Universidade Federal do Piauí

Centro de Ciências da Natureza

Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Resolução de Problemas do Ensino Médio Usando Métodos de Otimização

Salvino Coimbra Filho

Teresina - 2013

Salvino Coimbra Filho

Dissertação de Mestrado:

Resolução de Problemas do Ensino Médio Usando Métodos de Otimização

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite

Teresina - 2013

FICHA CATALOGRÁFICA

Universidade Federal do Piauí

Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco

Serviço de Processamento Técnico

C679r Coimbra Filho, Salvino

Resolução de problemas do ensino médio usando métodos de otimização/Salvino Coimbra.−2013.

50f.

Dissertação(Mestrado em Matemática)Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2013.

Orientação: Prof. Dr.Jefferson Cruz dos Santos Leite.

1. Matemática (Ensino Médio).2. Resolução de problemas.
3. Métodos de otimização.I. Título.

CDD 510.7

Dedicatória. (Dedico este trabalho primeiramente a Deus pela graça do seu amor incondicional, aos meus portos seguros, meu pai Salvino Neto, minha Mãe Rosemar Bernardino (nininha) e minha irmã Júlia Coimbra, sem vocês eu não sou nada, em especial meus tios Cícero Coimbra, Ronaldo Santos e Carmen Lúcia. A todo corpo docente e discente da primeira turma do PROFMAT da UFPI, a todos os meus amigos, que sempre me apoiaram durante esta árdua, porém gratificante caminhada. Ao meu orientador professor Dr. Jefferson Leite pela paciência, atenção e direcionamento no desenvolvimento deste trabalho.)

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela sua bondade e misericórdia para com todos os homes, mesmo aqueles que estão distantes recebem proteção e amor igualmente.

Aos meus pais e minha irmã pela força, atenção, carinho e estímulos que sempre me deram durante todo o decorrer do curso para que eu não fraquejasse mesmo em momentos críticos, lá estavam eles para me acolher e aconselhar, apesar da distância física que nos separa, muito obrigado por tudo, amo vocês.

A todos os meus professores do PROFMAT, em especial ao meu orientador professor Dr. Jefferson Leite, que com maestria conduziram este programa inicialmente desacreditado por muitos mas que hoje é uma realidade. Devemos muito dessa conquista aos senhores.

Aos amigos de curso Acenilso, Alberto, André, Barbosinha, Dayonne e Janilson, parceiros de estudo e também de resenhas, em especial no Cantinho do Jambo (rsrsrs).

Ao grande amigo Wilbertt, parceiro das horas boas e ruins, agradeço pela pressão para que eu agilizasse meu trabalho, por ter por muitas vezes deixado o seu trabalho de lado para ajudar no meu, pelas diversas horas de estudo no Assis e no Cantinho do Jambo, muito obrigado mesmo meu irmão.

À CAPES pelo apoio financeiro.

À SBM e UFPI pela idealização e execução, respectivamente, do PROFMAT.

Enfim, agradeço a todos que direta ou indiretamente contribuíram para que eu pudesse realizar esse sonho de hoje ser Mestre em Matemática.

"Felizes aqueles que se divertem com problemas que educam a alma e elevam o espírito".

Fenelon.

Resumo

No presente trabalho será apresentada uma proposta metodológica que fomente a curiosidade e o espírito investigativo dos alunos do ensino médio, ao tempo que promove uma maior motivação dos mesmos nas aulas de matemática através da resolução sistêmica de problemas práticos utilizando métodos de otimização que se relacionam com os mais diversos conteúdos do currículo do ensino médio. Para tanto,será dado um embasamento pedagógico, demonstrando alguns resultados e fazendo aplicações envolvendo métodos de otimização.

Palavras-chave: resolução de problemas, otimização, ensino médio, matemática.

Abstract

In this paper try to present a methodology that fosters curiosity and investigative spirit of high school students, time to promote greater same motivation for teaching mathematics through systemic resolution of practical problems, with emphasis on the optimization problems that relate to the most diverse content of high school curriculum.

For this we will make a justification of the work of pedagogical point of view, conceituaremos optimization, we present a method for resolution of systemic problems and eventually solve some practical problems related to school following the optimization method presented.

Keywords: troubleshooting, optimization, high school mathematics.

Sumário

Introdução

Tendo sua primeira turma iniciada no ano de 2011, o PROFMAT, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, foi implementado visando atender professores de matemática em exercício no ensino básico, especialmente em escolas públicas, com o objetivo de promover o aprimoramento profissional de tais professores, enfatizando o domínio aprofundado de conteúdos matemáticos relevantes para a atuação do docente.

O PROFMAT, apresenta-se como um diferencical para a educação brasileira no que tange a matemática, uma vez que as experiências, conhecimentos e metodologias incorporados pelos professores/mestrandos durante o curso tendem a dinamizar o exercício da matemática nas salas de aula do ensino básico.

Este trabalho tem por objetivo apresentar uma proposta metodológica que fomente a curiosidade e espírito investigativo do aluno, bem como proporcionar maior dinamismo nas aulas de matemática, através da resolução sistêmica de problemas práticos, utilizando métodos de otimização relacionados aos conteúdos do currículo do ensino básico, promovendo uma mudança significativa no modelo de abordagem da matemática e desenvolvimento do processo de ensino aprendizagem da mesma.

Os aspectos pedagógicos e metodológico acerca da resolução de problemas são abordados no capítulo 1, onde explicitamos a importância da utilização sistêmica de problemas práticos como instrumento facilitador no processo de ensino aprendizagem e dinamizador das aulas de matemática, embasado na nossa própria prática docente, em estudos de alguns autores e nos PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio), ressaltando a valorização do senso crítico e investigativo dos alunos, rompendo com a atual forma de tratamento da matemática nas salas de aula do ensino médio baseada na trinca: definição, exemplo e exercício de fixação. Destacamos o aluno como parte importante do processo de ensino aprendizagem e enfatizamos o papel do professor neste processo como um guia capaz de direcionar o aluno para que o mesmo possa desenvolver habilidades que o permita construir seus conhecimentos com autonomia e não apenas absorver o que lhe é apresentado.

Ao longo do capítulo 2 intitulado noções preliminares, apresentaremos e demonstraremos alguns resultados da matemática do ensino médio, relacionados a métodos de otimização, tais como a fórmula canônica do trinômio, pontos e valores de máximo e mínimo de funções quadráticas, a desigualdade entre as média aritmética e geometria e alguns conceitos e resultados relacionados à derivadas, que são necessários para o pleno entendimento e resolução dos problemas propostos neste trabalho, utilizando linguagem e propriedades de fácil compreensão e entendimento.

No capítulo 3 um breve histórico sobre otimização, área da matemática que trata basicamente da maximização ou minimização de funções, destacando sua relação com a pesquisa operacional e ressaltando aspectos importantes acerca do tema, uma vez que neste trabalho nos ocupamos de resolver problemas práticos, de forma sistêmica, utilizando métodos de otimização relacionados ao currículo do ensino médio.

Ainda no capítulo 3 apresentamos a metodologia de resolução de problemas adotada neste trabalho baseada na obra "A Arte de Resolver Problemas"de George Polya [1], destacando uma sequência de etapas a serem seguidas de modo a se resolver um problema de forma sistêmica composta por compreensão do problema, elaboração de um plano, execução do plano e retrospecto. Enunciamos cada uma destas etapas e destacamos os pontos mais relevantes de cada uma delas.

No capítulo 4 enunciamos e resolvemos 5 problemas práticos do ensino médio utilizando métodos de otimização segundo as etapas de resolução de problemas apresentadas no capítulo 3. O problema 1 é resolvido utilizando o conceito de ponto de máximo e mínimo de funções quadráticas, uma segunda solução é apresentada utilizando derivada. O problema 2 resolvemos utilizando derivadas e funções quadráticas. No problema 3 e 4 utilizamos a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica. No problema 5 utilizamos um método geométrico de analise gráfica para resolver o referido problema.

Por fim, apresentaremos as conclusões deste trabalho, procurando sempre verificar algumas reflexões sobre o processo de ensino aprendizagem em matemática.

Capítulo 1

Abordagem

É interessante iniciarmos atentando para os diversos indicadores de desempenho educacional que a nossa própria prática docente em matemática nos revela. Evidenciamos que as dificuldades no processo de ensino aprendizagem são inúmeras e algumas dessas dificuldades estão intimamente relacionadas com a forma habitual de se tratar a matemática, basicamente sobre a seguinte plataforma: definição, exemplos e exercício de fixação. Tal modelo, apesar de em alguns casos se mostrar eficaz, limita bastante o desenvolvimento do educando, dando-lhe pouca ou nenhuma oportunidade para raciocinar e por em prática seu espírito crítico e investigativo. O mesmo deixa de ser agente no processo de ensino aprendizagem para se tornar um memorizador de regras, algoritmos e fórmulas pré estabelecidas. O aluno assume o papel de mero espectador das aulas, uma vez que ele é bombardeado por conceitos, fórmulas e definições e apenas observa a resolução de exemplos e reproduz fielmente as técnicas utilizadas pelo professor para resolver algum problema de aplicação direta dos conteúdos estudados proposto ao final do conteúdo, chegando, na maioria das vezes, a resultados que sequer sabe o que representam na prática. O professor, por sua vez, faz-se apenas um transmissor de conteúdos, engessando o processo de ensino aprendizagem e tirando do aluno a oportunidade de pensar matematicamente para dar significado aos conteúdos estudados e assim construir o conhecimento, ao contrário do que sugere os PCNEM quando diz: "A postura do professor de problematizar e permitir que os alunos pensem por si mesmos, errando e persistindo, é determinante para o desenvolvimento das competências juntamente com a aprendizagem dos conteúdos específicos".

