UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Joacildo Pimentel Batista

O EMPREGO DA METODOLOGIA ATIVA PEER INSTRUCTION ALIADA AO GEOGEBRA NO ENSINO DA GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Santa Maria, RS
2024

Joacildo Pimentel Batista

O EMPREGO DA METODOLOGIA ATIVA PEER INSTRUCTION ALIADA AO GEOGEBRA NO ENSINO DA GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Orientadora: Profª. Drª. Claudia Candida Pansonato

Santa Maria, RS
2024

Batista, Joacildo Pimentel
O EMPREGO DA METODOLOGIA ATIVA PEER INSTRUCTION ALIADA AO GEOGEBRA NO ENSINO DA GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA / Joacildo Pimentel Batista.- 2024.
97 p.; 30 cm

Orientadora: Claudia Candida Pansonato
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2024

1. Peer Instruction 2. Metodologias Ativas 3. Geogebra 4. Geometria I. Candida Pansonato, Claudia II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, JOACILDO PIMENTEL BATISTA, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

Joacildo Pimentel Batista

O EMPREGO DA METODOLOGIA ATIVA PEER INSTRUCTION ALIADA AO GEOGEBRA NO ENSINO DA GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em 27 de março de 2024:

CLAUDIA CANDIDA PANSONATO, Drª (UFSM)
(Presidente/Orientadora)

ANA MARLI BULEGON, Drª (UFN)

JANICE RACHELLLI, Drª (UFSM)

Santa Maria, RS
2024

DEDICATÓRIA

Com muito amor e gratidão dedico a minha esposa Dilce e aos meus filhos Fábio, Fabiana e Cecília.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me permito chegar até aqui.

Agradeço aos meus pais por me trazerem a este mundo.

Agradeço a minha esposa Dilce e aos meus filhos Fábio, Fabiana e Cecília pela compreensão, carinho e apoio incondicional durante as longas jornadas que estive longe deles para dedicar-me a concretização deste sonho.

Agradeço a minha orientadora, professora Claudia, pelas sábias orientações e por mostrar-me os melhores caminhos a seguir.

Agradeço aos meus estimados professores Edson, Pedro, Claudia, Luciane, Lazarin, Tiago e Carmem pelos sábios ensinamentos e estímulos.

Agradeço aos professores membros da banca, por aceitarem o convite e pelas orientações que levaram ao aperfeiçoamento deste trabalho.

Agradeço ao Sr Coronel Leconte, Diretor do Colégio Militar de Santa Maria no ano de 2022, por permitir que eu desenvolvesse este trabalho neste renomado estabelecimento de ensino.

Por fim, agradeço aos meus queridos alunos da Turma 904, ano de 2022, pela participação e colaboração.

RESUMO
O EMPREGO DA METODOLOGIA ATIVA PEER INSTRUCTION ALIADA AO GEOGEBRA NO ENSINO DA GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

AUTOR: Joacildo Pimentel Batista
ORIENTADORA: Claudia Candida Pansonato

Neste trabalho tivemos por objetivo avaliar a viabilidade do emprego da metodologia ativa Peer Instruction aliada ao GeoGebra no ensino de alguns tópicos de Geometria do Ensino Fundamental. Desenvolvemos a nossa pesquisa em uma turma do 9º Ano do Colégio Militar de Santa Maria, composta por 30 alunos, durante 3 semanas, totalizando 15 horas/aula e, ao final, aplicamos uma avalição parcial (1ª AP2). As atividades foram desenvolvidas empregando Geometria plana, com os tópicos Teorema de Tales e Teorema das Bissetrizes. Utilizamos o GeoGebra para demonstrar o Teorema das Bissetrizes e observamos que o emprego desta ferramenta em sala de aula facilitou a compreensão mais aprofundada dos teoremas, favorecendo a aprendizagem e, ainda, adotamos a ferramenta Moodle para dar suporte ao estudo fora do ambiente escolar, dada a necessidade do estudo prévio para o desenvolvimento das atividades previstas em sala de aula. Buscamos nos apoiar na Teoria da Aprendizagem Significativa para justificar a nossa proposta. Fizemos uma busca no banco de dissertações do PROFMAT por dissertações que tivessem alguma conexão com a nossa proposta objetivando verificar o que foi feito até então, tendo sido encontrado apenas um trabalho que abordasse a Metodologia Ativa Peer Instruction. Relatamos o que foi vivido em sala e apresentamos os resultados dos testes conceituais, das pesquisas de opinião dos alunos e da avaliação parcial aplicada ao final dos trabalhos em sala de aula. Os resultados foram muito satisfatórios e animadores, demonstraram a validade e a efetividade da metodologia aplicada e nos permitiram concluir que o uso da metodologia ativa Peer Instruction é adequado para o Ensino Fundamental sobretudo quando aliado ao uso o GeoGebra.

Palavras-chave: Peer Instruction, Metodologias Ativas, GeoGebra, Geometria

ABSTRACT

THE USE OD ACTIVE METHODOLOGY PEER INSTRUCTION COMBINED WITH GEOGEBRA IN TEACHING GEOMETRY IN BASIC EDUCATION

AUTHOR: Joacildo Pimentel Batista
ADVISOR: Claudia Candido Pansonato

In this research, our objective was to evaluate the feasibility of employing the active methodology Peer Instruction combined with GeoGebra in teaching certain topics of Geometry in Elementary Education. We conducted out research with a class oh 9^{th} grade students at Colégio Militar de Santa Maria, consisting of 30 students, over a period of 3 weeks, totaling 15 class hours. At the end, we administered a partial assessment (1^{st} AP2). The activities focused on plane geometry, specifically covering the topics of the Thales' Theorem and the Angle Bisector Theorem. We utilized GeoGebra to demonstrate the angle Bisector Theorem and observed that using this tool in the classroom facilitated a deeper understanding of the theorems, promoting learning. Additionally, we adopted the Moodel platform to support studying outside of the school environment, given the necessity for preparatory study to carry out the planned activities in the classroom. We grounded our approach in the Theory of Meaningful Learning to justify our proposal. We conducted a search in the PROFMAT dissertations database for dissertations related to our proposal to verify existing work, finding only one study that addressed the active Methodology Peer Instruction. We report on the classroom experiences and present the results of conceptual tests, student opinion surveys, and the final partial assessment administered at the end of the classroom activities. The results were very satisfactory and encouraging, demonstrating the validity and effectiveness of the applied methodology and leading us to conclude that the use of active methodology peer instruction is suitable for elementary education, particularly when combined with GeoGebra.

Keywords: Peer Instruction, Active Methodologies, GeoGebra, Geometry.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PED	Plano de Execução Didática
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PSD	Plano de Sequência Didática
TIC	Tecnologia da Informação e da Comunicação
UFSM	Universidade Federal de Santa Maria

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Um dos grandes problemas pedagógicos é a transferência da disciplina formal e o aprendizado. Em seu livro intitulado Pensamento e Linguagem, Vygotsky nos esclarece que “A experiência prática mostra também que é impossível e estéril ensinar os conceitos de uma forma direta. Um professor que tenta conseguir isto habitualmente não consegue da criança mais do que um verbalismo oco.” (VYGOTYSKY, 2007, p. 90).

A capacidade de aprender novos conceitos evolui concomitantemente com o amadurecimento do cérebro do indivíduo. À medida em que se obtém novas experiências e se convive com indivíduos diferentes, a capacidade de interpretação, abstração e entendimento de determinados conceitos vão evoluindo.

Devemos considerar as fases psicoemocionais do aluno de tal modo que, o professor, ao planejar sua aula, deve adotar técnicas adequadas a cada idade.

É fato que, ao estudarmos as teorias de Vygotsky, o professor deixa de ser o centro no processo ensino-aprendizagem, transferindo para o aluno a responsabilidade e o protagonismo na construção do seu conhecimento, contudo, o papel do professor em sala de aula não é diminuído, apenas muda de posição, passando a ser o mediador decisivo e muito relevante em todo o processo.

Considerando este fato, uma das estratégias de ensino, que pode favorecer o aprendizado, são as metodologias ativas, que buscam dar significado ao que é estudado em sala de aula, favorecendo a construção do conhecimento pelos alunos, oportunizando um momento de aprendizagem vivo e significativo diante de um contexto de incertezas face aos conhecimentos anteriores não apreendidos, dando ao aluno a segurança para explorar novos mundos do vasto universo matemático.

As Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) também podem ser ferramentas poderosas, auxiliando o aluno a pôr o pensamento em ação, conectando o espaço e as formas às suas propriedades. Vários estudiosos da área da educação recomendam o uso das TICs em sala de aula.

De acordo com Lamas e Mendes

> Desde os estudos iniciais, é interessante que os alunos mantenham contato com as máquinas computadorizadas, tanto no âmbito do passatempo quanto no desenvolvimento das atividades escolares, desde que as ações pedagógicas estejam relacionadas a situações de experimento, interpretação, indução, visualização, generalização e demonstração. Com isso o professor pode fornecer atividades com dados decorrentes de situações reais, que auxiliam na construção do conhecimento e na percepção de regularidades. (LAMAS; MENDES, 2017, p. 16)

E, por fim, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) preconiza o uso das tecnologias da informação, mas como uma das competências gerais básicas, como forma de articular a construção de conhecimentos, buscando o desenvolvimento de habilidades.

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2018, p. 10)

A partir destas reflexões, percebemos que uma possibilidade de superar os desafios enfrentados em sala de aula, de tal forma que consigamos envolver o aluno e tornar o ambiente da sala de aula mais atrativo e motivador é empregando alguma metodologia ativa aliada as TICs.

Da minha prática em sala de aula como professor do ensino fundamental, percebo que a geometria é temida por alguns professores e pela maioria dos alunos. Embasando esta afirmação a Professora Ana Regina Pavanello, no artigo intitulado “O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências”, nos relata que

> O gradual abandono do ensino da geometria, verificado nestas últimas décadas, no Brasil, é um fato que preocupa bastante os educadores matemáticos brasileiros e que, embora reflita uma tendência geral, é mais evidente nas escolas públicas, principalmente após a promulgação da Lei 5692/71.
> [...] muitos professores de matemática, sentindo-se inseguros para trabalhar com geometria, deixassem de inclui-la na sua programação. (PAVANELLO, 1993, p.7).

Partindo desta percepção e amparados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) foi que escolhemos desenvolver nossa proposta no ensino da geometria. Nesse sentido, o objetivo desta pesquisa é avaliar a viabilidade do emprego da metodologia ativa Peer Instruction aliada ao GeoGebra no ensino de alguns tópicos de Geometria numa turma do 9º ano do Colégio Militar de Santa Maria.

Cabe observar que, embora o Teorema das bissetrizes não esteja explicitado na BNCC, nós o trabalhamos por fazer parte da sequência didática do 9º Ano, do Colégio Militar de Santa Maria. Além disso, acreditamos que este teorema se constitui numa importante aplicação do Teorema de Tales e a sua demonstração implica em diversos outros temas geométricos, tais como paralelismo, semelhança de triângulos e propriedades dos triângulos isósceles, possibilitando abordar diversas outras habilidades previstas na BNCC, podendo ser trabalhado com o 9º Ano em geral. Outro aspecto relevante é que aparece em questões de olimpíadas de matemáticas.

Este trabalho está disposto da seguinte forma:

No capítulo 1, apresentamos o trabalho de uma forma geral, e a nossa motivação para trabalharmos com o tema em questão.

No capítulo 2, apresentamos o referencial teórico sobre o qual nos apoiamos para desenvolver nossa pesquisa. Abordamos alguns aspectos previstos nos PCN/BNCC, falamos sobre as metodologias ativas em sala de aula, apresentamos um mapeamento de algumas dissertações do PROFMAT alinhadas com nosso tema de pesquisa, apresentamos a importância do fazer pedagógico. Além disso, traçamos um paralelo entre a Peer Instruction e a Aprendizagem Significativa, bem como apresentamos a Peer Instruction conforme elaborada pelo seu criador o Professor Eric Mazur; detalhamos o teste conceitual previsto na Peer Instruction e por fim, falamos sobre o uso do GeoGebra em sala de aula.

No capítulo 3, apresentamos os aspectos metodológicos da pesquisa desenvolvida com uma turma do 9º Ano do Colégio Militar de Santa Maria, abordando aspectos como o que nos motivou a pesquisa, o relato das experiências realizadas em sala de aula e apresentamos a demonstração do Teorema das Bissetrizes utilizando o GeoGebra.

No capítulo 4, fazemos uma análise dos resultados obtidos buscando responder aos questionamentos apresentados no capítulo 3 e apresentamos o resultado de uma pesquisa de satisfação realizada com os alunos da turma investigada.

No capítulo 5, fazemos as considerações finais quando apresentamos alguns aspectos que podem levar ao sucesso e abordamos também as pequenas adaptações na metodologia considerando o desenvolvimento cognitivo e afetivo da turma.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo versamos sobre o embasamento teórico dado à nossa investigação. Apoiamo-nos em aspectos do processo ensino-aprendizagem, tais como Parâmetro Curriculares Nacionais (PCNs) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), as metodologias ativas, como a Peer Instruction e das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) e o fazer pedagógico do professor.

Além disso, fizemos um mapeamento de dissertações do PROFMAT relacionadas a nossa pesquisa.

2.1 OS PCN/BNCC E O ENSINO DA GEOMETRIA

Na Educação Básica, o ensino da Geometria, está normatizado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e mais recentemente na BNCC, que estabelece uma sequência lógica dos conteúdos a serem estudados, desde o primeiro ano do Ensino Fundamental até o terceiro ano do Ensino Médio.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), é um catalisador para a busca da melhoria da qualidade da educação brasileira e, por definição, "É um documento de características normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da educação básica" (BRASIL, 2018, p. 7).

Dentre as habilidades associadas ao Teorema de Tales e Teorema das Bissetrizes, podemos destacar:

> (EF09MA10) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
> (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes. (BRASIL, 2018, p. 317-319)

A BNCC prevê o ensino em espiral, em particular nos anos finais do Ensino Fundamental, a cada ano que o aluno é promovido, aprofunda-se mais no conhecimento prévio adquirido no ano anterior de forma que o aluno construa, sistematicamente, uma base sólida, na qual vai se apoiando para a construção de todo um arcabouço de conhecimentos matemáticos que resultarão em um aprendizado significativo acerca do assunto estudado.

No que concerne à Geometria, por fazer parte do cotidiano do indivíduo, é uma área temática apresentada na BNCC e envolve diversas outras áreas. De acordo com a BNCC, "A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento.” (BRASIL, 2018, p. 227).

Tal fato deveria ser uma condição facilitadora para o aprendizado da geometria por parte dos alunos, contudo, o que percebemos é justamente o contrário, talvez pela sua grande permeabilidade em outros objetos do conhecimento, o que novamente torna-se um paradoxo, pois deveria ser um elemento facilitador para a sua aprendizagem, contudo explicar o motivo causador deste fato, não faz parte do escopo da nossa pesquisa.

Daí, é importante ressaltar que a Geometria é uma disciplina fundamental no desenvolvimento do pensamento crítico matemático e da capacidade de resolver problemas. É através do estudo da Geometria que os alunos são capazes de desenvolver habilidades de análise e síntese, além de estimular o raciocínio lógico, a visão espacial e a criatividade.

Ao abordarmos o modelo de Van Hielen acerca do pensamento geométrico, percebemos todo o potencial de desenvolvimento do raciocínio lógico da Geometria. Segundo Lindquist e Schutle,

> O modelo consiste em cinco níveis de compreensão. Os níveis denominados “visualização”, “análise”, “dedução informal”, “dedução formal” e “rigor” [...]. Apoiado em experiências educacionais apropriadas, o modelo afirma que o aluno move-se sequencialmente a partir do nível inicial, ou básico (visualização), no qual o espaço é simplesmente observado – as propriedades das figuras não são explicitamente reconhecidas, através da sequência relacionada acima, até o nível mais elevado (rigor), que diz respeito aos aspectos abstratos formais da dedução. Poucos alunos experimentam, ou alcançam, o último nível. (LINDQUIST; SHULTE, 1994, p. 2).

E, observando a ampla presença da geometria na vida humana e considerando a complexidade do desenvolvimento intelectual do ser humano Bacich e Moran nos relatam que, “A aprendizagem é ativa e significativa quando avançamos em espiral, de níveis mais simples para mais complexos de conhecimento e competência em todas as dimensões da vida.” (BACICH; MORAN, 2018, p. 2).

Assim, percebemos que a Geometria é o elemento indutor, na busca do desenvolvimento intelectual dos jovens alunos, à medida que ela interage com diversas áreas do conhecimento humano.

Do exposto, entendemos que tanto os PCN, como a BNCC, buscam elevar a qualidade do ensino na Educação Básica no Brasil, estabelecendo “o que” e “quando” deve-se desenvolver na educação brasileira.

Contudo, nada adianta estabelecermos diretrizes ou normas para a melhoria do ensino sem pensarmos em como está a atuação do professor, que na maioria das vezes adota o método tradicional de ensino. Neste sentido, buscamos neste trabalho, norteados pelos PCN e BNCC, buscar alternativas metodológicas para o ensino da Geometria.

A seguir discutimos um pouco sobre as metodologias ativas.

2.2 AS METODOLOGIAS ATIVAS EM SALA DE AULA

A humanidade está em constante evolução e com isso, surge a necessidade de que os métodos de ensino acompanhem esta evolução e as metodologias ativas surgem como uma possibilidade inovadora, com grande potencial de quebra de paradigmas dos métodos de ensino tradicionais.

Algumas das suas características favorecem a aprendizagem tais como: desafiar os jovens alunos, estimulando-os a buscarem respostas para situações diversas, muitas vezes descobrindo o prazer de estudar e conhecer coisas novas; promover a socialização entre os alunos tão carentes de convívio social por estarem, na maior parte do tempo, presos numa tela de celular, navegando num universo fictício que, por vezes, favorecem o surgimento de patologias de ordem emocional.

Dada a facilidade que os jovens alunos têm com tecnologias digitais, as metodologias ativas podem se prevalecer destas habilidades e terem um campo fantástico onde podem ser empregadas, como exemplo temos a gamificação que emprega várias plataformas digitais, criando ambientes virtuais de aprendizagem.

As metodologias ativas são elaboradas de forma que o aluno é o centro do processo ensino-aprendizagem, o agente protagonista, o principal responsável pela construção do próprio conhecimento.

Segundo Bacich e Moran, “Metodologias ativas são estratégias de ensino centradas na participação efetiva dos estudantes na construção do processo de aprendizagem, de forma flexível, interligada e híbrida” (BACICHI; MORAN, 2018, p. 4).

Nesta estratégia o professor passa a ter o papel de mediador, indicando para o aluno os melhores caminhos a seguir, o facilitador do aprendizado, ou seja, agente indutor na construção do conhecimento.

Várias são as metodologias ativas empregadas atualmente, entre elas podemos citar: sala de aula invertida, aprendizagem por projetos, gamificação, resolução de problemas, Peer Instruction.

Mas há um senão para que a implantação das metodologias ativas seja eficaz. É necessária uma mudança de mentalidade do professor e sobretudo, uma mudança das estruturas de ensino nas escolas, pois ao empregarmos estas metodologias, elas vão transformar o ambiente escolar promovendo o aprendizado ao dar ao aluno desafios que irão prepará-lo para mundo real, de tal modo que mudará a realidade de cada criança, despertando nelas o senso crítico, a autonomia, a criatividade, fortalecendo-a cognitivamente e emocionalmente.

2.3 O FAZER PEDAGÓGICO

Um dos grandes problemas pedagógicos é a transferência da disciplina formal e o aprendizado. Vygotsky nos relata que, “[...] o professor ao tentar transmitir conhecimento por meio de monólogos fracassará miseravelmente.” (VYGOTYSKY, 2007, p. 91)

Não queremos “endemonizar” a aula tradicional; ela também é uma estratégia importante, mas queremos ressaltar que ela sozinha não é suficiente.

De acordo com Moreira, “[...] isso não significa que uma aula expositiva clássica não possa facilitar a aprendizagem significativa. É bem verdade que o ensino expositivo tradicional normalmente promove a aprendizagem mecânica.” (MOREIRA, 2011, p.50)

Ao analisarmos dados de uma pesquisa de opinião acerca das metodologias ativas, conforme o Apêndice B, realizada com professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, do Colégio Militar de Santa Maria, onde aplicamos a nossa proposta, extraímos as seguintes informações:

- 60% dos professores fazem uso das TICs;
- 10% dos professores conhecem a metodologia ativa Peer Instruction;
- 10% dos professores concordam que as metodologias ativas favorecem o aprendizado;
- 20% fazem uso das metodologias ativas (80% relataram fazer uso das metodologias ativas, contudo, quando solicitado para indicar quais metodologias utilizam, fizeram referência as ferramentas das TICs).
- 80% dos professores observaram que os alunos apresentam lacunas na aprendizagem dos objetos do conhecimento dos anos anteriores, não permitindo integralmente o desenvolvimento da aprendizagem em espiral;
- 60% dos professores relatam que os alunos estão descomprometidos com suas responsabilidades escolares; e
- 60% dos professores informaram que os alunos têm dificuldades em abstrair conceitos mais complexos, principalmente na geometria espacial e na geometria analítica. Provavelmente isto se deve às lacunas existentes em relação aos conteúdos anteriores que são base para o aprofundamento do assunto estudado em sala de aula no ano escolar.

Considerando o exposto, notamos que existe um desafio a ser superado no ensino da geometria. De modo geral, nas escolas públicas e privadas, com algumas ilhas de exceção, a matemática é ensinada de forma descontextualizada, o que pode desmotivar o aluno e dificultar a compreensão dos conceitos por estar fora do contexto do aluno. Desta forma, segundo Lindquist e Schutle.

> Com muita frequência, a geometria é ensinada de maneira mecânica. Considere-se, por exemplo, o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Frequentemente esse fato é estabelecido através da generalização do resultado das medições dos ângulos de alguns triângulos ou, o que é pior, apenas se passando a informação aos alunos. Esta última tática é um exemplo de redução do nível de conteúdo. (LINDQUIST; SHULTE, 1994, p.16)

Para vencermos esse desafio é necessário um ensino dinâmico, envolvendo os alunos em atividades práticas, como a construção de figuras geométricas em algum software de geometria dinâmica ou em papel, jogos matemáticos que estimulem a compreensão e a aplicação de conceitos geométricos de situações cotidianas, tendo o aluno como centro do processo ensino-aprendizagem, e assim, podemos atingir este objetivo por meio de alguma das metodologias ativas aliada às TICs.

Assim, percebemos o quão complexa e importante é a atuação do professor em sala de aula, devendo apresentar um fazer pedagógico diversificado de modo que consiga atingir a maior parcela possível dos alunos em sala de aula.

2.4 A PEER INSTRUCTION PARA UMA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Nesta seção apresentamos a metodologia ativa Peer Instruction. Analisamos o Teste Conceitual da Peer Instruction, o qual consideramos o CORE da metodologia, buscando mostrar as intersecções da metodologia com a Teoria da Aprendizagem Significativa.

A metodologia ativa Peer Instruction, foi desenvolvida por Eric Mazur em 1990 e foi apresentada no livro de sua autoria “Peer Instruction, a revolução da aprendizagem ativa”, de 2015. Foi concebido, após diversas tentativas entre erros e acertos, ao perceber que seus alunos, de fato, não estavam aprendendo nas suas aulas de Física, na Universidade de Havard.

Para alcançarmos o objetivo da aula ser significativa para o aluno, foi que decidimos empregar a metodologia ativa Peer Instruction por vir ao encontro do apresentado seção 2.3 e, ainda, por percebermos o seu grande potencial de desenvolvimento das capacidades cognitivas dos jovens alunos. Tais potencialidades abordaremos mais adiante.

A Teoria da Aprendizagem Significativa foi criada por David Ausubel em 1963 e apresentada em sua obra intitulada The Psychology of Meaningful Verbal Learning, que na tradução livre significa “A Psicologia da Aprendizagem Verbal Significativa, que teve como foco central a situação de aprendizagem em sala de aula.

Conforme propôs Ausubel, a definição, segundo relatado no livro de Lins e Miranda,

> "[...] aprendizagem significativa é a organização e integração do material na estrutura cognitiva. A experiência cognitiva é caracterizada pelo processo de integração dos conhecimentos, no qual os conceitos novos interagem com os já existentes." (LINS; MIRANDA, 2018, p. 63)

Apesar de termos referenciado a Teoria da Aprendizagem Significativa e as Teorias de Aprendizagem de Vigotski, não é objetivo nosso nos aprofundarmos nesses conceitos e nem temos a pretensão de explicar tais teorias, apenas nos valemos de determinadas definições pois, ao estudarmos a metodologia ativa Peer Instruction, notamos que, de forma intencional ou não o criador da metodologia Peer Instruction faz uso de alguns conceitos relacionados a essas teorias.

2.4.1 A Peer Instruction

A Peer Instruction é uma metodologia ativa, desenvolvida por Erick Mazur, professor de Física de Haward, que tem como objetivo proporcionar interação e colaboração, entre os alunos, ao estudarem os conteúdos apresentados pelo professor, de modo a promover a aprendizagem. O desenvolvimento da metodologia tem como ponto de partida um teste conceitual relativo aos conteúdos estudados.

Esta metodologia traz, na sua essência, uma abordagem pedagógica na qual o aluno é o centro do processo ensino-avaliação-aprendizagem, desenvolvendo-se conforme explicado por Mazur e descrito nos próximos parágrafos.

Inicialmente, em sala de aula, o professor apresenta o ponto principal acerca do assunto a ser estudado, previamente selecionado (o core), podendo ser uma aula tradicional mesmo e, em seguida, faz uma pergunta para a turma sobre o ponto estudado, com múltiplas escolhas para a resposta. Então, os alunos respondem à questão e o professor verifica o índice de acerto. Havendo entre 50% a 70% dos alunos que acertaram a questão, o professor encoraja os alunos a discutirem em grupos, de modo que possa haver uma interação que permita uma troca de experiências, conhecimentos e perspectivas.

Ocorrida a discussão, os alunos votam na resposta considerada correta. É importante ressaltar que neste momento, aqueles alunos que não entenderam o que foi estudado anteriormente, passam a compreender com o auxílio do colega de sala. Por conseguinte, o professor proporciona uma análise em conjunto com a turma, excluindo conceitos errôneos, possibilitando a compreensão mais aprofundada do conhecimento estudado, por meio da interação social entre pares.

Esta metodologia estimula a participação ativa dos estudantes e fortalece o entendimento e a apreensão dos conteúdos por meio da interação social através da resolução conjunta de problema instigantes.

Anterior à elaboração da metodologia ativa Peer Instruction, Mazur acreditava estar tudo bem com suas aulas tradicionais e demonstrações de teoremas, acreditando que seus alunos estavam aprendendo, afinal os feedbacks recebidos dos alunos eram sempre muito satisfatórios e os alunos conseguiam resolver problemas aparentemente difíceis nas avaliações. Conforme relata Mazur,

> Desde 1984, eu tenho ensinado uma disciplina de introdução à física nos cursos de graduação em ciência e engenharia da Havard University. Até 1990 eu ensinava de forma convencional, com aulas expositivas acompanhadas de demonstrações. De modo geral, eu estava satisfeito com a minha forma de ensinar – meus alunos se davam bem com os problemas que eu considerava difíceis, e as avaliações que eu recebia deles eram bem positivas. Até onde eu sabia, não havia problemas na minha classe. (MAZUR, 2015, p. 4).

Contudo, não era bem isto que estava se passando com seus alunos. Em 1990, Mazur se deparou com uma série de artigos de Halloun e Hestenes acerca da Teoria da Modelagem.

> A Teoria da Modelagem (TM), desenvolvida nos últimos trinta anos pelo físico educador norte americano David Orlin Hestenes, é de natureza cognitiva e procura relacionar modelos conceituais com modelos mentais visando fundamentação pedagógica em ciências e em matemática. Apoia-se na tese principal de que a cognição em ciências, matemática e vida cotidiana é basicamente construção e manipulação de modelos mentais. (SOUSA; SANTO, 2017, p.22).

Mazur relata em seu livro que os alunos entram na universidade com fortes crenças e intuições acerca das diversas disciplinas acadêmicas que derivam da experiência pessoal e de interpretações livres do material apresentado na disciplina (MAZUR, 2015).

