UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
PROFMAT

NAILSON PINTO DE OLIVEIRA

USANDO QUADRADOS, RETÂNGULOS E POLINÔMIOS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS E O LIMITE DA TAXA DE VARIAÇÃO DE UMA FUNÇÃO POLINOMIAL

VITÓRIA - ES
2024

NAILSON PINTO DE OLIVEIRA

USANDO QUADRADOS, RETÂNGULOS E POLINÔMIOS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS E O LIMITE DA TAXA DE VARIAÇÃO DE UMA FUNÇÃO POLINOMIAL

Dissertação apresentada ao programa de pós-graduação da Universidade Federal do Espírito Santo – Mestrado Profissional em Matemática como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Moacir Rosado Filho

VITÓRIA - ES
2024

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

Oliveira, Nailson Pinto de, 1971-
O48u Usando quadrados, retângulos e polinômios : uma sequência didática para o estudo de funções quadráticas e o limite da taxa de variação de uma função polinomial / Nailson Pinto de Oliveira. - 2024.
129 p. : il.

Orientador: Moacir Rosado Filho.
Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Equações quadráticas. 2. Funções (Matemática). 3. Polinômios. I. Rosado Filho, Moacir. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

“Usando Quadrados, Retângulos e Polinômios: Uma Sequência Didática para o Estudo de Funções Quadráticas e do Limite da Taxa de Variação de uma Função Polinomial”

Nailson Pinto de Oliveira

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 25/03/2024 por:

____

Prof.(a) Dr.(a) Moacir Rosado Filho
Orientador(a) – UFES

____

Prof.(a) Dr.(a) Rosa Elvira Quispe Ccoyllo
Membro interno – UFES

____

Prof.(a) Dr.(a) Fidelis Zanetti de Castro
Membro Externo – IFES

Datas e horários baseados em Brasília, Brasil
Sincronizado com o NTP.br e Observatório Nacional (ON) em 25/03/2024 às 12:01:57

Folha de Assinaturas Nailson Pinto de Oliveira

Data e Hora de Criação: 18/03/2024 às 08:02:15

Documentos que originaram esse envelope:

- Folha de Assinaturas Nailson Pinto de Oliveira.docx (Documento Microsoft Word) - 1 página(s)

Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: 4a97010bedf52d31c5c252759fd45addbc1e4128f11a0bf7347c4e6003cea9f0
[SHA512]: 27b0f72da0e75ca16ad7144883535cb5ee931d0a38e3a9ebe2c4905c0e26759fc2ce29854ca2be419563255ef136766f314c6b17106158ee3d23fc6454452817

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope

ASSINADO - Fidelis Zanetti de Castro (fidelis.castro@gmail.com)
Data/Hora: 25/03/2024 - 10:29:46, IP: 179.102.134.39, Geolocalização: [-20.195684, -40.237991]
[SHA256]: 10097da9ac58bfa6c40ea0312e991005d4ed5bf23cdd0b64fc36b44dc8efe57e

ASSINADO - Moacir Rosado Filho (moacrosa@gmail.com)
Data/Hora: 25/03/2024 - 10:02:57, IP: 179.183.23.115, Geolocalização: [-20.295033, -40.296703]
[SHA256]: 8b140bdc058655b1c3f839b0ac98cb412e4149b6b45f53f0e6a26063c6dedeca

ASSINADO - Rosa Elvira Quispe Ccoyllo (rosa.ccoyllo@ufes.br)
Data/Hora: 25/03/2024 - 12:01:57, IP: 200.137.65.107
[SHA256]: 9fc035994f7277232a34fd6a082748dfcd227d4560710d92a2d4f09724890493

Histórico de eventos registrados neste envelope

25/03/2024 12:01:57 - Envelope finalizado por rosa.ccoyllo@ufes.br, IP 200.137.65.107
25/03/2024 12:01:57 - Assinatura realizada por rosa.ccoyllo@ufes.br, IP 200.137.65.107
25/03/2024 12:01:47 - Envelope visualizado por rosa.ccoyllo@ufes.br, IP 200.137.65.107
25/03/2024 10:29:46 - Assinatura realizada por fidelis.castro@gmail.com, IP 179.102.134.39
25/03/2024 10:29:39 - Envelope visualizado por fidelis.castro@gmail.com, IP 179.102.134.39
25/03/2024 10:02:57 - Assinatura realizada por moacrosa@gmail.com, IP 179.183.23.115
25/03/2024 07:02:03 - Envelope registrado na Blockchain por notificacao@astenassinatura.com.br
25/03/2024 07:02:03 - Envelope encaminhado para assinaturas por notificacao@astenassinatura.com.br
18/03/2024 08:02:19 - Envelope criado por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.109

Dedicado à Donília, Giovana e Sofia,
os três grandes amores de minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus que me guiou em todos os meus erros e acertos, nada seria sem ELE.

Aos parceiros de curso: Midon, os Marcelos e Fábio, colegas ao meu lado na batalha que foi terminar essa caminhada.

A todos os membros da minha família, pois essa nunca foi uma conquista solitária. Cheguei até aqui, pelo esforço, trabalho e sacrifício de muitos.

Ao irmão que a vida me deu, Jânderson Albino Coswosk. Obrigado velho amigo.

Aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, em especial ao corpo docente do PROFMAT: Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho, Dr. Valmecir Antônio dos Santos Bayer e Dr. Domingos Sávio Valério Silva.

Ao meu orientador Dr. Moacir Rosado Filho, pela paciência e disponibilidade. Seus conhecimentos e conselhos forma fundamentais na construção desse trabalho.

RESUMO

A presente dissertação propõe uma sequência didática cuja meta é ofertar um curso que parte das noções iniciais sobre produtos notáveis até limites aplicados a problemas de otimização. Tal sequência pode, com os devidos ajustes, i) ser aplicada na introdução de produtos notáveis e estudo de equações de segundo grau para o nono ano do ensino fundamental; ii) ser um curso sobre funções quadráticas para o primeiro ano do ensino médio; ou ainda, iii) abrir espaço para aplicação do conceito (de forma breve) de limite para funções polinomiais em cursos de pré-Cálculo.

Palavras-chave: Produtos notáveis, funções quadráticas, limites, funções polinomiais, sequência didática.

ABSTRACT

The present thesis delves into a didactic sequence designed with the goal of offering a course that guides students towards mathematical concepts departing from notable products to the application of limits in optimization problems. Through suitable modifications, this sequence has the potential to i) introduce notable products and explore second-degree equations for ninth-grade students; ii) serve as a comprehensive course on quadratic functions for first-year high school students; iii) or facilitate a concise introduction to the concept of limits for polynomial functions in pre-Calculus courses.

Keywords: Notable products, quadratic functions, limits, polynomial functions, didactic sequence.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Em mais de uma década, atuando como professor de ensino médio e de graduação, no Ifes Campus de Alegre, percebi algumas lacunas na formação de meus alunos. Nos alunos de ensino médio observei o pouco ou nenhum contato com a ideia de produto notável e em consequência disso, uma grande dificuldade na compreensão da estrutura algébrica da função quadrática e suas implicações. Nos alunos de graduação, a dificuldade se apresenta na pouca habilidade de representar um polinômio como produto de fatores binomiais de 1º grau, ou seja, o processo de fatoração de um polinômio, uma habilidade básica no estudo de limites.

Tal percepção sobre o tema encontra consonância nas publicações e nos trabalhos de vários colegas deste programa dentre os quais cito aqui Keila Cristina Borgato, Tamiri Pinto Soares com suas dissertações sobre Produtos Notáveis e Lucylla Medeiros da Silva com sua dissertação sobre polinômios que apresentaram em certa medida, interesses questionamentos similares aos meus sobre os temas desse trabalho. Suas estratégias e preocupações serviram de estímulo na elaboração e planejamento deste trabalho.

Em virtude dos programas e cronogramas estabelecidos para cada nível de ensino, em específico para os níveis do público alvo desta proposta, é preciso suprir as lacunas na formação de tais alunos sem perder de vista as urgências dos prazos e do elenco de conteúdos programáticos. Por isso, apresentamos aqui uma sequência didática descrita em quatro capítulos que correspondem a 24 aulas de 50 minutos e mais um conjunto de atividades. Tal sequência pode ser desenvolvida em 4 semanas, após aplicação de uma avaliação diagnóstica (APÊNDICE A).

Os objetivos desta sequência são: Estudar produtos notáveis e sua aplicação na determinação das raízes de uma equação de 2º grau, utilizando o método de completar quadrado. Com o completo desenvolvimento dessas habilidades, abordar funções quadráticas, usando os conhecimentos sobre produtos notáveis para determinar a forma canônica e a forma fatorada da função quadrática e seus elementos, resolver problemas de otimização. A partir da observação da forma fatorada da função quadrática, estudar técnicas de fatoração de outras funções polinomiais e finalmente, com a reunião das habilidades desenvolvidas ao longo do curso, calcular o limite da taxa de variação de funções polinomiais na resolução de problemas de otimização.

O aluno ao final da sequência deverá ser capaz de efetuar os desenvolvimentos dos produtos notáveis, relacionar um trinômio de 2º grau com o desenvolvimento de um produto notável, determinar as raízes de uma equação de 2º grau. Determinar a regra de associação de uma função quadrática a partir do seu gráfico, fazer um esboço do gráfico da função quadrática a partir de sua regra de associação, resolver problemas de otimização. Aplicar métodos de pesquisa de raízes e Algoritmo de Briot-Ruffini para fatorar um polinômio. Determinar valores máximos e mínimos de funções polinomiais.

O estudo de produtos notáveis e funções quadráticas podem ser trabalhados de forma indistinta entre os alunos do Ensino médio e os alunos da graduação, já polinômios e limites da taxa de variação de funções polinomiais se destinam ao curso de graduação, esses 4 conteúdos compõem parte do programa da disciplina Fundamentos da Matemática, basicamente um curso de Pré-Cálculo. É possível trabalhar estes dois últimos conteúdos com o ensino médio, mas é preciso escolher cuidadosamente, as atividades e problemas para acomodar o nível de complexidade das questões ao nível destes alunos.

A abordagem geométrica com a manipulação de material concreto para estudarmos produtos notáveis é a mola propulsora de todo este trabalho. Seu caráter lúdico implícito na construção e apropriação de conceitos por meio de experimentações representa a possibilidade de ressignificação de conceitos algébricos, vistos ou não no ensino fundamental, usando para isso uma construção de quadrados pela adição ou subtração de áreas de retângulos. A grande vantagem desse processo é o protagonismo dado aluno pelo incentivo à formulação de hipóteses, experimentando e comparando soluções pelo intermédio do material concreto. (APÊNDICES B, C e D) .

No capítulo um (Produtos Notáveis e a Equação de Segundo Grau) apresentamos os produtos notáveis por meio de uma representação geométrica de soma ou subtração de áreas. A partir dessa construção, tentamos estabelecer uma relação entre produtos notáveis e equações de segundo grau. Usaremos a ideia de "completar quadrado" na obtenção das raízes de tais equações. Encerramos o capítulo com um conjunto de exercícios de fixação.

No capitulo dois (Funções Quadráticas) abordamos tais funções por suas propriedades gráficas partindo da definição "É a função cuja regra de associação entre domínio e contradomínio é $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$". Com auxílio do programa de geometria dinâmica GeoGebra, apresentamos as principais propriedades gráficas da função quadrática como as interseções com eixos coordenados, quando ocorrem e quando não; vértice e suas coordenadas; a relação entre o coeficiente líder a e a concavidade do gráfico da função. Na segunda parte, discutimos problemas que envolvam máximo e mínimo de funções quadráticas. Encerramos o capítulo com um conjunto de exercícios de fixação.

No capítulo três (Polinômios e Fatoração) conceituamos polinômio com coeficientes reais, apresentamos suas principais características, o valor numérico e raiz de um polinômio, as operações básicas, enfatizando a divisão, que é ponto de partida para o processo de fatoração. Abordamos ainda, O Teorema do Resto, Teorema de D'Alambert e o Dispositivo de Briot-Ruffini. Aplicamos técnicas de pesquisa de raízes de equações polinomiais para determinar os fatores de um polinômio $p(x)$. Encerramos o capítulo com um conjunto de exercícios de fixação.

No capítulo quatro (Limites de Funções Polinomiais) conceituamos de forma intuitiva e de maneira formal o limite de funções e limites laterais de funções, apresentamos alguns limites essenciais, conceituamos funções contínuas e taxa de variação de funções polinomiais, retas tangentes e extremos locais. Encerramos o capitulo com um conjunto de exercícios de fixação.

CAPÍTULO 1
PRODUTOS NOTÁVEIS E A EQUAÇÃO DE 2º GRAU.

1.1 Somando (ou subtraindo) áreas para obter um quadrado. [Aula 1]

Nesta seção, apresentamos uma aula que utiliza a manipulação de material concreto na construção de quadrados de lado $x + a$; quadrados de lado $x - a$ e retângulos de lados $x + a$ e $x - a$, sendo x um número real e a um número natural tal que x é igual ou maior do que a.

Usaremos nessa aula Material Concreto (APÊNDICES B, C e D):

Um quadrado de lado x cuja área é igual a x^2.

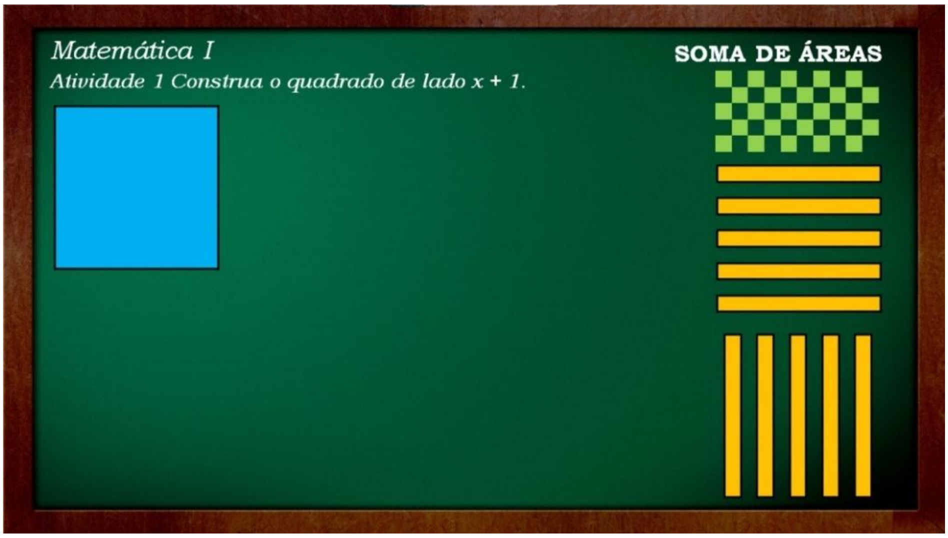
10 retângulos de lados 1 e x cuja área é igual a x .

25 quadrados de lado 1 cuja área é igual 1.

Começamos nossa aula com a seguinte pergunta: Usando o material concreto é possível, a partir de um quadrado de lado x, construir um quadrado de lado $x + 1$?

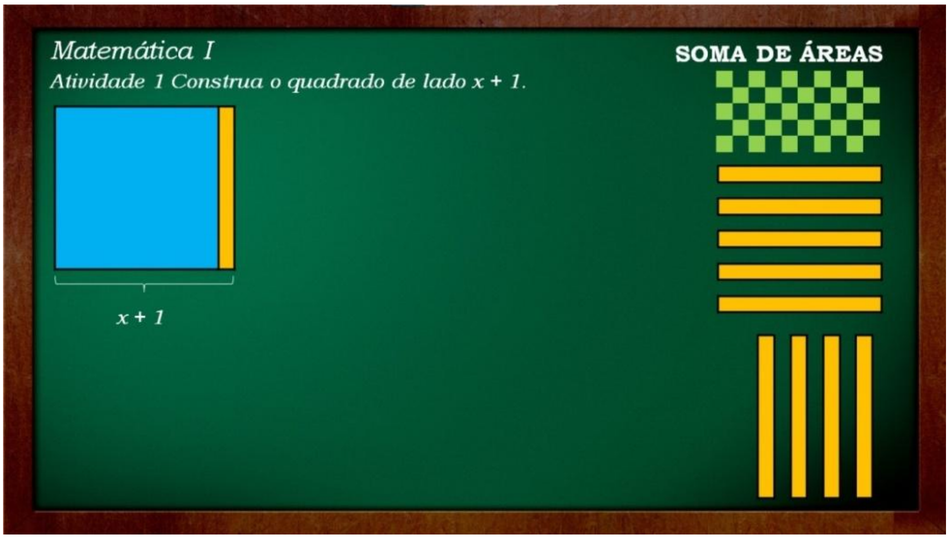
Após, breve discussão, apresentamos a solução na sequência de figuras:

Figura 1 – Apresentando o material concreto com retângulos laranjas e quadrados verdes (áreas adicionadas)



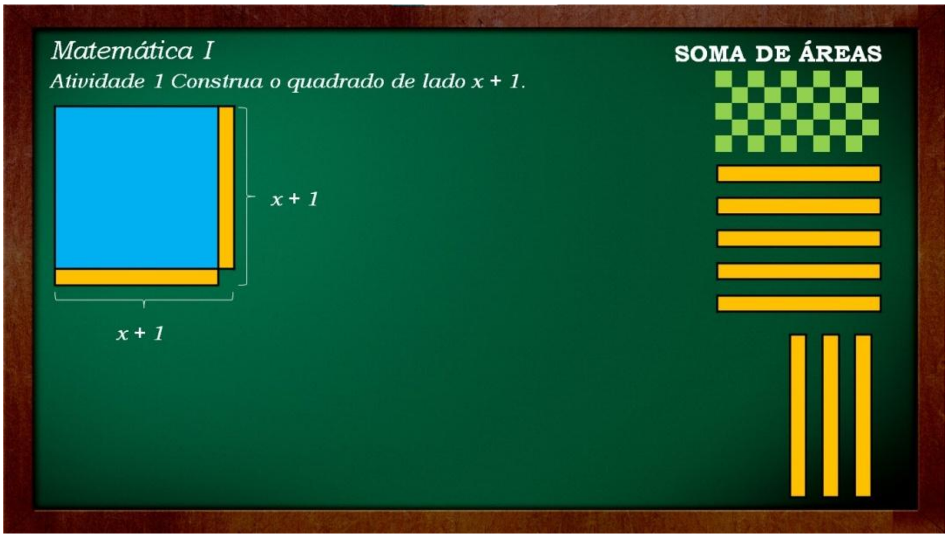
Fonte: O autor (2024).

Figura 2 – Aumentando a largura do quadrado para $x + 1$.



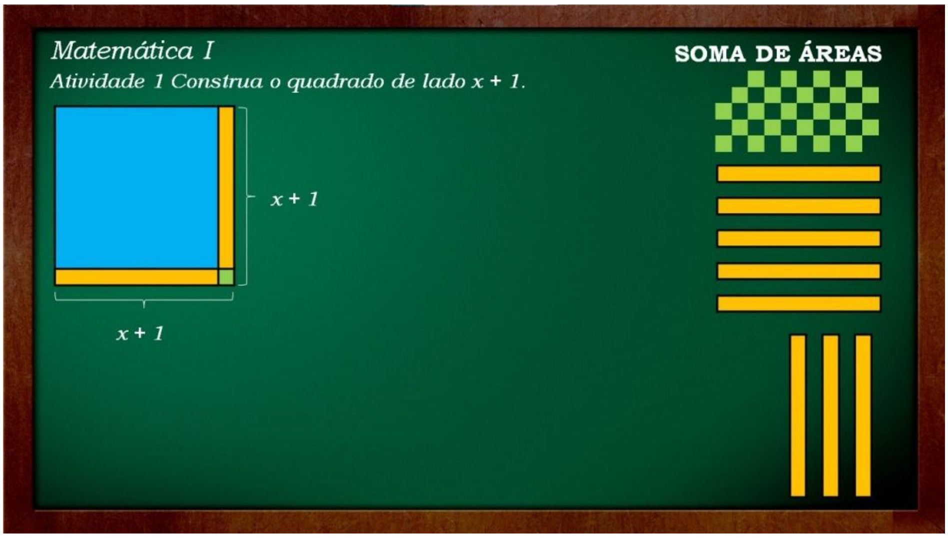
Fonte: O autor (2024).

Figura 3 – Aumentado a altura do quadrado para $x + 1$.



Fonte: O autor (2024).

Figura 4 – Completando o quadrado usando um quadrado de lado 1.



Fonte: O autor (2024).

Após a apresentação da solução. Seguem as perguntas:

a) Como se expressa a área do quadrado obtido?

b) Que peças você utilizou na construção deste quadrado?

c) Agrupando por tipo de peça, como se expressa a soma das áreas destas peças?

