Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

O Cálculo Diferencial e Integral como ferramenta interdisciplinar no Ensino Médio

Janilson Claydson Silva Brito

Teresina - 2013

Janilson Claydson Silva Brito

Dissertação de Mestrado:

O Cálculo Diferencial e Integral como ferramenta interdisciplinar no Ensino Médio

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa

Teresina - 2013

BRITO, J. C. S.

xxxx O Cálculo Diferencial e Integral como ferramenta
interdisciplinar no Ensino Médio.

Nome do Aluno – Teresina: ANO.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa.

1. Matemática

CDD xxx.xx

Dedico esse trabalho a toda minha família, amigos, companheiros de trabalho e em especial a Meu Pai Senhor Didi e a Minha Mãe Maria de Fátima, que sempre foram exemplos de luta e coragem.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus por todas as oportunidades que me conferiu e pela boa saúde, me permitindo ousar nas possibilidades de buscar sempre o melhor.

Agradeço a toda a minha família que sempre me inspiraram e incentivaram na busca do conhecimento, mesmo sendo muitas as dificuldades por todos esses anos.

Agradeço a minha mulher Patrícia, que ao longo desses dois anos de curso teve paciência quando eu estava distante a trabalho, pela sua compreensão e apoio enquanto me dedicava aos estudos.

Agradeço a meus colegas de curso, pela colaboração no decorrer de todo o curso na execução de trabalhos e principalmente nos muitos momentos de estudo em que todos se ajudavam na resolução de exercícios e pesquisas, o que me fez aprimorar cada vez mais em cada disciplina.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro que me foi muito útil no decorrer desses dois anos.

Em especial, agradeço a todos os nossos professores, pois me fizeram apaixonar-me ainda mais pela Matemática e ao professor Paulo Alexandre, que muito me ajudou na construção deste trabalho.

"*Ninguém caminha sem aprender a caminhar, sem aprender a fazer o caminho caminhando, refazendo e retocando o sonho pelo qual se pôs a caminhar*".

Paulo Freire.

Resumo

O presente trabalho está organizado da seguinte forma: na primeira parte, apresentamos um breve histórico dos principais desenvolvedores do Cálculo Diferencial e Integral ao longo da história; em seguida, é feita uma fundamentação teórica sobre alguns tópicos do cálculo, por exemplo: teorema do Valor Médio, teste da primeira e da segunda derivada, teorema Fundamental do Cálculo; Finalmente, visando mostrar a importância do estudo do cálculo no ensino médio, apresentamos exemplos simples e aplicações mais elaboradas do Cálculo Diferencial e Integral em outras Ciências.

Palavras chave: cálculo, derivada, integral, Ciências.

Abstract

This paper is organized as follows: the first part is a brief history of the main developers of the Differential and Integral Calculus throughout history, then, there is a theoretical calculation on some topics, for example: Value Theorem average test the first and second derivative, Fundamental theorem of Calculus; Finally, in order to show the importance of the study of calculus in high school, we present simple examples and applications more elaborate Differential and Integral Calculus in other sciences.

KEYWORDS: calculus, derivative, integral, Sciences.

Sumário

Introdução

Segundo a proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) [4], o currículo do Ensino Médio deve ser estruturado de modo a assegurar ao aluno a possibilidade de ampliar e aprofundar os conhecimentos matemáticos adquiridos no Ensino Fundamental de forma integrada com outras áreas do conhecimento e orientada pela perspectiva histórico-cultural na qual estão ligados os temas em estudo. Isto é proposto visando a preparação do aluno para o trabalho e exercício da cidadania e também a continuação de seus estudos em níveis superiores.

Infelizmente, resultados de avaliações institucionais como o SAEB (Sistema Nacional de Avaliação Escolar da Educação Básica) e o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), promovidos pelo Governo Federal, revelam que muitos alunos terminam o Ensino Médio com dificuldades em conceitos e procedimentos fundamentais da Matemática, tais como operar com números reais, interpretar gráficos e tabelas, dentre outras coisas.

Apesar de alguns livros didáticos do Ensino Médio apresentarem tópicos relativos ao Cálculo Diferencial e Integral, como limite, derivada e integral, esses temas, na maioria das vezes, não são ensinados sob o pretexto de serem difíceis e impróprios a esse segmento da educação e acabam ficando restritos ao ensino superior, o que leva o Cálculo a fazer parte do livro didático, mas não do currículo do Ensino Médio.

Segundo Geraldo Ávila, "*o conceito de derivada pode ser ensinado, com grande vantagem, logo na primeira série do segundo grau, ao lado do ensino de funções*" [2] e [3]. Para ele o ensino do cálculo é de grande importância, pois além de ajudar no tratamento de inúmeras propriedades das funções e de ter aplicações interessantes em problemas de máximo e mínimo, crescimento e decrescimento, dentre outros, integra-se harmoniosamente com muitas das ciências conhecidas, pois o cálculo pode tornar o estudo de alguns destes tópicos mais simples e compreensíveis para os alunos do Ensino Médio.

Em Física, o cálculo é aplicado no estudo do movimento, pressão, densidade e outras aplicações. Pode ser usado, em cálculo numérico, para encontrar a reta que melhor representa um conjunto de pontos em um domínio. Na esfera da medicina, o cálculo pode ser usado para encontrar o ângulo ótimo na ramificação dos vasos sanguíneos para maximizar a circulação, e até mesmo determinar o tamanho máximo de moléculas que são capazes de atravessar a membrana plasmática em uma determinada situação, normal ou induzida, em células. Na geometria analítica, no estudo dos gráficos de funções, o cálculo é usado para encontrar pontos máximos e mínimos, a inclinação, concavidade e pontos de inflexão. Na economia o cálculo permite a determinação do lucro máximo fornecendo uma fórmula para calcular facilmente tanto o custo marginal quanto a renda marginal. Ele também ajuda a encontrar soluções aproximadas de equações, utilizando métodos como o método de Newton, iteração de ponto fixo e aproximação linear.

Nesse trabalho, mostraremos um pouco da história do cálculo, apresentando alguns dos seus principais colaboradores, identificando-os desde a antiguidade, passando pela Idade Média, até chegar na Idade Moderna, quando surgem Newton e Leibniz, os principais colaboradores para a construção do Cálculo Diferencial e Integral. Falaremos um pouco também do desenvolvimento do cálculo na Idade Contemporânea.

Desta forma, o presente trabalho tem por objetivo apresentar o Cálculo Diferencial como ferramenta interdisciplinar no Ensino Médio.

Capítulo 1

Um pouco da História do Cálculo

A história do cálculo encaixa-se em vários períodos distintos, de forma notável nas eras antiga, medieval e moderna: [9],[10] e [11]. As figuras observadas neste capítulo foram tiradas de [10].

1.1 Antiguidade

Figura 01: Arquimedes

De acordo com Gauss, Arquimedes (Figura 01), o maior matemático da antiguidade, já apresentava idéias relacionadas ao Cálculo dois séculos antes de Cristo.

Na Antiguidade, foram introduzidas algumas idéias do cálculo integral, embora não tenha havido um desenvolvimento dessas idéias de forma rigorosa e sistemática. A função básica do cálculo integral, calcular volumes e áreas, pode ser remontada ao Papiro Egípcio de Moscow (1800 a.C.), no qual um egípcio trabalhou o volume de um *frustum* piramidal.

Eudoxus (408–355 a.C.) usou o método da exaustão para calcular áreas e volumes. Arquimedes (287–212 a.C.) levou essa idéia além, inventando a heurística, que se aproxima do cálculo integral. O método da exaustão foi redescoberto na China por Liu Hui no século III, que o usou para encontrar a área do círculo. O método também foi usado por Zu Chongzhi no século V, para achar o volume de uma esfera.

1.2 Idade Média

Na Idade Média, o matemático indiano Aryabhata usou a noção infinitesimal em 499 d.C. expressando-a em um problema de astronomia na forma de uma equação diferencial básica. Essa equação levou Bháskara II, no século XII, a desenvolver uma derivada prematura representando uma mudança infinitesimal, e ele desenvolveu também o que seria uma forma primitiva do “Teorema de Rolle".

No século XII, o matemático persa Sharaf al-Din al-Tusi descobriu a derivada de polinômios cúbicos, um resultado importante no cálculo diferencial. No século XIV, Madhava de Sangamagrama, juntamente com outros matemáticos-astrônomos da Escola Kerala de Astronomia e Matemática, descreveu casos especiais da Série de Taylor, que no texto são tratadas como Yuktibhasa.

1.3 Idade Moderna

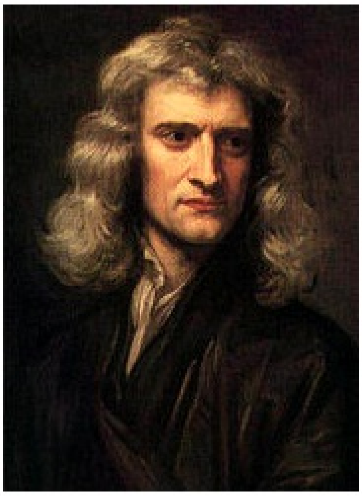


Figura 02: Sir Isaac Newton aplicou o cálculo às suas leis do movimento e a outros conceitos matemáticos-físicos.

Figura 03: Gottfried Wilhelm Leibniz: o inventor do cálculo, juntamente com Newton.

