



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

CLÉSIO SILVA MENDES

ANÁLISE DAS LEIS DE KEPLER E SUA ABORDAGEM NO ENSINO MÉDIO

FORTALEZA

2016

CLÉSIO SILVA MENDES

ANÁLISE DAS LEIS DE KEPLER E SUA ABORDAGEM NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2016

CLÉSIO SILVA MENDES

ANÁLISE DAS LEIS DE KEPLER E SUA ABORDAGEM NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 13 / 06 / 2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Marcelo Ferreira de Melo, por sua orientação.

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

Ao meu pai, Tarciso Gomes Mendes, por seus ensinamentos, apoio e orientação tanto com relação aos assuntos acadêmicos quanto para as demais questões da vida.

À minha mãe, Deilza Maria Chaves da Silva, por sua força e determinação contagiantes, por sua dedicação na educação minha e de meus irmãos e por me acompanhar, ainda hoje, na execução dos projetos de minha vida.

Ao meu irmão, Marciro Mendes, e minha cunhada, Francisca Elilair, bem como a todos os familiares que estiveram próximos e contribuíram de alguma forma para que este trabalho se tornasse exequível.

Aos meus amigos de mestrado, em especial à Milínia, Guilherme, Isaac, Paulo, Jandean e Rivelino, pelos momentos de diversão e pelos grupos de estudos. Sem suas companhias, o mestrado ter-se-ia feito fatigante e bem mais difícil.

À minha companheira nesta estrada que denominamos vida, Luana Carolina da Silva Monteiro, por sua ajuda não somente na feitura desta dissertação, mas por nossos momentos de carinho, debates, estudos, leituras, brigas, conspiração... Estes momentos contribuíram e contribuem para percorrer, sentir vontade de percorrer e de construir tal estrada.

RESUMO

Seria possível abordar as leis de Kepler em nível de ensino médio de modo a melhorar a compreensão dos alunos sobre os conceitos físicos e matemáticos envolvidos? Esta é a pergunta central assumida como guia desse trabalho e a partir dela foram formulados três objetivos: compreender o cenário histórico que levou a enunciação e posteriormente a demonstração das leis de Kepler, demonstrar tais leis utilizando como ferramenta principal o cálculo diferencial e integral e apresentar ao aluno do ensino médio tanto o desenvolvimento histórico (cronologia dos fatos) quanto o desenvolvimento lógico (demonstração matemática) das leis de Kepler. Como meio para alcançar tais objetivos lancei mão de duas estratégias metodológicas. Foram elas: a pesquisa bibliográfica – para a formação da base conceitual que se dividiu no estudo de biografias de Brahe, Kepler e Newton e no estudo do cálculo diferencial integral vetorial – e o minicurso que buscou impulsionar o aluno de ensino médio a apreender bases matemáticas e históricas que envolvem as leis de Kepler. Através do minicurso os alunos participantes passaram a melhor entender os fatos que corroboraram para elaboração e demonstração das leis de Kepler. Também ficou perceptível que eles não têm o arcabouço teórico necessário à compreensão das demonstrações matemáticas de todas as três leis de Kepler, visto que para isso é imprescindível o cálculo diferencial e integral, mas, que apesar disto, o horizonte de compreensão dos discentes acerca da matemática em torno das leis que regem o movimento dos corpos celestes foi expandido.

ABSTRACT

It would be possible to approach the laws of Kepler in high school level in order to improve students' understanding of the physical and mathematical concepts involved? This is the central question assumed to guide this work and from it three objectives were formulated: understand the historical background that led to the enunciation and posteriorly the statement of Kepler laws, demonstrate such laws using as main tool the differential and integral calculus and to introduce the high school student both the historical development (chronology of events) as the logical development (mathematical proof) of Kepler's laws. As a means to achieve these goals I have drawn two methodological strategies. They were: the literature - to form the conceptual basis which divided the study of Brahe biographies, Kepler and Newton and the study of integral differential vector calculus - and the short course that sought to boost high school student to grasp mathematical foundations and historical involving Kepler's laws. Through the short course participating students could understand the facts that corroborate for development and demonstration of Kepler's laws. It also became apparent that they do not have the theoretical background necessary to understand the mathematical proofs of all three Kepler's laws, as for this is essential to the differential and integral calculus, but that nevertheless the horizon of understanding of students about mathematics around the laws governing the movement of celestial bodies was expanded.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Ponto no espaço.....	15
Figura 2 - Segmento de reta.....	15
Figura 3 - Um representante do vetor.....	16
Figura 4 - Cônica.....	27
Figura 5 - Vetores relacionados ao movimento de um planeta.....	32

LISTA DE SÍMBOLOS

π	Pi
μ	Mi
R	Conjunto dos números reais
λ	Lambda
\int	Integral
Σ	Somatório
∞	Infinito
κ	Capa
ε	Epsílon
θ	Teta

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO.....	12
2.	SOBRE A HISTÓRIA DAS LEIS DE KEPLER OU DE TYCHO BRAHE A ISAAC NEWTON.....	14
2.1.	TYCHO BRAHE.....	14
2.2.	JOHANNES KEPLER.....	15
2.3.	ISAAC NEWTON.....	16
3.	ALICERCES MATEMÁTICOS PARA LEIS DE KEPLER.....	18
3.1.	NOMECLATURA.....	18
3.2.	FUNÇÕES VETORIAIS.....	18
3.2.1.	LIMITES DE FUNÇÕES VETORIAIS.....	19
3.2.2.	DERIVADAS DE FUNÇÕES VETORIAIS.....	19
3.2.3.	INTEGRAIS DE FUNÇÕES VEORIAIS.....	20
3.3.	COMPRIMENTO DE ARCO.....	20
3.4.	CURVATURA.....	21
3.5.	VELOCIDADE E ACELERAÇÃO.....	23
3.6.	SECÇÕES CÔNICAS EM COORDENADAS POLARES E PARAMERIZAÇÃO DA ELIPSE.....	24
3.7.	ÁREA DE UMA REGIÃO EM COORDENADAS POLARES.....	28
4.	LEIS DE KEPLER.....	30
4.1.	PRIMEIRA LEI DE KEPLER: LEI DAS ÓRBITAS.....	30
4.2.	SEGUNDA LEI DE KEPLER: LEI DAS ÁREAS.....	33
4.3.	TERCEIRA LEI DE KEPLER: LEI DOS PERÍODOS.....	34
4.4.	AS LEIS DE KEPLER NOS LIVRO DE ENSINO MÉDIO.....	36
5.	KEPLER NO ENSINO MÉDIO.....	38
5.1.	AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA.....	40
5.2.	AULAS EXPOSITIVAS.....	41

5.3. AVALIAÇÃO FINAL	42
CONCLUSÃO	45
BIBLIOGRAFIA	46
ANEXOS	47
Anexo A - Projeto de minicurso: Leis de Kepler e gravitação universal.....	48
Anexo B – Avaliação Diagnóstica.....	51

1. INTRODUÇÃO

As abordagens no ensino médio das leis de Kepler nos Livros de física dão pouca importância aos trametes matemáticos que sustentam tais leis. Dá-se ênfase ao desenvolvimento histórico, sem, na verdade, explorar muito a história envolvida. Os livros de física do ensino médio apresentam os enunciados de Kepler e depois mencionam a lei de gravitação universal, de Newton. Assim, a abordagem desses livros ocorre de acordo a ordem cronológica dos fatos. Mas, apesar de as leis de Kepler terem dado a Isaac Newton condições para perceber a lei de gravitação universal, aquelas são decorrências lógicas desta. Em suma, o desenvolvimento lógico das Leis, que é precisamente o caminho inverso do caminho histórico, é desconsiderado ou considerado quase que inacessível aos cursandos do ensino médio. Diante de tais questões, é possível abordar as leis de Kepler em nível de ensino médio de modo a melhorar a compreensão dos alunos sobre os conceitos físicos e matemáticos envolvidos, tendo em vista que estes ainda não são conhecedores do cálculo diferencial e integral?

Com esta pergunta como foco principal, tracei os objetivos deste trabalho. São eles: i) compreender historicamente como Kepler chegou ao enunciado das leis e como, posteriormente, Newton as demonstrou; ii) entender suas demonstrações partindo da unificação, feita por Newton, das leis que regem o movimento dos corpos; e, de posse desse arcabouço, iii) apresentar ao aluno do ensino médio de escola pública uma grande quantidade de elementos que estejam relacionados às leis de Kepler para que ele consiga compreender o cenário histórico em que se deu o desenvolvimento dessas leis mas, também, com a menor quantidade de omissões possíveis, entender alguns pontos do processo lógico (demonstração das leis), reservadas as suas limitações.

Para alcançar estes objetivos, parti para uma análise bibliográfica com o intuito de verificar os elementos necessários ao entendimento das leis de Kepler e da sucessão dos fatos históricos com elas relacionados. Esta análise me levou ao estudo das biografias de Tycho Brahe, de Johannes Kepler e de Isaac Newton bem como ao estudo de funções vetoriais e algumas de suas aplicações à física. Fez-se necessário revisitar os estudos sobre vetores e sobre cálculo em coordenadas polares assim como o estudo das cônicas, em particular da elipse. Para a realização do compromisso por mim adquirido de tornar a matemática das leis de Kepler mais

palpável aos alunos de escola pública, elaborei um minicurso intitulado “Leis de Kepler e gravitação universal” realizado na escola estadual de ensino médio Liceu Professor Francisco Oscar Rodrigues na cidade de Maracanaú-CE, na qual leciono. A seguir apresento como foram dispostos os assuntos propostos nessa dissertação.

