**Fernando Simão Regly**

# Teorema de Pitágoras, a dissecção de Perigal e sua aplicabilidade

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO - UENF**

**CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ**

**2024**

Fernando Simão Regly

# Teorema de Pitágoras, a dissecção de Perigal e sua aplicabilidade

"Dissertação apresentada como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro."

Orientador: Prof. Dr. Rafael Brandão de Rezende Borges

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
2024

Fernando Simão Regly

# Teorema de Pitágoras, a dissecção de Perigal e sua aplicabilidade

"Dissertação apresentada como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro."

Aprovada em 26 de Março de 2024.

**Profª. Dra Cristiane Oliveira de Faria**
D.Sc. - UERJ

**Prof. Dr Rigoberto Gregorio Sanabria Castro**
D.Sc. - UENF

**Prof. Dr Nelson Machado Barbosa**
D.Sc. - UENF

Documento assinado digitalmente
gov.br
MARCUS VINICIUS DA SILVA SALES
Data: 04/06/2024 11:49:26-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

**Prof. Dr. Marcus Vinicius da Silva Sales**
D.Sc. - UFF

**Prof. Dr. Rafael Brandão de Rezende Borges**
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

*Aos meus pais Edson Regly e Rosania de Cassia Simão Regly, a minha esposa Heleisa Nogueira Portela Regly e meus filhos Lara Portela Regly e Theo Portela Regly, além de todos que de alguma forma torcem pelo meu sucesso, crescimento acadêmico e estão felizes por mais essa realização.*

# Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus, pelo dom da vida, pela força, pelo ânimo e pelos livramentos no percurso até chegar aqui. “Porque Dele e por Ele, e para Ele, são todas as coisas; glória, pois, a Ele eternamente. Amém.” Rm 11:36 À minha maravilhosa e espetacular esposa Heleisa Nogueira Portela Regly pela amizade, companheirismo e palavras de vigor nos momentos difíceis entendendo e compreendendo todo esforço e sacrifício para conquistar o grande objetivo de mestre, Aos filhos Lara Portela Regly e Theo Portela Regly pelo amor, carinho e abraços nos momentos de cansaço, Aos meus pais Edson Regly e Rosania de Cassia Simão Regly por todo esforço em minha criação, educação, pelas brigas e castigos, por sempre me direcionar no caminho em que devo trilhar para conquistar meus objetivos, Pela minha irmã, Roberta Simão Regly e sua companhia, sempre incentivando e estando ao meu lado não deixando esmorecer. Aos meus sogros Antônio Portela de Lima e Heliandra Nogueira Portela pelo estímulo e amizade, Ao Colégio Conceito, em especial a diretora e amiga Monique Vieira por proporcionar a aplicação da dissertação em sua escola, Aos amigos de Mestrado Paulo Vitor da Silveira Amaral pela companhia nas viagens de Rio das Ostras até Campos e Allan Petrilo pela parceria e ajuda mútua em trabalhos e exercícios, amigos para toda a vida, aos demais colegas da turma, Tatiane, Marcelle, Marcelo, Ramon, Sabrina e Tayna, obrigado pela companhia, A todos professores, em especial ao professor Dr. Luis Henrique Zeferino que aceitou minha proposta de dissertação, orientou e apoiou porém por motivos de saúde precisou se retirar do programa e ao professor Nelson Machado Barbosa que me acolheu e ajudou antes do professor Rafael Borges orientar e finalizar a dissertação. O muito obrigado a todos e que Deus os abençoe, proteja e guie.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

Entregue seu caminho ao Senhor, confia Nele e mais Ele fará. Sl 37:5

# Resumo

Nesse trabalho vamos apresentar algumas demonstrações e aplicações do Teorema de Pitágoras, nosso grande objetivo é mostrar um dos mais belos e importantes Teoremas de todos os tempos. Mostraremos que não é uma simples fórmula a se decorar e sim uma grande ferramenta a se utilizar, pois o Teorema de Pitágoras possui uma enorme riqueza em suas aplicações, várias demonstrações e uma história maravilhosa. Além de apresentar tais demonstrações, também é apresentado como alternativa de ensino, a utilização da dissecção de Perigal, material construído na impressora 3D como demonstração do Teorema de Pitágoras a fim de estimular a construção da fórmula e sua utilização em atividades com os alunos. Outro grande item trabalhado nessa aplicação foi trazer o aluno a ser desafiado na montagem do material utilizando as peças da dissecção de Perigal bem como a utilização da metodologia ativa com o ensino colaborativo que tem como grande aplicação o trabalho em grupos.

**Palavras-chaves**:Teorema de Pitágoras. Dissecção de Perigal. Atividade experimental. Demonstração. Desafio na construção de material 3D. Metodologia ativa, o ensino colaborativo.

# Abstract

In this work we will present some demonstrations and applications of the Pythagorean Theorem, our main objective is to show one of the most beautiful and important theorems of all time. We will show that it is not a simple formula to memorize, but a great tool to use, as the Pythagorean Theorem has enormous richness in its applications, several demonstrations and a wonderful history. In addition to presenting such demonstrations, the use of Perigal's dissection, a material built on a 3D printer as a demonstration of the Pythagorean Theorem, is also presented as a teaching alternative in order to encourage the construction of the formula and its use in activities with students. Another major item worked on in this application was to bring the student to be challenged in assembling the material using the pieces from Perigal's dissection as well as the use of active methodology with collaborative teaching, which has a major application in group work.

**Key-words**: Pythagorean Theorem. Perigal dissection. Experimental activity. Demonstration. Challenge in building 3D material. Active methodology, collaborative teaching.

# Lista de ilustrações

# Lista de quadros

# Lista de gráficos

# Sumário

# Capítulo 1

# Introdução

> "O Teorema de Pitágoras com suas muitas provas é uma ilustração notável de que há mais de uma maneira de estabelecer a mesma verdade." (LOOMIS, 1968)

Na antiguidade não existia grandes necessidades de contar e de criar símbolos com o objetivo de saber quantidades, a simples noção de senso numérico já era suficiente para atender as necessidades dos humanos, já que nessa época eles eram nômades, não tinham residência fixa. Eles se deslocavam de uma região para a outra, extraindo tudo o que era possível em uma região, esgotando todas as suas reservas naturais e se dirigiam para outra região em busca de sobrevivência, por esse motivo ainda não havia necessidade de registrar quantidades.

Depois de algum tempo, o ser humano percebeu a importância de se fixar em alguma região, criar residências, deixar de ser nômade e viver em um local onde pudesse proporcionar todos os itens essenciais para sua sobrevivência. Com o passar do tempo, sua evolução seria notável pois ele precisaria cultivar a terra para seu sustento, controle com a alimentação devido ao aumento da população, maior cuidado com os animais por causa do aumento do rebanho bem como mudanças em seus costumes. Esse seria o grande ápice e marco para mudanças e transformações relacionadas a quantidades e símbolos,

Pastores de ovelhas usavam pedras em um saco para representar quantidades, eles faziam isso pela manhã no soltar dos animais e no final do dia conferiam para saber se todos estavam ali, também utilizavam traços marcados em galhos de árvores ou ossos de animais, Um traço correspondia a um objeto, dois traços dois objetos, e assim sucessivamente. Todos esses métodos eram eficientes para pequenas quantidades, porém em grandes quantidades isso dificultava um pouco. Com isso uma forma encontrada para facilitar esse problema era utilizar grupos a cada dez unidades, por causa dos dez dedos nas mãos.

Após algum tempo, as quantidades do rebanho estavam ficando cada vez maiores dificultando mais uma vez a contagem e a relação de objetos e animais. Nesse processo de mudança, de necessidade de adaptação e formulação de algo mais eficiente surgiu a adição e com ela várias representações com desenhos.

Ao logo da história, os números evoluíram consideravelmente, sendo criado alguns sistemas de numeração por grandes civilizações como por exemplo os romanos, babilônios, hindus, árabes e egípcios. O sistema de numeração que mais se destacou foi o hindu-arábico, pois era decimal, além ter a praticidade de ser um sistema posicional usando apenas dez algarismos representado por 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 havia a associação aos dez dedos da mão.

Em toda trajetória dos números e em vários acontecimentos, bem como grandes personagens contribuíram para sua evolução sendo citados e tidos como referência até os dias de hoje. Dentre eles podemos citar o ilustre e importante Pitágoras que está envolto em lendas e apoteoses. Pitágoras era um grande profeta, se a história sobre a existência de personagem tão importante no mundo da Matemática não parece muito clara deve-se em parte à perda de documentos daquela época. Várias foram suas biografias escritas na antiguidade, mas se perderam com o tempo.

O espetacular Teorema de Pitágoras é considerado por muitos estudiosos e intelectuais da matemática como um dos mais belos, importantes e conhecidos da história. Inúmeros resultados na geometria, bem como na resolução de problemas práticos relacionados a medidas foram descobertos através desse teorema, ou deles se utilizam.

Na geometria elementar o Teorema de Pitágoras é considerado o mais útil e também o mais famoso, ele já foi demostrado por muitas civilizações durante a história, isso o tornou um ótimo tema a ser utilizado e aprofundado durante as aulas de matemática no ensino fundamental.

Segundo o Brasil (2018) de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, como especificado nas seguintes habilidades: EF09MA13 - Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. EF09MA14 - Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

O autor Elisha Scott Loomis nasceu na cidade de Medina, no estado norte americano de Ohio, em 1852. Estudou matemática, metafísica e ciências sociais. De 1907 a 1927, ele catalogou demonstrações do Teorema de Pitágoras, publicando o livro “The Pythagorean Proposition” (A Proposição de Pitágoras) em 1927. Na primeira edição, haviam 230 demonstrações, na segunda edição 370. Depois do falecimento do autor em 1940, o livro foi reimpresso mais duas vezes, em 1968 e 1972. Como objetivo geral, este trabalho irá fornecer um material que possa ajudar na jornada dos professores matemática, e como fonte de conhecimento para alunos e aqueles que gostam e se interessam em demonstrações do Teorema de Pitágoras, sua aplicabilidade, o uso de metodologias ativas principalmente o ensino colaborativo além do auxílio de um material em sua construção, feita na impressora 3D. De forma bem específica, iremos fornecer a oportunidade de ver o Teorema de Pitágoras por outra perspectiva, capacitando o discente a utilizar aquela que é compatível com os seus alunos e se possível fazer com que o aluno participe destas demonstrações.

# Capítulo 2

# Referencial Teórico

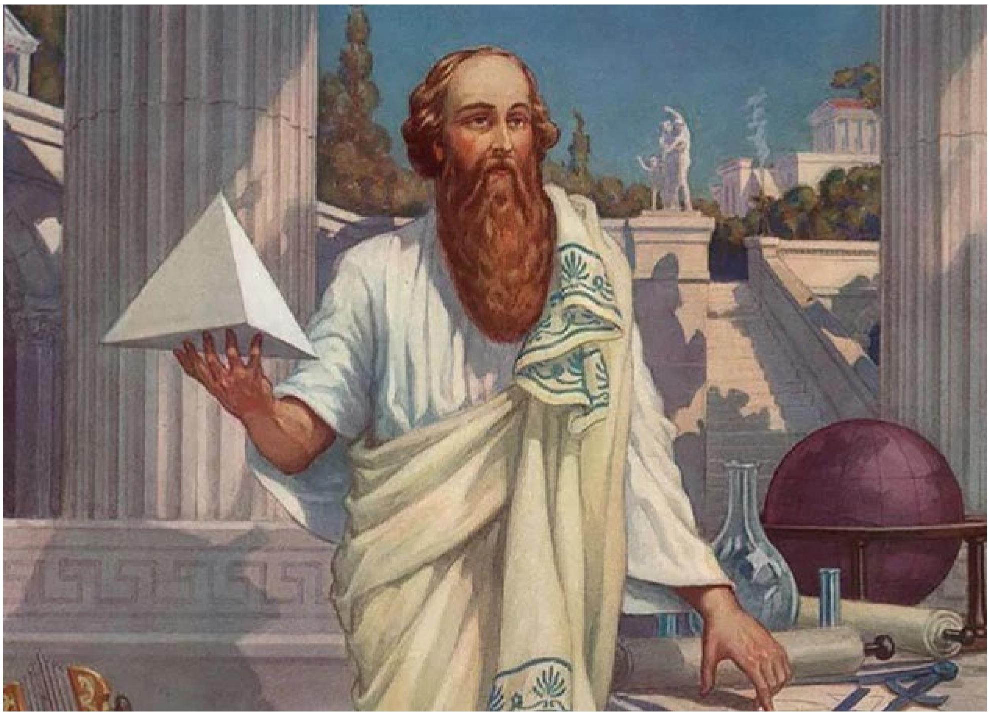
## 2.1 A História

### 2.1.1 Escola Pitagórica

A famosa história do teorema de Pitágoras começa muito antes da civilização grega, foi na Grécia onde ele foi estudado de maneira geral, durante 600 a.C., o mundo grego estava em crescimento e formação, ao longo das margens do Mar Mediterrâneo e do Mar Negro, toda manifestação da matemática começava a ser mais notada do que nunca, principalmente na Jônia. Nesse local havia entusiasmo, imaginação e a grande ligação dos dois principais vales de rio habitados pelas antigas civilizações egípcia e babilônica. Foi próximo a uma ilha de Mileto, chamada Samos, na costa Jônica, onde nasceu Pitágoras, em 570 a.C, ele foi orientado por um dos maiores e principais filósofos pré-socráticos de toda história, Tales de Mileto. Pitágoras estudou matemática, astronomia, música, literatura e filosofia na sua cidade natal.

A grande vantagem na localização geográfica possibilitou a Pitágoras condições de viajar a vários centros antigos do conhecimento onde conseguiu ter contato com obras originais em diversas áreas como astronomia, matemática e outros campos do conhecimento daquela época. É relatado que foi no Egito onde aprendeu sobre Geometria e na Babilônia teve contato com tabelas e instrumentos astronômicos. Algumas biografias escritas na antiguidade sobre Pitágoras se perderam, ainda assim, existem inúmeras referências em obras gregas que resistiram ao tempo e que atribuem a Pitágoras um bom número de descobertas matemáticas além do famoso teorema de Pitágoras. O magnífico matemático e filósofo faleceu em Metaponto, em 490 a.C. na região sul da Itália, com aproximadamente 80 anos.

Figura 1 – Pitágoras



Fonte: Toda Matéria (2021)

### 2.1.2 Escola Pitagórica

Pitágoras em determinada época de sua vida quando sofria perseguições devido a muitas ideias revolucionárias se mudou para Crotona, no sul da Itália, conhecida como Magna Grécia. Nessa região criou uma escola místico-filosófica que ficou conhecida com “Escola Pitagórica”, cujo símbolo era um pentagrama estrelado que era obtido por diagonais de pentágono regular, nessa escola existia um ditado onde “tudo é número” além de ser muito conservadora e rígida.

Novamente após um tempo Pitágoras foi perseguido, onde saiu de Crotona com destino ao Egito, lá ele desenvolveu o Teorema de Pitágoras.

### 2.1.3 Descobertas

Pitágoras foi um grande contribuidor para a música, ele foi responsável por expressar a proporção entre as cordas vibrantes usando números, uma descoberta usando algumas leis simples da música. Ele inventou também as principais notas da escala musical além de um instrumento chamado monocórdio. Pitágoras conseguiu perceber também que a relação harmoniosa entre os múltiplos e divisores de alguns números que resultavam em alguns sons harmoniosos.

Através de descobertas e muitas contribuições, Pitágoras foi uma das figuras mais influentes da história grega pois ele representava muitas coisas ao seu povo, de filósofo, astrônomo e matemático a profeta, milagreiro e mágico. Realmente uma lenda!