Na Idade Moderna, foram feitas descobertas independentes no cálculo. No início do século XVII no Japão, o matemático Seki Kowa expandiu o método de exaustão. Na Europa, a segunda metade do século XVII foi um período de grandes inovações. O Cálculo abriu novas oportunidades na física-matemática de resolver problemas muito antigos que até então não haviam sido solucionados. Outros matemáticos contribuíram para essas descobertas, de uma forma notável, como John Wallis e Isaac Barrow. James Gregory desenvolveu um caso especial do segundo teorema fundamental do cálculo em 1668.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (Figura 03) e Isaac Newton (Figura 02) recolheram essas idéias e as juntaram em um corpo teórico que viria a constituir o cálculo. A ambos é atribuída a simultânea e independente invenção do cálculo. A princípio, Leibniz foi acusado de plagiar os trabalhos não publicados de Isaac Newton; hoje, porém, é considerado o inventor do cálculo, juntamente com Newton. Historicamente Newton foi o primeiro a aplicar o cálculo à física ao passo que Leibniz desenvolveu a notação utilizada até os dias de hoje, a notação de Leibniz. O argumento histórico para conferir aos dois a invenção do cálculo é que ambos chegaram de maneiras distintas ao teorema fundamental do cálculo.

Quando Newton e Leibniz publicaram seus resultados, houve uma grande controvérsia de qual matemático, e portanto, que país (Inglaterra ou Alemanha) merecia o crédito. Newton derivou seus resultados primeiro, mas Leibniz publicou primeiro. Newton acusou

Leibniz de ter roubado as idéias de seus escritos não publicados. Newton tinha um álibe, pois à época compartilhara seus escritos com alguns poucos membros da Sociedade Real. Esta controvérsia dividiu os matemáticos ingleses dos matemáticos alemães por muitos anos. Um estudo cuidadoso dos escritos de Leibniz e Newton mostrou que ambos chegaram a seus resultados independentemente, Leibniz iniciando com integração e Newton com diferenciação. Nos dias atuais admite-se que Newton e Leibniz descobriram o cálculo independentemente. Leibniz, porém, foi quem deu o nome cálculo à nova disciplina, Newton a chamara de “A ciência dos fluxos".

A partir de Leibniz e Newton, muitos matemáticos contribuíram para o contínuo desenvolvimento do cálculo.

1.4 Idade Contemporânea

Figura 04: Maria Gaetana Agnesi

Na Idade Contemporânea, já no século XIX, o cálculo foi abordado de uma forma muito mais elaborada. Foi também durante este período que idéias do cálculo foram generalizadas ao espaço euclidiano e ao plano complexo. Lebesgue mais tarde generalizou a noção de integral. Sobressaíram matemáticos como Cauchy, Riemann, Weierstrass e Maria Gaetana Agnesi (Figura 04). Esta foi autora da primeira obra a unir as ideias de Isaac Newton e Gottfried Leibniz; escreveu também um dos primeiros livros sobre cálculo diferencial e integral. É dela também a autoria da chamada “curva de Agnesi".

Capítulo 2

Um pouco sobre o Cálculo Diferencial

Considere uma curva C que possua uma equação na forma $y = f(x)$. Queremos encontra a reta tangente a C em um ponto $P(a, f(a))$. Para isso consideremos um ponto $Q(x, f(x))$ próximo de P, onde $x \neq a$ e consideremos a inclinação da reta secante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Então façamos agora Q se aproximar de P ao longo da curva C, obrigando x tender a a. Se m_{PQ} tender a um número m, então definimos a tangente t como sendo a reta que passa por P e tem inclinação m. (Veja a figura 05)

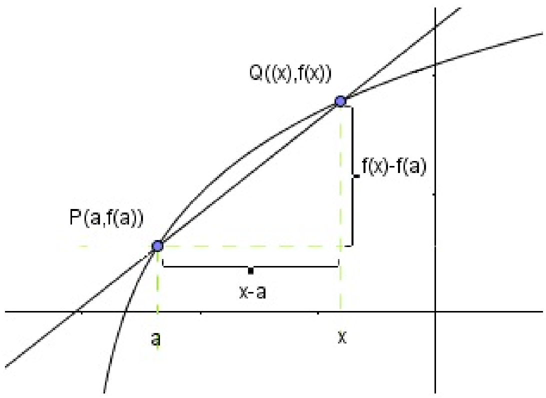


Figura 05

Definição 1. *A reta tangente a uma curva* $y = f(x)$ *em um ponto* $P(a, f(a))$ *é a reta que passa por* P *que tem inclinação*

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

desde que exista o limite. Vide [1].

Considerando h o incremento de x com relação a a, ou seja, $h = x - a$, temos que quando x tende a a, h tende a 0. Assim temos outra expressão para a inclinação da reta tangente

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Definição 2. *A derivada de uma função* f *em um ponto* a*, denotada por* $f'(a)$*, é*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Exemplo 1. *Encontre a derivada da função* $f(x) = x^2 - 8x + 9$ *em um número* a*.*

Solução: Do limite apresentado acima temos

$$\begin{aligned} f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h \to 0} 2a + h - 8 = 2a - 8. \end{aligned}$$

Exemplo 2. *Encontre uma equação da reta tangente à parábola* $y = x^2 - 8x + 9$ *no ponto* $(3, -6)$*.*

Solução: Pelo Exemplo 1, sabemos que a derivada de $f(x) = x^2 - 8x + 9$ no número a é $f'(a) = 2a - 8$. Portanto a inclinação da reta tangente em $(3, -6)$ é $f'(3) = 2(3) - 8 = -2$. Assim, a equação da reta tangente é $y - (-6) = (-2) \cdot (x - 3)$, ou seja, $y = -2x$.

2.1 Algumas derivadas básicas

Sejam f e g funções deriváveis em x e uma constante c. Valem as seguintes proposições: [5]

Proposição 2.1.1. *Sejam* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo e* $f : I \to \mathbb{R}$ *a função constante* $f(x) = c$ $\forall x \in \mathbb{R}$*, então* f *é derivável e*

$$f'(c) = 0.$$

Demonstração.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c - c = 0$$

e assim

$$f'(x) = \lim x \to h \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0.$$

$\square$

Proposição 2.1.2. *Sejam* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo e* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *funções deriváveis, então a função* $f + g$ *é derivável e*

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Demonstração. Aplicando a definição e rearranjando os termos,

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\big(f(x+h) + g(x+h)\big) - \big(f(x) + g(x)\big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x),
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.1.3. *Sejam* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo e* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função derivável, então a função* $c \cdot f$*, onde* $c \in \mathbb{R}$*, é derivável e*

$$\big(cf(x)\big)' = cf'(x).$$

Demonstração. Aplicando a definição de derivada e usando as propriedades de limite, temos

$$\big(cf(x)\big)' = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \cdot f'(x).$$

□

Proposição 2.1.4. *Sejam* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo e* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *funções deriváveis, então a função* $f \cdot g$ *é derivável e*

$$(f(x)g(x))' = f(x)'g(x) + f(x)g(x)'.$$

Demonstração. Por definição,

$$\big(f(x)g(x)\big)' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}.$$

Para fazer surgir as derivadas respectivas de f e g, escrevamos o quociente como

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Quando $h \to 0$, temos que $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \to f'(x)$ e $\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} \to g'(x)$, encontrando-se o resultado desejado. □

Exemplo 3. *Calculemos a derivada do produto das funções*

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 \text{ e } g(x) = 2x - 1.$$

Pela derivada do produto,

$$\begin{aligned}\big(f(x)g(x)\big)' &= (x^2 + 2x + 1)' \cdot (2x - 1) + (x^2 + 2x + 1) \cdot (2x - 1)' \\ &= (2x + 2) \cdot (2x - 1) + (x^2 + 2x + 1) \cdot 2 \\ &= 6x^2 + 6x.\end{aligned}$$

Proposição 2.1.5. *Sejam* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo e* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *funções deriváveis sendo* g *uma função não nula, então a função* $\frac{f}{g}$ *é derivável e*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$$

Demonstração. Aplicando a Derivada do produto

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(-\frac{g'(x)}{g(x)^2}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2} \qquad \square$$

Exemplo 4. *Calculemos a derivada do quociente de* $l(x) = \sqrt{x}$ *por* $h(x) = -x + 3$.

Solução:

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{-x+3}\right)' = \frac{(\sqrt{x})'(-x+3) - \sqrt{x}(-x+3)'}{(-x+3)^2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (-x+3) - \sqrt{x} \cdot (-1)}{(-x+3)^2} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}}{(-x+3)^2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{x} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}}{(-x+3)^2}.$$

Proposição 2.1.6. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada como* $f(x) = x^n$, *então*

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Demonstração. Usaremos o Princípio da Indução e a fórmula da derivada do produto de duas funções, para obter o resultado desejado. Tomando $f(x) = x$ e $g(x) = 1$, temos

$$(x \cdot 1)' = x' \cdot 1 + x \cdot 0.$$

Mas

$$x' = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1,$$

de modo que a fórmula é válida para $n = 1$. Agora tomando por hipótese de indução a validade para n, isto é,

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}.$$

Vamos mostrar que vale para $n + 1$, isto é, se $f(x) = x^{n+1}$ então

$$f'(x) = (n + 1) \cdot x^n.$$

Sabemos que $x^{n+1} = x \cdot x^n$, usando então a derivada do produto, temos

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = x' \cdot x^n + x \cdot (x^n)' = x^n + x \cdot n.x^{n-1} \Rightarrow$$

$$(x^{n+1})' = x^n + n \cdot x^n = (n + 1)x^n.$$

□

Proposição 2.1.7. *Derivada de uma função composta (Regra da Cadeia). Sejam* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo e* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *funções deriváveis, então a função composta* $f(g(x))$ *é derivável e*

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Demonstração. Fixemos um ponto x. Suporemos, para simplificar, que $g(x+h)-g(x) \neq 0$ para todo h suficientemente pequeno. Podemos escrever

$$(f(g(x)))' = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x + h)) - f(g(x))}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x + h)) - f(g(x))}{g(x + h) - g(x)} \cdot \frac{g(x + h) - g(x)}{h}$$

Sabemos que o segundo termo

$$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} \to g'(x)$$

quando $h \to 0$. Para o primeiro termo chamemos $a = g(x)$ e $z = g(x + h)$. Quando $h \to 0$, $z \to a$, logo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(g(x + h)) - f(g(x))}{g(x + h) - g(x)} = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a) = f'(g(x)).$$

Para aplicar a Regra da Cadeia, é importante saber identificar quais são as funções envolvidas, e em qual ordem elas são aplicadas. □

Exemplo 5. *Calculemos a derivada da função*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2}}.$$

Observamos que

$$\frac{1}{\sqrt{x^4+x^2}} = (x^4+x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Assim, temos uma situação de função composta do tipo u^α, com $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ e $u = x^4+x^2$. Assim,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{1}{2}\cdot(x^4+x^2)'\cdot(x^4+x^2)^{-\frac{1}{2}-1}\\
&= -\frac{1}{2}\cdot(4x^3+2x)\cdot(x^4+x^2)^{-\frac{3}{2}}\\
&= (-2x^3-x)\cdot(x^4+x)^{-\frac{3}{2}}\\
&= \frac{-2x^3-x}{\sqrt{(x^4+x)^3}}.
\end{aligned}$$

2.2 O Teorema de Rolle

Definição 3. *Seja* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *e* $c\in(a,b)$. *O ponto* c *é dito crítico para* f *se* $f'(c)=0$.