O primeiro alerta, de que não estava tudo bem com suas aulas, surgiu quando, ao rever seus métodos de ensino, Mazur aplicou o teste de Halloun e Hestens a seus alunos. Os resultados foram um choque para o professor Mazur, conforme nos relata a seguir

> O primeiro alerta veio quando eu apliquei o teste de Halloun e Hestenes à minha classe e um estudante perguntou "Professor Mazur, como devo responder a essa questão? De acordo com que o Senhor ensinou ou conforme o meu jeito de pensar a respeito dessas coisas?". Apesar desse alerta, os resultados do teste foram um choque: os estudantes obtiveram uma avaliação um pouco melhor no teste de Halloun e Hestene do que obtiveram no exame de metade de semestre da disciplina. Isso ocorreu apesar de o teste de Halloun e Hestene ser simples, enquanto o material coberto no exame de metade do semestre (dinâmica das rotações, momentos de inércia) ser muito mais difícil – ou pelo menos é o que eu pensava. (MAZUR, 2015, p. 4).

Após aplicar o teste de Halloun e Hestene, Mazur percebeu que pouco ou nada, suas aulas estavam colaborando para mudar essas crenças ou senso comum, que os acadêmicos se baseiam para resolver problemas. A partir deste ponto, percebeu a necessidade de rever seus métodos de aula, vindo a desenvolver o que hoje conhecemos por Peer Instruction.

A partir deste ponto Mazur buscou novas formas de ministrar suas aulas, buscando desenvolver um método eficiente para ensinar os fundamentos da física e que levasse os alunos a obterem um melhor desempenho na resolução de problemas convencionais.

A Peer Instruction foi pensada com o objetivo de envolver os alunos ativamente no processo de aprendizagem, promover discussões e debates em sala de aula, de tal modo que levem os estudantes a uma aprendizagem significativa. Há a compreensão dos conteúdos estudados, em vez de apenas a memorização superficial, por meio de problemas desafiadores levando o aluno a pensar criticamente e a explicar conceitos aos colegas. Além disso, ressalta a importância do feedback imediato na aprendizagem.

No livro Peer Instruction, Eric Mazur relata que

> Para a Peer Instruction ser bem-sucedida, é necessário que o livro e as aulas expositivas desempenhem papéis diferentes dos que costumam exercer em uma disciplina convencional. Primeiro, as tarefas de leitura do livro, realizadas antes das aulas, introduzem o material. A seguir, as aulas expositivas elaboram o que foi lido, esclarecem as dificuldades potenciais, aprofundam a compreensão, criam confiança e fornecem exemplos adicionais. Finalmente, o livro serve de referência e guia de estudo. (MAZUR, 2015, p.10)

O autor relata ainda que a metodologia se baseia, basicamente, em uma série de apresentações curtas sobre os pontos chaves, sempre seguido de um teste conceitual.

A apresentação curta consiste em determinar quais pontos fundamentais devem ser tratados, obtendo um esboço do esqueleto da aula, deixando de lado as definições, as deduções e os exemplos que constam do livro.

Por sua vez, o teste conceitual, é elaborado com questões curtas, de múltipla escolha, abrangendo conceitos acerca do ponto abordado na apresentação inicial, não muito fácil, mas, também, não muito difícil. É dado um tempo para os alunos elaborarem as suas respostas e em seguida discutirem entre si.

Assim, entendemos que para o aprendizado ter significado para o aluno, devemos partir de algo já conhecido pelo mesmo e a partir daí iniciar a construção de novos conceitos. Podemos perceber que isto tem a ver com o proposto por Mazur na sua Peer Instruction, pois a aprendizagem significativa requer que o conhecimento se relacione de forma relevante com os conhecimentos prévios dos alunos, incentivando a interação professor/aluno com o propósito de promover uma compreensão mais aprofundada do conteúdo estudado e sobre dar um novo significado aos conhecimentos prévios dos alunos, tão desejado por Mazur. Deste modo, notamos que a metodologia pode levar a uma aprendizagem significativa, que nada mais é que, do que,

> [...] a aquisição de novos conhecimentos com significado, compreensão, criticidade e possibilidades de aplicação desses conhecimentos em explicações, argumentações e soluções de situações-problema, inclusive novas situações. (MASINI; MOREIRA, 2017, p.19).

2.4.2 A Peer Instruction e aprendizagem significativa-teste conceitual

Ao estudarmos o teste conceitual, percebemos que ele é a parte mais importante da metodologia Peer Instruction, uma vez que, é no momento da aplicação do teste que ocorre a Peer Instruction e a aprendizagem significativa por excelência.

Vamos analisar as fases do teste conceitual sob a ótica da Teoria da Aprendizagem Significativa, apresentando suas possíveis potencialidades sugeridas na seção anterior.

Segundo Mazur, o teste conceitual tem o seguinte formato,

1. Proposição da questão	1 minuto
2. Tempo para os estudantes pensarem	1 minuto
3. Os estudantes anotam suas respostas individuais (opcional)	
4. Os estudantes convencem seus colegas (peer instruction)	1-2 minutos
5. Os estudantes anotam as respostas corrigidas (opcional)	
6. Feedback para o professor: registro das respostas	
7. Explicação da resposta correta	2+ minutos

(MAZUR, 2015, p.10)

Na citação acima, notamos que a Peer Instruction envolve os alunos em discussões e reflexões na busca de um consenso para a solução mais correta de um problema, levando-os ao engajamento participativo de forma efetiva, relacionando conhecimentos anteriores com novos conceitos. Assim a Peer Instruction faz com que o aluno seja agente ativo na construção do próprio conhecimento.

Passaremos a analisar os itens acima com o intuito de mostrar que a Peer Instruction pode proporcionar uma aprendizagem significativa, uma vez que seu foco principal é a aprendizagem com a aquisição e retenção de conhecimentos em um contexto desafiador para o aluno, despertando-lhes o interesse pelo objeto do conhecimento estudado.

No item 1, da citação acima, percebemos a relevância do conteúdo. A Peer Instruction enfatiza a importância de tornar o conteúdo relevante e significativo para os alunos e isso é feito por meio de questões cuidadosamente elaboradas que despertam o interesse dos alunos.

De acordo com Mazur, [...] “Para converter uma aula tradicional, eu primeiro decido quais são os pontos fundamentais que devem ser tratados. A seguir, [...], determino quais são os pontos-chave que quero incluir.” (MAZUR, 2015, p. 27).

Estes pontos chave dão origem às questões conceituais.

Nos itens 2 e 3, os alunos constroem um novo conhecimento, pois ao envolverem-se ativamente nas discussões em busca da resolução de um problema, a partir de um problema conceitual desafiador, envolvente e que desperta o pensamento crítico acerca de conhecimentos anteriores diante de um novo conhecimento, os alunos debatem sobre suas respostas e o aluno que realmente acertou consegue levar o outro a dar um novo significado ao seu conhecimento, favorecendo a assimilação do conhecimento de forma mais natural.

Tanto a Peer Instruction quanto a Aprendizagem Significativa enfatizam a importância de os alunos estarem ativamente envolvidos na construção do conhecimento. Na Peer Instruction, os alunos participam ativamente de discussões e resoluções de problemas em grupos.

Segundo Mazur,

> [...] as aulas consistem em série de apresentações curtas sobre pontos chaves, cada uma seguindo um teste conceitual – pequenas questões conceituais abrangendo o assunto que está sendo discutido. A princípio é dado um tempo para os estudantes formularem suas respostas e, em seguida, eles devem discuti-las entre si. Esse processo (a) força os estudantes a pensarem com base nos argumentos que estão sendo desenvolvidos e (b) dá-lhes (o professor incluído) um modo de avaliar a sua compreensão do conceito. (MAZUR, 2015, p. 10)

Nos itens 4 e 5 ocorre um diálogo e uma interação entre os pares. Neste ponto, entendemos que, na Peer Instruction, os alunos debatem e argumentam suas respostas buscando a solução correta.

De acordo com Mazur, “Como resultado das discussões para convencer o colega, há um aumento sistemático tanto na porcentagem de respostas corretas quanto da confiança dos estudantes” (MAZUR, 2015, p.10).

Nos itens 6 e 7 notamos a promoção de uma compreensão profunda acerca do objeto do conhecimento estudado, em contraponto à memorização superficial tão observada atualmente em sala de aula.

Conforme nos relata Mazur

> Algumas vezes, parece que os estudantes são capazes de ensinar os conceitos uns aos outros de forma mais eficiente que seus professores [...]. Uma explicação provável é que os estudantes, os que são capazes de entender o conceito que fundamenta a questão dada, acabaram de aprender a ideia e ainda estão cientes das dificuldades que tiveram que superar para compreender o conceito envolvido. Como consequência, eles sabem exatamente o que enfatizar em sua explicação. (MAZUR, 2015, p. 13)

Assim, fica evidente que a Peer Instruction considera os conhecimentos prévios dos alunos, usando-os como ponto de partida para a construção de uma aprendizagem significativa.

Na Peer Instruction, as respostas iniciais dos alunos são usadas para iniciar discussões, o que vem ao encontro do previsto na Teoria da Aprendizagem Significativa, a qual estabelece que o novo conhecimento deve apoiar-se nas estruturas cognitivas preexistentes dos alunos com a integração de ações entre professores e alunos com o objetivo de ressignificar um conhecimento preexistente.

Segundo Masini e Moreira,

> Aprendizagem Significativa envolve integração de sentimentos, pensamentos e ações – requer aquisição de conhecimento com compreensão e elaboração no uso da própria de aplicação, transferência e clareza sobre aquilo que se está fazendo e o porquê disso. (MASINI; MOREIRA, 2017, p. 19)

Ao confrontarmos a Metodologia ativa Peer Instruction com a Teoria da Aprendizagem Significativa, observamos os seguintes pontos em comum:

- **Construção ativa do conhecimento**

Tanto a Peer Instruction quanto a Aprendizagem Significativa enfatizam a importância de os alunos estarem ativamente envolvidos na construção do conhecimento.

Na Peer Instruction, os alunos participam ativamente de discussões e resoluções de problemas em grupos valendo-se de conhecimentos prévios e absorvendo novos conhecientos, enquanto na Aprendizagem Significativa, os alunos buscam relacionar o novo conhecimento com seus conhecimentos prévios, ressignificando conhecimentos anteriores.

- **Diálogo e interação**

Ambas as abordagens promovem o diálogo entre os alunos. Na Peer Instruction, os alunos discutem e argumentam suas respostas com os colegas, retificando quando equivocados ou ratificando conhecimentos anteriores, fortalecendo a aprendizagem, enquanto na Aprendizagem Significativa, a interação entre os alunos e com o professor é incentivada para promover a compreensão profunda.

- **Relevância do conteúdo**

Assim como a Peer Instruction, a Aprendizagem Significativa enfatiza a importância de tornar o conteúdo relevante e significativo para os alunos. Na Peer Instruction, isso é feito por meio de questões cuidadosamente elaboradas que despertam o interesse dos alunos. Na Aprendizagem Significativa, o novo conhecimento deve ser relacionado de forma relevante com os conhecimentos prévios dos alunos.

- **Atenção às concepções prévias**

Ambas as abordagens consideram as concepções prévias dos alunos como ponto de partida para a aprendizagem. Na Peer Instruction, as respostas iniciais dos alunos são usadas como ponto de partida para discussões. Na Aprendizagem Significativa, o novo conhecimento é ancorado nas estruturas cognitivas existentes dos alunos.

- **Promoção da compreensão profunda**

Tanto a Peer Instruction quanto a Aprendizagem Significativa buscam promover a compreensão profunda e duradoura do conteúdo, em vez de uma simples memorização superficial.

Uma das principais vantagens de trabalharmos a metodologia ativa Peer Instruction, em sala de aula, é a mescla feita entre alunos com mais competências com os que, momentaneamente, são menos hábeis. Na concepção de Vigotski, ao promovermos esta mescla, todos ganham, ao passo que o aluno menos capacitado, sente-se desafiado pelo aluno mais capacitado e, com o apoio do aluno mais experiente, consegue realizar tarefas mais complexas que não seria possível sem o auxílio do outro. Ao mesmo tempo, o aluno mais capaz, aperfeiçoa suas habilidades ao auxiliar o outro aluno.

Por fim, percebemos que na Peer Instruction o professor faz o papel de mediador no processo ensino-aprendizagem e o aluno é o protagonista que atua para construir o aprendizado, auxiliando-se em pares, de forma participativa, construindo o conhecimento de ambas as partes, ressignificando o conhecimento e dando profundidade ao aprendizado.

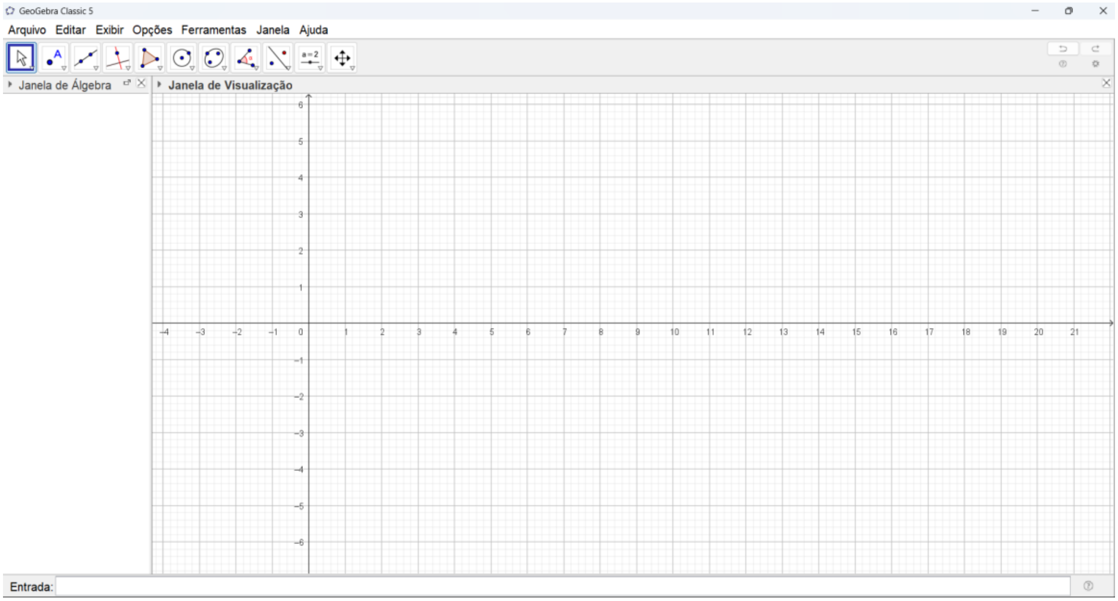
2.5 USO DO GEOGEBRA

Entendemos, também, que é necessário materializar de alguma forma, os conceitos apresentados em sala de aula. Neste caso percebemos que deveríamos aliar a metodologia ativa a uma das TICs. No tocante à geometria, dado o seu enorme potencial, escolhemos o GeoGebra dentre as ferramentas disponíveis.

O GeoGebra é uma ferramenta das Tecnologias da Informação e Comunicação, que proporciona a criação e a manipulação de figuras geométricas de forma dinâmica, tornando mais concreta a geometria e, desta forma, favorecendo o aprendizado.

Na figura 1, abaixo, temos interface de trabalho do GeoGebra.

Figura 1– Interface do GeoGebra



Fonte: autor

Observe, na figura 1, que na linha superior aparecem os menus de funções e logo abaixo, uma sequência de botões de acesso às diversas funções de trabalho do programa. Inicialmente, o programa não é muito amigável, mas à medida que vai-se utilizando o mesmo, vai-se despertando a curiosidade pelo programa, bem como pelo assunto estudado.

Assim, o estudante, ao se deparar com conceitos geométricos, tem dificuldade em estabelecer a conexão entre o objeto geométrico e suas propriedades e, para ajudar a superar esta dificuldade, o GeoGebra torna-se uma ferramenta poderosa que pode auxiliar o aluno quando conecta o espaço e a forma às suas propriedades peculiares, permitindo uma abordagem interativa, estimulando o raciocínio lógico e o senso crítico do aluno e, desta forma, favorecendo a aprendizagem no ensino da Geometria.

Lamas e Mendes afirmam que

> "[...] desfrutando da tecnologia para abordar os conteúdos matemáticos, especialmente relacionados à geometria, criam-se oportunidades de dinamizar o ensino. Dessa forma, ao mesmo tempo em que ensinamos conteúdos básicos da matemática, é possível que o aluno aprenda tais conteúdos de forma prazerosa e diferente da convencional." (LAMAS; MENDEES, 2007, p. 18)

Aliando a geometria e a álgebra, o GeoGebra vem se destacando como recurso para o ensino em sala de aula nos diversos níveis, oferecendo uma abordagem interativa, concretizando conceitos geométricos de forma estimulante, despertando a curiosidade e o interesse do aluno pela Geometria. O seu uso permite visualizar as propriedades e relações geométricas, facilitando a sua compreensão mais facilmente pelos estudantes.

Neste ambiente matemático, que é o GeoGebra, o aluno pode construir figuras geométricas, movê-las, modificar ângulos e segmentos, observando as alterações instantaneamente, desta forma ele consegue solidificar conceitos abstratos, compreendendo mais profundamente ao comprovar os conceitos e teoremas geométricos.

Apresentaremos, mais adiante, algumas construções geométricas que favorecem a compreensão do Teorema da Bissetriz e que foram utilizadas nesta pesquisa. Utilizamos nestas construções algumas dicas obtidas no livro da Professora Rita de Cássia Pavan Lama. (LAMAS, 2017)

2.6 MAPEAMENTO DAS DISSERTAÇÕES DO PROFMAT

Finalizamos este capítulo com uma pesquisa de dissertações do PROFMAT relacionadas com a nossa proposta.

Acessamos a plataforma repositória das dissertações[1] do PROFMAT e, no campo “Título da dissertação”, digitamos “Metodologias Ativas”, encontrando 28 dissertações; combinando as palavras “Metodologias Ativas” e “GeoGebra”, nada foi encontrado; buscando com a expressão “Peer instruction”, encontramos apenas uma dissertação abordando a metodologia, a dissertação escrita por Paulo Cruz Pinheiro Moraes. Entre as dissertações pesquisadas por “Metodologias Ativas”, encontramos a dissertação escrita por Thiago Yamashita Paiva que também aborda o emprego da metodologia ativa Peer Instruction.

Atualizamos esta consulta em 16 de janeiro de 2024.

Dentre as 28 dissertações, que contêm as palavras “Metodologias ativas”, selecionamos 11 que estão mais alinhadas com a nossa pesquisa, conforme o Quadro 1.

Quadro 1- Dissertações relacionadas a proposta da pesquisa (Continua)

Data defesa	Autor	Título da Dissertação	Instituição	Resumo
30/08/2023	ANDRÉA GUIMARÃES LEITE	O ESTUDO DE TRIGONOMETRIA E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COM ÊNFASE EM METODOLOGIAS ATIVAS UTILIZANDO O GEOGEBRA	CEFET	Tem por objetivo dar suporte aos professores para a utilização das metodologias ativas de um modo geral, apresentar estudo acerca de trabalhos desenvolvidos no âmbito do PROFMAT e propor um produto educacional, para o estudo da Trigonometria, o Geogebrabook.

[1] Disponível em http:// profmat-sbm.org.br/dissertações/

(Continuação)

29/08/2023	DIEGO SANTOS DE SOUZA	PLATAFORMAS DIGITAIS ALIADAS ÀS METODOLOGIAS ATIVAS NO ENSINO DE PROBABILIDADE	UFCA	Apresenta uma discussão sobre a Metodologia Ativa Sala de Aula Invertida e a Aprendizagem Baseada em Jogos, bem como as TICs Wordwall e Kahoot.
28/08/2023	ALEXANDRE KENYSON OLIVEIRA DA SILVA	METODOLOGIAS ATIVAS: PROPOSTAS PEDAGÓGICAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA	UFRN	Aborda as Metodologias Ativas aliadas às TICs como forma de motivar os alunos, bem como, auxiliar os professores de matemática a enfrentarem os desafios da atualidade.
23/08/2023	CECILIA MARTINEZ VELHO	METODOLOGIAS ATIVAS NO ENSINO DE SISTEMAS LINEARES NO ENSINO FUNDAMENTAL	UFMS	Aborda o uso de metodologias ativas com o 9º Ano do Ensino Fundamental e suas implicações em sala de aula, bem como o uso de jogos matemáticos e do GeoGebra.
26/05/2023	LUIS GUSTAVO MARQUES SOARES	REFLEXÕES E PRÁTICAS PARA UMA EDUCAÇÃO TRANSFORMADORA: RELATOS DE EXPERIÊNCIAS DO ENSINO DE MATEMÁTICA POR MEIO DE METODOLOGIAS ATIVAS	USP	Aborda a necessidade de uma mudança na educação, em particular no ensino da Matemática e faz uma análise teórico-crítica sobre aplicação da metodologia aprendizagem com projetos, onde relata que esta metodologia favorece uma ressignificação do que está sendo trabalhado.
19/08/2022	FERNANDA CRISTINE GUIMARÃES AGOSTINI	METODOLOGIAS ATIVAS COMO PROPOSTA PARA O ESTUDO DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS.	UFSJ	Relata considerações acerca da metodologia ativa Sala de Aula Invertida, baseada em problemas no ensino da matemática nos anos finais do ensino fundamental.
26/08/2021	PAULO CRUZ PINHEIRO DE MORAES	A UTILIZAÇÃO DO PEER INSTRUCTION PARA ANÁLISE DO APRENDIZADO E DESENVOLVIMENTO DO DISCENTE NO ENSINO REMOTO: UMA APLICAÇÃO COM ALUNOS DO SEXTO ANO SOBRE O CONCEITO DE RECORRÊNCIA	CPII	Pesquisa que tem por objetivo elaborar ferramentas que estimulem a participação dos alunos e auxiliar na avaliação, pelos professores, os entendimentos dos conceitos estudados em ambiente virtual, na educação a distância, utilizando as plataformas google meet e google forms.
12/07/2019	TALITA MIRELI ZAMBONI	METODOLOGIAS ATIVAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA ESCOLAR: O QUE AS PESQUISAS ACADÊMICAS REVELAM?	UTFPR	Pesquisa teórica, fundamentada em Teorias Pedagógicas, Educação Matemática e Metodologias ativas, tendo como objetivo entender como estratégias metodológicas repercutem no ensino a matemática por meio da análise de pesquisas acadêmicas. Concluindo que as Metodologias Ativas não estão inseridas de forma explícita na Educação Matemática.

(Continuação)

13/12/2019	VANESSA BOSCARI BELLOTTO	O ENSINO DE MATEMÁTICA E O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DA AUTONOMIA DO ALUNO ATRAVÉS DAS METODOLOGIAS ATIVAS E HÍBRIDAS	UFFS	Propôs a utilização combinada de Ensino Híbrido como o modelo de rotação a partir da organização de sequências didáticas com alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental e 3º Ano do Ensino Médio. A pesquisa foi de caráter qualitativo, onde o autor relatou que ficou evidente que o processo de desenvolvimento da autonomia dos estudantes foi facilitado pela utilização de recursos pedagógicos que favorecem a proatividade, a colaboração e a flexibilidade.
04/01/2018	ROSILANDIA DA PAIXÃO GOMES	UMA PROPOSTA DO USO DE METODOLOGIAS ATIVAS COM AUXÍLIO DO SOFTWARE SOCRATIVE NO ENSINO DE MATEMÁTICA.	UFRB	Apresenta uma proposta de ensino associada ao uso de metodologias educacionais, o software Socrative como recurso de avaliação instantânea, bem como apresenta uma experiência em sala de aula do 3º ano do Ensino Médio
12/08/2016	THIAGO YAMASHITA PAIVA	APRENDIZAGEM ATIVA E COLABORATIVA: UMA PROPOSTA DE USO DE METODOLOGIAS ATIVAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA	UNB	Relata a dificuldade em abandonar a aula expositiva dada a dificuldade em abandonar os modelos de ensino tradicional. Tem por objetivo com a discussão acerca da atuação dos professores de matemática e apresenta descrições de algumas metodologias de aprendizagem ativa e colaborativa, focando aplicação da Peer Instruction em sala de aula, relatando a observação de uma aula sobre Função Afim aplicando a técnica aprendizagem pelos colegas no ensino médio.

Fonte: https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/

Podemos notar, a partir do Quadro 1 acima, que são poucas as dissertações voltadas às metodologias ativas com enfoque no ensino da Geometria, em particular no 9º Ano. Eventualmente, encontramos algumas que abordam um ou outro destes conceitos.

Contudo apenas o trabalho desenvolvido por Andreia Guimarães Leite aborda o uso do GeoGebra. O trabalho desenvolvido por Paulo Cruz Pinheiro Moraes aborda a Peer Instruction, de forma remota, sem uso das TICs no ensino de Sequências e Progressões e, ainda, a dissertação escrita por Thiago Yamashita Paiva utilizando a Peer Instruction, no ensino de Função Afim, tem o objetivo de contribuir com a discussão de métodos alternativos de ensino, apresentando uma relato de uma observação de uma aula de matemática sobre funções, aplicando a metodologia ativa Peer Instruction, numa escola pública de ensino médio, do Distrito Federal.

Assim, podemos inferir que o escopo da nossa pesquisa proposta não foi amplamente estudado, mostrando, desta forma, a relevância da presente pesquisa.

3 ASPECTOS METODOLÓGIOS

A presente pesquisa foi organizada em torno de uma investigação qualitativa, por meio da aplicação da metodologia ativa Peer Instruction e do software GeoGebra, buscando-se promover uma aprendizagem significativa.

A pesquisa tem por objetivo, verificar a viabilidade e a efetividade do uso da metodologia Ativa Peer Instruction aliada ao uso do GeoGebra no ensino da Geometria com alunos do Ensino Fundamental.

Selecionamos a Sequência Didática 07 (SD 07), do Plano de Execução Didática (PED), documento este que compõe a legislação que norteia todo o ensino do Colégio Militar de Santa Maria, o qual prevê os seguintes tópicos a serem desenvolvidos no 9º Ano, sendo eles:

1) Razão entre segmentos e segmentos proporcionais.
2) Teorema de Tales.
3) Teorema da bissetriz interna e externa.
4) Semelhança
5) Teorema fundamental da semelhança.
6) Casos de semelhança de triângulos.
7) Homotetia: definição e propriedades.
8) Resolução de situações-problema.

Em face das especificidades do Colégio, não foi possível desenvolver a metodologia empregando todos os objetos do conhecimento previsto na SD 07, então nos atemos aos tópicos Razão entre segmentos e segmentos proporcionais, Teorema de Talles e Teorema da Bissetriz Interna e Externa.

3.1 MOTIVAÇÃO DA PESQUISA

A pesquisa proposta nesta dissertação surgiu a partir da reflexão dos seguintes pontos:

1. A Geometria está prevista desde as séries iniciais da educação básica, sendo altamente relevante na formação do estudante por envolver conceitos abstratos e possibilitar o desenvolvimento cognitivo, por meio do raciocínio lógico, ao fazer conexões com outros objetos do conhecimento para a resolução de problemas.

2. Muitos educadores buscam melhorar o processo ensino-aprendizagem, explorando diversas abordagens metodológicas, com o objetivo de conseguir uma aprendizagem significativa no ensino da matemática.

3. A Metodologia Ativa Peer Instruction baseia-se na aprendizagem significativa a partir da interação entre pares. Contudo, a eficácia desta metodologia ativa, no contexto específico da

educação básica, em particular no ensino da Geometria no Ensino Fundamental, não foi amplamente investigada.

A partir destes três pontos, foi que surgiu a ideia de empregar a Metodologia Ativa Peer Instruction, aliada ao GeoGebra, no Ensino da Geometria na Educação Básica, como forma de mitigar o problema vivenciado diariamente em sala de aula e, assim, foi que procedemos a uma investigação buscando verificar a eficácia da metodologia, observando as seguintes questões:

a. Como a metodologia Peer Instruction pode ser aplicada de forma eficaz no ensino da geometria para alunos da educação básica, em particular, para alunos do Ensino Fundamental?

b. Há, por parte dos alunos, maior interesse e participação ativa no processo de aprendizagem da geometria quando a metodologia Peer Instruction é utilizada?

c. Quais as dificuldades encontradas durante a implementação da metodologia Peer Instruction no ensino da geometria no 9º Ano do Ensino Fundamental?

d. Como a metodologia Peer Instruction, em conjunto com a ferramenta GeoGebra, contribuiu para o aprendizado dos conteúdos de geometria dos alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental?

A presente pesquisa foi aplicada, no 2º Trimestre de 2022, numa turma do 9º Ano do Colégio Militar de Santa Maria, composta por 30 alunos.