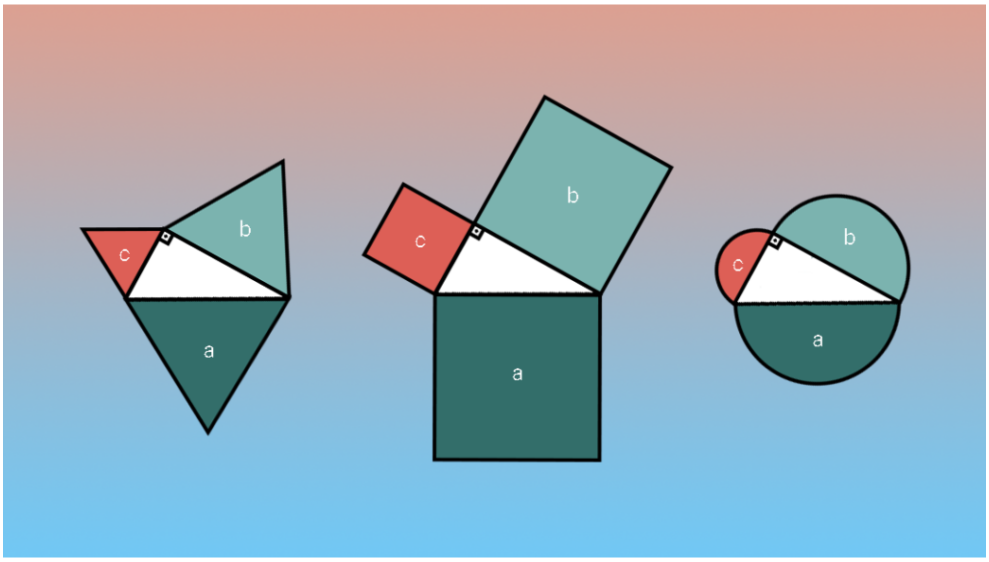
### 2.1.4 Teorema de Pitágoras

Assim como os muitos ramos da matemática, a trigonometria, não é obra ou invenção de um só homem ou nação. A civilização grega foram os pioneiros a estudar as relações entre ângulos (ou arcos) e cordas em uma circunferência. Os egípcios e babilônicos, na época de Pitágoras já tinham um grande avanço nas relações de medidas em tudo o que rodeavam, inclusive já existiam registros em tabletes cuneiformes babilônicos e em papiros egípcios de três números que satisfazem as condições do famoso teorema de Pitágoras (chamado de tríades). Essas mesmas tríades também foram encontradas encontrados em inscrições na Índia e China

O teorema recebe o nome de Pitágoras por causa da relação com as civilizações anteriores, porém tem esse nome é devido aos pitagóricos que foram os primeiros a demonstrá-lo. Na maioria dos livros didáticos o teorema de Pitágoras é apresentado como relação entre a hipotenusa e os catetos ($a^2 = b^2 + c^2$), contudo ele está relacionado muito mais do que os lados de um triângulo retângulo. O teorema de Pitágoras relaciona as áreas de figuras regulares construídas sobre os lados de um triângulo retângulo.

Observe uma das formas que podemos enunciar esse teorema; A área da figura que está oposto ao lado maior do triângulo que possui um ângulo reto é igual à soma das áreas das figuras semelhantes à primeira, as quais estão também opostas aos lados menores.

Figura 2 – Uma aplicação do teorema de Pitágoras



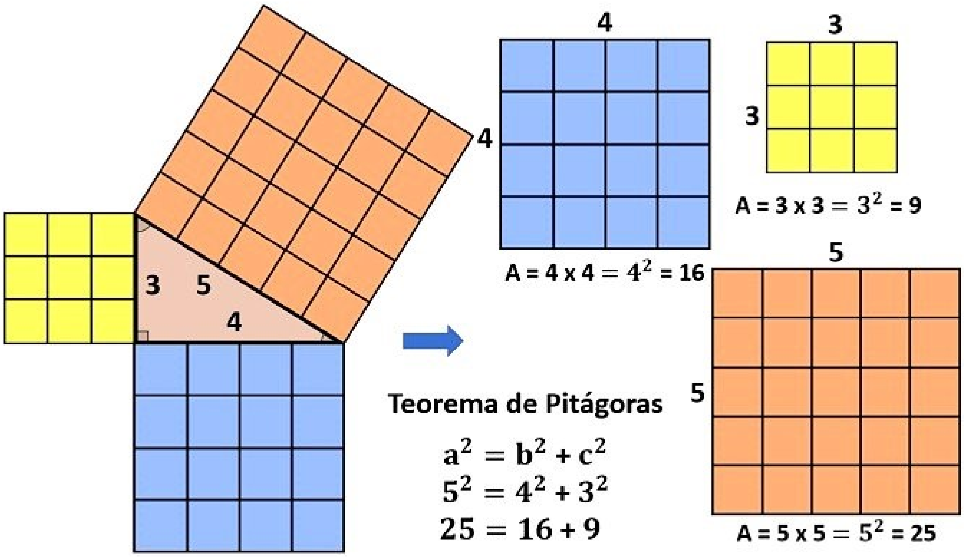

Em cada figura a área “a” é igual à soma de “b” e “c”.
Fonte: Math Mática (2020)

Até o presente momento o teorema de Pitágoras possui 370 demonstrações diferentes. Essas demonstrações podem ser feitas utilizando a semelhança de triângulos, usando as relações métricas na circunferência, usando o método geométrico, usando trapézios, usando a dissecção de Perigal, entre outras.

### 2.1.5 Ternas Pitagóricas

Terna pitagórica ou triângulo pitagórico é uma sequência de três números inteiros que satisfazem ao Teorema de Pitágoras: A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa ($b^2 + c^2 = a^2$), isto é, dois números que elevados ao quadrado e depois somados ($b^2 + c^2$) tem como resultado um número quadrado perfeito ($a^2$) e que depois de extraído a sua raiz quadrada, o resultado é também um número inteiro. O mais conhecido é representado pelos números: 3, 4 e 5. Sendo a hipotenusa igual a 5, o cateto maior igual a 4 e o cateto menor igual a 3.

Figura 3 – Terna Pitagórica




Terna 3, 4 e 5
Fonte:Toda Matéria (2021)

Na figura vale observar que a área dos quadrados desenhados em cada lado do triângulo está relacionado com o teorema de Pitágoras: vale a proposição a área do quadrado no lado maior corresponde à soma das áreas dos outros dois quadrados. Notamos que, os múltiplos desses números também formam um terno pitagórico. Por exemplo, se multiplicarmos por 3 o trio 3, 4 e 5, obtemos os números 9, 12 e 15 que também formam uma terna pitagórica. Além da terna 3, 4 e 5, temos uma infinidade de outras ternas. Como exemplos:

- 5, 12 e 13
- 7, 24, 25
- 20, 21 e 29
- 12, 35 e 37
- 8, 15 e 17

## 2.2 Demonstrações

Como já mencionamos anteriormente o teorema de Pitágoras possui 370 demonstrações diferentes e tem sido de grande interesse da comunidade matemática ao longo do tempo, muitos matemáticos e estudiosos deixaram suas marcas sobre este assunto, tornando-o tema excelente para muitas discussões em sala de aula e até tema de debates entre filósofos e matemáticos. Neste capítulo mostraremos algumas dessas demonstrações, elaboradas de formas diferentes e formando um verdadeiro acervo eclético.

### 2.2.1 Por Semelhança

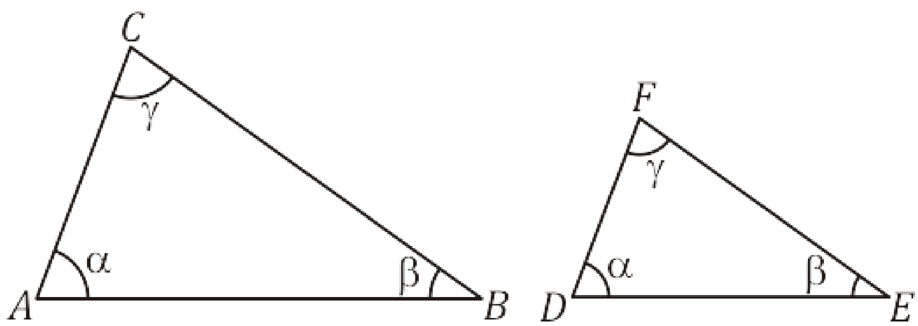
Definição: Podemos dizer que dois triângulos são ditos semelhantes se, e somente se, existe uma correspondência biunívuca, associando os vértices de um triângulo aos vértices do outro triângulo, destacamos:

- Ângulos com vértices correspondentes são congruentes;
- Lados opostos a vértices correspondentes têm medidas proporcionais.

Por exemplo, os triângulos ABC e DEF são semelhantes se, e somente se:

$$\hat{A} \simeq \hat{D}, \hat{C} \simeq \hat{E}, \hat{B} \simeq \hat{F} \text{ e } \frac{AB}{DC} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

Figura 4 – Triângulos semelhantes

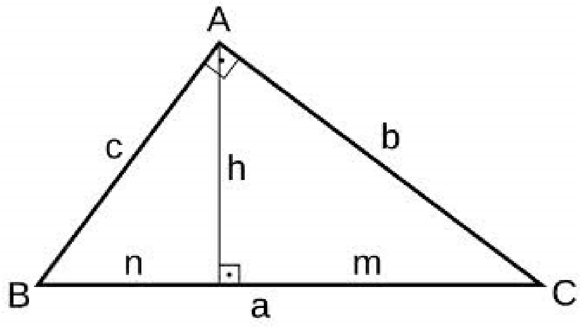



Fonte: Própria

**Demonstração**: Considere o triângulo retângulo ABC.

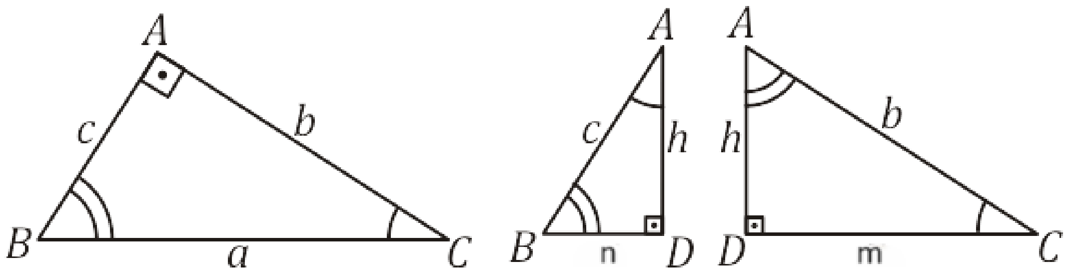
Sejam h a altura do triângulo relativa à hipotenusa a, n a projeção ortogonal do cateto c sobre a hipotenusa, e m a projeção ortogonal do cateto b sobre a hipotenusa. Deste modo, podemos considerar 3 triângulos:

Figura 5 – Triângulos retângulo




Fonte: Própria

Figura 6 – Triângulos desmembrados




Fonte: Própria

$$\Delta ABC, \Delta DAB \; e \; \Delta DAC$$

Notamos que estes três triângulos são semelhantes, pelo caso AA de semelhança (com dois ângulos congruentes). Então podemos obter:

$\Delta ABC \sim \Delta DAB \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m}$

e então temos:

a.h = b.c (1)

b.m = h.c (2)

a.m = $c^2$ (3)

$\Delta ABC \sim \Delta DAC \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{h} = \frac{b}{n}$

e então temos:

a.h = b.c (4)

b.h = c.n (5)

a.n = $b^2$ (6)

$\Delta DAB \sim \Delta DCA \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{h}{n} = \frac{m}{h}$

e então temos:

c.n = b.h (7)

$h^2$ = m.n (8)

b.m = c.h (9)

De (3) e (6), segue que:

$b^2 + c^2 = a.n + a.m = a.(m + n)$ mas veja que m + n = a, logo,

$b^2 + c^2 = a^2$

como queríamos.

### 2.2.2 Por Relações métricas na circunferência

Nesse item, além de usar e demonstrar o Teorema de Pitágoras iremos trabalhar com o teorema das cordas.

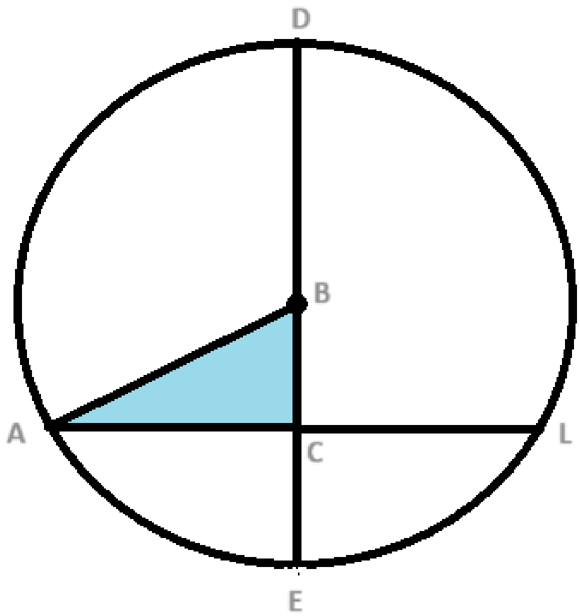
Um conjunto de infinitos pontos igualmente distantes de um ponto fixo qualquer de um determinado plano constitui uma figura geométrica que pertence a esse plano, essa figura é chamada de circunferência. Qualquer ponto pertencente a essa circunferência que se dirige ao seu centro é determinado raio e qualquer segmento que liga dois pontos distinto da circunferência é chamado de corda, quando a corda passa pelo centro da circunferência também pode ser chamada por diâmetro.

**Teorema das Cordas** – nos mostra que se duas cordas AB e CD de uma circunferência se interceptam num ponto P interior à circunferência, então PA.PB = PC.PD A partir disso, construiremos nossa demonstração.

A partir disso, construiremos nossa demonstração.

**Demonstração:** Considere o triângulo retângulo ABC, de hipotenusa AB. Iremos a partir dele construir uma circunferência de centro B e raio r. Após isso, é prolongado os catetos BC e AC de modo se tornem duas cordas da circunferência AL e DE respectivamente . Pelo Teorema das Cordas, provamos.

Figura 7 – Circunferência



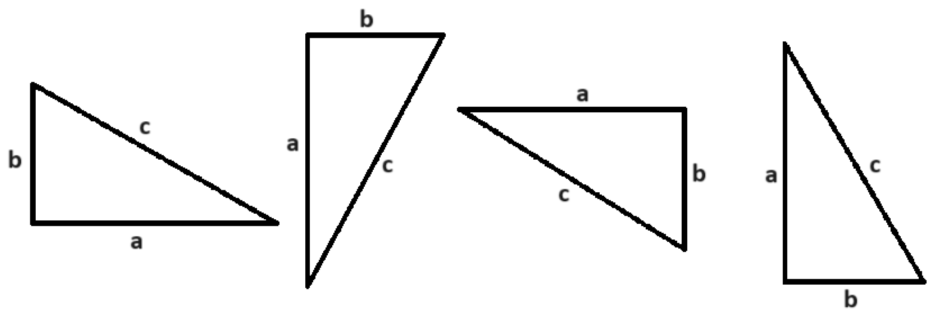

Fonte: Própria

### 2.2.3 Por Método Geométrico

A partir de quatro triângulos equiláteros, nosso objetivo é formar um quadrado, e com essa construção, demonstrar o Teorema de Pitágoras.

**Demonstração:** Considere quatro triângulos equiláteros, de catetos a e b e hipotenusa c, onde cada um destes triângulos está posicionado em um dos quatro ângulos com a horizontal: 0°, 90°, 180° e 270°

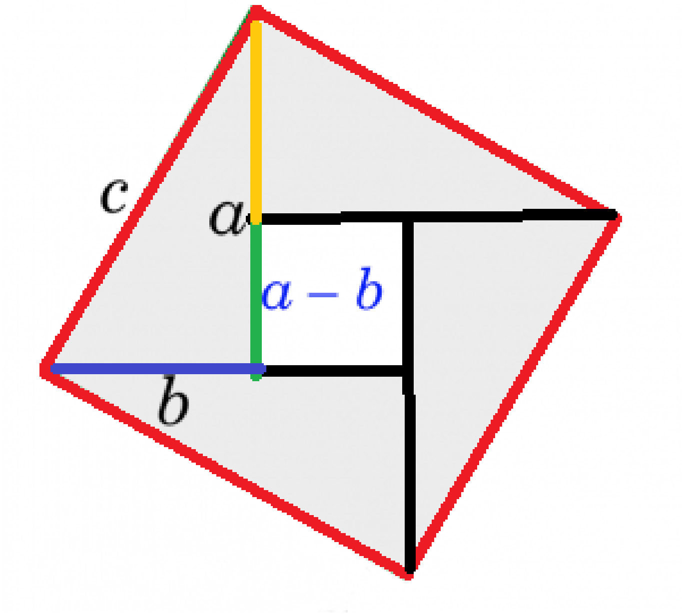
Figura 8 – Triângulos equiláteros




Fonte: Própria

Com isso iremos pegar esses quatro triângulos de maneira a posicioná-los a se tornar um quadrado de lado c, ou seja, seus lados serão as hipotenusas dos triângulos acima. Como podemos observar na figura abaixo, foi formado um outro quadrado em seu interior de lado (a – b) que originou na diferença entre os catetos.

Figura 9 – Quadrado




Fonte: Própria

Observando todas as áreas das figuras que formam o maior quadrado, obtemos os seguintes dados:

Área de cada triângulo retângulo = $\dfrac{a.b}{2}$

Área dos 4 triângulos retângulos = $4\dfrac{a.b}{2} = 2a.b$

Área do quadrado menor = $(b - a)^2$

Área do quadrado maior = $c^2$

Como a área do quadrado maior resulta da soma das áreas dos objetos que o compõem, podemos fazer:

$c^2 = 2a.b + (a - b)^2$

$c^2 = 2a.b + a^2 - 2a.b + b^2$

$c^2 = a^2 + b^2$

### 2.2.4 Por Trapézios

Esta é uma demonstração de James Abram Garfield, que foi presidente dos Estados Unidos por apenas 4 meses, até ser assassinado em 1981, ele gostava muito de matemática. Sua grande ideia se resume em considerar um trapézio de bases b e c e altura (a + b) e decompor este trapézio em três triângulos. A partir disso, pode-se demonstrar a relação de Pitágoras.