Polya destaca em sua obra A Arte de Resolver Problemas:

> Um professor de Matemática tem, assim uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo. [1]

Assim, vemos que é preciso buscar formas de inserir o aluno no contexto da construção do conhecimento, estabelecer meios para explorar sua criatividade procurando incutir-lhe o apreço pela matemática e conseguindo dessa forma que ele passe a desenvolver habilidades que lhes possibilitem a apreensão de conhecimentos novos por si mesmos e não somente a partir do repasse de conteúdo feito pelo professor. Romper com o molde habitual de ensino da matemática também exige uma mudança de postura por parte do professor frente à sua sala. Ele deve mediar o diálogo em aula e guiar os alunos às respostas e conclusões que lhe darão suporte para compreender os diversos conteúdos matemáticos, construindo significado para o que foi estudado.

Uma proposta metodológica para promover uma mudança efetiva no processo de ensino aprendizagem da matemática é a abordagem e tratamento dos conteúdos matemáticos a partir da resolução sistêmica de problemas práticos e contextualizados, realizada em parceria entre professor e aluno. O primeiro proporá problemas práticos relacionados com a vivência dos alunos e mediará o processo de resolução fazendo-lhes questionamentos que os guie à solução do problema e compreensão do conteúdo matemático envolvido, que não deverá ser indicado antes da apresentação e debate do problema; o segundo colocará em prática todos os fundamentos matemáticos adquiridos ao longo da sua vida, não estando de antemão condicionado por nenhuma fórmula ou algoritmo pré-estabelecido, ele terá independência para tratar o problema, deverá raciocinar e usar sua criatividade para perceber que fórmula, propriedade ou conceito matemático utilizar, ou ainda criar seus próprios métodos e fundamentações para chegar à compreensão e solução do problema.

> A matemática através da resolução de problemas estimula nos alunos a discussão argumentativa, a cooperação, a organização e a interação, que são práticas necessárias em qualquer contexto que envolva relações interpessoais. É o exercício da atividade e vivência em grupo, com questionamentos, divergências, tentar compreender a visão do outro, retirando ensinamentos e conclusões para outras situações futuras.[2]

Nos moldes habituais, os problemas práticos, quando utilizados, são apresentados de maneira bem tímida na forma de exercício de fixação ao final do conteúdo estudado, perdendo, de maneira considerável, seu potencial de instigação às novas descobertas indutoras à resolução de grandes problemas.

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema.[1]

Abordar um conteúdo matemático a partir de problemas práticos quebra a rigidez da trinca definição, exemplo, exercício possibilitando ao educando a aplicação e aperfeiçoamento do seu senso investigativo e crítico, dando-lhe também subsídios para tratar não somente problemas de sala de aula, mas também as mais variadas situações cotidianas, contribuindo diretamente na formação do educando para a vida além da preparação acadêmica. Ao mesmo tempo combate outro grande fator de dificuldade do processo de ensino aprendizagem da matemática, que é a monotonia, a falta de atratividade ou de fatores motivadores durante as aulas.

Desenvolver a matemática através da resolução de problemas é, do ponto de vista prático, uma forma de inquietar o aluno, de tirá-lo da sua zona de conforto e sutilmente exigir que ele abandone a postura passiva de receptor de informações e adote uma postura ativa de desbravador do conhecimento. Essa postura tende a modificar o ambiente de sala de aula no sentido de que o professor deixa de ser o centro das atenções e os conhecimentos e experiências dos alunos passam a ser valorizados e substancialmente aproveitados no processo de ensino aprendizagem. Tal valorização reflete em motivação, ampliando nos alunos o desejo de novas conquistas, possibilitando cada vez mais evoluirem enquanto estudantes. Assim, a abordagem dos conteúdos por meio da indagação e resolução de problemas práticos, por si só, é um fator dinamizador do processo de ensino aprendizagem, pois a matemática está além de rígidas definições ou do armazenamento incontestável de fórmulas e conceitos, está sim intimamente relacionada à capacidade de raciocínio, de interpretação e, sobretudo de criação de instrumentos próprios que possibilitem ao educando identificar, compreender e resolver problemas, dando significado aos conteúdos estudados.

> O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade suscetível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda vida, a sua marca na mente e no caráter.[1]

Os PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio), entre outras coisas, tratam da necessidade de reformulação do modelo de ensino atual vigente nas salas de aula e explicitam três conjuntos de competências que são: comunicar e representar, investigar e compreender e contextualizar social ou historicamente os conhecimentos. De forma semelhante o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) aponta cinco competências gerais, das quais uma é “diagnosticar e enfrentar problemas reais”. Portanto, tanto os PCNEM, quando falam em investigar e compreender, quanto o ENEM, como é percebido na competência citada, estão alinhados à proposta de construir significado para os conteúdos matemáticos a partir da abordagem de problemas práticos, reais. Sobre as estratégias para ação e a perspectiva metodológica para se tratar a matemática sob um novo modelo os PCNEM trazem em seu texto:

> Para alcançar os objetivos estabelecidos de promover as competências gerais e o conhecimento de matemática, a proposta dos PCNEM privilegia o tratamento de situações-problema, preferencialmente tomadas em contexto real. A resolução de problemas é a perspectiva metodológica escolhida nesta proposta e deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado.

A partir de todas essas justificativas o presente trabalho defende a metodologia da resolução de problemas práticos como fator motivador e fomentador para o desenvolvimento do senso crítico, investigativo e criativo do educando, bem como apresenta tal metodologia como uma importante ferramenta para se abordar e desenvolver os conteúdos de matemática do ensino médio. Obviamente o rol de possibilidades em matemática as quais podemos aplicar a metodologia de resolução de problemas práticos é amplo, desta forma daremos ênfase aos problemas que envolvam os conteúdos relacionados a métodos de otimização, área da matemática, que inclusive tem origem na necessidade de se sanar um problema, como veremos no breve histórico encontrado no capítulo 3, e pouco encontramos nos textos de matemática do ensino médio, embora tenha estreita relação com alguns conteúdos do mesmo.

Capítulo 2

Noções preliminares

Para o pleno entendimento dos problemas que serão propostos neste trabalho enunciaremos e provaremos alguns resultados da matemática relativos a métodos de otimização, sobretudo utilizando linguagem e argumentos matemáticos condizentes com o nível dos alunos do ensino médio.

2.1 Função Quadrática

As definições e demonstrações a cerca de funções quadráticas a seguir e algum aprofundamento podem ser encontradas em [3].

Definição 1. *Um função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, denomina-se quadrática, quando existem números reais* a, b *e* c*, com* $a \neq 0$*, tais que* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*

Exemplo 1. $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

Exemplo 2. $g(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 - 4x + 6$

Exemplo 3. $h(x) = x^2 - 5x + 6$

2.1.1 Forma canônica do trinômio

Quando escrevemos o trinômio do segundo grau $ax^2 + bx + c$ em sua forma canônica, podemos estabelecer uma fórmula que fornece as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, caso existam em $\mathbb{R}$, conhecida como fórmula de BÁSKARA. E ainda podemos estabelecer em que ponto a função atingirá seu valor máximo ou mínimo, e qual o valor de máximo ou de mínimo da função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Desta forma, vamos escrever o trinômio do segundo grau na forma canônica.

Considere o trinômio $ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$, completando seus quadrados, temos:

$$\begin{aligned} a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] &= a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]. \qquad (2.1) \end{aligned}$$

Assim, da igualdade (2.1), temos que $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$. Daí para encontrar as raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, fazemos $f(x) = 0$. Porém:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0 \\ &\Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = 0, \text{como } a \neq 0, \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (2.2) \end{aligned}$$

Observação 1. *Para x ser real, devemos ter em (2.2), $b^2 - 4ac \geqslant 0$.*

Observação 2. $b^2 - 4ac$ *é denominado discriminante, e simbolicamente o representaremos por Δ.*

Definição 2. *Define-se forma canônica da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$,com $a \neq 0$, a seguinte forma de representá-la:*

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]. \qquad (2.3)$$

Analisando (2.3) percebemos que $a, \dfrac{b}{2a}$ e $\dfrac{4ac - b^2}{2a}$ são constantes e apenas x é uma variável, desta forma se $a > 0$ (respectivamente $a < 0$) o valor mínimo (respectivamente máximo) de $f(x)$, ocorre quando $x + \dfrac{b}{2a} = 0$, o que implica em $x = -\dfrac{b}{2a}$. Assim $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = -\dfrac{\Delta}{4a}$, logo $x = -\dfrac{b}{2a}$ é o ponto de mínimo (respectivamente de máximo) e $y = -\dfrac{\Delta}{4a}$ é o valor mínimo (respectivamente o máximo).