Para investigar o problema, foram elaboradas aulas expositivas empregando o software Power Point, atividades dirigidas na plataforma Moodle e o uso do GeoGebra para apresentar conceitos de Geometria Dinâmica, além dos testes previstos pela metodologia ativa Peer Instruction que são aplicados durante o desenvolvimento da aula propriamente dita.

Para verificarmos a viabilidade da metodologia foi aplicado um questionário acerca da rotina de estudo de cada aluno e ao final, outro questionário sobre a satisfação de cada aluno com a metodologia Peer Instruction. Além disto, foram observados a receptividade e participação dos alunos em sala de aula.

Também, acompanhamos o desempenho dos alunos numa avaliação anterior em que os conceitos foram trabalhados de forma tradicional, em seguida numa avaliação envolvendo os conceitos trabalhados com a metodologia proposta neste trabalho e, por fim, para verificarmos se havia alguma influência da metodologia, após a sua aplicação, analisamos os resultados de uma terceira avaliação parcial. Ressaltamos que, mesmo se tratando de conceitos distintos, esta comparação é pertinente em face da dificuldade peculiar ao estudo da Geometria, conforme relatado por Pavanello. (1993).

Conforme descrito no parágrafo anterior, a primeira avaliação parcial aplicada, abordava os tópicos sobre Problemas do segundo grau e Equações irracionais e biquadradas. A segunda avaliação abordava os Tópicos Teorema de Tales e Teorema das Bissetrizes e a terceira avaliação, abordava os tópicos Relações métricas no triângulo retângulo, Média Geométrica no triângulo retângulo e Teorema de Pitágoras.

Os resultados obtidos serão apresentados no Capítulo 4.

3.2 RELATO DAS EXPERÊNCIAS

A pesquisa proposta pode fornecer informações valiosas acerca da eficácia da metodologia Peer Instruction no ensino da geometria na educação básica.

Os resultados obtidos podem ajudar e encorajar os professores na elaboração de melhores estratégias que contribuam na conquista dos objetivos propostos; favorecer os educadores na tomada de decisão mais acertada, sobre a adoção dessa abordagem pedagógica; contribuir para a melhoria da qualidade do ensino de geometria e, por consequência, proporcionar a construção do conhecimento de forma mais significativa, despertando nos alunos o gosto pelo estudo da matemática. Além disso, a pesquisa pode identificar desafios e oportunidades específicas relacionadas à implementação bem-sucedida da metodologia Peer Instruction nesse contexto.

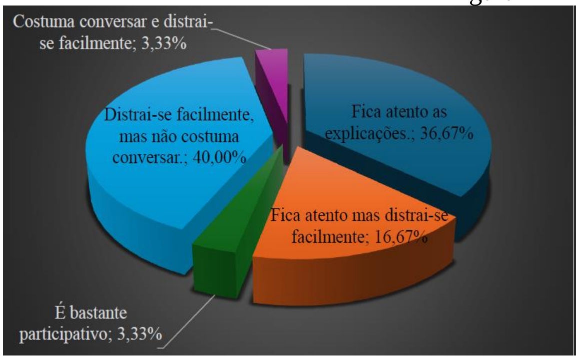
3.2.1 Procedimentos anteriores à aplicação da pesquisa

No mês de abril de 2022, elaboramos todas as aulas pertinentes aos conteúdos que seriam explorados em sala de aula. Para isso elaboramos apresentações em powerpoint, vídeos explicativos dos objetos do conhecimento, construções no GeoGebra, avaliações diagnósticas, trabalhos para os pós aula, bem como os diversos instrumentos avaliativos aplicados em sala de aula para avaliar a compreensão do assunto estudado. Esta preparação demandou aproximadamente um mês de trabalho.

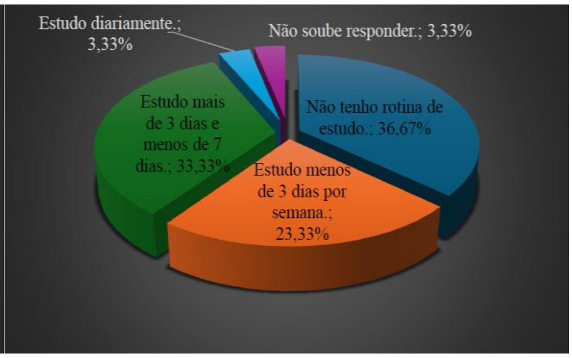
Aplicamos, logo no início, uma pesquisa sobre a rotina de estudo dos alunos, tanto em sala de aula, como fora dela. O questionário encontra-se no Apêndice A e o resultado está apresentado na Figura 2.

Após os alunos responderem ao questionário, analisamos as respostas, verificamos que uma pequena porcentagem de alunos possui uma rotina de estudo, emprega técnicas de estudo adequadamente e dispende tempo suficiente em domicílio para revisar o que foi estudado em sala de aula.

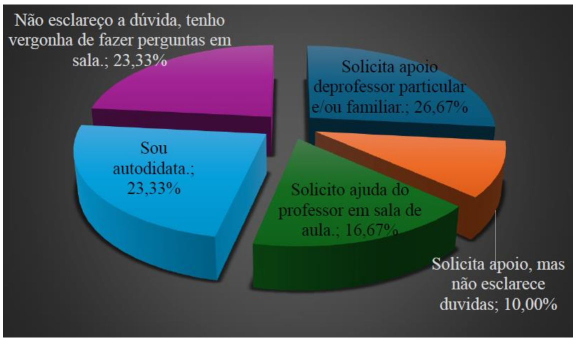
Figura 2– Rotina de Estudo



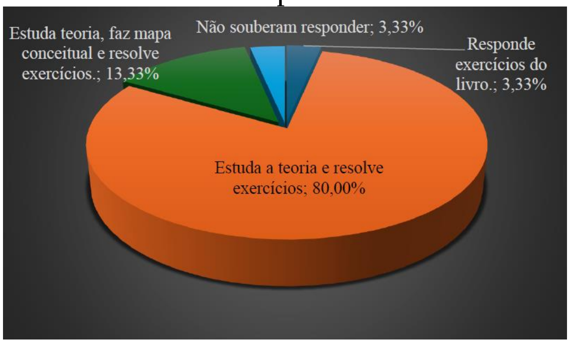
Pergunta 1: Durante as aulas em sala:



Pergunta 2: A sua rotina de estudo extraclasse semanal pode ser resumida em:



Pergunta 3: Quando você tem dúvida em relação a um assunto:



Pergunta 4: Ao estudar, você (pode marcar mais de uma opção):

Fonte: autor

Como estávamos trabalhando com adolescentes, enviamos um comunicado aos pais com a finalidade de informar sobre a aplicação da Metodologia Peer Instruction. Além disso, apresentamos a toda a turma a rotina de estudo que seria adotada na Sequência Didática 07. Houve inicialmente, uma forte resistência por parte de alguns alunos, como observado na pesquisa inicial, a maioria não estava habituada a ter uma rotina de estudo, além de não se sentirem muito confortáveis em demonstrar suas dúvidas em grupo.

Para aplicarmos a metodologia ao ensino da geometria, no 9º ano do Ensino Fundamental foram necessárias pequenas modificações da metodologia, considerando a flexibilidade de adaptação que a metodologia permite e o nível de desenvolvimento afetivo e cognitivo dos alunos, em face dos dois anos de pandemia vividos até aquele momento.

Passamos agora a descrever como adotamos a Peer Instruction em sala de aula com alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental, com algumas modificações em relação à proposta original.

1. Preparação. Nesta primeira fase o professor seleciona os tópicos mais importantes a serem abordados, considerando o currículo escolar, identificando os conceitos mais relevantes e as habilidades que serão desenvolvidas durante as aulas.

2. Estudo prévio. Neste ponto incluímos o estudo dirigido em virtude da necessidade de convencermos os alunos a fazerem o estudo prévio. O estudo dirigido deve ser elaborado com perguntas conceituais de múltiplas escolhas para as respostas, e deve ser respondido em ambiente domiciliar, na plataforma Moodle, de modo que motive o aluno a buscar as respostas no livro didático. Para motivá-los a responderem o estudo dirigido, demos uma bonificação na nota das Avaliações Parciais (AP), no trimestre considerado, em até 1,0 ponto.

3. Aula expositiva. Para introduzir os conceitos principais, em sala de aula, utilizamos recursos audiovisuais como slides em PowerPoint, lousa e as TICs, no caso o GeoGebra, para auxiliar na compreensão inicial dos alunos. De forma sumária, neste momento, o professor apresenta o conteúdo a ser trabalhado nessa sessão de estudo.

4. Apresentação de uma pergunta conceitual. Realizado o passo 3, o professor deve formular uma pergunta conceitual relacionada ao tópico em questão. A pergunta deve ser desafiadora de modo que desperte e estimule o aluno a refletir sobre o conteúdo abordado. É importante que a pergunta não seja respondida com um sim ou não, mas que exija uma justificativa ou argumentação para a resposta dada.

5. Reflexão individual. Os alunos têm um tempo para refletir individualmente sobre a pergunta proposta, podendo anotar suas respostas e suas justificativas no caderno.

6. Discussão em pares. Neste momento ocorre de fato a Peer Instruction, quando os alunos são organizados em pares ou pequenos grupos para discutir suas respostas e justificativas. Neste momento, eles são encorajados a debater seus pontos de vista, defendendo suas respostas. Neste ponto da metodologia, ocorre o desequilíbrio cognitivo proposto por Vigotski. Atuando na zona de desenvolvimento proximal (ZDP)[2], geralmente o aluno que acertou irá convencer o aluno que não acertou, conforme teorizado por Vigotski, de tal forma que ocorre a aprendizagem.

7. Análise da resposta e votação. Após a discussão em pares, os alunos apresentam as suas respostas e votam na resposta que consideram correta ou mais apropriada. O professor recolhe as respostas e as analisa para identificar as principais tendências e possíveis dificuldades conceituais. Esta análise deve ocorrer fora do ambiente da sala de aula.

8. Discussão em sala de aula. Este foi outro ponto diferente da metodologia, pois acreditamos que, à medida que a turma vai avançando no desenvolvimento da metodologia, eles vão sentindo a necessidade de debater com os demais colegas de sala de aula, realizando

---

[2] Zona de Desenvolvimento Proximal define aquelas funções que ainda não amadureceram, mas estão em processo de maturação, funções que amadurecerão mais cedo ou mais tarde, mas que atualmente estão em estado embrionário. (VIGOTSKI, 1978)

uma tempestade de ideias. Neste momento ocorre uma nova discussão em sala de aula com base nas respostas votadas, quando são analisados sob diferentes ângulos, os argumentos apresentados pelos alunos e as justificativas para cada resposta. Aqui compete ao professor dar a resposta correta da questão, apaziguando o debate.

9. Síntese e consolidação. Ao final da discussão, o professor faz uma nova explicação do que foi estudado, de tal modo que os alunos possam compreender mais profundamente o conteúdo por meio de novas explicações e outros exemplos.

10. Atividades práticas e aplicação dos conceitos: por fim, o professor propõe novos exercícios de modo que os alunos possam consolidar o que foi estudado. Estes exercícios são resolvidos em domicílio em um caderno destinado apenas para este fim e durante o semestre são avaliados e bonificados, compondo com o estudo dirigido, a bonificação de até 1,0 ponto na média das AP.

4 RELATO DAS ATIVIDADES E RESULTADOS

Neste capítulo apresentamos a descrição de como as atividades foram desenvolvidas e os resultados foram obtidos.

Começamos as aulas expositivas introduzindo os conceitos e os teoremas. Em seguida, propusemos uma série de questões conceituais aos alunos, extraídas do livro e adaptadas às necessidades da turma.

Os estudantes foram instruídos a refletir individualmente sobre as questões apresentadas e, em seguida, formar grupos de discussão. Cada grupo era composto por três ou quatro alunos, com o objetivo de permitir uma troca diversificada de ideias. Os alunos discutiram suas respostas e argumentaram sobre a lógica e as soluções apresentadas. No decorrer do processo, percebemos que trabalhar em duplas seria a melhor alternativa para desenvolvermos a metodologia e depois partirmos para o grande grupo, ou seja, uma discussão com toda a turma.

Durante essa fase de discussão em grupo, circulamos pela sala, ouvindo as conversas dos alunos, esclarecendo dúvidas e incentivando a participação de todos. Ao mesmo tempo, tomamos nota das principais dúvidas e pontos de dificuldade identificados pelos estudantes para abordá-los posteriormente.

Após a etapa de discussão em grupo, retomamos as questões conceituais e solicitamos que cada grupo compartilhasse suas respostas com a turma. Esse momento de compartilhamento permitiu que os alunos apresentassem suas conclusões e explicassem suas soluções. A turma, então, teve a oportunidade de comparar e discutir diferentes abordagens, enriquecendo a compreensão coletiva dos conceitos e teoremas abordados.

Ao longo do período de aplicação da metodologia em sala de aula, que demandaram 15 horas/aula, realizamos atividades práticas, como construções geométricas por meio do GeoGebra e resolução de problemas, para reforçar os conceitos trabalhados e aplicar os teoremas estudados. Durante essas atividades, os alunos foram incentivados a trabalhar em pares ou em pequenos grupos, aplicando os conhecimentos adquiridos e discutindo suas abordagens.

Ao final do período, avaliamos a eficácia da metodologia Peer Instruction por meio de avaliação formal.

Passamos agora, a apresentar um relato, do que ocorreu em cada momento, da aplicação da metodologia, de acordo com os tópicos abordados.

4.1 TÓPICO RAZÃO E PROPORÇÃO NOS SEGMENTOS DE RETA

No dia 25 de maio de 2022, iniciamos a aplicação da metodologia na Turma 904, público-alvo da pesquisa.

Para este tópico, foram estabelecidos os seguintes objetivos:

- Compreender o conceito de proporcionalidade.
- Aplicar a regra de três para grandezas proporcionais.
- Obter a razão entre segmentos de reta.

Iniciamos a aula apresentando, de forma suscinta, os conceitos de razão usando datashow, conforme previsto na metodologia Peer Instruction.

Em seguida, distribuímos uma folha com as questões para cada aluno e passamos a aplicação do teste conceitual, que constava da seguinte atividade:

1ª QUESTÃO – Pré-requisitos

Aluno Nr: _______________ Turma: ______________________

1. Dados os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, conforme a figura abaixo:

a. Como calcular a razão entre os segmentos dados acima, na ordem em que aparecem?

(A) a razão será dada pelo produto entre as medidas dos segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{AB}$.

(B) a razão será dada pelo quociente entre as medidas dos segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{AB}$.

(C) a razão será dada pelo quociente entre as medidas dos segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{AB}$.

b. Se a medida dos segmentos acima fossem AB = 2 cm e CD = 4 cm, a forma irredutível da razão dos segmentos, na ordem em que aparece é:

(A) 2 (B) $1/2$ (C) $2/4$

Critério de avaliação: o aluno deverá obter 100% de acerto em todos os itens.

Terminado o tempo de realização do exercício individual, verificamos as respostas dadas pelos alunos para sabermos a porcentagem de acertos. O resultado obtido de acertos foi de 35%. Como prevê a metodologia, para um resultado menor que 50% de acerto, explicamos novamente o conteúdo. Dialogando com os alunos e verificando onde não tinha ficado claro na explicação anterior, fizemos uma revisão do conteúdo. Não houve tempo hábil para realizar novo teste e encerramos a aula neste dia.

Em 26 de maio de 2022, após explicarmos o mesmo conteúdo do dia anterior, aplicamos o seguinte teste:

2ª QUESTÃO – Pré-requisitos

Aluno Nr: _______________ Turma: ______________________

1. Observe a figura:

A razão entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ é:

(A) $4/3$ (B) $3/4$

2. Aplicando a propriedade fundamental das proporções na figura, podemos afirmar que são proporcionais as seguintes razões:

(A) $\frac{AF}{AB} = \frac{AB}{AF}$ (B) $\frac{BE}{AD} = \frac{DE}{BE}$ (C) $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AG}$ (D) $\frac{AH}{AJ} = \frac{GK}{CJ}$

Critério de avaliação: o aluno deverá obter 100% de acerto em todos os itens.

Terminado o tempo de realização do teste, passamos a votação para verificarmos o percentual de acerto, e constatamos que 88% dos alunos obtiveram 100% de acerto.

Como prevê a metodologia, quando obtemos um elevado percentual de acerto, devemos avançar no conteúdo. Como era uma quinta-feira com um tempo de aula apenas, encerramos a aula.

Nesta atividade foi observado que a principal dificuldade ocorreu no item 2, para identificar os segmentos proporcionais, acreditamos que em virtude de não compreenderem na íntegra o princípio fundamental da proporcionalidade, tendo muita dificuldade em encontrar os segmentos proporcionais, de modo que a razão entre os pares de segmentos seja a mesma.

4.2 TÓPICO TEOREMA DE TALLES

Para este tópico, foram estabelecidos os seguintes objetivos:

- Compreender o conceito de feixe de retas paralelas e reta transversal.

- Conhecer o Teorema de Tales e saber aplicá-lo na resolução de problemas.

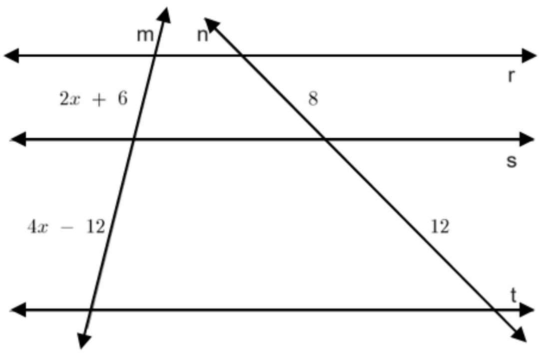
Em 31 de maio de 2022, após recebermos os alunos em sala de aula e acalmá-los, passamos a expor de forma suscinta o Teorema de Tales, uma vez que o assunto já fora previamente estudado pelos alunos anteriormente por meio da leitura do livro didático, estudo dirigido e videoaulas.

Após a explicação, aplicamos o primeiro teste conceitual sobre Teorema de Tales, conforme se segue.

1ª QUESTÃO – Teorema de Talles

Aluno Nr: _______________ Turma: ______________________

1. Considerando o enunciado do Teorema de Talles: "Se um feixe de retas paralelas é cortado por duas retas transversais quaisquer, *m* e *n*, os segmentos determinados sobre *m* são proporcionais aos segmentos correspondentes determinados sobre *n*". Podemos afirmar que o valor de *x*, na figura abaixo é:



(A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 21

Critério de avaliação: o aluno deverá obter 100% de acerto.

Concluído o tempo de execução do teste, foi feita a correção e obtivemos 66% de acertos, conforme o critério de avaliação.

Nesta atividade a principal dificuldade foi, novamente, compreender que a razão entre os segmentos, determinados pelas paralelas nas transversais, é sempre a mesma, tendo dificuldade em aplicar o resultado estabelecido pelo Teorema de Tales.

Neste momento, pela primeira vez, foi aplicada a metodologia ativa Peer Instruction propriamente dita. Os alunos foram reunidos em grupos de até três alunos. E, os alunos que acertaram passaram a explicar para os que não acertaram as questões do teste.

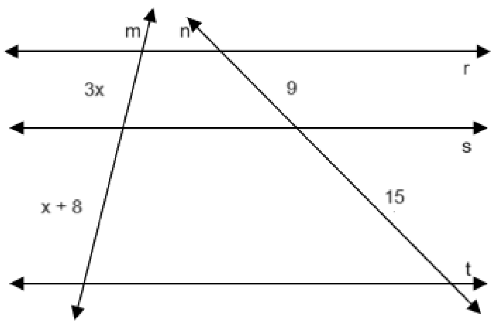
Inicialmente foi difícil organizar os grupos face o desejo de cada aluno querer sentar-se com outro colega que tinha afinidade afetiva, então, montar os grupos mostrou-se uma atividade difícil e caótica. Foi necessário parar a aula e explicar os objetivos da metodologia e como ela funcionava e determinar que, a partir daquele momento, cada aluno participaria do grupo formado pelo professor.

Após isso, aplicamos um segundo teste.

2ª QUESTÃO – Teorema de Talles

Aluno Nr: _______________ Turma: _______________________

1. Considerando o enunciado do Teorema de Talles: "Se um feixe de retas paralelas é cortado por duas retas transversais quaisquer, *m* e *n*, os segmentos determinados sobre *m* são proporcionais aos segmentos correspondentes determinados sobre *n*". Então podemos afirmar que o valor de *x*, na figura abaixo é:



(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

Critério de avaliação: o aluno deverá obter 100% de acerto.

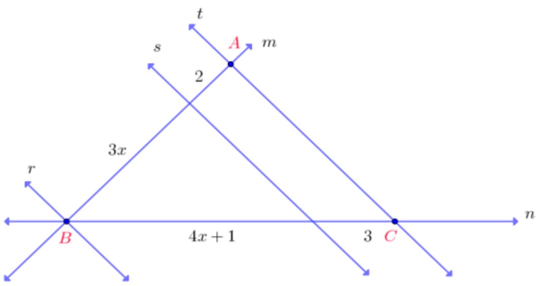
Não foi possível dar continuidade à metodologia neste dia, pois o tempo de aula havia terminado antes dos alunos concluírem o segundo teste.

Em 1º de junho de 2022, fizemos uma nova exposição sumária do conteúdo da aula anterior e aplicamos um novo teste.

3ª QUESTÃO – Teorema de Talles

Aluno Nr: _______________ Turma: _______________________

1. Considerando o enunciado do Teorema de Talles: "Se um feixe de retas paralelas é cortado por duas retas transversais quaisquer, *m* e *n*, os segmentos determinados sobre *m* são proporcionais aos segmentos correspondentes determinados sobre *n*. Então podemos afirmar que o valor de *x*, na figura abaixo é:



(A) 5 (B) 3 (C) 2 (D) 1

Critério de avaliação: o aluno deverá obter 100% de acerto.

Concluído o tempo de execução de teste, foi feita a correção e obtivemos 88% de acertos, conforme o critério de avaliação.

Com o resultado obtido prosseguimos na apresentação do conteúdo, em concordância com a metodologia, e foi sugerido que os alunos resolvessem alguns exercícios do Livro Didático, em domicílio, não sentindo a necessidade de novos testes por sentir que houve compreensão acerca do conteúdo estudado.

Em 2 de junho de 2022, como nos dias anteriores, recebemos os alunos, perguntamos sobre dúvidas acerca da aula estudada no dia anterior e sobre a resolução dos exercícios sugeridos. Percebemos que houve uma maior receptividade por parte de todos os alunos. Foram esclarecidas algumas dúvidas e por ser uma quinta-feira com apenas uma aula, reservamos este dia para tirada de dúvidas acerca de exercícios sugeridos para a semana e assim, encerramos aquela semana.

4.3 TÓPICO TEOREMA DA BISSETRIZ INTERNA

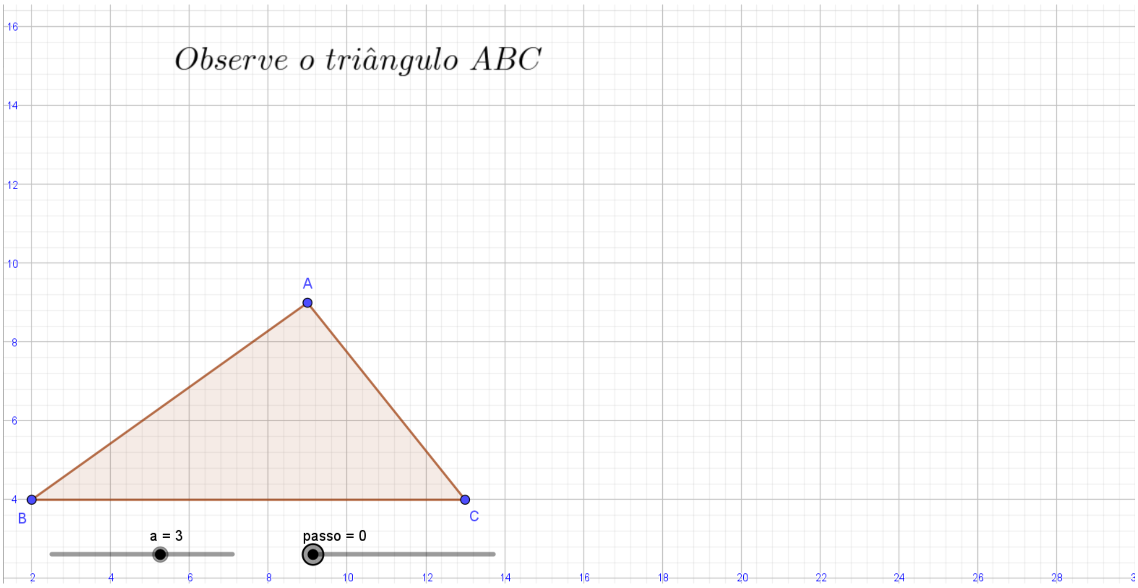
Para este tópico, foram estabelecidos os seguintes objetivos:

- Conhecer o Teorema de Bissetriz Interna.
- Resolver situações problema envolvendo bissetriz interna.

Em 7 de junho de 2022, recebemos os alunos em sala de aula e explicamos resumidamente o Teorema das Bissetrizes, e foi apresentado o teorema da bissetriz interna com o auxílio do GeoGebra.

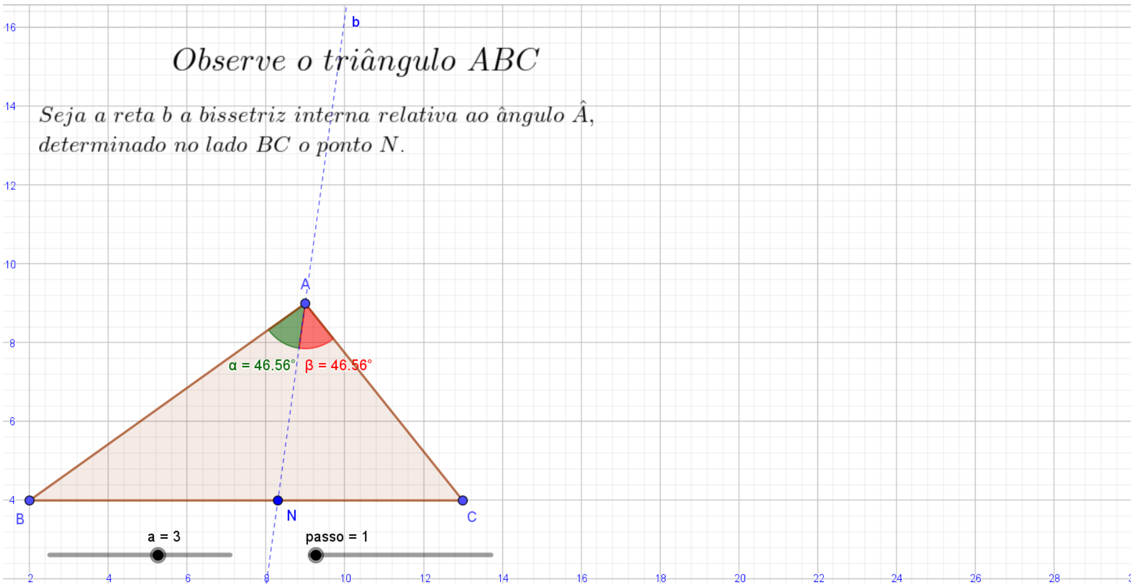
Aqui utilizamos o GeoGebra para fazer a demonstração do Teorema da Bissetriz Interna, através dos seguintes passos, podendo ser acessado em Teorema da Bissetriz Interna – GeoGebra.

Passo 1 – Seja ABC um triângulo qualquer.