No capítulo 2, “Sobre a história das leis de Kepler ou De Tycho Brahe a Isaac Newton”, mostrarei aspectos e fatos que julgo importantes e/ou interessantes do caminho feito por três grandes mentes: desde a grande coleta de dados astronômicos feitas por Tycho Brahe, passando pelas enunciações das leis feitas por Kepler e posterior demonstração por Newton.

O capítulo 3, “Alicerces matemáticos para as leis de Kepler”, dará as bases matemáticas necessárias para a compreensão da demonstração das leis. Tendo como apoio o conceito de vetor e as operações vetoriais, visitaremos o cálculo vetorial com ênfase em suas aplicações à física. Ainda neste capítulo estudaremos a elipse em coordenadas retangulares e polares e, por fim, a determinação da área através da integral sob coordenadas polares.

O capítulo 4, “leis de Kepler”, tratará da demonstração das leis de Kepler. Ele será dividido em três tópicos, cada um deles referente a uma lei. Nos tópicos além da demonstração haverá uma análise da abordagem da lei feita em alguns livros do ensino médio.

No último capítulo desta dissertação, “Kepler no ensino médio”, apresentarei como foi construído o minicurso “Leis de Kepler e gravitação universal” e os resultados alcançados. Farei a análise desses resultados e medirei a eficácia do minicurso buscando visualizar possíveis melhoras na abordagem feita. Convido o leitor a iniciar a leitura deste trabalho.

2. SOBRE A HISTÓRIA DAS LEIS DE KEPLER OU DE TYCHO BRAHE A ISAAC NEWTON

Este capítulo não pretende fazer uma biografia de Kepler, mas sim percorrer por alguns fatos que concorreram para descobertas das três leis que descrevem o movimento dos planetas e posteriores demonstrações. Para entendermos isso, exploraremos aqui, parte da biografia de três grandes mentes: Tycho Brahe, Johannes Kepler e Isaac Newton. O presente capítulo se divide em três tópicos que são nomeados de acordo com o pensador em foco.

2.1. TYCHO BRAHE

Tycho Brahe nasceu em 14 de dezembro de 1546 em uma família nobre da Dinamarca. Aos 13 anos, Tycho foi estudar direito e filosofia na Universidade de Copenhague. Neste período ocorre um eclipse que fora previsto com exatidão. O fato de os homens conseguirem prever eventos celestiais deixa Tycho Brahe bastante impressionado. Ele passa, desde então a se dedicar com afinco à Astronomia. Em seus estudos, Brahe percebeu que as Tabelas Afonsinas e as tabelas de Copérnico eram – aquelas por alguns meses e estas por alguns dias – a data do evento astronômico ocorrido em 17 de agosto de 1563: Júpiter passou muito perto de Saturno. Tycho acredita, então, que tabelas mais certas poderiam obtidas com observações mais exatas e sistemáticas das posições dos corpos celestes por um longo período de tempo e que ele as realizaria.

Em 1572, em 11 de novembro, Tycho nota uma nova estrela na constelação de Cassiopéia. Seu brilho era tão intenso que era possível vela durante o dia. Ela durou 18 meses. Se punha diante de Brahe uma grande questão: a crença vigente era a de que o céu era imutável. As mudanças só eram possíveis abaixo da lua onde imperavam as imperfeições. Mas através do estudo da paralaxe da estrela, consegue mostrar que ela está além da Lua. Publicou suas observações no *De Nova et Nullius Aevi Memoria Prius Visa Stella* (Sobre a Nova e Previamente Nunca Vista Estrela), em Copenhague em 1573.

Em 1575, o rei da Dinamarca, Frederick II, oferece a Tycho, para a construção de um observatório, uma ilha inteira, Hveen, onde ele teria cerca de 40 famílias como súditos. Brahe constrói Uraniburg e equipa-o com vários instrumentos,

como relógios de água e de areia, grandes sextantes entre outros para efetivar suas observações com máxima precisão possível. Tycho Brahe, diferentemente dos astrônomos passados, faz medições diárias e frequente calibração dos seus instrumentos. Devido a seus métodos ele consegue medidas com precisão de um minuto de arco frente às de dez minutos desde Ptolomeu.

Em 1588 falece o Rei Frederick II. Tycho não desenvolve uma boa relação com o novo rei, que diminui abruptamente seus rendimentos. Em 1597, Brahe deixa a Dinamarca. Em 1599 ele chegou em Praga, onde o Imperador Rudolph II o nomeou matemático imperial. Ele pôde, assim, continuar suas observações. Em 1600 contratou Johannes Kepler para ajudá-lo, e faleceu em 24 de outubro de 1601.

2.2. JOHANNES KEPLER

Kepler nasceu no 1571, ao vigésimo sétimo dia do mês de dezembro, no Sul da atual Alemanha. Aos 20 anos ingressa no mestrado e completa os dois anos de estudos em Artes, que, na época, incluía hebreu, grego, astronomia e física. Seu professor de astronomia e física foi Michael Maestlin que, apesar de defensor do geocentrismo ptolomaico, apresenta a Kepler o sistema heliocêntrico de Copérnico. Em 1597, Johannes Kepler publica seu primeiro livro. Neste, Kepler defende o heliocentrismo e a ideia de que as orbitas dos planetas seriam determinadas por um poliedro que circunscreveria a orbita do planeta anterior. Johannes envia um exemplar para Tycho Brahe. Tycho responde informando-o que existem diferenças entre suas medições e as previsões do modelo por sugerido por Kepler.

No início de 1600, quase um ano após Tycho Brahe ser nomeado pelo imperador da Boêmia, Rudolph II, como matemático imperial da corte de Praga, Johannes Kepler fez uma visita a Tycho e ao final deste ano foi contratado, por Rudolph II, como assistente de Brahe. Em 1601, Brahe morre e Kepler é nomeado matemático imperial.

Kepler começou imediatamente a trabalhar no cálculo da órbita de Marte, e em 1602 descobriu a Lei das Áreas, mas não conseguiu fitar a forma da órbita. Se a órbita fosse circular, bastariam 3 observações, pois 3 pontos definem um círculo. Os pontos deveriam ser observados em oposição, já que em oposição é irrelevante

se é a Terra ou o Sol que se movem, pois os três corpos estão alinhados. Tycho tinha observado 10 oposições de Marte entre 1580 e 1600, às quais Kepler depois adicionou as de 1602 e 1604. Naturalmente qualquer conjunto de 3 observações deveria resultar na mesma órbita. Como Marte é o planeta externo com maior excentricidade, dos conhecidos então, um círculo não fitava as observações. Mesmo introduzindo um equante Kepler não conseguia fitar as observações com erro menor que 8', enquanto a precisão das observações de Tycho eram da ordem de 1'. Em 1605 Kepler descobriu que a órbita era elíptica, com o Sol em um dos focos. Estes resultados foram publicados no *Astronomia Nova*, em 1609.

Em 1618 Kepler chega a terceira lei mostrando que o cubo da distância média entre um planeta e o Sol é proporcional ao cubo do período de translação do planeta. Ele publica este resultado em 1619 no *Harmonices Mundi* (Harmonia do Mundo).

2.3. ISAAC NEWTON

Nascido em 25 de dezembro de 1642, segundo o calendário Gregoriano, em Lincolnshire, Inglaterra, Isaac Newton era filho de agricultores. Devido a morte de seu pai ter ocorrido antes de seu nascimento, Newton foi criado por sua avó e, em 1661, mandado por um tio, foi estudar no Trinity College, Cambridge.

Newton vai para Cambridge estudar direito, mas acaba se interessando muito pela nova álgebra e geometria analítica de Viète, Descartes e Wallis e pelas mecânica da astronomia e óptica de Copérnico, Galileo e Kepler.

Em 1665, um surto de peste bubônica, conhecido como A Grande Praga de Londres, faz com que a universidade seja fechada por tempo indeterminado. Newton retorna para Lincolnshire e inicia o período mais produtivo de sua vida. Nos dois anos que se seguem, Newton começará uma revolução da matemática e da física. Nesta temporada ele desenvolve as bases do cálculo diferencial e integral, elabora versões preliminares de suas três leis do movimento e descreve como é a força centrípeta num corpo em movimento circular.

Tycho Brahe havia suposto que a órbita de um cometa era circular enquanto Kepler supôs ser uma linha reta. Em 1664 um cometa é observado por vários observatórios na Europa e as indicações é que sua órbita fosse curva. Johannes Hevelius propôs que fosse elíptica. Em 1665, o francês Pierre Petit propõe

que os cometas possuem órbitas fechadas e que possivelmente os cometas de 1618 e 1664 eram o mesmo. Halley tentou relacionar a gravidade e as órbitas dos planetas sem êxito propõe o problema a Newton. Este informa que o problema já fora resolvido há anos e apresenta como resposta para o problema sua Lei de Gravitação Universal. Halley incentiva e convence a Newton que ele faça um compêndio de suas descobertas físicas aplicadas a astronomia. Algum tempo depois Newton apresentaria sua obra mais conhecida: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, o Principia.

3. ALICERCES MATEMÁTICOS PARA LEIS DE KEPLER

Para o cumprimento dos objetivos desse trabalho, munir-nos-emos primeiro das ferramentas matemáticas necessárias, a saber, o cálculo diferencial e integral vetorial.