Proposição 2.2.1 (Teorema de Fermat)**.** *Se a função* $f(x)$*, derivável no intervalo* (a,b)*, tem um máximo ou um mínimo no ponto* $x=x_1$*, então a derivada de* $f(x)$ *é nula em* $x=x_1$*, isto é,* $f'(x_1)=0$.

Demonstração. Seja x_1 um ponto de máximo local de f e $h\in\mathbb{R}$ tal que $x_1+h\in(a,b)$. Daí teremos que $f(x_1+h)-f(x_1)\leqslant 0$ e portanto

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}\leqslant 0,\quad \text{se}\quad h>0 \quad \text{e}\quad \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}\geqslant 0,\quad \text{se}\quad h<0.$$

Assim, teremos que

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}\leqslant 0 \;\text{ e }\; \lim_{(h\to 0^-}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}\geqslant 0,$$

daí, como os limites laterais existem e coincidem, segue que $f'(x_1)=0$. No caso de x_1 ser um ponto de mínimo, a demonstração é análoga. □

Note que a condição é necessária, mas não suficiente. Porque pode haver um ponto no intervalo, no qual a derivada é nula, mas o ponto não é nem um máximo nem um mínimo, ou a função possui um ponto de máximo ou mínimo no qual não é derivável. Isso pode ser constatado para o caso de algumas funções, como mostrado na figura 06.

$f(x)=x^3$ $\qquad$ $f(x)=|x|$ $\qquad$ $f(x)=(1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

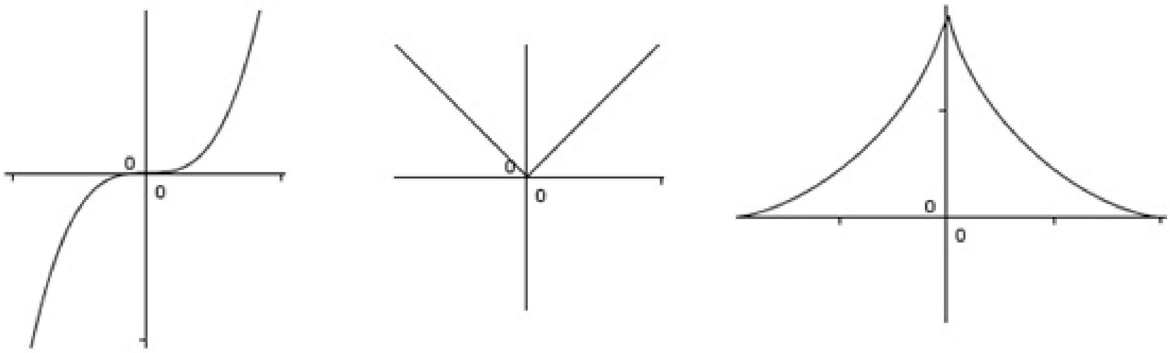


Figura 06

Proposição 2.2.2 (Teorema de Rolle). *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e derivável em* (a, b). *Se* $f(a) = f(b)$ *então existe* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$f'(c) = 0,$$

ou seja, existe um ponto crítico em (a, b).

Demonstração. Segue do Teorema de Weierstrass (vide [6] página 279) que f admite máximo e mínimo em $[a, b]$. Se ambos acontecem nos extremos, digamos, $f(a) \leqslant f(x)$ e $f(x) \leqslant f(b)$ para todo $x \in [a, b]$, teríamos que

$$f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b) = f(a), \ \forall x \in [a, b],$$

dessa forma f seria constante igual a $f(a)$ e daí qualquer $c \in (a, b)$ satisfaz que $f'(c) = 0$. Caso contrário, ao menos um dos valores extremos acontece em (a, b) e devido a Proposição 2.2.1 tal ponto é crítico. □

2.3 Teorema do Valor Médio

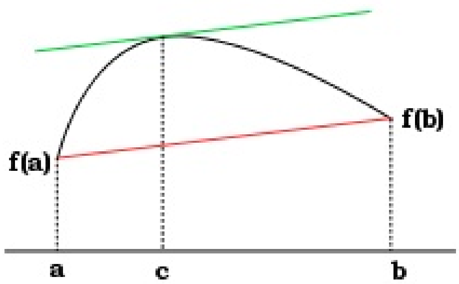


Figura 07

Em matemática, o teorema do valor médio (figura 07) afirma que dada uma função contínua f definida num intervalo fechado $[a, b]$ e derivável em (a, b), existe algum ponto c em (a, b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geometricamente, isto significa que a tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa c é paralela à secante que passa pelos pontos de abcissas a e b.

O teorema do valor médio também tem uma interpretação em termos físicos: se um objeto está em movimento e se a sua velocidade média é v, então, durante esse percurso (intervalo $[a, b]$), há um instante (ponto c) em que a velocidade instantânea também é v.

Consideremos primeiramente, a reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, isto é:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

Essa reta é o gráfico da função

$$T(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a).$$

Seja g a função que é a diferença entre f e T, isto é $g(x) = f(x) - T(x)$. Assim,

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a)\right].$$

Quando $x = a$, temos:

$$g(a) = f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) + f(a)\right] = f(a) - f(a) = 0$$

e, quando $x = b$, temos:

$$g(b) = f(b) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) + f(a)\right] = f(b) - [f(b) - f(a) + f(a)] = 0.$$

Além disso, como g é a diferença entre duas funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b), ela própria é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Logo podemos usar o Teorema de Rolle para g, concluindo que existe um número c no intervalo (a, b), tal que:

$$g'(c) = 0,$$

sendo

$$g'(x) = f'(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right],$$

temos

$$g'(c) = f'(c) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right]$$

e, portanto,

$$f'(c) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right] = 0,$$

donde,

$$f'(c) = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right].$$

2.4 Crescimento e decrescimento

Proposição 2.4.1. *Sejam* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo e* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função derivável nesse intervalo. Então temos que:*

i. *Se* $f'(x) > 0$ *sobre* I*, então* f *é crescente nele.*

ii. *Se* $f'(x) < 0$ *sobre* I*, então* f *é decrescente nele.*

Demonstração. Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer no intervalo em I com $x_1 < x_2$. De acordo com a definição de função crescente, temos que mostrar que $f(x_1) < f(x_2)$. Sabemos que f é derivável em (x_1, x_2). Logo, pelo Teorema do Valor Médio, existe um número c entre x_1 e x_2 tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Agora $f'(c) > 0$ por hipótese e $x_2 - x_1 > 0$, pois $x_1 < x_2$. Assim, $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ou $f(x_1) < f(x_2)$, o que mostra que f é crescente.

A proposição 2.4.2 é provada de forma análoga. □

2.5 Derivada de segunda ordem

A derivada de segunda ordem de uma função, ou segunda derivada, representa a derivada da derivada desta função. A notação comumente utilizada para denotar a derivada de segunda ordem é

$$y'' \quad \text{ou} \quad \frac{d^2y}{dx^2},$$

sendo y função de x.

2.5.1 Uso da segunda derivada para máximos e mínimos

Os lemas seguintes nos ajudaram a demonstrar o uso da segunda derivada para encontrar máximos e mínimos locais.

Lema 1. *Sejam* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo e* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Se* $f(x_0) > 0$*, então existe* $\delta > 0$ *tal que se* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *, então* $f(x) > 0$*.*

Demonstração. Tomando $\epsilon = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$ e usando o fato que f é uma função contínua, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - x_0| < \delta$, então $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, ou seja,

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow -\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2}$$

de onde segue o resultado. □

Lema 2. *Se* f *é uma função derivável em* (a, b)*, então* f *é contínua neste intervalo.*

Demonstração. Mostraremos que f é contínua no ponto $x_0 \in (a, b)$. Para isto, basta provar que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ou equivalentemente,

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0.$$

De fato,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

□

Proposição 2.5.1. *Sejam* f *uma função derivável em um intervalo aberto* (a, b) *contendo o ponto crítico* x_0 *tal que* $f'(x_0) = 0$*. Se* f *admite derivada segunda* f'' *em* (a, b) *e se*

i. $f''(x_0) < 0$*, então* $x = x_0$ *é um ponto de máximo local.*

ii. $f''(x_0) > 0$*, então* $x = x_0$ *é um ponto de mínimo local.*

Demonstração. Provaremos o item i, pois o outro caso é análogo. Como f admite derivada de segunda ordem, então pelo Lema 2, f' é uma função contínua. Por hipótese, $f''(x_0)$ existe de modo que

$$0 < f''(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0.$$

Sendo $f'(x)$ contínua, pelo Lema 1, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que se $x \in (x_0 - \epsilon_1, x_0)$, então

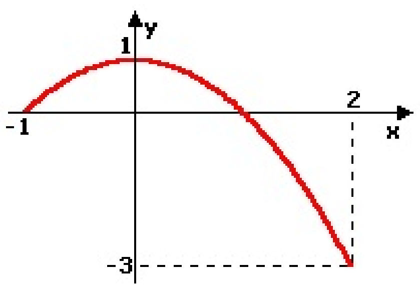
$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0.$$