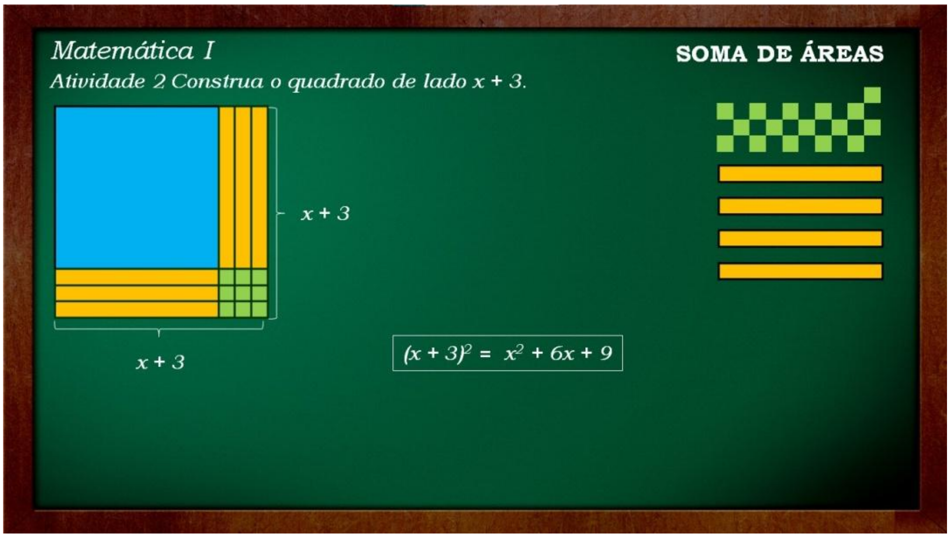
d) Podemos igualar as expressões do item a e do item c?

e) Em caso afirmativo, realize essa igualdade.

Após essa etapa, pedimos a construção do quadrado de lado $x + 3$, efetuando a equivalência das expressões obtidas ao final do processo.

A solução dessa construção, com a respectiva equivalência, está na figura 5.

Figura 5 – Construção do quadrado de lado $x + 3$.



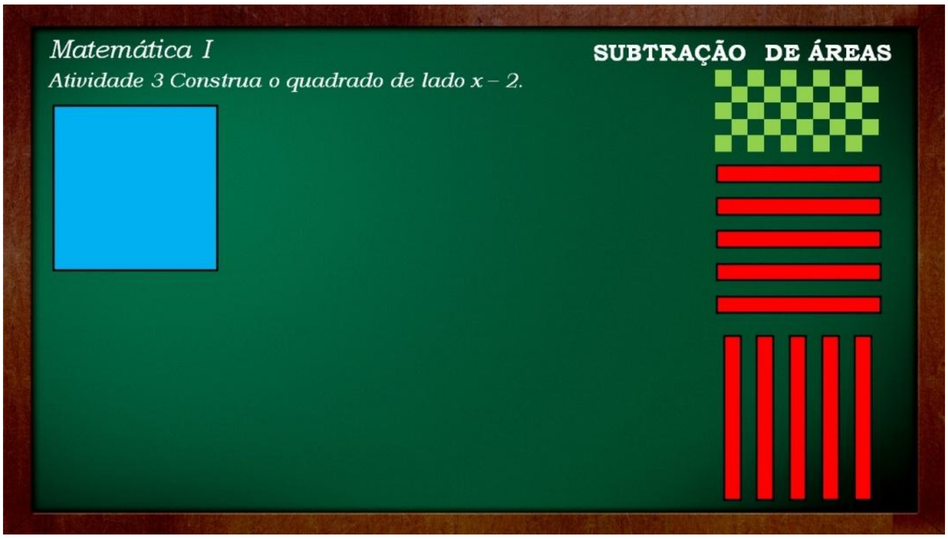
Fonte: O autor (2024).

Vencida essa etapa, fazemos uma segunda pergunta: usando o material concreto, é possível a partir de um quadrado de lado x, construir um quadrado de lado $x - 2$?

Utilizaremos em nossa argumentação a ideia de área a ser subtraída, nesse caso, o valor da área do retângulo de lados 1 e x será $-x$.

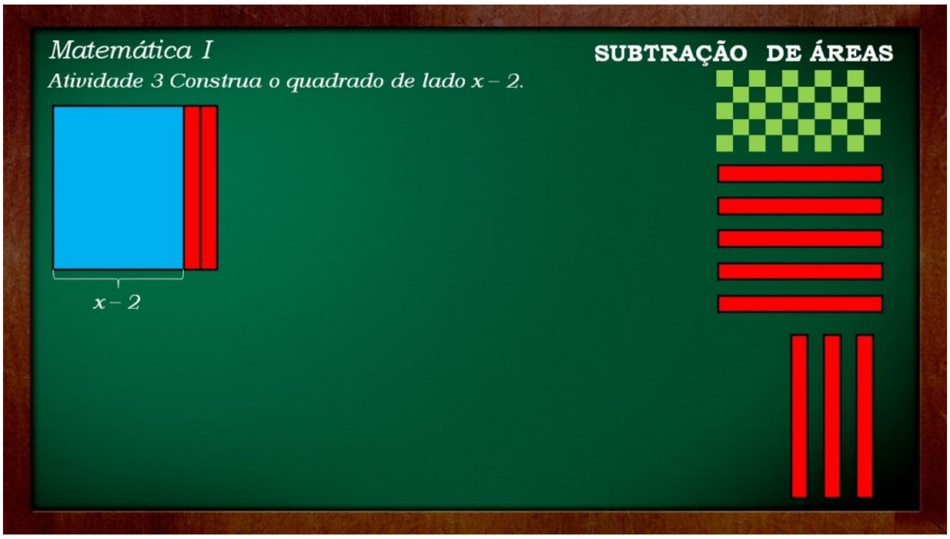
Apresentamos nossa solução na sequência de figuras a seguir:

Figura 6 – Material concreto com retângulos vermelhos (áreas subtraídas).



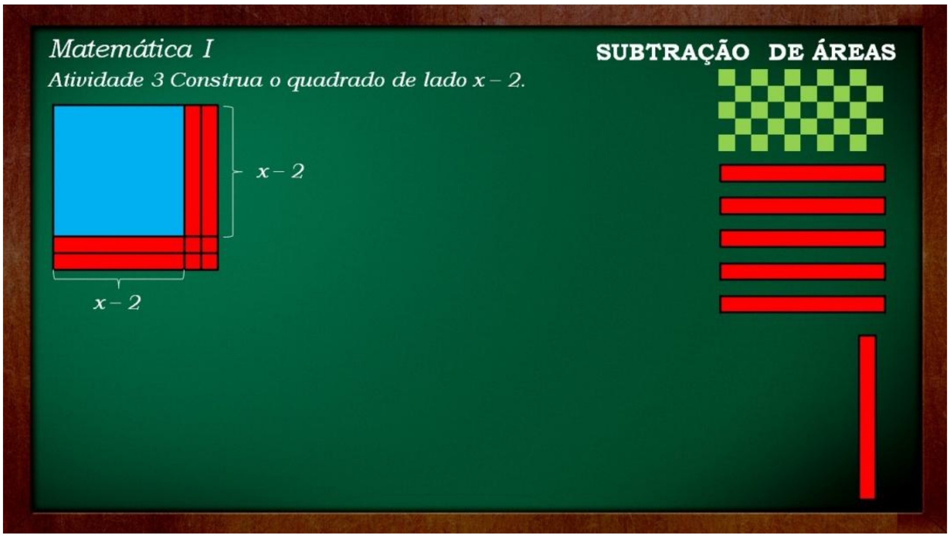
Fonte: O autor (2024).

Figura 7 – Reduzindo a largura do quadrado para $x - 2$.



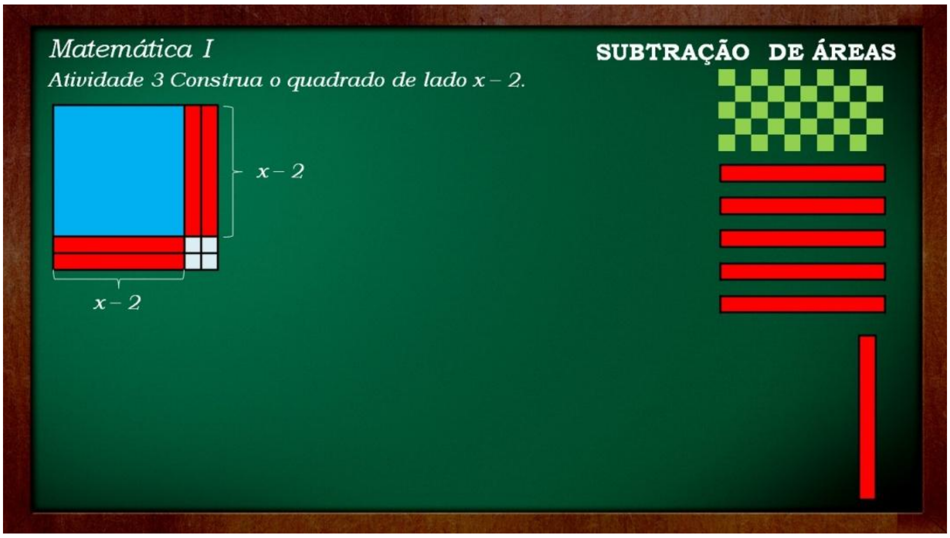
Fonte: O autor (2024).

Figura 8 – Reduzindo a altura do quadrado para $x - 2$.



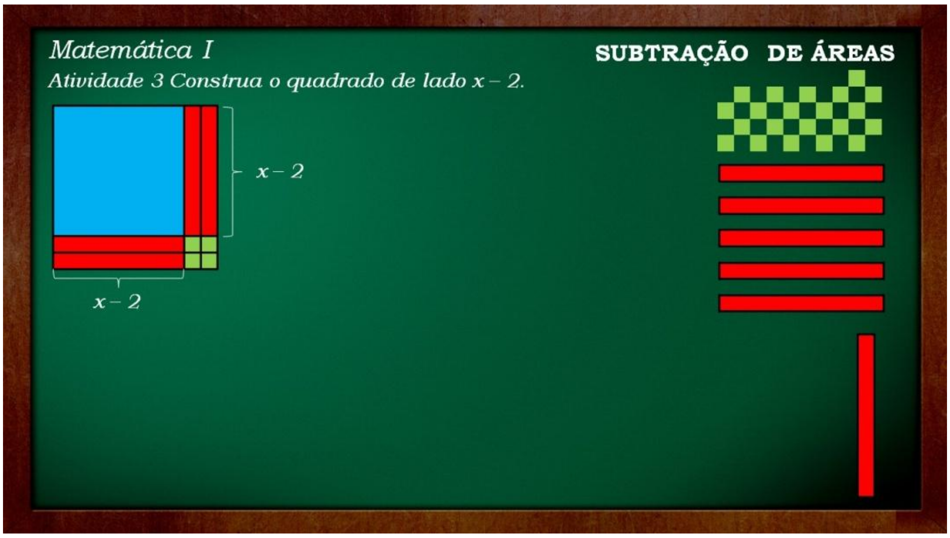
Fonte: O autor (2024).

Figura 9 – Evidenciando a dupla eliminação de 4 quadrados de lado 1.



Fonte: O autor (2024).

Figura 10 – Compensação da dupla eliminação de 4 quadrados de lado 1.



Fonte: O autor (2024).

Mais uma vez, Seguem as perguntas:

a) Como se expressa a área do quadrado obtido?

b) Que peças você utilizou na construção deste quadrado?

c) Agrupando por tipo de peça, como se expressa a soma das áreas destas peças?

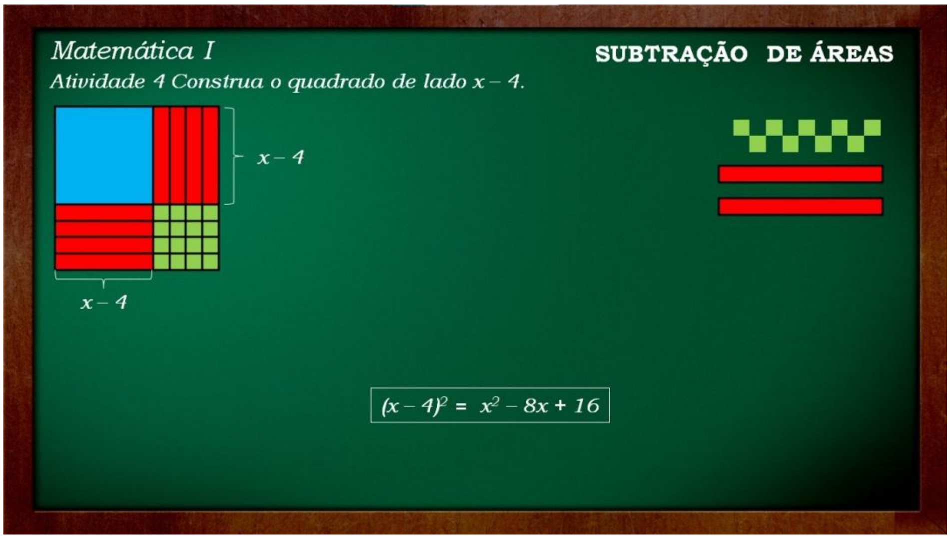
d) Podemos igualar as expressões do item a e do item c?

e) Em caso afirmativo, realize essa igualdade.

Após essa etapa, pedimos a construção do quadrado de lado $x-4$, efetuando a equivalência das expressões obtidas ao final do processo.

A solução dessa construção, com a respectiva equivalência, está na figura 11.

Figura 11 – Construção do quadrado de lado $x-4$.



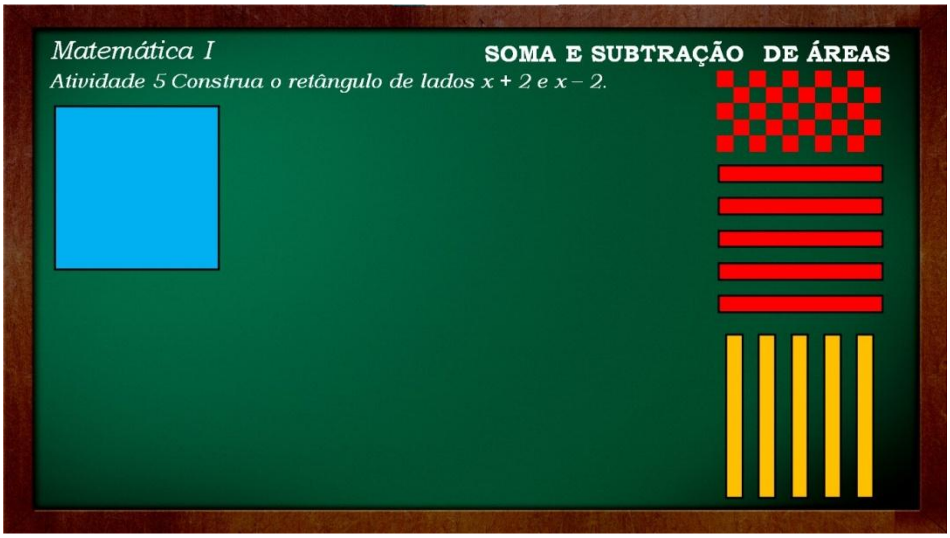
Fonte: O autor (2024).

Seguindo para a última etapa da aula: Construa com uso do material concreto um retângulo de lados $x-2$ e $x+2$.

Para que não haja confusão, ao associarmos – 1 e – x às áreas do quadrado de lado 1 e o retângulo de lados x e 1, respectivamente, não estamos estabelecendo a ideia de áreas negativas, usamos o sinal $(-)$ apenas para indicar área a ser subtraída.

Apresentamos a solução na sequência de figuras:

Figura 12 – Material concreto com retângulos laranjas (áreas adicionadas), retângulos e quadrados vermelhos (áreas subtraídas).

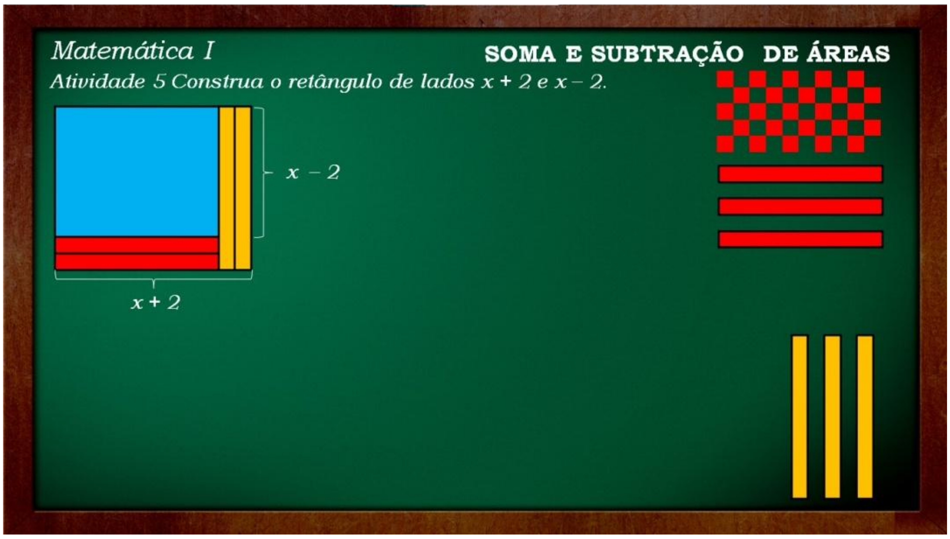


Fonte: O autor (2024).

Figura 13 – Aumentando a largura do quadrado para $x + 2$.

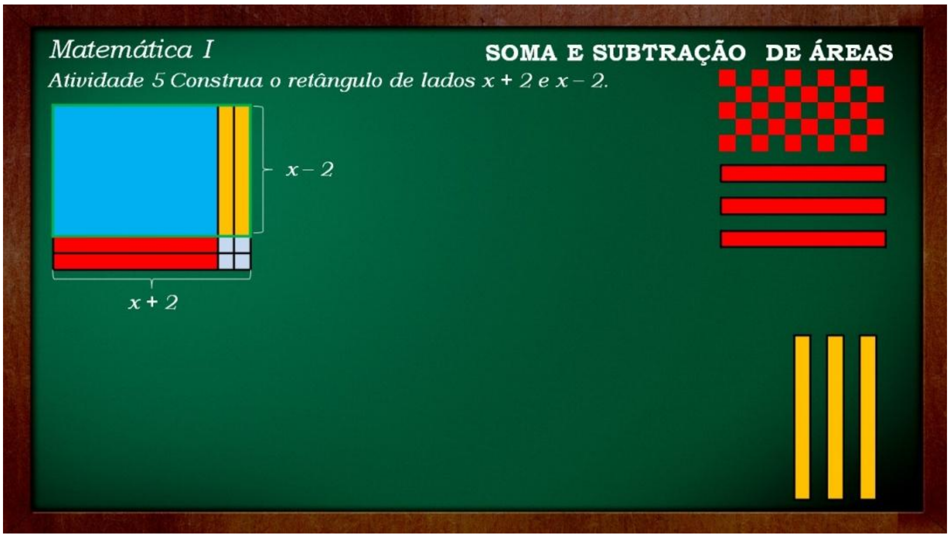
Fonte: O autor (2024).

Figura 14 – Reduzindo a altura do quadrado para $x-2$.



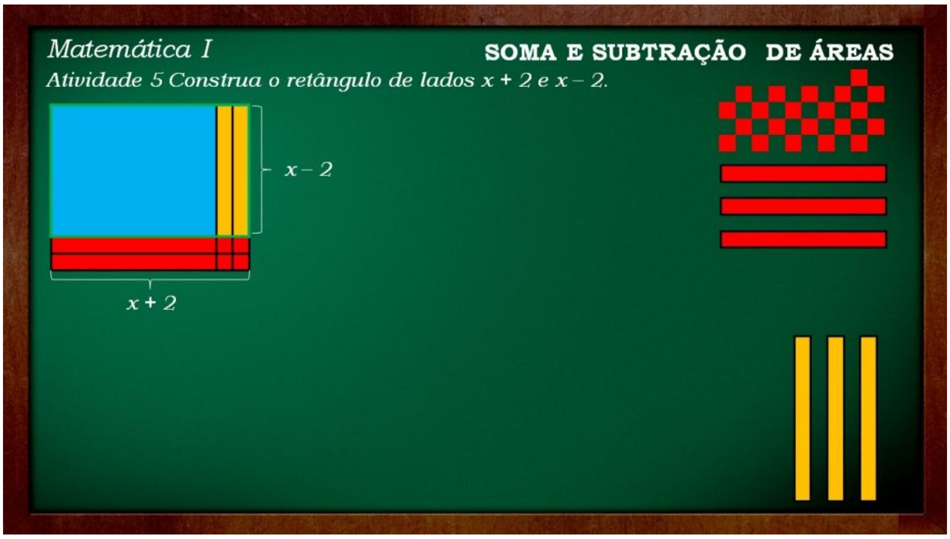
Fonte: O autor (2024).