Graficamente, $x = -\dfrac{b}{2a}$ e $y = -\dfrac{\Delta}{4a}$ são as coordenadas dos vértices da parábola que representa a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, observe a figura abaixo.

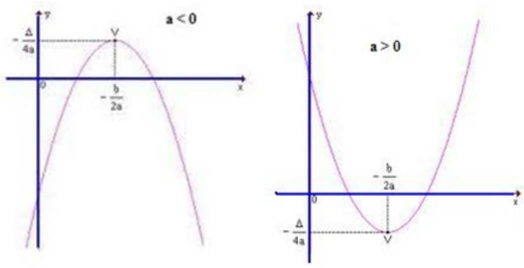


Figura 2.1: Vértices da função quadrática

Exemplo 4. *Observe o gráfico de $f(x)$ na figura abaixo e note que as coordenadas do vértice A, condizem com as coordenadas* $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ *expostas acima.*

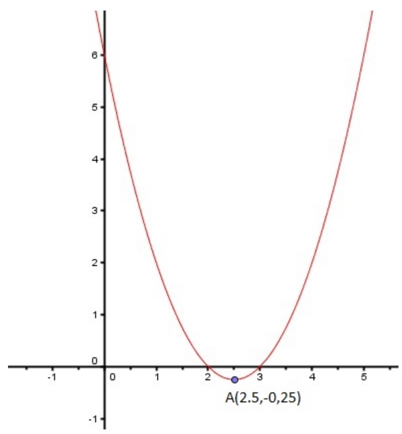


Figura 2.2: Gráfico de $f(x) = x^2 - 5x + 6$

2.2 Desigualdade das médias aritmética e geométrica

Seja

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

e

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$

as médias aritmética e geométrica, respectivamente, de n termos. Mostraremos que $A \geqslant G$, sendo $A = G$ somente quando os x_i, $i = 1, 2, 3, ..., n$ forem todos iguais entre si. A desigualdade entre as médias aritmética e geométrica é um dos resultados mais demonstrados da matemática. Há demonstrações de vários tipos, de diversos graus de sofisticação e baseados em diferentes teorias.[4]

As provas que serão apresentadas a seguir são das mais elementares dentre várias, porém feitas utilizando somente argumentos a nível de ensino médio, sendo perfeitamente possível e aconselhável que tal demonstração seja apresentada ao aluno do ensino médio. Faremos a prova mais simples, com dois números. Uma prova genérica da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica pode ser encontrada em [5].

2.2.1 Prova geométrica

Temos da geometria plana que "se um triângulo inscrito em uma semicircunferência tem um dos lados igual ao diâmetro, então ele é um triângulo retângulo"[6], assim, dados x_1 e $x_2 > 0$, construímos um círculo cujo diâmetro é $x_1 + x_2$ onde P é um ponto da circunferência que é vértice do ângulo reto do triângulo inscrito PQN que tem a hipotenusa como diâmetro, $a = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ como mediana relativa à hipotenusa e como raio do círculo e g é a altura baixada de P sobre a hipotenusa, ver figura (2.3). Desta forma temos que $a \geqslant g$ com $a = g$ quando a altura coincide com a mediana.

Vamos determinar g. Pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo PHO, temos:

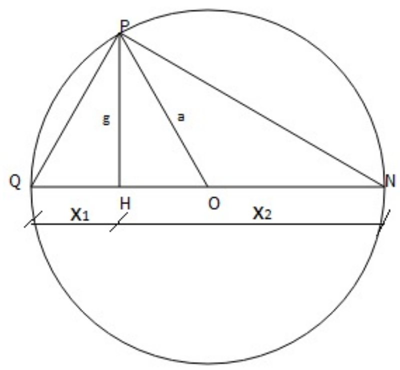


Figura 2.3: Triângulo PQN inscrito na circunferência

$$
\begin{aligned}
a^2 = (a - x_1)^2 + g^2 \quad &\Rightarrow \quad g^2 = a^2 - a^2 + 2ax_1 - x_1^2 \\
&\Rightarrow \quad g^2 = 2\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) x_1 - x_1^2 \\
&\Rightarrow \quad g^2 = x_1 x_2 \\
&\Rightarrow \quad g = \sqrt{x_1 x_2}
\end{aligned}
$$

Assim temos, $a = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ e $g = \sqrt{x_1 x_2}$, de $a \geqslant g \Rightarrow \dfrac{x_1 + x_2}{2} \geqslant \sqrt{x_1 x_2}$. Obviamente $a = g \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Concluímos assim que a média aritmética é maior ou igual à geométrica.

2.2.2 Prova algébrica

A demonstração apresentada nesta seção e de outras provas da desigualdade entre médias aritméticas e geométrica podem ser encontrada em [3].

Para esta demonstração utilizamos o fato de que se x_1 e x_2 são as raízes reais da equação $x^2 - sx + p = 0$ então $s = x_1 + x_2$ e $p = x_1 x_2$. Geometricamente, chegamos ao resultado ao determinar os lados de um retângulo conhecendo o semiperímetro s e a área p.[3]

Se $x_1 + x_2 = 2k$, então x_1 e x_2 são raízes de uma equação do segundo grau da forma $\lambda^2 - (x_1 + x_2)\lambda + (x_1 x_2) = 0$. Sendo assim $\lambda^2 - 2k\lambda + (x_1 x_2) = 0$ e por sua vez, como tais raízes desta última equação são reais, logo seu discriminante é maior ou igual a zero, ou seja, $4k^2 - (x_1 x_2) \geqslant 0$, que implica em $\dfrac{x_1 + x_2}{2} \geqslant \sqrt{x_1 x_2}$. Isto é, $A \geqslant G$.

A desigualdade $A \geqslant G$ é equivalente à afirmação seguinte: "Entre todos os números positivos x, y que tem soma constante $(x + y = 2c)$, o produto xy é máximo quando $x = y = c$."[4]

Desta forma, apesar de pouco utilizada ao menos a nível de ensino médio, a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica representa um importante método de otimização.

2.3 Derivadas

Nesta seção apresentaremos algumas definições e proposições do Cálculo Diferencial, encontrados em [11].

2.3.1 Teoria e Conceitos Elementares

Definição 3 (Quociente de Newton)**.** *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função real,* $p \in (a, b)$ *e* $h \in \mathbb{R}$ *tal que* $p + h \in [a, b]$*. O quociente de Newton de* f *em* p*, relativo a* h *é definido por*

$$\frac{f(p+h) - f(p)}{h}. \tag{2.4}$$

Alguns autores apresentam o quociente de Newton acima na forma

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}. \tag{2.5}$$

O quociente acima, mede uma taxa de variação (média) relativa da quantidade $y = f(x)$ em relação a quantidade x. Em outras palavras, tal quociente mede a taxa média com que y varia quando x variar uma quantidade h.

Exemplo 5. *Um exemplo bem simples é considerar* $s = s(t)$ *uma função deslocamento em função do tempo* t*. No instante* t_0 *estamos na posição* $s(t_0) = s_0$ *e depois de* h *segundos estamos na posição* $s(t_0 + h)$*. Ao calcularmos o quociente de Newton destes valores, teremos:*

$$\frac{s(t_0 + h) - s_0}{h} = \frac{\textit{Deslocamento durante o tempo h segundos}}{h \, \textit{segundos}} \tag{2.6}$$

que é a taxa conhecida por todos nós, chamada velocidade média.

Uma taxa mais atraente e útil seria calcular a velocidade instantânea de um determinado objeto, já que nos deparamos com este caso quando estamos dirigindo e nos aproximamos de um sensor de velocidade. Pois nessa situação queremos saber qual a nossa velocidade naquele momento e não uma média depois de um determinado tempo decorrido.

Para isso aplicamos o conceito intuitivo de limite. Imagine que aferíssemos dados relativos ao quociente (2.6) para uma quantidade grande de números h cada vez menores. Por exemplo:

$$1s, \frac{1}{10}s, \frac{1}{100}s, ...$$

e notasse que a sequência de números gerada "tem uma tendência a ir"para um determinado número L. Baseado na motivação acima, segue a definição abaixo.

Observação 3. *Durante toda esta seção, salvo menção contrária, ao nos referirmos a uma função* f *sem demais detalhes estaremos nos referindo a* f *da definição 3.*

Definição 4. *Nas hipóteses da definição 3, a derivada de* f *no ponto é definida como sendo*

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h},$$

quando tal limite existe.

Em outras palavras, a derivada de f no ponto p é o limite do quociente de Newton quando a variação h da variável x no domínio tende a zero.