Sendo $x - x_0 < 0$, segue que $f'(x) < 0$ para todo $x \in (x_0 - \epsilon_1, x_0)$. Usando o limite lateral à direita, existe $\epsilon_2 > 0$ tal que se $x \in (x_0, x_0 + \epsilon_2)$, então

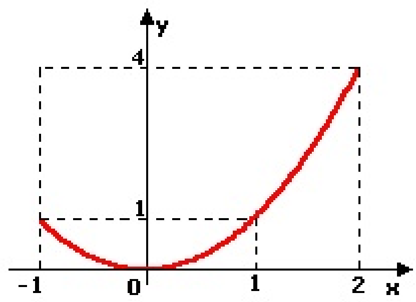
$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0.$$

Sendo $x - x_0 > 0$, segue que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (x_0, x_0 + \epsilon_2)$. Assim, temos um intervalo aberto (ϵ_1, ϵ_2) contendo x_0 tal que $f'(x)$ muda de sinal. Logo, pelo teste da primeira derivada, segue que $x = x_0$ é um ponto de mínimo local. □

Exemplo 6. *As funções* $f(x) = 1 - x^2$ *e* $g(x) = x^2$*, definidas sobre* $S = [-1, 2]$ *possuem pontos críticos em* $x = 0$*.* $f''(0) = -2 < 0$ *e* $g''(0) = 2 > 0$*. Pelo critério da segunda derivada,* $x = 0$ *é ponto de máximo local para* f *e ponto de mínimo local para* g *(figura 08).*



$f(x) = 1 - x^2$



$f(x) = x^2$

Figura 08

Definição 4.

(i) *O gráfico de uma função* f *tem concavidade voltada para cima no ponto* $(x_0, f(x_0))$ *se existir* $f'(x_0)$ *e se existir um intervalo aberto* I *contendo* x_0*, tal que para todos os valores de* $x \neq x_0$ *em* I*, o ponto* $(x, f(x))$ *do gráfico está acima da reta tangente ao gráfico em* $(x_0, f(x_0))$*.*

(ii) *O gráfico de uma função* f *tem concavidade voltada para baixo no ponto* $(x_0, f(x_0))$ *se existir* $f'(x_0)$ *e se existir um intervalo aberto* I *contendo* x_0*, tal que para todos os valores de* $x \neq x_0$ *em* I*, o ponto* $(x, f(x))$ *do gráfico está abaixo da reta tangente ao gráfico em* $(x_0, f(x_0))$*.*

Proposição 2.5.2. *Se* f *é uma função que possui as duas primeiras derivadas contínuas sobre um conjunto* S*, teremos as situações abaixo:*

i. *Se* $f''(x) > 0$ *em algum ponto* x *de* S*, então o gráfico de* f *tem a concavidade voltada para cima nas vizinhanças de* x*.*

ii. *Se* $f''(x) < 0$ *em algum ponto* x *de* S*, então o gráfico de* f *tem a concavidade voltada para baixo nas vizinhanças de* x*.*

A demonstração dos itens acima foge do objetivo do presente trabalho.

Capítulo 3

Uma breve introdução ao Cálculo Integral

3.1 Integral definida

No Capítulo 2, estudamos a derivada e suas aplicações. Assim como a derivada, a integral também é um dos conceitos mais importantes do cálculo. Já vimos que o conceito de derivada está intimamente ligado ao problema de encontrar a inclinação da reta tangente a uma curva em um determinado ponto. Agora veremos que a integral está ligada ao problema de determinar a área de uma figura plana qualquer.

3.1.1 O que é área

Consideremos o seguinte problema: encontrar a área de uma região S que está sob a curva $y = f(x)$ de a até b. Isso quer dizer que S (ver figura 09) está limitada pelo gráfico de uma função contínua f (onde $f(x) \geqslant 0$), as retas verticais $x = a$ e $x = b$, e o eixo x.

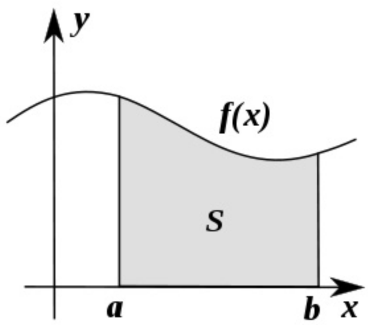


Figura 09

Um conceito primitivo de área é o da área do retângulo. Calcular a área do retângulo é relativamente fácil, assim como a de outras figuras geométricas elementares como triangulo e paralelogramo. Assim, a área de uma região S qualquer pode ser calculada aproximando a região através de polígonos, cujas áreas podem ser calculadas pelos métodos da geometria elementar.

Para isso, vamos fazer uma partição P do intervalo $[a, b]$, isto é, vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos (veja [8]), por meio dos pontos

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n,$$

escolhidos arbitrariamente, da seguinte maneira

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b.$$

Determinemos o comprimento do i-ésimo subintervalo, $[x_{i-1}, x_i]$ como sendo

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Vamos construir retângulos de base $x_i - x_{i-1}$ e altura $f(c_i)$ onde c_i é um ponto do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Assim a soma das áreas dos n retângulos, que denotaremos por S_n, será:

$$\begin{aligned} S_n &= f(c_1) \times \Delta x_1 + f(c_2) \times \Delta x_2 + \ldots + f(c_n) \times \Delta x_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \times \Delta x_i. \end{aligned}$$

Essa soma é chamada de Soma de Riemann da função f relativa à partição P. Quando n cresce, é “natural"esperar que a soma das áreas dos retângulos aproxime da área S sob a curva.

Chamamos norma da partição P o comprimento do seu subintervalo mais longo:

$$||P|| = \max\{\Delta x_i; i = 1, 2, 3, \ldots, n\}.$$

Definição 5. *A medida da área* A *da região* S *que está sob um gráfico de uma função contínua* f *é*

$$A = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \times \Delta x_i,$$

se esse limite existir.

Já podemos então formular a definição de integral definida:

Definição 6. *Seja* $f(x)$ *uma função limitada definida no intervalo fechado* $[a, b]$ *e seja* P *uma partição qualquer de* $[a, b]$. *A integral de* $f(x)$ *no intervalo* $[a, b]$, *denotada por* $\int_a^b f(x)\ dx$, *é dada por*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \times \Delta x_i,$$

desde que exista o limite. Assim, temos que

(i) $\int$ *é o sinal de integração;*

(ii) $f(x)$ *é a função integrando;*

(iii) $d(x)$ *é a diferencial que identifica a variável de integração.*

3.1.2 Propriedades da integral definida

As demonstrações das propriedades da integral definida não serão demonstradas. Veja as demonstrações em [6] página 385.

Proposição 3.1.1. *Sejam* $f(x)$*e* $g(x)$ *funções integráveis no intervalo fechado* $[a, b]$ *e seja* k *uma constante real qualquer, temos as seguintes propriedades:*

(i)

$$\int_a^b kf(x)\ dx = k\int_a^b f(x)\ dx.$$

(ii)

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\ dx \pm \int_a^b g(x)\ dx$$

(iii) *Se a<c<b, então*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$$

(iv) *Se* $f(x) \geqslant 0$ *para todo* $x \in [a, b]$, *então*

$$\int_a^b f(x)\ dx \geqslant 0.$$

(v) *Se* $f(x) \geqslant g(x)$ *para todo* $x \in [a, b]$, *então,*

$$\int_a^b f(x)\ dx \geqslant \int_a^b g(x)\ dx.$$

(vi)

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\ dx.$$

Considerações: Calcular uma integral através do limite das Somas de Riemann é geralmente uma tarefa trabalhosa. Dessa forma estabeleceremos o chamado Teorema Fundamental do Cálculo que nos permitirá calcular integrais de maneira muita mais fácil.

3.2 O Teorema Fundamental do Cálculo - TFC

Considerado um dos mais importantes teoremas do estudo do cálculo, o Teorema Fundamental do Cálculo nos permite calcular a integral de uma função utilizando uma primitiva da mesma.

Usaremos o teorema a seguir na demonstração do Teorema Fundamental do cálculo.

3.2.1 Teorema do valor médio para integrais

Se f é contínua em $[a, b]$, então existe $x_0 \in [a, b]$ tal que

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$$

Demonstração. Como f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então $\exists x_1 \in [a, b]$ tal que $f(x_1)$ é o valor mínimo de f em $[a, b]$ e $\exists x_2 \in [a, b]$ tal que $f(x_2)$ é o valor máximo de f em $[a, b]$. Portanto, temos $f(x_1) \leqslant f(t) \leqslant f(x_2)$, $\forall t \in [a, b]$. Então, pelas propriedades de integrais definidas, temos

$$f(x_1)(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\ dt \leqslant f(x_2)(b-a).$$

Logo,

$$f(x_1) \leqslant \frac{\int_a^b f(t)\ dt}{b-a} \leqslant f(x_2).$$

Como f é contínua no intervalo fechado de estremos x_1 e x_2, pelo Teorema do Valor Intermédiário, $\exists x_0 \in [a, b]$ tal que

$$f(x_0) \leqslant \frac{\int_a^b f(t)\ dt}{b-a}.$$

□

3.2.2 Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) - Parte I

Seja a função $f(x)$ contínua. Se

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt,$$

então $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Demonstração. Considerando $h > 0$, temos, pela definição de integral e pelas propriedades da integral definida, que

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt}{h} = \frac{\int_a^x f(t)\ dt + \int_x^{x+h} f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt}{h} =$$

$$\frac{\int_x^{x+h} f(t)\ dt}{h}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio para integrais, existe t_h no intervalo fechado de extremos x e $x+h$, tal que

$$\frac{\int_x^{x+h} f(t)\ dt}{h} = f(t_h).$$

Portanto,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\ dt}{h} = f(t_h).$$

Como $\lim\limits_{h \to 0} f(t_h) = f(x)$, já que t_h pertence ao intervalo fechado de extremo x e $x+h$, temos:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\ dt}{h} = \lim_{h \to 0^+} f(t_h) = f(x).$$

De modo análogo, mostra-se o mesmo resultado para $h \to 0^-$. Portanto, $F'(x) = f(x)$. □

3.2.3 Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) - Parte II

Se G é tal que $G'(x) = f(x)$ para $x \in [a, b]$, então,

$$\int_a^b f(x)\ dx \quad = \quad G(b) - G(a).$$

Demonstração. Pelo TFC - Parte I, $F'(x) = f(x)$. Portanto, como $G'(x) = f(x)$, por hipótese, temos $G'(x) = F'(x) \Rightarrow G(x) = F(x) + c$. Logo,

$$G(x) = F(x) + c = \int_a^x f(t)\ dt + c.$$

Então,

$$\begin{aligned} G(a) = F(a) + c &= \int_a^a f(t)\ dt + c = 0 + c \Rightarrow G(a) = c \\ G(b) = F(b) + c &= \int_a^b f(t)\ dt + c = \int_a^b f(t)\ dt + G(a) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = G(b) - G(a).$$

□

3.3 Integral indefinida

No capítulo 2, tínhamos uma função e a partir dela encontrávamos uma outra na qual chamávamos de derivada dessa função. Neste capítulo faremos o caminho contrário, ou seja, dada a derivada, vamos determinar uma função original que chamaremos de primitiva. Para isso, precisamos conhecer as regras de derivação de várias funções já mencionadas no capítulo 2 para determinar as primitivas.