**Demonstração:** Consideremos um trapézio de base menor c, base maior b, e altura (b + c). Seguindo essa construção, podemos decompor o trapézio em três triângulos, dois deles retângulos e de modo que tenham catetos b e c, e hipotenusa a. Sabemos que a área do trapézio é dada por:

Sabemos que a área do trapézio é dada por:

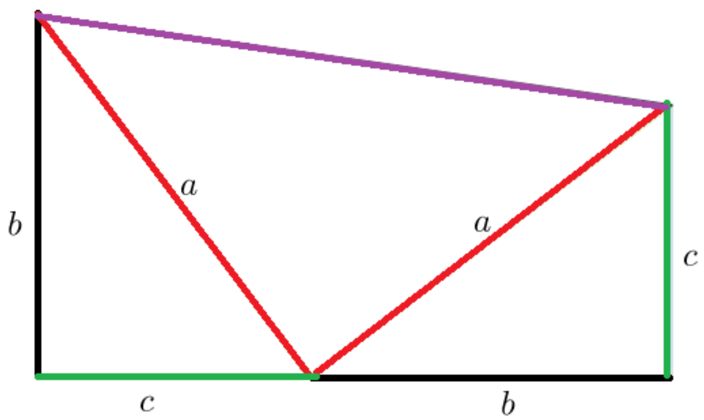
Área do trapézio = $\dfrac{(b+c).(b+c)}{2} = \dfrac{b^2+2b.c+c^2}{2}$

E a soma das áreas dos triângulos é dada por:

Área total = $\dfrac{(b.c)}{2} + \dfrac{(b.c)}{2} + \dfrac{(a.a)}{2} = \dfrac{2b.c+a^2}{2}$

Como a área do trapézio deve ser igual à soma das áreas dos triângulos, obtemos que:

Figura 10 – Trapézio




Fonte: Própria

$$\frac{(b^2+2b.c+c^2)}{2} = \frac{(2b.c+a^2)}{2} \Longrightarrow b^2+c^2=a^2$$

como queríamos.

## 2.3 Método Perigal

### 2.3.1 A História de Perigal

Henry Perigal Jr. (1801-1898), filho de Henry Perigal Sr (1768 - 1867) e Louisa Brady (1770 - 1827), nascido em Newington, Londres, na Inglaterra em 01 de Abril de 1801.

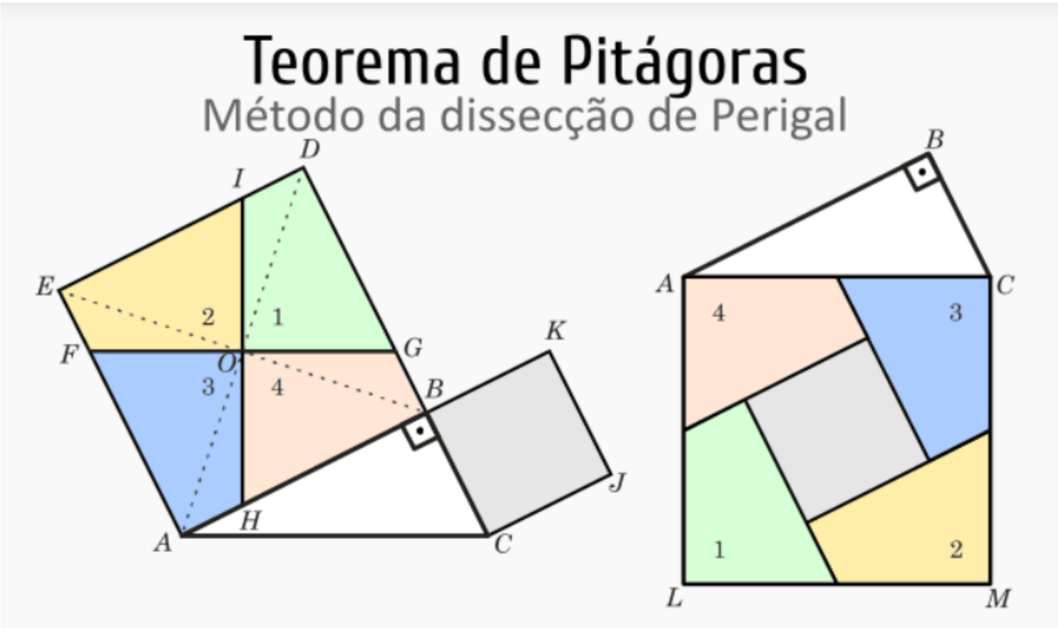
Trabalhou como Corretor na Bolsa de Valores de Londres, apaixonado pela matemático e astrônomo, foi membro da London Mathematical Society de 1868 a 1897, foi tesoureiro da Royal Meteorological Society por 45 anos e é conhecido por sua produção mecânica de curvas geométricas.

Perigal escreveu um livro sobre Dissecções e Transposições Geométricas em 1891, ele conseguiu desenvolver uma prova do Teorema de Pitágoras baseado na ideia de dissecar dois quadrados, um maior e outro menor, sobre os lados menores em 5 partes e compor um quadrado igual ao quadrado que fica sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo. Quando ele morreu, essa dissecção foi inserida em sua lápide.

Além do livro e da grande ideia do uso da dissecção, Perigal expressou que métodos baseados em dissecações também poderiam resolver o problema de Tarski de quadratura do círculo usando dissecções, esse problema mostrou-se impossível de resolver de maneira construtiva.

Retornando a dissecção que Perigal construiu na prova do Teorema de Pitágoras, ela é formada por 4 polígonos congruentes e que sobrepostos ao quadrado maior sobre a hipotenusa a partir dos vértices sobra um espaço central no qual se encaixa o quadrado do cateto menor, com esses polígonos foi feito um quebra-cabeça onde o principal objetivo é encaixar as peças nos quadrados dos catetos e posteriormente reencaixá-las no quadrado da hipotenusa.

Figura 11 – O método de Perigal




Fonte: O Baricentro da Mente (2018)

### 2.3.2 O Método de Perigal

Vamos usar o Método de Perigal com o objetivo fundamental de demonstrar o teorema de Pitágoras.

Primeiro vamos considerar um triângulo retângulo qualquer ABC, o método tem como função construir um quadrado usando os lados do triângulo e montar, dissecar, os quadrados, para demonstrar a expressão algébrica do Teorema de Pitágoras. Podemos destacar que essa é uma das maneiras mais dedutivas que explica com detalhes a parte geométrica do Teorema.

Conforme a imagem, sobre o cateto maior do triângulo, neste caso AB, é construído o quadrado ABDE onde traçamos suas diagonais para encontrar seu centro O, que ocorre seu encontro, sua intersecção. Após essa parte vamos traçar o segmento FG que passa por O sendo paralelo à hipotenusa AC do triângulo e finalizando, traçamos o segmento HI, que é perpendicular a FG.

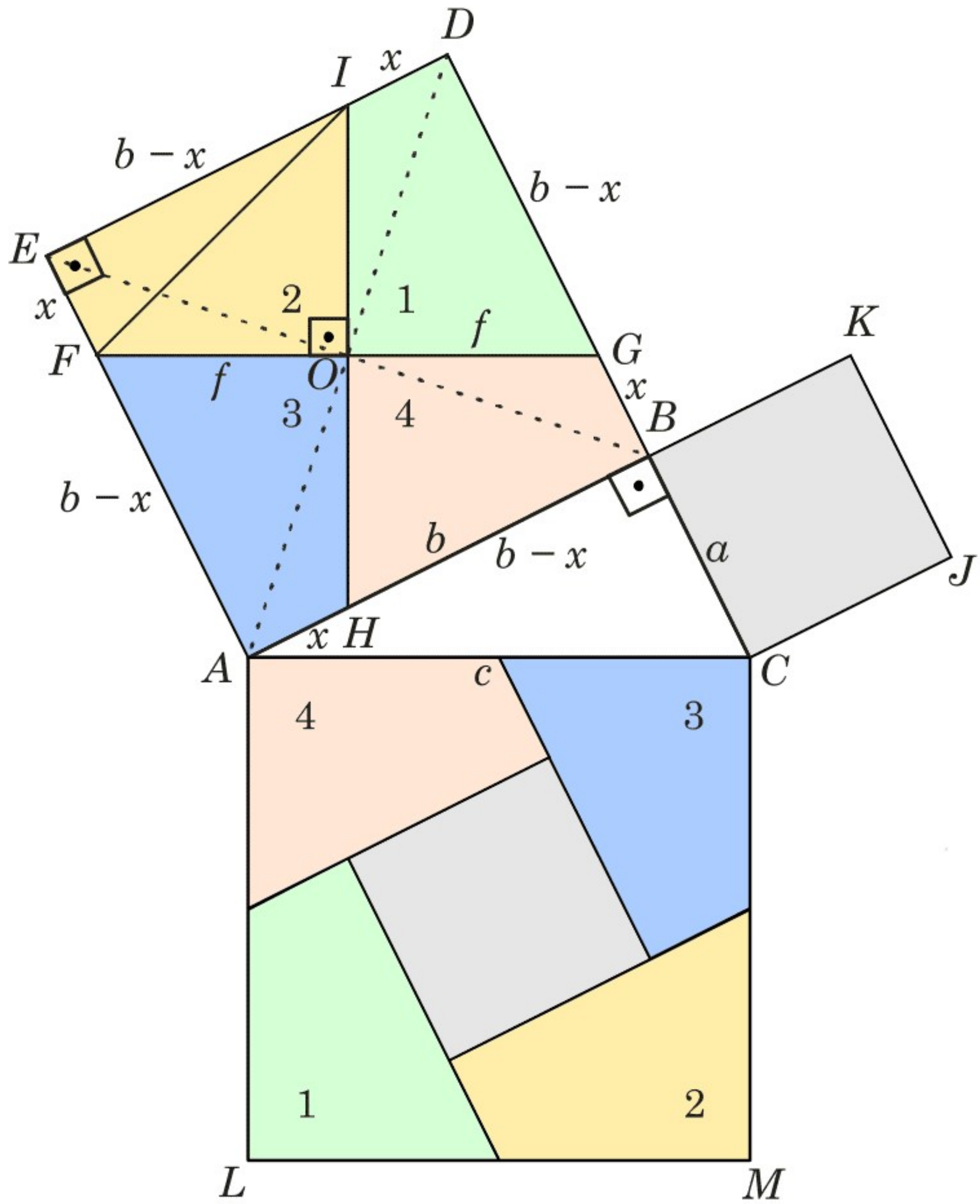
Assim, o quadrado ABDE, do lado esquerdo na figura acima é dissecado em quatro partes congruentes, e essas partes somadas ao quadrado BCJK , que está sobre o cateto menor BC, resultam no quadrado ACML, figura do lado direito, que está sobre a hipotenusa AC.

Vamos agora demonstrar essa conjectura algebricamente usando a figura abaixo como base de nossa prova do Teorema de Pitágoras.

**Demonstração:** Consideremos um triângulo retângulo qualquer ABC, de hipotenusa AC = c e catetos AB = b e AC = a. Sobre o maior cateto, AB , iremos construir o quadrado ABDE. Após, traçamos os segmentos AD e BE, diagonais do quadrado que em sua interseção forma o ponto O que é o centro. Esse ponto O também representa o centro de uma circunferência circunscrita ao quadrado.

Vamos Traçar o segmento FG, que passa por O e é paralelo à hipotenusa c, e traçar o segmento IH que também passa por O e é perpendicular a FG, iremos obter uma dissecção do quadrado ABDE em quatro quadriláteros congruentes. Podemos constatar esse caso por congruência de triângulos; peguemos os quatro quadriláteros e dividimos em dois triângulos, iremos perceber com o uso da semelhança que a partir de seus ângulos e lados, teremos a congruência de todos os quatro quadriláteros, ou seja, os quadriláteros 1 (verde), 2 (amarelo), 3 (azul) e 4 (bege) possuem a mesma área. Quando colocados no quadrado de lado c, sobre o lado do AC do triângulo retângulo ABC, juntamente com o quadrado cinza, lado BC, sobre o cateto de lado a também do triângulo ABC conseguimos demonstrar e provar a relação do Teorema de Pitágoras em que a soma das áreas dos quadrados, catetos, com lados a (BC) e b (AB), somados, resulta na área do quadrado, hipotenusa, de lado c (AC).

Figura 12 – Demonstração do método de Perigal




Fonte: O Baricentro da Mente (2018)

Demonstrando algebricamente temos que:

Usaremos EF = DI = BG = AH = x, como monstra na figura AB = AE = b (lado do quadrado ABDE) e percebemos que BH = b – x.

Veremos ainda que os pontos ACGF são vértices de um paralelogramo, pois a construção monstra que seus lados são opostos e paralelos. Com base nisso, obtemos que:

Como AC = FG = c, então c = 2.f

e

Como AF = CG, então a + x = b - x, usaremos x = $\frac{(b-a)}{2}$

No quadrado sobre o cateto b (lado AB), temos quatro quadriláteros congruentes como descrito acima, pegando o quadrilátero 2 de cor amarela e calculando a área dos dois triângulos podemos verificar que:

$\Delta EFI = \dfrac{(x.(b-x))}{2}$

$\Delta FIO = \dfrac{(f.f)}{2}$

então a área de uma quadrilátero é:

$$\frac{(x.(b-x))}{2} + \frac{(f.f)}{2}$$

como são 4 quadriláteros, temos:

$$4(\frac{(x.(b-x))}{2} + \frac{(f.f)}{2})$$

$$2.x(b-x) + 2.f.f$$

substituindo c = 2.f e x = $\frac{(b-a)}{2}, temos:$

$$2\frac{(b-a)}{2}.\frac{(b+a))}{2} + \frac{(c.c)}{2}$$

$$\frac{(b.b-a.a)}{2} + \frac{(c.c)}{2}$$

concluímos que a área dos 4 quadriláteros é:

$$\frac{(b^2+c^2-a^2)}{2}$$

precisamos provar que a soma da área do quadrado de lado a mais a área do quadrado de lado b resulta no quadrado de lado c, temos:

Área do quadrado de lado a = $a^2$

Área do quadrado de lado b = $\dfrac{(b^2+c^2-a^2)}{2}$

Área do quadrado de lado c = $c^2$

então:

$$a^2 + \frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2} = c^2$$

$$2a^2 + b^2 + c^2 - a^2 = 2c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

como queríamos.

## 2.4 Metodologias Ativas

As metodologias ativas são um forte aliado no ensino e aprendizagem, concorda com formas de pensar comum ao que estabelece a BNCC (Base Nacional Comum Curricular), estabelece nomas que as tecnologias digitais de informação e comunicação são utilizadas de maneira significativa, ética, crítica e reflexiva na relação atividade escolar, coletiva e na vida pessoal da comunidade escolar.

O aluno é o principal individuo na relação descrita dentro dos princípios que geram e regem as metodologias ativas. Elas inspiram a autonomia, a reflexão proporcionando trabalho em equipe, inovação nas salas de aula e crescimento educacional.

> Podemos entender Metodologias Ativas como formas de desenvolver o processo do aprender que os professores utilizam na busca de conduzir a formação crítica de futuros profissionais nas mais diversas áreas. A utilização dessas metodologias pode favorecer a autonomia do educando, despertando a curiosidade, estimulando tomadas de decisões individuais e coletivas, advindos das atividades essenciais da prática social e em contextos do estudante. (BORGES; ALENCAR, 2014)

Com frequência termos como ensino híbrido, ensino colaborativo, sala de aula invertida, gamificação, aprendizagem baseada em problemas, aprendizagem baseada em equipes e aprendizagem baseada em projetos são algumas das metodologias ativas que caracterizam modelos de ensino com o objetivo de fazer com que o aluno exerça um papel ativo, de protagonista, em seu processo de aprendizagem.

> A Aprendizagem baseada em Projetos (ABP) da sigla em inglês PBL (Problem Based Learning) é um processo de ensino e aprendizagem ancorado na investigação. Nesse método, é apresentado aos aprendizes um problema inicial, que pode ser uma questão complexa, a qual eles precisam

> resolver por meio da colaboração entre os pares por certo período de tempo. Os temas dos projetos abrangem questões sobre assuntos autênticos do mundo real. O que se espera ao se trabalharem esses projetos é que, durante o processo de pesquisa e investigação coletiva dos temas, os participantes aprendam o conteúdo, obtendo fatos e informações necessários para chegarem a conclusões sobre o problema ou questão inicialmente lançada. Esse processo é muito rico, pois, durante seu desenvolvimento, os aprendizes aprendem novos modos de aprender em grupo, criando valiosas habilidades e novos processos mentais, diferentes dos criados pelos métodos tradicionais de ensino (TORRES P.L.; IRALA, 2014)

Oliveira L. R.; Cavalcante (2015) afirma que na visão dos professores as metodologias ativas devem integrar teoria e prática à realidade do aluno, não o envolvendo apenas na dimensão cognitiva, mas também, em outros aspectos como habilidades e atitudes. Além disso, viabilizar a relação do professor com o aluno, de forma a se tornar um estímulo para que a aprendizagem aconteça.