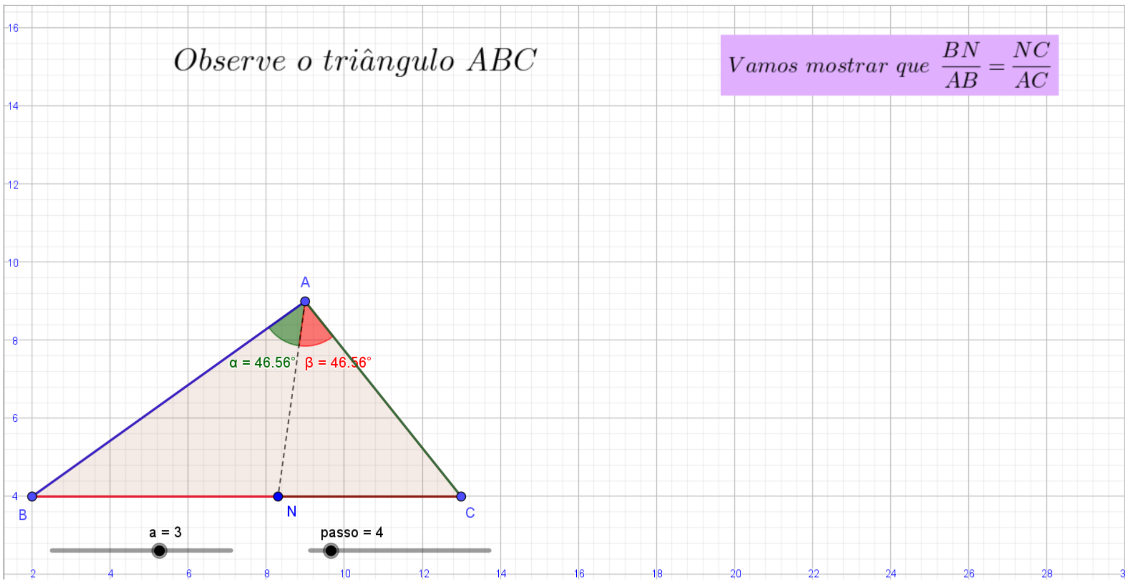
Fonte: autor

Passo 2 – Considerando o segmento $\overline{AN}$, bissetriz interna do ângulo BÂC, esta intersecta o lado BC, do triângulo ABC, no ponto N.



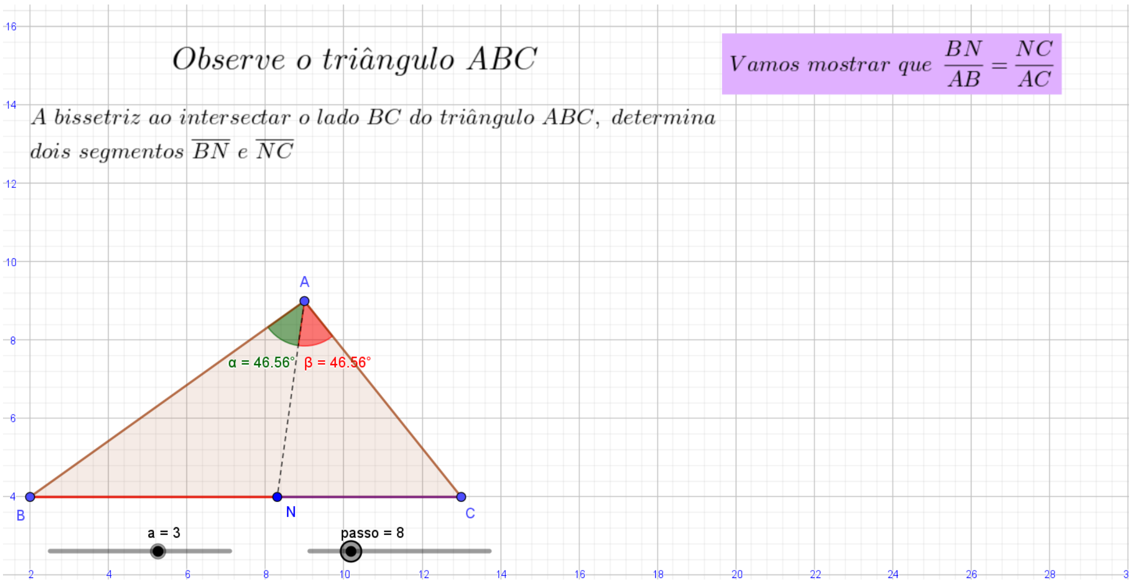
Fonte: autor

Passo 3 - Vamos mostrar que $\frac{BN}{AB} = \frac{NC}{AC}$.



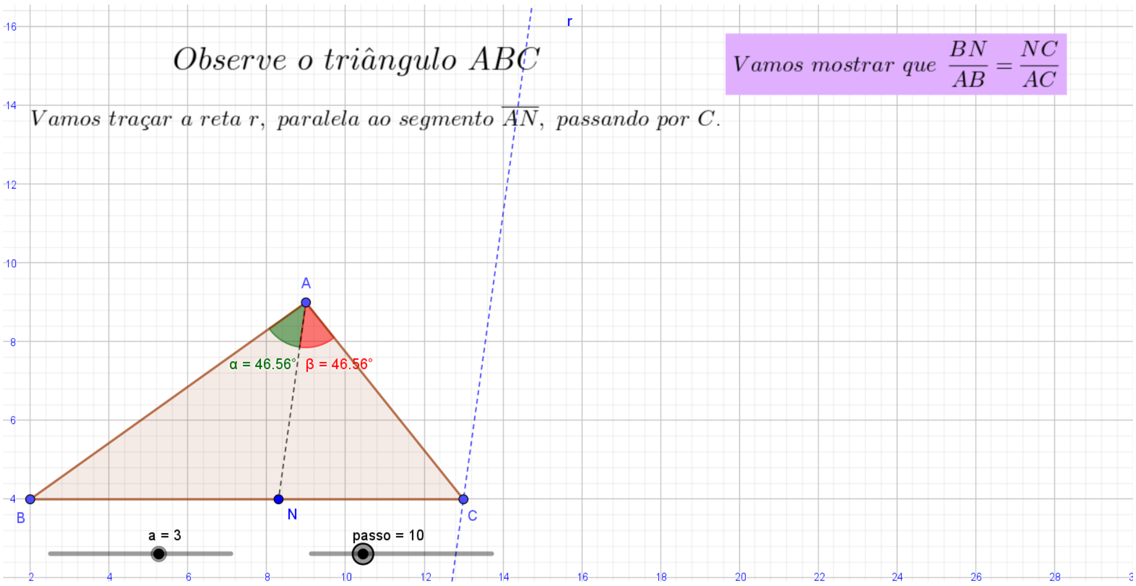
Fonte: autor

Passo 4 – A bissetriz, ao intersectar o lado BC do triângulo ABC, no ponto N, divide-o em dois segmentos $\overline{BN}$ e $\overline{NC}$.



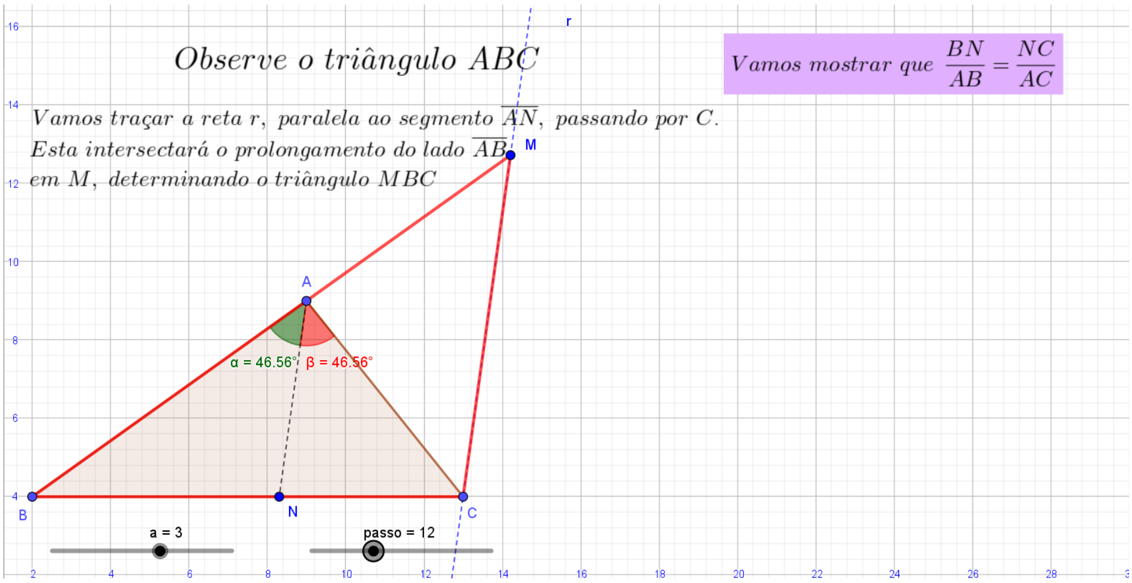
Fonte: autor

Passo 5 – Vamos traçar a reta r, paralela ao segmento $\overline{AN}$, passando por C.



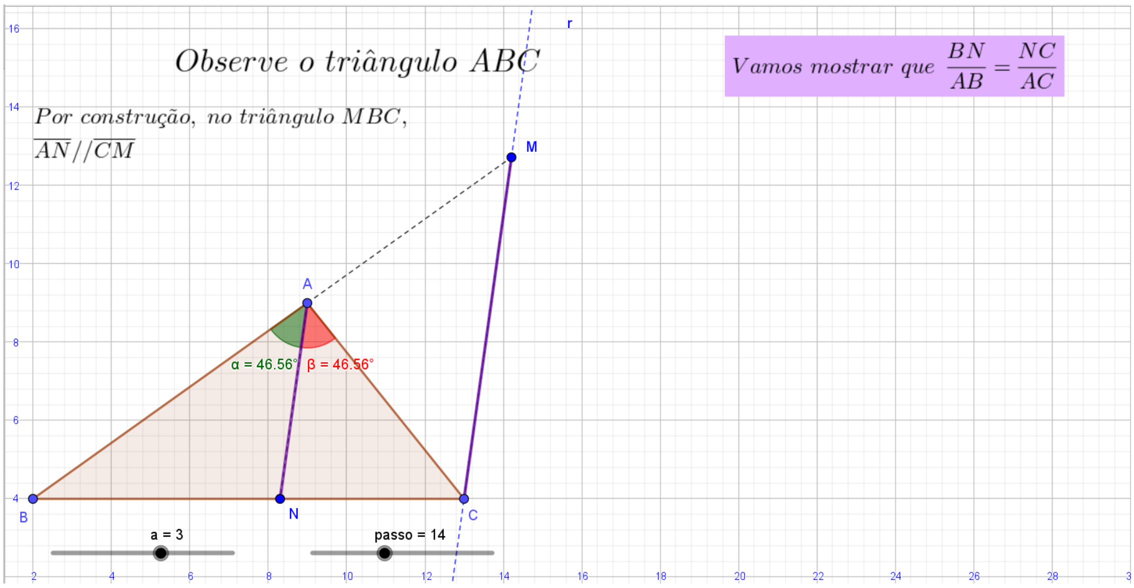
Fonte: autor

Passo 6 – A reta r intersectará o prolongamento do lado $\overline{BA}$ em M, determinando o triângulo MBC.



Fonte: autor

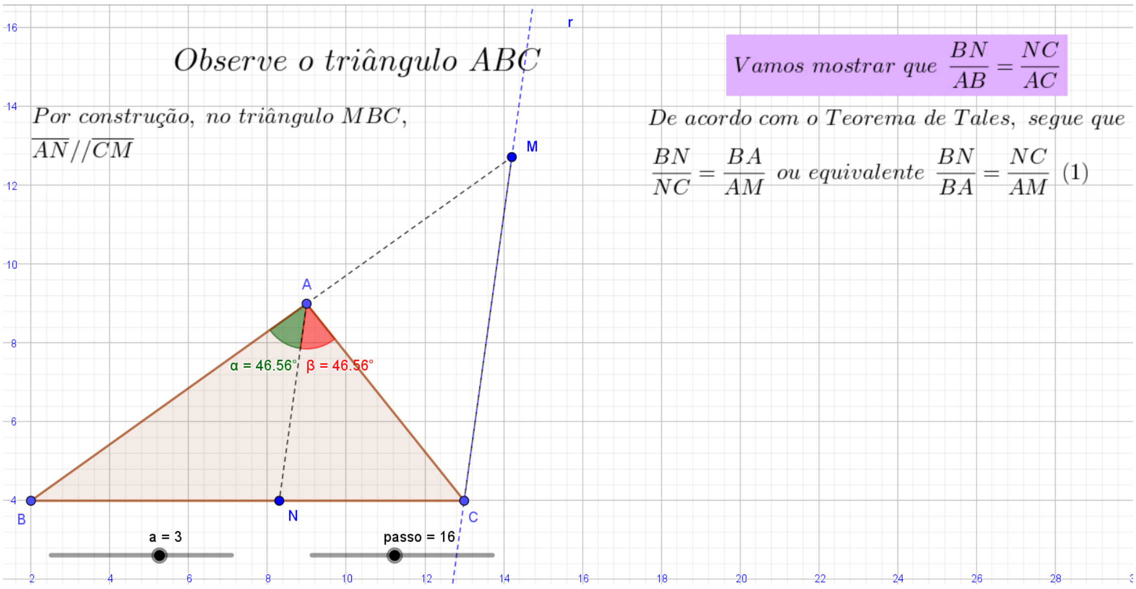
Passo 7 – Por construção, no triângulo MBC, $\overline{AN}$ // $\overline{CM}$.



Fonte: autor

Passo 8 - De acordo com o Teorema de Talles, considerando as paralelas NA e MC e transversais AM e BC, segue que $\frac{BN}{NC} = \frac{BA}{AM}$ ou equivalentemente

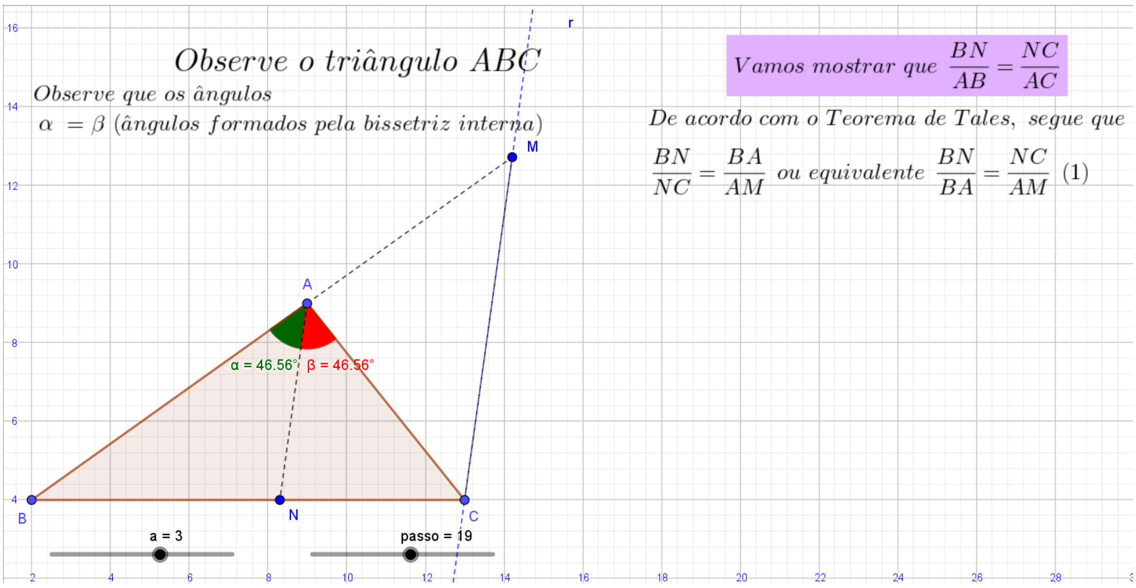
$$\frac{BN}{AB} = \frac{NC}{AC}\ (1)$$



Fonte: autor

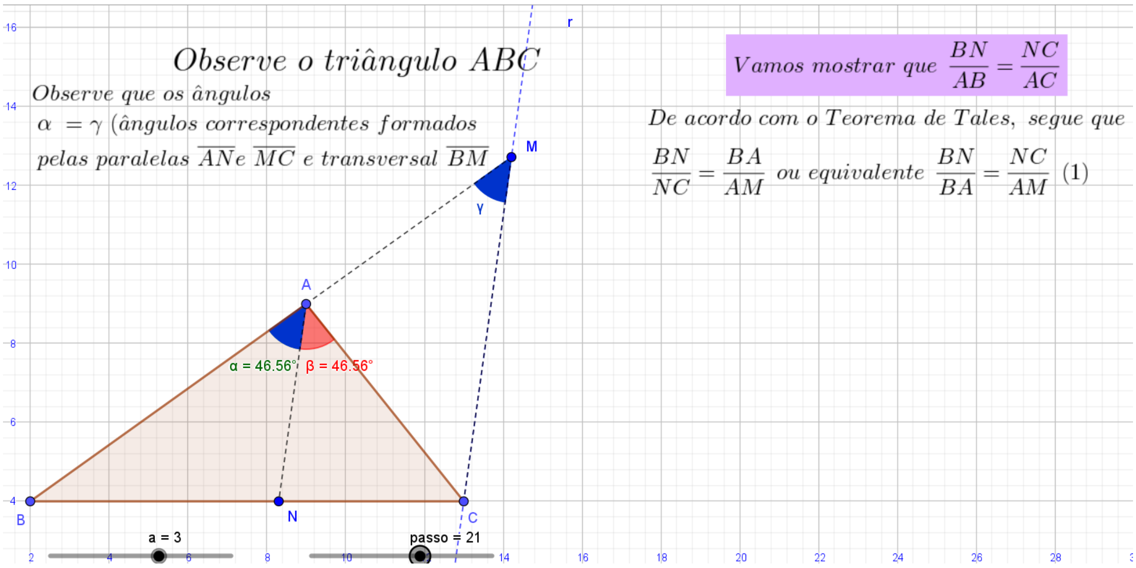
Passo 9 - Observe que os ângulos

α = β (ângulos formados pela bissetriz interna)



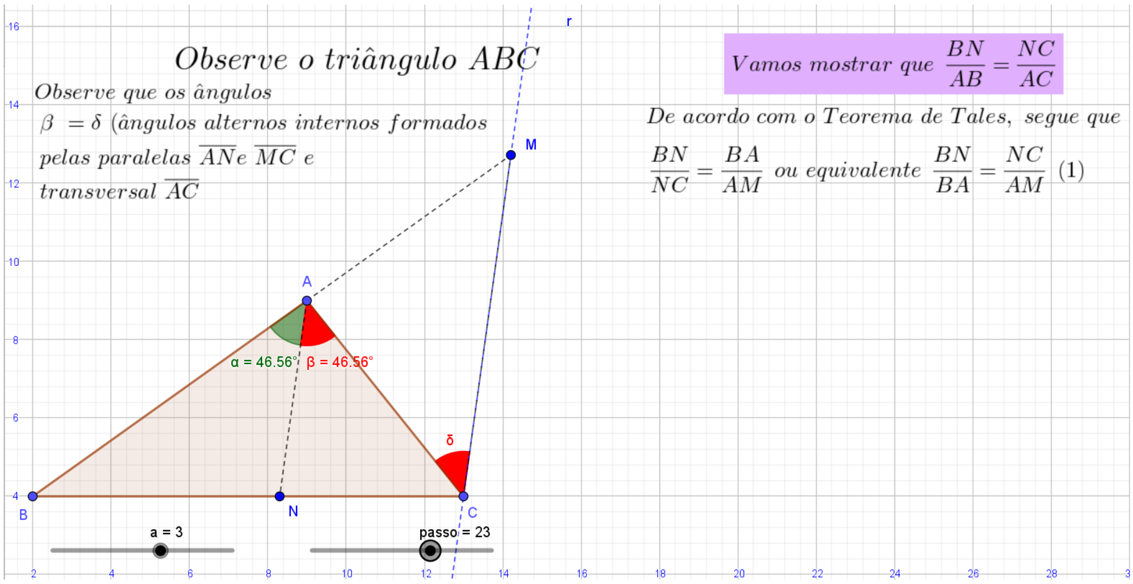
Fonte: autor

Por outro lado, α = γ (ângulos correspondentes formados pelas paralelas AN e MC e transversal BM)



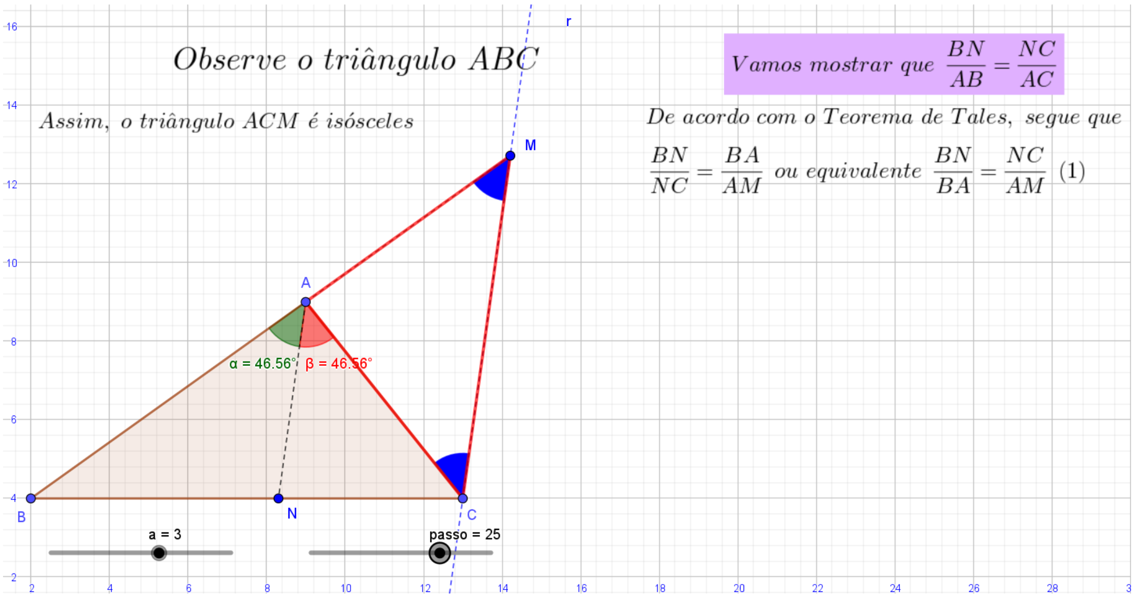
Fonte: autor

e, β = δ (ângulos alternos internos formados pelas paralelas AN e MC e transversal AC)



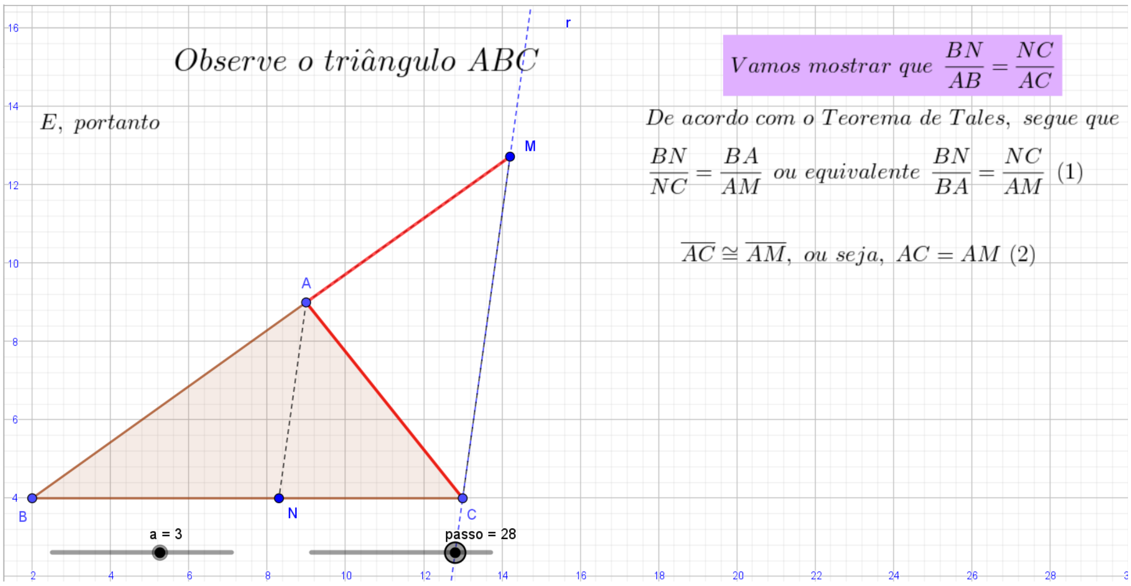
Fonte: autor

Passo 10 – Das figuras 11 e 12 e, por transitividade, que $\delta = \gamma$ e, por consequência, o triângulo ACM é isóscele (ângulos da base congruentes).



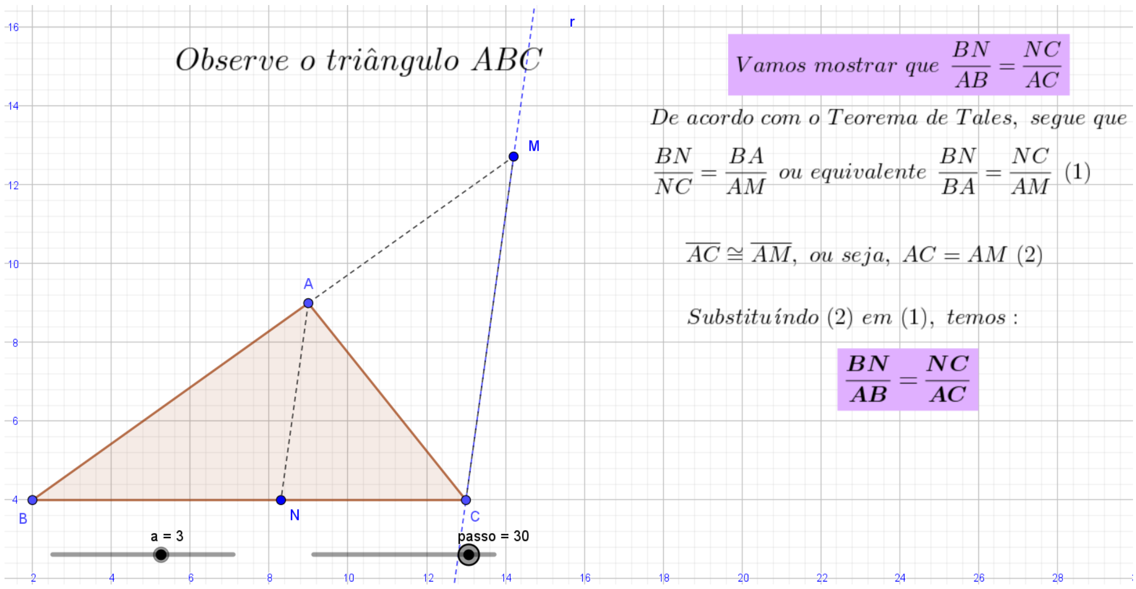
Fonte: autor

Passo 11 – Portanto, $\overline{AC} = \overline{AM}$ (2), ou seja, são congruentes.



Fonte: autor

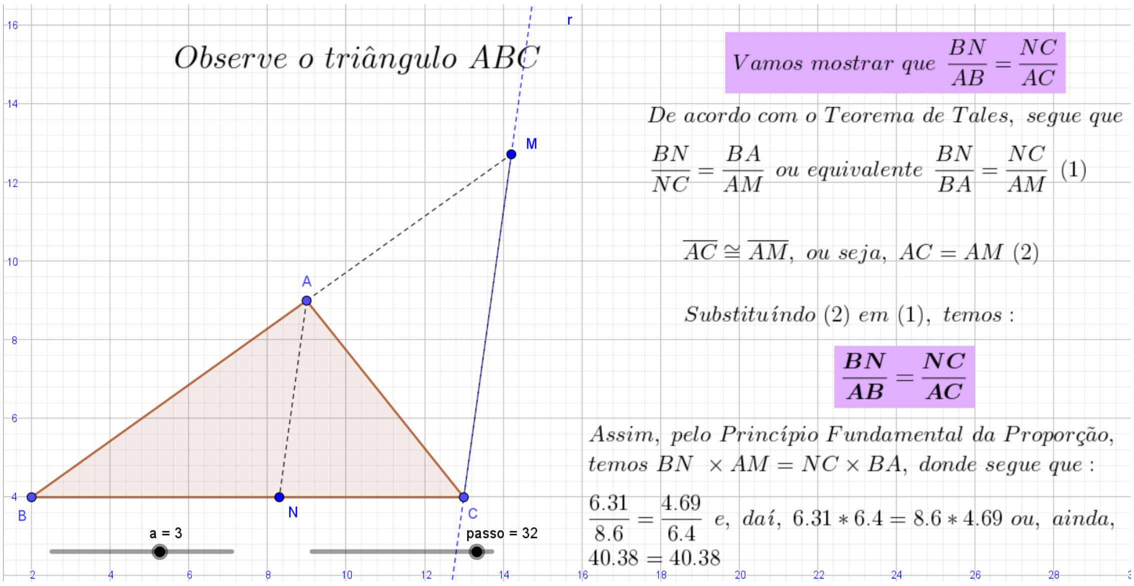
Passo 12 – Agora, substitua em (1), AM por AC, obtendo $\frac{BN}{AB} = \frac{NC}{AC}$.