Definição 7. *Uma função* $F(x)$ *é chamada uma primitiva da função* $f(x)$ *em um intervalo* I*, se para todo* $x \in I$*, tem-se* $F'(x) = f(x)$.

Exemplo 7. *A função* $F(x) = \dfrac{x^5}{5}$ *é uma primitiva da função* $f(x) = x^4$*,pois*

$$F'(x) = \frac{5x^4}{5} = x^4 = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observe que as funções $T(x) = \dfrac{x^5}{5} + 9$ e $H(x) = \dfrac{x^5}{5} - 2$, também são primitivas da função $f(x) = x^4$, $T'(x) = H'(x) = f(x)$.

Definição 8. *Se a função* $F(x)$ *é uma primitiva da função* $f(x)$*, a expressão* $F(x) + C$ *é chamada integral indefinida da função* $f(x)$ *e é denotada por*

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C.$$

Lê-se: Integral indefinida de $f(x)$ ou simplesmente integral de $f(x)$ em relação a x.

Chamamos de integração o processo que permite encontrar a integral indefinida de uma função.

Da definição de integral indefinida, temos as seguintes observações:

(i) $\int f(x)\ dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$.

(ii) $\int f(x)\ dx$ representa uma família de funções, isto é, a família ou o conjunto de todas as primitivas da função integrando.

(iii) $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\ dx\right) = \frac{d}{dx}(F(x) + C) = \frac{d}{dx}F(x) = F'(x) = f(x)$.

A partir delas observamos que:

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\int f(x)\ dx\right) = f(x).$$

Isto nos permite que obtenhamos fórmulas de integração diretamente das fórmulas de derivação.

3.3.1 Propriedades da integral indefinida

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções reais definidas no mesmo domínio e k uma constante real. Então:

Proposição 3.3.1.

$$\int kf(x)\ dx = k\int f(x)\ dx.$$

Proposição 3.3.2.

$$\int (f(x) + g(x))\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx.$$

A partir da página 385 de [6] é possível verificar a validade dessas propriedades.

Exemplo 8. *Vamos calcular* $\int (7x^4 + \sec^2(x))\ dx$.

Resolução: Das propriedades de integral indefinida, temos
$\int (7x^4 + \sec^2(x))\ dx = 7\int x^4\ dx + \int \sec^2(x)\ dx = 7 \cdot \frac{x^{4+1}}{4+1} + C_1 + \text{tg}(x) + C_2 =$
$7 \cdot \frac{x^5}{5} + \text{tg}(x) + C_1 + C_2$,

Onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias. Assim,

$$\int (7x^4 + \sec^2(x))\ dx = 7 \cdot \frac{x^5}{5} + \text{tg}(x) + C,$$

onde $C = C_1 + C_2$.

Capítulo 4

Problemas aplicados a outras ciências

A seguir apresentaremos 10 problemas de aplicações do cálculo em outras ciências. Mostraremos a solução de cada problema e para alguns deles faremos comentários que abordam de que maneira o cálculo pode ser apresentado como ferramenta que facilite a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio, mostrando que é possível seu ensino nesta modalidade.

Problema 1. *[7](Aplicações na Física). Mostre que a equação de um corpo arremessado para baixo com velocidade inicial* v_0 *de uma altura* x_0*, desconsiderando a resistência do ar, é dada por*

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0.$$

Solução: Da Física temos que a velocidade escalar média é dada por:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \text{onde} \quad \Delta x = x - x_0 \quad \text{e} \quad \Delta t = t - t_0. \tag{4.1}$$

Para determinarmos a velocidade escalar instantânea na posição cujo espaço é x_0, podemos escolher x cada vez mais próximo de x_0 e calcular os quocientes $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. À medida que x fica mais próximo de x_0, diminui a variação de espaço $\Delta s = x - x_0$, assim como o intervalo de tempo $\Delta t = t - t_0$. Quando t tende a t_0, isto é, Δt tende a zero, a variação de espaço $\Delta x = x - x_0$ também tende a zero. Porém o quociente $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ não é necessariamente pequeno, assumindo um determinado valor limite. Esse valor limite é a velocidade escalar instantânea na posição cujo espaço é x_0, ou seja, é a velocidade escalar no instante t_0. Assim, a velocidade escalar instantânea num instante t é dada por

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Esse limite recebe o nome de derivada do espaço em relação ao tempo e indica-se por $\frac{dx}{dt}$. Portanto,

$$v = \frac{dx}{dt}. \tag{4.2}$$

Da Física também sabemos que a aceleração pode ser dada por

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \tag{4.3}$$

onde

$$\Delta v = v - v_0 \quad \text{e} \quad \Delta t = t - t_0.$$

De forma análoga à mostrada anteriormente podemos concluir que a aceleração escalar instantânea num instante t é dada por

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Esse limite recebe o nome de **derivada da velocidade** em relação ao tempo e indica-se por $\frac{dv}{dt}$. Portanto,

$$a = \frac{dv}{dt}. \tag{4.4}$$

Da equação (4.3) e por meio de breves modificações chegamos a equação horária da velocidade

$$v(t) = v_0 + at.$$

Em si tratando de queda livre, na Física sabemos que a equação horária da velocidade é dada por

$$v(t) = v_0 - gt, \tag{4.5}$$

em que g é a aceleração da gravidade.

Pela Proposição 2.1.6, em se tratando de função polinomial, sabemos que sempre que derivamos uma função polinomial de grau n (para $n \geqslant 1$), obtemos outra função polinomial de grau $n - 1$. A equação horária da velocidade é a derivada da equação horária do espaço. Ora, se a primeira é do 1° grau em t, esta outra será do 2° grau em t. Assim,

$$x(t) = A + B \cdot t + C \cdot t^2, \tag{4.6}$$

onde A, B e C são constantes e $C \neq 0$. Observe que se $t = 0$, temos $v = v_0$, para a equação (4.5) e $x = A$, ou seja, $A = x_0$, para a equação (4.6). Derivando a equação (4.6) e observando (4.3) temos

$$v = B + 2Ct, \tag{4.7}$$

comparando (4.5) e (4.7), temos que

$$B = v_0 \quad \text{e} \quad 2C = -g \Rightarrow C = -\frac{g}{2}.$$

Dessa forma, chegamos a equação desejada

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0.$$

Problema 2. *[7] (Aplicações na Engenharia de Tráfego Aéreo). O modelo de caminho de pouso percorrido por um avião satisfaz as seguintes condições:*

i. *A altitude de cruzeiro é* h *quando a descida começa a uma distância horizontal* l *do ponto de contato na origem (aeroporto);*

ii. *O piloto deve manter uma velocidade constante* v *em toda a descida;*

iii. *O valor absoluto da aceleração vertical não deve exceder uma constante* k *(que é muito menor que a aceleração da gravidade).*

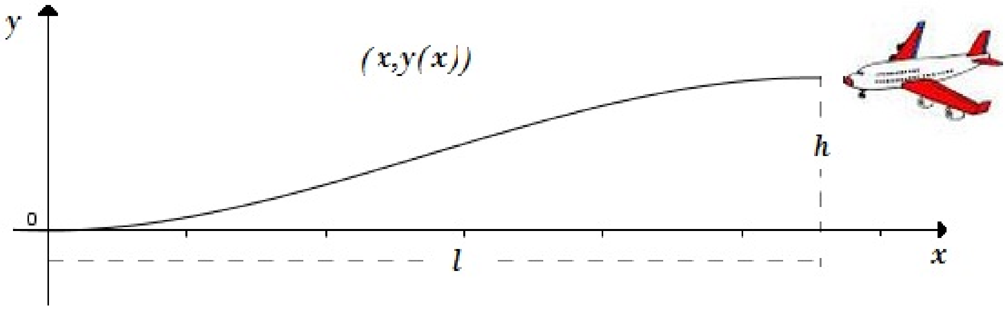


Figura 10

a) *Encontre um polinômio cúbico* $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *que satisfaça as condições (i) impondo condições razoáveis para* P *e* P' *no início da descida e no ponto de contato.*

b) *Use as relações (i) e (ii) para mostrar que*

$$\frac{6hv^2}{l^2} \leqslant k. \tag{4.8}$$

c) *Suponha que a companhia aérea decida não permitir que a aceleração vertical do avião exceda* 1.385 km/h^2*. Se a altitude de cruzeiro do avião for* 11.000 *m e a velocidade for* 480 km/h*, a que distância do aeroporto o avião deve começar a descer?*