Figura 15 – O retângulo desejado e a “sobra” de 4 quadrados de lado 1.



Fonte: O autor (2024).

Figura 16 – Eliminando os 4 quadrados de lado 1.



Fonte: O autor (2024).

Mais uma vez, Seguem as perguntas:

a) Como se expressa a área do retângulo obtido?

b) Que peças você utilizou na construção deste retângulo?

c) Agrupando por tipo de peça, como se expressa a soma das áreas destas peças?

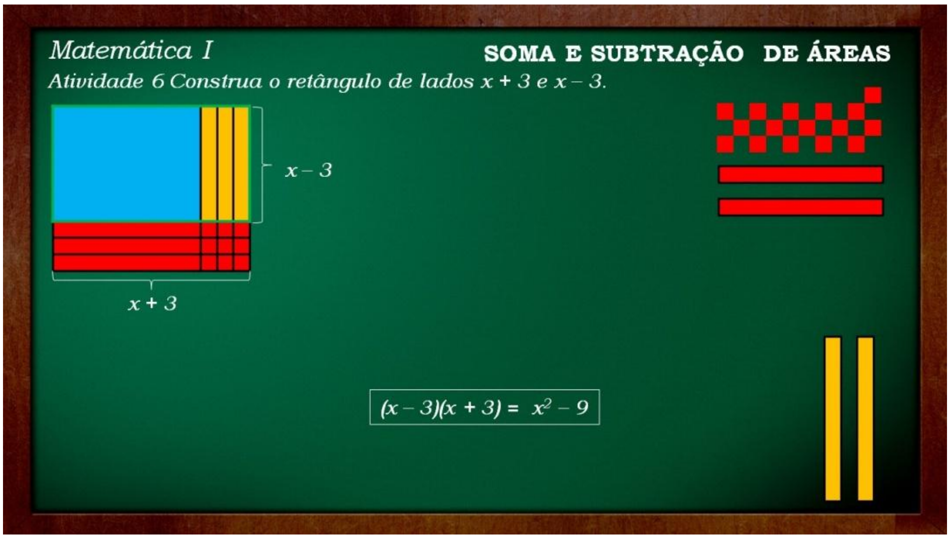
d) Podemos igualar as expressões do item a e do item c?

e) Em caso afirmativo, realize essa igualdade.

Após essa etapa, pedimos a construção do retângulo de lados $x - 3$ e $x + 3$, efetuando a equivalência das expressões obtidas ao final do processo.

A solução dessa construção, com a respectiva equivalência, está na figura 17.

Figura 17 – Construção do retângulo de lado $x - 3$ e $x + 3$.



Fonte: O autor (2024).

1.2 O nome de cada igualdade obtida e suas características. [Aula 2]

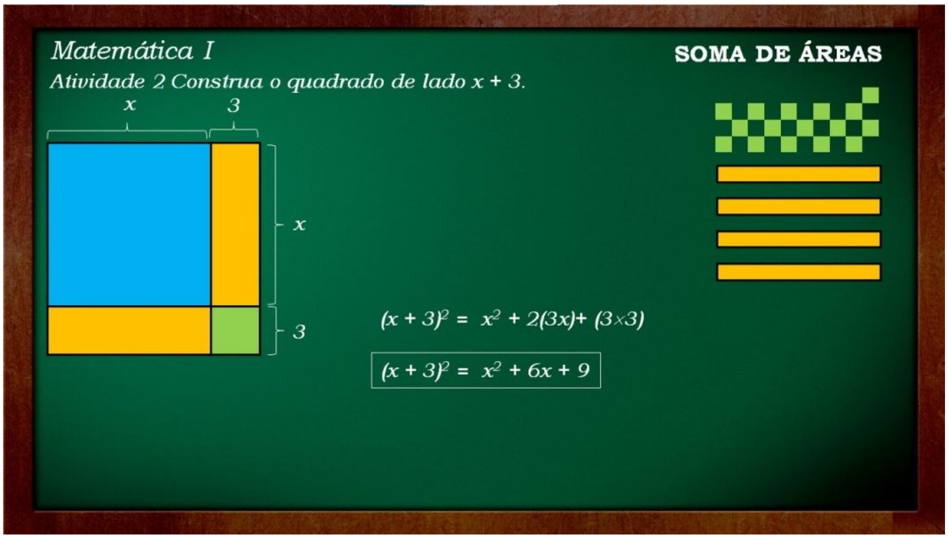
Apresentamos aqui, uma aula de retomada dos exemplos da aula anterior para destacar as principais características das igualdades obtidas, fazendo uma generalização do valor do número natural a para um valor real positivo, considerando que $x + a$ e $x - a$ representam de um retângulo.

Quadrado da soma de dois números.

Retomando a atividade 2 (Figura 5), em nossa abordagem geométrica, $(x + 3)^2$ indica que cada dimensão do quadrado original de lado x foi aumentada em 3 unidades. Acrescentar 3 unidades ao comprimento significa, acrescentar ao quadrado de lado x três retângulos de área x cujos lados são 1 e x; e acrescentar 3 unidades à largura, significa acrescentar mais três retângulos de área x com lados 1 e x; o posicionamento destes seis retângulos produz um espaço quadrado faltante para completar o quadrado de lado $x + 3$. Esse quadrado faltante tem área igual a 9, que resulta em somar 9 quadrados de área 1.

Reorganizando cada conjunto de três retângulos de lados x e 1 como um único retângulo com lados x e 3, obtemos dois retângulos com área igual a $3x$. Para completar o quadrado de lado $x + 3$, devemos acrescentar um quadrado de lado 3 cuja área é 9. (Figura 18).

Figura 18 – Nova interpretação do quadrado de lado $x + 3$.



Fonte: O autor (2024).

Esta nova interpretação nos permite acrescentar um valor k real positivo ao lado x do quadrado original. Assim, a representação da área de um quadrado de lado $x + k$, por uma soma de áreas é a soma da área de um quadrado de lado x com a área de dois retângulos de lados k e x e finalmente com a área de um quadrado de lado k.

Em termos algébricos,

Produto Notável (1.1) $(x + k)^2 = x^2 + 2kx + k^2$

Chamamos $(x + k)^2$ de **quadrado da soma de dois números**.

EXEMPLO 1

O desenvolvimento do quadrado $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$

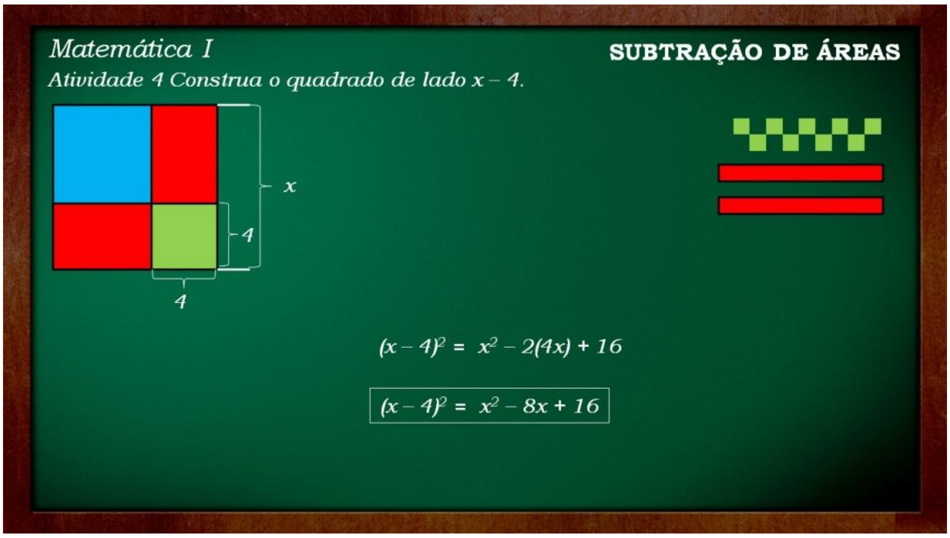
Note que a largura dos retângulos é exatamente o valor do acréscimo dado ao lado do quadrado original, esse fato se manifesta no desenvolvimento obtido, fazendo do coeficiente de x o dobro do acréscimo. Em nosso exemplo, o coeficiente de x é $\frac{4}{3}$, exatamente o dobro de $\frac{2}{3}$.

Quadrado da diferença de dois números.

Retomando a atividade 4 (Figura 11), em nossa abordagem geométrica, $(x-4)^2$ indica que cada dimensão do quadrado original de lado x foi reduzida em 4 unidades. Reduzir 4 unidades do comprimento significa, subtrair do quadrado de lado x quatro retângulos de área x cujos lados são 1 e x; e reduzir 4 unidades da largura, significa subtrair mais quatro retângulos de área x com lados 1 e x; o posicionamento destes oito retângulos produz um espaço quadrado faltante para completar o quadrado de lado $x-4$. Esse quadrado faltante, eliminado duplamente, tem área igual a 16, para compensar essa dupla eliminação devemos somar 16 quadrados de área 1.

Reorganizando cada conjunto de quatros retângulos de lados x e 1 como um único retângulo com lados x e 4, obtemos dois retângulos com área igual a $4x$. Para completar o quadrado de lado $x-4$, devemos compensar a dupla eliminação do quadrado de lado 4 cuja área é 16, acrescentando um quadrado lado 4. (Figura 19).

Figura 19 – Nova interpretação do quadrado de lado $x-4$.



Fonte: O autor (2024).

Como no quadrado da soma podemos retirar um valor k real positivo, menor do que x, do lado x do quadrado original. Assim, a representação da área de um quadrado de lado $x-k$, por uma subtração de áreas é a soma da área de um quadrado de lado x com a área de um quadrado de lado k menos a soma das áreas de dois retângulos de lados k e x.

Em termos algébricos,

$$(x-k)^2 = x^2 + k^2 - 2kx$$

Reorganizando para manter um formato análogo ao quadrado da soma:

Produto Notável (1.2) $\qquad (x-k)^2 = x^2 - 2kx + k^2$

Chamamos $(x-k)^2$ de **quadrado da diferença de dois números**.

EXEMPLO 2

O desenvolvimento do binômio $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}$

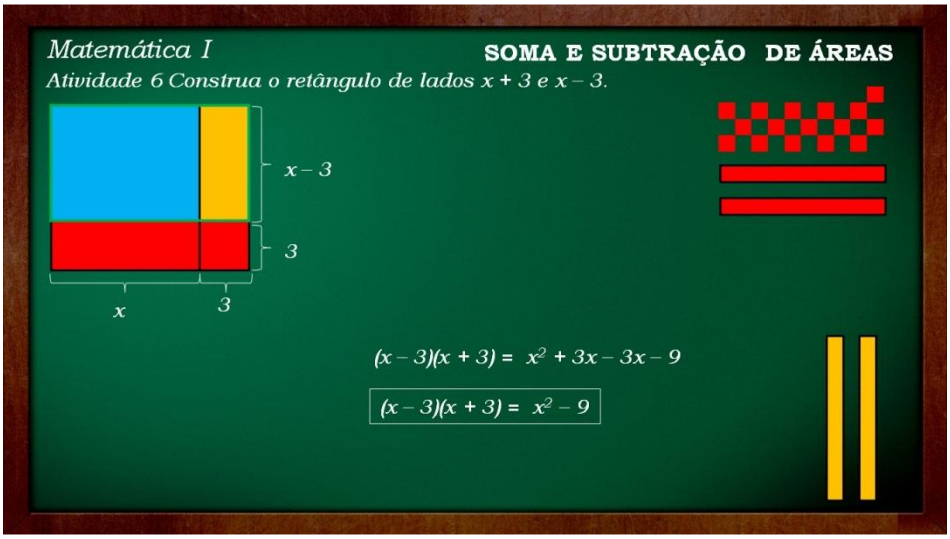
Note que a largura dos retângulos é exatamente o valor da redução do lado do quadrado original, esse fato se manifesta no desenvolvimento obtido, fazendo do coeficiente de x o dobro do valor da redução. Em nosso exemplo, o coeficiente de x é $\frac{3}{2}$, exatamente o dobro de $\frac{3}{4}$.

Produto da soma pela diferença dos mesmos dois números.

Ao considerarmos a atividade 6 (Figura 17), temos nesse caso, que a abordagem geométrica nos impõe o cálculo da área de um retângulo de lados $x+3$ e $x-3$, indicando que foram acrescentadas 3 unidades ao comprimento do quadrado original de lado x e que foram retiradas 3 unidades da largura do mesmo quadrado de lado x. Acrescentar 3 unidades ao comprimento significa, acrescentar ao quadrado de lado x três retângulos de área x cujos lados são 1 e x; e reduzir 3 unidades da largura, significa subtrair três retângulos de área x com lados 1 e x; o posicionamento destes seis retângulos produz um “sobra”, um quadrado de área igual a 4 externo ao retângulo de lados $x+3$ e $x-3$, para retirar essa sobra devemos subtrair 4 quadrados de área 1.

Reorganizando cada conjunto de três retângulos de lados x e 1 como um único retângulo com lados x e 3, obtemos dois retângulos com área igual a $3x$, um retângulo a ser acrescentado e um retângulo a ser subtraído. Para completar o retângulo de lados $x + 3$ e $x - 3$, devemos eliminar o quadrado excedente subtraindo um quadrado de área 9. (Figura 20).

Figura 20 – Nova interpretação do retângulo de lados $x + 3$ e $x - 3$.



Fonte: O autor (2024).

Esta nova interpretação nos permite acrescentar um valor k real positivo ao comprimento x do quadrado original e retirar um valor k real positivo, menor do que x, da largura x do quadrado original. Assim, a representação da área do retângulo de lados $x + k$ e $x - k$ por uma subtração de áreas é a diferença entre a área de um quadrado de lado x e a área de um quadrado de lado k, pois as áreas de dois retângulos de lados k e x, se anulam.

Em termos algébricos,

$$(x + k) \cdot (x - k) = x^2 - kx + kx + k^2$$

Eliminando a área do retângulo acrescentado com a área do retângulo subtraído obtemos

Produto Notável (1.3) $(x+k)\cdot(x-k)=x^2-k^2$

Chamamos $(x+k)\cdot(x-k)$ de **produto da soma pela diferença dos mesmos dois números**.

EXEMPLO 3

O desenvolvimento do produto $(x+5)\cdot(x-5)=x^2-25$

1.3 Completando Quadrados e Resolvendo Equações. [Aula 3]

Nesta seção, temos uma aula que busca estabelecer uma relação entre equações de 2º grau e produtos notáveis. Esta relação será a base da estratégia para obtenção das raízes de tais equações ou da justificativa para não obtenção das mesmas.

Definição (1.4)

Seja a um número real. O valor absoluto de a, representado por $|a|$, é definido como

$$|a|=\begin{cases} a, se\ a\geq 0 \\ -a, se\ a<0 \end{cases}$$

EXEMPLO 1

$|8|=8$

$|-17|=-(-17)=17$

Podemos entender o valor absoluto como a quantidade ou a medida indicada pelo número sem considerar o sinal deste número ou a distância que há entre zero e o número indicado.

Equações de 2º grau

Considere a igualdade $x^2-64=0$

Essa igualdade possui duas raízes, basta que $x^2=64$.

Aqui cabe uma observação $\sqrt{x^2}\neq x$, para x valores reais negativos, pois $x^2\geq 0$ para todo x real então, à exceção do 0, existem sempre dois números reais quando elevados a expoente par resultam em um mesmo valor, estes números tem o mesmo valor absoluto e são simétricos.

Do exposto, temos

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Voltando à nossa igualdade, se $x^2 = 64 \Leftrightarrow |x| = 8$

$$\therefore x = -8 \; ou \; x = 8$$

Por outro lado, a igualdade $x^2 + 36 = 0$ não tem solução, pois sendo $x^2 \geq 0$, então, o menor valor para $x^2 + 36$ é 36.

Para que uma igualdade do tipo $x^2 + k = 0$ tenha solução real, k é negativo ou zero.

EXEMPLO 2

Considere agora a equação $x^2 - 20x + 64 = 0$

SOLUÇÃO

Vamos associar a equação acima ao quadrado da diferença correspondente.

$$x^2 - 20x + 64 = 0$$

O quadrado da diferença associado ao trecho $x^2 - 20x$ é $(x - 10)^2$ (pois o coeficiente de x é sempre o dobro do decréscimo). Se o quadrado estivesse completo a última parcela do desenvolvimento seria 100, assim faltam 36 unidades para o quadrado ficar completo.

Podemos abordar a igualdade de duas formas:

1ª forma: completando o quadrado da diferença adicionando 36 unidades aos dois membros da igualdade.

$x^2 - 20x + 64 + 36 = 0 + 36$

$x^2 - 20x + 100 = 36$

$(x - 10)^2 = 36 \Rightarrow |x - 10| = 6$

$x - 10 = -6 \Rightarrow x_1 = 4$

$x - 10 = 6 \Rightarrow x_2 = 16$

As soluções são 4 e 16.

2ª forma: Indicando a falta ou excesso em relação ao quadrado da diferença

$x^2 - 20x + 64 = 0 \Leftrightarrow (x - 10)^2 - 36 = 0,$

$|x - 10| = 6$

$x - 10 = -6 \Rightarrow x_1 = 4$

$x - 10 = 6 \Rightarrow x_2 = 16$

EXEMPLO 3

Considere agora a equação $-2x^2 - 12x - 16 = 0$

SOLUÇÃO

Colocando em evidencia o fator comum -2

$$-2(x^2 + 6x + 8) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 8 = 0$$

O quadrado da soma associado ao trecho $x^2 + 6x$ é $(x + 3)^2$, se o quadrado estivesse completo a última parcela do desenvolvimento seria 9, assim falta 1 unidade para o quadrado ficar completo.

Logo,

$x^2 + 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 - 1 = 0$

$(x + 3)^2 = 1 \Rightarrow |x + 3| = 1$

$x + 3 = -1 \Rightarrow x_1 = -4$

$x + 3 = 1 \Rightarrow x_2 = -2$

Forma Fatorada da equação de 2º grau.

Nos exemplos acima, como as equações possuem solução é possível reescrevê-las em função de suas soluções.

No exemplo 2

Considere este ponto da solução: $(x - 10)^2 - 36 = 0$, temos em mãos uma diferença de quadrados de dois números e podemos usar o produto da soma pela diferença desses números para obter a forma fatorada da equação original.

$(x - 10)^2 - 36 = 0 \Rightarrow (x - 10)^2 - 6^2 = 0$

$(x - 10 + 6)(x - 10 - 6) = 0 \Rightarrow (x - 4)(x - 16) = 0$

A equação foi reescrita como produto de dois fatores e esse produto resulta em zero, se pelo menos um destes dois fatores resultar em zero, o que ocorre se $x = 4$ ou $x = 16$

Uma das consequências do método de completar quadrados é a obtenção da fórmula para resolução de equações de 2º grau (no Brasil chamada de fórmula de Bhaskara).

Para a forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

Na expressão Δ é chamado discriminante.

A demonstração da fórmula para resolução de equações de 2º grau se encontra no ANEXO A.