Quando $f'(p)$ existe dizemos que f é derivável em p. Quando é derivável em todos os pontos do seu domínio, dizemos apenas que f é derivável.

Observação 4. *Note que (2.6) é equivalente ao seguinte limite:*

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Observação 5. *As seguintes notações para derivadas, também são amplamente utilizadas na literatura:*

$$f'(x), \frac{df(p)}{dx}, Df(p).$$

Proposição 1. *Seja n um número natural e considere a função* $f(x) = x^n$*. Então vale que* $f'(x) = nx^{n-1}$.

Demonstração. Utilizando a expressão do Binômio de Newton, temos que:

$$(x+h)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} h^i$$

e portanto

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} h^{i-1}, \tag{2.7}$$

daí calculando o limite quando h tende a zero pelo lado direito da igualdade (2.7), vai restar apenas o termo independente de h, ou seja,

$$\binom{n}{1} x^{n-1} = n x^{n-1},$$

assim sendo, vale que

$$(x^n)' = n x^{n-1}.$$

■

Observação 6. *O resultado acima é válido de forma mais geral.*

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, 0 \neq \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Proposição 2. *Para todo* $x \in \mathbb{R}$ *vale que*

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos(x). \tag{2.9}$$

Demonstração. Utilizando as fórmulas trigonométricas para transformações de soma em produto, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h} &= \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{h} \\ &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}. \end{aligned}$$

Daí tomando o limite quando $h \to 0$, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \to 0} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \\ &= \cos(x). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Note que na igualdade (2.10), utilizamos que a função $\cos(x)$ é contínua e ainda que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1.$$

■

Observação 7. *O processo de derivação pode ser aplicado mais de uma vez para uma mesma função, ou seja, podemos calcular a "derivada da derivada", entendendo que* $f'' = (f')'$, *isto é,*

$$f'' = \lim_{h \to 0} \frac{f'(p+h) - f'(p)}{h},$$

caso o limite exista; $f''(p)$ *é denominada de derivada segunda de* f *em* p.

Dentro do contexto de outras ciências a derivada assume um nome específico de acordo com o ente que esteja sendo estudado.

Exemplo 6. *Se* f *for o volume variando em função do tempo* t, *então* $f'(t)$ *é chamada de vazão;*

Exemplo 7. *Se* f *for um custo variando em relação a uma quantidade* x *de material, então* $f'(x)$ *é chamada de custo marginal;*

Exemplo 8. *Se* f *for uma quantidade de carga variando em relação ao tempo* t, *então* $f'(t)$ *é chamada corrente elétrica;*

Existem diversas interpretações da derivada. Mas vejamos uma muito importante: A derivada $f'(p)$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ no ponto $(p, f(p))$. Veja a figura (2.4) abaixo.

Note na figura abaixo que a quantidade

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f(p+h) - f(p)}{h},$$

é a inclinação da reta secante ao gráfico de f nos pontos $(p, f(p))$ e $(p+h, f(p+h))$. Observe que ao fazermos $h \to 0$, a reta secante tende a se tornar tangente pois $(p+h, f(p+h)) \to (p, f(p))$ e portanto

$$\operatorname{tg} \theta = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}. \tag{2.11}$$

Vejamos algumas propriedades operatórias de derivadas.

Proposição 3. *Sejam* f *e* g *funções deriváveis em* p *e* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Então vale:*

1. $(f \pm g)'(p) = f'(p) \pm g'(p)$;

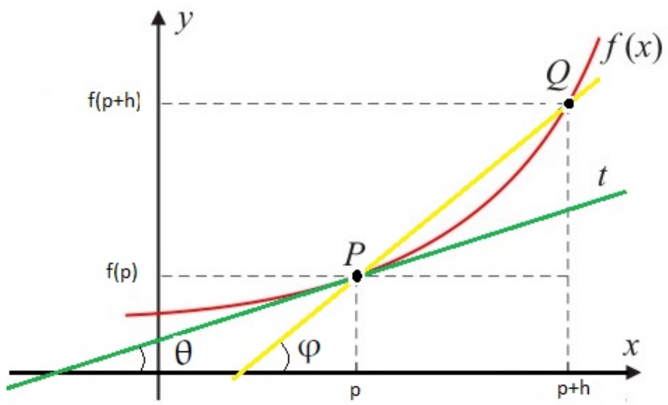


Figura 2.4: Interpretação geométrica da derivada

2. $(\lambda f)'(p) = \lambda f'(p)$;

3. $(f \cdot g)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$;

4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(p) = \dfrac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{[g(p)]^2}$, *desde que* $g(p) \neq 0$.

A demonstração do teorema a seguir pode ser encontarda em [11].

Teorema 1 (Aproximação Linear)**.** *A função* f *é derivável em* p *se, e somente se, existem* $L \in \mathbb{R}$ *e uma função* $r(h)$ *talque*

$$f(p+h) = f(p) + L \cdot h + r(h), \text{ onde } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0. \tag{2.12}$$

Teorema 2 (Regra da Cadeia)**.** *Sejam* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *e* $g : [c, d] \to [a, b]$*. Se* g *é derivável em* p *e* f *é derivável em* $g(p)$ *então* $f \circ g$ *é derivável e vale que*

$$(f \circ g)'(p) = f'(g(p)) \cdot g'(p). \tag{2.13}$$

Demonstração. Como g é derivável em p, para h suficientemente pequeno, temos

$$g(p+h) = g(p) + g'(p)h + r(h), \text{ onde } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

De forma análoga, devido existir $f'(g(p))$ temos que

$$\begin{aligned} f(g(p+h)) &= f(g(p)) + \underbrace{g'(p)h + r(h)}_{k(h)} \\ &= f(g(p)) + f'(g(p)) \cdot k(h) + p(k(h)) \end{aligned}$$

onde $p(k(h))$ satisfaz que

$$\lim_{k(h) \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Note, entretanto, que $k(h) \to 0$ quando $h \to 0$. Daí temos que

$$\begin{aligned} f(g(p+h)) &= f(g(p)) + f'(g(p)) \cdot g'(p)h + f'(g(p))r(h) + p(k(h)) \\ &= f(g(p)) + f'(g(p)) \cdot g'(p)h + R(h), \end{aligned}$$

onde $R(h) = f'(g(p))r(h) + p(k(h))$. Se formos capazes de mostrar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

então, utilizando o Teorema(1), provaremos que a função composta $f \circ g$ é derivável em p e ainda que vale a igualdade (2.13). Assim sendo, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{f'(g(p)r(h) + p(k(h)))}{h} \\ &= f'(g(p)) \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{p(k(h))}{h} \\ &= f'(g(p)) \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{p(k(h))}{k(h)} \cdot \frac{k(h)}{h} \\ &= f'(g(p)) \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} + \lim_{k(h) \to 0} \frac{p(k(h))}{k(h)} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{k(h)}{h} \\ &= f'(g(p)) \cdot 0 + 0 \cdot g'(p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim fica provado o Teorema. ■

2.3.2 Pontos Críticos e Valores Extremos

Faremos aqui uma aplicação da derivada na busca de encontrar pontos de máximo(mínimo) de funções suaves através do conceito de ponto crítico.

Definição 5. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *e* $p \in (a, b)$. *O ponto* p *é dito ponto crítico para* f *se* $f'(p) = 0$ *ou* $f'(x)$ *não existir.*

Definição 6. *Uma função* $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *possui um máximo (respectivamente mínimo) no ponto* $p \in X$ *se* $f(p) \geqslant f(x)$, $\forall x \in X$ *(respectivamente* $f(p) \leqslant f(x)$, $\forall x \in X$*).*

Vejamos agora um resultado muito importante.

Proposição 4. *Considere a função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua em* $[a, b]$ *e derivável em* (a, b). *Se* $p \in (a, b)$ *é um ponto de máximo (mínimo) para* f *então* p *é ponto crítico.*

Demonstração. Seja p um ponto de máximo para f com $h \in \mathbb{R}$ tal que $p + h \in (a, b)$. Daí teremos que $f(p + h) - f(p) \leqslant 0$ e portanto

$$\frac{f(p + h) - f(p)}{h} \leqslant 0, \text{ se } h > 0$$

e

$$\frac{f(p + h)}{h} \geqslant 0 \text{ se } h < 0.$$

Daí teremos, para os limites laterais do quociente de Newton, que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(p + h) - f(p)}{h} \leqslant 0 \text{ e } \lim_{h \to 0^-} \frac{f(p + h) - f(p)}{h} \geqslant 0,$$

daí como os limites laterais existem e coincidem, segue que $f'(p) = 0$. ■

Observação 8. *Nem todo ponto crítico é um ponto de máximo (mínimo). E nem todo ponto de máximo (mínimo) é crítico. Para mais detalhes, veja os exmplos abaixo.*

Exemplo 9. *A função* $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ *possui* $x = 0$ *como ponto crítico e o mesmo não é de máximo nem de mínimo. Tal ponto, é tal que a concavidade do gráfico muda e o mesmo é chamado de ponto de inflexão.*

Exemplo 10. *A função* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sen}(x)$ *tem máximoem* $x = 1$ *no entanto tal ponto não é crítico. Isso acontece devido o ponto de máximo ser uma extremidade do intervalo. O mesmo ocorre com o mínimo em* $x = 0$.