Resolução: (a) Analisando a figura 09, as condições impostas sobre P e sua derivada P' devem ser:

$$P(0) = P'(0) = P'(l) = 0 \quad \text{e} \quad P(l) = h. \tag{4.9}$$

Com base nas condições (4.9), fazendo $y(x) = P(x)$, sabendo que:
$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, temos que $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, e daí
de $P(0) = 0$, segue que $P(0) = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0 \Rightarrow d = 0$;
de $P'(0) = 0$ segue que $P'(0) = 3a \cdot 0 + 2b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$; Assim,
de $P'(l) = 0$ segue que $3al^2 + 2bl = 0 \Rightarrow a = \dfrac{-2b}{3l}$
e de $P(l) = h$ segue que a $l^3 + bl^2 = h$, e substituindo a temos que

$$\frac{-2b}{3l} \cdot l^3 + b \cdot l^2 = h \Rightarrow \frac{-2b}{3} \cdot l^2 + \frac{3b}{3} \cdot l^2 = h \Rightarrow \frac{b}{3} \cdot l^2 = h \Rightarrow$$

$$b = \frac{3h}{l^2} \quad \text{e} \quad a = \frac{-2h}{l^3},$$

logo,

$$y = P(x) = \frac{-2h}{l^3} \cdot x^3 + \frac{3h}{l^2} \cdot x^2. \tag{4.10}$$

(b) Levando em consideração que $x = x(t)$ e $y = y(t)$, a condição (ii) implica que $x' = v$ e $|y''| = k$. Daí, como $y(t) = y(x(t))$, temos

$$y' = \frac{dy}{dx} v \Rightarrow y'' = \frac{d^2y}{dx^2} v^2. \tag{4.11}$$

Derivando a expressão (4.10) duas vezes e utilizando a informação (4.11), obtemos

$$\left| -\frac{12hx}{l^3} + \frac{6h}{l^2} \right| \cdot v^2 \leqslant k. \tag{4.12}$$

A desigualdade acima deve ser satisfeita para todos os valores de $x \in [0, l]$, assim sendo como a expressão dentro do módulo é decrescente como função de x e portanto assume seu valor máximo em $x = 0$, a desigualdade (4.12) implica em

$$\frac{6hv^2}{l^2} \leqslant k.$$

Usando o resultado acima e os dados numéricos do item (c), temos que,

$$l \geqslant v \cdot \sqrt{\frac{6h}{k}} \Rightarrow l \geqslant 104,78 \text{ km}.$$

A análise da figura 09 facilita ao aluno compreender o problema, pois traz informações importantes como a distancia horizontal (l) do avião ao aeroporto e sua altitude(h). Assim o aluno começa a construir pares ordenados ($(0,0)$ e (l,h) com relação a P; $(0,0)$ e $(l,0)$ com relação a P') que o ajudarão a modelar o polinômio. O aluno conhece a forma completa de um polinômio do 3° grau e, aplicando sua derivada, facilmente encontra a forma completa de um polinômio do 2° grau que satisfaz o problema. Aplicando algumas técnicas de substituição e igualdade de polinômios ele encontra o polinômio desejado no item (a) e sua derivada.

O estudo das equações paramétricas no ensino médio permite ao aluno modelar a função $y = P(x)$ na forma $x = x(t)$ e $y = y(t)$, em que y observado separadamente indica um movimento vertical em que o módulo de sua aceleração não pode ser superior a k. Da física sabemos que a segunda derivada da função movimento representa uma aceleração. Sabendo disso, usando as condições (i) e (ii), aplicando técnicas de derivação e desigualdade o aluno chega ao resultado desejado no item (b).

Manipulando o resultado do item (b) e fazendo alguns cálculos resolve-se o item (c).

Problema 3. *(Aplicações na Engenharia de Produção). Um recipiente cilíndrico, aberto em cima, deve ter capacidade de 375π cm^3. O custo do material usado para a base do recipiente é de 15 centavos o cm^2 e o custo do material usado para a parte curva é de 5 centavos por cm^2. Se não há perda de material, determine as dimensões que minimizem o custo do material.*

Resolução: Seja r o raio do cilindro e h sua altura. As equações que determinam a área da base do cilindro e sua área lateral são:

$$Ab = \pi r^2 \quad \text{e} \quad Al = 2\pi rh \tag{4.13}$$

e o custo do material é dado por $C = 15\pi r^2 + 5 \cdot 2\pi rh$, ou seja,

$$C = 15\pi r^2 + 10\pi rh. \tag{4.14}$$

Sabemos que o volume de um cilindro é dado por $V = \pi r^2 h$, e como $V = 375$ cm^3, temos:

$$\pi r^2 h = 375 \Rightarrow h = \frac{375}{r^2}.$$

Agora, substituímos h em (4.14)

$$C = 15\pi r^2 + 10\pi r \cdot \frac{375}{r^2} \Leftrightarrow C = 15\pi r^2 + \frac{3750\pi}{r}.$$

Assim temos uma equação para o custo em função de r. Derivando teremos, $C' = 30\pi r - \frac{3750\pi}{r^2}$. Fazendo $C' = 0$, temos:

$$30\pi r - \frac{3750\pi}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 30\pi r = \frac{3750\pi}{r^2} \Leftrightarrow r^3 = 125 \Leftrightarrow r = 5.$$

Encontremos agora a altura:

$$h = \frac{375}{r^2} \Leftrightarrow h = \frac{375}{5^2} \Leftrightarrow h = 15.$$

Logo, o custo do material será mínimo quando $r = 5$ cm e $h = 15$ cm.

Observamos que $C''(5) = 30\pi + \frac{7500\pi}{5^3} = 30\pi + 60\pi = 90\pi$, ou seja, é positiva. Isso nos garante que a função tem um valor de mínimo para $r = 5$.

Neste problema, para sua resolução utilizamos assuntos como: área lateral, área total e volume do cilindro, que são sempre apresentados em qualquer plano de curso do ensino médio. Verifica-se que a aplicação da primeira derivada e do teste da segunda derivada são eficientes para determinação do custo mínimo de produção do cilindro.

Problema 4. *(Aplicações na Física). Uma bateria de voltagem fixa* V *e resistência interna fixa* r *está ligada a um circuito de resistência variável* R*. Pela Lei de Ohm, a corrente* I *no circuito é* $I = \frac{V}{R+r}$*. Se a força resultante é dada por* $P = I^2 \cdot R$*, mostre que a força máxima ocorre quando* $R = r$*.*

Resolução: Substituindo $I = \frac{V}{R+r}$ em $P = I^2 \cdot R$, teremos:

$$P = \left(\frac{V}{R+r}\right)^2 \cdot R \Leftrightarrow P = \frac{V^2R}{R^2 + 2Rr + r^2}$$

e derivando em função de R temos:

$$\begin{aligned} P' &= \frac{V^2(R^2 + 2Rr + r^2) - V^2R(2R + 2r)}{(R+r)^4} \\ P' &= \frac{V^2(R^2 + 2Rr + r^2) - V^2(2R^2 + 2Rr)}{(R+r)^4} \\ P' &= \frac{V^2(r^2 - R^2)}{(R+r)^4}. \end{aligned}$$

Fazendo $P' = 0$, temos:

$$\frac{V^2(r^2 - R^2)}{(R+r)^4} = 0 \Leftrightarrow V^2(r^2 - R^2) = 0 \Leftrightarrow r^2 - R^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 = R^2 \Leftrightarrow r = R,$$

visto que $r \neq -R$, por algumas das equações acima.

O aluno pode achar esse problema difícil por trazer equações das quais ele nunca ouviu falar. Ao ver a presença da variável I nas duas equações ele pode isolá-la em uma equação, substituí-la na outra e encontrar uma equação mais complexa ainda. Mas ao verificar a presença da palavra “máxima", por se tratar de uma função, rapidamente ele observa que se trata de um problema de máximo ou de mínimo, e que a derivada é uma excelente ferramenta para resolver o problema, onde o aluno aplica a derivada e a iguala a zero.

Problema 5. *(Aplicações na Química). Um tanque de* 400 L *enche-se com uma solução de* 60 Kg *de sal* ($NaCl$) *em água* (H_2O)*. Depois se faz entrar água nesse tanque à razão de* 8 L/min *e sai na mesma razão e a mistura é mantida homogênea por agitação. Qual a quantidade de sal existente no tanque ao fim de* 1 *hora?*

Resolução: Considerando as seguintes variáveis ou constantes que nos auxiliarão na solução do problema:

Quantidade de sal = Q. Volume inicial = $V_0 = 400$ L.

Taxa de variação do volume de entrada (Δe)= 8 L/min.

Taxa de variação do volume da saída (Δs)= 8 L/min.

Concentração de sal na entrada (Ce)= 0.

Concentração de sal na saída (Cs)= $\dfrac{Q}{V_0 + t(\Delta e - \Delta s)}$.

Sabemos que Concentração = $\dfrac{\text{massa}}{\text{volume}}$, ou seja,

$$\text{Massa} = \text{concentração} \times \text{volume}.$$

Daí,

$Ce \times \Delta e$ = Taxa de variação do sal que entra no tanque.

$Cs \times \Delta s$ = Taxa de variação do sal que sai do tanque.