1.4 Exercícios sobre equações de 2º grau.[Aula 4]

Nesta seção, apresentamos uma aula de retomada de conceitos e técnicas na aplicação do método de completar quadrado na resolução de equações de 2º grau. O objetivo é resolver as questões em sala com os alunos

Exercício 1

Complete os espaços em branco

a) $x^2 - \quad +81 = (\qquad)^2 \Rightarrow x^2 - 18x + 81 = (x - 9)^2$

b) $x^2 + 6x + \quad = (\qquad)^2 \Rightarrow x^2 - 18x + 81 = (x - 9)^2$

Exercício 2

Usando o método de completar quadrado, resolva as equações de 2º grau

a) $x^2 + 3x - 10 = 0$

b) $x^2 - 6x + 10 = 0$

c) $6x^2 - 5x + 1 = 0$

d) $x^2 - 6x + 5 = 0$

Soluções

Exercício 1

Complete os espaços em branco

a) $x^2 - 18x + 81 = (x - 9)^2$

b) $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

Exercício 2

Usando o método de completar quadrado, resolva as equações de 2º grau

a) $x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{40}{4} = 0$

$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} \Rightarrow \left|x + \frac{3}{2}\right| = \frac{7}{2}$

$$x + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{2} - \frac{3}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{4}{2} = 2$$

$$x + \frac{3}{2} = -\frac{7}{2} \Rightarrow x = -\frac{7}{2} - \frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = -\frac{10}{2} = -5$$

$S = \{-5,2\}$

b) $x^2 - 6x + 10 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 + 1 = 0 \Rightarrow S = \emptyset$

c) $6x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{5}{12}\right)^2 - \frac{25}{144} + \frac{24}{144} = 0$

$$\left(x - \frac{5}{12}\right)^2 - \frac{1}{144} = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{5}{12}\right)^2 = \frac{1}{144} \Rightarrow \left|x - \frac{5}{12}\right| = \frac{1}{12}$$

$$x - \frac{5}{12} = -\frac{1}{12} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{12} + \frac{5}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$x - \frac{5}{12} = \frac{1}{12} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{12} + \frac{5}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$$

d) $x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow (x - 3 - 2)(x - 3 + 2) = 0$

$\Rightarrow (x - 5)(x - 1) = 0$

$\Rightarrow S = \{1,5\}$

1.5 Exercícios Propostos

Exercício 1.1

Complete as igualdades preenchendo as lacunas.

a) $x^2 - \_\_\_\_ + 16 = (\quad\quad)^2$

b) $x^2 + 12x + \quad\quad = (\quad\quad)^2$

c) $x^2 + \_\_\_\_ + 49 = (\quad\quad)^2$

d) $x^2 - 10x + \quad = (\quad\quad)^2$

Exercício 1.2

Reescreva as equações de 2º grau em função de um quadrado:

a) $x^2 - 8x + 20 = 0$

b) $x^2 - 5x + 29 = 0$

c) $2x^2 - 3x - 2 = 0$

d) $3x^2 - 11x - 4 = 0$

Exercício 1.3

Reescreva as equações de 2º grau na forma fatorada.

a) $x^2 - 10x + 21 = 0$

b) $x^2 + 4x + 3 = 0$

c) $x^2 - 6x + 5 = 0$

d) $2x^2 - 14x + 20 = 0$

Exercício 1.4

Resolva as equações de 2º grau completando quadrados:

a) $x^2 - 8x + 12 = 0$

b) $x^2 + 6x + 8 = 0$

c) $x^2 - 5x + 6 = 0$

d) $x^2 - 10x + 16 = 0$

1.6 A Fórmula Quadrática ao longo da História

O primeiro registro de resolução de equações de 2º grau data de aproximadamente, 1700 a.C., na Mesopotâmia. Os problemas eram apresentados na forma de "receitas". Na Grécia, entre 500 a 200 a.C., desenvolveu-se um método geométrico para muitos problemas matemáticos, incluindo as equações de segundo grau. Na índia, no século XII, Bháskara apresentou a solução de equações de 2º grau ao resolver problemas de ordem comercial/financeira, sua solução é a que mais se assemelha à forma utilizada atualmente. Sridhara, também no século XII, desenvolveu a regra que originou a fórmula atual, conhecida no Brasil como fórmula de Bháskara. (FRAGOSO, 2000)

No século IX, Mohamed ibn-Musa al-Khowarizmi, apresenta, de forma retórica, a equação polinomial de 2º grau com sua resolução e dá uma comprovação geométrica denominada método de completar quadrados. No século XIV, na China, Chu Shih-chieh, apresenta, também de forma retórica, uma técnica baseada em aproximações sucessivas, de grande precisão, denominado método fan-fan. Do século XV ao XVII, na Europa, muitos matemáticos desenvolveram formas distintas de representar e resolver equações polinomais de 2º grau, dentre os quais citamos François Viète, René Decartes. (FRAGOSO, 2000)

CAPÍTULO 2

FUNÇÕES QUADRÁTICAS.

Definição

Uma função consiste de dois conjuntos não vazios A e B e de uma regra f que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $f(x) \in B$.

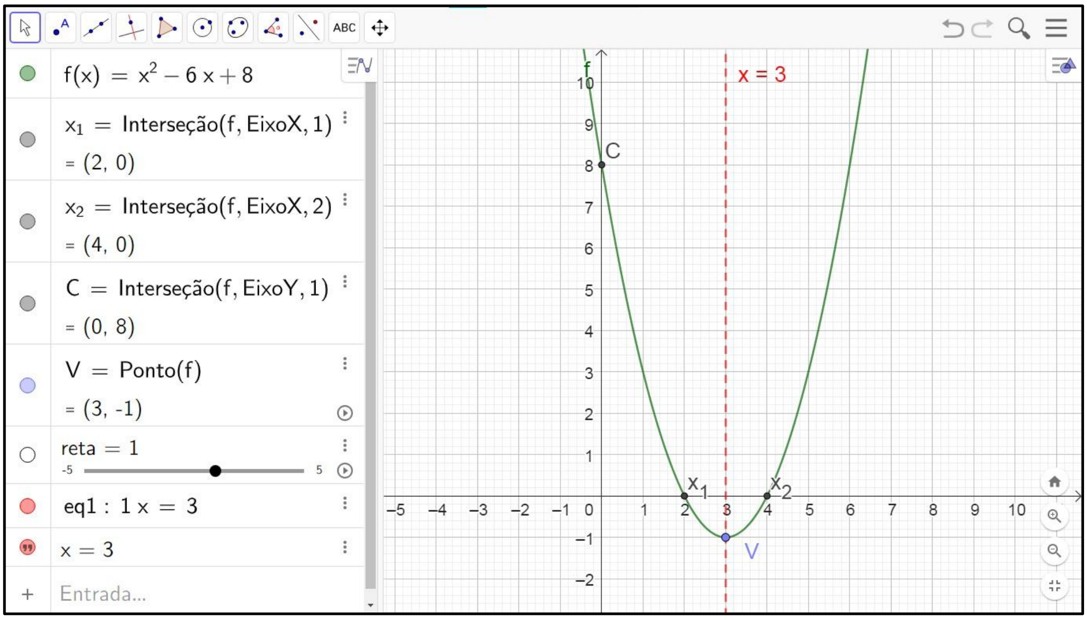
Uma função será simbolizada por

$$\begin{aligned} f: A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

2.1 Elementos Gráficos da Função Quadrática. [Aula 5]

Nesta aula, após definir a função quadrática como a função com regra de associação entre domínio e contradomínio no formato $f(x) = ax^2 + bx + c$ com a, b e c constantes reais e $a \neq 0$, usaremos o programa de geometria dinâmica (GeoGebra) para discutir os seus principais elementos gráficos.

Figura 21 – Elementos da função quadrática $f(x) = x^2 - 6x + 8$



Fonte: O autor (2024).

Na figura 21, podemos observar duas regiões:

Região 1

A representação do plano cartesiano, onde temos o gráfico da função $f(x) = x^2 - 6x + 8$, a linha na cor verde simbolizando geometricamente a relação entre o domínio (valores de x) e a imagem (valores de y) da função. Essa linha é chamada de curva da função quadrática e seu formato é uma parábola. Temos ainda, a reta vertical $x = 3$, que para a função $f(x)$ vem a ser o eixo de simetria do gráfico, pois divide o mesmo em duas figuras espelhadas (simétricas).

Região 2

Um quadro à esquerda que na sequência apresenta:

Regra de associação $f(x) = x^2 - 6x + 8$

As coordenadas de alguns pontos de destaque.

Os pontos $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$, pontos de interseção da curva com o eixo X, são chamados **zeros da função**, pois são os valores de x para os quais a função assume o valor zero. O ponto **C**, que é a **interseção da curva com eixo Y**, é o valor assumido pela função para $x = 0$. E o ponto **V**, é o vértice da parábola, que é o gráfico da função. Este ponto que está associado ao valor **mínimo** dessa função e cuja imagem é o intervalo $[-1, \infty)$ determinado pela coordenada y de **V**, como mostrado na figura.

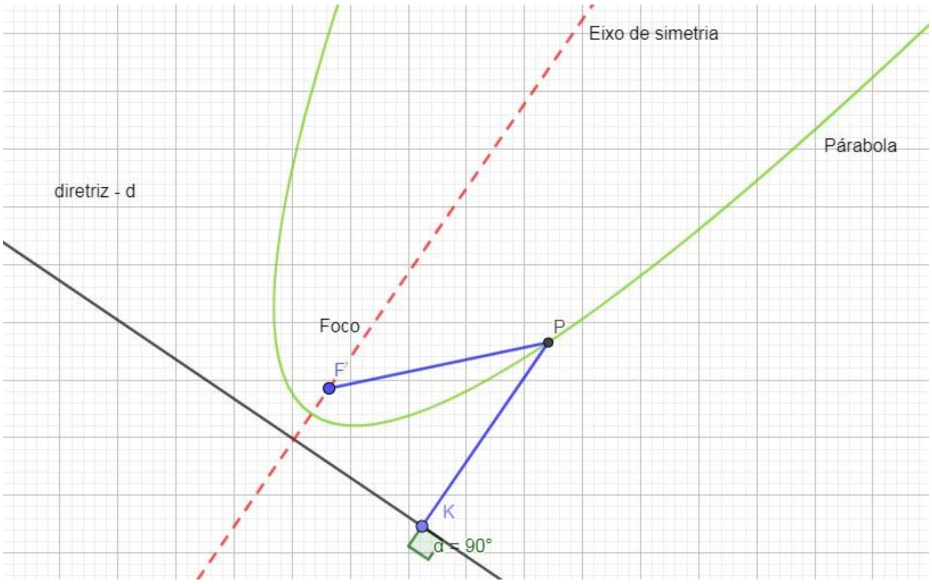
Sobre Parábolas e Concavidade

Antes de seguirmos discutindo os elementos do gráfico da função quadrática, vale à pena falarmos sobre o elemento parábola.

Do ponto de vista geométrico, uma parábola é um lugar geométrico (um conjunto de pontos que ocupam o plano segundo uma característica específica).

Dado um ponto F, chamado foco e uma reta r chamada diretriz, a parábola é conjunto de pontos que estão equidistantes do foco F e da reta r. (figura 22)

Figura 22 – Parábola e seus elementos



Fonte: O autor (2024).

Na figura 22, temos que os segmentos PF e PK têm o mesmo tamanho, ou seja, P é equidistante de F (foco) e da diretriz, uma vez que PK é perpendicular à diretriz. A característica de P ser equidistante de F e da diretriz confere à parábola um aspecto simétrico em torno da reta perpendicular à diretriz e que passa por F. Tal reta é chamada de eixo de simetria da parábola.

O aspecto curvo da parábola divide o plano em duas regiões uma região externa à curvatura e uma região interna à curvatura, uma região côncava, assim, quando nos referirmos à **concavidade** da parábola estamos observação a direção tomada por essa curvatura interna.

Discutiremos a seguir como calcular cada um dos elementos do gráfico:

Seja uma função quadrática na forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$

Zeros da Função

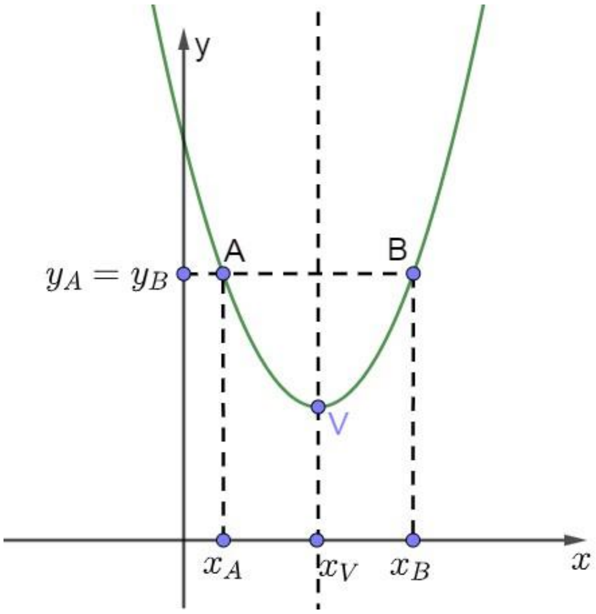
Por definição são os valores de x tais que $ax^2 + bx + c = 0$, ou seja, devemos resolver a equação de 2º grau de acordo com capítulo 1. Os casos em que tal equação não possui solução indicam que o gráfico não intersecta o eixo X.

Interseção com o eixo Y

Para obter o valor da interseção basta considerar $x = 0$ e obter o valor $f(0) = c$, para determinar as coordenadas do ponto $(0, c)$.

Coordenadas do Vértice $\boldsymbol{V = (x_V, y_V)}$

Figura 23 – Simetria e as coordenadas do vértice.



Fonte: O autor (2024).

Observa figura 23, devido à simetria da parábola, pontos com mesma ordenada y são equidistantes do eixo de simetria $(x = x_V)$, ou seja,

$$y_A = y_B \Rightarrow x_V - x_A = x_B - x_V$$
$$\Rightarrow 2x_V = x_A + x_B \qquad (Res. 1)$$

Considerando $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, então

$y_A = f(x_A) = ax_A^2 + bx_A + c$ e $y_B = f(x_B) = ax_B^2 + bx_B + c$

$$y_A = y_B \Rightarrow ax_A^2 + bx_A + c = ax_B^2 + bx_B + c$$
$$\Rightarrow ax_A^2 + bx_A = ax_B^2 + bx_B$$
$$\Rightarrow ax_A^2 - ax_B^2 = -bx_A + bx_B$$
$$\Rightarrow a(x_A^2 - x_B^2) = -b(x_A - x_B)$$

$\Rightarrow a(x_A + x_B)(x_A - x_B) = -b(x_A - x_B)$ e como $x_A \neq x_B$, temos

$$\Rightarrow x_A + x_B = -\frac{b}{a} \qquad (Res. 2)$$

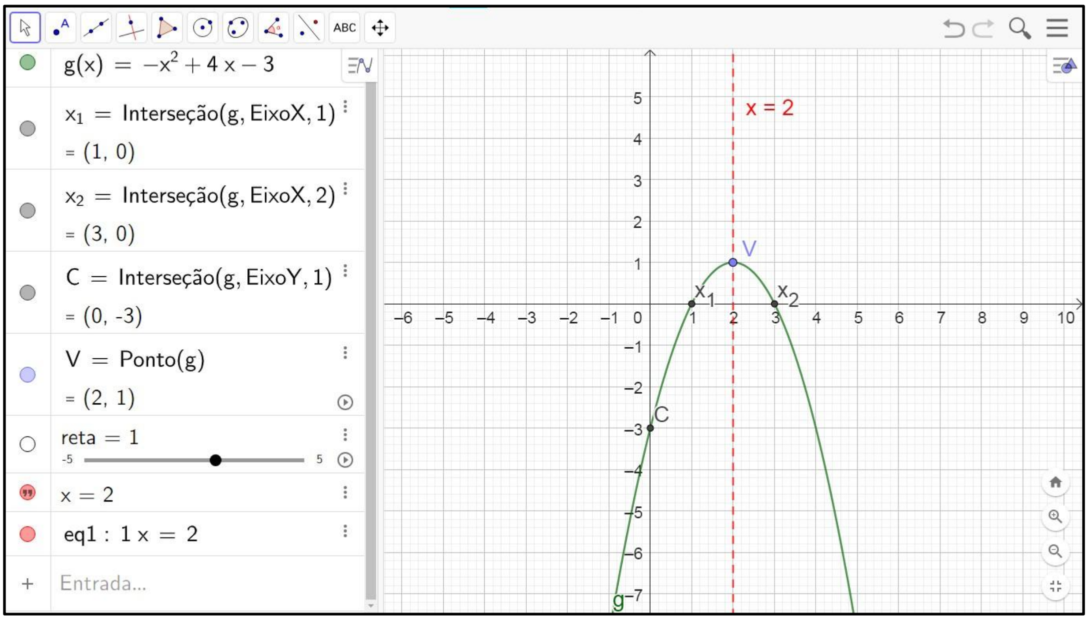
Aplicando $(Res.1)$ e $(Res.2)$ obtemos

$\Rightarrow 2x_V = -\frac{b}{a}$

Coordenadas do Vértice (2.1) $\therefore \boxed{x_V = -\frac{b}{2a}}$ e $\boxed{y_V = f(x_V)}$

O coeficiente a e a concavidade do gráfico.

Figura 24 – Gráfico da função quadrática $f(x) = -x^2 + 4x - 3$



Fonte: O autor (2024).

Observando os gráficos de $f(x) = x^2 - 6x + 8$ e $g(x) = -x^2 + 4x - 3$, nas figuras 21 e 24, respectivamente, vemos que os gráficos apresentam concavidades diferentes.

Reescrevendo $f(x) = x^2 - 6x + 8$ em função do quadrado da diferença:

$f(x) = x^2 - 6x + 8 = (x - 3)^2 - 1$

Como $(x - 3)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ temos que $f(x)$ possui um valor mínimo igual a -1, estabelecendo o vértice como o ponto de menor ordenada de $f(x)$, assim o gráfico tem concavidade para cima.

Reescrevendo $g(x) = -x^2 + 4x - 3$ em função do quadrado da diferença:

$g(x) = -x^2 + 4x - 3 = -(x - 2)^2 + 1$

Sendo $-(x-2)^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ temos que $g(x)$ possui um valor máximo igual a 1, estabelecendo o vértice como o ponto de maior ordenada de $g(x)$, assim o gráfico tem concavidade para baixo.

Agora generalizando os exemplos anteriores, considere
$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, então

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + a\left(-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

Sendo $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$ temos a seguinte classificação:

Se $a > 0$ então $\frac{-b^2+4ac}{4a}$ é valor mínimo de $f(x)$ e seu gráfico tem **concavidade para cima**.

Se $a < 0$ então $\frac{-b^2+4ac}{4a}$é valor máximo de $f(x)$ e seu gráfico tem **concavidade para baixo.**

2.2 Formatos para a lei de associação da função quadrática. [Aula 6]

Nesta aula, utilizando os resultados da aula anterior e a relação da forma geral da lei formação da função quadrática com produtos notáveis, construiremos a forma fatorada e forma canônica da lei de formação da função quadrática.

Temos 3 formas básicas de escrever a lei de associação (formação) da função quadrática:

Forma geral: $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$,

Forma fatorada: esta forma só é possível se a função possui zeros.

Considere $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, e que $x_1 \neq x_2$ são zeros de $f(x)$, ou seja, $f(x_1) = f(x_2) = 0$

Utilizando os resultados na obtenção das coordenadas do vértice, em particular $(Res.2)$, temos:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2)} \qquad (Res.3)$$

Sendo $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

Usando $Res.3$ e o fato de $f(x_1) = 0$

$$f(x_1) = 0 \Rightarrow a\left[x_1^2 - (x_1 + x_2)x_1 + \frac{c}{a}\right] = 0$$

$$\Rightarrow a\left[x_1^2 - x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + \frac{c}{a}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2} \qquad (Res.4)$$

Usando $(Res.3)$ e $(Res.4)$

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \Rightarrow f(x) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2]$$

$$\Rightarrow f(x) = a(x^2 - x \cdot x_1 - x \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2)$$

$$\Rightarrow f(x) = a[x \cdot (x - x_1) - x_2 \cdot (x - x_1)]$$

Portanto,

Forma Fatorada (2.3) $\boxed{f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)}$

No processo dessa demonstração obtivemos um resultado interessante.

Ao escrevermos

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

temos um polinômio quadrático $p(x) = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ cujas raízes x_1 e x_2 satisfazem às condições simultâneas

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{e} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

A verificação dessas condições simultâneas também é uma forma de se determinar as raízes de um polinômio de grau 2.

Forma canônica: esta forma é estabelecida em função das coordenadas do vértice.

Para generalização do estudo da concavidade obtivemos de forma parcial a **forma canônica.**

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

Usando a expressão (2.1) para as coordenadas temos que

$$x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow \frac{b}{2a} = -x_V$$

Assim,

$$f(x) = a(x - x_V)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

E como $y_V = f(x_V)$ temos

$$y_V = f(x_V) = a(x_V - x_V)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow \boxed{y_V = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}}$$

Portanto,

Forma Canônica (2.4) $\boxed{f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V}$

Resumindo

Forma Geral: $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$,

Forma Fatorada: $f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$, com x_1 e x_2 sendo zeros da função $f(x)$.

Forma Canônica: $f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V$, com $V = (x_V, y_V)$ sendo vértice da parábola que é gráfico da função $f(x)$.

Exercícios de fixação

Questão 1

Determine os zeros da função, a interseção com o eixo Y, as coordenadas do vértice e a concavidade da curva, para construir um esboço do gráfico da função indicada pela lei de associação em cada item abaixo:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$ b) $f(x) = -x^2 + 8x - 12$ c) $f(x) = 2x^2 - 8x + 10$

2.3 Exercícios de fixação [Aula 7]

Aula para retomada de conceitos e prática de estratégias para resolução de atividades envolvendo propriedades gráficas da função quadrática.