> Com tanta informação disponível, encontrar uma ponte motivadora para que o aluno desperte e saia do estado passivo, de espectador, e desenvolva habilidades e competências, induz professores e profissionais da educação a pensar e conhecer sobre como se produz uma aprendizagem significativa e como se constrói o conhecimento. (PINTO A. S. SILVA; BUENO, 2012)

Quanto a estrutura, alguns desses modelos de diferenciam, portanto todos se baseiam em uma ideia que, para aprender verdadeiramente é muito mais importante ir além do que meramente assistir ás aulas expositivas e fazer as atividades. Quando usamos um ambiente participativo e colaborativo com os estudantes, que eles trabalham em grupos com o abjetivo de desenvolver conteúdos, participar de debates, resolver problemas, construir arte, produzir textos, entre outros, a escola consegue proporcionar os pilares para uma aprendizagem mais eficaz e profunda.

Nesse ambiente mencionado, os estudantes são capazes de utilizar as teorias, os modelos e instrumentos aprendidos para propor soluções inovadoras para a resolução de problemas desconhecidos e mais complexos. Assim, a escola conseguiria de maneira formidável formar habilidades de reflexão, investigação e autonomia na busca por conhecimento, bem como no pensamento crítico. A escola também iria estimular e desenvolver o trabalho em grupo, a responsabilidade, a colaboração e o desenvolvimento de habilidades de comunicação que seria muito benéfico para o uso do estudante na sociedade e no mercado de trabalho.

Assim, a introdução de metodologias ativas de aprendizagem além de mudar completamente a dinâmica e estrutura da sala de aula, exigiria novas maneiras de avaliar que daria mais importância na reprodução valorizando mais o domínio dos conteúdos aprendidos do que a memorização, isso seria de grande estímulo para os estudantes.

Toda metodologia necessita acompanhar aquilo que é pretendido, ela precisa estar em sintonia com o planejamento, é preciso usar a metodologia em que os alunos se sintam capazes de se envolver em atividades que é preciso tomar decisões, avaliar resultados e usar materiais adequados e relevantes para seu desenvolvimento.

### 2.4.1 Ensino Colaborativo

A educação está cada vez mais diferente e diversificada, algumas ferramentas novas e métodos chegaram ao mercado para atender e suprir às demandas das novas gerações. E um modelo que chama a atenção é o ensino colaborativo. Esse método está contribuindo grandemente para o desenvolvimento integral dos estudantes onde eles juntamente com os pais, professores e a própria escola constroem o conhecimento em conjunto além de contribuir cada vez mais para o diálogo. Nesse cenário, os estudantes possuem mais autonomia, o que aumenta o engajamento em sala de aula trazendo recursos tecnológicos para otimizar o ensino e a aprendizagem.

O principal fundamento da educação colaborativa dá prioridade a experimentação e a realização de projetos em que os alunos despertam a criatividade, com o apoio de soluções tecnológicas proporcionando chegar à conclusão por meio da experimentação e do olhar crítico. Mudanças devem acontecer de maneira que o professor deixe de transmitir o conhecimento e passe a ser mediador, direcionando os alunos a uma aprendizagem mais ligada a realidade do mundo em que vivemos.

> Assim, tendo como referência que as metodologias ativas são idealizadas a partir de estratégias de ensino fundamentadas na concepção pedagógica crítico-reflexiva, a partir de uma atuação em contextos de vida real, intervindo sobre a realidade, de forma a estimular a interação entre os diversos atores, incentiva-se a valorização da construção coletiva do conhecimento em seus diferentes saberes e cenários de aprendizagem (SILVA; SIPLE, 2017)

Existem inúmeros benefícios no ensino colaborativo, mas o principal deles é que a escola consegue transmitir um conhecimento contextualizado, isso faz toda a diferença pois permite a formação dos alunos de acordo com a demanda da sociedade atual, trazendo soluções criativas possíveis para problemas futuros. Como resultado, o aluno conquista liberdade na produção de conhecimento de acordo com seus interesses, isso o leva a obter conteúdos edificantes.

> O engajamento do aluno em relação a novas aprendizagens, pela compreensão, pela escolha e pelo interesse, é condição essencial para ampliar suas possibilidades de exercitar a liberdade e a autonomia na tomada de decisões em diferentes momentos do processo que vivencia, preparando-se para o exercício profissional futuro. (BERBEL, 2011)

Por outro lado, a escola oferece os conhecimentos, mostrando o que a humanidade construiu ao longo de toda história científica. A união, nesse sentido, entre a teoria e a prática, de maneira colaborativa, cria uma metodologia completamente inovadora e produtiva.

O trabalho em equipe é um benefício de aprendizagem colaborativa muito importante para o crescimento, principalmente, profissional desses alunos. Essa experiência não só trabalha a liderança, resiliência e comunicação, ela faz com que os estudantes apoiem uns aos outros, valorizando e respeitando a participação uns dos outros.

> Dentre as metodologias ativas mais utilizadas para facilitar os processos de ensino e de aprendizagem, o trabalho em grupo foi o mais destacado pelos professores, de modo que todos apontaram como uma metodologia para envolver de forma mais eficaz o aluno com o conteúdo nas suas aulas. O estudo de textos, filmes, projeções e documentários, mapa conceitual, seminário e tempestade cerebral também estão entre as metodologias mais adotadas. (DIESEL; DIESEL; MARTINS, 2015)

Nessa nova era em que vivemos, o ensino colaborativo é um grande aliado na educação, introduzi-lo em unidades escolares de ensino com toda certeza será gerador significativo de resultados além de grande diferencial.

### 2.4.2 Uso da impressora 3D no ensino da Matemática

O uso de impressoras em 3D na área de tecnologias vem crescendo nos últimos anos consideravelmente e contribuindo com o processo de ensino da matemática, principalmente nas disciplinas de Geometria Plana e Espacial, Geometria Analítica, Álgebra Linear e Cálculo. A grande potencialidade do uso dessa tecnologia nessas disciplinas, da impressão 3D, é o fato do manuseio e a visualização do objeto impresso que facilita a compreensão do mesmo.Em vez de apenas visualizar imagens em livros didáticos ou na tela de um computador, os estudantes possuem a oportunidade de criar modelos físicos que representam conceitos abstratos, isso proporciona aprendizado visual e tátil, melhorando a compreensão e a retenção do conhecimento, tornando os temas complexos mais acessíveis e interessantes.

A impressão 3D incentiva a criatividade e a imaginação dos estudantes, possibilitando que eles projetem e construam objetos únicos, despertando múltiplos interesses. Explorando diferentes designs eles podem transformar suas ideias em realidade e experimentar soluções para problemas complexos em diversas áreas do conhecimento. Toda essa abordagem prática desde cedo estimula e promove a resolução de problemas de maneira eficaz, dinâmica e interativa. Vale ressaltar que a utilização de tecnologias 3D na aprendizagem da matemática contribuí de maneira considerável no processo de ensino, auxiliando na representação gráfica de superfícies, em sua interseção e na visualização de curvas de nível. Aguiar (2016) a impressão 3D tem sido explorada para dar vida aos conteúdos de matemática e física. Também é fundamental entender que a visualização de um objeto matemático e a sua manipulação tátil podem desempenhar um papel importante na elaboração de processos mentais mais eficientes. Grande parte do sucesso de Arquimedes na área da Matemática deve ser atribuído no fato de que ele sempre perseguia maneiras e resoluções em cima de construções mecânicas e suas visualizações.

A prática da utilização de atividades lúdicas e jogos pedagógicos no ensino da Matemática está totalmente relacionada ao desenvolvimento cognitivo da criança e do adolescente. Valorizando o ensino da Matemática é importante estar antenado na evolução tecnológica e sempre buscar meios mais atrativos como materiais concretos educativos.

## 2.5 Trabalhos correlacionados

O teorema de Pitágoras e outros assuntos correlacionados são temas bastante utilizados em monografias, artigos, dissertações e teses. Muitas são as dissertações de mestrado no ProfMat, assunto explorado por muitos alunos de muitas maneiras diferente e com bastante criatividade utilizando práticas educacionais que contribuem grandemente para o ensino da Matemática.

A dissertação de Rocha (2023), aborda o teorema de Pitágoras utilizando construções geométricas com o uso do software Geogebra, trabalho bastante interessante e prático para o uso em sala de aula. Com a mesma proposta de ensino, a monografia de Martins (2022) aborda uma proposta de ensino-aprendizagem para a geometria Euclidiana integrando o uso de demonstrações dedutivas com demonstrações visuais, nesse trabalho encontramos o passo a passo na construção geométrica e toda a explicação visual da prova do teorema de Pitágoras por meio da dissecção de Perigal.

Já A dissertação de Santos (2023), traz o teorema de Pitágoras e seus desafios no Ensino Fundamental analisando os livros Didáticos, assunto importante para a realização de exercícios e explanação do conteúdo.

A dissertação de (JORGE, 2021) monstra toda a aplicabilidade do teorema de Pitágoras em sala de aula demonstrando e explicando todo seu uso em diversas áreas pedagógicas.

Além da enorme contribuição para a pesquisa, o teorema de Pitágoras é assunto certo no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e em outros concursos, tanto de carácter nacional quanto internacional. Encontramos diversos vídeos no PIC, Programa de Iniciação Cientifica da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática de escolas públicas), abordando esse assunto além de diversos sites com excelentes conteúdos que contribuem para o desenvolvimento da aprendizagem Matemática.

# Capítulo 3

# Aspectos Metodológicos

## 3.1 Tipo da Pesquisa

A presente pesquisa apresenta aspectos qualitativos pois existe uma maior preocupação com a reflexão sobre os resultados obtidos. A pesquisa qualitativa tem o interesse na interpretação da situação do estudo, de forma subjetiva, e o interesse se está relacionado principalmente com o processo da pesquisa, e não nos resultados. É uma pesquisa aplicada, que utiliza técnicas e instrumentos para um objetivo específico, a aplicação do teorema de Pitágoras. A pesquisa foi realizada em cinco etapas: I – revisão bibliográfica inicial, objetivando atualização quanto ao tema abordado; II – aplicação de pré- teste, com o objetivo de sondar os alunos quanto ao domínio de conteúdos relacionados ao tema da pesquisa; III – aplicação da sequência didática, trabalhando conteúdos pertinentes ao tema; IV – aplicação do Pós-teste, buscando mensurar a apreensão dos conceitos trabalhados; V – análise dos dados obtidos.

## 3.2 Caracterização da Pesquisa

O público alvo desta pesquisa foi a turma do 2° ano, (2001) do Colégio Conceito, em Rio das Ostras – RJ e contou com a presença de 20 alunos. Toda pesquisa foi realizada nos dias 05, 13 e 19 de outubro de 2022, com carga horária que totalizou 5h. O principal motivo que levaram à escolha da escola (local da pesquisa de campo) foram o fato de a escola permitir o desenvolvimento da pesquisa bem como a autorização dos responsáveis e a grande participação dos alunos. Foi concedida a interação entre os discentes, entendendo que o aprendizado dentro ou fora do ambiente escolar se torna próspero quando realizado através de uma estratégia focada nas atividades em grupo, pois as ideias e conjecturas quando compartilhadas mutuamente, tendem a suprir as necessidades destes, de forma mais esclarecedora.

## 3.3 Autorizações e Coleta de dados

As autorizações para a realização da pesquisa foram solicitadas à direção do colégio, Apêndice A. As partes foram bem receptivas e autorizaram prontamente a realização do trabalho. A coleta de dados foi realizada por meio dos seguintes instrumentos: pré-teste; sequência didática e pós-teste. A data e o tempo de cada aplicação nas etapas do trabalho está detalhada no

Quadro 1 – Ficha técnica dos instrumentos empregados na presente pesquisa

| Atividades | Tempo utilizado | Alunos participantes | Datas das aplicações |
|---|---|---|---|
| Pré-teste | 50min | 20 | 05/10/22 |
| Sequência didática | 3h20min | 20 | 05/10/22, 13/10/22 e 19/11/22 |
| Pós-teste | 50min | 20 | 19/10/22 |

## 3.4 Instrumentos empregados para a coleta de dados

Foram utilizados nesta pesquisa os seguintes instrumentos: pré-teste, sequência didática e pós-teste. Estes instrumentos têm como objetivo otimizar a coleta de dados e, com isso, acredita-se, aumentar a validade dos resultados obtidos. Adiante, são descritos os instrumentos empregados para a coleta de dados da presente pesquisa, os quais constituem os Apêndices C, D e E deste trabalho.

**Pré-teste:** Foi elaborado um Pré-teste com 5 questões discursivas, extraídas de trabalhos sobre o Teorema de Pitágoras ou questões de elaboração própria. O Pré-teste foi impresso e aplicado pelo pesquisador. Os alunos não foram auxiliados enquanto tentavam resolver as questões. A aplicação do pré-teste teve como objetivo verificar os conhecimentos dos alunos em relação ao teorema de Pitágoras, buscando melhor caracterizar o público-alvo da pesquisa e direcionar ações a serem colocadas em prática durante a sequência didática.

**Sequência Didática:** Foi elaborada uma sequência didática com 3 atividades: Atividade 1 - História e Demonstrações do teorema de Pitágoras; Atividade 2 – Dissecção de Perigal; Atividade 3 – Aplicação do teorema de Pitágoras com 10 questões.

A sequência didática elaborada, teve como objetivo principal trabalhar todo o contexto do Teorema de Pitágoras com os alunos, de forma diferenciada da abordagem tradicional da aula expositiva, utilizando para isso, a história, atividades contextualizadas e suportadas por recursos tecnológicos, os quais inegavelmente, são capazes de fugir da estrutura das aulas tradicionais. Durante a aplicação da sequência didática, o pesquisador auxiliou os alunos na resolução das atividades.

**Pós-teste:** Foi elaborado um Pós-teste com 5 questões (discursivas e objetivas), buscando mensurar a apreensão dos conteúdos trabalhados com os alunos durante a sequência didática. Os alunos não foram auxiliados enquanto tentavam resolver as questões.

## 3.5 Sequência Didática

Após feita toda análise das respostas dos alunos ao pré-teste, percebemos que os alunos possuem diversas deficiências, tanto ao conceito ligado ao tema, quanto a outros conceitos matemáticos. Levando em consideração os dados obtidos, foi elaborada a sequência didática.

Quadro 2 – Ficha técnica dos instrumentos empregados na presente pesquisa

| Atividades | Material Necessário | Tempo utilizado | Data da aplicação |
|---|---|---|---|
| 1 - História e Demonstrações do teorema de Pitágoras | Computador e projetor | 50min | 05/10/2022 |
| 2 - Dissecção de Perigal | Peças da dissecção de Perigal produzida pelo pesquisador | 50min | 13/10/2022 |
| 3- Aplicação do teorema de Pitágoras | Folha de atividades, celular e computador com acesso à internet | 1h40min | 13/10/2022 e 19/10/22 |

Em uma abordagem baseada na interdisciplinaridade, ao estabelecer analogia entre os conceitos matemáticos, a pesquisa foi realizada em 3 atividades.

### 3.5.1 Atividade 1 - História e Demonstrações do teorema de Pitágoras

Nessa etapa os alunos se dividiram em grupos para pesquisar toda a história, importância, contribuições de Pitágoras e algumas das demonstrações de seu teorema. Eles escolheram uma das muitas demonstrações e em conjunto com a pesquisa apresentaram para a turma. Essa parte introdutória do trabalho de pesquisa os alunos precisaram se preparar para a apresentação, com isso, eles necessitam ter domínio do conteúdo, organização na apresentação e postura. Todas as orientações foram passadas para os alunos se prepararem.

### 3.5.2 Atividade 2 - Dissecção de Perigal

Para uma melhor aprendizagem da Matemática abordando o teorema de Pitágoras e como mencionado no capítulo anterior, utilizamos o método da dissecção de Perigal como demonstração principal aplicada em sala de aula com os alunos, confeccionamos o método da dissecção de Perigal usando a impressora 3D da UENF, UNIVERSIDADE ESTADUAL

NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO, com a grande ajuda do professor Doutor Luiz Henrique Zeferino, onde prontamente nos auxiliou e fez a impressão colorida de alguns conjuntos de 8 peças para trabalhar com os alunos usando o site Ultimaker Thigiverse, onde encontramos muitos trabalhos para impressão em 3D.

Percebemos também que um grande aliado na construção do teorema utilizado é o desafiar o aluno, pois o desafio é uma excelente ferramenta para o ensino da Matemática, ajudando a torna-la mais envolvente, interessante e atraente para os alunos, além de ser uma forma divertida e eficaz de aprendizado.

Através do desafio podemos fazer conexões com outras disciplinas usando a interdisciplinaridade que enriquece o aprendizado proporcionando a relação entre a Matemática e outros componentes curriculares. Podemos fazer o uso da tecnologia utilizando ferramentas para criar aulas mais interativas, dinâmicas com uso de softwares ou aplicativos, que podem, inclusive, estarem próximos do dia a dia da turma. E por fim, podemos também, proporcionar aos alunos criarem métodos de múltiplas formas de solução para resolver um desafio, ajudando a desenvolver a criatividade e habilidade em analisar o problema por diferentes pontos de vista.