Fonte: autor

Manipulamos a figura para os alunos verem que a propriedade estabelecida vale para qualquer triângulo. Criamos um controle deslizante extra, para mostrar a mudança das dimensões do triângulo inicial.

Percebemos que este mecanismo facilita a compreensão do aluno, pois ele realmente “enxerga” a validade do teorema.



Fonte: autor

Assim, temos o resultado.

Em todo triângulo, a bissetriz de cada ângulo interno divide o lado oposto a esse ângulo em segmentos proporcionais aos lados que formam o ângulo. (MARQUE e SILVEIRA, 2019, p. 271)

A seguir aplicamos o teste

1ª QUESTÃO – Teorema das Bissetrizes Internas
Aluno Nr: _______________ Turma: _______________________
Se os lados de um triângulo medem 10 cm, 15 cm e 20 cm, podemos afirmar que a medida do menor dos segmentos em que a bissetriz interna divide o maior lado é:
(A) 5 cm (B) 7 cm (C) 8 cm (D) 9 cm

Critério de avaliação: neste teste espera-se que os alunos interpretem os dados fornecidos e façam a uma figura de modo a visualizar a situação e poder assim empregar corretamente o Teorema da Bissetriz Interna. O aluno deverá obter 100% de acerto.

Concluído o tempo de execução de teste, foi feita a correção e obtivemos 72% de acertos, conforme o critério de avaliação. Após às correções passamos as discussões em grupo, seguindo os passos da metodologia Peer Instruction, reunindo os alunos em grupos, mesclando alunos que acertaram as questões com os alunos que não conseguiram acertar a questão.

A principal dificuldade observada foi na intepretação do problema, pois era necessário realizar a construção geométrica e identificar as hipóteses do Teorema da Bissetriz para que aplicassem o Teorema da Bissetriz Interna e atendessem ao pedido no problema.

Não houve tempo hábil para reaplicar o teste pois muitos alunos pediram orientações acerca do assunto, tomando muito tempo com explicações individualizadas dentro dos grupos. O mais importante que pudemos observar foi que aumentou a participação dos alunos durante a aula através de perguntas e respostas às questões que surgiam durante a explicação resumida do assunto.

Em 8 de junho de 2022, não foi possível ministrar a aula conforme planejado inicialmente, pois os alunos estavam muito agitados, chegando de uma atividade de “formatura”. Para mitigar o problema, apresentamos a revisão sobre o conteúdo da última aula no quadro branco e passamos à aplicação do segundo teste sobre o teorema das bissetrizes internas, pois não foi possível aplicá-lo no dia anterior.

2ª QUESTÃO – Teorema da Bissetriz Interna
Aluno Nr: _______________ Turma: ______________________
Um triângulo ABC tem os lados medindo 24 cm, 30 cm e 36 cm. Podemos afirmar que a medida dos segmentos determinados sobre o lado maior pela bissetriz do ângulo oposto é:
(A) 10 cm e 26 cm (B) 15 cm e 21 cm (C) 17 cm e 19 cm (D) 20 cm e 16 cm

Critério de avaliação: o aluno deverá obter 100% de acerto.

Concluído o tempo de execução de teste, foi feita a correção e obtivemos 75% de acertos, conforme o critério de avaliação.

Observamos que as construções geométricas, utilizando o GeoGebra, favorecem muito o entendimento dos conteúdos matemáticos. Isto ficou claro quando, realizado o segundo teste em sala, o resultado foi praticamente idêntico ao obtido no dia anterior.

Em 9 de junho de 2022, quinta-feira é o dia destinado à resolução de exercícios em sala, assim, foram realizados vários exercícios, em duplas, a respeito dos assuntos estudados anteriormente.

4.4 TÓPICO TEOREMA DA BISSETRIZ EXTERNA

Para este tópico, foram estabelecidos os seguintes objetivos:

- Conhecer o Teorema de Bissetriz Externa.
- Resolver situações problema envolvendo bissetriz externa.

Em 14 de junho de 2022, iniciamos o teorema da bissetriz externa, só que desta vez, usando apenas o quadro branco para as explicações e, em seguida, aplicamos o teste.

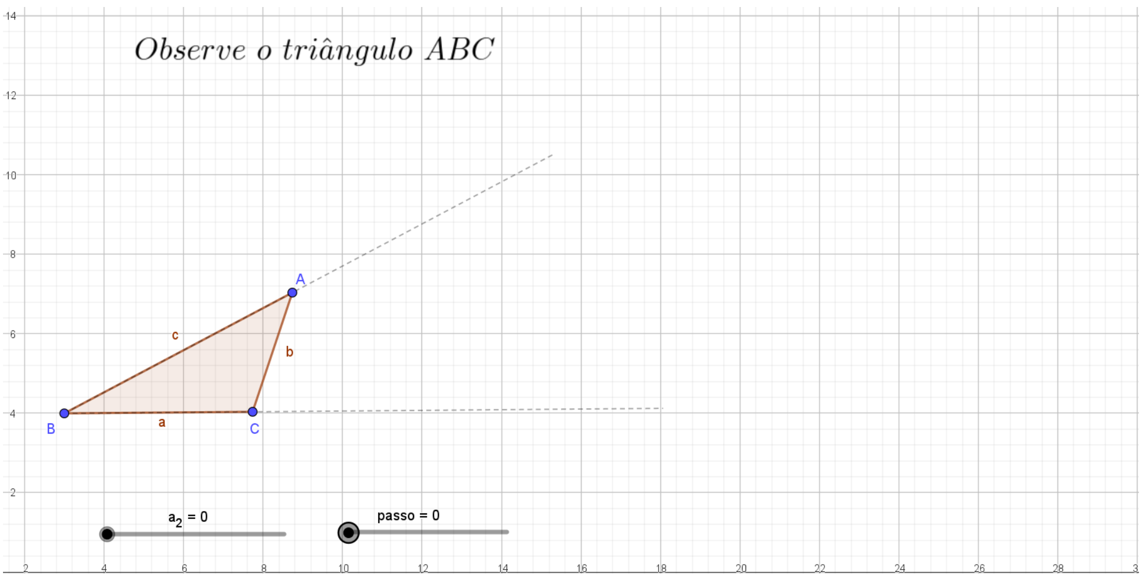
1ª QUESTÃO – Teorema da Bissetriz Externa
Aluno Nr: ______________ Turma: _____________________
Os lados de um triângulo medem 16 cm, 20 cm e 24 cm. Quanto devemos prolongar o menor lado para encontrar a bissetriz externa do ângulo oposto a ele?
(A) 50 cm (B) 60 cm (C) 80 cm (D) 20 cm

Critério de avaliação: o aluno deverá obter 100% de acerto.

Concluído o tempo de execução de teste, foi feita a correção e 71% dos alunos erraram o teste conceitual sobre o teorema da bissetriz externa. Percebemos que os alunos não conseguiram compreender o que estava sendo pedido no problema, bem como uma grande dificuldade na construção geométrica e a identificação do segmento procurado.

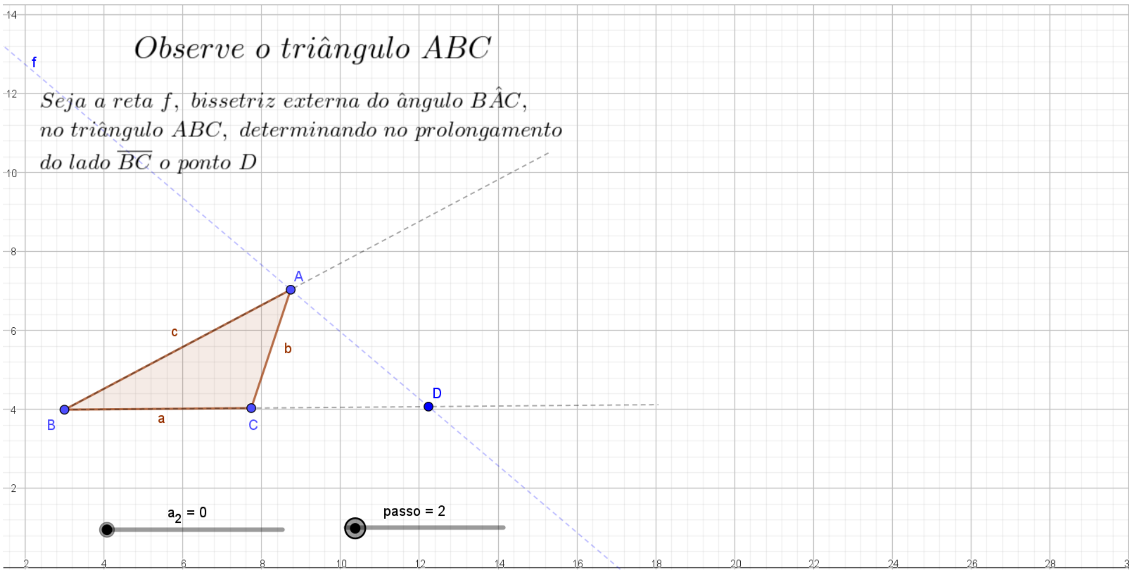
Conforme previsto na metodologia, quando há uma porcentagem muito alta de erros, deve-se repetir a aula, e assim foi realizada uma nova explicação sobre o teorema utilizando o GeoGebra para mostrar o teorema da bissetriz externa, com os seguintes passos, podendo ser acessado em Teorema da Bissetriz Externa – GeoGebra.

Passo 1 – Observe o triângulo ABC.



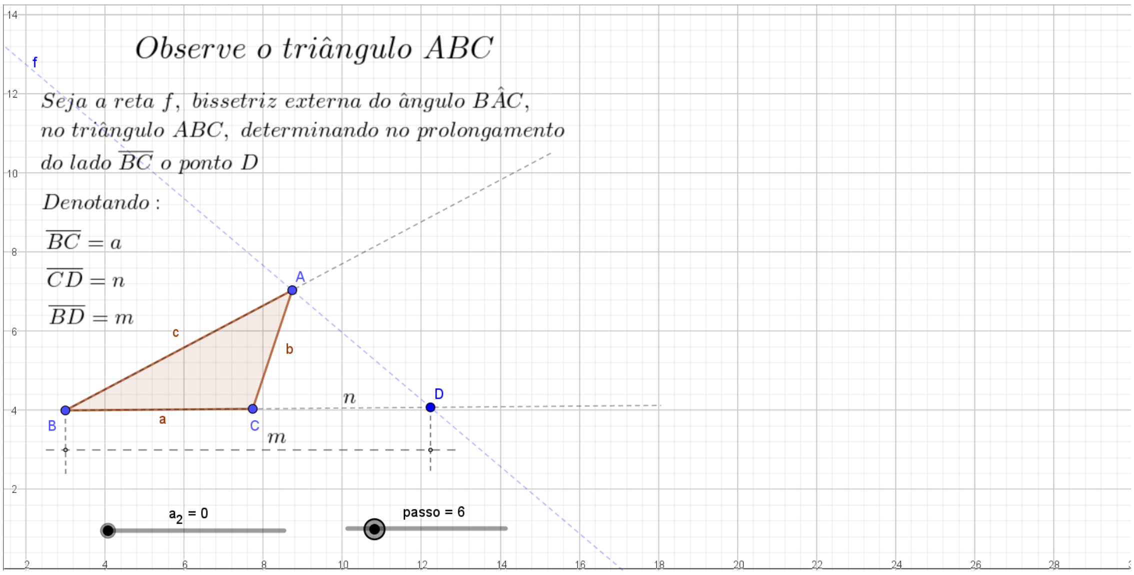
Fonte: autor

Passo 2 – Seja a reta *f*, bissetriz do ângulo externo a BÂC, no triângulo ABC, determinando no prolongamento do lado BC o ponto D.



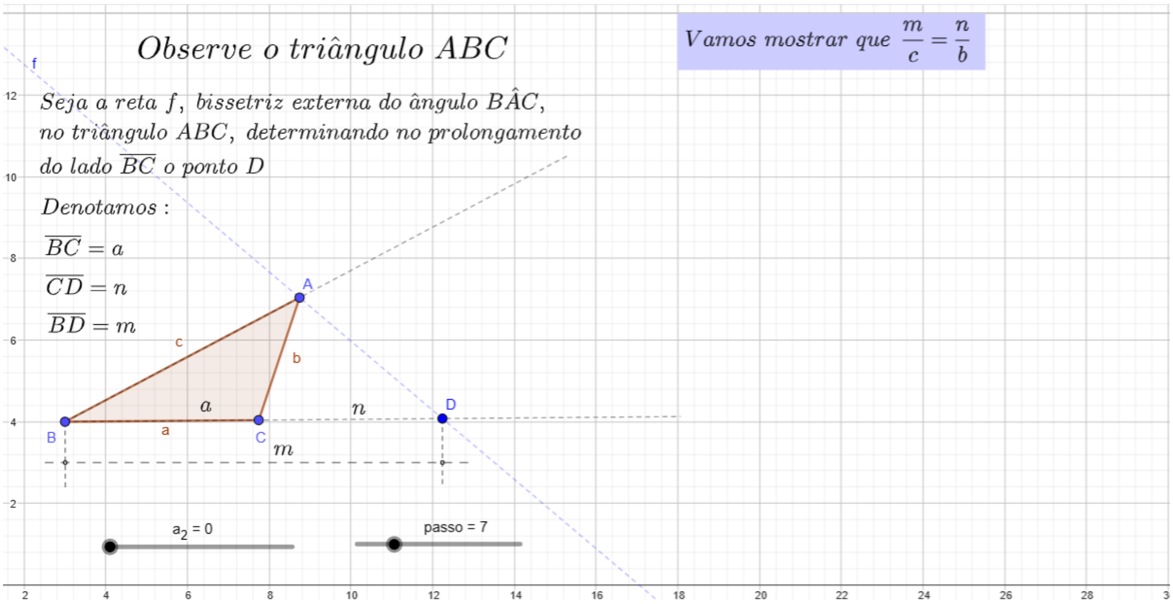
Fonte: autor

Passo 3 – Denotamos $\overline{BD}$ = m; $\overline{CD}$ = n; $\overline{BA}$ = c; e $\overline{AC}$ = b.



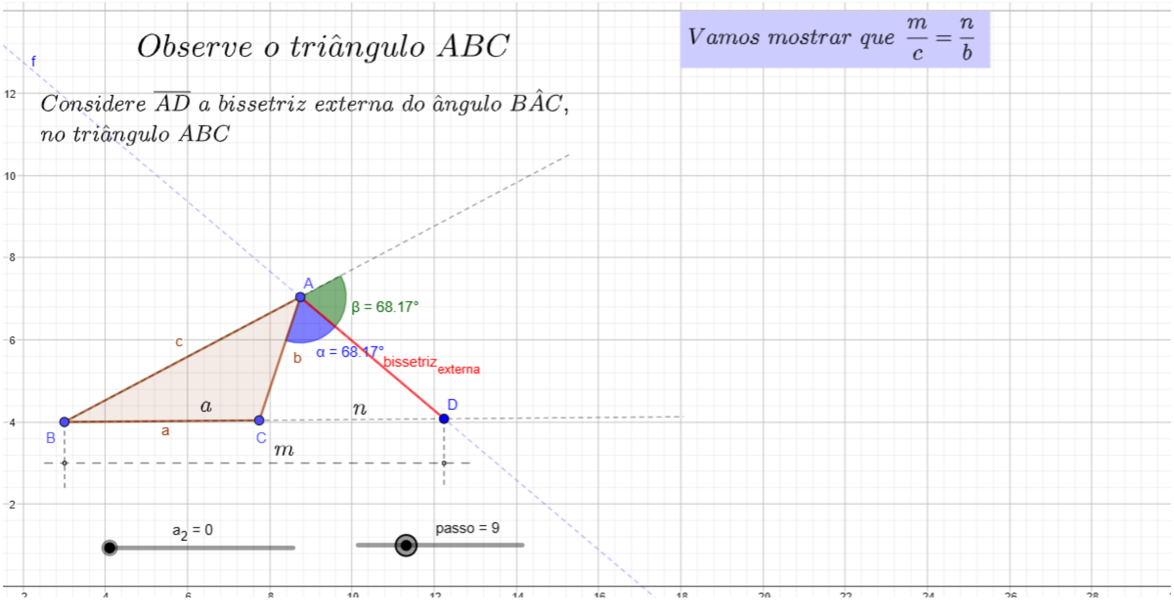
Fonte: autor

Passo 4 – Vamos mostrar que $\frac{m}{c} = \frac{n}{b}$, onde a $= m - n$.



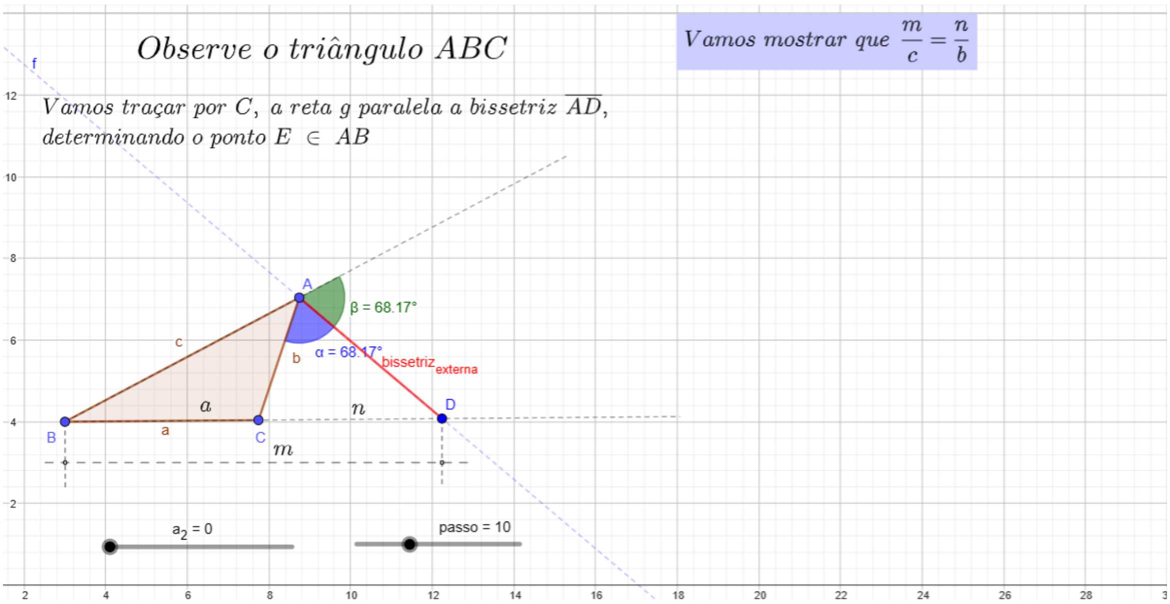
Fonte: autor

Passo 5 – Considere o segmento AD, bissetriz externa do ângulo BÂC.



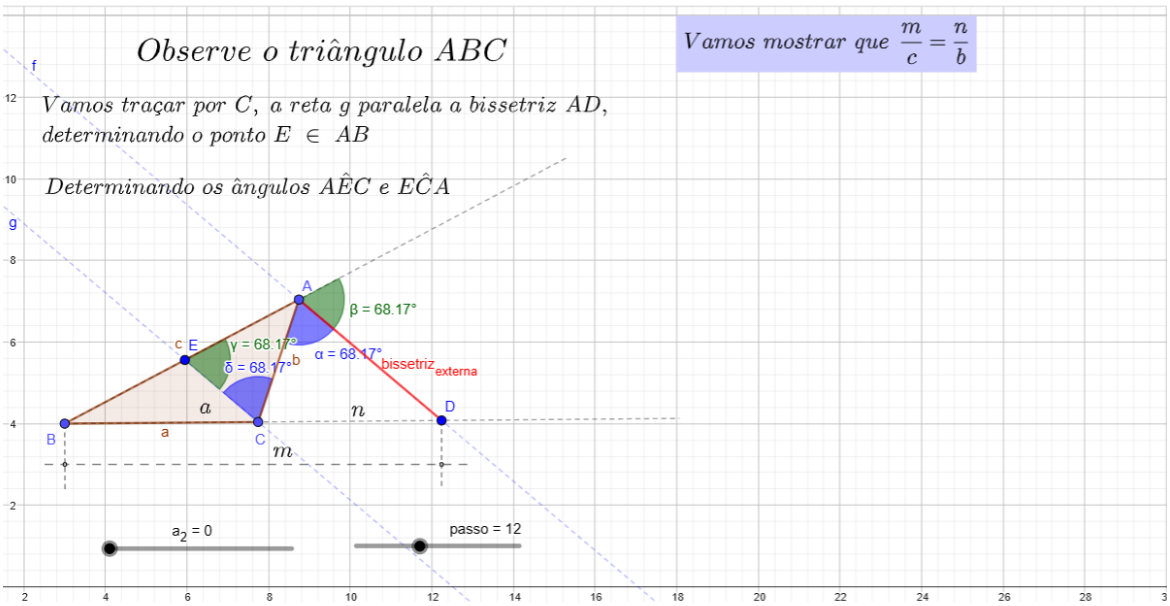
Fonte: autor

Passo 6 – Vamos traçar por C, uma reta paralela à bissetriz AD, determinando o ponto E ∈ A.



Fonte: autor

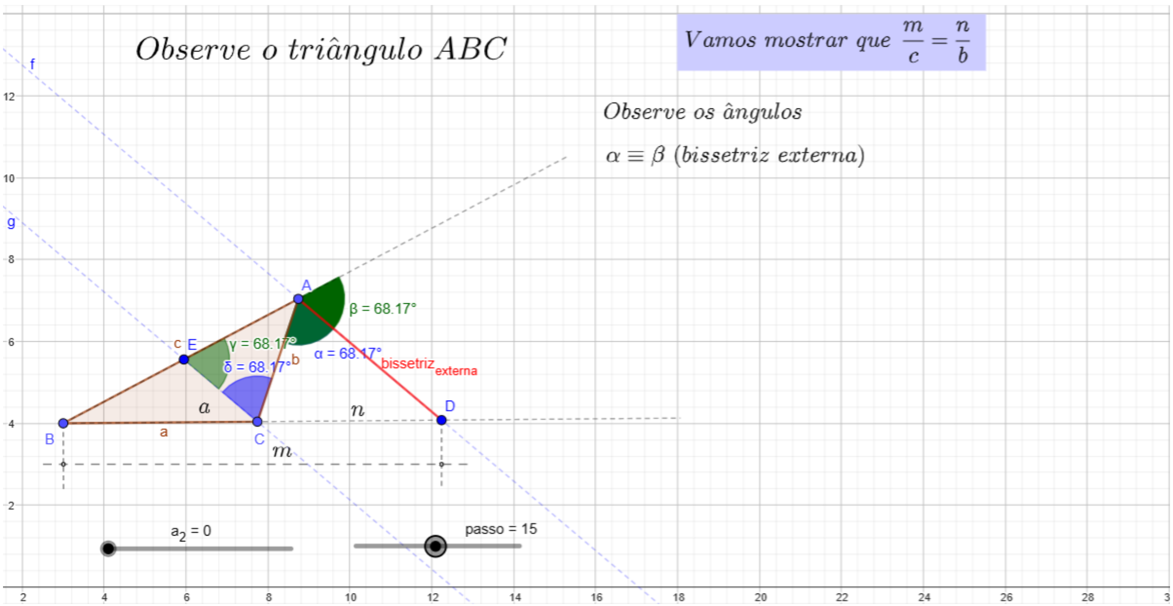
Passo 7 – Esta reta determina os ângulos $A\hat{E}C$ e $E\hat{C}A$.



Fonte: autor

Passo 8 – Observe os ângulos

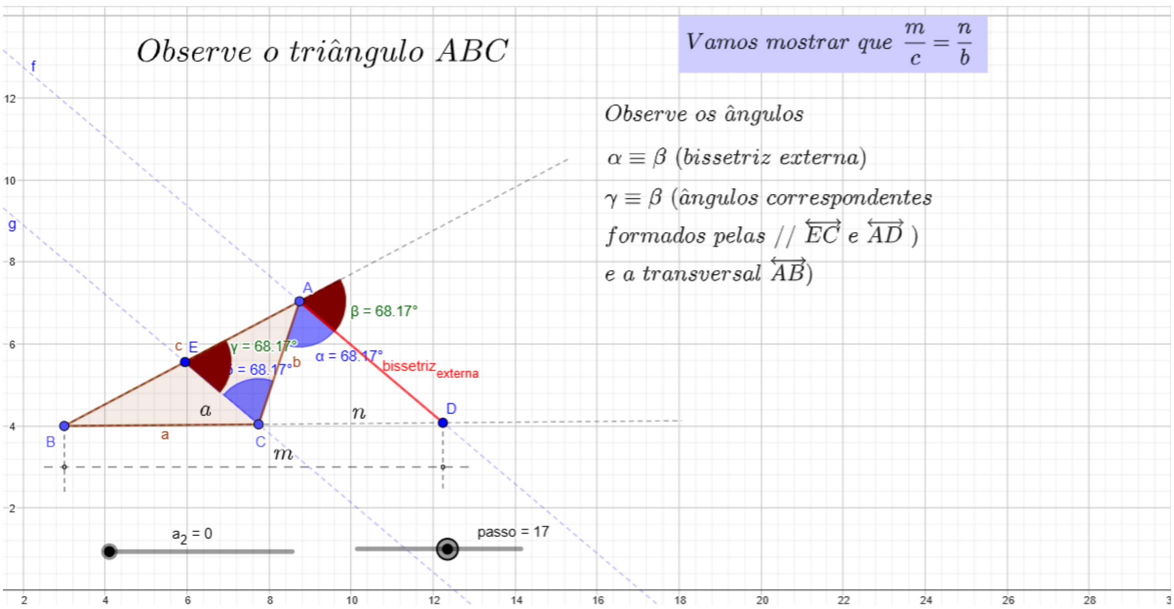
α = β (ângulos formados pela reta AD, bissetriz externa)



Fonte: autor

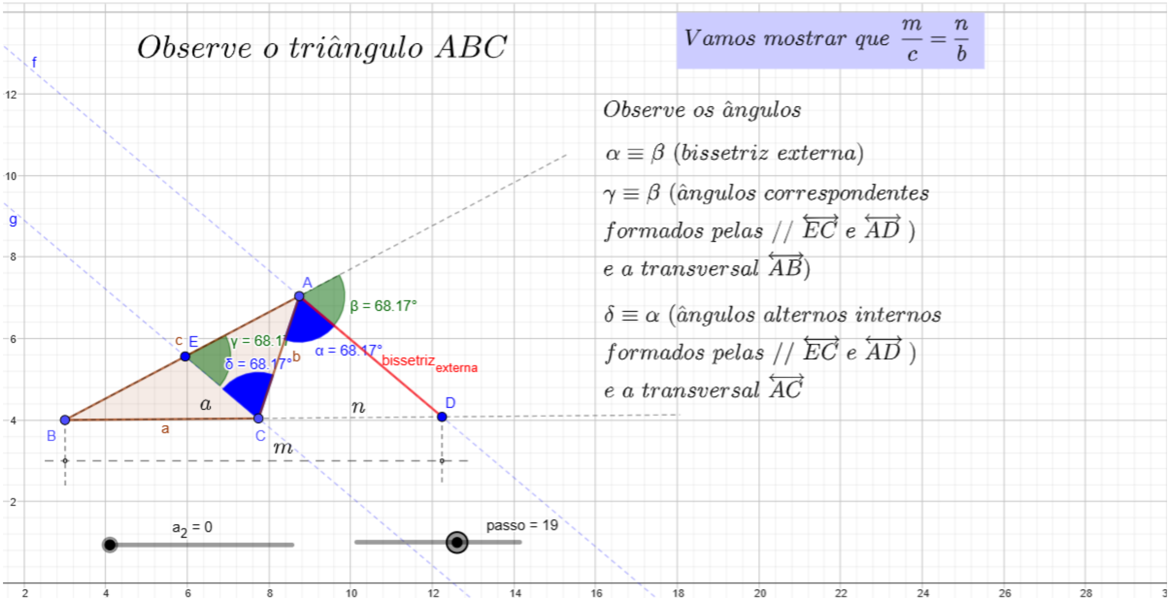
Por outro lado,

γ = β (ângulos correspondentes formados pelas retas paralelas EC e AD cortadas pela reta transversal EA).