Começaremos a aula discutindo as soluções da questão 1, enunciada na aula anterior

Questão 1 – a)

Completando o quadrado e obtendo a forma Canônica da função

$f(x) = x^2 - 6x + 5$

$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 - 4 = 0$ (forma canônica) $\Rightarrow V = (3, -4)$

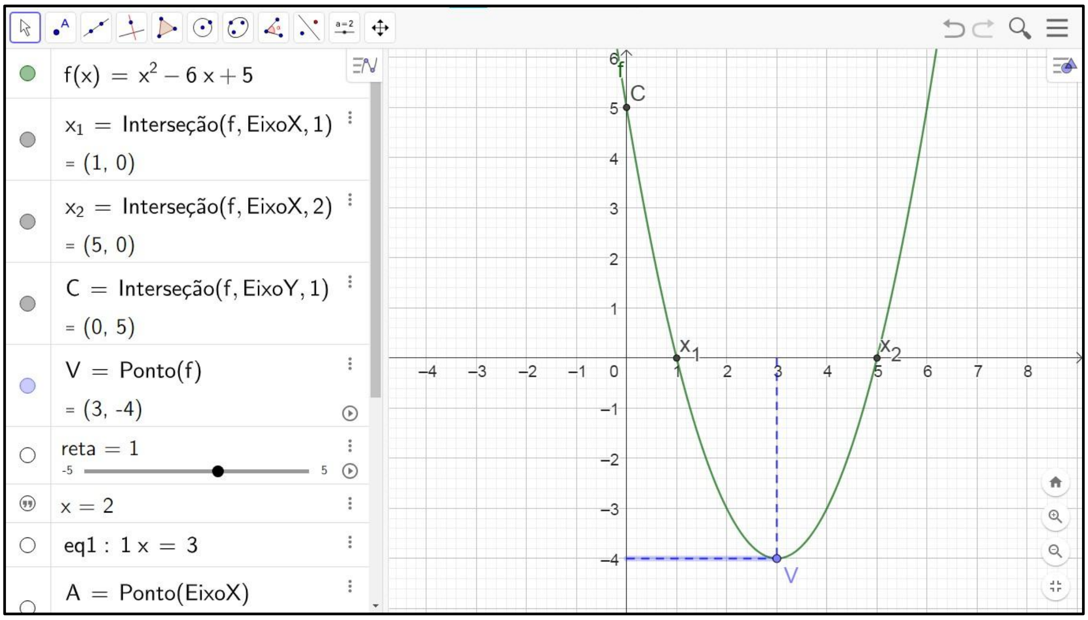
$\Rightarrow (x-3)^2 = 4$

$\Rightarrow |x-3| = 2$

$x = 1$ ou $x = 5$

Fazendo $x = 0$ obtemos a interseção com eixo Y, no caso o ponto $C = (0{,}5)$ e como o coeficiente líder a é positivo $(a = 1)$ a concavidade do gráfico é para cima. Apresentamos com base nestes resultados a solução gráfica na figura a seguir.

Figura 25 – Solução gráfica questão 1 - a.



Fonte: O autor (2024) .

Questão 1 – b)

Completando o quadrado e obtendo a forma canônica da função

$f(x) = -x^2 + 8x - 12$

$-x^2 + 8x - 12 = 0 \Rightarrow -(x^2 - 8x + 12) = 0$

$\Rightarrow -(x - 4)^2 + 4 = 0$(forma canônica) $\Rightarrow V = (4{,}4)$

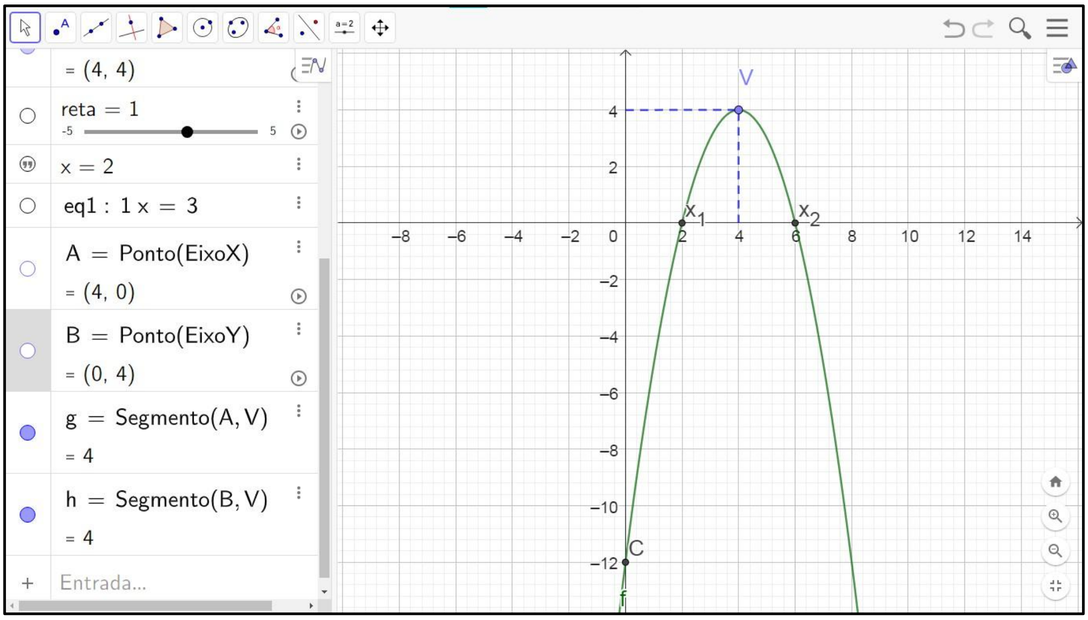
$\Rightarrow (x - 4)^2 = 4$

$\Rightarrow |x - 4| = 2$

$x = 2$ ou $x = 6$

Fazendo $x = 0$ obtemos a interseção com eixo Y, no caso o ponto $C = (0, -12)$ e como o coeficiente líder a é negativo $(a = -1)$ a concavidade do gráfico é para baixo. Apresentamos com base nestes resultados a solução gráfica na figura a seguir.

Figura 26 – Solução gráfica questão 1 - b.



Fonte: O autor (2024).

Questão 1 – c)

Completando quadrado e obtendo a forma canônica da função

$f(x) = 2x^2 - 8x + 10$

$$2x^2 - 8x + 10 = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 4x + 5) = 0$$

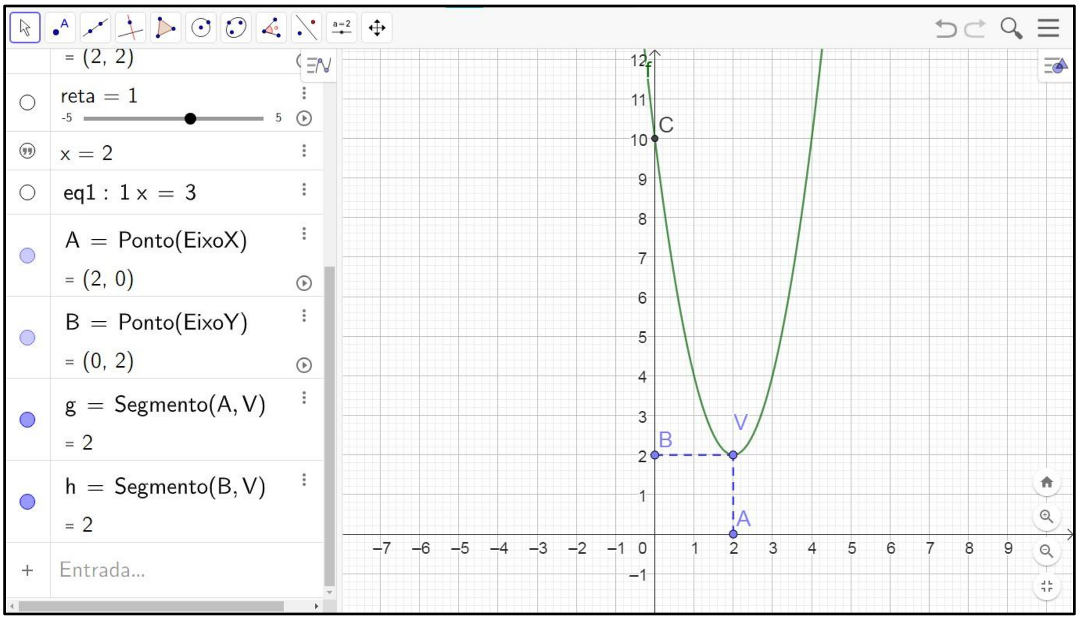
$$\Rightarrow 2[(x-2)^2 + 1] = 0$$

$$\Rightarrow 2(x-2)^2 + 2 = 0 \text{ (forma canônica)} \Rightarrow V = (2{,}2)$$

Como $2(x-2)^2 + 2 \geq 2$, temos $S = \emptyset$

Fazendo $x = 0$ obtemos a interseção com eixo Y, no caso o ponto $C = (0{,}10)$ e como o coeficiente líder é positivo $(a = 2)$ a concavidade do gráfico é para cima. Apresentamos com base nestes resultados a solução gráfica na figura a seguir.

Figura 27 – Solução gráfica questão 1 - c.

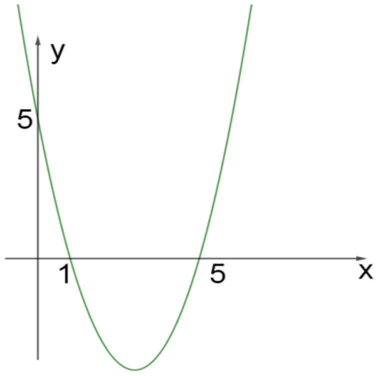


Fonte: O autor (2024).

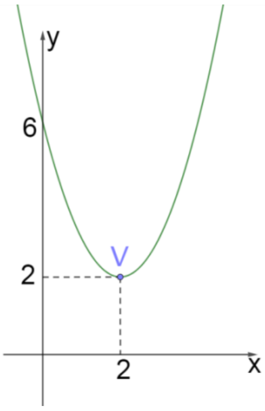
Questão 2

Obtenha a lei de associação na forma geral $f(x) = ax^2 + bx + c$ da função quadrática que originou cada gráfico abaixo.

a)



b)



SOLUÇÃO

a) De Acordo com o gráfico $x_1 = 1$ e $x_2 = 5$ (zeros) e ainda um ponto $C = (0{,}5)$.
Aplicando a forma fatorada (2.3) da lei de formação $f(x) = a(x-1)(x-5)$.
Para determinar o valor de a usaremos as coordenadas de C.
$f(0) = 5 \Rightarrow 5 = a(0-1)(0-5) \Rightarrow a = 1$. Assim,

$$f(x) = 1 \cdot (x-1)(x-5) \Rightarrow \boxed{f(x) = x^2 - 6x + 5}$$

b) Temos as coordenadas do vértice $V = (2{,}2)$ e o ponto $C = (0{,}6)$.
Aplicando a forma canônica (2.4) de lei de formação $f(x) = a(x-2)^2 + 2$.
Para determinar o valor de a usaremos as coordenadas de C.
$f(0) = 6 \Rightarrow 6 = a(0-2)^2 + 2 \Rightarrow a = 1$. Assim,

$$f(x) = 1 \cdot (x-2)^2 + 2 \Rightarrow \boxed{f(x) = x^2 - 4x + 6}$$

Questão 3

ENEM 2021 - Adaptada

Em um ano, uma prefeitura apresentou o relatório de gastos públicos realizados pelo município. O documento mostra que foram gastos 72 mil reais no mês de janeiro (mês 1), que o maior gasto mensal ocorreu no mês de agosto (mês 8) e que a prefeitura gastou 105 mil reais no mês de dezembro (mês 12). A curva que modela esses gastos é a parábola $y = T(x)$, com x sendo o número correspondente ao mês e $T(x)$, em milhar de real.

Qual a expressão da função cujo gráfico é o da parábola descrita?

SOLUÇÃO

"A curva que modela estes gastos é a parábola", isto é, a função gastos é uma função quadrática. Temos os pontos $A = (1{,}72)$; $B = (12{,}105)$ e $V = (8, y_V)$. Aplicando a forma canônica (2.4) de lei de formação $f(x) = a(x-8)^2 + y_V$. E substituindo os valores das coordenadas dos pontos A e B na forma canônica, Teremos:

$$\begin{cases} 105 = a(12-8)^2 + y_V \\ 72 = a(1-8)^2 + y_V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 105 = 16a + y_V \\ 72 = 49a + y_V \end{cases} \Rightarrow a = -1 \; e \; y_V = 121$$

Finalmente, $f(x) = -(x-8)^2 + 121 \Rightarrow \boxed{f(x) = -x^2 + 16x + 57}$

Questão 4

Com base na regra de associação de cada item, determine os pontos de interseção com os eixos, as coordenadas do vértice e o conjunto imagem da função $f(x) = -x^2 + 8x - 7$.

SOLUÇÃO

Completando quadrado e obtendo a forma canônica da função

$f(x) = -x^2 + 8x - 7$

$-x^2 + 8x - 7 = 0 \Rightarrow -(x^2 - 8x + 7) = 0$

$\Rightarrow -[(x-4)^2 - 9] = 0$

$\Rightarrow -(x-4)^2 + 9 = 0$ (forma canônica) $\Rightarrow V = (4{,}9)$

$\Rightarrow (x-4)^2 = 9$

$\Rightarrow |x-4| = 3$

$x = 1$ ou $x = 7$ (zeros da função $f(x)$)

Fazendo $x = 0$ obtemos a interseção com eixo Y, no caso o ponto $C = (0, -7)$ e como o coeficiente líder é negativo $(a = -1)$ a concavidade do gráfico é para baixo. Deste modo, o vértice é ponto mais alto do gráfico de $f(x)$ e, portanto 9 é o valor máximo de $f(x)$. Temos que o conjunto imagem de $f(x)$ é $(-\infty, 9]$.

2.4 O Vértice e os Problemas de Otimização. [Aula 8]

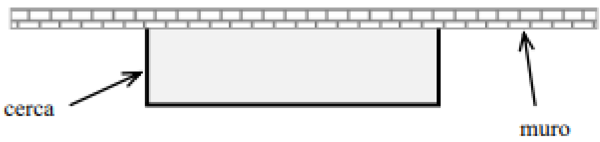
Nesta aula apontaremos métodos para resolução de problemas que envolvam valores máximos ou mínimos de funções quadráticas, iremos abordar dois tipos de Problemas: Problemas de aplicação direta e problemas de construção da função. Lembramos que valor máximo ou mínimo da função está diretamente ligado às coordenadas do vértice.

Usaremos questões vestibulares e de concursos

PROBLEMA 1

Profmat (ENA 2012)

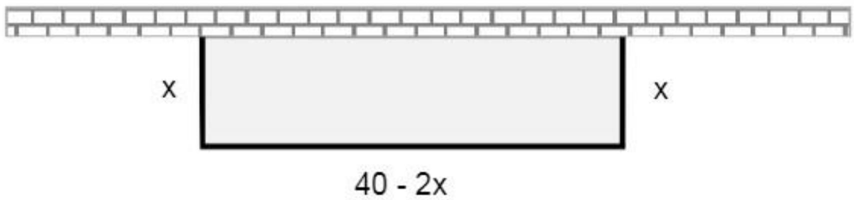
Um fazendeiro deseja delimitar uma área retangular utilizando 40m de cerca e aproveitando um muro (de mais de 40m) que já está construído. Determine as dimensões do retângulo de maior área que o fazendeiro consegue delimitar



SOLUÇÃO

Esse problema é um problema de construção da função quadrática.

De acordo com os dados podemos refazer a figura nomeando por x a largura do retângulo.



Como a área de retângulo é o produto das dimensões do mesmo, temos:

$$A = x \cdot (40 - 2x) \Rightarrow A(x) = -2x^2 + 40x$$

A área retangular é uma função quadrática de x com concavidade para baixo, logo é uma função que possui valor máximo. Nosso objetivo é determinar o valor de x para se obter a área máxima, ou seja, x_V.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{40}{2(-2)} = 10$$

Portanto, o retângulo mede 20 m x 10 m.

PROBLEMA 2

(CFO PMES 2013 – Exatus) - Adaptada

Uma agência de viagens vende pacotes turísticos coletivos com destino a Fortaleza. Um pacote para 40 clientes custa R$ 2000,00 por pessoa e, em caso de desistência, cada pessoa que permanecer no grupo deve pagar mais R$ 100,00 por cada desistente do pacote de viagem. Dessa forma, para que essa agência obtenha lucro máximo na venda desse pacote de viagens, qual o número de pessoas que devem realizar a viagem?

SOLUÇÃO

Outro problema de construção da função quadrática.

Temos as grandezas: Desistentes, Preço, Passagens Vendidas e Arrecadação. De acordo com o problema a arrecadação depende do número de desistentes, usaremos uma tabela para mostrar a relação entre estas 4 grandezas:

Desistentes	Passagens Vendidas	Preço	Arrecadação
0	40	2000	$40 \cdot 2000$
1	$40-1$	$2000+100$	$(40-1)\cdot(2000+100)$
2	$40-2$	$2000+100\cdot 2$	$(40-2)\cdot(2000+100\cdot 2)$
3	$40-3$	$2000+100\cdot 3$	$(40-3)\cdot(2000+100\cdot 3)$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x	$40-x$	$2000+100\cdot x$	$(40-x)\cdot(2000+100\cdot x)$

Objetivo aqui não é determinar neste momento o valor da arrecadação mas evidenciar a relação entre o número de desistentes x e a arrecadação $A(x)$.

Veja,

$A(x) = (40-x)\cdot(2000+100\cdot x)$ é uma função quadrática que na forma fatorada:

$$A(x) = 100(40-x)\cdot(20+x)$$

Mostra-se como uma função de valor máximo uma vez que, por multiplicação distributiva, o coeficiente de x^2 é -1.

A forma fatorada $A(x) = 100(40 - x) \cdot (20 + x)$ evidencia que seus zeros são 40 e -20.

Nosso objetivo é determinar o valor de $40 - x$ para que se obtenha a arrecadação máxima, ou seja, devemos obter o valor de x_V.

Aproveitando a simetria dos zeros (x_1, x_2) da função em relação ao x_V podemos fazer uso do resultado $(Res. 1)$ na demonstração das coordenadas do vértice, para estabelecer uma relação entre eles.

Coordenada x do Vértice (2.5)

$$\boxed{x_V = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

Usando a relação (2.5) temos

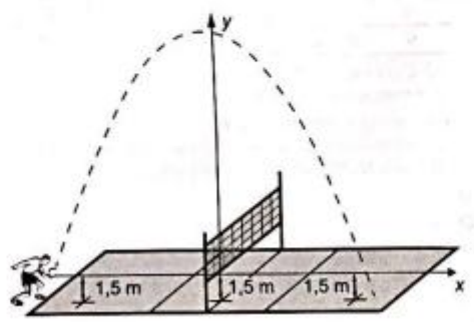
$$x_V = \frac{40 - 20}{2} = 10$$

10 passageiros devem desistir, portanto 30 pessoas devem realizar a viagem.

PROBLEMA 3

ENEM 2022

Em jogos de voleibol, um saque é invalidado se a bola atingir o teto do ginásio onde ocorre o jogo. Um jogador de uma equipe tem um saque que atinge uma grande altura. Seu recorde foi quando a batida do saque se iniciou a uma altura de 1,5 m do piso da quadra, e a trajetória da bola foi descrita pela parábola $y = -\frac{x^2}{6} - \frac{7x}{3} + 12$ em que y representa a altura da bola em relação ao eixo x (das abscissas) que está localizado a 1,5 m do piso da quadra, como representado na figura. Suponha que em todas as partidas algum saque desse jogador atinja a mesma altura do seu recorde.



A equipe desse jogador participou de um torneio de voleibol no qual jogou cinco partidas, cada uma delas em um ginásio diferente. As alturas dos tetos desses ginásios, em relação aos pisos das quadras, são:

Ginásio	I	II	III	IV	V
Altura	17 m	18 m	19 m	21 m	40 m

O saque desse atleta foi invalidado

a) Só no ginásio I
b) Só nos ginásios I e II
c) Só nos ginásios I, II e III
d) Só nos ginásios I, II, III e IV
e) Em todos os ginásios

SOLUÇÃO

Temos um problema de aplicação direta, para responder a questão devemos determinar a altura máxima (y_V) que o saque atinge de acordo a função da trajetória, e somar 1,5 que é altura de onde parte o saque, feito isso confrontaremos o resultado com a altura dos ginásios.

Se $y = -\frac{x^2}{6} - \frac{7x}{3} + 12 \Rightarrow x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{-7}{3}}{2\left(-\frac{1}{6}\right)} = -7$

Logo,

$$y_V = -\frac{(-7)^2}{6} - \frac{7(-7)}{3} + 12 \Rightarrow y_V = \frac{49}{6} + 12 \cong 20{,}16$$

Altura máxima atingida pelo saque $\cong 20{,}16 + 1{,}5 \cong 21{,}66\ m$

Portanto, o saque será invalidado nos quatro primeiros ginásios. Logo, a resposta é letra d.