Exemplo 11. *A função* $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$ *possui mínimo em* $x = 0$*, e ainda assim tal ponto não é crítico, pois não existe* $f'(0)$.

Definição 7. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Um ponto* p *é de máximo local para* f *se para alguma vizinhança*[1] $V_p \subset [a, b]$ *vale que* $f(p) \geqslant f(x), \forall x \in V_p$. *A definição de mínimo local é análoga. Veja figura* 2.5.

Proposição 5. *Considere a função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua em* $[a, b]$ *e derivável em* (a, b). *Se* $p \in (a, b)$ *é um ponto de máximo (mínimo) local para f, então p é crítico.*

A demonstração do Teorema a seguir, pode ser encontrada em [11].

[1] As vizinhaças V_p podem ser, por exemplo, da forma $(p - \sigma, p + \sigma)$, ou seja, o conjunto dos números da forma $p + h$, onde $|h| < \sigma$.

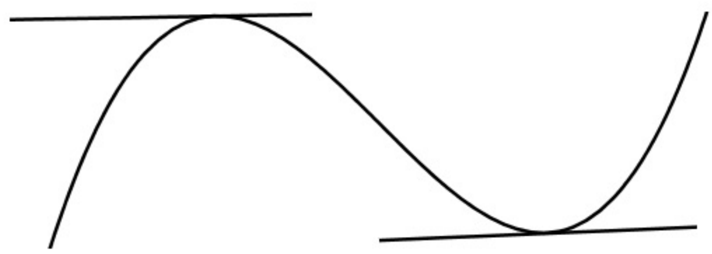


Figura 2.5: Pontos de máximos e mínimos locais

Teorema 3 (Aproximação Quadrática). *A função é duas vezes derivável em* p *se, e somente se, existem* $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ *e uma função* $p(h)$ *tal que*

$$f(p+h) = f(p) + L_1 \cdot h + L_2 \cdot h^2 + p(h) \textit{ onde } \lim_{h \to 0} \frac{p(h)}{h^2} = 0. \tag{2.14}$$

Teorema 4 (Máximo Local). *Se p é crítico para* f *e* $f''(p) < 0$ *então* p *é um ponto de máximo local para* f.

Demonstração. Como f é duas vezes derivável e p é crítico, para f vale o Teorema 3 que

$$f(p+h) = f(p) + \frac{f''(p)}{2} \cdot h^2 + p(h) \,\text{onde}\, \lim_{h \to 0} \frac{p(h)}{h^2} = 0. \tag{2.15}$$

Assim sendo, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ talque,

$$\left| \frac{p(h)}{h^2} \right| < \varepsilon, \forall\, h \,\text{tal que}\, |h| < 0.$$

Assim sendo, tomando $\varepsilon = -f''(p)/4 > 0$, temos que, para $|h| < \delta$

$$\frac{p(h)}{h^2} \leqslant \left| \frac{p(h)}{h^2} \right| < -\frac{f''(p)}{4} \Rightarrow p(h) < -\frac{f''(p)}{4} h^2. \tag{2.16}$$

Daí utilizando as expressões (2.15) e (2.16), temos que

$$f(p+h) < f(p) + \frac{f''(p)}{2} \cdot h^2 - \frac{f''(p)}{4} \cdot h^2 = f(p) + \frac{f''(p)}{4} \cdot h^2 < f(p), \,\forall\, |h| < \delta. \tag{2.17}$$

Provando assim que p é um máximo local.

Teorema 5 (Mínimo Local). *Se* p *é crítico para* f *e* $f''(p) > 0$ *então* p *é um ponto de mínimo local para* f.

Exemplo 12. *Um triângulo isósceles de base* α *está inscrito numa circunferência de raio* R*. Calcule* α *de modo que seja máxima a área do triângulo.*

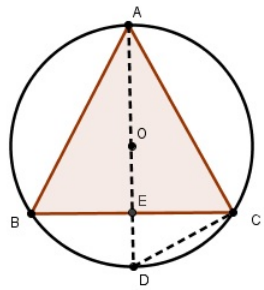


Figura 2.6: Triângulo isósceles inscrito

***Solução* 1.** *Seja* ABC *o triângulo isósceles de base* $\alpha = BC$ *e altura* $h = AE$. *Sua área é dada pela fórmula*

$$S = \frac{1}{2}\alpha h.$$

No triângulo retângulo BCD *(pois está inscrito em uma semicircunferência), a altura* CE *é a média geométrica entre os segmentos que determina a hipotenusa* AD. *Então:*

$$\begin{aligned}(CE)^2 = (ED)(AE) \quad &\Rightarrow \quad \frac{\alpha^2}{4} = h\cdot(2R-h)\\ &\Rightarrow \quad \alpha = 2\sqrt{2Rh-h^2}\end{aligned}$$

Temos então

$$S = \sqrt{2Rh^3 - h^4}.$$

Procuremos o valor de S *para* $0 < h < 2R$*:*

$$S' = \frac{3Rh^2 - 2h^3}{\sqrt{2Rh^3 - h^4}}.$$

Logo

$$S' = 0 \Leftrightarrow 3Rh^2 - 2h^3 = 0 \Leftrightarrow h = \frac{3R}{2}.$$

Como $S = 0$ *para* $h = 0$ *ou* $h = 2R$ *e*

$$h = \frac{3R}{2} \Rightarrow S = \sqrt{2R\frac{27R^3}{8} - \frac{81R^4}{16}} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$$

Então $h = \dfrac{3R}{2}$ *é o ponto de máximo para* S *e, neste caso,*

$$\alpha = R\sqrt{3}.$$

■

Capítulo 3

Técnicas para Resolução de Problemas

A metodologia de resolução de problemas como instrumento facilitador e dinamizador do processo de ensino aprendizagem da matemática e meio para a abordagem e desenvolvimento de conteúdos matemáticos deve se dar de forma estratégica e organizada, existem algumas vertentes e entendimentos acerca da temática assim neste trabalho tomamos como base um dos mais significativos trabalhos a cerca do tema, a obra A arte de Resolver Problemas de George Polya.

Polya destaca um esquema de como se resolver um problema segmentado nas seguintes etapas: Compreensão do Problema, Estabelecimento de um Plano, Execução do Plano e Retrospecto.[1]

Vamos destacar sucintamemte os pontos mais relevantes de cada uma dessas etapas:

3.1 Compreensão do problema

Nesta etapa é importante que o professor interaja com os alunos fazendo questionamentos que os leve a refletir sobre o problema após uma leitura atenciosa do enunciado do mesmo. Questionamentos como qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? Se a contento são respondidos pelos alunos, cumprem a primeira etapa de compreensão do problema.

3.2 Estabelecimento de um plano

Se o problema foi devidamente compreendido, ou seja, se temos consciência do que estamos procurando, baseado nas informações já processadas, partimos para a elaboração de um plano de ataque ao problema. Talvez seja essa a etapa mais difícil e a perfeita execução da mesma passa por termos conhecimentos prévios sobre o tema central do problema, que pode se dar através de um problema correlato de resolução conhecida e por lançar mão dos conhecimentos adquiridos ao longo da vida, tais como teoremas, propriedades, definições, fórmulas, entre outros.

3.3 Execução do plano

Uma vez compreendido o problema e elaborado um plano para a resolução, a execução do plano é a etapa mais fácil, exigindo para o seu pleno desenvolvimento paciência e disciplina. Daí é por em prática o plano e escrever a resolução do problema.

3.4 Retrospecto

Por fim depois de resolvido o problema é de suma importância rever o que foi feito, certificando-se de que as etapas foram cumpridas na íntegra, e de que o resultado correto foi obtido. A etapa do retrospecto permite que o aluno consolide os conhecimentos aplicados e aprimore a sua capacidade de resolver problemas e ainda possibilita, em muitos casos, perceber outros caminhos ou formas de resolver o mesmo problema.

Cada uma destas etapas palta-se em questionamentos a serem feitos acerca do problema como podemos acompanhar na lista abaixo.

1. **COMPREENSÃO DO PROBLEMA:** Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória? Trace uma figura. Adote uma notação adequada. Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?

2. **ESTABELECIMENTO DE UM PLANO:** Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente? Conhece um problema

correlato? Conhece um problema que lhe poderia ser útil? Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou semelhante. Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização? É possível reformular o problema? é possível reformular ainda de outra maneira? Volte às definições. Se não puder resolver o problema proposto, procure resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais específico? Um problema mais genérico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma aparte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa de útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si? Utilizou todos os dados? Utilizou toda condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implícitas no problema?

3. **EXECUÇÃO DO PLANO** Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar se ele está correto?

4. **RETROSPECTO** É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema.