3.1. NOMECLATURA

No decorrer deste trabalho representaremos um escalar por uma letra minúscula e um vetor por uma letra marcada por uma seta acima. Assim, λ é um escalar e \vec{v} é um vetor. O módulo, ou norma, de \vec{v} será representado por $|\vec{v}|$ ou ainda, por ser um escalar, apenas por v .

Sejam um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ e um ponto P de coordenadas (x, y, z) . O vetor $\vec{v}=(x, y, z)$ é o vetor que tem como representante o segmento de reta orientado \overline{OP} que inicia na origem $O(0,0,0)$ e finda em $P(x, y, z)$.

A **soma vetorial** de \vec{u} com \vec{v} será representado por $\vec{u}+\vec{v}$.

O **produto de um escalar λ por um vetor \vec{v}** será representado por $\lambda \cdot \vec{v}$ ou simplesmente por $\lambda \vec{v}$.

O **produto interno**, ou **produto escalar**, entre os vetores \vec{u} e \vec{v} será representado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

E por fim, o produto vetorial de \vec{u} com \vec{v} será representado por $\vec{u} \times \vec{v}$.

3.2. FUNÇÕES VETORIAIS

DEFINIÇÃO

Uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores é chamada de **função vetorial**. Uma função vetorial definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, com valores em \mathbb{R}^3 , é denotada por:

$$\vec{r}(t)=(f(t), g(t), h(t))=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$$

onde $f(t), g(t)$ e $h(t)$ são funções reais definidas em I .

(Sítio: Dmat UFMG acessado em 07/03/2016)

3.2.1. LIMITES DE FUNÇÕES VETORIAIS

Chamaremos $f(t), g(t)$ e $h(t)$ de funções componentes de \vec{r} e definiremos o limite de uma função vetorial tomando-se o limite das funções componentes.

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t), \lim_{t \rightarrow a} h(t) \right),$$

desde que os limites das funções componentes existam.

3.2.2. DERIVADAS DE FUNÇÕES VETORIAIS

DEFINIÇÃO

Definimos derivada de uma função vetorial assim como a derivada de uma função real:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$$

Facilmente, chegamos a seguinte expressão para a derivada de uma função vetorial,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{df}{dt}, \frac{dg}{dt}, \frac{dh}{dt} \right), \text{ ou}$$

$$\vec{r}'(t) = f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j} + h'(t)\vec{k}$$

desde que f, g e h sejam funções diferenciáveis.

TEOREMA 2.4.2

Se \vec{u} e \vec{v} são funções vetoriais e f uma função real, todas diferenciáveis, e λ um escalar, então:

a) $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) + \vec{v}(t)) = \vec{u}'(t) + \vec{v}'(t)$

b) $\frac{d}{dt}(\lambda \vec{u}(t)) = \lambda \vec{u}'(t)$

- c) $\frac{d}{dt}(f(t)\vec{u}(t))=f'(t)\vec{u}(t)+f(t)\vec{u}'(t)$
- d) $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t))=\vec{u}'(t)\cdot\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\cdot\vec{v}'(t)$
- e) $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t)\times\vec{v}(t))=\vec{u}'(t)\times\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\times\vec{v}'(t)$

3.2.3. INTEGRAIS DE FUNÇÕES VEORIAIS

Definimos integral definida de uma função vetorial assim da mesma maneira que para uma função real:

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{r}(t_i^{\square}) \Delta t,$$

o que resulta em:

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \left(\int_a^b f(t) dt \right) \vec{i} + \left(\int_a^b g(t) dt \right) \vec{j} + \left(\int_a^b h(t) dt \right) \vec{k}$$

3.3. COMPRIMENTO DE ARCO

Seja uma curva no espaço tal que cada ponto pertencente a curva tenha sua posição dada pelo vetor $\vec{r}(t)=(f(t),g(t),h(t))$. O comprimento L da curva entre os pontos A e B, cujas posições são respectivamente $\vec{r}(a)$ e $\vec{r}(b)$, é dado por:

$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2} dt$$

Logo,

$$L = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt$$

Seja o comprimento de arco $s(t)$ de um ponto $\vec{r}(a)$ ao ponto $\vec{r}(t)$ da curva, então:

$$s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(u)| du$$

e, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos:

$$\frac{ds}{dt} = |\vec{r}'(t)|$$

3.4. CURVATURA

Uma curva $\vec{r}(t)$ é suave em um intervalo I se $\vec{r}'(t)$ é contínua e $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ em I . Uma curva suave não tem “pontas” ou quebras abruptas. Assim, o vetor tangente “desliza” pela curva sem fazer giros bruscos. Como o vetor tangente é dado por $\vec{r}'(t)$, o versor tangente $\vec{T}(t)$ será:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

A curvatura seria, intuitivamente, a medida de quão rápido o vetor tangente (consequentemente, também o versor tangente) gira em um ponto da curva a medida que variamos t .

DEFINIÇÃO

A curvatura de uma curva é

$$\kappa = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|$$

onde \vec{T} é o vetor tangente unitário, ou seja, o versor tangente (James Stewart, 2013,).

Note que.

$$\kappa = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \frac{dt}{dt} \right| = \left| \frac{d\vec{T}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \right| = \left| \frac{d\vec{T}/dt}{ds/dt} \right| = \frac{|d\vec{T}/dt|}{|ds/dt|} = \frac{|\vec{T}'|}{|\dot{r}'|}$$

TEOREMA 2.6

A curvatura de uma curva é dada por:

$$\kappa(t) = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}$$

DEMONSTRAÇÃO

Tendo em vista o fato de $\vec{T} = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|}$ e $\frac{ds}{dt} = |\dot{r}'|$, temos

$$\dot{r}' = \frac{ds}{dt} \vec{T}$$

Assim, pela regra da derivada do produto, temos

$$\ddot{r}'' = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{T} + \frac{ds}{dt} \dot{\vec{T}}'$$

Como $\vec{T} \times \vec{T} = \vec{0}$, temos

$$\dot{r}' \times \ddot{r}'' = \frac{ds}{dt} \vec{T} \times \left(\frac{d^2s}{dt^2} \vec{T} + \frac{ds}{dt} \dot{\vec{T}}' \right)$$

$$\dot{r}' \times \ddot{r}'' = \frac{ds}{dt} \vec{T} \times \frac{d^2s}{dt^2} \vec{T} + \frac{ds}{dt} \vec{T} \times \frac{ds}{dt} \dot{\vec{T}}'$$

$$\dot{r}' \times \ddot{r}'' = \frac{ds}{dt} \vec{T} \times \frac{ds}{dt} \dot{\vec{T}}' = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 (\vec{T} \times \dot{\vec{T}}')$$

Note que \vec{T} e \vec{T}' são ortogonais,

$$\vec{T} \cdot \vec{T} = |\vec{T}|^2 = 1$$

$$0 = \frac{d|\vec{T}|^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{T} \cdot \vec{T}) = 2\vec{T} \cdot \vec{T}' \quad [1]$$

Desta forma,

$$|\vec{r}' \times \vec{r}''| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 |\vec{T} \times \vec{T}'| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 |\vec{T}| |\vec{T}'| \sin\theta = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 |\vec{T}'|$$

$$|\vec{T}'| = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{(ds/dt)^2} = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^2}$$

$$\kappa = \frac{|\vec{T}'|}{|\vec{r}'|} = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3}$$

3.5. VELOCIDADE E ACELERAÇÃO

Supondo que um objeto se movimenta pelo espaço de tal forma que no instante t sua posição seja $\vec{r}(t)$. Como velocidade é a taxa de variação da posição de um móvel com relação ao tempo, podemos afirmar, então, que o vetor velocidade $\vec{v}(t)$ é dado por:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t)$$

e que,

$$v = |\vec{v}(t)| = |\vec{r}'(t)| = \frac{ds}{dt}$$

Além disso, como a aceleração é a taxa de variação da velocidade com relação ao tempo, podemos dizer também que o vetor aceleração $\vec{a}(t)$ é dado por:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r}''(t)$$

Lembrando que o versor tangente a curva descrita pelo móvel é

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{\vec{v}'}{v}$$

$$\vec{v}' = v\vec{T}$$

$$\vec{a} = v'\vec{T} + v\vec{T}'$$

$$\vec{a} = v'\vec{T} + v|\vec{T}'| \frac{\vec{T}'}{|\vec{T}'|}$$

e que $|\vec{T}'| = \kappa |\vec{r}'| = \kappa v$

$$\vec{a} = v'\vec{T} + \kappa v^2 \frac{\vec{T}'}{|\vec{T}'|}$$

Note que v' e κv^2 são componentes retangulares de \vec{a} , elas são chamadas, respectivamente de componente tangencial e componente centrípeta da velocidade.

3.6. SECÇÕES CÔNICAS EM COORDENADAS POLARES E PARAMERIZAÇÃO DA ELIPSE.

DEFINIÇÃO

“Uma elipse ε de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distancias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$ ” (Delgado, Frensel, & Crissaff, 2013, p.99),

$$\mathcal{E} = \{P \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$$

A partir da definição acima, chegamos a seguinte equação para uma elipse centrada na origem:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Onde $b^2 = a^2 - c^2$

Chamamos a razão $e = \frac{c}{a}$ de excentricidade. Note que a excentricidade da elipse é sempre menor que 1.