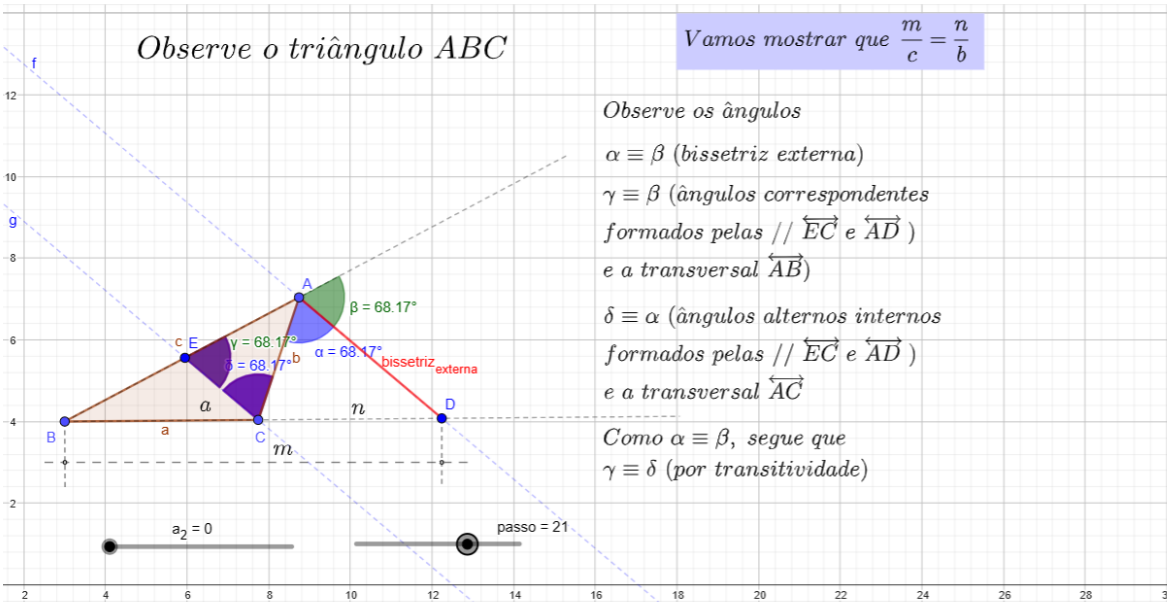
Fonte: autor

E, ainda, δ = α (ângulos alternos internos formados pelas retas paralelas EC e AD; e pela reta transversal AC.



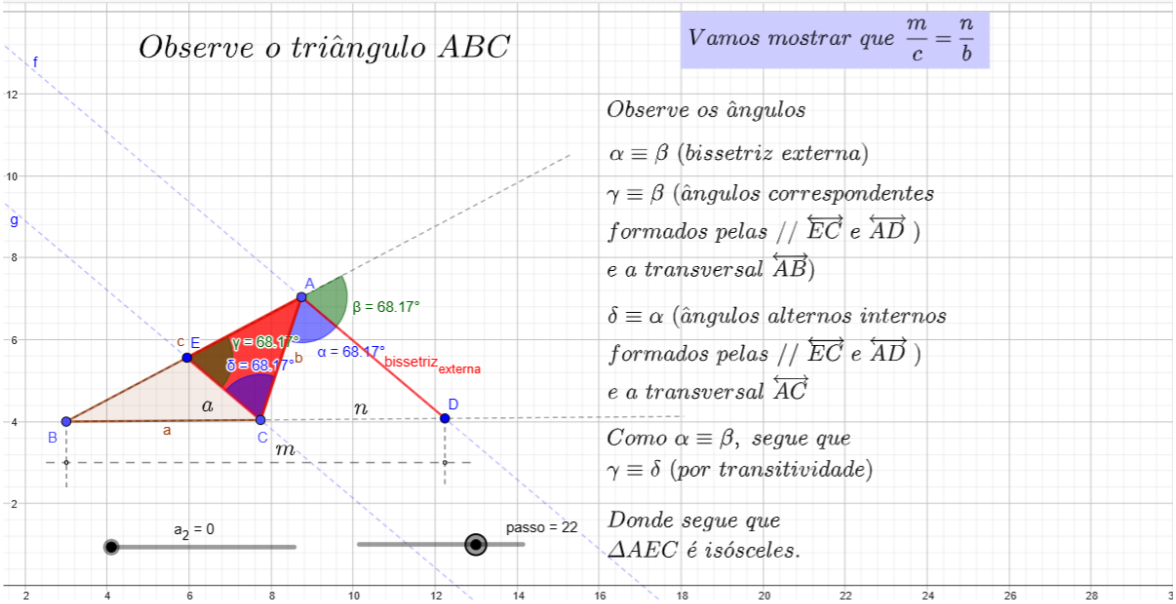
Fonte: autor

Como α = β (bissetriz externa), segue que γ = δ (por transitividade).



Fonte: autor

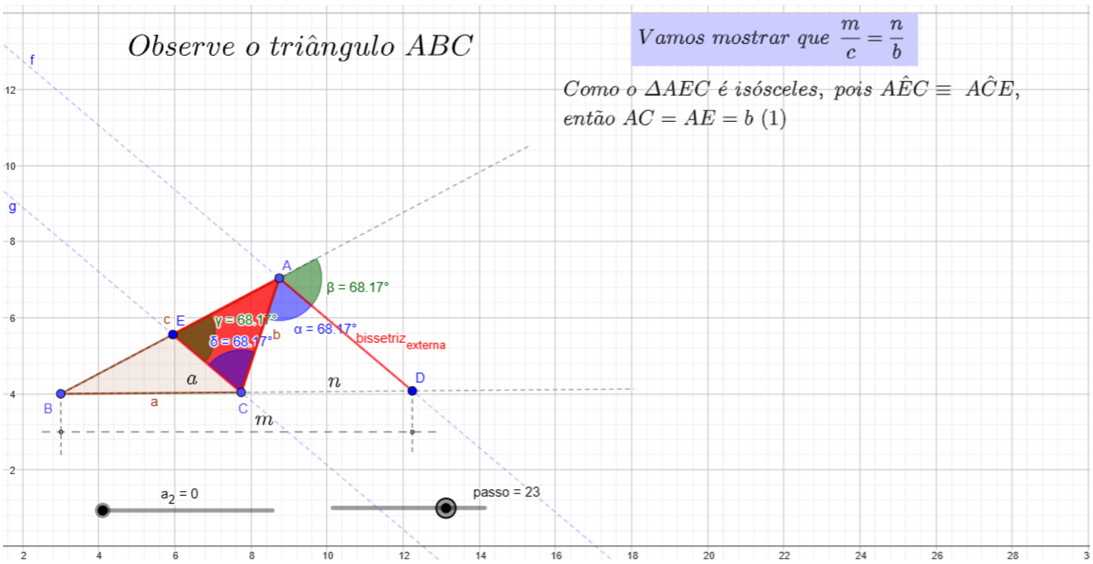
Donde segue que o triângulo AEC é isósceles (ângulos da base congruentes).



Fonte: autor

Passo 9 – Como o triângulo ACE é isósceles, então

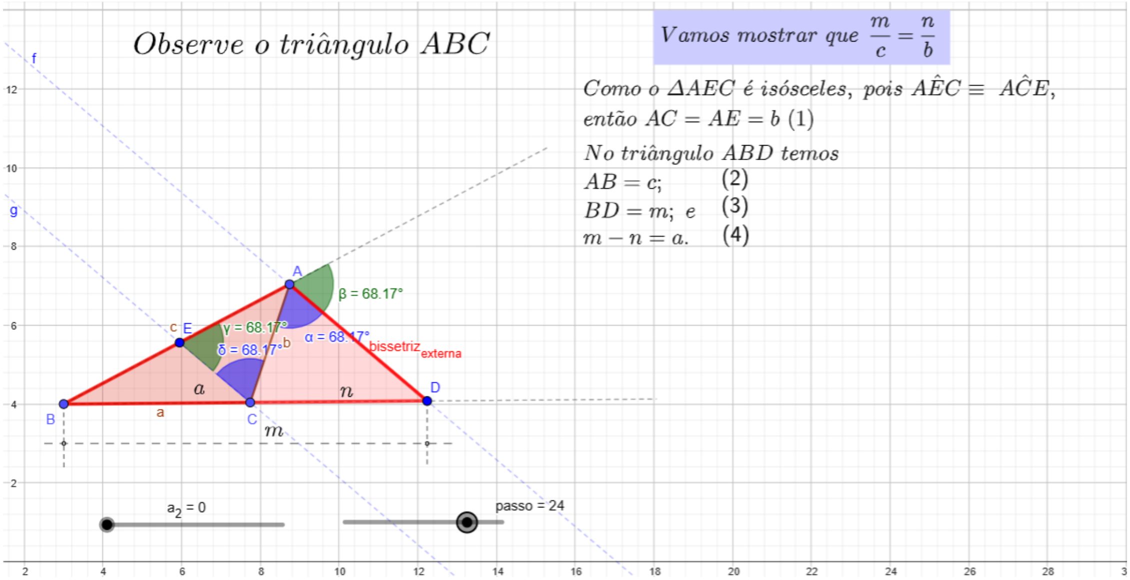
$$\overline{AE} = \overline{AC} = b \text{ (1).}$$



Fonte: autor

Passo 10 – Perceba que no triângulo ABD, temos

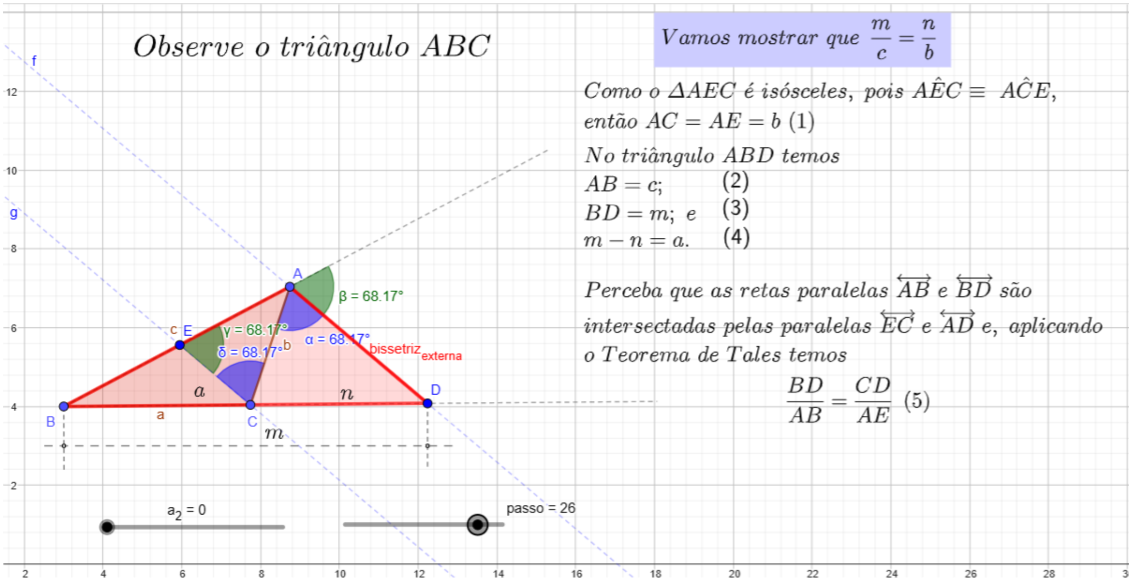
$$\begin{cases} AB = c; & (2) \\ BD = m; & (3) \\ m - n = a; & (4) \end{cases}$$



Fonte: autor

Perceba, ainda, que as retas AB e BD são intersectadas pelas retas paralelas AD e EC, e assim, aplicando o Teorema de Tales, temos que

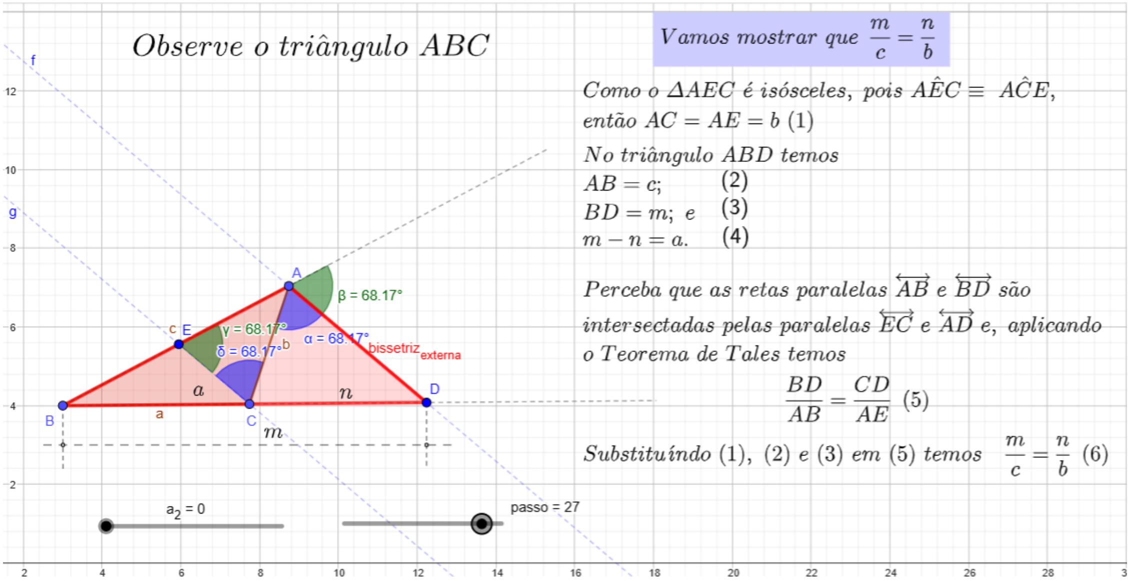
$$\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AE} \; (5)$$



Fonte: autor

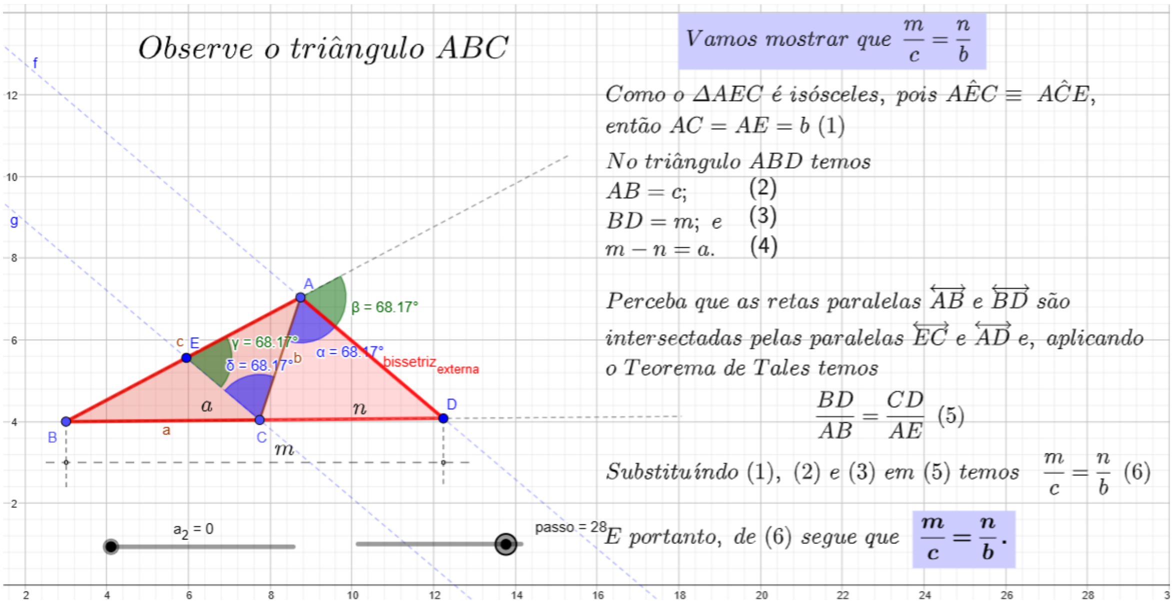
Passo 11 – Substituindo (1), (2) e (3) em (5), então temos

$$\frac{m}{c} = \frac{n}{b} \quad (6)$$



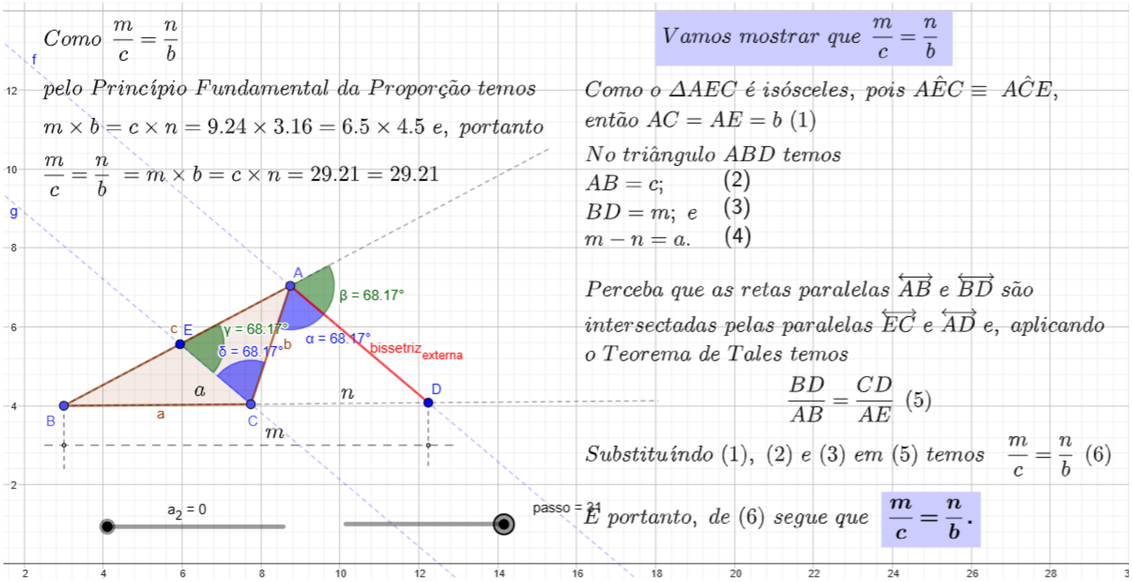
Fonte: autor

E portanto, de (4) e (6), e portanto temos $\frac{m}{c} = \frac{n}{b}$.



Fonte: autor

Como fizemos anteriormente, manipulamos a figura para os alunos verem que a propriedade estabelecida vale para qualquer triângulo. Construímos um controle deslizante extra, para mostrar a mudança das dimensões do triângulo inicial, permitindo que os alunos pudessem entender a propriedade obtida no teorema.



Fonte: autor

Assim, temos o resultado

> A bissetriz do ângulo externo de um ângulo de um triângulo determina sobre o lado oposto ao ângulo dois segmentos subtrativos, proporcionais aos outros dois lados. (MARQUE e SILVEIRA, p. 274, 2019)

E, com estes passos apresentados mostramos o teorema da bissetriz externa em um triângulo ABC qualquer.

Concluída a apresentação, reaplicamos o mesmo teste, obtendo 96% de acerto.

No dia 20 de junho de 2022, realizamos a 1ª Avaliação Parcial, tendo o conteúdo sido estudado seguindo a metodologia Peer Instruction e os resultados estão apresentados na seção 4.5.

No dia 22 de junho de 2022 corrigimos a 1ª Avaliação Parcial, o resultado obtido foi muito satisfatório pois obtivemos 77% de notas maiores ou iguais a 6,0, sendo que a média no colégio é 6,0.

Em comparação com o desempenho individual de cada aluno, percebemos que houve um amadurecimento quanto à rotina de estudo.

Ao final do 2º trimestre, durante o Conselho de Classe, as avaliações dadas pelos alunos foram muito positivas e percebemos que os alunos se tornaram mais responsáveis e comprometidos com seus estudos.

4.5 SÍNTESE DOS RESULTADOS

Foi observado que os alunos demonstraram maior interesse e participação ativa no processo de aprendizagem ao aplicarmos a metodologia Peer Instruction em consonância com o uso de Tecnologias da Informação e Comunicação, em particular o software GeoGebra.

Ao utilizarmos a metodologia ativa Peer Instruction, esta despertou neles a participação mais ativa no processo de aprendizagem, uma vez que foram incentivados a refletir, debater nos grupos e compartilhar suas respostas, deixando-os mais à vontade e confortáveis para fazer perguntas e buscar esclarecimentos com os colegas e o professor. Durante o desenvolvimento da pesquisa os alunos apresentaram um maior envolvimento nas aulas, maior apresentação de dúvidas acerca das atividades extraclasse, o que mostra que mais alunos estão estudando em domicílio, e maior participação nos debates em sala de aula. Tudo isto favoreceu maior engajamento e colaboração em sala de aula.

A metodologia, nas suas diversas avaliações, nos permitiu perceber com maior clareza diversas lacunas de aprendizagem de determinados alunos, no que tange a conceitos básicos, permitindo intervenções de forma mais eficaz, o que possibilitou sanar determinadas dúvidas e favorecer o aprendizado.

Por outro lado, percebemos certas dificuldades como resistência dos alunos frente a aulas que exigem uma participação mais ativa, dificuldade de trabalhar em grupo, tempo gasto para acalmar a turma e montar os grupos, bem como a necessidade de estudo prévio.

Para mitigar os efeitos negativos dos pontos citados acima, tomamos as seguintes medidas, que passamos a detalhar nos próximos 4 parágrafos.

Quando notamos uma resistência inicial dos alunos frente às aulas que exigem uma participação mais ativa, decidimos conversar com a turma da necessidade de sair da zona de conforto para que possam amadurecer intelectual e emocionalmente, visto que o aluno que não expõe suas dúvidas não aprende e concomitante a estes movimentos dados pelos alunos, valorizamos as respostas individuais com elogios. Percebemos que estes simples elogios tornaram o ambiente, em sala de aula, mais suave e acolhedor.

Com relação ao trabalho em grupo, percebemos que isto acontecia fortemente em virtude da necessidade que o jovem pré-adolescente tem em ser incluído no grupo, e o medo inicial de se expor e, por vezes, ser motivo de risos dos colegas, muitos não queriam trabalhar no grupo. Oposto a este comportamento, outros sentiam a forte necessidade de conversar, contudo, conversar assuntos não pertinentes ao que estávamos estudando em sala. Para solucionar este fato, foram montadas duplas com critérios de compreensão do assunto, observados após a correção do questionário conceitual, estando o professor conhecedor do comportamento disciplinar de cada aluno. Foram formadas duplas com alunos mais focados que entendiam facilmente o conteúdo com outro aluno um pouco mais disperso e com dificuldades de compreensão do assunto estudo.

Com relação ao tempo gasto para acalmar a turma e montar os grupos, não foi encontrada uma solução para este fato, dado que este comportamento é muito presente na faixa etária do 9º Ano. Foi necessário muito diálogo e chamada de atenção para o que era importante. Este fato, realmente, foi muito desgastante pois o tempo de cada aula é muito curto e cada minuto perdido é irreparável. Este é um problema crônico, conforme estudo da Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico (OCDE), no Brasil 60% dos professores relatam perder até 20% do tempo de aula acalmando a turma pelos mais diversos motivos (G1, 2015).

Da análise das provas realizadas em sala, por 26 dos 30 alunos, temos que a 3ª Avaliação Parcial 1 (3ª AP1), cujo conteúdo era Problemas do segundo grau e Equações irracionais e biquadradas, foi aplicada antes de iniciarmos com a Metodologia Ativa Peer Instruction, a 1ª Avaliação Parcial 2 (1ª AP2), cujo conteúdo era Teorema de Tales e Teorema das Bissetrizes, foi aplicada após aplicarmos a Metodologia Ativa Peer Instruction e a 2ª Avaliação Parcial 2 (2ª AP2), cujo conteúdo era Relações métricas no triângulo retângulo, Média Geométrica no triângulo retângulo e Teorema de Pitágoras, foi aplicada no método tradicional de aula e serviu de verificador da efetividade da metodologia após a sua aplicação. Obtivemos os índices conforme a Tabela 1.

Tabela 1 – Dados comparativos das avaliações

	Média	Desvio Padrão
3ª AP1	5,7	3,7
1ª AP2	8,0	2,9
2ª AP2	7,3	2,6

Fonte: autor

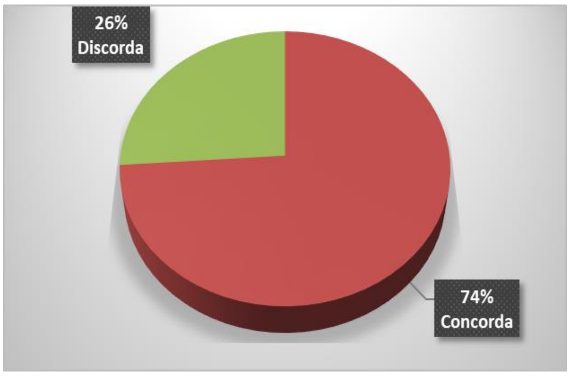
Cabe ressaltar que os tópicos trabalhados com a Peer Instruction e avaliados na 1ª AP2 é considerado mais difícil pelos alunos e com base na minha experiência em sala de aula, os alunos apresentam mais dificuldades no aprendizado destes assuntos em detrimento aos tópicos avaliados na 3ª AP1 e 2ª AP2.

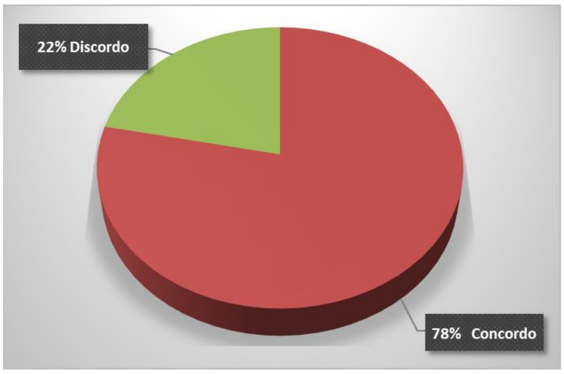
Perceba que da 3ª AP1 para a 1ª AP2, houve um incremento de 2,3 pontos na média e o desvio padrão baixou 0,8 ponto e observamos, ainda, que 62% da turma melhorou de uma prova para outra e na 2ª Avaliação Parcial 2, aplicada quando não estávamos mais trabalhando com a metodologia em sala de aula, 46% dos alunos melhoraram ou mantiveram a nota em relação a 1ª AP2, mostrando assim que, após desenvolvermos a metodologia com a turma, esta ainda teve efeito sobre o desempenho da turma, bem como, a eficácia da metodologia empregada. Não foi possível identificar os motivos que levaram a obtenção dos resultados na 2ª AP2 pois, após a aplicação da 1ª AP2, por motivo de sobrecarga de trabalho, tive que afastar-me do 9º Ano.

E, a necessidade do estudo prévio. Inicialmente percebemos que os alunos não estavam fazendo as leituras e respondendo ao estudo dirigido, para mitigar isto, resolvemos bonificar as respostas, apresentadas na plataforma Moodle, do estudo prévio. Tivemos que fazer esta correção de rumo tendo em vista já ser previsto na própria metodologia esta bonificação, mas também, como uma forma de motivar o estudo, pois sabemos que é da natureza humana a necessidade de ser premiado pelo que fazemos de bom e correto.

Por fim, para verificarmos a aceitação da Metodologia Ativa Peer Instruction, aplicamos uma pesquisa de Opinião, obtendo os resultados apresentados na Figura 3.

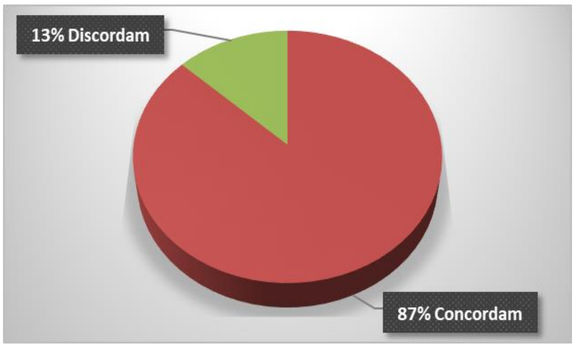
Figura 3 – Pesquisa de Opinião/Metodologia Ativa

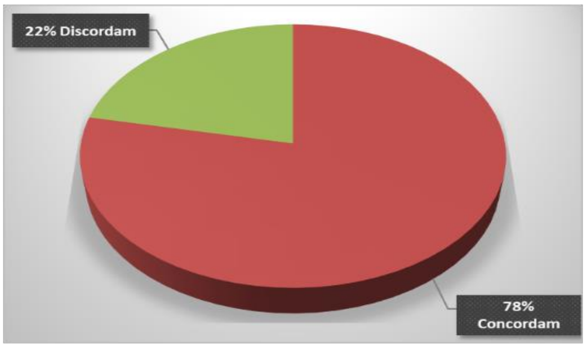




Pergunta 1 – O Estudo em pares é muito útil para a compreensão do conteúdo estudado em sala de aula?

