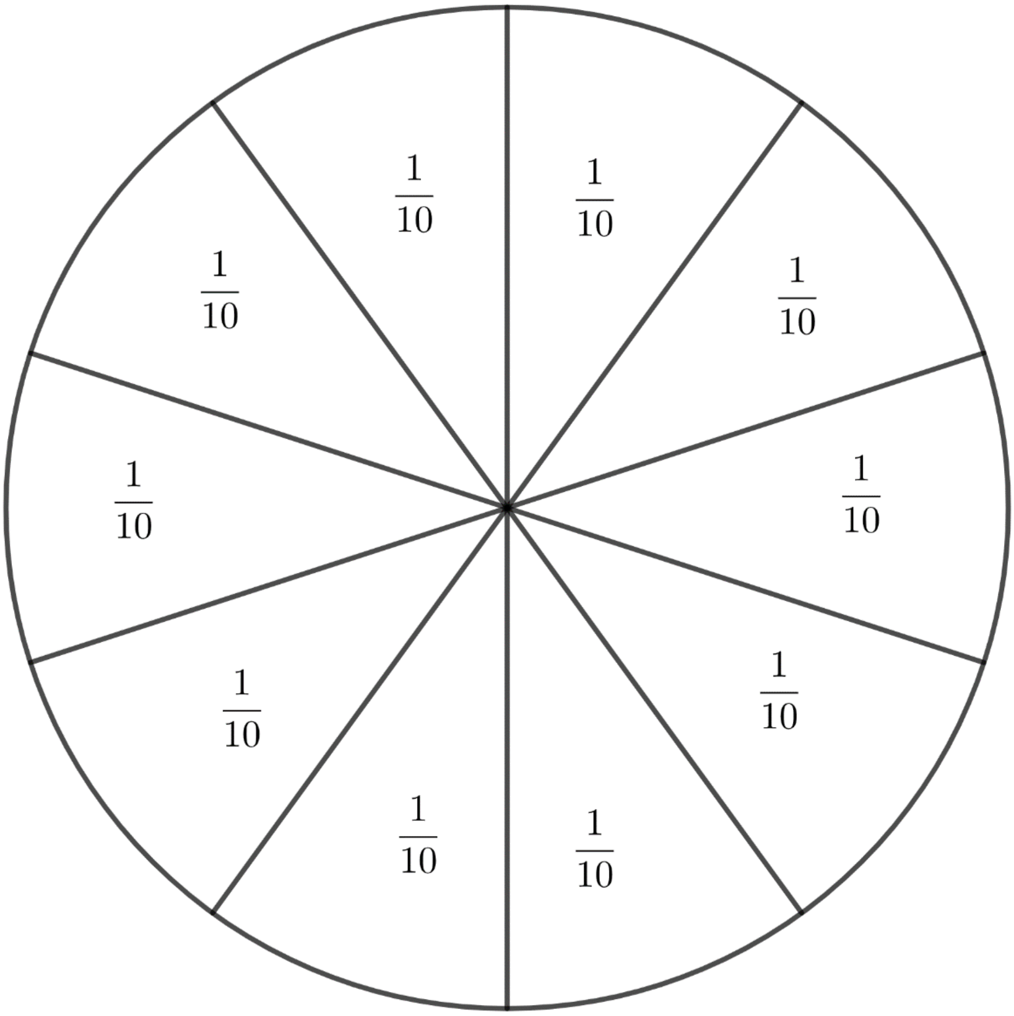


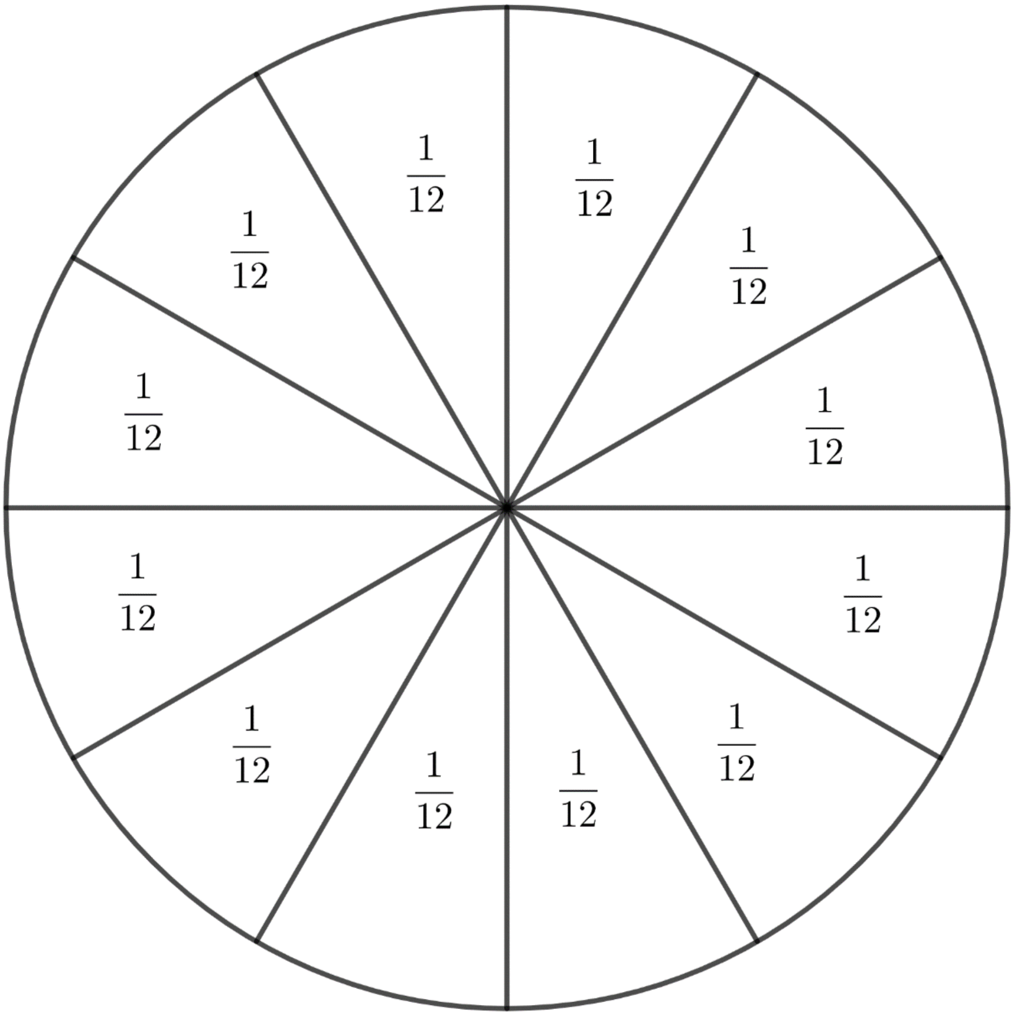