TEOREMA 2.8

Seja F um ponto fixado (chamado foco) e l uma reta fixada (denominada diretriz) em um plano. Seja e um número positivo fixado (conhecido como excentricidade). O conjunto de todos os pontos P no plano tal que

$$\frac{|PF|}{|Pl|} = e$$

(ou seja, a razão da distância a F e da distância a l é a constante e) é uma seção cônica. A cônica é:

- a) uma elipse se $e < 1$
- b) uma parábola se $e = 1$
- c) uma hipérbole se $e > 1$

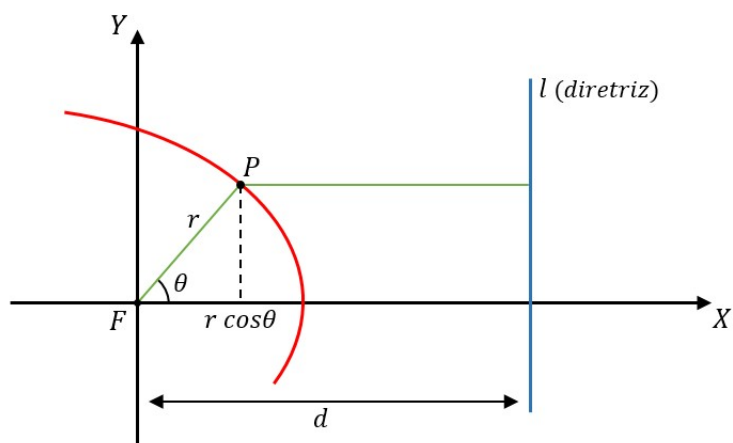
(Stewart 2013, p.613).

DEMONSTRAÇÃO

Caso $e = 1$

Escolhamos um sistema de eixos ortogonais cujo o foco F coincida com a origem O e a reta l seja paralela ao eixo OY situada a uma distância d deste, na abscissa $x = d$. Seja r o módulo do vetor posição \vec{r} do ponto P .

Figura 1 - Cônica



Fonte: elaborada pelo autor

Caso $e=1$.

$$\frac{|PF|}{|Pl|} = 1 \Rightarrow |PF| = |Pl|$$

Teríamos, então, a própria definição de parábola. Nada a fazer.

Caso $e \neq 1$.

Se (r, θ) são as coordenadas polares de P , podemos reescrever a equação $|PF| = e|Pl|$ da seguinte forma:

$$r = e(d - r \cos \theta) \quad [2]$$

Elevando os lados da equação a segundo potência, temos:

$$\begin{aligned} r^2 &= e^2(d - r \cos \theta)^2 \\ r^2 &= e^2(d^2 - 2dr \cos \theta + r^2 \cos^2 \theta) \end{aligned}$$

Reescrevendo a equação em coordenadas retangulares:

$$x^2 + y^2 = e^2 d^2 - 2e^2 dx + e^2 x^2$$

$$x^2(1 - e^2) + 2e^2 dx + y^2 = e^2 d^2$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{e^2 d}{1 - e^2} \cdot x + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2 d^2}{1 - e^2}$$

$$\left(x + \frac{e^2 d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2 d^2}{1 - e^2} + \left(\frac{e^2 d}{1 - e^2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{e^2 d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2 d^2}{(1 - e^2)^2} \quad [3]$$

Se $e < 1$, então $(1 - e^2) > 0$ e podemos nomear as quantidades abaixo da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{-e^2 d}{1 - e^2} = x_0 \\ \frac{e^2 d^2}{(1 - e^2)^2} = a^2 \\ \frac{e^2 d^2}{1 - e^2} = b^2 \end{array} \right. \quad [4]$$

A equação [3] fica:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Isto é, a curva será uma elipse.

Se $e > 1$, então $(1 - e^2) < 0$, então

$$\frac{e^2 d^2}{(1 - e^2)} = -b^2$$

e a curva será uma hipérbole.

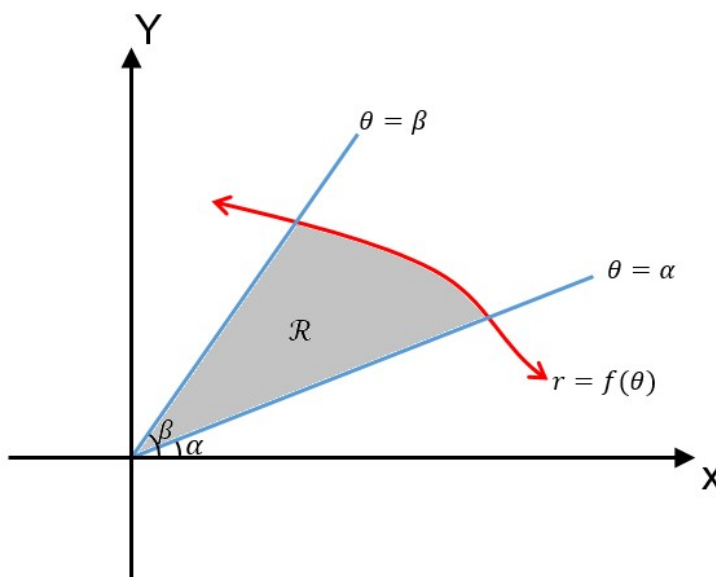
Utilizando [2] e isolando r podemos reescrever a equação de uma cônica em coordenadas polares:

$$r = \frac{ed}{(1 + e \cos \theta)} \quad [5]$$

3.7. ÁREA DE UMA REGIÃO EM COORDENADAS POLARES

Considere uma função $f(\theta)$ contínua e não negativa no intervalo $[\alpha, \beta]$. Seja a região R limitada pela curva $r = f(\theta)$ e pelas retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ (Figura 2). Desejamos calcular a área de R .

Figura 2 - Área em coordenadas polares



Fonte: elaborada pelo autor

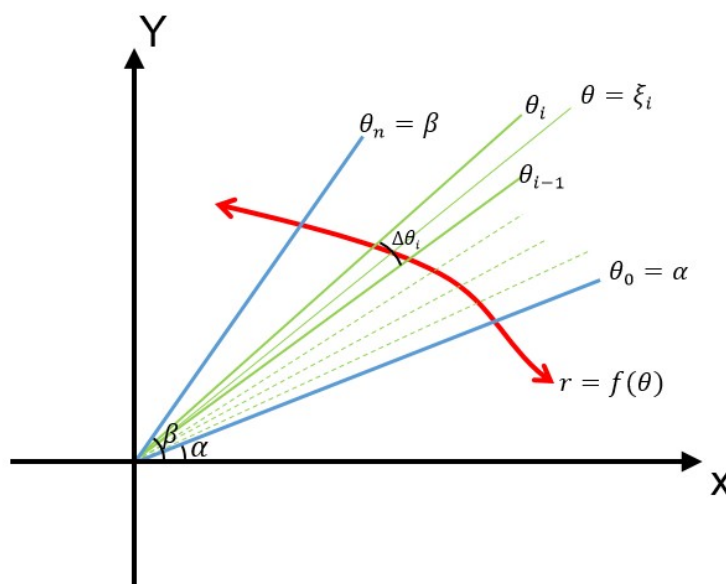
Para tal, dividiremos o intervalo $[\alpha, \beta]$ em n partições ($\Delta\theta$) tais que:

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{i-1} < \theta_i < \dots < \theta_n = \beta$$

Onde temos n subintervalos $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, com $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Se $\xi_i \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$ e $\Delta_i \theta$ é a medida do ângulo entre as retas $\theta = \theta_{i-1}$ e $\theta = \theta_i$ (Figura 3), então a área do setor circular de raio $f(\xi_i)$ delimitada pelas retas $\theta = \theta_{i-1}$ e $\theta = \theta_i$ é dada por:

$$\frac{1}{2} [f(\xi_i)]^2 \cdot \Delta_i \theta$$

Figura 3 - Região particionada



Fonte: elaborada pelo autor

Existe um setor circular destes para cada um dos subintervalos $[\theta_{i-1}, \theta_i]$. A soma das áreas de todos estes setores é dada por:

$$\frac{1}{2}[f(\xi_1)]^2 \cdot \Delta_1\theta + \frac{1}{2}[f(\xi_2)]^2 \cdot \Delta_2\theta + \dots + \frac{1}{2}[f(\xi_i)]^2 \cdot \Delta_i\theta + \dots + \frac{1}{2}[f(\xi_n)]^2 \cdot \Delta_n\theta$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2}[f(\xi_i)]^2 \cdot \Delta_i\theta$$

Se $\|\Delta\|$ é o valor do maior $\Delta_i\theta$, então a valor A da área da região R será definida como o limite da soma de Riemann acima quando $\|\Delta\|$ tende a zero.

DEFINIÇÃO

Seja R a região limitada pelas retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ e a curva cuja equação é $r = f(\theta)$, onde f é contínua e não negativa no intervalo fechado $[\alpha, \beta]$. Então, se a A é o valor da área da região R ,

$$A = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}[f(\xi_i)]^2 \cdot \Delta_i\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta$$

(Leithold 2002, p.626)

4. LEIS DE KEPLER

Este capítulo constitui-se da apresentação, análise e demonstração das três leis de Kepler. Cada lei é tratada separadamente nos três tópicos que compõem esta seção. Utilizando a lei da Gravitação Universal, enunciada por Isaac Newton, e o arcabouço matemático exibido no capítulo anterior, exponho uma demonstração de cada um dos enunciados de Johannes Kepler. Além disso, um quarto tópico apresenta as formas como as leis de Kepler são colocadas em alguns livros de Física de Ensino Médio. Os livros analisados foram “Os fundamentos da física” (Junior, Ferraro e Soares 2009) e “Tópicos de física” (Doca, Biscuola e Bôas 2007), escolhidos para a análise por serem livros reconhecidos e utilizados pela rede de ensino privado, bem como “Física contexto e aplicações: ensino médio” (Luz e Álvarez 2013), livro usado na escola que leciono, e “Física: ciência e tecnologia” (Torres, et al. 2013), livro bastante empregado nas escolas da rede pública de ensino.