Pergunta 2 – Sinto-me confortável com o estudo em grupo?





Pergunta 3 – O uso do GeoGebra facilitou a compreensão do assunto estudado em sala de aula?

Pergunta 4 – O uso do GeoGebra em sala de aula motivou-o a estudar?

Fonte: autor

Esses resultados, apresentados na Figura 2, indicam a aceitação da metodologia ativa pelos estudantes, bem como mostram um impacto positivo em seu aspecto emocional, dado o envolvimento em atividades de estudo em pares, promovendo sentimento de pertencimento e colaboração na turma, fortalecendo a confiança em si mesmos à medida que iam vencendo as dificuldades com o auxílio dos colegas e percebendo que também são capazes de resolver problemas matemáticos mais complexos. Aliado a tudo isso, a implementação do uso do GeoGebra, nas demonstrações dos teoremas, tornou o aprendizado mais acessível e compreensível, tornando o processo de aprendizagem mais envolvente, gratificante e significativo. Assim, os dados da pesquisa de opinião sugerem que a metodologia ativa Peer Instruction promoveu o aprendizado efetivo ao criar um ambiente mais positivo e colaborativo.

Do exposto, percebeu-se que a metodologia contribuiu de forma significativa para o aprendizado dos alunos, uma vez que houve maior envolvimento dos alunos durante as aulas através da participação ativa e consciente, refletindo sobre a capacidade de compreender os conceitos abordados durante as discussões em grupo e ao compartilhar suas ideias acerca da solução encontrada para os problemas apresentados. Isto mostra uma melhora significativa na capacidade argumentativa matemática, tudo isso bem caracterizado nos resultados obtidos nos diversos testes conceituais, que foram evoluindo ao longo do desenvolvimento da pesquisa. Assim, a metodologia Peer Instruction proporcionou um ambiente de aprendizado ativo, significativo e colaborativo, beneficiando os alunos, favorecendo um melhor entendimento da geometria e no desenvolvimento de habilidades cognitivas e sociais relevantes para o desenvolvimento intelectual dos alunos. Os alunos demonstraram um maior engajamento nas aulas, uma melhor compreensão dos conceitos e uma melhoria significativa nas habilidades de argumentação matemática, demonstrando, desta forma, a efetividade da metodologia. Isto ficou demonstrado também na pesquisa de opinião acerca da metodologia empregada com os alunos, respondida por 30 alunos, conforme os gráficos, apresentados na Figura 2, que consolidam os dados.

O questionário sobre a metodologia ativa Peer Instruction com o uso do GeoGebra encontra-se no Apêndice C.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Há fortes indícios da viabilidade do emprego da metodologia Peer Instruction quando observamos os seguintes passos que nos levarão a obtenção de resultados positivos, demonstrando a eficácia da metodologia:

1) Preparação prévia do professor: preparar meticulosamente a aula, elaborando apresentações visuais que contenham exemplos práticos que promovam a curiosidade acerca dos conceitos a serem estudados, levando a uma contextualização que os tornem relevantes para a vida dos alunos.

2) Estudo prévio pelos alunos: os alunos leem o conteúdo antecipadamente e por meio da plataforma digital Moodle respondem questionamentos acerca do que foi lido individualmente.

3) Apresentação do conteúdo em sala: apresentar de forma sumária o conteúdo e introduzir um problema conceitual desafiador aos alunos, levando-os a refletir individualmente e responder uma questão sobre os conceitos antes de discutirem nos pequenos grupos.

4) Discussão em grupo: em duplas ou trios, os alunos passam a discutir as questões propostas, tendo como ponto de partida a solução particular dada para a questão. Esse momento promove a troca de ideias e a colaboração entre os estudantes. Ao final do debate, a dupla ou o trio deve elaborar uma única solução.

5) Atuação ativa do professor: circulando, por entre as duplas, em sala, o professor deve clarificar as dúvidas, incentivando a participação efetiva dos alunos dentro de cada grupo.

6) Debate de ideias: após concluírem as discussões em grupo, os alunos compartilham suas respostas com a turma. Assim, diferentes formas de encarrar o problema são discutidas e comparadas.

7) Apresentação da resposta formal: após a apresentação das respostas dos alunos, o professor dever fazer a “retificação da aprendizagem”, ratificando ou retificando as respostas apresentadas pelos grupos, esclarecendo eventuais dúvidas remanescentes.

8) Atividades extraclasse: incentivar a execução de atividades em domicílio.

9) Avaliação: realizar avaliações formativas para acompanhar o progresso da aprendizagem dos alunos e que mostrem eventuais necessidade de correções de curso nas atividades desenvolvidas.

Outro aspecto que achamos importante durante a realização desta pesquisa é que o professor deve estar atento ao ponto, da Teoria de Vigotski, que é a zona de desenvolvimento proximal (ZDP), pois há um limite, onde praticamente nenhum dos alunos conseguirá progredir além dele. É responsabilidade do professor estabelecer até onde, o aluno mais capaz, terá condições de auxiliar o outro aluno, selecionando atividades que possam ser desenvolvidas pelas duplas, daí a importância de saber mesclar a turma.

Também percebemos que, quando circulamos pela sala de aula, conseguimos interagir melhor com os grupos e entendemos mais facilmente as dificuldades e os questionamentos dos alunos, e quando confrontado com o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico proposto por Lindquist e Shulte, conseguimos ter uma avaliação do nível de desenvolvimento deles, bem como conseguimos inferir a aprendizagem de cada um, permitindo particularizar o processo ensino aprendizagem com mais segurança de modo a buscar sempre a alcançar um nível mais elevado de aprendizagem.

Observamos também alguns óbices durante a implantação e execução da metodologia, a saber:

1) resistência em sair da zona de conforto por parte de alguns alunos pois não estavam acostumados com uma rotina estruturada de estudos.

2) Comportamento inicial dos alunos dentro dos grupos de debate pois queriam apenas conversar e muito menos debater suas respostas, exigindo do professor dispender esforços no sentido de conscientizá-los da necessidade de manter o foco em sala de aula, de modo que os alunos mantivessem maior concentração e envolvimento no debate das respostas individuais.

3) Individualização do aprendizado: alguns alunos apresentaram sérios problemas de aprendizado em conceitos básicos de aritmética e geometria. Foi necessário encaminhar estes alunos para a Seção de Apoio Pedagógico, no contraturno, de modo que pudessem superar tais dificuldades.

4) Fechamento do ciclo: os alunos que não compreenderam os objetos do conhecimento, com o auxílio do colega que entendeu o conteúdo, o conseguem a partir de então, superando as dificuldades e entendendo o conteúdo, contudo, esses alunos não estão dando o passo seguinte que é o estudo em domicílio quando deveriam resolver os exercícios propostos para a semana, postados na plataforma moodle. Isto foi observado durante a correção dos cadernos de exercícios, onde menos de 30% respondem aos exercícios previstos para a semana.

Assim, podemos afirmar que a metodologia Peer Instruction é uma metodologia ativa que torna o ambiente da aprendizagem mais participativo e ativo, colocando o aluno no centro do processo ensino aprendizagem, fazendo-o ser protagonista na construção do conhecimento de forma ativa e, simultaneamente, ao estimular a participação dos alunos, promove um pensamento crítico, desenvolvendo as competências e habilidades desejadas. Além disso ela é adequada para alunos do final do Ensino Fundamental.

Como perspectiva de trabalhos futuros, pretendemos estudar mais profundamente as Teorias de Vygotsky e da Aprendizagem Significativa e suas relações com as metodologias ativas, em especial a Metodologia Peer Instruction no Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS

BACICH, Lilian; MORAN, José. **Metodologias ativas para uma educação inovadora**. Porto Alegre: Penso, 2018.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf (mec.gov.br). Acesso em 23 de novembro de 2023.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Introdução aos Parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

G1. **Professor no Brasil perde 20% da aula com bagunça na classe, diz estudo**. São Paulo. 2015. Disponível em: https://g1.globo.com/educacao/noticia/2015/03/professor-no-brasil-perde-20-da-aula-com-bagunca-na-classe-diz-estudo.html. Acesso em 27/12/2023.

LAMAS, Rita de Cássia Pavan; MENDES, Ijosiel. **GEOGEBRA: Animações geométricas**. Curitiba: Appris, 2017.

LINDQUIST, Mary Montegomery; SHULTE, Alberto P., orgs; tradução: Higino H. Domingues. **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo: Atual, 1994.

LINS, Maria Judith Sucupira da Costa; MIRANDA, Bruna Rodrigues Cardoso. **AUSUBEL E BRUNER:** Questões sobre aprendizagem. Curitiba: CRV, 2018.

MASINI, Elcie F. Salzano; MOREIRA, Marco Antonio. **Aprendizagem Significativa na Escola**. Curitiba: CRV, 2017.

MAZUR, Eric. **Peer Instrution. A revolução da aprendizagem ativa**. Porto Alegre: CRV, 2015.

MOREIRA, Marco Antonio. **Aprendizagem Significativa: a teoria e textos complementares**. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências**. [São Paulo]: **Zetetiqué**. 1993, p. 7-17. Acessado em 06/02/2024. Disponível em: https://acrobat.adobe.com/id/urn:aaid:sc:VA6C2:adc90b59-a715-42c6-a3b0-4169b8a0650b

SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Cláudio. **Matemática: compreensão e prática.** 6ª ed. São Paulo: Moderna, 2019.

SOUZA, Ednilson Sergio Ramalhe de; SANTO, Adilson Oliveira do Espírito. Teoria da Modelagem de David Hestenes no Ensino de Ciências e Matemática. [Cruzeiro do Sul]: **REnCiMa**. 2017, p.21-40. Disponível em: (PDF) A Teoria da Modelagem de David Hestenes no Ensino de Ciências e Matemática (researchgate.net). Acesso em 23/12/2023

VYGOTYSKY, Lev Semenovich. **A formação social da Mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores**. 7ª ed. São Paulo: editora Martins Fontes, 2007.

APÊNDICE A − PESQUISA DE OPINIÃO HÁBITOS DE ESTUDO DOS ALUNOS

PESQUISA DE OPINIÃO ACERCA DOS HÁBITOS DE ESTUDO DOS ALUNOS DA TURMA 904, DO 9º ANO DO COLÉGIO MILITAR DE SANTA MARIA.

1. Durante as aulas em sala:

( ) Fico atento as explicações do professor e faço anotações no caderno.
( ) Sou bastante participativo, faço perguntas para esclarecer assunto não compreendido com as explicações do professor e faço anotações no caderno.
( ) Costumo conversar com amigos e não participo das aulas.
( ) Distraio-me facilmente.

2. A sua rotina de estudo extraclasse semanal pode ser resumida em:

( ) Não tenho rotina de estudo semanal.
( ) Estudo menos de 3 dias por semana.
( ) Estudo mais de 3 dias e menos de 7 dias.
( ) Estudo todos os dias.

3. Quando você tem dúvida em relação a um assunto:

( ) Solicito apoio de um professor particular e/ou um familiar.
( ) Solicito ajuda ao professor em sala.
( ) Solicito ajuda a outro professor do colégio.
( ) Sou autodidata.
( ) Não esclareço a dúvida pois tenho vergonha de fazer pergunta em sala.

4. Ao estudar, você (pode marcar mais de uma opção)

( ) Responde os exercícios do livro.
( ) Estuda a parte teórica e depois responde os exercícios.
( ) Costuma fazer resumos/mapa conceitual.
( ) Resolve exercícios de outros livros.

APÊNDICE B − PESQUISA DE OPINIÃO SOBRE METODOLOGIAS ATIVAS

PESQUISA DE OPINIÃO ACERCA DO EMPREGO DAS METODOLOGIAS ATIVAS COM PROFESSORES DE MATEMÁTICA DO COLÉGIO MILITAR DE SANTA MARIA.

Caro Professor, esta pesquisa servirá para elaboração de um capítulo da minha dissertação sobre o emprego de metodologias ativas no ensino da matemática. Peço que, com base nas suas práticas em sala de aula, no CMSM, responda aos seguintes questionamentos:

1. O(A) Sr(a) faz uso de metodologia ativas em sala de aula?
   ( ) Sim ( ) Não.
   Caso positivo, qual metodologia emprega(ou) no ensino da matemática?

___

___

___

2. O(A) Sr(a) já utilizou a metodologia ativa Peer Instruction (instrução em pares)?
   ( ) Sim ( ) Não.
3. O(A) Sr(a) acha que o uso das metodologias ativas contribui para o ensino da geometria e consequentemente favorece o processo ensino-aprendizagem?
   ( ) Sim ( ) Não.
4. Quais as principais dificuldades em utilizar metodologia ativa em sala de aula?
   O(A) Sr(a) pode marcar mais de uma opção abaixo.

( ) Falta de comprometimento dos alunos com as atividades escolares;

( ) Desconheço as metodologias ativas;

( ) Currículo escolar muito longo com a obrigatoriedade de trabalhar todos os Objetos do Conhecimento;

( ) O emprego das metodologias ativas, em sala de aula, demanda muito esforço e tempo para implementação;

( ) Muitas atividades paralelas, não relacionadas com o processo ensino-aprendizagem, impedindo a comprometimento do professor, uma vez que o uso das metodologias ativas requer dedicação para sua implantação;

( ) Resistência dos familiares pois estes acham que o professor deve ensinar e o aluno aprender.

O(A) Sr(a) poderia citar outra(s) dificuldade(s) que ache pertinente?

___

___

___

___

___

5. Quais as principais dificuldades no ensino da geometria atualmente?

( ) Os alunos estão com lacunas no aprendizado.

( ) A dificuldade de abstração dos alunos, principalmente no ensino da geometria espacial.

( ) Falta de comprometimento dos alunos com as atividades escolares;

( ) Falta de comprometimento dos alunos com o aprendizado próprio;

( ) A geometria por si só, é muito difícil e, após a pandemia, os alunos estão com muitas dificuldades pois faltam-lhes muitos prerrequisitos.

O(A) Sr(a) poderia citar outra(s) dificuldade(s) que ache pertinente?

___

6. Como o Sr(A) acredita que podemos melhorar o ensino da geometria?

7. Cite alguns dos prerrequisitos que os alunos do ano escolar, no qual o Sr(A) ensina atualmente, estão com mais dificuldades.

APÊNDICE C – PESQUISA DE OPINIÃO SOBRE PEER INSTRUCTION

PESQUISA DE OPINIÃO ACERCA DO EMPREGO DA METODOLOGIA ATIVA PEER INSTRUCTION COM O USO DO GEOGEBRA, NO ANO DE 2022, COM A TURMA 904 DO COLÉGIO MILITAR DE SANTA MARIA.

Considerando as aulas do 9º Ano, no ano de 2022, empregando a metodologia ativa estudo em pares (Peer Instruction) com o uso do GeoGebra, responda as seguintes perguntas:

1. O estudo em grupo (estudo em pares) foi muito útil para a compreensão dos conteúdos estudados em salada de aula.

(   )   Concordo fortemente
(   )   Concordo
(   )   Descordo
(   )   Descordo fortemente

2. Sinto-me mais confortável em tirar dúvidas com outro colega de sala de aula.

(   )   Concordo fortemente
(   )   Concordo
(   )   Descordo
(   )   Descordo fortemente

3. As demonstrações do Teorema de Tales e do Teorema da Bissetriz, usando o software geogebra, facilitou a compreensão em sala de aula.

(   )   Concordo fortemente
(   )   Concordo
(   )   Descordo
(   )   Descordo fortemente

4. Durante o emprego da metodologia estudo em pares com o emprego do geogebra, senti-me mais motivado a prosseguir com meus estudos em domicílio.

(   )   Concordo fortemente
(   )   Concordo
(   )   Descordo
(   )   Descordo fortemente

APÊNDICE D – ESTUDO DIRIGIDO NA PLATAFORMA MOODLE

ESTUDO DIRIGIDO REALIZADO NA PLATAFORMA MOODLE

Sobre o Teorema de Tales, leias as páginas 262 e 265, em seguida faça o que se pede.

1. Complete os espaços em branco.

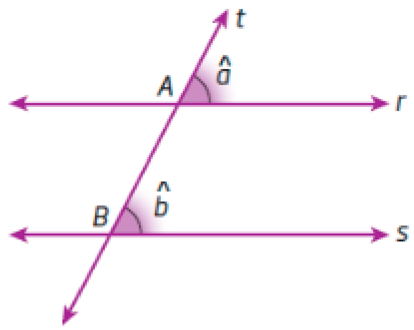
a. Um feixe de [[retas paralelas]] é formado por duas ou mais retas, de um mesmo plano, que, consideradas duas a duas, são sempre paralelas.

b. Uma reta que intercepta duas ou mais retas de um feixe de retas paralelas recebe o nome de [[transversal]]

c. Se um [[feixe de retas paralelas]] determinar segmentos congruentes sobre uma transversal, esse feixe determinará segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.

2. Vamos relembrar as relações entre os ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal.

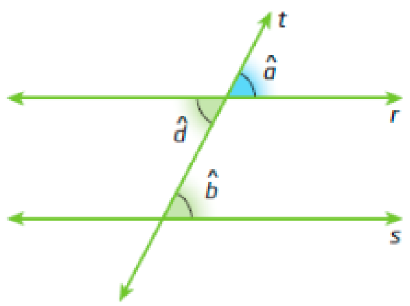
a. Observe a figura e complete os espações em branco, indicando a relação entre os ângulos formado por elas.



Sendo *r//s*, temos:

$\hat{a}$ e $\hat{b}$ são congruentes pois são ângulos [[correspondentes]]

b. Observe a figura e complete os espações em branco, indicando a relação entre os ângulos formado por elas.



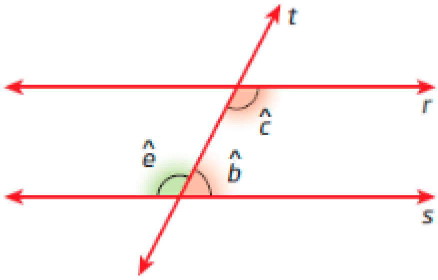
Sendo *r//s*, temos:

$\hat{a}$ e $\hat{b}$ são congruentes pois são ângulos [[correspondentes]];

$\hat{d}$ e $\hat{a}$ são congruentes pois são ângulos [[opostos pelo vértice]] (o.p.v); e

Logo $\hat{b}$ e $\hat{d}$ são congruentes (ângulos [[alternos internos]])

c. Observe a figura e complete os espações em branco, indicando a relação entre os ângulos formado por elas.



Sendo $r//s$, temos:

$\hat{c}$ e $\hat{e}$ são congruentes pois são ângulos [[alternos internos]];

$\hat{e}$ e $\hat{b}$ são ângulos [[adjacentes suplementares]]; e

Logo $\hat{b}$ e $\hat{c}$ são suplementares (ângulos [[colaterais internos]])

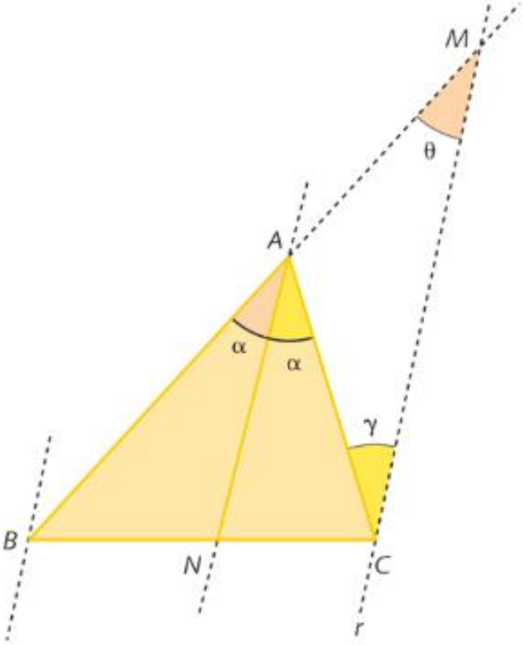
Considere o texto abaixo:

Se um feixe de retas paralelas é cortado por duas retas transversais quaisquer, *r* e *s*, os segmentos determinados sobre *r* são proporcionais aos segmentos correspondentes determinados sobre *s*.

Podemos afirmar que se trata do [[Teorema de Tales]]

Sobre o Teorema das bissetrizes, leia as páginas 271 a 274, em seguida faça o que se pede.

1. Observe a figura e complete os espaços em branco.



Considere o feixe de retas que contém os lados MB e BC do triângulo MBC.

Considere, também, a reta AN, bissetriz interna do ângulo BÂC, que por construção, a reta CM//NA.

Perceba que as retas paralelas [[CM]] e [[NA]] são cortadas pelas retas que contém os lados BC e BM.

Logo, o [[Teorema de Tales]] é válido neste sistema de retas, donde podemos concluir

$$\frac{BN}{AB} = \frac{CN}{AM}$$

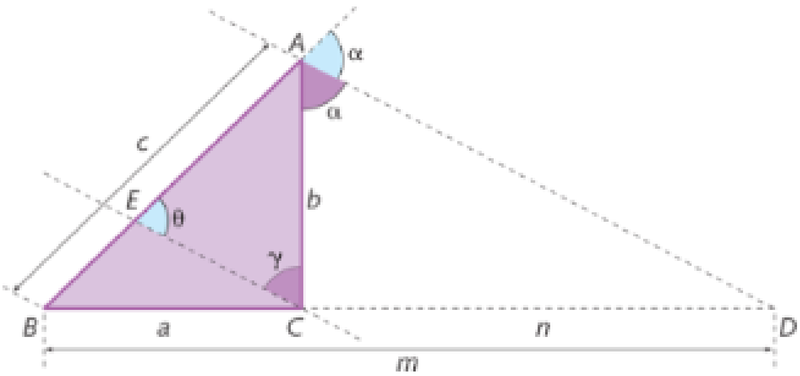
Além disto, os ângulos

α e γ são [[congruentes]] pois são ângulos alternos internos.

α e θ são congruentes pois são ângulos [[correspondentes]].

E, portanto, γ e θ são congruentes por transitividade e assim, podemos afirmar que o triângulo ACM é [[isósceles]] pois os ângulos da base são congruentes.

2. Observe a figura e complete os espaços em branco.



Considere o segmento AD, bissetriz externa do Ângulo Â. Por construção a reta EC é paralela a bissetriz externa AD. Perceba que as retas AB e AC, são transversais às paralelas AD e EC, logo, vale o [[Teorema de Tales]] neste sistema de retas.

Do apresentado acima, podemos concluir que os ângulos

a. α e γ são congruentes pois são ângulos [[alternos internos]];

b. α e θ são congruentes pois são ângulos [[correspondentes]];

c. Então, de a e b, podemos afirmar que γ e θ são ângulos [[congruentes]]; e

d. Portanto o triângulo AEC é [[isósceles]].

ANEXO A – EXTRATO DO LIVRO DIDÁTICO

EXTRATO DO LIVRO DIDÁTICO MATEMÁTICA: COMPREENSÃO E PRÁTICA, DE ÊNIO DA SILVEIRA E CLÁUDIO MARQUES, UTILIZADO COM O 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL DO CMSM.

1 Razão e proporção nos segmentos de reta

Modelismo é a arte de construir automóveis, aviões, trens, motos, navios etc. em miniatura. Os modelos são semelhantes aos objetos reais, mas foram reduzidos obedecendo a uma razão. Observe as miniaturas a seguir.

JAMIE & JUDY WILD/DANITADELIMONT/KEYSTONE BRASIL

Miniatura do B-17 *Flying Fortress* (Fortaleza Voadora), um avião bombardeiro quadrimotor construído pela Boeing durante a Segunda Guerra Mundial.

MINIMODELSCAR

Miniatura do carro da primeira, e até hoje única, equipe de Fórmula 1 brasileira.

O exemplo de uma **razão** utilizada pelos profissionais de modelismo é 1 : 12, e corresponde à razão entre as dimensões do modelo construído e do objeto real. Essa razão indica que, se um comprimento do modelo mede *a*, então, no objeto real, o comprimento correspondente mede 12*a*.

A **razão** entre dois números *a* e *b*, com $b \neq 0$, nessa ordem, é dada por $a : b$ ou $\frac{a}{b}$. Lemos "*a* está para *b*".

Se duas razões são iguais, verificamos uma proporção.

Proporção é uma igualdade entre duas razões.

Exemplo

As razões $\frac{18}{10}$ e $\frac{27}{15}$ formam uma proporção. Observe.

$$\frac{18}{10} = \frac{9}{5} \quad \text{e} \quad \frac{27}{15} = \frac{9}{5}\text{, assim: } \frac{18}{10} = \frac{27}{15}$$

A proporção também pode ser escrita assim:

$18 : 10 = 27 : 15$ → Lemos: "dezoito está para dez assim como vinte e sete está para quinze".

Na proporção $\frac{18}{10} = \frac{27}{15}$, os números 18 e 15 são denominados **extremos** e os números 10 e 27 são denominados **meios**.

Observe que: $\underbrace{18 \cdot 15}_{\text{extremos}} = \underbrace{10 \cdot 27}_{\text{meios}} = 270$

Em toda proporção, podemos verificar a **propriedade fundamental das proporções**.

> Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produtos dos meios, ou seja, dados a, b, c e d não nulos, com $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, temos $a \cdot d = b \cdot c$.

• Razão entre dois segmentos de reta

Seja *r* a reta que passa pelos pontos distintos *A* e *B*.

Os pontos *A* e *B*, e todos os demais entre eles, formam um **segmento de reta** que é indicado por $\overline{AB}$. A medida de um segmento $\overline{AB}$ é indicada por *AB* ou med($\overline{AB}$).

A razão entre dois segmentos corresponde à razão de suas medidas, considerando a mesma unidade de medida de comprimento.

Exemplo

Considere os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e suas medidas:

A razão entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ pode ser assim obtida:

$AB = 30\text{ mm}$

$CD = 5\text{ cm} = 50\text{ mm}$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

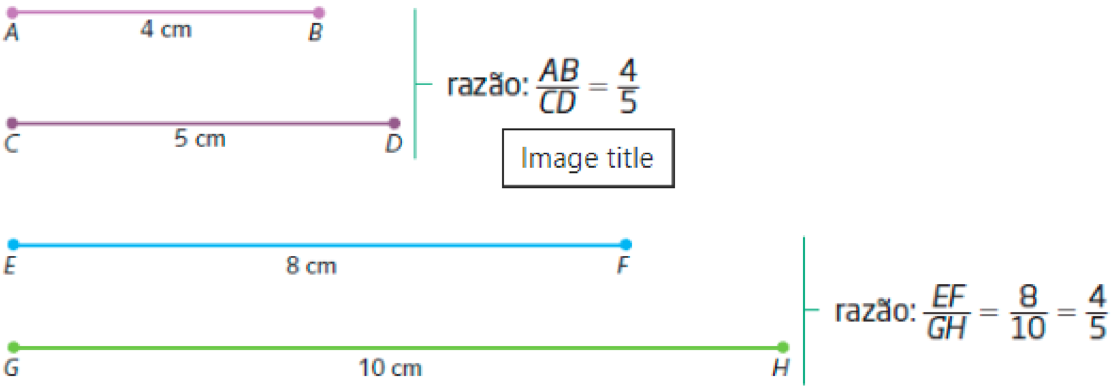
:10

:10

Logo, a razão entre esses segmentos é $\frac{3}{5}$.

• Segmentos proporcionais

Vamos considerar os segmentos de reta $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}$ e $\overline{GH}$ e suas respectivas medidas:



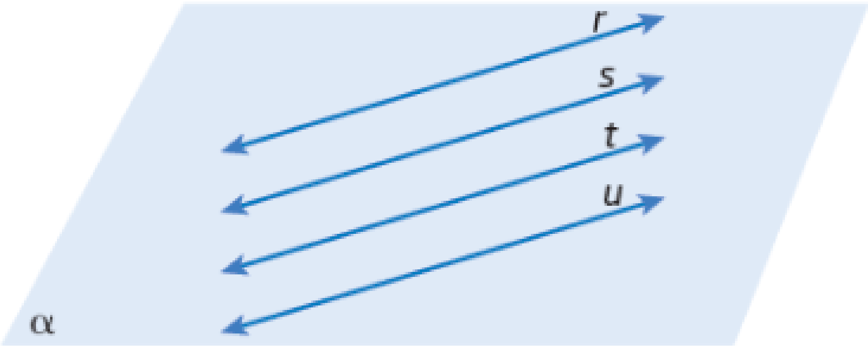
Portanto, os segmentos $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}$ e $\overline{GH}$ formam, nessa ordem, uma proporção:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH} = \frac{4}{5}$$

A proporcionalidade entre segmentos é muito usada em Geometria e tem diversas aplicações na vida prática: na arquitetura, na música, nas artes plásticas etc.