Um grupo de alunos quando é submetido a um desafio, como resolver um problema, os processos de cognição de tentativa/erro e o raciocínio de elaboração são utilizados para distinguir as diferentes soluções que trouxe ao erro, abusar de diferentes soluções a partir de pré-concepções, a elaboração de novas soluções para com o intuito das modificações resultada na situação inicilmente apresentada e o confronto com o conhecimento prévio que permite adquirir um novo conhecimento.

A aprendizagem baseada em desafios utiliza de protótipos, jogos, desafios ou quebra-cabeça que ajudam em um ensino mais dinâmico auxiliando toda a prendizagem de maneira mais interessante e lúdica, sem a necessidade de haver imposição de conteúdos. A arte de ensinar e aprender sempre foi e sempre será os pilares da educação, existem inúmeras maneiras diferentes de fazer isso, a utilização de uma metodologia, como a baseada em desafio auxilia e permite chegar a seu objetivo com mais satisfação e eficácia. O uso de jogos educacionais em sala de aula, como jogos de tabuleiro, jogos de cartas, jogos eletrônicos, jogos de quebra´cabeça, jogos esportivos e desafios matemáticos contribuem de maneira significativa nas aulas, permitem aos estudantes envolvimento bem como diversão.

Basniak M. I.; Estevam (2017) argumenta que apesar de recursos tecnológicos se tornarem comuns, tanto no cotidiano dos alunos quanto no dos professores, a inserção desses recursos em sala de aula vem acontecendo lentamente, mas já indica um meio para estimular e inovar o processo de ensino aprendizagem através de materiais concretos que podem ser criados por meio das impressoras 3D. O uso dessas impressoras na construção de modelos pedagógicos tem sido pouco explorado e vivenciado por muitos professores, essa tecnologia digital possibilita uma contribuição gigantesca ao ensino e contribui com a aprendizagem do estudante.

Nessa atividade os alunos conheceram a demonstração do teorema de Pitágoras utilizando a dissecção de Perigal. Depois, em grupos, realizaram as etapas utilizando o material construído na impressora 3D percebendo e construindo através de desafios a demonstração do teorema de Pitágoras.

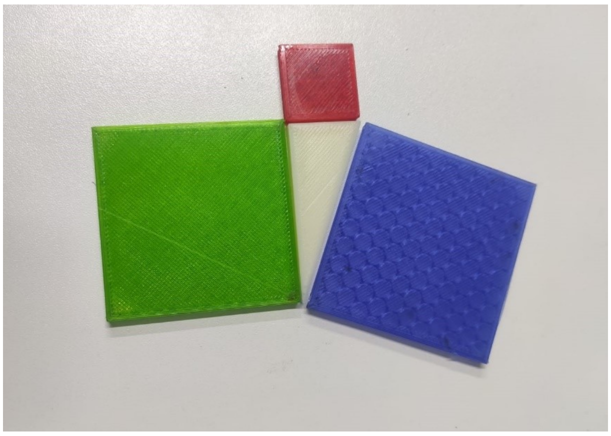
ETAPA 1 - A turma foi dividida em pequenos grupos, onde cada grupo recebeu um conjunto de 8 peças como mostra a figura abaixo;

Figura 13 – Peças da Dissecção de Perigal

Fonte: Própria

ETAPA 2 - Os grupos montaram o teorema de Pitágoras usando o triângulo retângulo e os três quadrados;

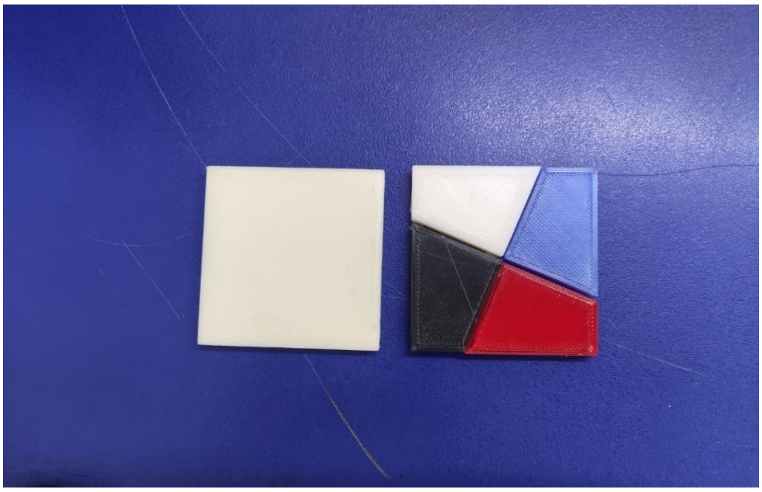
Figura 14 – Demonstração do Teorema de Pitágoras utilizando quadrados



Fonte: Própria

ETAPA 3 - O primeiro desafio consiste em montar o quadrado médio utilizando os quatro quadriláteros irregulares como na figura abaixo;

Figura 15 – Demonstração do quadrado



Fonte: Própria

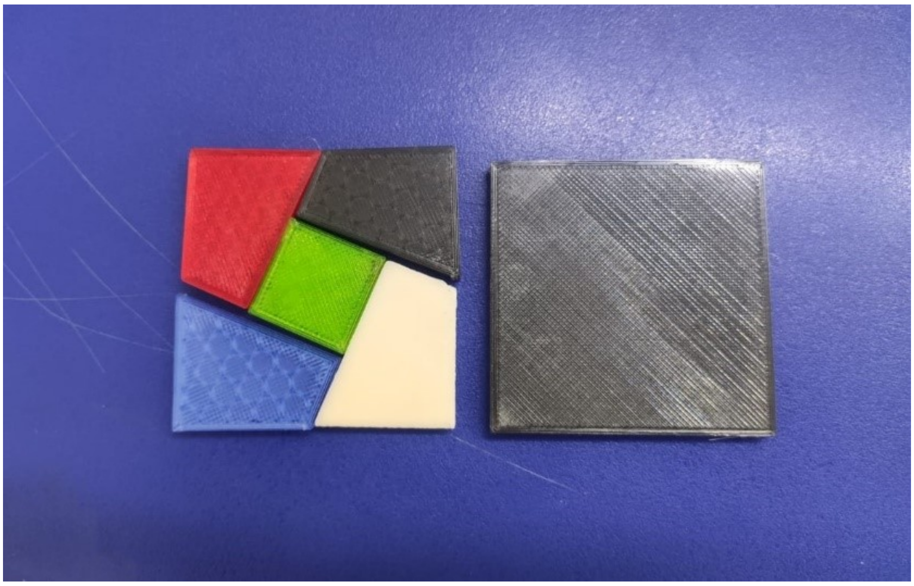
ETAPA 4 - O segundo desafio consiste em MONTAR o teorema de Pitágoras utilizando os quadriláteros irregulares como resolvido no item anterior;

Figura 16 – Aplicação do Teorema de Pitágoras usando a demonstração do quadrado

Fonte: Própria

ETAPA 5 - O terceiro e último desafio consiste em aplicar o teorema de Pitágoras, DEMONSTRAR que os dois quadrados menores formam o quadrado maior.

Figura 17 – Demonstração final da Dissecção de Perigal.



Fonte: Própria

### 3.5.3 Atividade 3 – Aplicação do teorema de Pitágoras

O Ensino Colaborativo surge como um trabalho de parceria entre o professor e o aluno, dividindo a responsabilidade do ensino, considerando as especificidades, os ritmos e os estilos de aprendizado, para favorecer o acesso e a aprendizagem de todos.

Para FIORENTINI (2006), a experiência de aprendizagem colaborativa contribui positivamente para o desenvolvimento profissional do professor:

> O trabalho colaborativo, mediado pela reflexão e investigação sobre a própria prática, é uma estratégia poderosa de educação contínua de professores, pois o professor, frente aos desafios diários, busca, continuamente, com o grupo, novos saberes e arrisca-se em novas experiências docentes, re-significando permanentemente sua prática e seus saberes. [...] O professor não apenas acompanha e recebe novos conhecimentos e ideias, mas, também troca e contribui, tornando-se protagonista da cultura profissional de seu campo de trabalho. (FIORENTINI, 2006)

Usando esse ensino Colaborativo, método eficaz na aprendizagem em equipe, os alunos, também em grupos, realizaram atividades utilizando o teorema de Pitágoras obtendo um excelente resultado nas resoluções de situações problemas. Foi possível perceber nessa etapa a ajuda mútua entre os alunos.

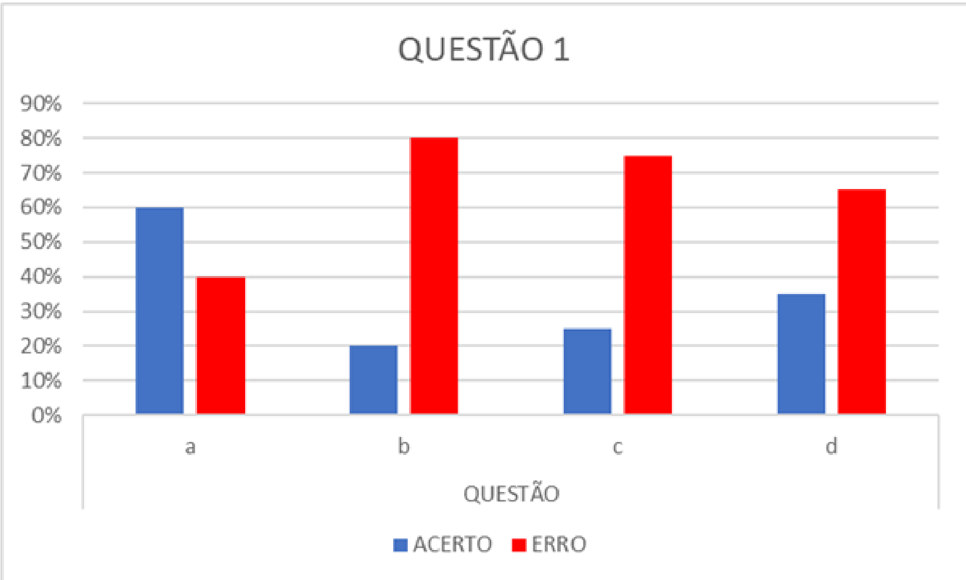
# Capítulo 4

# Desenvolvimento e Análise dos dados

## 4.1 Análise do Pré-Teste

No Gráfico 1, está apresentado o total de erros e acertos pelos alunos 20 ao responderem o Pré-Teste

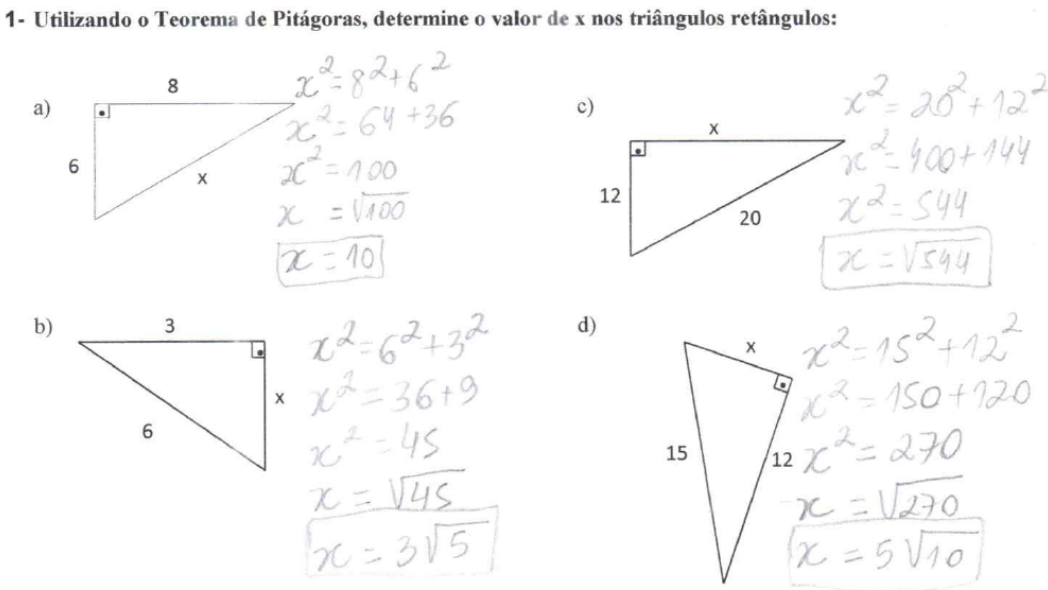
Gráfico 1 – Rendimento do Pré-Teste questão 1, itens a, b, c e d.




Fonte: Própria

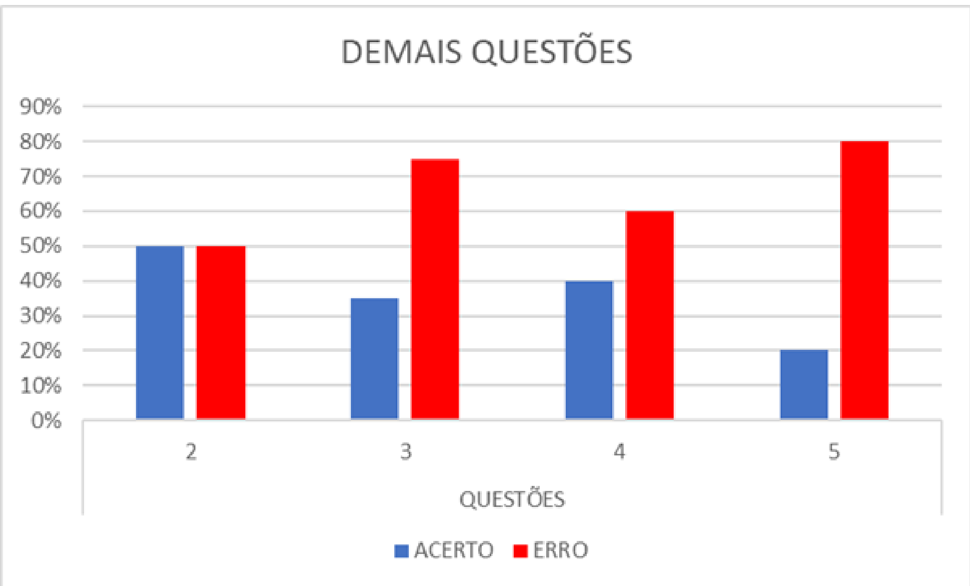
A questão 1, elaborada pelo próprio pesquisador, tem como objetivo a aplicação direta do teorema de Pitágoras buscando uma análise sobre o posicionamento dos catetos e hipotenusa, bem como o uso correto dos cálculos. Com exceção do item a onde o aproveitamento foi superior aos 50 por cento, os demais houve um aproveitamento bem abaixo de 50 por cento, mostrando a grande dificuldade por parte dos alunos. A Figura 18, mostra a resolução de um aluno onde acerta o item a e o item d porém erra os outros itens por falta de posicionamento dos catetos e hipotenusa.

Figura 18 – Resolução do Pré-Teste, questão 1, de um aluno




Fonte: Própria

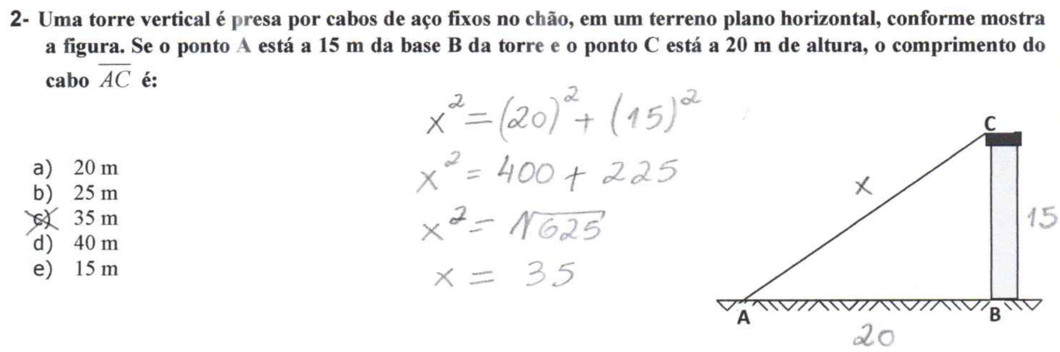
Gráfico 2 – Rendimento do Pré-Teste, questões 2, 3, 4 e 5.




Fonte: Própria

A questão 2 é uma situação problema simples onde o aluno precisa através da leitura e interpretação posicionar os dados do enunciado, catetos, e achar a hipotenusa. Nessa questão o aproveitamento foi de 50 por cento. A figura 19, mostra a resolução de um aluno.