4.1. PRIMEIRA LEI DE KEPLER: LEI DAS ÓRBITAS

“[...] First Law: The planetary orbits are the ellipses with the sun at our forces” (Kepler, 1609 apud Gentner, 2002).

“[...] Primeira Lei: As órbitas dos planetas são elipses e o Sol ocupa um dos focos” (tradução do autor).

A partir da lei da gravitação universal e a segunda lei da Dinâmica, ambas de Newton, analisemos agora o a curva feita por um planeta ao redor do sol:

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r},$$

$$\vec{F} = m \vec{a},$$

Temos:

$$\vec{a} = -G \frac{M}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r},$$

Daí, temos que $\vec{a} \times \vec{r} = \vec{0}$, pois \vec{a} e \vec{r} tem mesma direção. Usando o Teorema 2.4.2

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a} = \vec{0} \quad [6]$$

Conclui-se que o vetor $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$ é constante. Logo \vec{v} e \vec{r} situam-se no mesmo plano.

Mostremos agora que a curva feita pelo planeta neste plano é uma elipse. Seja $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$ o versor de \vec{r} .

$$\begin{aligned} \vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} &= \vec{r} \times \vec{r}' = r\vec{u} \times (r\vec{u}') = r\vec{u} \times (r'\vec{u} + r\vec{u}') \\ r\vec{u} \times r'\vec{u} + r\vec{u} \times r\vec{u}' &= r^2(\vec{u} \times \vec{u}') \end{aligned}$$

Logo,

$$\vec{a} \times \vec{h} = -G \frac{M}{r^2} \cdot \vec{u} \times r^2(\vec{u} \times \vec{u}') = -GM \cdot \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{u}')$$

Lembrando que \vec{u} e \vec{u}' , pela equação [1], são ortogonais e que $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$, temos que:

$$\vec{a} \times \vec{h} = -GM \cdot \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{u}') = GM \cdot \vec{u}'$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \times \vec{h}) = GM \cdot \vec{u}'$$

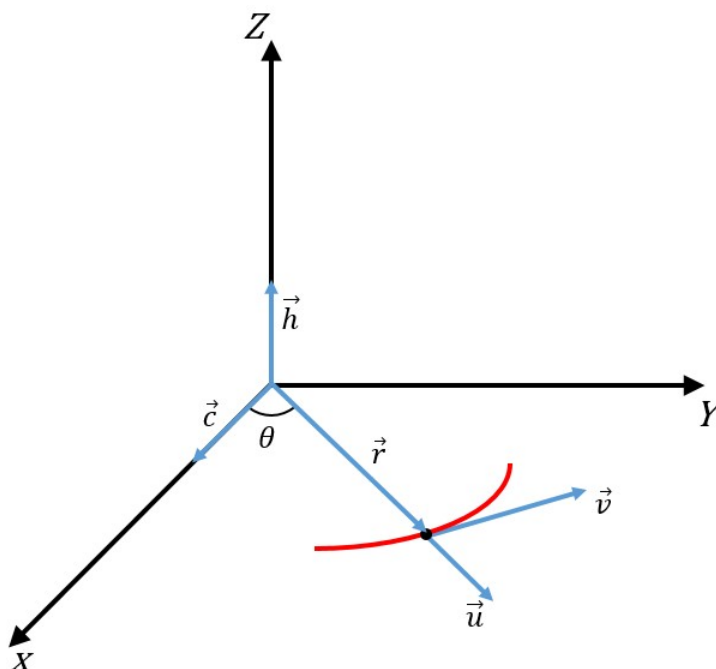
Integrando ambos os lados da equação,

$$\vec{v} \times \vec{h} = GM \cdot \vec{u} + \vec{c},$$

onde \vec{c} é um vetor constante.

Para mostrar que o movimento feito pelo planeta é uma elipse, escolheremos um sistema de eixos ortogonais conveniente a fim de facilitar tal tarefa. O plano XY será o plano que contem \vec{v} e \vec{r} . A equação acima mostra que \vec{c} está neste plano. Escolheremos a direção do eixo OX como sendo a mesma de \vec{c} . O vetor \vec{h} está na direção do eixo OZ . A figura abaixo traduz estas afirmações.

Figura 4 - Vetores relacionados ao movimento de um planeta



Fonte: (Stewart 2013, p.782)

$$\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{h}) = \vec{r} \cdot (GM \vec{u} + \vec{c}) = GM(\vec{r} \cdot \vec{u}) + (\vec{r} \cdot \vec{c}) = GMr + rc \cos \theta,$$

$$\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{h}) = (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{h} = \vec{h} \cdot \vec{h} = |\vec{h}|^2 = h^2$$

Conclui-se que:

$$h^2 = r(GM + c \cos \theta)$$

$$r = \frac{h^2}{GM + c \cos \theta} = \frac{\frac{h^2}{GM}}{1 + \frac{c \cos \theta}{GM}} = \frac{\left(\frac{c}{GM}\right) \cdot \left(\frac{h^2}{c}\right)}{1 + \left(\frac{c}{GM}\right) \cos \theta}$$

Escrevendo

$$\left\{ \begin{array}{l} e = \frac{c}{GM} \end{array} \right.$$

$$d = \frac{h^2}{c}$$

chegamos a

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$$

Mostrando que o movimento do planeta é uma cônica. Como a única cônica fechada é a elipse, concluímos que a órbita dos planetas são elípticas.

4.2. SEGUNDA LEI DE KEPLER: LEI DAS ÁREAS

“[...] Second Law: A line between the sun and any planet sweeps out equal times” (Kepler, 1609 apud Gentner, 2002).

“[...] Segunda Lei: A linha que une um planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais” (tradução do autor). Ou seja, a segunda lei diz que a taxa de variação da área A varrida pela linha que une um planeta ao sol com relação ao tempo é constante. Mostremos isso então.

Partindo da expressão da área sob uma curva em coordenadas polares e derivando A com relação a t :

$$A = \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta} \left(\int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} \frac{1}{2} r^2 d\theta \right) \frac{d\theta}{dt}$$

Aplicando, então, o teorema fundamental do cálculo, obtemos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

Mostremos agora que este valor é constante. Escrevendo os vetores \vec{r} e $\vec{v}=\vec{r}'$ em coordenadas polares:

$$\vec{r} = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{v} = [(r' \cos \theta - r \sin \theta) \vec{i} + (r' \sin \theta + r \cos \theta) \vec{j}] \frac{d\theta}{dt}$$

Temos que,

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} = (r r' \cos \theta \sin \theta \vec{k} + r^2 \cos^2 \theta \vec{k} - r r' \sin \theta \cos \theta \vec{k} + r^2 \sin^2 \theta \vec{k}) \frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{h} = r^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{k}$$

Como \vec{h} está na direção de \vec{k} (Figura 4), obtemos que

$$h = r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Por [8], chegamos a

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2} \quad [9]$$

como, pela equação [6], \vec{h} é constante concluímos que a linha que une um planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.

4.3. TERCEIRA LEI DE KEPLER: LEI DOS PERÍODOS

“[...] Third Law: The square of the period of a planet’s orbit is proportional to the cube of its radius” (Kepler, 1634 apud Gentner, 2002).

“[...] Terceira Lei: O quadrado do Período de translação de um planeta é proporcional ao cubo do raio médio de sua órbita” (tradução do autor).

DEFINIÇÃO

O raio médio r_m da órbita de um planeta é a média aritmética das distâncias de um ponto da órbita (elíptica) a cada um de seus focos. Logo, pela definição de elipse $r_m = a$.

Para demonstrar a terceira lei de Kepler, partiremos da equação [9], demonstrada no t3pico anterior:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2}$$

$$\frac{2}{h}dA = dt$$

Visto que queremos a rela33o3n entre o per33odo de transla33o3n T e o raio m33dio r_m da e que neste tempo a 33rea da elipse 33 varrida exatamente uma vez, Integramos ambos os lados da igualdade acima sob os seguintes limites:

$$\int_0^{\pi ab} \frac{2}{h} dA = \int_0^T dt$$

$$T = \frac{2\pi ab}{h}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{h^2}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{h^2} \quad [10]$$

Utilizando as equa33o3es [4], temos

$$\frac{b^2}{h^2} = \frac{\frac{e^2 d^2}{1-e^2}}{h^2} = \frac{\frac{ed}{1-e^2}}{\frac{h^2}{ed}} = \frac{a}{\frac{h^2}{ed}}$$

Utilizando as equa33o3es [7], temos

$$\frac{b^2}{h^2} = \frac{a}{\frac{h^2}{ed}} = \frac{a}{GM}$$

Conclu33mos, aplicando a express33o3n acima a equa33o3n [10], que:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

Como queríamos demonstrar.

4.4. AS LEIS DE KEPLER NOS LIVRO DE ENSINO MÉDIO

Em (Luz e Álvarez 2013), o estudo da mecânica celeste inicia-se com uma contextualização histórica sobre as discussões à época em torno das hipóteses de um universo geocêntrico ou heliocêntrico. Fala da coletânea de dados feita por Tycho Brahe e lança as leis de Kepler com uma pequena análise de cada.