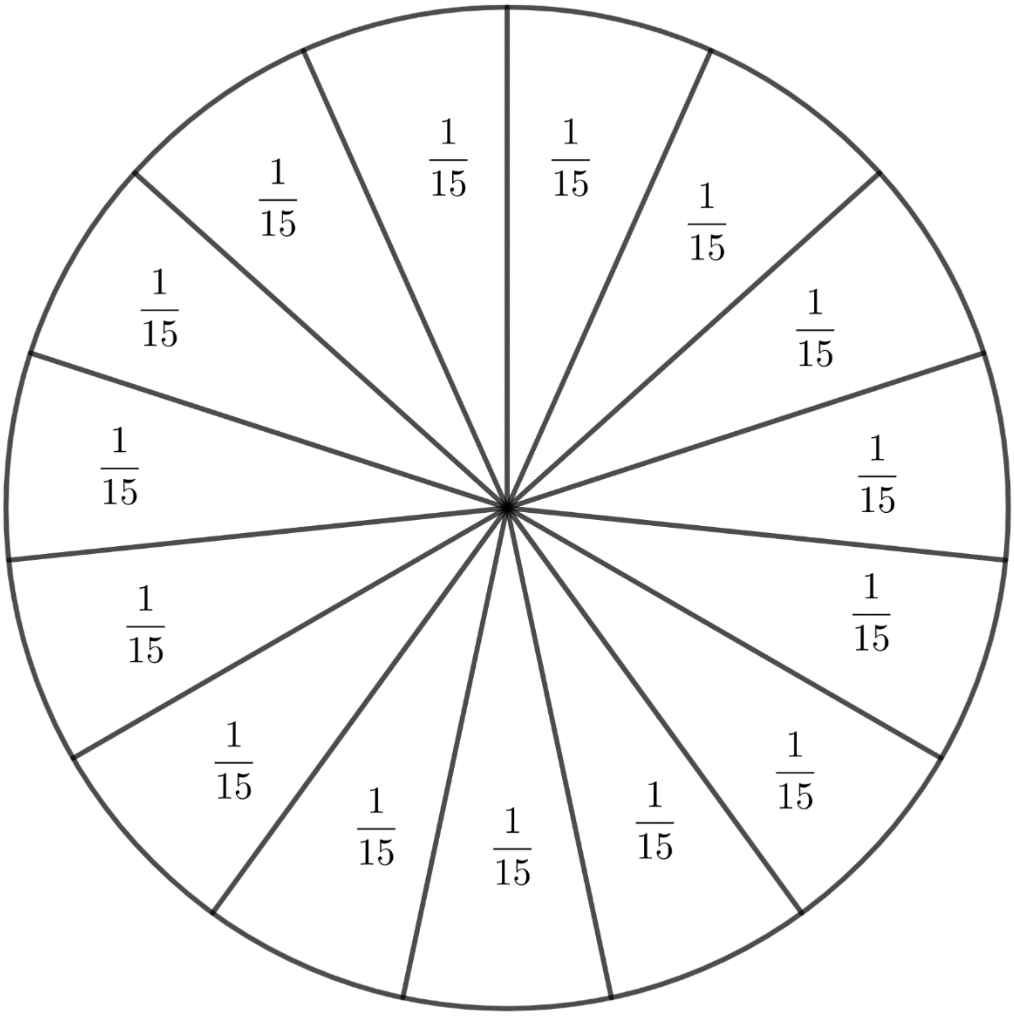
$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{6}$