2.5 Exercícios Propostos

Exercício 2.1

Com base na regra de associação de cada item, determine os pontos de interseção com os eixos, as coordenadas do vértice e o conjunto imagem das funções abaixo:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

b) $f(x) = x^2 - 8x + 12$

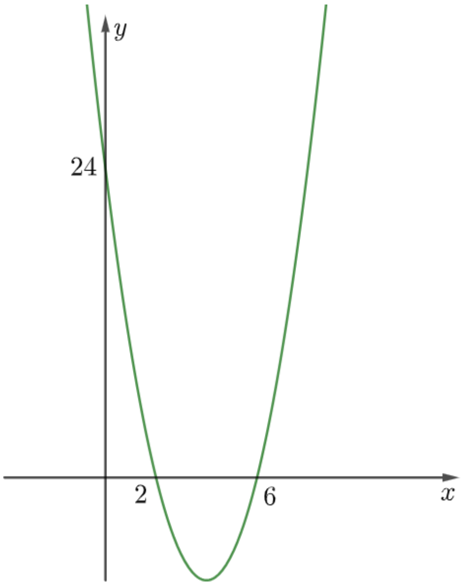
c) $f(x) = -x^2 + 6x - 8$

d) $f(x) = -x^2 + 10x - 16$

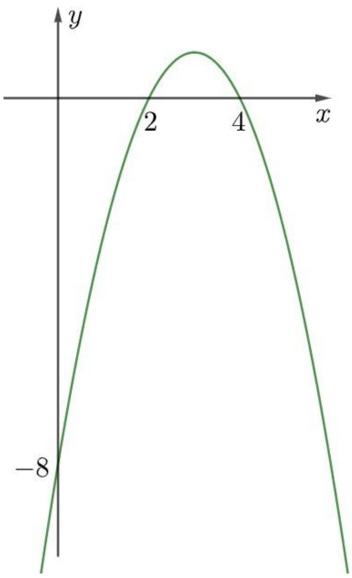
Exercício 2.2

Determine a lei de associação da função quadrática correspondente ao gráfico abaixo:

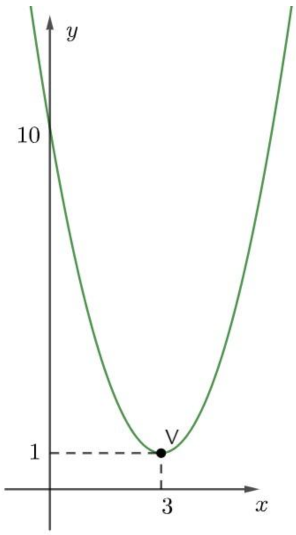
a)



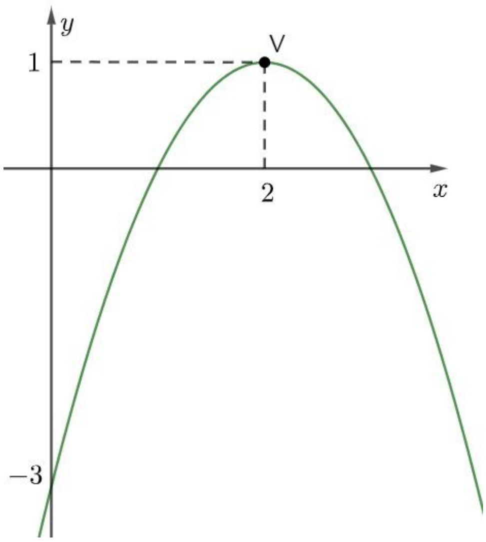
b)



c)



d)



Exercício 2.3 - **ENEM 2022**

Ao analisar os dados de uma epidemia em uma cidade, peritos obtiveram um modelo que avalia a quantidade de pessoas infectadas a cada mês, ao longo de um ano. O modelo é dado por $p(t) = -t^2 + 10t + 24$, sendo t um número natural, variando de 1 a 12, que representa os meses do ano, e $p(t)$ a quantidade de pessoas infectadas no mês t do ano. Para tentar diminuir o número de infectados no próximo ano, a Secretaria Municipal de Saúde decidiu intensificar a propaganda oficial sobre os cuidados com a epidemia. Foram apresentadas cinco propostas (I, II, III, IV e V), com diferentes períodos de intensificação das propagandas:

Proposta I: $1 \leq \mathrm{t} \leq 2$
Proposta II: $3 \leq \mathrm{t} \leq 4$
Proposta III: $5 \leq \mathrm{t} \leq 6$
Proposta IV: $7 \leq \mathrm{t} \leq 9$
Proposta I: $10 \leq \mathrm{t} \leq 12$

A sugestão dos peritos é que seja escolhida a proposta cujo período de intensificação da propaganda englobe o mês em que, segundo o modelo, há a maior quantidade de infectados. A proposta que deve ser escolhida é

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

Exercício 2.4 - **ENEM 2022**

Considere que o modelo matemático utilizado no estudo da velocidade V, de uma partícula de um fluido escoando em um tubo, seja diretamente proporcional à diferença dos quadrados do raio R da secção transversal do tubo e da distância x da partícula ao centro da secção que a contém. Isto é, $V(x) = K^2(R^2 - x^2)$, em que K é uma constante positiva.

O valor de x, em função de R, para que a velocidade de escoamento de uma partícula seja máxima é de

a) 0
b) R
c) 2R
d) KR
e) K^2R^2

Exercício 2.5 - **ENEM 2021**

Uma empresa de chocolates consultou o gerente de produção e verificou que existem cinco tipos diferentes de barras de chocolate que podem ser produzidas, com os seguintes preços no mercado:

Barra	I	II	III	IV	V
Preço	R$2,00	R$3,50	R$4,00	R$7,00	R$8,00

Analisando as tendências do mercado, que incluem a quantidade vendida e a procura pelos consumidores, o gerente de vendas da empresa verificou que o lucro L com a venda de barras de chocolate é expresso pela função $L(x) = -x^2 + 14x - 45$, em que x representa o preço da barra de chocolate.

A empresa decide investir na fabricação da barra de chocolate cujo preço praticado no mercado renderá o maior lucro.

Nessas condições, a empresa deverá investir na produção da barra

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

Exercício 2.6

Apolônio hoje vende diariamente cerca de 210 marmitex ao preço de R$15,00 cada. Ele percebeu que para cada real de desconto ele vende 30 marmitex a mais. Qual a arrecadação máxima que Apolônio pode obter? E isso ocorre quando ele pratica que valor de desconto?

CAPÍTULO 3
POLINÔMIOS E FATORAÇÃO.

3.1 Polinômios: Definição e Operações básicas. [Aula 9]

Nesta aula, estabelecemos conceitos básicos de polinômios e discutimos as operações de adição, subtração e multiplicação de polinômios indicando o possível grau do polinômio resultante destas operações

Definindo Polinômio (3.1)

A igualdade $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$, na atividade 2 (figura 5) do capítulo 1 nos fornece alguns elementos que precisam de definição. As expressões $x+3$ e $x^2 + 6x + 9$ fazem parte de uma categoria de elementos matemáticos, chamada Polinômio. Para entendermos melhor o que é um polinômio vamos falar da unidade polinomial: o monômio.

Um monômio é um produto de número e letras. Tais letras representam uma variável e são utilizados números naturais como expoentes das variáveis.
$2p^2q^3$, $-5m^3$ e $\frac{1}{3}j^8k^5$ são monômios. E $7\frac{p^2}{q^8}$ e $3x^{-10}$ não são monômios.

Um polinômio é uma soma algébrica de monômios. Em nosso estudo, utilizaremos polinômios com uma única letra, ou seja, tais polinômios serão a soma algébrica de monômios com a mesma letra com diferentes expoentes.

Genericamente, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_o$
$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_o$ são números constantes chamados coeficientes do polinômio.

Polinômio nulo

É o polinômio no qual todos os coeficientes são nulos.

Grau de um Polinômio (3.2)

Dado um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, o grau de $p(x)$ denotado por $gr(p)$ é o maior expoente, considerando todos os monômios de $p(x)$ com coeficiente não nulo.

Por se tratar de uma soma de dois monômios $q(x) = x + 3$ é chamado binômio e $gr(q) = 1$, enquanto $n(x) = x^2 + 6x + 9$ é um trinômio e $gr(n) = 2$.

Valor Numérico de um Polinômio (3.3)

Veja se $p(x) = 2x^5 - 4x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x + 6$ e considerarmos $x = 3$ temos:

$$p(3) = 2 \cdot 3^5 - 4 \cdot 3^4 + 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + 6$$
$$= 2 \cdot 243 - 4 \cdot 81 + 27 - 3 \cdot 9 + +5 \cdot 3 + 6 = 183$$

Raiz de um Polinômio (3.4)

Dado um polinômio $p(x)$, dizemos que o valor a é raiz $p(x)$ se $p(a) = 0$.

Operações com Polinômios

Considere os polinômios

$p(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + x - 3$ e $j(x) = x^4 + 3x^2 - 2x + 6$

Adição e subtração (redução a termos semelhantes)

A adição de $p(x) + j(x)$ resulta no polinômio $s(x)$

$s(x) = (2 + 1)x^4 - 3x^3 + (5 + 3)x^2 + (1 - 2)x - 3 + 6$

$s(x) = 3x^4 - 3x^3 + 8x^2 - x + 3$

A subtração $p(x) - j(x)$ resulta no polinômio $d(x)$

$d(x) = (2 - 1)x^4 - 3x^3 + (5 - 3)x^2 + (1 + 2)x - 3 - 6$

$d(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x - 9$

Grau da Soma ou da Subtração (3.5)

No processo de redução a termos semelhantes pode ocorrer anulação do coeficiente do monômio de maior grau, assim, $gr(p + j) \leq \max\{gr(p), gr(j)\}$

Multiplicação

Considere a multiplicação entre os monômios $3x^3$ e $5x^4$, na variável x.

$$3x^3 \cdot 5x^4 = 3 \cdot 5x^{3+4} = 15x^7$$

Considere agora a multiplicação entre o monômio $3x^3$ e o binômio $5x^4 - 2x$, na variável x. Pela distributividade da multiplicação em relação à diferença e a multiplicação de monômios, temos

$$\begin{aligned} 3x^3 \cdot (5x^4 - 2x) &= 3x^3 \cdot 5x^4 - 3x^3 \cdot 2x \\ &= 15x^7 - 6x^4 \end{aligned}$$

Considere agora a multiplicação entre os binômios $3x^3 - 2x^2$ e $5x^4 - 2x$, na variável x. Pela distributividade da multiplicação em relação à diferença aplicada 2 vezes e a multiplicação de monômios, temos

$$\begin{aligned} (3x^3 - 2x^2) \cdot (5x^4 - 2x) &= 3x^3 \cdot (5x^4 - 2x) - 2x^2 \cdot (5x^4 - 2x) \\ &= 15x^7 - 6x^4 - 10x^6 + 4x^3 \\ &= 15x^7 - 10x^6 - 6x^4 + 4x^3 \end{aligned}$$

A multiplicação de $p(x) \cdot j(x)$ resulta no polinômio $m(x)$ obtido pela multiplicação distributiva de $p(x)$ por $j(x)$ seguida pela redução a termos semelhantes.

$$m(x) = (2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + x - 3)(x^4 + 3x^2 - 2x + 6)$$

$$\begin{aligned} m(x) = {} & 2x^8 + 6x^6 - 4x^5 + 12x^4 - 3x^7 - 9x^5 + 6x^4 - 18x^3 + 5x^6 + 15x^4 \\ & - 10x^3 + 30x^2 + x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 6x - 3x^4 - 9x^2 + 6x - 18 \end{aligned}$$

$$m(x) = 2x^8 - 3x^7 + 11x^6 - 12x^5 + 30x^4 - 25x^3 + 19x^2 + 12x - 18$$

Uma alternativa a esse processo é o uso do algoritmo abaixo.

$p(x)$ / $j(x)$	$2x^4$	$-3x^3$	$5x^2$	x	-3
x^4	$2x^8$	$-3x^7$	$5x^6$	x^5	$-3x^4$
$0x^3$	$0x^7$	$0x^6$	$0x^5$	$0x^4$	$0x^3$
$3x^2$	$6x^6$	$-9x^5$	$15x^4$	$3x^3$	$-9x^2$
$-2x$	$-4x^5$	$6x^4$	$-10x^3$	$-2x^2$	$6x$
6	$12x^4$	$-18x^3$	$30x^2$	$6x$	-18

Distribuem-se os monômios que compõe $p(x)$ na linha superior, cada monômio em uma coluna. Distribuem-se os monômios que compõe $j(x)$ na 1ª coluna, cada monômio em uma linha, inclusive aquele de coeficiente 0, pois os polinômios devem estar completos. Efetuam-se as multiplicações de monômio de $p(x)$ por monômio de $j(x)$ até que os últimos monômios se multipliquem.

Para se obter o polinômio $m(x)$ basta somar os monômios que estão numa mesma diagonal que desce para a esquerda. Os polinômios $p(x)$ e $j(x)$ podem ser representados de forma incompleta (sem os monômios de coeficiente nulo), mas dessa forma se perderia a principal vantagem desse processo que é o alinhamento de termos semelhantes em uma diagonal facilitando a obtenção dos coeficientes de $m(x)$.

$$m(x) = 2x^8 - 3x^7 + 11x^6 - 12x^5 + 30x^4 - 25x^3 + 19x^2 + 12x - 18$$

Grau da multiplicação (3.6)

No processo o produto do monômio de maior grau de $p(x)$ = $2x^4$ pelo monômio de maior grau de $j(x)$ = x^4 resulta em um monômio $2x^8$ cujo grau é 8, ou seja, $gr(p \cdot j) = gr(p) + gr(j)$.

Se p e j são dois polinômios não nulos, então grau de $p \cdot j$ é igual à soma dos graus de p e j.

$$gr(p \cdot j) = gr(p) + gr(j)$$

DEMONSTRAÇÃO

Sejam $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ e $j(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ com $gr(p) = m$ e $gr(j) = n$.

Seja $c_r = a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + \cdots + a_{r-1} b_1 + a_r b_0$ um coeficiente qualquer de $p \cdot j$.

Temos:

$c_{m+n} = a_m \cdot b_n \neq 0$

$c_r = 0$, $\forall r > m + n$ e então

$gr(p \cdot j) = m + n = gr(p) + gr(j)$

3.2 A Divisão de um polinômio por um binômio $(x - a)$. [Aula 10]

Nesta aula, estudaremos o algoritmo de Euclides para divisão, em particular, com divisor $x - a$. Abordaremos o Teorema do Resto e o Teorema de D'Alambert.

A divisão de polinômios – Teorema (3.7)

Dados um polinômio p (dividendo) e um polinômio d não nulo (divisor), dividir p por d é determinar dois polinômios q (quociente) e r (resto) de modo que se verifiquem as duas condições seguintes:

I. $p = d \cdot q + r$

II. $gr(r) < gr(d)$ (ou r é nulo, caso em que a divisão é chamada exata)

Existem um único polinômio q e um único polinômio r que satisfaçam as duas condições.

DEMONSTRAÇÃO

Considere os polinômios

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$d(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0$

Existência

Ao dividir p por d teremos

1) Se $n < m$ então não temos nada a provar pois podemos considerar automaticamente $q = 0$ e $r = p$.
2) Se $n = m$ então $q = \frac{a_n}{b_m}$ e $r = p - \frac{a_n}{b_m}d$
3) Se $n > m$ então $q_1 = \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$ e $r_1 = p - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}d$ com $gr(r_1) = \alpha < n$

   Ao efetuarmos a divisão de $r_1(x) = c_\alpha x^\alpha + c_{\alpha-1}x^{\alpha-1} + \cdots + c_2x^2 + c_1x + c_0$

   Por d obteremos $q_2 = \frac{c_\alpha}{b_m}x^{\alpha-m}$ e $r_2 = r_1 - \frac{c_\alpha}{b_m}x^{\alpha-m}d$ com $gr(r_2) = \beta < \alpha$

Esse processo produz a cada passo um resto de grau pelo menos uma unidade menor do que o grau do resto anterior. Logo, podemos repeti-lo até que se obtenha r_k de modo que $gr(r_k) < m = gr(d)$, neste ponto também obtivemos um quociente q_k tal que $p = d \cdot q + r$, com $q = q_1 + q_2 + \cdots + q_k$ e $r = r_k$.

Unicidade

Admita que existam dois quocientes q_1, q_2 e dois restos r_1, r_2 na divisão de p por d, ou seja,

$p = dq_1 + r_1 = dq_2 + r_2$

Devemos mostrar que $q_1 = q_2$ e $r_1 = r_2$

Temos que

$dq_1 + r_1 = dq_2 + r_2 \Rightarrow d(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$

Se $q_1 \neq q_2$ ou $r_1 \neq r_2$, provemos que a igualdade $d(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$ não se verifica:

$gr[d(q_1 - q_2)] = gr(r_2 - r_1)$

Mas $gr[d(q_1 - q_2)] = gr(d) + gr(q_1 - q_2) \geq gr(d)$

E $gr(r_2 - r_1) \leq \max\{gr(r_1), gr(r_2)\} < gr(d)$.

Logo, $gr[d(q_1 - q_2)] \neq gr(r_2 - r_1)$ o que implica $d(q_1 - q_2) \neq r_2 - r_1$

Então, para evitar a contradição, devemos ter $q_1 = q_2$ e $r_1 = r_2$.

q e r são únicos.

■

Para nossos objetivos estudaremos inicialmente os casos em que o divisor é da forma $(x - a)$.

Considere os polinômios $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 2$ e $d(x) = x - 2$, a divisão de $p(x)$ por $d(x)$ é

$$
\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & x^3 & + & 2x^2 & - & 5x & - & 2 & x - 2 \\ \cline{9-9}
- & x^3 & + & 2x^2 & & & & & x^2 + 4x + 3 \\ \cline{1-4}
 & 0 & + & 4x^2 & - & 5x & & & \\
 & & - & 4x^2 & + & 8x & & & \\ \cline{3-6}
 & & & 0 & + & 3x & - & 2 & \\
 & & & & - & 3x & & 6 & \\ \cline{5-8}
 & & & & & 0 & & 4 &
\end{array}
$$

De acordo com o Teorema (3.7)

$p(x) = (x^3 + 2x^2 - 5x - 2) = (x^2 + 4x + 3)(x - 2) + 4$

Observando a expressão podemos apresentar o chamado **Teorema do Resto**.

Na expressão $p(x) = (x^2 + 4x + 3)(x - 2) + 4$, note que se tomarmos $x = 2$, que é raiz do divisor, temos $p(2) = (2^2 + 4 \cdot 2 + 3)(\mathbf{2} - \mathbf{2}) + 4 = 15 \cdot \mathbf{0} + 4 = 4$ (resto). Isso é possível porque o divisor $(x - 2)$ é de grau 1, condição necessária para a aplicação do Teorema.

Teorema do Resto (3.8)

Na divisão de um polinômio $p(x)$ por um binômio da forma $x - a$, o **resto** será um número igual a $p(a)$.

DEMONSTRAÇÃO

De acordo com o teorema (3.7) ao dividirmos $p(x)$ por $x - a$ temos

$$p(x) = q(x)(x - a) + r(x)$$

em que $q(x)$ e $r(x)$ são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de $p(x)$ por $x - a$. Como $x - a$ tem grau 1, o resto $r(x)$ é nulo ou tem grau zero; portanto $r(x)$ é um polinômio constante.

Calculemos os valores dos polinômios da igualdade acima em a:

$$p(a) = q(a)(a - a) + r(a)$$

Assim, $r = p(a)$

■

Como consequência do Teorema do Resto temos o Teorema de D'Alambert.

Teorema de D'Alambert (3.9)

Um polinômio $p(x)$ é divisível por $x - a$ se, somente se, $p(a) = 0$, ou seja, a é raiz de $p(x)$.

DEMONSTRAÇÃO

De acordo com o teorema Resto, temos $r = p(a)$. Então

$$r = 0 \Leftrightarrow p(a) = 0$$

■

EXEMPLO 1

Efetuando a divisão $p(x) = x^3 - 7x + 6$ por $x - 1$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 & x^3 & - & 7x & + & 6 & x - 1 \\
\cline{7-7}
- & x^3 & + & x^2 & & & x^2 + x - 6 \\
\cline{2-4}
 & x^2 & - & 7x & & & \\
- & x^2 & + & x & & & \\
\cline{2-4}
 & & - & 6x & + & 6 & \\
 & & & 6x & - & 6 & \\
\cline{4-6}
 & & & & 0 & &
\end{array}
$$

Segue que $p(x) = x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x^2 + x - 6) + 0$, o resto 0 define que $(x - 1)$ é fator de $p(x)$. Logo, $x = 1 \Rightarrow p(1) = (1 - 1)(1^2 + 1 - 6) = 0$.