Já em (Doca, Biscuola e Bôas 2007) a história das discussões entre os seguidores de Ptolomeu e os de Copérnico também é apresentada, porém, a Brahe é dada pouca importância – ele é citado, de forma bem opaca, apenas em um quadro explicativo sobre Kepler. Por outro lado, somente depois de exibir a definição, apresentar componentes e de mostrar um método para construção de uma elipse, a Lei das órbitas é enunciada. As outras duas leis são exibidas com suas respectivas expressões matemáticas seguidas de uma análise mais longa sobre cada uma delas.

(Junior, Ferraro e Soares 2009) explora a discussão já citada acerca de onde se situa o centro do universo. Neste contexto, apesar de rapidamente, dá-se ênfase na importância dos dados de Brahe e é enunciada a Lei das órbitas. Após a enunciação da primeira lei é colocado um quadro explicativo falando rapidamente da definição da elipse e de como construí-la. Assim como em (Doca, Biscuola e Bôas 2007) as segunda e terceira leis são seguidas de suas respectivas análises, explicando-as e expondo alguns conceitos.

(Torres, et al. 2013) inicia o estudo da Gravitação universal oferecendo ao aluno de ensino médio um breve olhar sobre o conhecimento atual sobre o universo apresentando-lhe a teoria do *Big Bang*. Então é feita uma mostra das várias explicações do universo feita pelo homem desde a antiguidade, dentre elas as de vários filósofos da Grécia antiga, Hiparco, Ptolomeu, Giordano Bruno, Copérnico,

Galileu Galilei, Tycho Brahe e Kepler. Apresenta, inclusive, o a hipótese das orbitas determinadas por sólidos geométricos regulares formulada por Kepler e depois descartada. Após esta caminhada pelo desenvolvimento da cosmologia o livro passa ao estudo da mecânica celeste através das três leis de Kepler. A enunciação da primeira lei é seguida do estudo geométrico da elipse e apresentação de alguns conceitos bem como de um modo para desenhar um elipse. Após a enunciação da Lei da áreas, diferentemente dos outros livros analisados, ele faz uma demonstração de tal lei utilizando os conceitos físicos de **quantidade de movimento angular** e de **torque**. A terceira lei é seguida de uma boa análise e da exposição de alguns conceitos.

Friso que a análise dos livros feita acima se restringe as secções que tratam das leis de Kepler.

5. KEPLER NO ENSINO MÉDIO

Este capítulo trata da tentativa de apresentar aos alunos do ensino médio dos segundos e terceiros anos as construções e conhecimentos até aqui expostos. Esta tentativa se traduziu em um minicurso. O minicurso, intitulado “Leis de Kepler e Gravitação Universal”, ocorreu na escola Liceu Professor Francisco Oscar Rodrigues, escola estadual de ensino médio do estado do Ceará, situada na cidade de Maracanaú, região metropolitana de Fortaleza. Ele foi construído sobre um tripé, sendo o primeiro “pé”, a história sobre as leis de Kepler; o segundo, o conhecimento sobre a elipse e outras cônicas; e o terceiro, a matemática das leis de Kepler e lei da gravitação universal.

O Minicurso ‘Leis de Kepler e Gravitação Universal’ foi inicialmente previsto para ocorrer em seis encontros de duas horas cada em um período de três semanas, de acordo com a tabela abaixo.

Tabela 1 - Cronograma previsto

PERÍODO	ENCONTRO
Semana 1	Avaliação diagnóstica
	Aula 1 – Um pouco da história das leis de Kepler
Semana 2	Aula 2 – A elipse e a Primeira lei
	Aula 3 – Segunda e terceira leis de Kepler
Semana 3	Aula 4 – Lei da Gravitação Universal
	Avaliação Final

Fonte: Anexo A - Projeto de minicurso: Leis de Kepler e gravitação universal. Elaborada pelo autor.

O tempo antevisto para o conteúdo da aula 2, “A elipse e a primeira lei”, mostrou-se insuficiente. Adicionei, então, um encontro para tratar melhor da elipse e, como meio de fixar melhor esta aula, adicionei outro para debruçarmo-nos sobre os estudos da hipérbole e da parábola. Devido a tais adições, o curso durou um mês,

com um total de oito encontros. Assim, o minicurso ficou dividido da seguinte maneira:

Tabela 2 - Cronograma aplicado

PERÍODO	ENCONTRO
Semana 1	Avaliação diagnóstica
	Aula 1 – Um pouco da história das leis de Kepler
Semana 2	Aula 2 – A elipse e a Primeira lei
	Aula 3 – Reforçando o conhecimento: a elipse
Semana 3	Aula 4 – Outras cônicas: a hipérbole e a parábola
	Aula 5 – Segunda e terceira leis de Kepler
Semana 4	Aula 6 – Lei da Gravitação Universal
	Avaliação Final

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tendo em vista o tripé sustentador do curso, podemos fazer a seguinte classificação: a aula 1 constituiu o pé da história das leis de Kepler; as aulas 2, 3 e 4 constituíram o pé do conhecimento sobre a elipse e outras cônicas; e as aulas 2, 5 e 6 formaram o pé da matemática das leis de Kepler e gravitação universal.

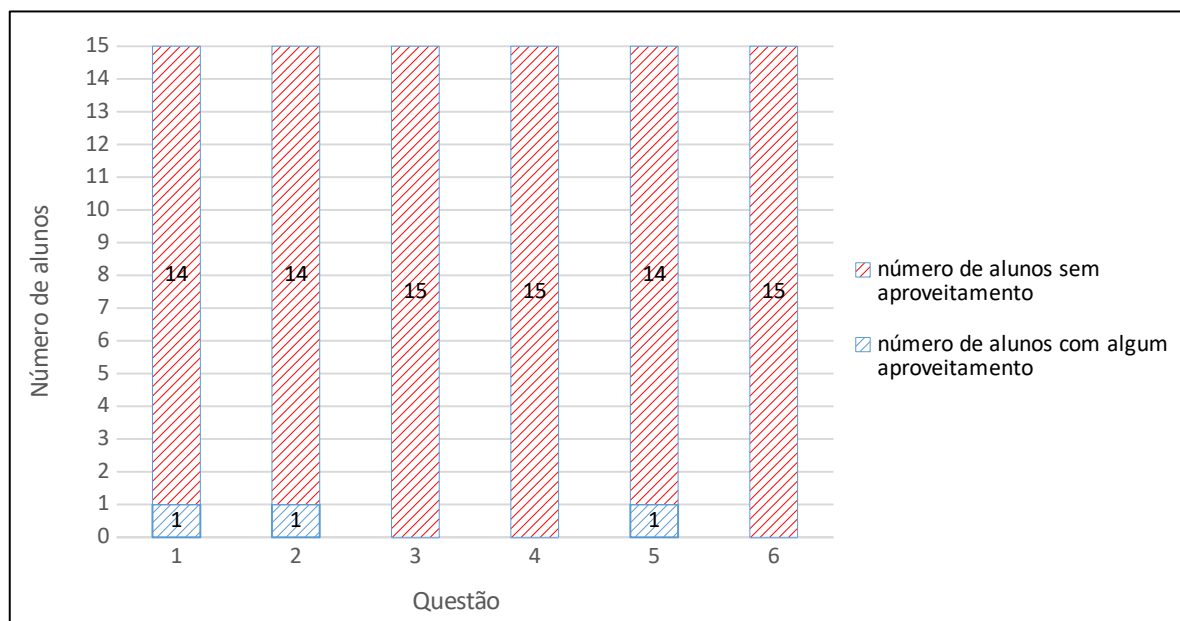
Inscreveram-se no curso 20 alunos, dos quais 15 compareceram para as aulas. Porém, à primeira semana do minicurso, logo após os dois primeiros dias de aula, iniciou-se a greve dos professores da rede de ensino público do estado do Ceará. Do quantitativo inicial, seis alunos continuaram a frequentar as aulas subsequentes. Inicialmente ao meu ver, a deflagração da greve iria interferir na análise dos resultados, por acabar gerando um universo menor a ser estudado. Este fato, porém, não foi empecilho e foi percebido que o contingente que manteve sua participação esteve realmente interessado no conteúdo abordado. A seguir apresento a análise do curso dividindo-a em três partes: a avaliação diagnóstica, as aulas expositivas e a avaliação final.

5.1. AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

O primeiro encontro com os participantes do curso consistiu na avaliação diagnóstica (Anexo B – Avaliação diagnóstica). Esta foi realizada com o intuito de analisar o conhecimento prévio do aluno sobre os assuntos abordados. A prova teve como diretriz principal conceitos fundamentais básicos para compreensão do tripé percebido pelo curso. Desta maneira, das seis questões que formaram a prova, os blocos formados pela questão 1, pelas questões 2,3 e 4 e pelas questões 5 e 6 representavam respectivamente as primeira, segunda e terceira bases do tripé.