Figura 19 – Resolução do Pré-Teste, questão 2, de um aluno



**2- Uma torre vertical é presa por cabos de aço fixos no chão, em um terreno plano horizontal, conforme mostra a figura. Se o ponto A está a 15 m da base B da torre e o ponto C está a 20 m de altura, o comprimento do cabo $\overline{AC}$ é:**

a) 20 m
b) 25 m
c) 35 m
d) 40 m
e) 15 m

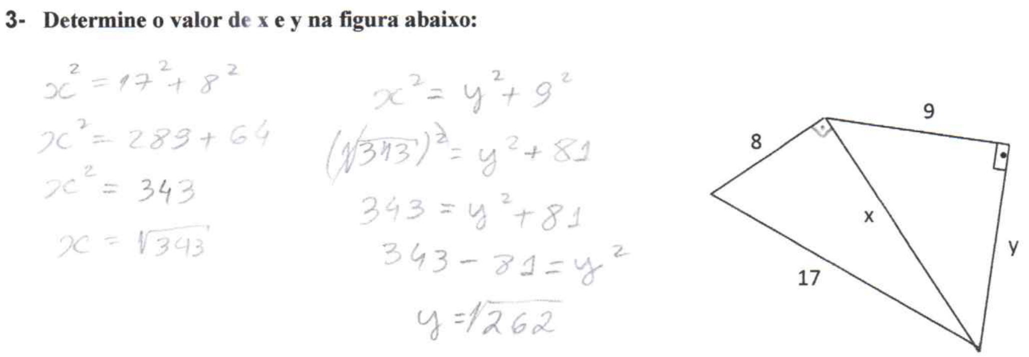
$x^2 = (20)^2 + (15)^2$
$x^2 = 400 + 225$
$x^2 = \sqrt{625}$
$x = 35$



Fonte: Própria

A questão 3, assim como a questão 1, é mais direta, o aluno precisa inicialmente achar o valor de x determinando a hipotenusa aplicando o teorema de Pitágoras e logo após achar o y também posicionando a hipotenusa. Nessa questão o aproveitamento foi muito baixo como podemos observar no gráfico 2. A figura 20, mostra a resolução de um aluno onde ele não posiciona corretamente a hipotenusa resolvendo a questão de maneira incorreta.

Figura 20 – Resolução do Pré-Teste, questão 3, de um aluno



**3- Determine o valor de x e y na figura abaixo:**

$x^2 = 17^2 + 8^2$
$x^2 = 289 + 64$
$x^2 = 343$
$x = \sqrt{343}$

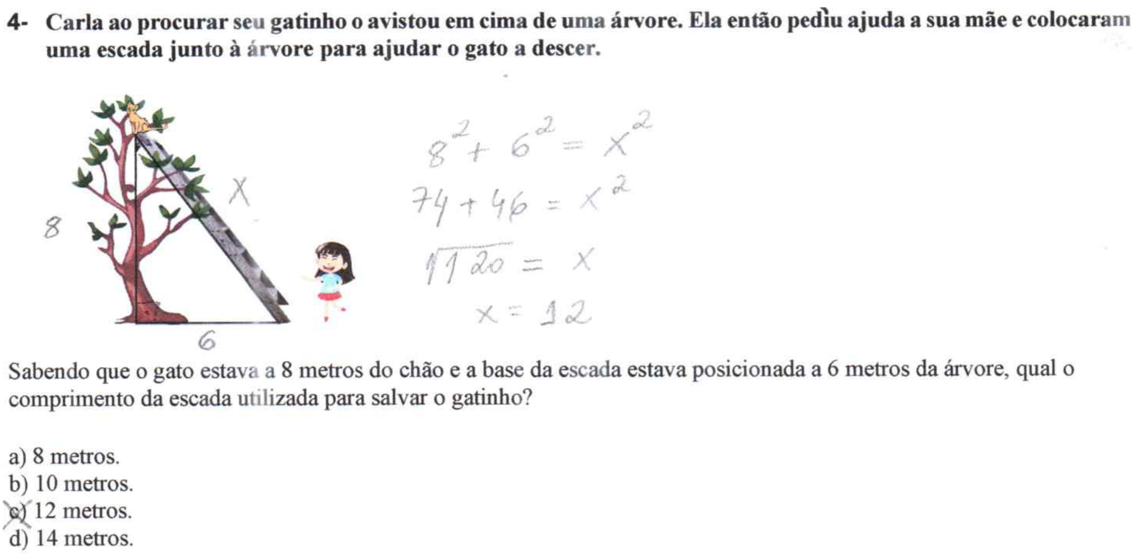
$x^2 = y^2 + 9^2$
$(\sqrt{343})^2 = y^2 + 81$
$343 = y^2 + 81$
$343 - 81 = y^2$
$y = \sqrt{262}$



Fonte: Própria

A questão 4 é outra situação problema simples onde a interpretação é a chave para a resolução, o aluno precisa calcular o comprimento da escada que é a hipotenusa substituindo os valores dados nos catetos elevando ao quadrado e resolvendo aplicando a raiz dessa soma. Note que nessa questão, apesar de simples, o aproveitamento também não foi satisfatório. A figura 21 mostra a resolução de um aluno que interpreta corretamente, aplica o teorema de Pitágoras também de forma correta, porém erra os cálculos com a potência.

Figura 21 – Resolução do Pré-Teste, questão 4, de um aluno



**4- Carla ao procurar seu gatinho o avistou em cima de uma árvore. Ela então pediu ajuda a sua mãe e colocaram uma escada junto à árvore para ajudar o gato a descer.**



Sabendo que o gato estava a 8 metros do chão e a base da escada estava posicionada a 6 metros da árvore, qual o comprimento da escada utilizada para salvar o gatinho?

a) 8 metros.
b) 10 metros.
c) 12 metros.
d) 14 metros.

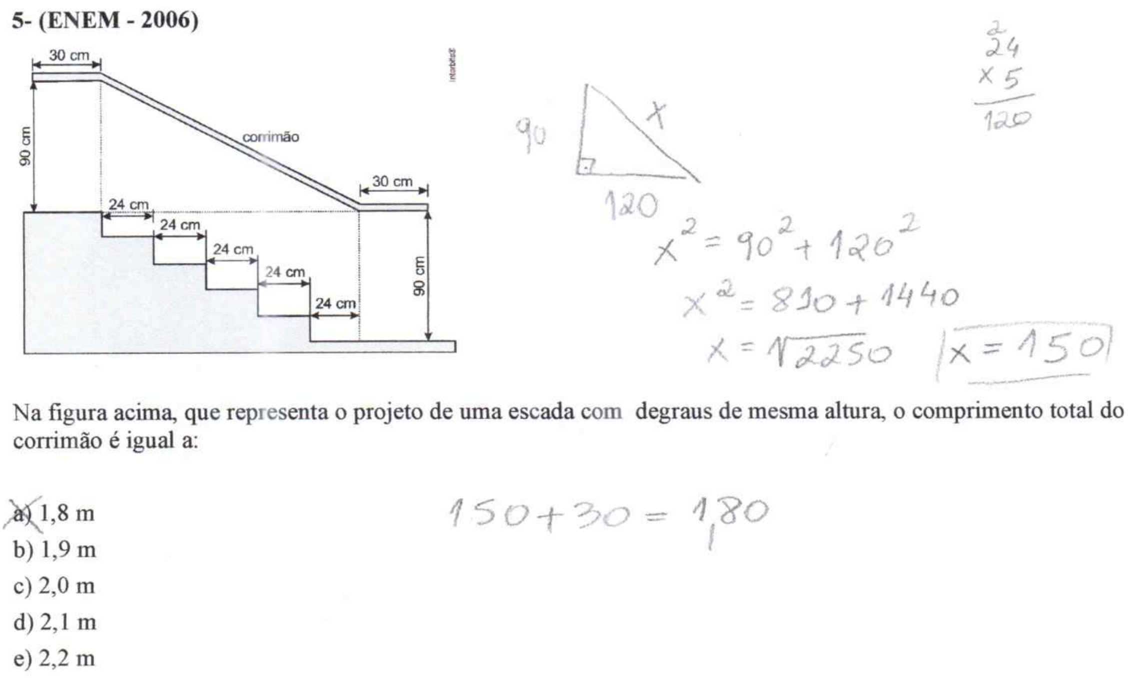
Fonte: Própria

A questão 5, foi extraída da prova do ENEM 2006 (Exame Nacional do Ensino Médio do ano de 2006), aborda uma questão de além de aplicar o teorema de Pitágoras é necessário ficar atento com a unidade de medida e no final somar as extremidades do corrimão. A figura 22 mostra a resolução de um aluno que faz a aplicação correta do teorema de Pitágoras, resolve as potências corretamente porém esquece de fazer a soma de uma das extremidades do corrimão. Nessa questão, de acordo com o gráfico 2, o aproveitamento foi muito baixo, cerca de 20 por cento.

Após a análise das questões do pré-teste, chegou-se às seguintes constatações, que merecem atenção do pesquisador:

- Muitos alunos desconhecem o Teorema de Pitágoras, tanto sua fórmula como sua aplicação;
- Grande parte dos alunos tem dificuldade em potência e raiz quadrada;
- Alguns alunos possuem dificuldades em interpretação e posicionamento dos catetos e hipotenusa;
- O aproveitamento total no Pré-Teste foi de 32 por cento de acertos.

Figura 22 – Resolução do Pré-Teste, questão 5, de um aluno


5- (ENEM - 2006)



Na figura acima, que representa o projeto de uma escada com degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a:

a) 1,8 m
b) 1,9 m
c) 2,0 m
d) 2,1 m
e) 2,2 m

Fonte: ENEM

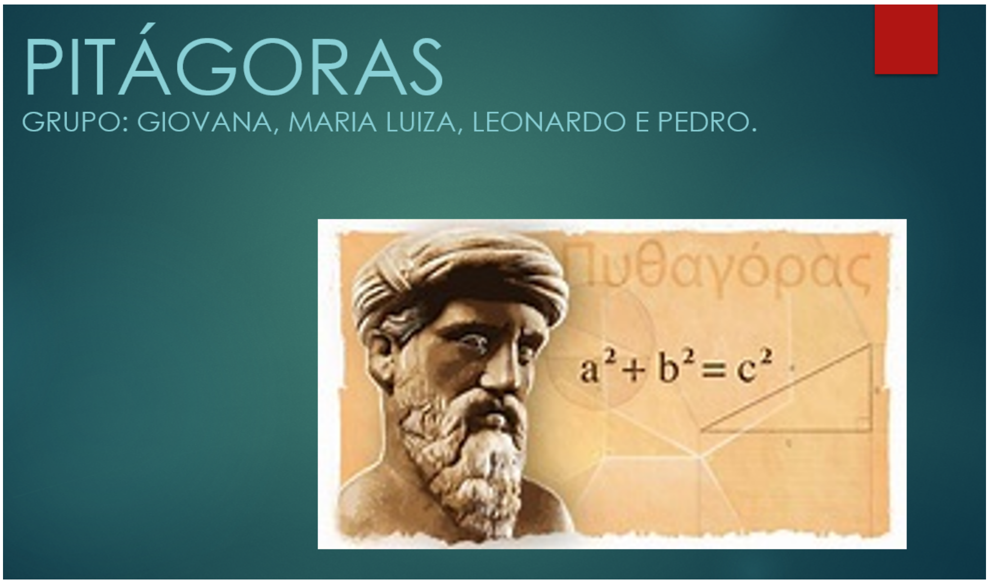
## 4.2 Aplicação da Sequência Didática e análise de dados

### 4.2.1 Atividade 1

A atividade 1 foi desenvolvida no laboratório de informática, em um tempo de aula (50min), com o objetivo do conhecimento da história e feitos de Pitágoras, trazendo ao aluno sua grande importância para a história e para a matemática, além do conhecimento de algumas das demonstrações do teorema de Pitágoras trazendo um grande apanhando de conteúdos matemáticos em cada demonstração, os alunos foram divididos em grupos.

Os alunos se mostraram bem animados por estar no laboratório de informática, apesar do uso frequente, o que nos leva a refletir sobre a necessidade de importância de usá-lo mais vezes, trazendo o desenvolvimento das mais variadas atividades suportadas por recursos tecnológicos, a atividade foi iniciada com a apresentação de seus objetivos, buscando situar os alunos e despertá-los para o que se espera que eles aprendam e reproduzam nas apresentações do que foi pesquisado, trabalhando a organização dos dados coletados na pesquisa, a oratória e o planejando na apresentação. Os alunos não apresentaram muitas dificuldades em todo processo pois a proposta era de pesquisa, a maior dificuldade foi a breve apresentação pois a maioria dos alunos são bem tímidos, porém conseguiram vencer a timidez e realizaram a atividade com excelência. A figura 23 mostra o trabalho de um dos grupos.

Figura 23 – Apresentação do Trabalho de Pesquisa




Fonte: Própria

Observamos a grande comunicação entre os grupos, tornando o processo de aprendizagem colaborativo. Esse aprendizado colaborativo é muito importante por mostrar que o conhecimento não se encontra apenas no professor, mas está disseminado por todos os participantes do processo de ensino-aprendizado.

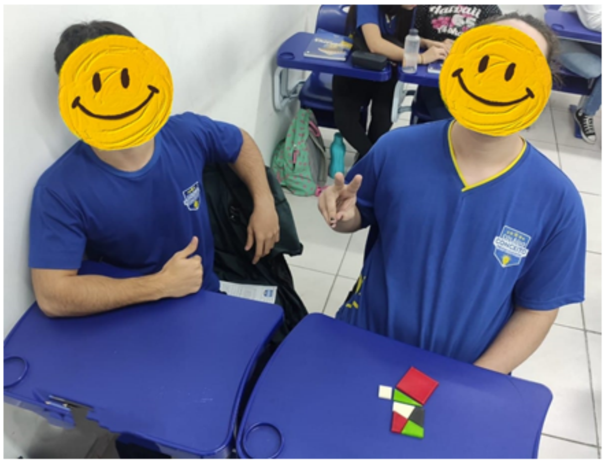
### 4.2.2 Atividade 2

A atividade 2 foi desenvolvida em sala de aula, em um tempo de aula (50min), com o objetivo de um pequeno conhecimento da história de Perigal, de sua dissecção demonstrando o teorema de Pitágoras e a aplicação do material feito na impressora 3D trazendo uma abordagem desafiadora na montagem da prova do teorema de Pitágoras. A atividade foi iniciada com a apresentação de seus objetivos, buscando situar os alunos e despertá-los para o que se espera que eles aprendam. Após uma introdução da História e da demonstração da dissecção de Perigal pelo pesquisador usando projetor e quadro os alunos foram divididos em grupos e cada grupo recebeu um conjunto de 8 peças do material construído na impressora 3D como mostra a Figura 15 e desenvolveram todas as 5 etapas, desafios, da atividade de maneira lúdica e concreta. Sequem algumas fotos da resolução dos desafios em cada etapa dos alunos.

Figura 24 – Resolução Etapa 3

Fonte: Própria

Figura 25 – Resolução Etapa 4



Fonte: Própria

Figura 26 – Resolução Etapa 5

Fonte: Própria

Os alunos realizaram toda esta atividade sem grandes dificuldades e gostaram de montar as demonstrações, pois se sentiram realmente desafiados mostrando que a aprendizagem baseada em desafios é uma metodologia de ensino-aprendizagem que busca fazer com que a sala de aula se torne um ambiente mais eficiente e mais propício para a construção de saberes de forma coletiva. Essa atividade proporcionou ensinar e mensurar o que se ensinou. Buscando sobretudo, o desenvolvimento de soluções para problemas reais, capturar a atenção de um grupo de pessoas rapidamente e transformar a maneira de apresentar uma ideia, fazendo dela mais envolvente.

### 4.2.3 Atividade 3

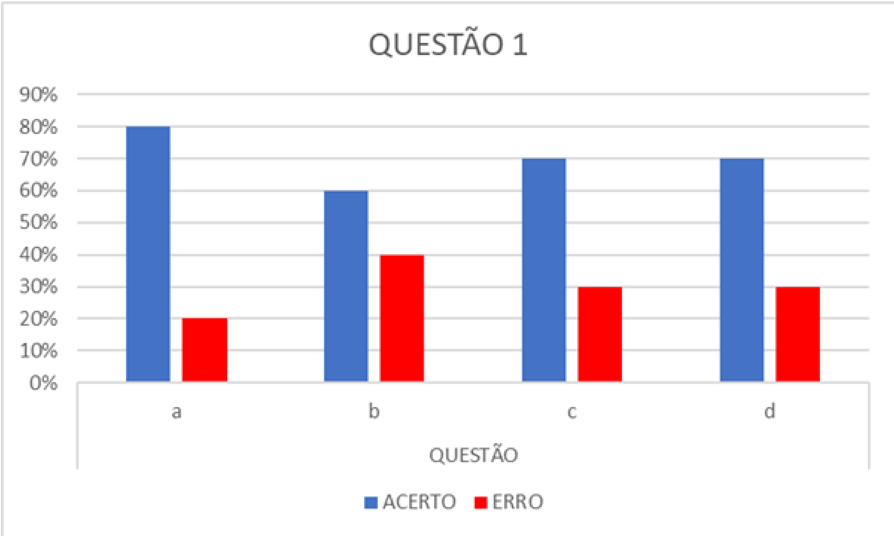
A atividade 3 foi desenvolvida em sala de aula, em dois tempos de aula (1h40min), com o objetivo da prática de exercícios, os alunos foram divididos em grupos e receberam uma lista com 10 questões onde realizaram situações problemas aplicando o teorema de Pitágoras. Novamente percebemos a aprendizagem colaborativo de maneira bem eficaz em que os alunos resolvem juntos as questões, se ajudando e tirando as dúvidas. Esta atividade foi proposta com o grande objetivo de aprimorar a aplicação do assunto na resolução de problemas. Vinte alunos participaram desta atividade resolvendo as questões propostas (Anexo C).