Assim, $(x - 1)$ divide $p(x)$ se, e somente se, $p(1) = 0$

3.3 Algoritmo de Briot-Ruffini. [Aula 11]

Nesta aula, mostramos as etapas do método de Briot-Ruffini e apresentamos sua sistematização.

Considere a divisão de $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 2$ e $d(x) = x - 2$ novamente e seja $q(x)$ o quociente da mesma, vamos analisar cada etapa da divisão.

Etapa 1

$$
\begin{array}{cccccccc|ccccccc}
 & x^3 & + & 2x^2 & - & 5x & - & 2 & x & - & 2 \\ \cline{9-11}
- & x^3 & + & 2x^2 & & & & & x^2 \\ \cline{2-4}
 & & & 4x^2 & - & 5x & & & & & \\
\end{array}
$$

Só os coeficientes

$$
\begin{array}{cccccccc|ccccccc}
 & 1 & + & 2 & - & 5 & - & 2 & 1 & - & 2 \\ \cline{9-11}
- & 1 & + & 2 & & & & & 1 \\ \cline{2-4}
 & & & 4 & - & 5 & & & & & \\
\end{array}
$$

O 1° coeficiente de q é o coeficiente líder de p.

Etapa 2

$$
\begin{array}{cccccccc|ccccccc}
 & x^3 & + & 2x^2 & - & 5x & - & 2 & x & - & 2 \\ \cline{9-11}
- & x^3 & + & 2x^2 & & & & & x^2 & + & 4x \\ \cline{2-4}
 & & & 4x^2 & - & 5x & & & & & \\
 & & - & 4x^2 & + & 8x & & & & & \\ \cline{4-6}
 & & & & & 3x & & & & & \\
\end{array}
$$

Só os coeficientes

$$
\begin{array}{cccccccc|ccccccc}
 & 1 & + & 2 & - & 5 & - & 2 & 1 & - & 2 \\ \cline{9-11}
- & 1 & + & 2 & & & & & 1 & + & 4 \\ \cline{2-4}
 & & & 4 & - & 5 & & & & & \\
 & & - & 4 & + & 8 & & & & & \\ \cline{4-6}
 & & & & & 3 & & & & & \\
\end{array}
$$

O 2° coeficiente do q resulta da soma:

(Raiz de d)(1º coefic. de q)

+

2º coeficiente de p

Etapa 3

$$
\begin{array}{cccccccc|ccccccc}
 & x^3 & + & 2x^2 & - & 5x & - & 2 & x & - & 2 & & \\ \cline{9-13}
- & x^3 & + & 2x^2 & & & & & x^2 & + & 4x & + & 3 \\ \cline{2-4}
 & & & 4x^2 & - & 5x & & & & & & & \\
 & & - & 4x^2 & + & 8x & & & & & & & \\ \cline{4-6}
 & & & & & 3x & - & 2 & & & & & \\
 & & & & - & 3x & + & 6 & & & & & \\ \cline{6-8}
 & & & & & & & 4 & & & & & \\
\end{array}
$$

Só os coeficientes

$$
\begin{array}{cccccccc|ccccccc}
 & 1 & + & 2 & - & 5 & - & 2 & 1 & - & 2 & & \\ \cline{9-13}
- & 1 & + & 2 & & & & & 1 & + & 4 & + & 3 \\ \cline{2-4}
 & & & 4 & - & 5 & & & & & & & \\
 & & - & 4 & + & 8 & & & & & & & \\ \cline{4-6}
 & & & & & 3 & - & 2 & & & & & \\
 & & & & - & 3 & + & 6 & & & & & \\ \cline{6-8}
 & & & & & & & 4 & & & & & \\
\end{array}
$$

O 3° coeficiente do q resulta da soma:

(Raiz de d)(2º coefic. de q)

+

3º coeficiente de p

O resto resulta da soma:

(Raiz de d)(últim coefic. de q)

+

último coeficiente de p

Note que como $gr(d) = 1$ e $gr(p) = 3$ então $gr(q) = 2$ e $gr(r) = 0$

Sistematizando o Método

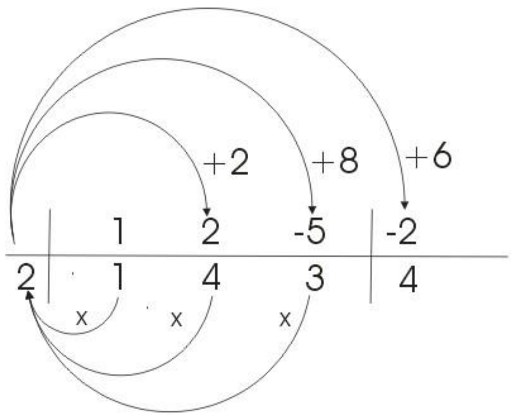
Faça uma cruz

Posicione os coeficientes de $p(x)$ sobre a linha horizontal após o 1º traço vertical, antes do último coeficiente de $p(x)$ faça outro traço vertical.

Posicione a raiz de $d(x)$ abaixo da linha horizontal antes do 1º traço vertical.

Repita o 1º coeficiente de $p(x)$ abaixo da linha horizontal logo à frente da raiz de $d(x)$.

Figura 28 – Esquema das operações no algoritmo de Briot-Ruffini.



Fonte: O autor (2024)

	$+$		$1 \cdot 2$	$4 \cdot 2$	$3 \cdot 2$	
		1	2	-5	-2	Coeficientes de p
Raiz de d	2	1	4	3	4	Resto
	$\times$		$(2 + 1 \cdot 2)$	$(-5 + 4 \cdot 2)$	$(-2 + 3 \cdot 2)$	

Coeficientes de p

Nos termos do dispositivo temos $q(x) = x^2 + 4x + 3$ e $r = 4$

Um exemplo mais genérico

Considere a divisão de $p(x) = bx^3 + cx^2 - dx - e$ e $d(x) = x - a$

	$+$		$a \cdot b$	$a(c + a \cdot b)$	$a(d + a(c + a \cdot b))$	
		b	c	d	e	Coeficientes de p
Raiz de d	a	b	$c + a \cdot b$	$d + a(c + a \cdot b)$	$e + a(d + a(c + a \cdot b))$	Resto
	$\times$					

3.4 Fatoração de Polinômios [Aula 12]

Nesta aula, fazemos uso do Teorema de D'Alambert, do dispositivo prático de Briot-Ruffini e o método de completar quadrados para fatorar polinômios.

Polinômio Fatorável

Um polinômio fatorável é aquele que pode ser expresso como produto de fatores binomiais de 1º grau, tais fatores são divisores exatos de $p(x)$.

Teorema (3.10)

Se um polinômio $p(x)$ é divisível separadamente por $(x-a)$ e $(x-b)$ com $a \neq b$, então $p(x)$ é divisível por $(x-a)(x-b)$

PROVA

Sejam q o quociente e $r = cx + d$ o resto da divisão de $p(x)$ por $(x-a)(x-b)$; então:

$$p(x) = q(x)(x-a)(x-b) + (cx+d)$$

Como $(x-a)$ e $(x-b)$ dividem separadamente $p(x)$, segue que

$p(a) = q(a-a)(a-b) + (ca+d) = 0 \Rightarrow ca + d = 0$ (I) e

$p(b) = q(b-a)(b-b) + (cb+d) = 0 \Rightarrow cb + d = 0$ (II), daí

Igualando I e II temos $c = d = 0$, portanto $r = 0$

Uma consequência do Teorema (3.10)

Suponha $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tais que $p(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$

Desenvolvendo

$p(x) = x^4 - (a+b+c+d)x^3 + (cd+ac+ad+bc+bd+ab)x^2 -$
$(acd+bcd+abc+abd)x + abcd$

Se um número inteiro é raiz de $p(x)$ então este número é fator do coeficiente correspondente a x^0 (o termo independente).

Vamos mostrar como esse fato aliado ao Teorema de D'Alambert e o dispositivo prático de Briot-Ruffini é extremamente útil na fatoração de um polinômio.

EXEMPLO 1

Fatore o polinômio $p(x) = 2x^4 - 3x^3 - 19x^2 - 6x + 8$

SOLUÇÃO

Pelo exposto temos que se uma raiz de p é um número inteiro então deve ser divisor de 8, ou seja, $a \in \mathbb{Z}$ e $p(a) = 0$ então $a \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$.

Note que $p(-1) = 2(-1)^4 - 3(-1)^3 - 19(-1)^2 - 6(-1) + 8 = 0$ pelo Teorema de D'Alambert $(x + 1)$ divide $p(x)$. Vamos aplicar o algoritmo de Briot-Ruffini para obter um polinômio de grau 3.

	2	-3	-19	-6	8	$(x + 1)$
-1	2	-5	-14	8	0	É fator de p

Temos um novo polinômio $q_1(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$, após verificar que $q_1(-1) = 15$, $q_1(2) = -24$ temos que $q_1(-2) = -16 - 20 + 28 + 8 = 0$ pelo Teorema de D'Alambert $(x + 2)$ divide $q_1(x)$. Vamos aplicar o algoritmo de Briot-Ruffini para obter um polinômio de grau 2.

	2	-5	-14	8	$(x + 2)$
-2	2	-9	4	0	É fator de q_1

Temos um novo polinômio $q_2(x) = 2x^2 - 9x + 4$, após verificar que $q_2(-2) = 30$ e $q_2(-4) = 48$ temos que $q_2(4) = 32 - 36 + 4 = 0$ pelo Teorema de D'Alambert $(x - 4)$ divide $q_2(x)$. Vamos aplicar o algoritmo de Briot-Ruffini para obter um polinômio de grau 1.

	2	-9	4	$(x - 4)$ e $(2x - 1)$
4	2	-1	0	São fatores de q_2

Temos que

$p(x) = (x + 1) \cdot q_1(x) = (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot q_2(x)$

Segue a fatoração de $p(x)$

$p(x) = (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 4) \cdot (2x - 1)$

Teorema das Raízes Racionais – Adaptado (3.11)

Se um polinômio $S(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ $(a_n \neq 0)$, de coeficientes inteiros, possui uma raiz racional $\frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$ e $mdc(p,q) = 1$ então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n

PROVA

Temos que

$$S\left(\frac{p}{q}\right) = 0 \quad \Rightarrow a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + a_1\left(\frac{p}{q}\right) = -a_0$$

$$\Rightarrow a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_2p^2q^{n-2} + a_1pq^{n-1} = -a_0.q^n$$

$$\Rightarrow p \cdot (a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_2pq^{n-2} + a_1q^{n-1}) = -a_0.q^n$$

Note que $(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_2pq^{n-2} + a_1q^{n-1}) \in \mathbb{Z}$ e uma vez que $mdc(p,q) = 1$ então p é divisor de a_0.

Por outro lado, q divide q^n, e como $mdc(p,q) = 1$, temos que q divide $(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_2pq^{n-2} + a_1q^{n-1})$ e isso ocorre se, e somente se, q divide a_np^{n-1}. Finalmente, usando o fato de que $mdc(p,q) = 1$ então q divide a_n.

Divisão de um polinômio $\boldsymbol{p(x)}$ por um binômio de forma $\boldsymbol{(bx - a)}$

Sejam q o quociente e r o resto da divisão de um polinômio p, com $gr(p) \geq 1$, por $d(x) = bx - a$, temos que $p(x) = (bx - a)q(x) + r(x) \Rightarrow p(x) = \left(x - \frac{a}{b}\right)(bq) + r$.

Assim podemos reescrever $p(x)$ como $p(x) = \left(x - \frac{a}{b}\right)q' + r$ e $q = \frac{q'}{b}$

EXEMPLO 2

Divida $p(x) = 3x^2 + 10x - 2$ por $(3x - 2)$

SOLUÇÃO

Reescrevendo o binômio e aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini.

$$(3x - 2) = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

	3	10	-2
$\frac{2}{3}$	3	12	6

Temos, $q = \frac{q'}{b} = \frac{3x+12}{3} = x + 4$ e $r = 6$

$\therefore p(x) = (3x - 2)(x + 4) + 6$

EXEMPLO 3

Divida $p(x) = 6x^2 + x - 12$ por $(2x + 3)$

SOLUÇÃO

Reescrevendo o binômio e aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini.

$$(2x + 3) = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

	6	1	-12
$-\frac{3}{2}$	6	-8	0

Temos, $q = \frac{q'}{b} = \frac{6x-8}{2} = 3x - 4$ e $r = 0$

$\therefore p(x) = (2x + 3)(3x - 4)$

EXEMPLO 4

Divida $p(x) = 10x^2 + x - 2$ por $\left(x + \frac{1}{2}\right)$

SOLUÇÃO

Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini.

	10	1	-2
$-\frac{1}{2}$	10	-4	0

Temos, $q = 10x - 4$ e $r = 0$

$p(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(10x - 4) = 2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)(5x - 2)$

$\therefore p(x) = (2x + 1)(5x - 2)$

Exercícios Resolvidos

Fatore os polinômios abaixo:

a) $p(x) = 3x^4 - 16x^3 + 19x^2 + 14x - 24$

Solução

Se uma raiz de p é um número inteiro então deve ser divisor de 24, ou seja, $a \in \mathbb{Z}$ e $p(a) = 0$ então $a \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24\}$.

Note que $p(-1) = 3(-1)^4 - 16(-1)^3 - 19(-1)^2 + 14(-1) - 24 = 0$, pelo Teorema de D'Alambert $(x + 1)$ divide $p(x)$. Vamos aplicar o algoritmo de Briot-Ruffini para obter um polinômio de grau 3.

	3	-16	19	14	-24	$(x+1)$
-1	3	-19	38	-24	0	É fator de p

Temos um novo polinômio $q_1(x) = 3x^3 - 19x^2 + 38x - 24$, após verificar que $q_1(-1) = -84$, $q_1(1) = -2$, $q_1(-2) = -200$ temos que $q_1(2) = 0$, pelo Teorema de D'Alambert $(x-2)$ divide $q_1(x)$. Vamos aplicar o algoritmo de Briot-Ruffini para obter um polinômio de grau 2.

	3	-19	38	-24	$(x-2)$
2	3	-13	12	0	É fator de q_1

Temos um novo polinômio $q_2(x) = 3x^2 - 13x^2 + 12$, após verificar que $q_2(2) = -2$ e $q_2(-3) = 68$ temos que e $q_2(3) = 0$, pelo Teorema de D'Alambert $(x-3)$ divide $q_2(x)$. Vamos aplicar o algoritmo de Briot-Ruffini para obter um polinômio de grau 1.

	3	-13	12	$(x-3)$ e $(3x-4)$
3	3	-4	0	São fatores de q_2

Temos que

$p(x) = (x+1) \cdot q_1(x) = (x+1) \cdot (x-2) \cdot q_2(x)$

Segue a fatoração de $p(x)$

$p(x) = (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x-3) \cdot (3x-4)$

b) $p(x) = 6x^3 - 5x^2 - 2x + 1$

Solução

Se uma raiz de p é um número inteiro então deve ser divisor de 1, ou seja, $a \in \mathbb{Z}$ e $p(a) = 0$ então $a \in \{\pm 1\}$.

Note que $p(1) = 6(1)^3 - 5(1)^2 - 2(1) + 1 = 0$, pelo Teorema de D'Alambert $(x-1)$ divide $p(x)$. Vamos aplicar o algoritmo de Briot-Ruffini para obter um polinômio de grau 2

	6	-5	-2	1	$(x-1)$
1	6	1	-1	0	É fator de p

Temos um novo polinômio $q_1(x) = 6x^2 + x - 1$, após verificar que $q_1(-1) = 4$ e $q_1(1) = 6$ temos que q_2 não possui raízes inteiras, se suas raízes são racionais da forma $\frac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $p \in \mathbb{Z}_+^*$ e $mdc(p,q) = 1$. temos que $p \in \{\pm 1\}$ e $q \in \{1,2,3,6\}$. As possíveis raízes são $\left\{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}\right\}$

Com $q_1\left(-\frac{1}{2}\right) = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$ segue $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ é fator de q_1

	6	1	-1
$-\frac{1}{2}$	6	-2	0

$\left(x + \frac{1}{2}\right)$ e $(6x - 2) = 2(3x - 1)$
São fatores de q_1

Segue a fatoração de $p(x)$

$$p(x) = (x - 1) \cdot q_1(x) = (x + 1) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot (3x - 1)$$

$$p(x) = (x - 1) \cdot q_1(x) = (x + 1) \cdot (2x + 1) \cdot (3x - 1)$$

Uma alternativa a esta segunda etapa seria resolver a equação

$$\begin{aligned}
6x^2 + x - 1 = 0 \quad &\Rightarrow 6 \cdot \left(x^2 + \frac{x}{6} - \frac{1}{6}\right) = 0 \\
&\Rightarrow 6 \cdot \left[\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 - \frac{1}{144} - \frac{1}{6}\right] = 0 \\
&\Rightarrow 6 \cdot \left[\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 - \frac{1}{144} - \frac{24}{144}\right] = 0 \\
&\Rightarrow 6 \cdot \left[\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 - \frac{25}{144}\right] = 0 \\
&\Rightarrow 6 \cdot \left[\left(x + \frac{1}{12} + \frac{5}{12}\right)\left(x + \frac{1}{12} - \frac{5}{12}\right)\right] = 0 \\
&\Rightarrow 6 \cdot \left[\left(x + \frac{6}{12}\right)\left(x - \frac{4}{12}\right)\right] = 0 \\
&\Rightarrow 2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot 3 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) = 0 \\
&\Rightarrow (2x + 1)(3x - 1) = 0
\end{aligned}$$

Temos $(2x + 1)$ e $(3x - 1)$ são fatores de $q_1(x)$, portanto

$$p(x) = (x - 1) \cdot q_1(x) = (x + 1) \cdot (2x + 1) \cdot (2x - 1)$$

c) $p(x) = 24x^3 + 10x^2 - 7x - 2$

Solução

Se uma raiz de p é um número inteiro então deve ser divisor de 2, ou seja, $a \in \mathbb{Z}$ e $p(a) = 0$ então $a \in \{\pm 1, \pm 2\}$. Note que $p(1) = 25$, $p(-1) = -9$, $p(2) = 174$ e $p(-2) = -98$ portanto p não possui raízes inteiras.

Se suas raízes são racionais da forma $\frac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $p \in \mathbb{Z}_+^*$ e $mdc(p,q) = 1$ temos que $p \in \{\pm 1, \pm 2\}$ e $q \in \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$.

As possíveis raízes são $\left\{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{1}{12}, \pm\frac{1}{24}\right\}$

Note que $p\left(\frac{1}{2}\right) = 24\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = 0$, pelo Teorema de D'Alambert $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ divide $p(x)$. Vamos aplicar o algoritmo de Briot-Ruffini para obter um polinômio de grau 2.

	24	10	-7	-2
$\frac{1}{2}$	24	22	4	0

$\left(x - \frac{1}{2}\right)$
É fator de p

Temos $q_1(x) = 24x^2 + 22x + 4$, De acordo com Teorema das raízes racionais as possíveis raízes de $q_1(x)$ são $\left\{\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{1}{12}\right\}$, como todos os coeficientes de $q_1(x)$ são positivos verificaremos apenas raízes negativas. Após verificar $q_1\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$, $q_1\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$ temos $q_1\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$. Pelo Teorema de D'Alambert $\left(x + \frac{2}{3}\right)$ divide $q_1(x)$. Vamos aplicar o algoritmo de Briot-Ruffini para obter um polinômio de grau 1.