2 Teorema de Tales

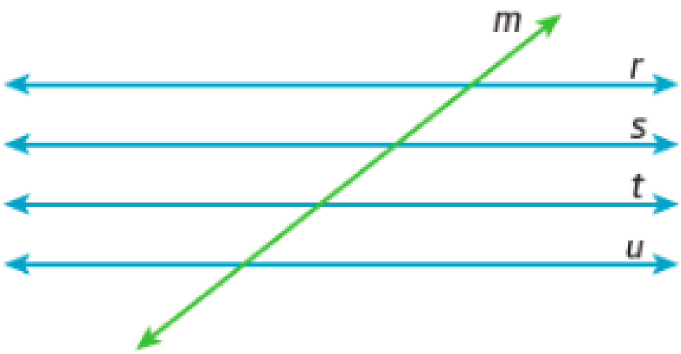
Um **feixe de retas paralelas** é formado por duas ou mais retas, de um mesmo plano, que, consideradas duas a duas, são sempre paralelas.



notação: $r \mathbin{/\!/} s \mathbin{/\!/} t \mathbin{/\!/} u$

Uma reta que intercepta duas ou mais retas de um feixe de retas paralelas recebe o nome de **transversal**.

Na figura abaixo, a reta *m* é transversal ao feixe de retas paralelas formado pelas retas *r*, *s*, *t* e *u*.

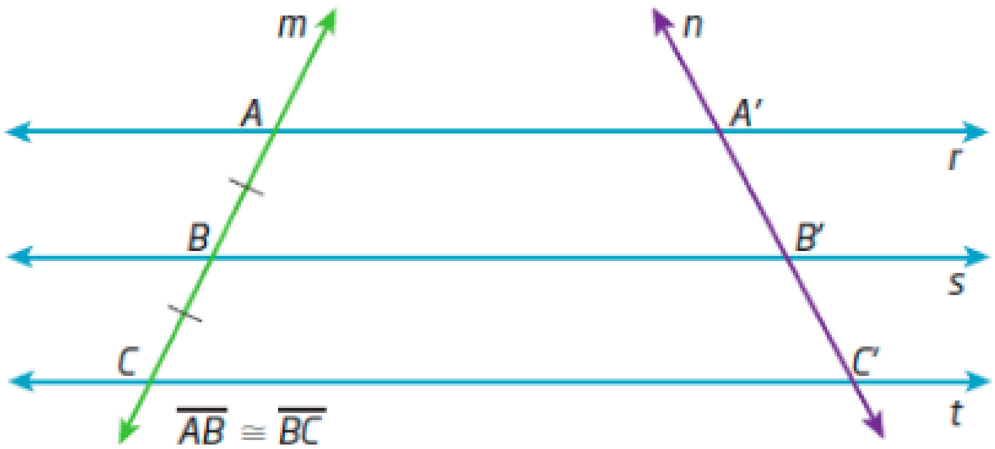


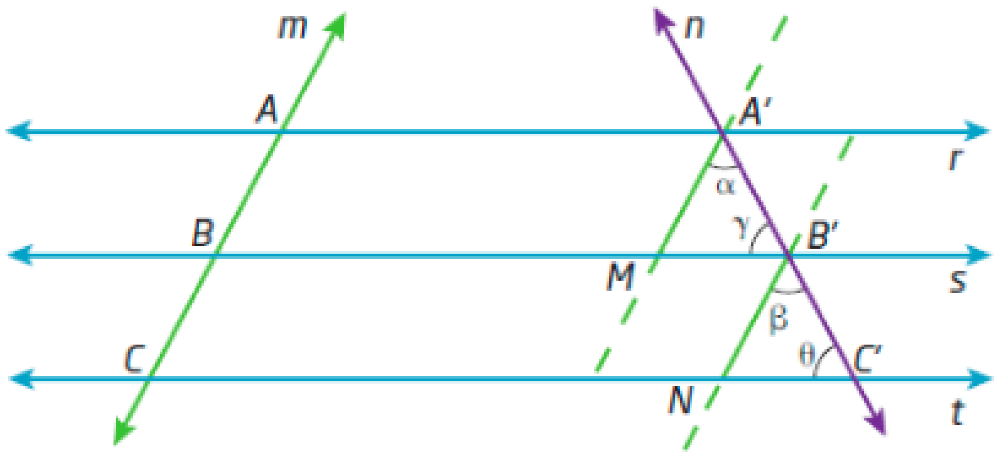
Agora, considere as retas paralelas *r*, *s* e *t* e as retas transversais *m* e *n*, no mesmo plano.

Sobre a reta *m* ficam determinados os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, e sobre a reta *n* ficam determinados os segmentos $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$.

Vamos mostrar que, se $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, então $\overline{A'B'} \cong \overline{B'C'}$.

Por *A'* e *B'* traçamos retas paralelas à reta transversal *m*, determinando os segmentos $\overline{A'M}$ e $\overline{B'N}$. Veja:





Como $\overline{A'M} \parallel \overline{AB}$ e $\overline{AA'} \parallel \overline{B'M}$, ***AA' MB*** é um paralelogramo.

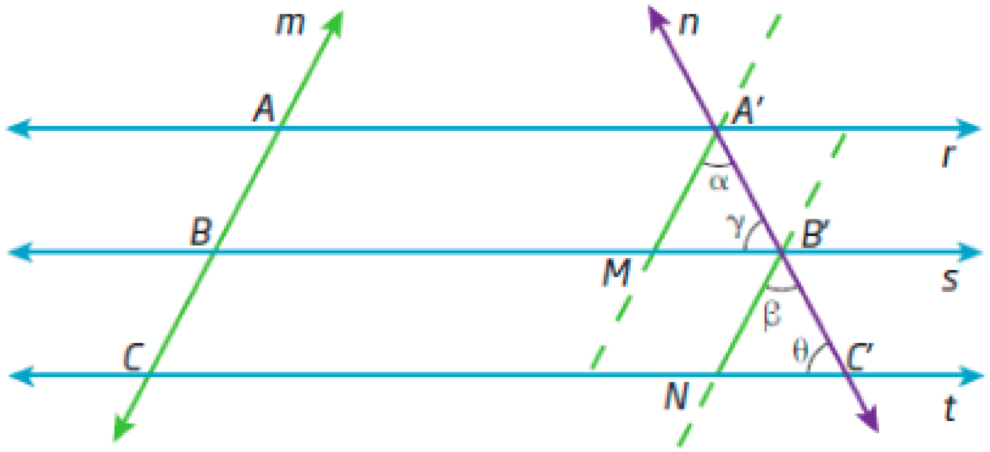
Como $\overline{B'N} \parallel \overline{BC}$ e $\overline{BB'} \parallel \overline{CN}$, ***BB' NC*** também é um paralelogramo.

Os lados opostos de um paralelogramo têm a mesma medida; então:

$\overline{AB} \cong \overline{A'M}$ e $\overline{BC} \cong \overline{B'N}$

Como $\overline{AB} \cong \overline{A'M}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'N}$ e $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, temos: $\overline{A'M} \cong \overline{B'N}$ E considerando os triângulos ***A' B' M*** e ***B'C'N***, temos:

- $\overline{A'M} \cong \overline{B'N}$
- $\alpha = \beta \longrightarrow$ medidas de ângulos correspondentes
- $\gamma = \theta \longrightarrow$ medidas de ângulos correspondentes



Logo, $\Delta A'B'M \cong \Delta B'C'N$ pelo caso LAA_o (lado – ângulo – ângulo oposto).

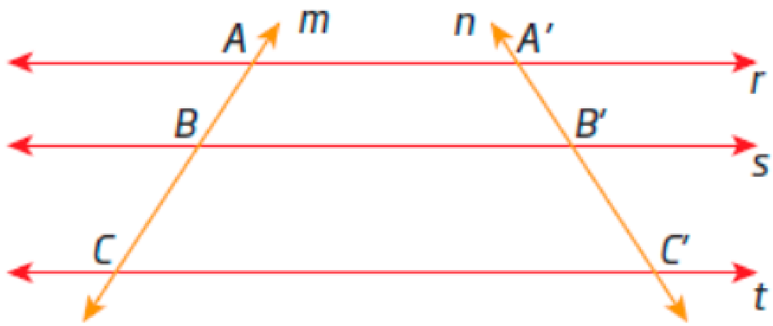
Portanto, $\overline{A'B'} \cong \overline{B'C'}$, pois são lados correspondentes em triângulos congruentes.

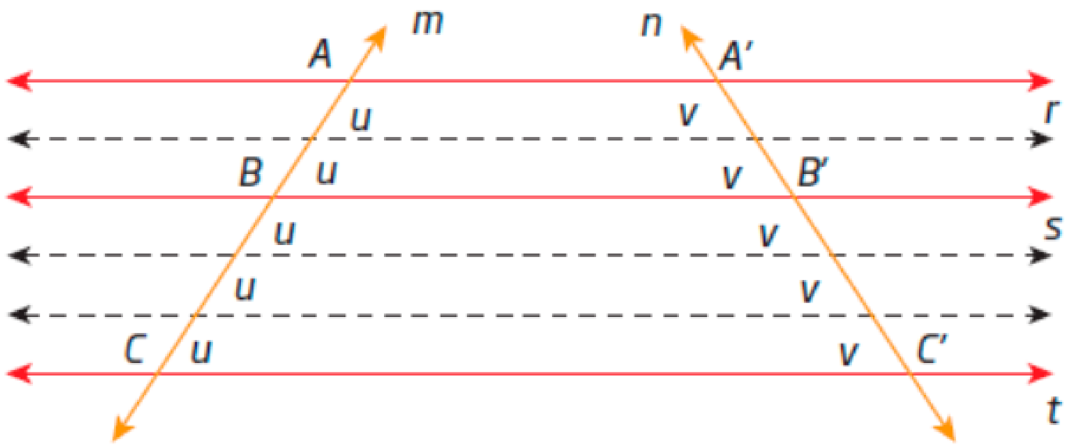
Se um feixe de retas paralelas determinar segmentos congruentes sobre uma transversal, esse feixe determinará segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.

Agora, observe a figura ao lado, em que $r \mathbin{//} s \mathbin{//} t$, m e n são retas transversais e $\boldsymbol{AB \neq BC}$.

Vamos verificar a relação entre os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{A'B'}$, e $\overline{B'C'}$.

Dividindo $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ em segmentos de medida u, a partir de retas auxiliares paralelas a r, s e t, obtemos $AB = 2u$ e $BC = 3u$.





Como o feixe de retas paralelas determina segmentos congruentes sobre a transversal *m*, então também determinará segmentos congruentes sobre a transversal *n*, assim: $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$ são divididos em segmentos de medida *v*, sendo $A'B' = 2v$ e $B'C' = 3v$.

Então:

- estabelecendo a razão $\frac{AB}{BC}$, temos: $\frac{AB}{BC} = \frac{2u}{3u} = \frac{2}{3}$ (I)
- estabelecendo a razão $\frac{A'B'}{B'C'}$, temos: $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{2v}{3v} = \frac{2}{3}$ (II)

Comparando (I) e (II), temos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

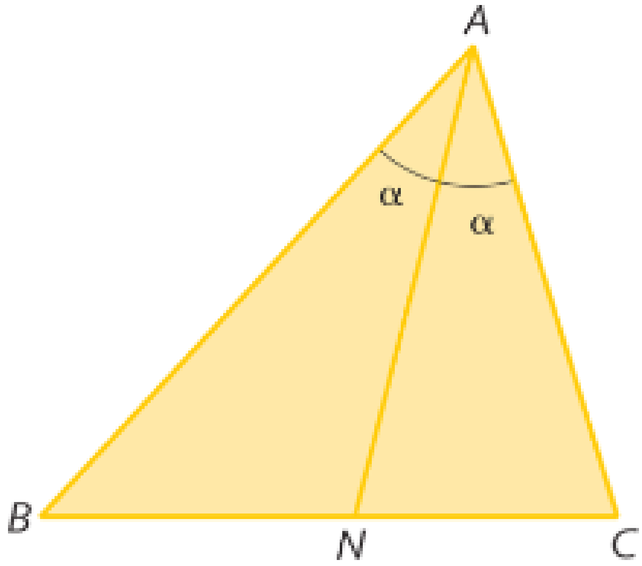
Segundo o **teorema de Tales:**

> Se um feixe de retas paralelas é cortado por duas retas transversais quaisquer, *r* e *s*, os segmentos determinados sobre *r* são proporcionais aos segmentos correspondentes determinados sobre *s*.

3 Teorema da bissetriz

• Teorema da bissetriz interna

Observe no triângulo abaixo que $\overline{AN}$ é a bissetriz interna do triângulo *ABC*, relativa ao vértice *A*.



O ponto *N* divide o segmento $\overline{BC}$ em duas partes: $\overline{BN}$ e $\overline{NC}$.

Vamos provar que $\frac{BN}{BA} = \frac{NC}{AC}$.

Para isso, traçamos a reta *r* paralela ao segmento $\overline{AN}$, passando por *C*.

Essa reta encontra $\overrightarrow{BA}$ no ponto *M*. Veja na imagem ao lado.

De acordo com o teorema de Tales, temos:

$\frac{BN}{NC} = \frac{BA}{AM}$ ou $\frac{BN}{BA} = \frac{NC}{AM}$ 1

Como: $\theta = \alpha \longrightarrow$ medidas de ângulos correspondentes

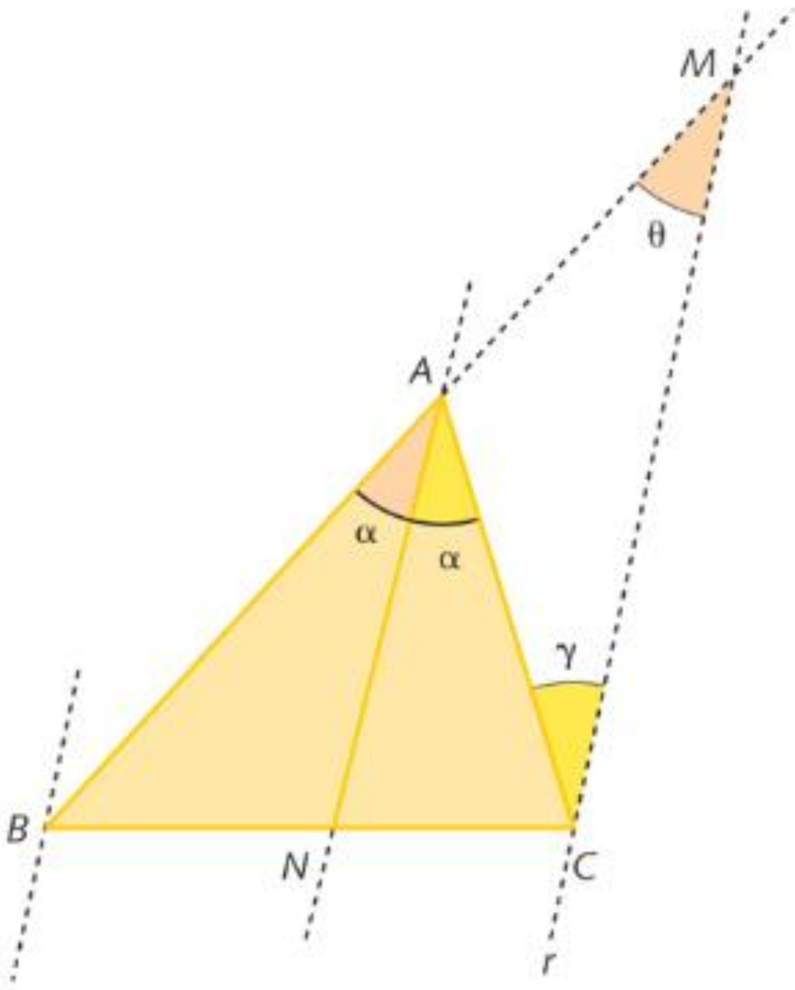
$\alpha = \gamma \longrightarrow$ medidas de ângulos alternos internos

Temos: $\theta = \gamma$, pela propriedade transitiva.

Então, o ΔACM é isósceles e, portanto:

$\overline{AC} \cong \overline{AM}$, ou seja, $AC = AM$

Substituindo, em **1**, AM por AC, temos:



$$\frac{BN}{BA} = \frac{NC}{AC}$$

Assim:

Em todo triângulo, a bissetriz de cada ângulo interno divide o lado oposto a esse ângulo em segmentos proporcionais aos lados que formam o ângulo.

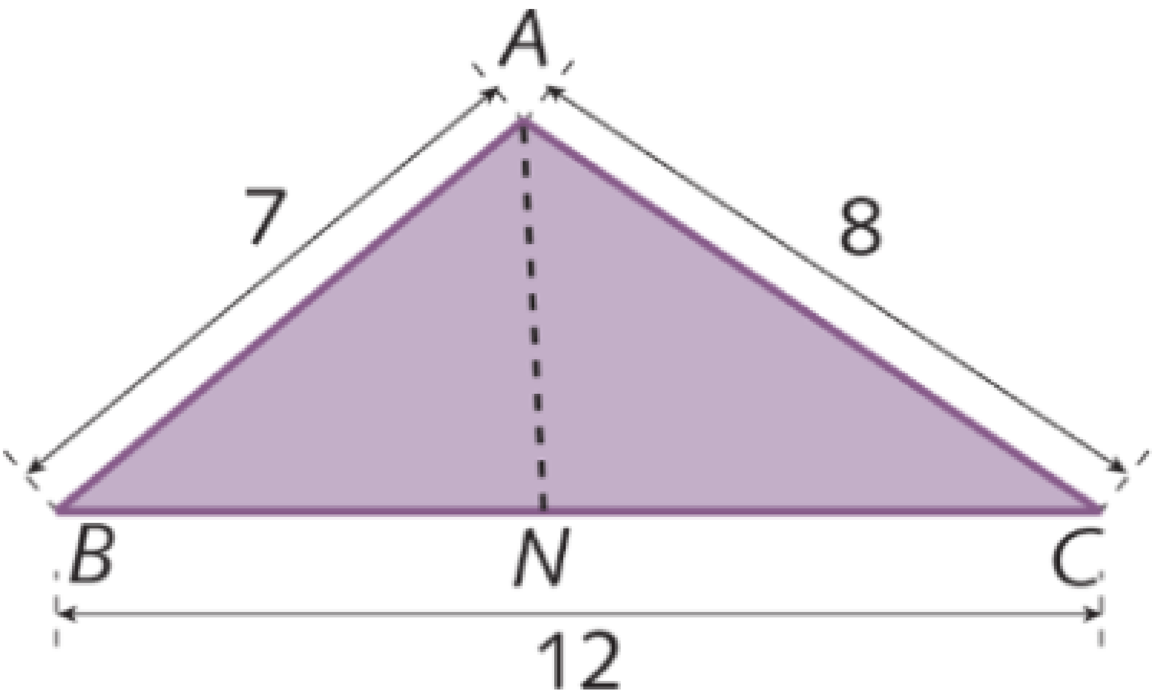
Exemplo

Os lados de um triângulo medem 7 m, 8 m e 12 m. Vamos calcular a medida dos segmentos que a bissetriz interna $\overline{AN}$ do ângulo $B\hat{A}C$ determina sobre o maior lado.

Solução

Temos:

$$\frac{BN}{BA} = \frac{NC}{AC} \Rightarrow \frac{BN}{7} = \frac{NC}{8} \Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{7}{8}$$



Aplicando uma propriedade das proporções, temos:

$$\frac{BN + NC}{BN} = \frac{7+8}{7} \Rightarrow \frac{12}{BN} = \frac{15}{7} \Rightarrow BN = \frac{12.7}{15} \Rightarrow BN = 5{,}6$$

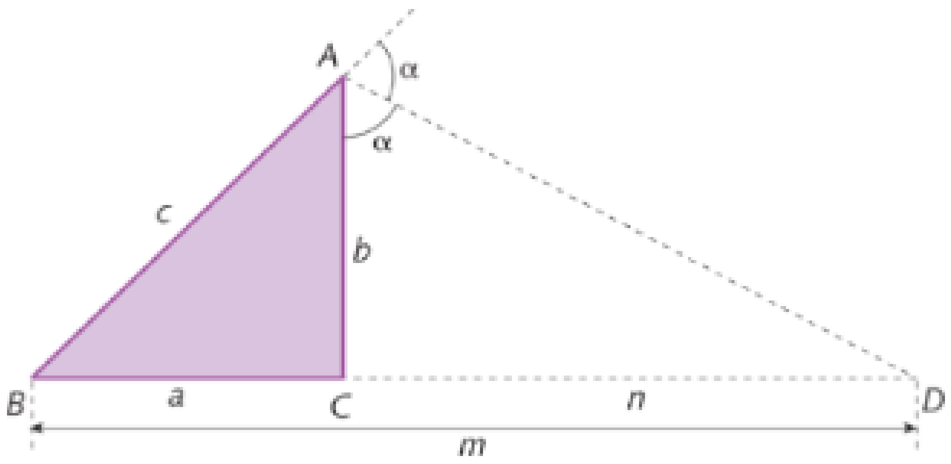
Mas:

$$BN + NC = 12 \Rightarrow NC = 12 - 5{,}6 \Rightarrow NC = 6{,}4$$

Logo, as medidas dos segmentos determinados pela bissetriz interna são 5,6 m e 6,4 m.

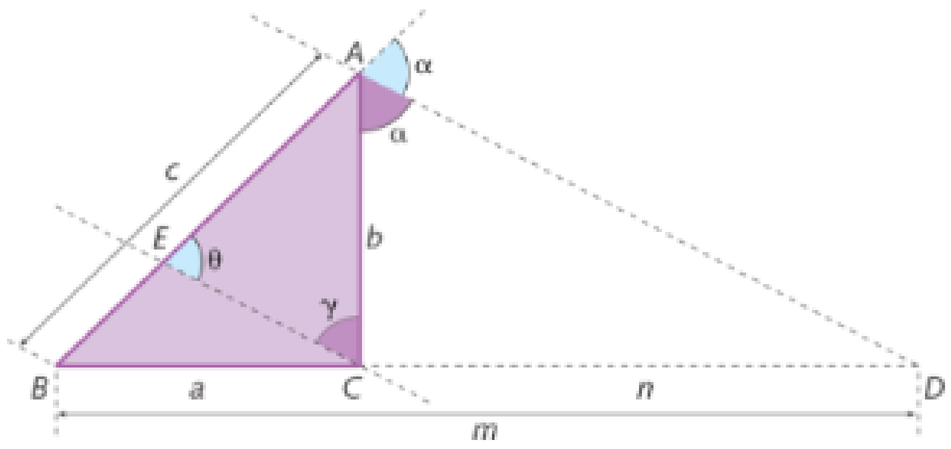
• Teorema da bissetriz externa

Observe o triângulo ABC e $\overline{AD}$, bissetriz externa de $\hat{A}$.



Vamos provar que $\dfrac{m}{c} = \dfrac{n}{b}$ e $m - n = a$.

Por C, traçamos uma paralela à bissetriz $\overline{AD}$, determinando um ponto E sobre $\overline{AB}$.



Como: $\alpha = \theta \longrightarrow$ medidas de ângulos correspondentes

$\alpha = \gamma \longrightarrow$ medidas de ângulos alternos internos

Temos: $\theta = \gamma$, pela propriedade transitiva.

Então, o ΔACE é isósceles e $AE = AC = b$.

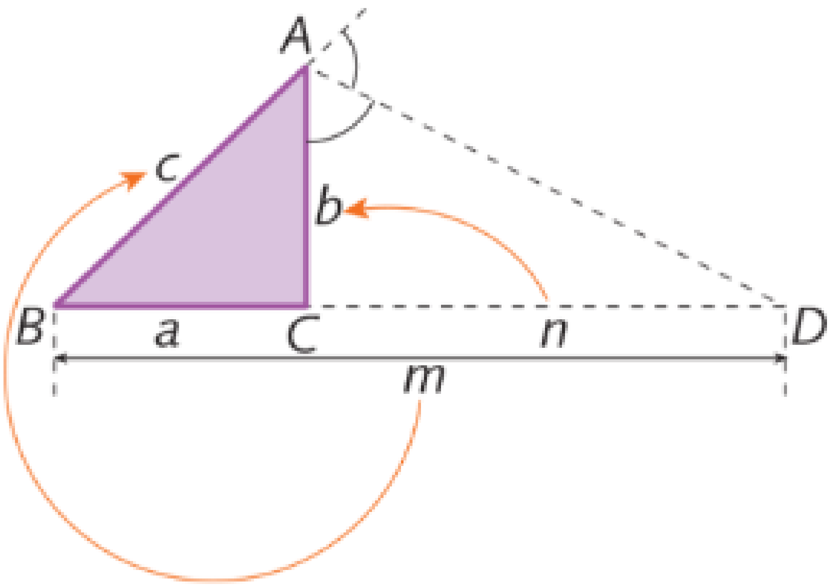
O feixe de paralelas (identificadas por $\overline{AD}//\overline{CE}$) é interceptado pelas retas $\overline{BC}$ e $\overline{BA}$ (transversais), o que permite afirmar, pelo teorema de Tales:

$\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$ ou, ainda: $\frac{m}{c} = \frac{n}{b}$

Então, temos:

$$\frac{m}{c} = \frac{n}{b} \text{ e } m - n = a$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO



GEORGE TUTUMI

Assim:

A bissetriz do ângulo externo de um triângulo determina sobre o lado oposto ao ângulo dois segmentos subtrativos, proporcionais aos outros dois lados.

Exemplo

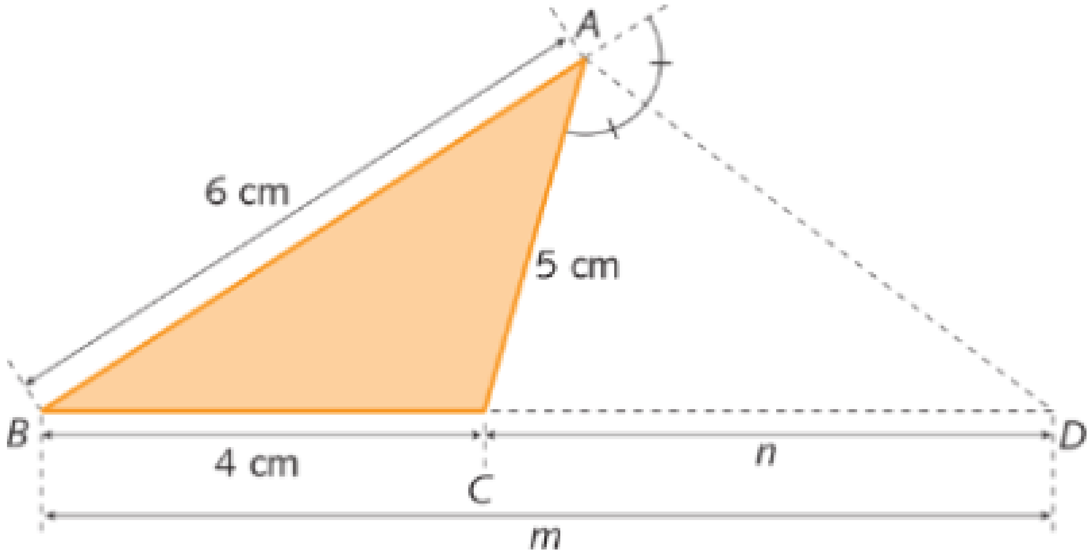
Em um triângulo *ABC*, as medidas dos lados são *AB* = 6 cm, *BC* = 4 cm e *AC* = 5 cm. Quanto é preciso prolongar o lado $\overline{BC}$ para que ele encontre a bissetriz externa do ângulo $\widehat{A}$?

Solução

Temos:

$$\frac{m}{c}=\frac{n}{b} \text{ e } m-n=a$$

$$\frac{m}{6}=\frac{n}{5} \Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{6}{5}$$



Aplicando uma das propriedades das proporções, temos:

$$\frac{m-n}{m}=\frac{6-5}{6} \Rightarrow \frac{4}{m}=\frac{1}{6} \Rightarrow m=24$$

$$m-n=4 \Rightarrow n=m-4 \Rightarrow n=24-4 \Rightarrow n=20$$

Logo, devemos prolongar 20 cm o lado $\overline{BC}$.