Assim, podemos modelar a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\frac{dQ}{dt} &= Ce\Delta e - Cs\Delta s \\
\frac{dQ}{dt} &= Ce\Delta e - \frac{Q\Delta s}{V_0 + t(\Delta e - \Delta s)} \\
\frac{dQ}{dt} &= 0 - \frac{Q \cdot 8}{400 + t(8-8)} \\
\frac{dQ}{dt} &= -\frac{Q}{50} \\
\frac{dQ}{Q} &= -\frac{dt}{50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{Q}\,dQ &= \int \frac{-1}{50}\,dt \\
\ln Q &= -\frac{t}{50} + \ln C \\
\ln Q - \ln C &= -\frac{t}{50} \\
\ln\left(\frac{Q}{C}\right) &= -\frac{t}{50} \\
\frac{Q}{C} &= e^{-\frac{t}{50}} \\
Q &= C \cdot e^{-\frac{t}{50}}.
\end{aligned}$$

Sabendo que o valor inicial de sal é de 60 Kg, encontramos $C = 60$. Assim,

$$Q = 60 \cdot e^{-\frac{t}{50}}.$$

Então, depois de 1 hora, ou seja, 60 minutos, a quantidade de sal é igual a:

$$Q = 60 \cdot e^{-\frac{60}{50}}$$

$$Q \approx 18.07 \text{ Kg}.$$

Neste problema o aluno poderá utilizar o conceito de integral indefinida como ferramenta para a resolução do problema. A princípio ele define algumas variáveis e constantes que serão utilizadas na modelagem da função que representa a taxa de variação do sal em relação ao tempo. Aplicando algumas técnicas de integração e propriedades de logaritmos, ele descreve a função Q, que representa a quantidade de sal na solução em função do tempo. Sabendo que $Q(0) = 60$, determinamos a constante C, assim basta determinar $Q(60) \approx 18.07$ kg, que representa a quantidade de sal na solução após 1 hora ou 60 minutos.

Problema 6. *[7] (Aplicações nas Ciências Farmacológicas). A reação do organismo à administração de um medicamento é frequentemente representada por uma função da forma* $R(D) = D^2\left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3}\right)$*, onde* D *é a dose e* C *(uma constante) é a dose máxima que pode ser administrada. A taxa de variação de* R *em relação à* D *é chamada de sensibilidade. Determine o valor de* D *para o qual a sensibilidade é máxima.*

Resolução: Encontremos a taxa de variação de R em relação à D derivando a função R:

$$R'(D) = CD - D^2.$$

Para encontrar essa taxa de variação (sensibilidade) máxima derivamos novamente R e encontramos

$$R''(D) = C - 2D. \tag{4.15}$$

Igualamos (4.15) a 0 para encontrar quando essa sensibilidade será máxima:

$$C - 2D = 0 \Leftrightarrow 2D = C \Leftrightarrow D = \frac{C}{2}.$$

Então a sensibilidade será máxima quando a dose for igual a metade da dose máxima que pode ser administrada.

Problema 7. *[7] (Aplicações na Medicina) O sistema vascular sanguíneo consiste em vasos sanguíneos (artérias, arteríolas, capilares e veias) que transportam sangue do coração para os órgãos e de volta para o coração. Esse sistema trabalha de forma a minimizar a energia despendida pelo coração no bombeamento do sangue. Em particular, essa energia é reduzida quando a resistência do sangue diminui. Uma das Leis de Poiseuille dá a resistência do sangue como*

$$R = \frac{CL}{r^4}, \tag{4.16}$$

onde L é o comprimento do vaso sanguíneo; r, o raio; e C é uma constante positiva determinada pela viscosidade do sangue. (Poiseuille estabeleceu experimentalmente essa lei) A figura seguinte mostra o vaso sanguíneo principal com raio r_1 ramificando a um ângulo θ? em um vaso menor com raio r_2.

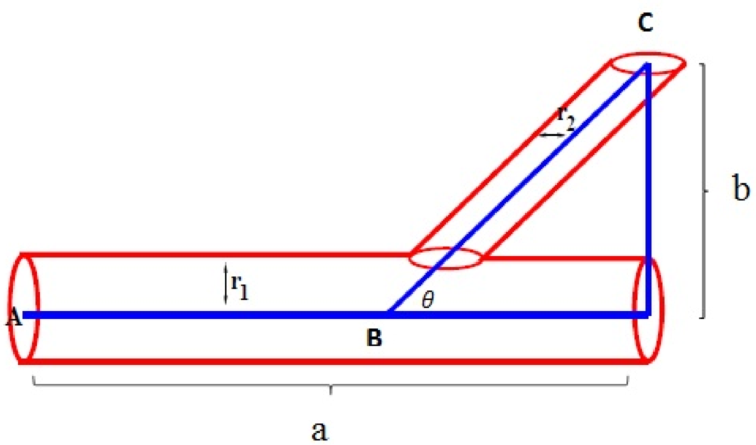


Figura 12

a) *Use a Lei de Poiseuille para mostrar que a resistência total do sangue ao longo do caminho ABC é*

$$R = C\left(\frac{a - b \cdot cotg(\theta)}{r_1^4} + \frac{b \cdot cosec(\theta)}{r_2^4}\right), \tag{4.17}$$

onde a *e* b *são as distâncias mostradas na figura.*

b) *Demonstre que a resistência é minimizada quando*

$$\cos(\theta) = \frac{r_2^4}{r_1^4}. \tag{4.18}$$

c) *Encontre o ângulo ótimo de ramificação quando o raio do vaso sanguíneo menor é* $\frac{2}{3}$ *do raio do vaso maior.*

Resolução: A resistência R no caminho ABC, será dada por

$$R_{AB} + R_{BC}, \tag{4.19}$$

onde R_{AB} e R_{BC} são, respectivamente as resistências nos caminhos AB e BC. Note que $b = |BC|\text{sen}(\theta)$, portanto $|BC| = b \cdot \text{cosec}(\theta)$ e portanto, utilizado a equação (4.16) temos que

$$R_{BC} = C \cdot \frac{b \cdot \text{cosec}(\theta)}{r_2^4}. \tag{4.20}$$

Denotando por C' a projeção ortogonal de C sobre o vaso de comprimento a, temos que $|BC'| = b \cdot \text{cotg}(\theta)$ e ainda $|AB| = a - |BC'|$. Utilizando novamente a equação de Poiseuille, concluímos que

$$R_{AB} = C \cdot \frac{a - b \cdot \text{cotg}(\theta)}{r_1^4}, \tag{4.21}$$

e portanto o item (a) está feito. Calculando a derivada de R obtemos

$$R' = C \cdot \left(\frac{b \cdot \text{cosec}^2(\theta)}{r_1^4} - \frac{b \cdot \text{cosec}(\theta) \cdot \text{cotg}(\theta)}{r_2^4}\right). \tag{4.22}$$

Resolvendo a equação com os pontos críticos concluímos que

$$R' = 0 \Leftrightarrow \frac{r_1^4}{r_2^4} = \frac{\text{cosec}(\theta)}{\text{cotg}(\theta)} = \frac{1}{\cos(\theta)}. \tag{4.23}$$

Calculando a segunda derivada de R obtemos

$$\frac{R''}{bC} = \text{cosec}(\theta) \cdot \text{cotg}(\theta)\left[\frac{\text{cotg}(\theta)}{r_2^4} - \frac{\text{cosec}(\theta)}{r_1^4}\right] + \text{cosec}^2(\theta)\left[\frac{\text{cosec}(\theta)}{r_2^4} - \frac{\text{cotg}(\theta)}{r_1^4}\right]. \tag{4.24}$$

Multiplicando por r_2^4 os dois lados da equação, utilizando o fato de que $\cos(\theta) = \dfrac{r_2^4}{r_1^4}$ e por meio de alguns cancelamentos, temos que:

$$R'' = bC\frac{\operatorname{cosec}(\theta)}{r_2^4} > 0,$$

já que b e C são valores positivos. Isso implica que o ponto crítico solução da equação (4.23) é de fato mínimo. Daí o item (b) está concluído. Para o item (c) obtemos que

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{16}{81}$$

e portanto $\theta \approx 1,3719$ rad ou $\theta \approx 78,60°$.

Através da figura o aluno pode definir claramente, utilizando os conceitos de trigonometria, as medidas dos segmentos AB e BC. Não há a necessidade do aluno do ensino médio entender como Poiseuille descreveu a equação da resistência do sangue (i). Ele apenas a utilizará em conjunto com a equação da soma dos segmentos para descrever a equação da resistência r no caminho ABC e resolver o item (a).

Para demonstrar a resistência mínima o aluno aplica a derivada de r. Observe que r é formada por uma soma de funções trigonométricas relativamente simples de encontrar a derivada. Logo após, utilizando os conceitos de máximo e mínimo, simplesmente ele pode igualar r' a 0 e resolver a equação em função de θ para ai encontrar um ponto crítico. Por fim ele faz o teste da segunda derivada para mostrar que esse ponto crítico é de mínimo resolvendo o item (b). O item (c) é feito com poucos cálculos utilizando (iii).

Problema 8. *(Aplicações na Física). Da Física sabemos que a potencia é dada pela seguinte equação*

$$P = \frac{dW}{dt},$$

onde $\dfrac{dW}{dt}$ *representa a variação do trabalho* W *no decorrer do tempo* t*. O gráfico seguinte apresenta a variação da potencia do motor de um automóvel durante testes para medir sua eficiência no decorrer do tempo.*

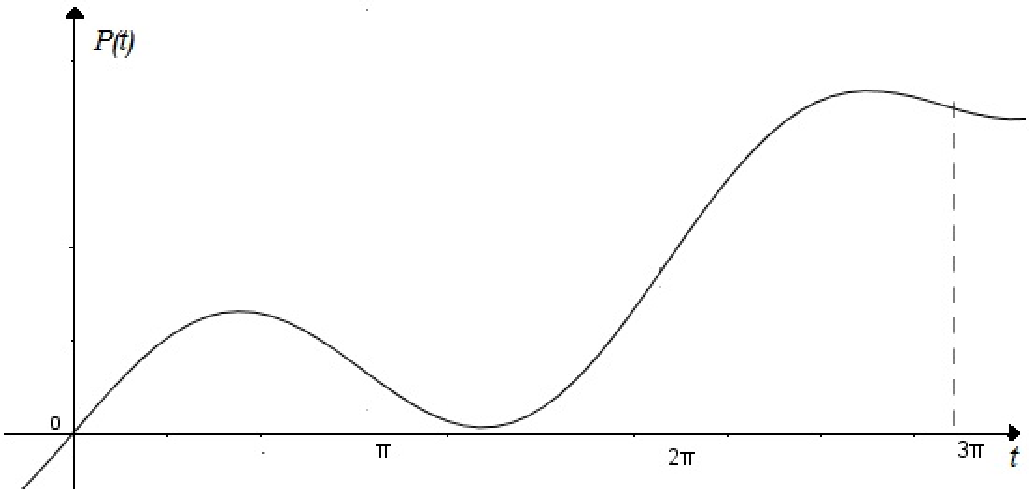


Figura 13

Um sofisticado software é capaz de descrever a equação, em função do tempo(em segundos) que representa essa variação como sendo

$$\mathsf{P}(\mathsf{t}) = sen(\mathsf{t}) + \mathsf{e}^{\frac{\mathsf{t}}{2\pi}} - 1,$$

a partir do momento que o motor é acionado. Com base nessas informações, determine o trabalho realizado pelo motor desde quando ele é acionado, no decorrer dos primeiros 3π *segundos.*