A prova teve, toda ela, caráter descritivo e, com exceção das questões 3 e 4, seu conteúdo é abordado no primeiro ano do ensino médio. Visto que os participantes do minicurso eram todos de segundo e terceiro anos, esperei que os alunos expressassem, mesmo que de forma precária, algum conhecimento sobre os assuntos ali abordados. A avaliação diagnóstica mostrou que os alunos possuíam nenhum ou pouco conhecimento sobre as Leis de Kepler, sobre a Lei de gravitação universal e sobre a elipse e as outras cônicas. Dos 15 alunos que realizaram a avaliação prévia sete deles entregaram a prova em branco; cinco deram respostas a algumas perguntas, mas todas insatisfatórias (zero em percentual de aproveitamento); e o três restantes tiveram pouquíssimo aproveitamento. Se olharmos apenas para os seis integrantes que continuaram o curso mesmo com o advento da greve dos professores, temos um quadro inicial mais desolador: cinco estudantes entregaram a avaliação em branco e um obteve pouquíssimo aproveitamento. Mesmo como calcular a distância entre dois pontos era algo praticamente desconhecido por parte dos discentes. Abaixo, apresento um gráfico mostrando o desempenho dos alunos na avaliação diagnóstica.

Gráfico 1 – Desempenho dos alunos na avaliação diagnóstica



Fonte: Elaborada pelo autor.

Destaco que os alunos com aproveitamento nas questões indicadas no gráfico foram distintos. Friso, ainda, que mesmo entre os alunos que obtiveram aproveitamento em alguma questão, não houve aquela cujo aproveitamento fosse de cem por cento. Em entrevista informal, os alunos afirmaram que, apesar de as leis de Kepler e gravitação universal ser conteúdo geralmente abordado no primeiro ano do ensino médio, nunca haviam estudado tais assuntos. Isto explicaria o desempenho pouco expressivo dos estudantes com relação à avaliação prévia e deu também uma ideia de como deveria ser a abordagem dos assuntos durante o minicurso Leis de Kepler e gravitação universal.

5.2. AULAS EXPOSITIVAS

No segundo dia do minicurso, ocorreu a primeira aula expositiva, “um pouco sobre a história das leis de Kepler”. Nesta aula busquei falar um tanto das biografias de Brahe, Kepler e Newton focando nos fatos que, de alguma forma, envolviam as referidas leis. Esta aula se mostrou bem tranquila. Os alunos expressaram interesse e curiosidade ao longo do encontro e, de forma geral, apresentaram-se participativos.

A aula 2, “A elipse e a primeira lei”, cuidou da elipse, como é evidente. O fato de a Lei da Orbitas nos mostrar que as órbitas planetárias são elipses fez necessário o estudo desta curva. Neste momento do curso, a escola já se encontrava em greve e, pelo fato de não conseguir contatar todos os alunos, o número de participantes reduziu para seis. Nesta aula foram apresentadas, apesar do foco no estudo da elipse, as definições de cada curva cônica. Entender algumas propriedades da elipse e sua definição não pareceu ser tarefa difícil para os alunos. Com intuito de chegar a uma expressão algébrica para elipse iniciamos por deduzir a expressão para a distância entre dois pontos. Porém, ao utilizar a geometria analítica, o entendimento dos estudantes ficou turvo. Acontecimento este que suscitou a feitura de uma segunda aula sobre o assunto intitulada “Reforçando o conhecimento: a elipse”. Esta aula já se apresentou bem mais fluida que a anterior. Detectei uma certa empolgação dos alunos com o entendimento do assunto, ao contrário da aflição que pairava na aula antecedente.

A quarta aula do minicurso Leis de Kepler e gravitação universal tratou mais profundamente da hipérbole e da parábola. O principal intuito desta aula foi fazer um paralelo entre essas curvas e a elipse e, desta maneira, fixar ainda mais os conhecimentos adquiridos sobre esta última cônica. Tal aula, assim como a terceira, pareceu-me bem fluida.

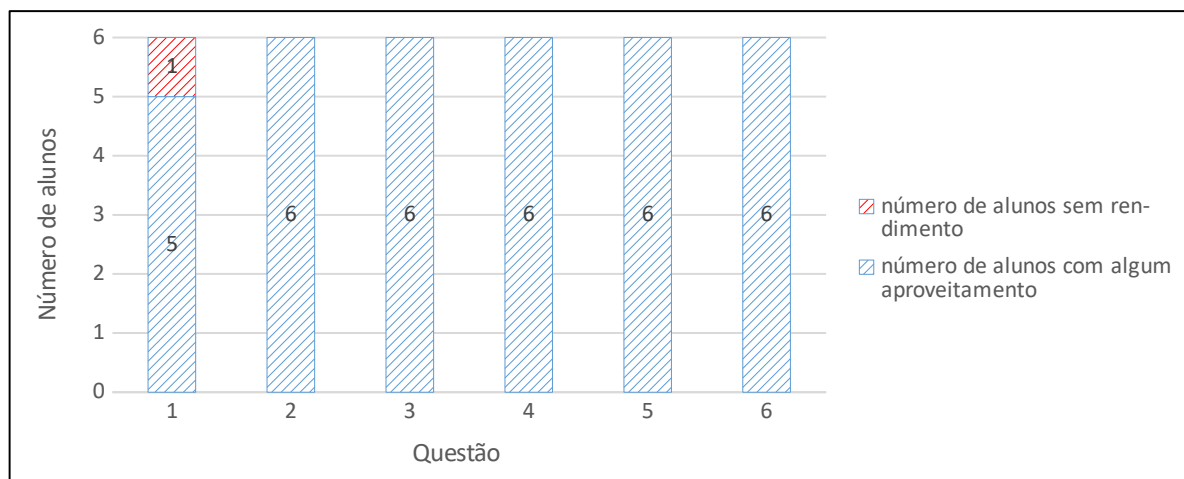
A quinta e a sexta aulas trataram, respectivamente, das segunda e terceira leis de Kepler e da Lei da gravitação universal. Na quinta aula foram explorados os conceitos físicos de quantidade de movimento angular e de torque e partindo destes conceitos foi apresentada uma demonstração matemática da segunda lei de Kepler. Ambas as aulas se valeram da feitura de uma grande quantidade de exercícios como método de fixação dos conteúdos.

5.3. AVALIAÇÃO FINAL

Por fim, O minicurso se encerrou com uma avaliação idêntica à efetuada ao seu início. A avaliação final se deu desta forma visando facilitar o processo de análise dos resultados obtidos com o curso. Apesar da evasão, os resultados obtidos com o minicurso “Leis de Kepler e gravitação universal” me pareceram promissores. Diferentemente da avaliação diagnóstica, na avaliação final os participantes do curso responderam a todas as questões com algum grau de

satisfação – excetuando uma única estudante, que deixou em branco a primeira questão da prova –, como exposto no gráfico 2.

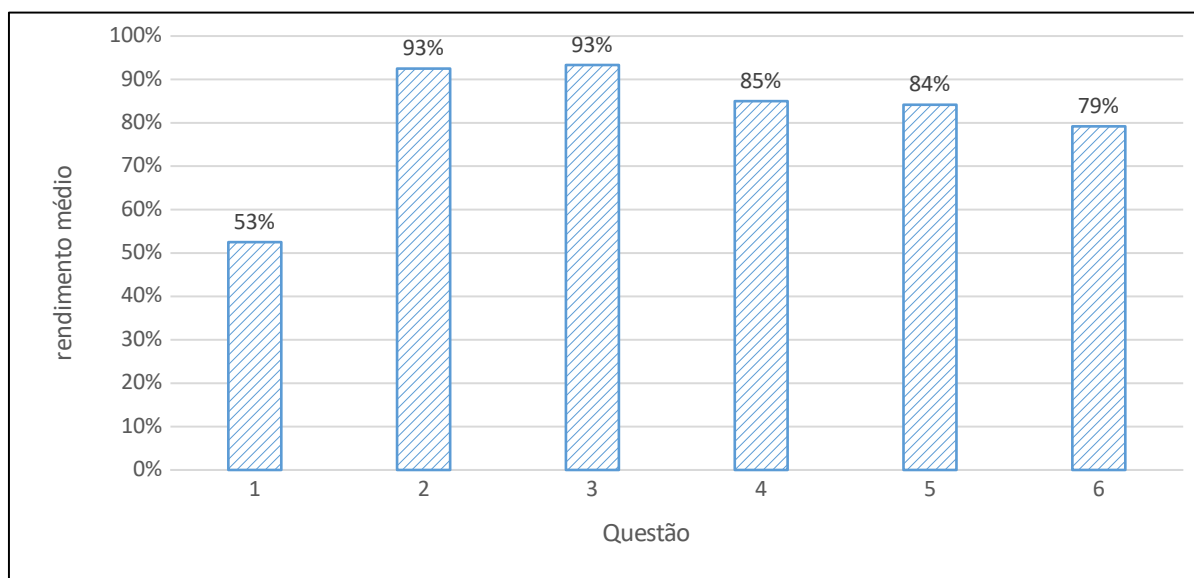
Gráfico 2 - desempenho dos alunos na avaliação final



Fonte: Elaborada pelo autor.

Lembrando que o rendimento médio para cada questão na avaliação diagnóstica foi praticamente zero, o gráfico 3 abaixo dá uma ideia da evolução dos estudantes que finalizaram o curso.

Gráfico 3 - Rendimento médio por questão



Fonte: Elaborada pelo autor.

Faço uma avaliação positiva do minicurso “Leis de Kepler e gravitação universal” não só pelos resultados apresentados nos gráficos acima, mas também pela impressão que me foi passada pelos discentes ao longo do curso. A partir de conversas com alguns dos participantes de “Leis de Kepler e gravitação universal” concluí que esse minicurso foi uma oportunidade ímpar de sanar deficiências de conteúdo nas áreas de matemática e física. O interesse e participação dos alunos, bem como a procura de tentar dirimir suas dúvidas mesmo no período entre os encontros foram quesitos essenciais para o sucesso do projeto. Também é evidente que a execução deste projeto não eliminou todas as deficiências de matemática e física dos estudantes até então e, muito menos, que tais alunos não têm mais nada a aprender sobre os assuntos no minicurso abordados, mas se constituiu em uma grande contribuição para o arcabouço teórico dos discentes que dele participaram.