Certamente alguns alunos, em alguns problemas, poderão chegar à solução dos mesmos sem necessariamente seguir tais etapas, porém a utilização fiel do esquema proposto por Polya evitaria, em muitos casos, a frustração de se efetuar cálculos sem ter compreendido de fato o problema, por exemplo, e obviamente desperdiçar tempo. Alguns cuidados devem ser observados para se trabalhar com esta metodologia, por exemplo, escolher bons problemas é de fundamental importância. O problema deve atender os seguintes requisitos:

- o ter enunciado acessível e de fácil compreensão,

- o exercitar o pensar matematicamente do aluno,
- o exigir criatividade na resolução,
- o deve ser útil para a introdução ou consolidação de ideias e/ou conceitos matemáticos
- o não deve ser muito fácil ou muito difícil e sim natural e interessante.

A postura do professor é outro fator determinante para o sucesso da metodologia. O professor deverá manter uma postura interativa em sala, estimular os alunos através de questionamentos que os auxilie a construir a solução do problema e não fornecer a resposta de imediato.

> O professor deve auxiliar, nem demais, nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho.[1]

Desta forma, nos próximos capítulos nos ocuparemos de abordar alguns conteúdos que se relacionam com otimização em nível de Ensino Médio, utilizando a metodologia de resolução de problemas segundo Polya, uma vez que entendemos que a resolução de problemas usando métodos de otimização no ensino médio, além de estimular o estudo e aprofundamento dos conhecimentos de matemática, pode contribuir significativamente para a formação e desenvolvimento do educando.

Capítulo 4

Resolução sistêmica de problemas do Ensino Médio utilizando métodos de otimização

A Otimização é uma área da Matemática que apesar de ter um histórico relativamente recente vem tendo um significativo crescimento no que se refere à sua exploração.

Basicamente, a Otimização trata da caracterização e procura de minimizantes ou maximizantes de uma certa função, num certo conjunto, geralmente definidos por equações e inequações algébricas. [11]

As aplicações da Otimização são comuns em vários setores, tais como: indústria, economia, saúde, etc. Segundo Perin, "pesquisa operacional é um conjunto de técnicas matemáticas utilizadas para resolver problemas"[9] e a Otimização ou Programação Linear é elemento importantíssimo da pesquisa operacional, de forma que historicamente os estudos relativos à otimização confunde-se com a consolidação da pesquisa operacional durante a segunda guerra mundial, quando grupos de assessores das forças militares foram formados para resolver problemas estratégicos e táticos que não eram, até então, estudados pelos militares.

Mesmo com o fim da guerra os estudos prosseguiram, expandindo-se a aplicações não militares e foi implementado pelo Método Simplex[10] para resolver problemas de Otimização foi desenvolvido por George Dantzig em 1947, na época Consultor em Matemática na Força Aérea Americana, porém a explanação deste método de resolução de problemas ultrapassa a abrangência deste trabalho, que trata de Otimização relacionada aos conteúdos do Ensino Médio. Uma leitura mais aprofundada pode ser obtida [7], [9] e [10].

Assim visto, os estudos em Otimização surgem a partir da necessidade de se sanar um problema da época e trata, basicamente da minimização ou maximização de funções, o que no contexto do Ensino Médio é muito comum de ser abordado, sobretudo em estudos a cerca de funções quadrática, não se limitando a relação da Otimização com o Ensino Médio apenas a esse conteúdo como veremos.

Por outro lado, pouco vemos, ou na realidade não vemos em textos do Ensino Médio o tema Otimização ser citado ou abordado, e este é um dos pontos que o presente trabalho se propõe a fazer. Abordar no Ensino Médio o tema Otimização, através da metodologia da resolução estratégica ou sistêmica de problemas, como fator motivador para os alunos e um excelente instrumento para dinamizar as aulas, abordar conteúdos matemáticos e facilitar o processo de ensino aprendizagem.

Nas páginas seguintes enunciaremos a resolveremos alguns problemas práticos do contexto do Ensino Médio utilizando métodos de Otimização, destacando os conteúdos matemáticos utilizados na resolução de tais problemas, segundo as etapas de resolução de problemas proposta por Polya.

4.1 Problema 1

Considere o problema extraído de [3].

Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu de cada passageiro $R\$800,00 mais R\$10,00$ por cada lugar vago. Para que número de passageiros a rentabilidade da empresa será máxima?

A princípio, sem uma investigação mais detalhada do problema, poderíamos ter a falsa impressão de que a rentabilidade da empresa seria máxima quando o avião estivesse com todos os seus lugares ocupados. A resolução do problema baseada em uma estratégia pré-definida e bem executada extingue, ou pelo menos minimiza, a possibilidade de erros derivados de precipitações ou do mau uso das propriedades matemáticas.

Vejamos a resolução do problema proposto segundo as etapas de resolução de problemas adotadas nesse trabalho utilizando um método de otimização.

Compreensão do problema:

Incógnita: quantidade de lugares vagos.

Dados:

- quantidade de lugares no avião: 100 lugares.
- valor da passagem: R\$800,00, mais R\$10,00 por cada lugar vago.
- notação: x representará a incógnita.

Condicionante: $(100 - x)$ é a quantidade de lugares ocupados, $800 + 10x$ é o valor pago, por cada passageiro presente.

Estabelecimento de um plano: Temos a quantidade de lugares ocupados $(100 - x)$ e o valor a ser pago por cada um desses lugares $(800 + 10x)$. Para determinar o valor a ser pago por todos os lugares ocupados basta efetuar $(100 - x) \cdot (800 + 10x)$, assim:

$$(100 - x) \cdot (800 + 10x) = -10x^2 + 200x + 80000 \tag{4.1}$$

A expressão (4.1) representa o valor a ser pago pela excursão quando houverem x lugares vagos. Nossos conhecimentos em matemática adquiridos, mais precisamente no 1º ano do ensino médio, nos permite concluir que (4.1) representa uma função quadrática. Logo temos:

$$f(x) = -10x^2 + 200x + 80000 \tag{4.2}$$

onde $f(x)$ é o valor a ser pago pela excursão em função da quantidade x de lugares vagos. Portanto nosso plano é encontrar o ponto de máximo dessa função, o que podemos fazer utilizando as propriedades das funções quadráticas assim como visto no Capítulo 2.

Execução do plano

Temos a função $f(x) = -10x^2 + 200x + 80000$, como $a < 0$, o ponto de máximo dessa função ocorre quando $x = -\dfrac{b}{2a}$, o que implica que $x = -\dfrac{200}{2 \cdot (-10)} = 10$.

Assim a rentabilidade da empresa será máxima quando houverem 10 lugares vagos no avião, portanto 90 lugares ocupados, e não quando a lotação do avião for máxima.

Retrospecto

Analisando a resolução do problema percebemos inicialmente que se trata de um problema de maximização de uma função, logo um problema de otimização (como visto no Capitulo 2) no contexto do ensino médio, verificamos ainda que a suspeita inicial de que a receita da empresa seria máxima quando o avião estivesse totalmente ocupado era falsa.

Lançando mão de conhecimentos matemáticos um pouco mais aprofundados, porém também pertencentes ao currículo do ensino médio, podemos resolver o problema utilizando derivada, mais precisamente calculando os pontos críticos da função.[11]

Façamos a resolução do Problema 1 por esta outra abordagem.

Utilizando as etapas da resolução anterior temos a nossa função definida por:

$$f(x) = -10x^2 + 200x + 80000,$$

contínua e derivável num intervalo fechado. Assim $f'(x) = 0 \Rightarrow$ x é ponto de máximo, pois $a < 0$, logo de

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow -20x + 200 = 0, \text{assim} \\ &\Rightarrow x = 10. \end{aligned}$$

Sendo x=10 a quantidade de lugares vagos para que a receita da empresa seja máxima, logo temos 90 lugares ocupados.

4.2 Problema 2

Considere o problema a seguir extraído de [12].

Um fabricante de caixas de papelão pretende fazer caixas abertas a partir de folhas de cartão quadrado de $576m^2$, cortando quadrados iguais nas quatro pontas e dobrando os lados. Calcule a medida do lado do quadrado que deve ser cortado para obter uma caixa cujo volume seja o maior possível.

Compreensão do problema

Incógnita: lado do quadrado recortado *Dados*:

- área da folha quadrada a ser recortada $576m^2$
- lado da folha de cartão quadrada igual $\sqrt{576} = 24m$
- dimensões da caixa $24 - 2x, 24 - 2x \,\text{e}\, x$
- notação: x é a incógnita

Condicionante: O volume V da caixa é máximo, onde V em função do lado x do quadrado cortado é dado pela função $V(x) = (24 - 2x)(24 - 2x)x$

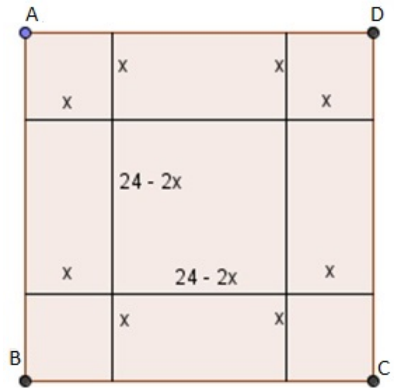


Figura 4.1: Folha de cartão

Elaboração de um plano

Inicialmente tracemos uma figura para auxiliar na resolução do problema.