Após a divisão dos grupos, cada um recebeu a lista com as questões e foi orientado que estivesse com seu caderno, lápis e borracha à disposição para que pudessem efetuar os possíveis cálculos. Todas as orientações foram dadas e algumas simulações foram feitas para que a maioria das dúvidas fossem sanadas. Durante a aula, em determinadas questões o pesquisador auxiliava procurando corrigir dificuldades apresentadas no Pré-Teste e tirar as dúvidas das questões que os alunos estavam tendo mais dificuldades nesta bateria de problemas. Durante a resolução dos problemas surgiram muitas dúvidas. Entretanto, em muitas delas não foi necessário a atuação do pesquisador, pois os próprios componentes do grupo ajudavam aqueles que tinham mais dificuldades. Apenas em poucas situações o pesquisador precisou intervir e sanar dúvidas. As principais dúvidas foram as relacionadas à conhecimentos como potenciação e radiciação.

## 4.3 Análise do Pós-Teste

Trata-se de uma lista com 5 questões relacionadas ao Teorema de Pitágoras que foram aplicadas preliminarmente com a denominação de pré-teste e que agora recebem o nome de pós-teste. No Gráfico 3, está apresentado o total de erros e acertos pelos alunos 20 ao responderem o Pós-Teste.

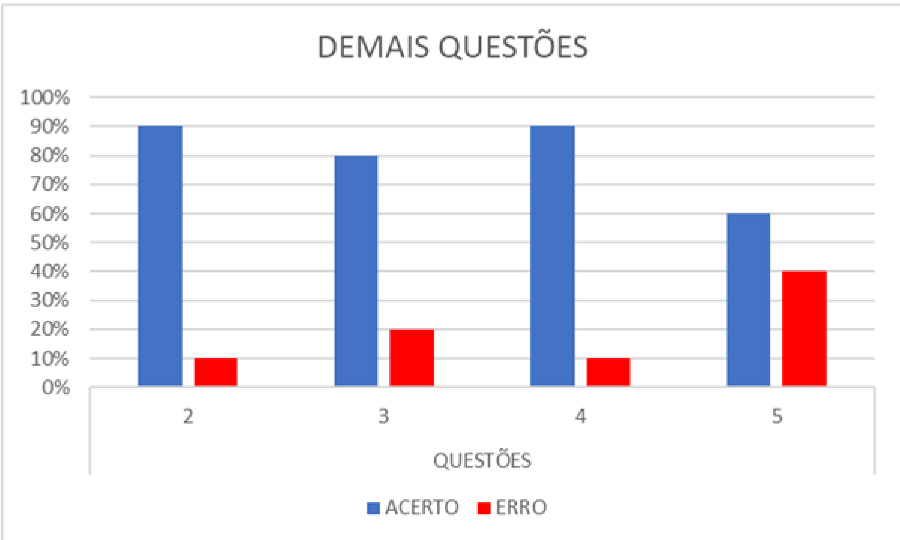
Gráfico 3 – Rendimento do Pós-Teste questão 1, itens a, b, c e d.




Fonte: Própria

A questão 1, elaborada pelo próprio pesquisador, semelhante a questão 1 do Pré-Teste mostrou um crescimento bem significante no rendimento dos alunos.

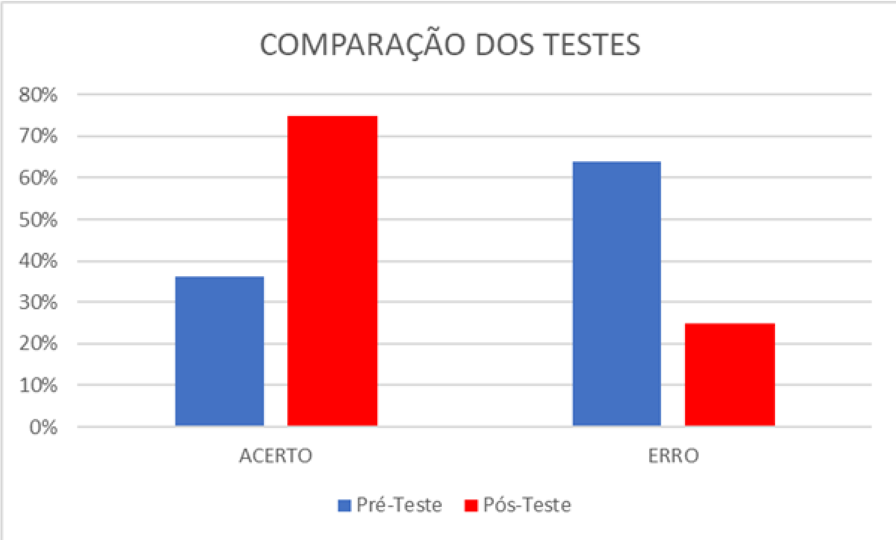
Gráfico 4 – Rendimento do Pós-Teste questão 2, 3, 4 e 5.




Fonte: Própria

Nas demais questões, como mostra o gráfico 4, podemos observar o grande desenvolvimento por parte dos alunos, todas as questões com o nível de dificuldade parecida com as questões do Pré-Teste. Notamos que as questões 2, 3 e 4 foram bem resolvidas com grandes facilidades, porém a questão 5, questão do ENEM, apesar do resultado superior a 50 por cento, os alunos tiveram certa dificuldade na parte de interpretação, principalmente no resultado final. O Gráfico 5 a seguir compara o total de acertos e erros no Pré-teste e no Pós-teste.

Gráfico 5 – Comparação dos Testes




Fonte: Própria

Como pode-se observar, houve um grande aumento do número de acertos quando compara- se pré-teste e pós-teste, assim como um expressivo decréscimo dos erros. Isso sugere, que a sequência didática contribuiu para que os alunos dominassem conceitos relacionados ao estudo do Teorema de Pitágoras. Após a análise dos resultados, é possível constatar que:

- Alguns erros cometidos pelos alunos não estavam relacionados diretamente ao uso do Teorema de Pitágoras, mas por exemplo, a erros com potência e raiz quadrada ou na montagem equivocada das posições dos catetos e da hipotenusa;
- O número de erros também caiu consideravelmente;
- Foi fundamental a aplicação da sequência didática, pois, ao final, os alunos que não demonstravam ter noção do Teorema de Pitágoras demonstraram uma evolução, conseguindo resolver as questões propostas;
- Os alunos que antes não apresentavam interesse nas aulas por motivos de socialização ou dificuldades puderam participar e se envolver;

# Capítulo 5

# Considerações Finais

Para a Geometria Plana, o Teorema de Pitágoras é considerado como um dos mais importantes teoremas. Muitos estudiosos, desde a Antiguidade, têm dele se ocupado, desenvolvendo relações voltadas a atividades diárias ligadas a agrimensura, arquitetura, edificações, urbanização, física, dentre outras áreas, inclusive a própria matemática.

Na construção desse trabalho, caminhamos por textos didáticos, histórias, demonstrações e aplicações que nos proporcionaram um grande desenvolvimento e ampliação de conhecimento.

O assunto que antes parecia superficial e simples, foi ganhando forma, foi criando abordagens e com inúmeras relações e ligações conseguimos mostrar um pouco da grande história do grande Matemático Pitágoras e seu espetacular teorema, que não nos deixa dúvidas, sobre sua importância e relevância para os estudos. Estudos esse que nos liga a várias outras áreas da Matemática como vimos aqui nesse trabalho, alunos e professores desfrutando de abordagens que envolve aspectos dedutivos, demonstrativos e aplicativos relacionamos com toda a evolução através dos tempos.

Procuramos ressaltar a importância da história sobre o teorema de Pitágoras realizando relações em meio a datas significativas, fatos relevantes, personagens marcantes, conceitos matemáticos relacionados em algumas de sua demostração bem como todo contexto bibliográfico conduzindo a uma aplicação metodológica para grande estímulo e entendimento cognitivo do aluno na realização de situações problemas.

Queríamos conduzir esse trabalho, na perspectiva de contribuir com a melhoria do ensino de matemática em todos os âmbitos, na expectativa de que sirva como fonte de consulta para atividades educacionais, novas investigações e sugerimos sua leitura a todos os professores, especialmente aos de Matemática e aos de Prática de Ensino. Acreditamos que as atividades propostas possam ser conduzidas e utilizadas nos Laboratórios/Oficinas de Matemática, no ensino do Desenho Geométrico, em jogos e em outras áreas correlacionadas.

# Referências


AGUIAR, L. D. C. D. Um processo para utilizar a tecnologia de impressão 3d na construção de instrumentos didáticos para o ensino de ciências. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2016. Citado na página 33.

BASNIAK M. I.; ESTEVAM, E. J. G. S. S. C. R. Ensino de matemática e tecnologia: concepções reveladas por professores quando relatam suas práticas. Libro de Actas do VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática - CIBEM, Madrid, p. p. 361–370, 2017. Citado na página 38.

BERBEL, N. As metodologias ativas e a promoção da autonomia de estudantes. Semina: Ciências Sociais e Humanas, v. 32, n. 1, p. 25–40, 2011. Citado na página 32.

BORGES, T. S.; ALENCAR, G. Metodologias ativas na promoção da formação crítica do estudante: o uso das metodologias ativas como recurso didático na formação crítica do estudante do ensino superior. Visconde de Cairu, v. 3, n. 4, p. 119–143, 2014. Citado na página 30.

BRASIL, M. E. Base nacional comum curricular: Educação é a base. *MEC*, 2018. Citado na página 14.

DIESEL, A.; DIESEL, D.; MARTINS, S. N. Metodologias ativas no ensino superior: um estudo de caso. v. 1, 2015. Citado na página 33.

FIORENTINI, D. Uma história de reflexão e escrita sobre a prática escolar em matemática.: Histórias e investigações de/em aulas de matemática. Campinas, p. 34, 2006. Citado na página 41.

JORGE, A. T. *Teorema de Pitágoras: Aplicabilidade em Sala de Aula*. Dissertação (Mestrado), 2021. Citado na página 34.

LOOMIS, E. S. *The Pythagorean proposition*: its demonstrations analyzed and classified, and bibliography of sources for data of the four kinds of proofs. [S.l.]: National Council of Teachers of Mathematics, 1968. 284 p. ISBN 9780873530361. Citado na página 13.

MARTINS, A. K. F. *Uma proposta de ensino-aprendizagem para geometria euclidiana integrando demonstrações dedutivas com demonstrações visuais*, 2022. Citado na página 34.

OLIVEIRA L. R.; CAVALCANTE, L. S. A. R. R. d. M. Metodologias ativas de ensino aprendizagem e suas convergências com as tecnologias digitais de informação e comunicação. UniversidadComplutense de Madrid, p. 1–13, 2015. Citado na página 31.

PINTO A. S. SILVA; BUENO, M. Inovação didática - projeto de reflexão e aplicação de metodologias ativas de aprendizagem no ensino superior: Uma experiência com peerinstruction. n. 15, p. 75–87, 2012. Citado na página 31.

ROCHA, D. M. *Teorema de Pitágoras e Construções Geométricas com o Geogebra*. Dissertação (Mestrado), 2023. Citado na página 34.

SANTOS, O. S. *O Teorema de Pitágoras e seus desafios no Ensino Fundamental: uma análise em livros didáticos*. Dissertação (Mestrado), 2023. Citado na página 34.

SILVA, S. M. d.; SIPLE, E. B. d. F. I. Z. Uso da impressora 3d no ensino da matemática. 2017. Citado na página 32.

Toda Matéria. *Teorema de Pitágoras*. 2021. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/teorema-de-pitagoras/. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 19.

TORRES P.L.; IRALA, E. Aprendizagem colaborativa: teoria e prática. p. 61–93, 2014. Citado na página 31.

# Apêndices

# APÊNDICE A

# Documentos de Autorização

UENF
Universidade Estadual do
Norte Fluminense Darcy Ribeiro

PROFMAT

# TRABALHO DE PESQUISA CIENTÍFICA

AUTORIZAÇÃO

Prezada Diretora,

Os alunos da segunda série da turma 2001 de Ensino Médio do Colégio Conceito, estão sendo convidados a participarem de uma pesquisa do Mestrado Profissional em Matemática, PROFMAT, da Universidade Estadual Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF), realizado pelo mestrando Fernando Simão Regly. A pesquisa será realizada na própria Escola, durante algumas aulas, com o seguinte título: O Teorema de Pitágoras e sua aplicabilidade, onde os alunos irão aprender e aplicar conceitos do teorema de Pitágoras baseados em uma abordagem diferenciada. Tendo como objetivo principal a melhora no ensino aprendizagem dos alunos, gostaria de pedir sua autorização para que a Instituição e a referida turma possam participar da pesquisa, e que os registros das atividades possam ser publicados em minha dissertação. Desde já, agradeço, e se estiver de acordo, peço que preencha o formulário a seguir:

Eu, Carla de Jesus Lira, diretora do Colégio Conceito autorizo a participação da turma 2001 na pesquisa Sobre O Teorema de Pitágoras e sua aplicabilidade, desenvolvida pelo mestrando Fernando Simão Regly.

Carla de Jesus Lira

Assinatura

Carla de Jesus Lira
Diretora Pedagógica
Colégio Conceito
Reg.nº 8050/20

Rio das Ostras, 03 de novembro de 2022.

# APÊNDICE B

# Plano de aula

ALUNO: ___________________________________

TURMA: _____________ DATA: _____/_____/_____

# PLANO DE AULA

O Trabalho elaborado, teve como objetivo principal trabalhar todo o contexto do Teorema de Pitágoras com os alunos, de forma diferenciada da abordagem tradicional da aula expositiva, utilizando para isso, a história, atividades contextualizadas e suportadas por recursos tecnológicos (uso da impressora 3D), os quais inegavelmente, são capazes de fugir da estrutura das aulas tradicionais. A aplicação do trabalho foi elaborada em 3 etapas.

**Etapa 1** - História e Demonstrações do teorema de Pitágoras

Nessa etapa os alunos se dividiram em grupos para pesquisar toda a história, importância, contribuições de Pitágoras e algumas das demonstrações de seu teorema. Eles escolheram uma das muitas demonstrações e em conjunto com a pesquisa apresentaram para a turma. Essa parte introdutória do trabalho de pesquisa os alunos precisaram se preparar para a apresentação, com isso, eles necessitam buscar domínio do conteúdo, organização na apresentação e postura. É importante passar orientações para os alunos se prepararem.

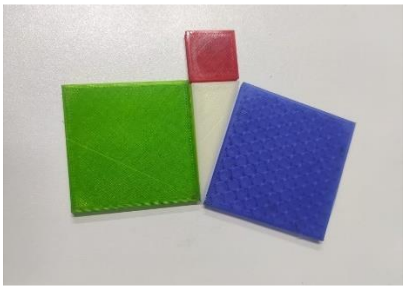
**Etapa 2** - Dissecção de Perigal

Para uma melhor aprendizagem da Matemática abordando o teorema de Pitágoras, utilizamos o método da dissecção de Perigal como demonstração principal, confeccionamos o método da dissecção de Perigal usando a impressora 3D, no site Ultimaker Thigiverse, segue o link (https://www.thingiverse.com/thing:3207504) onde encontramos muitos trabalhos para impressão em 3D.

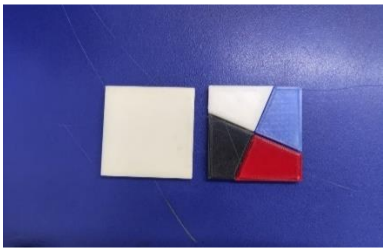
Percebemos também que um grande aliado na construção do teorema utilizado é o desafiar o aluno, pois o desafio é uma excelente ferramenta para o ensino da Matemática, ajudando a torna-la mais envolvente, interessante e atraente para os alunos, além de ser uma forma divertida e eficaz de aprendizado.

Nessa etapa os alunos foram orientados a se dividir em grupos onde cada grupo recebeu um conjunto de 8 peças como mostra a figura abaixo;

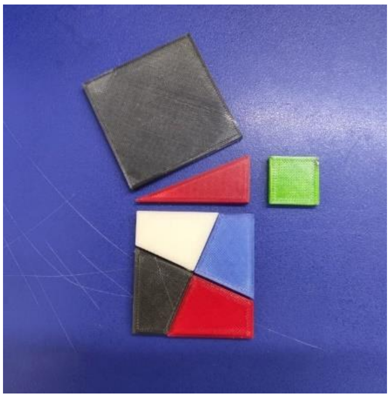
Os grupos montaram o teorema de Pitágoras usando o triângulo retângulo e os três quadrados;



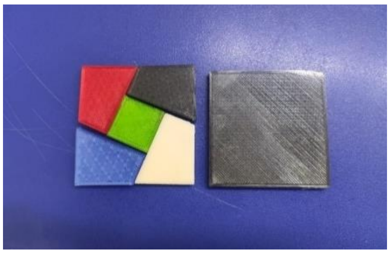
O primeiro desafio consiste em montar o quadrado médio utilizando os quatro quadriláteros irregulares como na figura abaixo;



O segundo desafio consiste em MONTAR o teorema de Pitágoras utilizando os quadriláteros irregulares como resolvido no item anterior;



O terceiro e último desafio consiste em aplicar o teorema de Pitágoras, e DEMOSNTRAR que os dois quadrados menores formam o quadrado maior.