CONCLUSÃO

Ao início deste trabalho, apresentei como guia para a sua execução a seguinte pergunta: é possível abordar as leis de Kepler em nível de ensino médio de modo a melhorar a compreensão dos alunos sobre os conceitos físicos e matemáticos envolvidos, tendo em vista que estes ainda não são conhecedores do cálculo diferencial e integral? Este guia me fez traçar três objetivos principais. A saber: i) compreender historicamente como Kepler chegou ao enunciado das leis e como, posteriormente, Newton as demonstrou; ii) entender suas demonstrações partindo da unificação, feita por Newton, das leis que regem o movimento dos corpos; e, de posse desse arcabouço, iii) apresentar ao aluno do ensino médio de escola pública uma grande quantidade de elementos que estejam relacionados às leis de Kepler para que ele consiga compreender o cenário histórico em que se deu o desenvolvimento dessas leis mas, também, com a menor quantidade de omissões possíveis, entender alguns pontos do processo lógico (demonstração das leis), reservadas as suas limitações.

Os objetivos i) e ii) creio terem sido alcançados de forma satisfatória sem ter havido para isso grandes complicações no percurso. Já para alcançar o objetivo iii), tive de passar por algumas pedras no meio do caminho, bem como percebi que alguns dos pressupostos deste trabalho se mostraram, pelo menos em parte, errôneos.

Uma das verdades assumidas por mim na feitura dessa pesquisa foi a visão de que os livros de ensino médio assumiam a postura de dar ênfase ao desenvolvimento histórico das leis de Kepler – visto que não apresentavam as respectivas demonstrações – sem na verdade explorar a história por detrás destas leis. Realmente em três dos quatro livros de ensino médio analisados esta visão se confirmou. Porém em um deles (Torres, et al. 2013), os autores situam historicamente não somente as leis de Kepler, mas também toda a visão que o homem ocidental desenvolveu do universo e das formas como os corpos celestes se moviam desde a Grécia antiga até os dias de hoje. A principal ferramenta pela qual me vali para alcançar o objetivo iii) foi o minicurso “Leis de Kepler e gravitação universal”. Com ele realmente consegui fazer com que os alunos que o frequentaram recebessem uma grande quantidade de elementos relacionados à história e à matemática que envolvem as leis de Kepler. Isto contribuiu para o

entendimento geral dos assuntos tratados, mas, com exceção da lei das áreas, não consegui apresentar aos alunos a demonstração das leis de Kepler. E mesmo a demonstração da segunda lei se deu por conceitos que, a princípio, não seriam apresentados no minicurso e que, por isso, não foram muito explorados. Assim diante do exposto acima creio que o objetivo iii) foi alcançado apenas parcialmente. Analiso de forma geral que aquilo traçado como escopo desse trabalho foi alcançado, considerando principalmente a experiência enriquecedora de abordar um assunto, que traz consigo relativa complexidade, partindo do ponto mais elementar, para alunos que ainda estão desenvolvendo suas habilidades na área. Gostaria de frisar a importância de iniciativas como esta que mesmo agindo em um público pequeno tem a capacidade de ampliar o arcabouço teórico de discentes do ensino médio.

BIBLIOGRAFIA

- Almeida, Danielle Oliveira de, Thiago Maia de Rezende, e Antônio Augusto Gaspar Ruas. *Dmat UFMG*. 07 de 03 de 2016.
<http://www.mat.ufmg.br/~proin/cIII/calculo/funcoes%20vetaoriais/funcoesvet.html>.
- Delgado, Jorge, Katia Frensel, e Lhaylla Crissaff. *Geometria analítica*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- Doca, Ricardo Helou, Gualter José Biscuola, e Newton Villas Bôas. *Tópicos de física*. Vol. 1. São Paulo: Saraiva, 2007.
- Junior, Francisco Ramalho, Nicolau Gilberto Ferraro, e Paulo Antônio de Toledo Soares. *Os fundamentos da física*. São Paulo: Moderna, 2009.
- Leithold, Louis. *O cálculo com geometria analítica*. Vol. 1. São Paulo: Harbra, 2002.
- Luz, Antônio Máximo Ribeiro da, e Beatriz Alvarenga Álvarez. *Física contexto & aplicações: ensino médio*. São Paulo: Scipione, 2013.
- Stewart, James. *Cálculo*. Vol. 2. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- Torres, Carlos Magno A., Nicolau Gilberto Ferraro, Paulo Antônio de Toledo Soares, e Paulo Cesar Martins Penteado. *Física: ciência e tecnologia*. São Paulo: Moderna, 2013.

ANEXOS

Anexo A - Projeto de minicurso: Leis de Kepler e gravitação universal

Projeto de minicurso

Leis de Kepler e gravitação universal

Justificativa

Percebendo a pouca familiaridade dos alunos do ensino médio com a elipse e a sua importância para o estudo dos movimentos dos planetas e outros astros, notei a necessidade de desenvolver uma atividade que traga como foco o estudo da gravitação universal. O minicurso também se justifica como parte prática do meu trabalho de conclusão do Curso de Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional e será executado através da exposição dos conteúdos em formato de minicurso.

Objetivos

1. Objetivo Geral

Apresentar os conceitos matemáticos envolvidos na enunciação das leis de Kepler.

2. Objetivos Específicos

- Desenvolver uma relação entre meu trabalho de conclusão de mestrado e minha prática de ensino no colégio estadual Liceu prof. Francisco Oscar Rodrigues
- Amenizar as deficiências dos alunos do colégio estadual Liceu prof. Francisco Oscar Rodrigues do município de Maracanaú com relação ao estudo de gravitação bem como aos conceitos matemáticos envolvidos.
- Fazer um paralelo entre o desenvolvimento histórico e o desenvolvimento lógico das leis matemáticas que regem o movimento dos astros.

Metodologia de aplicação

Para a realização do minicurso será feita uma seleção da seguinte forma: serão convidados a participar do curso os alunos com melhor desempenho nas áreas de matemática e de ciências da natureza de cada turma dos três anos do ensino médio. O curso constará de quinze vagas que serão preenchidas de acordo com o interesse dos alunos convidados. Esses critérios se justificam pela necessidade de conhecimentos básicos de matemática para a apreensão dos conceitos abordados no minicurso. O curso se iniciará com uma avaliação prévia dos alunos inscritos. Esta avaliação será utilizada ao final do curso como baliza para mensurar os resultados alcançados. Após tal avaliação, iniciarão as aulas expositivas, que serão no total de quatro com duração de 100 min cada. Ao final de cada aula, dentre as três primeiras, será entregue ao aluno participante uma lista de exercícios para fixação dos conteúdos abordados no dia. A última aula será voltada à resolução destas listas. O minicurso findará com a reaplicação da avaliação efetuada ao início do curso. Podendo-se, com isso, analisar se houve a apropriação esperada, por parte dos alunos participantes, do conteúdo abordado.

Cronograma

PERÍODO	ENCONTRO
Semana 1	Avaliação diagnóstica
	Aula 1 – Um pouco da história das leis de Kepler
Semana 2	Aula 2 – A elipse e a Primeira lei
	Aula 3 – Segunda e terceira leis de Kepler
Semana 3	Aula 4 – Lei da Gravitação Universal
	Avaliação Final

1. Avaliação diagnóstica

Um conjunto de questões cujo intuito é fazer a avaliação do conhecimento prévio dos participantes do curso “Leis de Kepler e gravitação universal” para posterior avaliação dos conhecimentos por estes adquiridos durante o referido curso.

2. Aula – Um pouco da história das leis de Kepler

Tycho Brahe e sua grande coleção de dados
Johannes Kepler e a enunciação de suas leis
Isaac Newton e a lei da gravitação universal

3. Aula – A elipse e a Primeira lei

Distância entre dois pontos
O que são curvas cônicas?
O que é uma elipse e quais suas propriedades?
Primeira Lei de Kepler

4. Aula – Segunda e terceira leis de Kepler

Segunda lei de Kepler e velocidade areolar
Período, raio médio e terceira lei de Kepler

5. Aula – Lei da Gravitação Universal

Gravitação Universal e resolução de exercícios

6. Avaliação final

Uma reavaliação da avaliação diagnóstica para comparação e para avaliação do conhecimento adquirido pelos alunos.

Anexo B – Avaliação Diagnóstica

CURSO LEIS DE KEPLER E GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

Professor Clésio Silva Mendes

Aluno: _____

Série: _____ Idade: _____ Sexo: _____ Data: ___/___/___

As questões a seguir têm o intuito único de fazer uma avaliação do conhecimento prévio dos participantes do curso “Leis de Kepler e gravitação universal” para posterior avaliação dos conhecimentos por estes adquiridos durante o referido curso.

01. Discorra sobre Tycho Brahe, Johannes Kepler e Isaac Newton acerca do que diz respeito às Leis de Kepler e a gravitação Universal.
02. Como se determina a distância entre dois pontos no plano cartesiano?
03. O que são curvas planas cônicas?
04. Descreva a elipse informando suas propriedades e informe a expressão algébrica canônica para uma elipse centrada na origem de um sistema de eixos cartesianos.
05. Discorra sobre as três leis de Kepler.
06. Discorra sobre a lei da gravitação Universal.