Solução: Sabemos que a taxa de variação de trabalho com relação ao tempo representa a potência do motor. Dessa forma, a função que representa o trabalho é uma primitiva da função que representa a potência. Dessa forma encontramos a equação T que representa o trabalho, tal que $\mathsf{T}' = \mathsf{P}$. Assim

$$\mathsf{T} = \int \mathsf{P}(\mathsf{t})\ \mathsf{dt} = \int (\mathrm{sen}(\mathsf{t}) + \mathsf{e}^{\frac{\mathsf{t}}{2\pi}} - 1)\ \mathsf{dt} = 2\mathsf{e}^{\frac{\mathsf{t}}{2\pi}} - \cos(\mathsf{t}) - \mathsf{x} + \mathsf{C},$$

onde C é uma constante. Utilizando os conceitos de integral definida e por meios de alguns cálculos, temos

$$\mathsf{T} = (2\pi\mathsf{e}^{\frac{3\pi}{2\pi}} - \cos(3\pi) - 3\pi) - (2\pi\mathsf{e}^{\frac{0}{2\pi}} - \cos(0) - 0) = (2\pi\mathsf{e}^{\frac{3}{2}} + 1 - 3\pi) - (2\pi - 1)$$

$$\mathsf{T} = \pi(2\mathsf{e}^{\frac{3}{2}} - 5) + 2.$$

Problema 9. *(Aplicações na Biologia). Em uma colmeia, cada célula é um prisma hexagonal regular, aberto no extremo com uma ângulo triédrico no outro extremo. Acredita-se que as abelhas fazem essas células de forma a minimizar a área superfícial para um dado* *volume, usando assim uma quantidade mínima de cera. O exame dessas células mostrou que a medida do ângulo do ápice* θ *é surpreendentemente consistente. Baseado na geometria da célula, pode ser mostrado que a área superficial* S *é dada por*

$$S = 6sh - \frac{3}{2} \cdot s^2 \cdot cotg(\theta) + 3s^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot cosec(\theta) \qquad (4.25)$$

onde s*, é o comprimento dos lados do hexágono e* h *a altura.*

a) *Calcule* $\frac{dS}{d\theta}$.

b) *Que ângulo deveriam preferir as abelhas.*

c) *Determine a área superficial mínima da célula (em termos de* s *e* h*).*

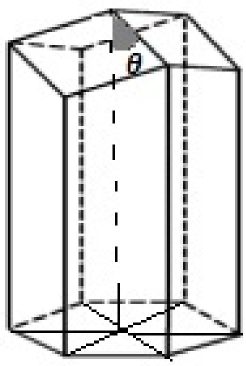


Figura 13: Alvéolo

Resolução: Para encontrar o resultado do item (a) basta derivarmos S em (4.25), assim

$$\frac{dS}{d\theta} = \frac{3}{2}s^2\text{cosec}^2(\theta) - 3s^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\text{cosec}(\theta) \cdot \text{cotg}(\theta). \qquad (4.26)$$

Para solucionar (b), igualamos o resultado obtido a zero

$$\frac{3}{2}s^2\text{cosec}^2(\theta) - 3s^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{cosec}(\theta) \cdot \text{cotg}(\theta) = 3s^2 \cdot \text{cosec}(\theta)\left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{cotg}(\theta)\right] = 0,$$

donde temos

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{cotg}(\theta) = 0,$$

isto é,

$$\text{cotg}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

ou seja, as abelhas preferem o ângulo

$$\theta_0 = \text{arc tg}(\sqrt{3}).$$

Assim, $\theta = 60°$.

Da trigonometria nós sabemos que

$$\operatorname{cosec}(\theta) = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\theta)}}{\operatorname{tg}(\theta)}$$

e portanto

$$\begin{aligned} S &= 6sh - \frac{3}{2}s^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 3s^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \\ S &= 6sh + 3s^2\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right), \end{aligned}$$

encontrando a solução de (c).

O professor pode dispor deste problema para abordar temas como geometria plana e espacial, mostrando para o aluno como essas geometrias aparecem na natureza, e como o cálculo pode ser eficaz na procura de uma determinada solução-problema. O problema também traz temas como trigonometria e funções inversas, que podem ser amplamente aprofundados no decorrer da apresentação.

Para resolvermos o item (a) basta derivarmos a função S. O ângulo de preferência das abelhas deve ser aquele que minimiza a área superficial das células produzidas. Aplicando os conceitos de ponto crítico, o aluno pode encontrar a derivada de S, igualá-la a zero e por meio de alguns cálculos, encontrar o resultado desejado em (b). Observa-se que em nenhum o momento o aluno necessitou conhecer os assuntos de nível superior para resolver o problema.

Problema 10. *(Aplicações na Biologia) Contração da traqueia ao tossir. Quando tossimos, a traqueia se contrai e aumenta a velocidade do ar que passa. Isso levanta questões sobre o quanto deveria se contrair para maximizar a velocidade e se ela realmente se contrai tanto assim quando tossimos. Considerando algumas hipóteses razoáveis sobre a elasticidade da parede da traqueia e de como a velocidade do ar próximo às paredes e reduzidas pelo atrito, a velocidade média v do fluxo de ar pode ser modelada pela equação*

$$V = c(r_0 - r)r^2 \text{ cm/s},$$

Onde r_0 *é o raio, em centímetros da traqueia em repouso e* c *é uma constante positiva cujo valor depende, em parte, do comprimento da traquéia. Demonstre que* v *é maior quando* $r = \frac{2r_0}{3}$*, ou seja, quando a traquéia está cerca de 33% contraída. O impressionante é que imagens obtidas com raio* X *confirmam que a traquéia está assim durante a tosse.*

Resolução: No intuito de encontrar a velocidade máxima derivamos a função e igualamos a 0. Assim:

$$V' = 2cr_0r - 3cr^2 = 0 \Leftrightarrow 3cr^2 = 2cr_0r \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ \quad \text{ou} \\ r = \dfrac{2r_0}{3}; \end{cases}$$

mas $r = 0$. Logo

$$r = \frac{2r_0}{3}.$$

Que é quando a velocidade é maior, ou seja, quando ela estiver cerca de 33% contraída.

Capítulo 5

Considerações finais

Observa-se que nos últimos anos o Brasil tem sofrido com a carência de profissionais nas áreas de Engenharia e de Computação. Há também uma grande necessidade de bacharéis e licenciados, principalmente nas áreas de exatas como Matemática, Química e Física. Isso se deve ao profundo desinteresse dos alunos do ensino médio por essas áreas, mais precisamente por esses cursos trazerem em seu currículo uma boa gama dos conceitos de matemática, principalmente os conceitos de Cálculo Diferencial e Integral.

A inclusão de conceitos básicos do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio, poderia proporcionar aos alunos uma melhor preparação e motivação para o ingresso no ensino superior, uma vez que ilustraria a interdisciplinaridade entre as disciplina do Ensino Médio, o que é amplamente cobrado nos planos pedagógicos dos PCNs.

Além disso, poderia tornar mais ampla e natural a aprendizagem de conteúdos do próprio Ensino Médio, visto que alguns conceitos poderiam ser apresentados de forma mais generalizada e contextualizada.

Nesse trabalho falamos de um pouco da história do cálculo e abordamos alguns conceitos de Cálculo Diferencial e Integral. Também tentamos mostrar, através da resolução de diversos problemas e exercícios, que é possível incluir no currículo do Ensino Médio tais conceitos, através de um plano de ensino consistente, que aborde a interdisciplinaridade entre as disciplinas correlatas e que mostre a infinidade de aplicações dos conceitos de derivada e de integral em boa parte das Ciências.

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, Geraldo. Cálculo de funções de uma variável, vol. 1. Rio de Janeiro: LTC Ed. 2002.

[2] ÁVILA, Geraldo. - *O Ensino do Cálculo no Segundo Grau.* In: Revista do Professor de Matemática, n.18, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991, p.1-9.

[3] ÁVILA, Geraldo. - *Limites e Derivadas no Ensino Médio.* In: Revista do Professor de Matemática, n.60, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006, p.30-38.

[4] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. - *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN-EM).* Brasil.MEC/SEMTEC - Secretaria de Educação Média e Tecnológica, Brasília, 2002.

[5] RIGHETTO, Armando, FERRAUDO, Antônio Sérgio. - *Cálculo Diferencial e Integral*- São Paulo: Instituto Brasileiro de Edições Científicas, 1981.

[6] STEWART, James. - *Cálculo*, volome I - São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2005.

[7] SILVA, Juscelino Pereira. - *A derivada e algumas aplicações.* - Teresina: EDUFPI, 2012.

[8] FUNDAMENTOS DE CÁLCULO, Coleção PROFMAT, SBM, em preparação.

[9] Disponível em `http://revista.cmc.ensino.eb.br/index.php/revista/article/view/6/4`. Acesso em: 15/07/2013.

[10] Disponível em `http://pt.wikipedia.org/wiki/C\%C3\%A1lculo`. Acesso em: 20/07/2013.

[11] Disponível em http://www.zemoleza.com.br/carreiras/44316-historia-do-calculo-diferencial-e-integral.html. Acesso em: 01/08/2013.