**<u>Etapa 3</u>** – Aplicação do teorema de Pitágoras

O Ensino Colaborativo surge como um trabalho de parceria entre o professor e o aluno, dividindo a responsabilidade do ensino, considerando as especificidades, os ritmos e os estilos de aprendizado, para favorecer o acesso e a aprendizagem de todos.

Usando esse ensino Colaborativo, método eficaz na aprendizagem em equipe, os alunos, também em grupos, realizaram atividades utilizando o teorema de Pitágoras obtendo um excelente resultado nas resoluções de situações problemas. Foi possível perceber nessa etapa a ajuda mútua entre os alunos.

# APÊNDICE C

## Pré-Teste

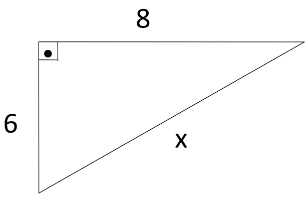
ALUNO: ___________________________________

TURMA: _____________ DATA: _____/_____/_____

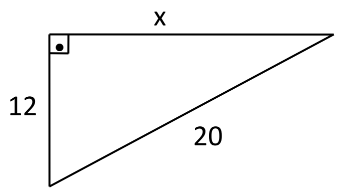
# PRÉ-TESTE

**1- Utilizando o Teorema de Pitágoras, determine o valor de x nos triângulos retângulos:**

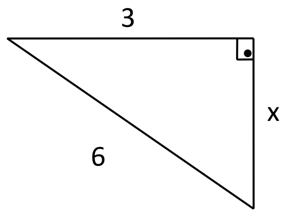
a)



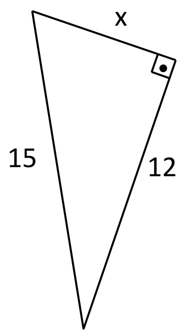

c)




b)

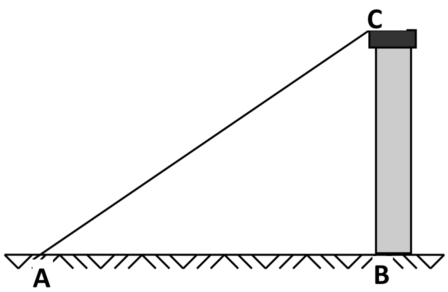



d)

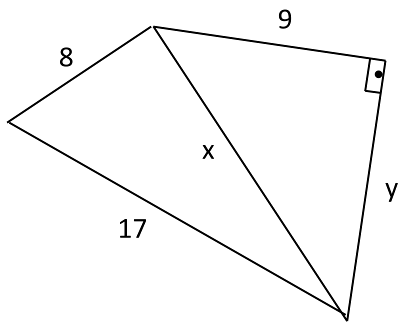



**2- Uma torre vertical é presa por cabos de aço fixos no chão, em um terreno plano horizontal, conforme mostra a figura. Se o ponto A está a 15 m da base B da torre e o ponto C está a 20 m de altura, o comprimento do cabo $\overline{AC}$ é:**

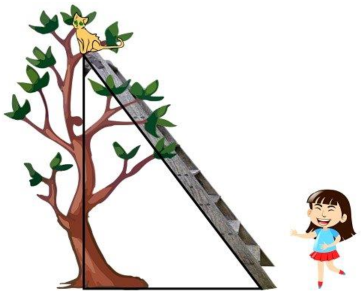
a) 20 m
b) 25 m
c) 35 m
d) 40 m
e) 15 m




**3- Determine o valor de x e y na figura abaixo:**



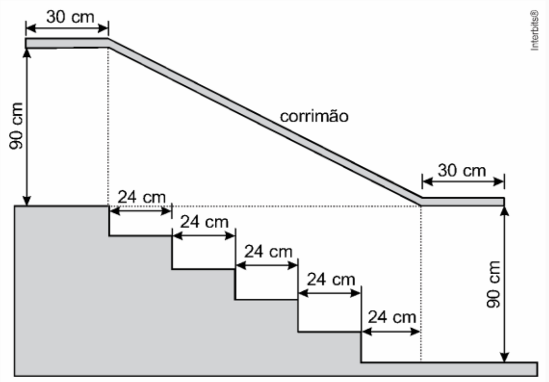
**4- Carla ao procurar seu gatinho o avistou em cima de uma árvore. Ela então pediu ajuda a sua mãe e colocaram uma escada junto à árvore para ajudar o gato a descer.**



Sabendo que o gato estava a 8 metros do chão e a base da escada estava posicionada a 6 metros da árvore, qual o comprimento da escada utilizada para salvar o gatinho?

a) 8 metros.
b) 10 metros.
c) 12 metros.
d) 14 metros.

**5- (ENEM - 2006)**




Na figura acima, que representa o projeto de uma escada com  degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a:

a) 1,8 m
b) 1,9 m
c) 2,0 m
d) 2,1 m
e) 2,2 m

# APÊNDICE D

# Atividade Complementar

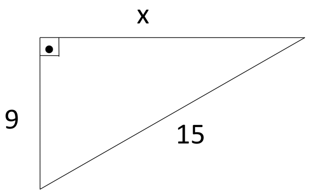
ALUNO: ___________________________________

TURMA: _____________ DATA: _____/_____/_____

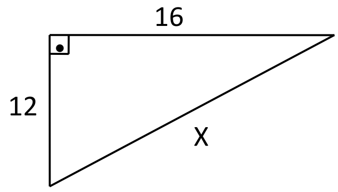
# ATIVIDADE COMPLEMENTAR

**1. Aplicando o teorema de Pitágoras, determine a medida x indicada em cada um dos triângulos:**

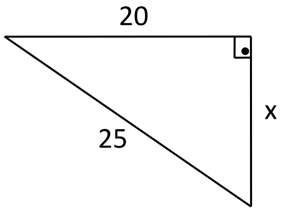
a)



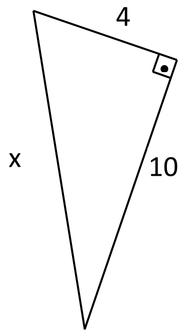

c)



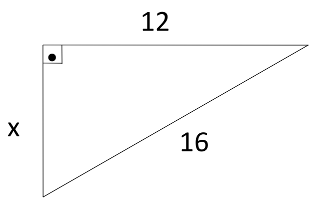

b)




d)




e)

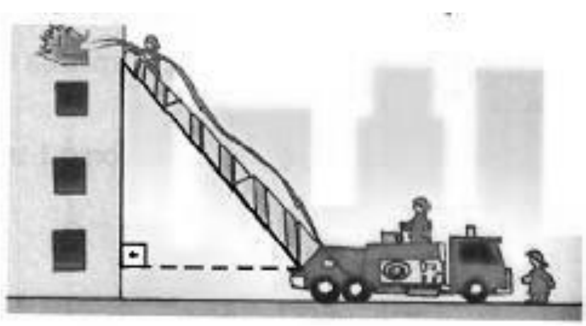



2. **Os lados de um triângulo ABC medem 10 cm, 24 cm e 26 cm. Você pode afirmar que esse triânguloé retângulo?**

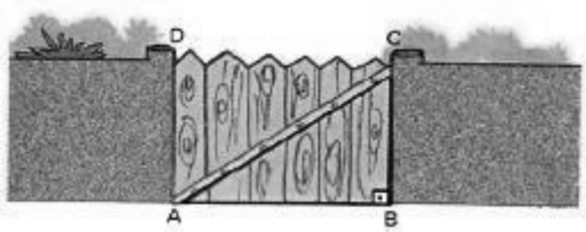
3. **Em um triângulo retângulo, um dos catetos mede $5\sqrt{3}$cm e a hipotenusa mede14 cm. Determine a medida do outro cateto.**

4. **Um terreno triangular tem frentes de 12 m e 16 m em duas ruas que formam um ângulo de 90°. Quanto mede o terceiro lado desse terreno?**

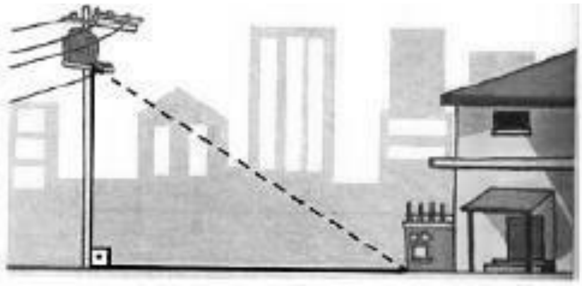
5. **Durante um incêndio num edifício deapartamentos, os bombeiros utilizaram uma escada Magirus de 10 m para atingir a janela do apartamento em chamas. A escada estava colocada a 1 m do chão, sobre um caminhão que se encontrava afastado 6 m do edifício. Qual é a altura do apartamento em relação ao chão?**



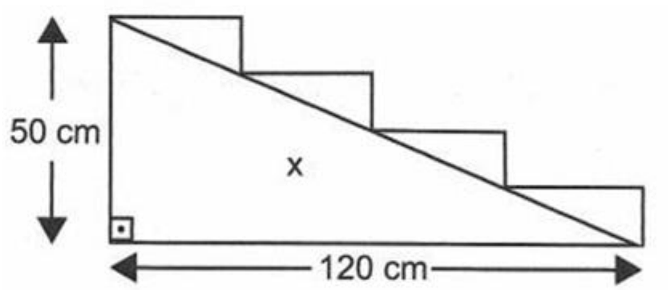
6. O portão de entrada de uma casa tem 3m de comprimento e 3m de altura. Que comprimento teria uma trave de madeira que se estendesse do ponto A até o ponto C?



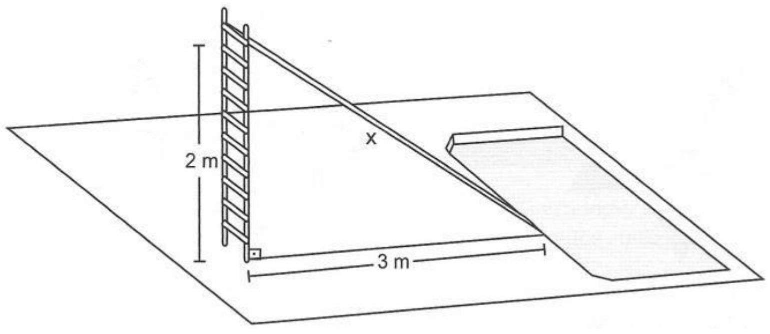

7. Quantos metros de fio são necessários para "puxar luz" de um poste de 6 m de altura até a caixade luz que está ao lado da casa e a 8 m da base do poste?



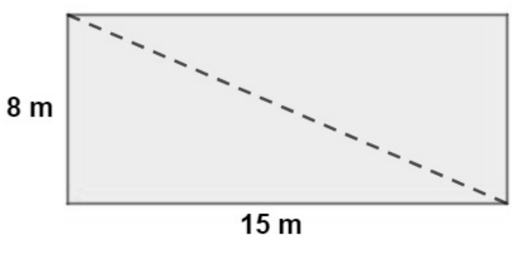
8. (Saerjinho, 2011) No lugar dessa escada será construída uma rampa, conforme mostra a figuraabaixo. Qual é o comprimento x, em centímetros, dessa rampa?




9. (Saerjinho, 2011) Veja abaixo o desenho de um escorregador. Qual o comprimento x desse escorregador?




10. A área de serviço de um clube possui formato de retângulo. Nessa área, será colocado um cano para a passagem de esgoto, passando pela diagonal do terreno. O cano passará pela região que está pontilhada, portanto qual o comprimento mínimo desse cano, em metros?



# APÊNDICE E

# Pós-Teste

ALUNO: ___________________________________

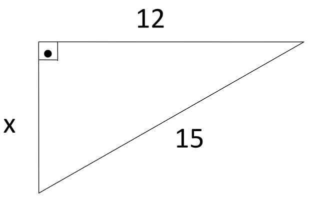
TURMA: _____________ DATA: _____/_____/_____

Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

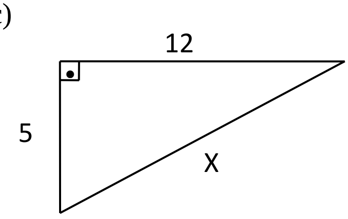
# PÓS-TESTE

**1- Utilizando o Teorema de Pitágoras, determine o valor de x nos triângulos retângulos:**

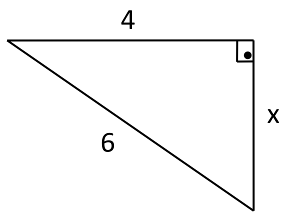
a)



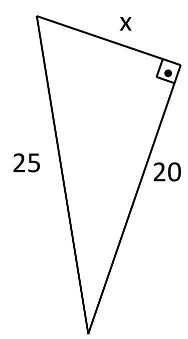

c)



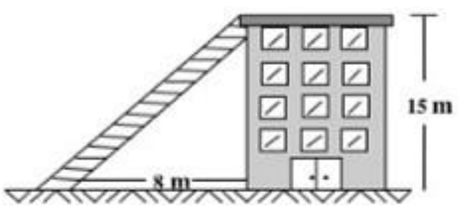

b)



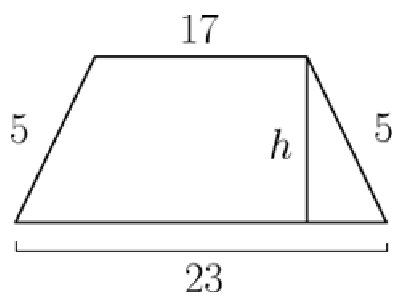

d)



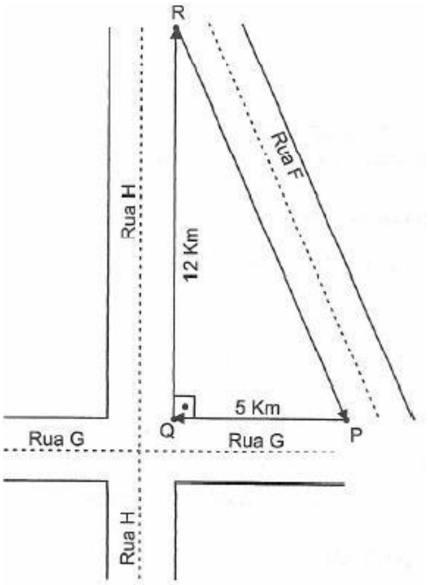

**2- A figura mostra um edifício que tem 15 m de altura, com uma escada colocada a 8 m de sua base ligada ao topo do edifício. Qual é o comprimento daescada?**



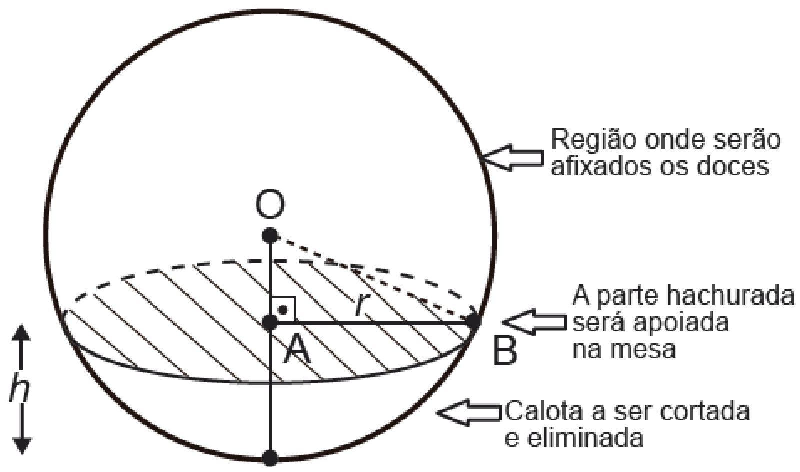

**3- Determine a medida da altura de um trapézio isósceles com as medidas indicadas abaixo**



4- **(Saerjinho, 2014) O desenho abaixo mostra o percurso realizado por um corredor nas ruas do seu bairro. Ele parte do ponto P e desloca-se em linha reta até as esquinas das ruas G, H e F, que formam o triângulo PQR. Quantos quilômetros ele desloca-se em linha reta do ponto R até retornar ao ponto P?**




5- **(ENEM -2017) - Para decorar uma mesa de festa infantil, um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo 10 cm, o qual servirá de suporte para espetar diversos doces. Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade desse suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio r da seção circular de corte seja de pelo menos 3 cm. Por outro lado, o chefe desejará dispor da maior área possível da região em que serão afixados os doces.**




Para atingir todos os seus objetivos, o chefe deverá cortar a calota do melão numa altura h, em centímetro, igual a

a) $5-\sqrt{91}/2$

b) $10-\sqrt{91}$

c) 1

d) 4

e) 5