Como temos uma função que exprime o volume da caixa, e essa função é contínua e derivável num intervalo fechado, podemos utilizar a definição de ponto crítico para encontrar o ponto de máximo da função $V(x) = (24-2x)(24-2x)x$, esse é o nosso plano.

Execução do plano

Maximizar $V(x) = (24-2x)(24-2x)x$, temos

$$\begin{aligned} V(x) &= (24-2x)(24-2x)x && (4.3)\\ &= (576-96x+4x^2)x && (4.4)\\ &= 4x^3-96x^2+576x && (4.5) \end{aligned}$$

Calculando $V'(x)$, temos que $V'(x) = 12x^2 - 192x + 576$. Ao mesmo tempo $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 12 \,\text{ou}\, x = 4$

Para $x = 12$ teríamos duas das dimensões da caixa iguais a zero, logo desconsideramos esse valor. Assim o valor de x para o qual o volume da caixa será máximo é $x = 4m$.

Retrospecto

Percebemos que para a solução deste problema foram combinados os métodos de otimização por derivada e o cálculo das raízes da função quadrática, devido a função a ser maximizada ser uma função polinomial do 3º grau. Conseguimos assim determinar para que valor de x o volume da caixa será máximo e assim concluir que o volume máximo será:

$$V(4) = 4(4)^3 - 96(4)^2 + 576(4) = 256 - 1536 + 2304 = 1024m^3.$$

4.3 Problema 3

Considere o problema extraído e reformulado de [3].

Com 80 metros de cerca um criador deseja construir um galinheiro retangular para confinar suas galinhas.Qual a área máxima desse galinheiro? E quais as medidas dos lados para que sua área seja máxima?

Percebemos que, respeitando a restrição de que o perímetro deve ser de 80m, temos várias possibilidades de construção deste galinheiro, por exemplo com as dimensões 10m x 30m, 5m x 35m, entre outras possibilidades,, porém queremos encontrar as dimensões que tornem a área do galinheiro máxima. Desta forma vamos resolver o problema segundo as etapas de resolução de problemas proposta por Polya.

Compreensão do problema:

Incógnita: medidas dos lados do galinheiro (consider x o comprimento e y a largura).

Dados: perímetro do galinheiro igual a 80 metros.

Condicionante: $2x + 2y = 80 \Rightarrow x + y = 40$.

Estabelecimento de um plano: Queremos maximiza a função $A(x, y) = x.y$ e temos a condicionante $x + y = 40$. Atentando para o fato de que a soma $x + y$ é fixa e queremos maximizar o produto xy , como visto no Capítulo 3 (Noções preliminares) podemos fazer uso das propriedades da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, portanto é esse o nosso plano para problema.

Execução do plano:

Minimizar $A(x, y) = xy$, sujeito a $x + y = 40$. Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica temos:

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy} \Rightarrow x + y \geqslant \sqrt{2A(x, y)} \Rightarrow 40 \geqslant \sqrt{2A(x, y)} \Rightarrow 400 \geqslant A(x, y)$$

Desta forma a área será máxima para $A(x, y) = 400m^2$. Assim:

$$x + y = 40 \Rightarrow y = 40 - x. \tag{4.6}$$

Também temos:

$$A(x, y) = xy. \tag{4.7}$$

Ao substituirmos (4.6) em (4.7), resulta em uma nova função que a denominaremos de $B(x)$, onde $B(x) = -x^2+40x$. Portanto maximizar $A(x, y)$ é equivalente a maximizar $B(x)$. Dos conhecimetos já adquiridos (propriedades de função quadrática), $B(x)$ é máxima para $x = \dfrac{-40}{-2}$, o que nos dá $x = 20$. Consequentemente, por (4.6), $y = 20$.

Retrospectiva

A resolução do problema nos permite confirmar o que nos diz a desigualdade entres as médias aritmática e geométrica: "entre todos os números positivos x, y com soma constante $x + y = 2c$ o produto xy é máximo quando $x = y = c$", desta forma, com o pleno domínio da teoria sobre tal desigualdade não seria necessário efetuar os cálculos para se chegar ao resultado neste problema, bastava perceber que a área máxima (produto máximo) ocorreria para x = y, portanto para x = y = 20. Podemos a partir daí concluir ainda o seguinte, que entre todos os retângulos com mesmo perímetro, o de maior área é o quadrado.

4.4 Problema 4

Problema extraído de *http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2010/06/minimos-locais-atraves-da-desigualdade.html*

Determine o paralelepípedo retângulo de volume constante, cuja área superficial seja a menor possível.

Compreensão do problema

Incógnita: dimensões do paralelepípedo retângulo;

Notação:

- x, y e z são as dimensões do paralelepípedo retângulo;
- $V = xyz$ é o volume;
- $A(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$ é a área total do paralelepípedo retângulo;

Condicionante: o volume V é constante.

Elaboração de um plano

Trata-se de um problema de geometria espacial onde queremos minimizar $A(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$ dado que $V = xyz$ é constante. Devemos procurar uma relação que envolva $A(x, y, z)$ e V. Percebemos que estamos diante de um problema correlato ao problema 2, de forma que podemos tentar utilizar o mesmo método de resolução anteriormente aplicado. Assim nosso plano é utilizar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, desta vez para uma soma com três parcelas.

Execução do plano

Tracemos uma figura para auxiliar na resolução do problema

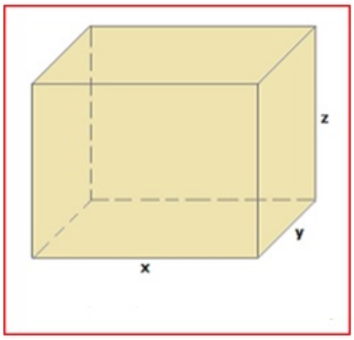


Figura 4.2: Paralelepípedo

Considere o paralelepípedo retângulo de dimensões x, y e z como sugere a figura 3. Temos que:

$A = 2xy + 2xz + 2yz$ e $V = xyz$

Assim, pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$\begin{aligned} \frac{2xy + 2xz + 2yz}{3} &\geqslant \sqrt[3]{2xy \cdot 2xz \cdot 2yz} \Rightarrow \\ 2xy + 2xz + 2yz &\geqslant 3 \cdot 2\sqrt[3]{xyz \cdot xyz} \Rightarrow \\ A &\geqslant 6\sqrt[3]{V^2}. \end{aligned}$$

Como V é constante, a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica nos diz que o menor valor que A pode assumir é $A = 6\sqrt[3]{V^2}$, assim:

$A = 2(xy + xz + yz) = 6\sqrt[3]{V^2}$ logo $xy = xz = yz \Rightarrow x = y = z$, assim fazendo $z = x$ e $y = x$, temos $x = \sqrt[3]{V}$.

Assim temos que o paralelepípedo retângulo procurado é um cubo de aresta sqrt[3]V.

Retrospecto

Percebemos a partir da resolução do problema que de todos os paralelepípedos retângulos com volume constante, o de maior área é o cubo, e ainda que a aresta desse cubo vale ?V. Assim o resultado se faz um importante instrumento para resolver problemas desta natureza como por exemplo: "Dado um paralelepípedo de área máxima e volume constante igual a V. determine as medidas dos lados desse paralelepípedo".

4.5 Problema 5

Um fabricante de ração animal dispõe de 60 sacos de milho e 32 sacos de trigo para produzir dois tipos de rações A e B. A ração A é composta de 3 sacos de milho, 4 sacos de trigo e gera um lucro de R\$20,00. A ração B é composta de 6 sacos de milho, 2 sacos de trigo e gera um lucro de R\$24 reais. Quanto de cada ração deve ser produzido para que o lucro do fabricante seja o maior possível?

Compreensão do problema

Incógnita: quantidade de cada ração a ser produzida.

Dados: Vamos representar os dados do problema dispostos em uma tabela para facilitar a compreensão do mesmo.

	Lucro (em R$)	Milho (em sacos)	Trigo (em sacos)
Ração (A)	20	3	4
Ração (B)	24	6	2
Disponível		60	32

Notação: x quantidade de ração A produzida e y quantidade de ração B produzida.

Obtemos o lucro através da função $L(x, y) = 20x + 24y$.

Condicionante: $3x + 6y \leqslant 60$ e $4x + 2y \leqslant 32$ temos ainda que alguma quantidade de ração será produzida, logo $x, y \geqslant 0$.