$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{8}$

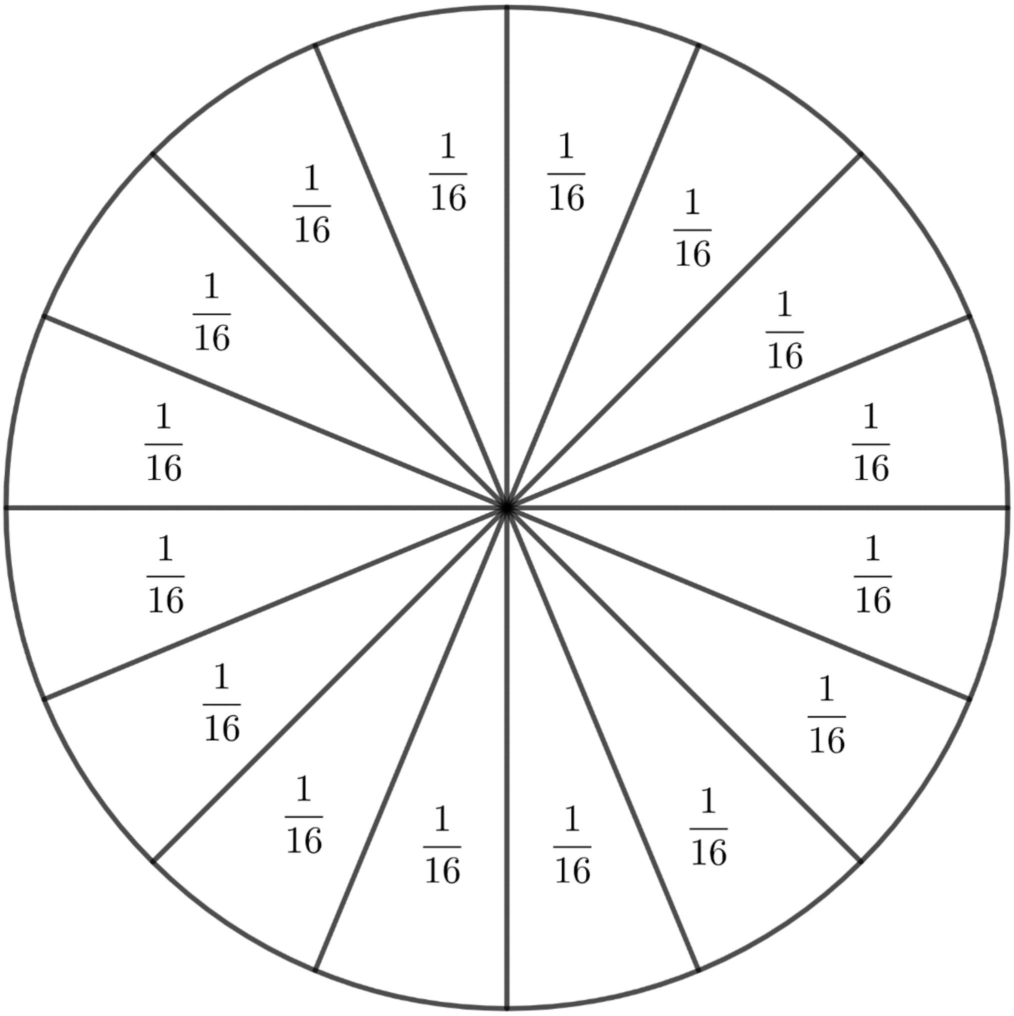

$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{10}$



$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{12}$



1/15
1/15
1/15
1/15
1/15
1/15
1/15
1/15
1/15
1/15
1/15
1/15
1/15
1/15
1/15


$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{16}$