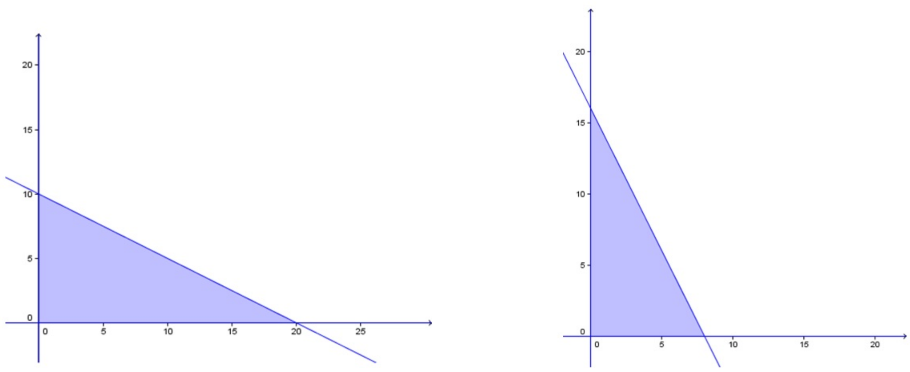
Estabelecimento de um plano: Primeiramente observamos que se trata de um problema que envolve duas variáveis, de forma que os métodos de otimização utilizados nos problemas anteriores não se apresentam como bons instrumentos para atacarmos este problema. O nosso objetivo é estabelecer para que valores de x e y a função $L(x, y) = 20x + 24y$ alcançará seu valor máximo, obviamente respeitadas as restrições $3x+6y \leqslant 60$, $4x+2y \leqslant 32$ e $x, y \geqslant 0$.

É sempre aconselhável traçar figuras, tabelas ou gráficos que possam de alguma forma ajudar na compreensão e resolução de um problema, desta forma, percebendo que todas as expressões relacionadas ao problema são lineares e que dependem de duas variáveis, x e y, podemos representar cada uma dessas expressões no plano cartesiano e observar seu comportamento. Esse será inicialmente nosso plano.

Execusão do plano

Maximizar $L(x, y) = 20x + 24y$ sujeito a $3x + 6y \leqslant 60$,$4x + 2y \leqslant 32$ e $x, y \geqslant 0$.

Representando graficamente a restrição (1): $3x + 6y \leqslant 60$, com $x, y \geqslant 0$ e restrição (2): $4x + 2y \leqslant 32$, com $x, y \geqslant 0$. Temos:



(a) Restrição 1 (b) Restrição 2

A região hachurada representa os pontos que satisfazem cada uma das restrições, logo para que todas as restrições sejam satisfeitas simultaneamente fazemos a intersessão como representado na figura a seguir:

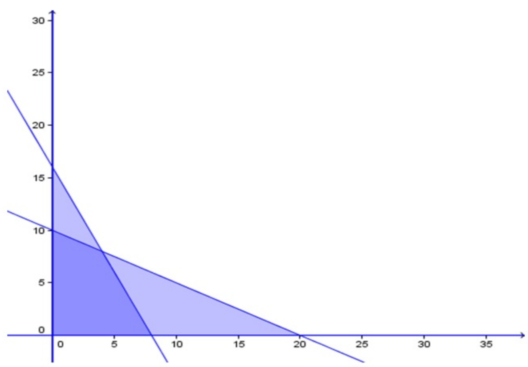


Figura 4.3: Intersecção entre (a) e (b)

A região hachurada mais escura do plano cartesiano da figura acima, chamaremos de região factível, e a mesma representa os pontos (x, y) que satisfazem as condições do problema.

Para que o valor de $L(x, y)$ seja máximo devemos ter os maiores valores possíveis para x e y que satisfaça as restrições. Traçando retas paralelas aos eixos x e y percebemos que tal ponto ocorre no vértice da região factível, como podemos acompanhar no gráfico representado na figura (4.4).

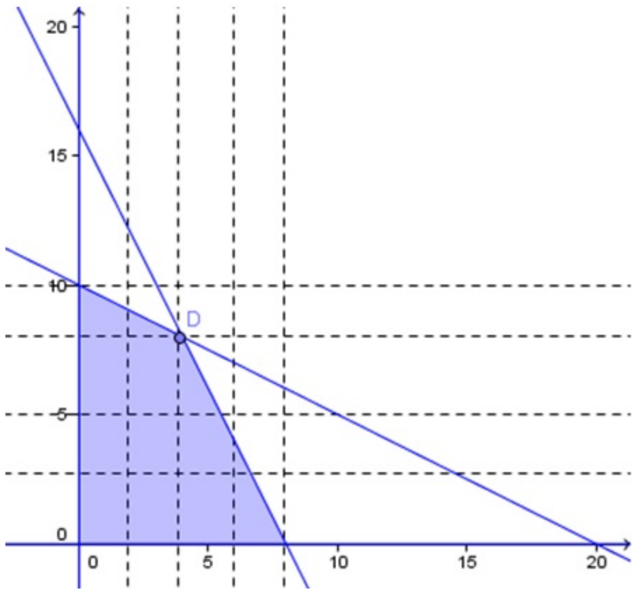


Figura 4.4: Região Factível

Portanto para encontrar tal ponto devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3x + 6y = 60 \\ 4x + 2y = 32 \end{cases}$$

Cuja solução é o par ordenado $(4, 8)$.

Assim, temos que o vértice do polígono é o ponto $(4, 8)$, logo $x = 4$ e $y = 8$ são os valores que maximizam a função $L(x, y) = 20x + 24y$, portanto as quantidades das rações A e B são respectivamente 4 e 8, e o lucro máximo será $20.4 + 24.8 = 272$ reais.

Retrospecto

Mais uma vez seria plausível pensar inicialmente que o fabricante alcançaria o maior lucro produzindo a maior quantidade possível da ração que tem uma maior margem de lucro, no caso a ração B de forma que se assim procedesse poderia produzir 10 rações do tipo B com sobra de 6 sacos de trigo, alcançando um lucro de R$ 240. Por tentativa e erro podemos perceber que se diminuíssemos uma ração B, produzindo 9 em vez de 10, poderíamos produzir 2 rações A e assim o lucro passaria a ser de R$ 256. Desta forma a perfeita organização da resolução do problema e a utilização de um método de otimização nos permitiu encontrar o valor ótimo de cada ração para maximizar o lucro do fabricante.

Conclusão

Sugerimos em nosso trabalho que a metodologia de abordagem para resolução de problemas defendida por George Polya é consistente e passível de aplicação como instrumento dinamizador e facilitador para abordagem de conteúdos de Matemática na educação básica. Sendo assim faz-se necessário uma capacitação com professores de Matemática que atuam na educação básica, para que os mesmos tenham contato direto com este "método"que consideramos ideal.

Muitas vezes os estudantes são levados a acreditar em resultados "secos", propostos por seus professores, favorecendo assim a imagem de "bicho papão"para a Matemática. Nosso trabalho mostra aos colegas de profissão que é possível sim, seguir as recomendações dos PCNs através do "método de Polya".

Referências Bibliográficas

[1] GEORGE, Polya. -*A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático; tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo.* 2ª reimpressão. Rio de Janeiro-RJ, Ed. Interciência, 1995.

[2] JORGE, mELO.-*uma proposta de ensino e aprendizagem de programação linear no ensino médio.* Porto Alegre,2012.

[3] LIMA, Elon & CARVALHO, Paulo & WAGNER, Eduardo & MORGADO, Augusto.-*A Matemática do Ensino Médio-Vol 1.* 9ªed. Rio de Janeiro,RJ. Coleção do Professor de Matemática-SBM, 2006.

[4] LIMA,Elon.-*Meu Professor de Matemática e outras histórias.* 5ª ed. Rio de Janeiro,RJ. Coleção do Professor de Matemática-SBM, 2011.

[5] OLIVEIRA, Krerley & FERNANDÉZ, Adán.-*Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções.* 1ªed. Rio de Janeiro,RJ. Coleção Olimpíadas de Matemática-SBM, 2010.

[6] DOLCE, Osvaldo & POMPEO, José.-*Fundamentos da Matemática Elementar.* 5ªed. Vol 9. São Paulo. Ed Atual, 2005.

[7] LINS, Marcos & CALÔBA, Guilherme.-*Programação Linear.* 1ªed. Rio de Janeiro,RJ. Ed Interciência, 2006.

[8] SOARES, Jão.-*Optimização Matemática.* 06/05/2005. Disponível em (http://www.mat.uc.pt/ jsoares/.)

[9] PERIN, Clovis.-*Introdução à Programação Linear.* 1ªed. Vol 2. Campinas,SP. Coleção IMECC Textos Didáticos, 2001.

[10] MACULAN, Nelson & FAMPA, Marcia.-*Otimização Linear*. 1ªed. Brasília,DF. Ed UNB, 2006.

[11] SILVA, Juscelino.-*A Derivada e Algumas Aplicações*. Teresina, PI. Ed. EDUFPI, 2012.

[12] IEZZI, Gelson & MURAKAMI, Carlos & MACHADO, Nilson.-*Fundamentos da Matemática Elementar*. 5ªed. Vol 8. São Paulo. Ed Atual, 1993.