	24	22	4
$-\frac{2}{3}$	24	6	0

$\left(x + \frac{2}{3}\right)$ e $(24x + 6) = 6 \cdot (4x + 1)$
São fatores de q_1

Segue a fatoração de $p(x)$

$$p(x) = \left(x - \tfrac{1}{2}\right) \cdot q_1(x) = \left(x - \tfrac{1}{2}\right) \cdot \left(x + \tfrac{2}{3}\right) \cdot 6 \cdot (4x + 1)$$

$$p(x) = 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 3 \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right) \cdot (4x + 1)$$

$$p(x) = (2x - 1)(3x + 2)(4x + 1)$$

3.5 Exercícios Propostos

Exercício 3.1

Efetue a divisão de $p(x)$ por $d(x)$ indicando o quociente e resto.

a) $p(x) = x^2 - 6x + 15$ e $d(x) = x - 3$

b) $p(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 2$ e $d(x) = x - 2$

c) $p(x) = x^3 - 4x + 10$ e $d(x) = x - 2$

d) $p(x) = x^2 - 8x + 13$ e $d(x) = x - 4$

Exercício 3.2

Aplique o algoritmo de Briot-Ruffini para obter um polinômio de grau menor.

a) $p(x) = 4x^2 - 13x + 3$ e $d(x) = x - 3$

b) $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 8$ e $d(x) = x - 2$

c) $p(x) = 5x^3 - 7x - 26$ e $d(x) = x - 2$

d) $p(x) = 3x^2 - 4x - 32$ e $d(x) = x - 4$

Exercício 3.3

Fatore os polinômios abaixo:

a) $p(x) = 6x^3 + 13x^2 + 9x + 2$

b) $p(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$

c) $p(x) = 4x^3 + 5x^2 - 7x - 2$

d) $p(x) = x^3 + x^2 - 5x - 6$

Exercício 3.4

Simplifique as funções quociente indicando a condição para que a simplificação seja possível

a) $\frac{x^3+6x^2+11x+6}{x+1}$

b) $\frac{x^3+3x^2-2x-6}{x+3}$

c) $\frac{2x^3-5x^2+3x+2}{x-1}$

d) $\frac{x^3-3x^2-10x+24}{x-2}$

CAPÍTULO 4
LIMITES DE FUNÇÕES POLINOMIAIS.

4.1 Noção Intuitiva de Limite [Aula 13]

Nesta aula apresentamos uma abordagem intuitiva de limite de uma função e de limites laterais para introdução do conceito de limite de funções.

Considere a função $f(x) = \frac{x^3-3x^2}{2x-6}$, definida para todo número real $x \neq 3$, pois para $x = 3$ obtemos a expressão indeterminada $\frac{0}{0}$. Na tabela abaixo apresentamos alguns valores x próximo de 3.

Observe as tabelas

$x \to 3^-$	$f(x)$
2,9	4,205
2,99	4,47005
2,999	4,4970005
2,9999	4,4997000005
2,99999	4,49997
2,999999	4,499997
2,9999999	4,499999705

$x \to 3^+$	$f(x)$
3,1	4,805
3,01	4,53005
3,001	4,5030005
3,0001	4,500300005
3,00001	4,50003
3,000001	4,50003001
3,0000001	4,50000291

Nas tabelas $x \to 3^-$ significa que x se aproxima de 3 assumindo valores menores do que 3 e $x \to 3^+$ significa que x se aproxima de 3 assumindo valores maiores do que 3.

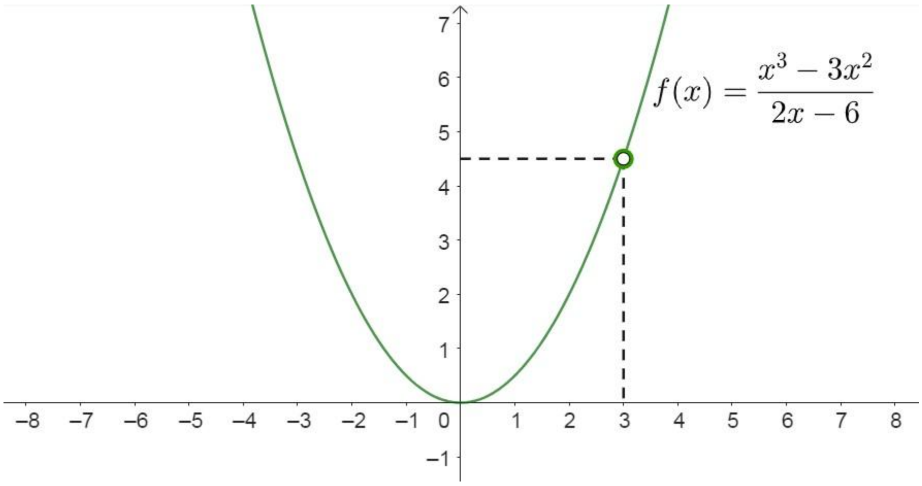
De acordo com a tabela à medida que x se aproxima de 3, $f(x)$ se aproxima de $\frac{9}{2}$, porém a quantidade de valores de x utilizados para o cálculo de $f(x)$ é muito pequena para termos certeza disso.

Analisemos $f(x)$.

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{2x - 6} = \frac{x^2(x-3)}{2(x-3)}$$

Se $x \neq 3$ podemos cancelar o fator $x - 3$ e a função é dada por $f(x) = \frac{x^2}{2}$, desse modo, o gráfico de $f(x)$ é uma parábola com o ponto $\left(3, \frac{9}{2}\right)$ omitido.

Figura 29 – Função $f(x) = \frac{x^3-3x^2}{2x-6}$ com indeterminação em $x = 3$.



Fonte: O autor (2024)

Limite de uma função – Noção intuitiva (4.1)

Se uma função é definida em todo intervalo aberto contendo um número real a, exceto possivelmente no próprio a, podemos perguntar:

1. À medida que x se aproxima de a (mas $x \neq a$) o valor de $f(x)$ tende para um valor L?

2. Podemos tornar o valor de $f(x)$ tão próximo de L, escolhendo um valor de x suficientemente próximo de a (mas $x \neq a$)?

Se a resposta a estas perguntas é sim, escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

e dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende para a é L, ou que $f(x)$ se aproxima de L quando x se aproxima de a.

$$f(x) \to L \text{ quando } x \to a$$

Daqui por diante usaremos a notação $\lim_{x \to a} f(x) = L$ para expressar a situação indicada no nosso exemplo.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2}{2x - 6} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2(x-3)}{2(x-3)} \Rightarrow \lim_{x \to 3} \frac{x^2}{2} = \frac{9}{2}$$

Note que x se aproxima de 3 mas não é igual a 3, assim podemos efetuar o cancelamento do fator comum $x - 3$. Deste modo, se $x \to 3$ temos que $f(x) \to \frac{9}{2}$.

Em nosso curso usaremos a ideia de limite para estudar algumas características importantes de funções polinomiais, como taxa de variação e valores máximos e mínimos de tais funções.

Limites Laterais – Noção Intuitiva (4.2)

Em nosso exemplo, a maneira como aproximamos x de 3, por valores maiores que 3, denotado na tabela por $x \to 3^+$ e por valores menores que 3, denotado na tabela por $x \to 3^-$, estabelece o que chamamos de limites laterais.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Podemos tornar $f(x)$ tão próximo de L quanto quisermos, desde que se escolha x suficientemente próximo de a e $x < a$ **(limite à esquerda)**. Para esse limite, f deve ser definida (ao menos) no intervalo aberto (c, a) para algum número real c. A notação $x \to a^-$ significa x tende para a pela esquerda.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Podemos tornar $f(x)$ tão próximo de L quanto quisermos, desde que se escolha x suficientemente próximo de a e $x > a$ **(limite à direita)**. Para esse limite, f deve ser definida (ao menos) no intervalo aberto (a, c) para algum número real c. A notação $x \to a^+$ significa x tende para a pela direita.

Teorema (4.3)

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

O $\lim_{x \to a} f(x) = L$ existe se, e somente se, os limites laterais à direita e à esquerda existem e são iguais a L.

EXEMPLO 1

Se $f(x) = \frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}-3}$ determine $\lim_{x\to 9} f(x)$.

SOLUÇÃO

$$\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x\to 9}\left[\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}-3}\right] = \lim_{x\to 9}(\sqrt{x}+3) = \sqrt{9}+3 = 3$$

4.2 Definição de Limite de uma Função [Aula 14]

Definição (4.4)

Seja uma função f definida em um intervalo aberto contendo um ponto a, exceto possivelmente no próprio a e seja um número real L. A afirmação

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Significa que, para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

Se $0 < |x-a| < \delta$ então $|f(x)-L| < \varepsilon$

Uma Definição Equivalente (4.5)

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Significa que, para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se x está no intervalo aberto $(a-\delta, a+\delta)$ e $x \neq a$ então $f(x)$ está no intervalo $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Podemos usar as definições acima para mostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = L,$ para isso devemos ter em mente a ordem em que usamos os números ε e δ.

Passo 1 Considere $\varepsilon > 0$ arbitrário

Passo 2 Mostrar que existe um $\delta > 0$ tal que se $x \in (a-\delta, a+\delta)$ então $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

EXEMPLO 1

Use a definição para mostrar que $\lim_{x\to 4}(3x-5)=7$.

SOLUÇÃO

De acordo com os dados temos $a=4$, $f(x)=3x-5$ e $L=7$

$$
\begin{aligned}
|f(x)-L|<\varepsilon \quad &\Rightarrow |(3x-5)-7|<\varepsilon \\
&\Rightarrow |3x-12|<\varepsilon \\
&\Rightarrow 3|x-4|<\varepsilon \\
&\Rightarrow |x-4|<\tfrac{\varepsilon}{3} \text{ podemos escolher } \delta=\tfrac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\text{Se } |x-4|<\delta \quad &\Rightarrow \text{tomando } \delta=\tfrac{\varepsilon}{3} \\
&\Rightarrow |x-4|<\frac{\varepsilon}{3} \\
&\Rightarrow |3x-12|<\varepsilon \\
&\Rightarrow |(3x-5)-7|<\varepsilon \Rightarrow |f(x)-7|<\varepsilon\,.
\end{aligned}
$$

Técnicas para determinação de limites

Usar as definições anteriores para verificar cada limite seria extremamente trabalhoso, vamos apresentar alguns teoremas que permitam simplificar problemas que envolvam limites.

Teorema (4.6)

Considere as seguintes funções

I) Função constante: $f(x)=c$

II) Função linear: $g(x)=x$

No caso I, $|f(x)-c|=|c-c|=0$ para todo x e como 0 é menor que qualquer $\varepsilon>0$ decorre da definição que $f(x)$ tem limite c quando x tende para a. Assim,

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} c=c$$

O limite de uma função constante é a própria constante.

No caso II, quando x tende para a, $g(x)$ tende para a.

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} x = a$$

Teorema (4.7)

No que segue, suponha que os limites $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ Existem, então

I) $\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

II) $\lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

III) $\lim_{x \to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ desde que $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

IV) $\lim_{x \to a}[c \cdot g(x)] = \mathrm{c} \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

V) $\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

I) O limite da soma é a soma dos limites.

II) O limite do produto é o produto dos limites.

III) O limite do quociente é o quociente dos limites, desde que o limite do denominador seja diferente de zero.

IV) O limite de uma constante vezes uma função é a constante vezes o limite da função.

V) O limite da diferença é a diferença dos limites.

As provas dos itens do Teorema se encontram no ANEXO A.

Teorema (4.8)

Se m, b e a são números reais, então

$$\lim_{x \to a}(mx + b) = ma + b$$

PROVA

Pelo Teorema 4.6 temos

$\lim_{x \to a} x = a$ e $\lim_{x \to a} b = b$

Em vista dos itens I e IV do Teorema 4.7

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(mx+b) &= \lim_{x\to a}(mx) + \lim_{x\to a} b \\ &= m\left(\lim_{x\to a} x\right) + b \\ &= ma + b\end{aligned}$$

EXEMPLO 2

Detemine $\lim_{x\to 5}\dfrac{4x+13}{7x+4}$

SOLUÇÃO

Pelo Teorema 4.7 sabemos que os limites do numerador e denominador existem. E ainda, o limite do denominador é diferente de zero. Logo, pelos Teoremas 4.7 e 4.8.

$$\lim_{x\to 5}\frac{4x+13}{7x+4} = \frac{\lim_{x\to 5} 4x+13}{\lim_{x\to 5} 7x+4} = \frac{4(5)+13}{7(5)+4} = \frac{33}{39} = \frac{11}{13}$$

EXEMPLO 3

Prove que $\lim_{x\to a} x^5 = a^5$

SOLUÇÃO

Como $\lim_{x\to a} x = a$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} x^5 &= \lim_{x\to a}(x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x) \\ &= \left(\lim_{x\to a} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} x\right).\cdot\left(\lim_{x\to a} x\right) \\ &= a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a = a^5\end{aligned}$$

Teorema (4.9)

Se n é um inteiro positivo, então

I) $\lim_{x \to a} x^n = a^n$

II) $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$

Para o item I basta escrever x^n como produto de n fatores iguais a x e tomar o limite de cada fator. O item II pode ser provado de maneira análoga apelando para o Teorema 4.7 (II).

EXEMPLO 4

Determine $\lim\limits_{x \to 2} (2x + 3)^4$

SOLUÇÃO

Aplicando os Teoremas 4.9 (II) e 4.8, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} (2x + 3)^4 &= \left[\lim_{x \to 2} (2x + 3)\right]^4 \\ &= [2(2) + 3]^4 \\ &= 7^4 = 2401 \end{aligned}$$

Teorema (4.10)

Se f é uma função polinomial e a é número real, então

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

PROVA

Como f é uma função polinomial

$$f(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

Aplicando os Teoremas 4.6(I), 4.7 (I)(IV) e 4.9(I)

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} (b_n x^n) + \lim_{x \to a} (b_{n-1} x^{n-1}) + \cdots + \lim_{x \to a} (b_1 x) + \lim_{x \to a} (b_0) \\ &= b_n \lim_{x \to a} (x^n) + b_{n-1} \lim_{x \to a} (x^{n-1}) + \cdots + b_1 \lim_{x \to a} (x) + b_0 \\ &= b_n a^n + b_{n-1} a^{n-1} + \cdots + b_1 a + b_0 = f(a) \end{aligned}$$

Existem ainda outras situações e outros limites a serem determinados que estão fora do escopo de nosso estudo e que não serão abordados aqui. Para o que segue temos o necessário para avançar em nossos estudos.

4.3 Funções Contínuas [Aula 15]

No dia a dia entendemos algumas grandezas como contínuas, como a variação do volume de água em um tanque, variação de temperatura em um ambiente. O deslocamento de uma bola ao ser chutada em tiro de meta, a bola percorre cada ponto de sua trajetória, tal trajetória pode ser descrita como uma linha ininterrupta.

Usaremos a expressão função contínua em um sentido semelhante. Intuitivamente, consideraremos contínua uma função cujo gráfico não tem interrupções.

Definição (4.11)

Uma função f é contínua em um número c, se satisfaz as seguintes condições:

I) $f(c)$ é definida

II) $\lim_{x \to c} f(x)$ existe

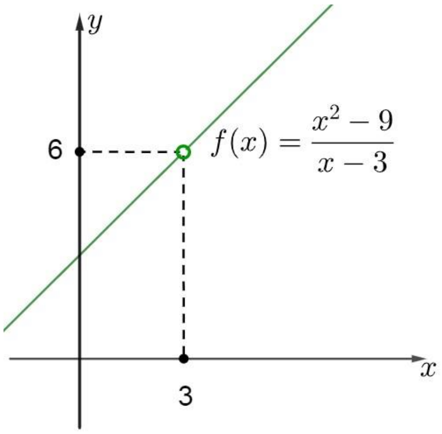
III) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Ao utilizar essa definição para mostrar se f é contínua em c, basta verificar a terceira condição, pois se $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ então, $f(c)$ deve ser definida e $\lim_{x \to c} f(x)$ existe.

Basta que uma das três condições da definição (4.11) não seja satisfeita para dizermos que f é descontínua em c, ou que f tem uma descontinuidade em c.

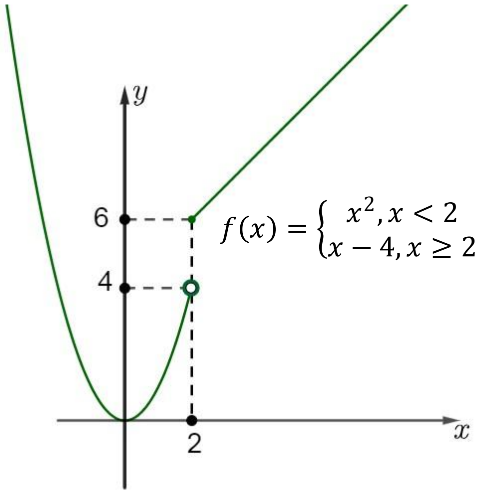
Certos tipos de descontinuidades têm nomes especiais.

Figura 30 – Descontinuidade removível.



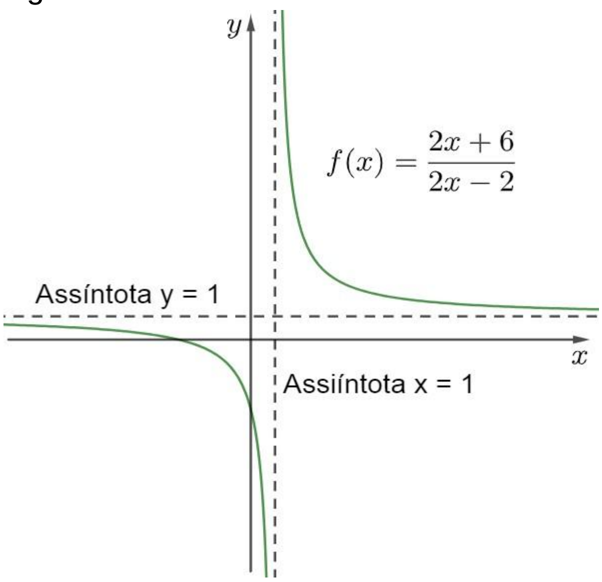
Fonte: O autor (2024).

Figura 31 – Descontinuidade do Tipo Salto.



Fonte: O autor (2024)

Figura 32 – Descontinuidade Infinita



Fonte: O autor (2024)

A descontinuidade **removível** é chamada assim pois pode-se removê-la definindo convenientemente o valor de $f(c)$. A descontinuidade **do tipo salto** recebe esse nome devido a aparência do gráfico. Se $f(x)$ tende para ∞ ou $-\infty$ quando x tende para c dizemos que f tem **descontinuidade infinita** em c.

Teorema (4.12)

I) Uma função polinomial f é contínua para todo número real c.

II) Uma função racional $q = \frac{f}{g}$ é contínua em todo número exceto nos números c, tais que $g(c) = 0$.

Demonstração

I) Se f é uma função polinomial e c é número real, pelo Teorema (4.10) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$, Logo f é contínua em todo c real.

II) Se $g(c) \neq 0$ então c está no domínio de q. Os teoremas (4.7)(III) e (4.8) nos dão

$$\lim_{x\to c} q(x) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} = q(c)$$

Logo, g é contínua em todo seu domínio.

EXEMPLO 1

Se $f(x) = |x|$ mostre que f é contínua em todo número real c.

SOLUÇÃO

Note que $f(x) = x$, se $x > 0$ e $f(x) = -x$ se $x < 0$ em ambos os casos temos polinômios e pelo teorema (4.12)(I) f é contínua para $x \neq 0$. Devemos avaliar a continuidade de f em zero.

$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0$ e $\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0$

Como os limites laterais existem e são iguais temos do Teorema (4.3)

$$\lim_{x\to 0}|x| = 0 = |0| = f(0)$$

f é contínua em 0, logo f é contínua em todo c real.

EXEMPLO 2

Explique por que f não é contínua em a.

$f(x) = \dfrac{3}{x+2}$ $\qquad\qquad\qquad a = -2$

SOLUÇÃO

Como $f(-2) = \frac{3}{-2+2} = \frac{3}{0}$, logo f não está definida para $x = -2$, então f não é contínua em a.

EXEMPLO 3

Classifique as descontinuidades de f como removíveis, tipo salto, ou infinitas.

a) $f(x) = \begin{cases} x^3 & , se\ x \leq 1 \\ 3 - x, & se\ x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} |x+3|, & se\ x \neq -2 \\ 2 & , se\ x = -2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} |x-1|, & se\ x \neq 1 \\ 1 & , se\ x = 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}, se\ x \neq 1.$

SOLUÇÃO

a) Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 \neq 2 = \lim_{x\to 1^+} f(x)$ $\quad f(x)$ é descontínua em $x = 1$.

Analisando a regra de associação de $f(x)$ temos que se $x \in (-\infty, 1]$ então $f(x) \in (-\infty, 1]$ e se $x \in (1, \infty)$ temos $f(x) \in (-\infty, 2)$.

Desta forma o conjunto imagem de $f(x)$ é $\mathbb{R} - (1,2]$, esta lacuna na imagem de $f(x)$ caracteriza uma descontinuidade do tipo salto.

b) A descontinuidade de $f(x)$ é removível, pois retirando a condição $f(-2) = 2$, teremos uma função $g(x) = |x+3|$ tal que

$$\lim_{x\to -2} g(x) = |-2+3| = 1 = g(-2),$$

estabelecendo $g(x)$ como função contínua.

c) A descontinuidade de $f(x)$ é removível, pois retirando a condição $f(1) = 1$, teremos uma função $g(x) = |x - 1|$ tal que

$$\lim_{x \to 1} g(x) = |1 - 1| = 0 = g(1),$$

estabelecendo $g(x)$ como função contínua.

d) Como $f(1) = \frac{1^2+1}{1-1} = \frac{2}{0}$ não existe e $\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ também não existe a descontinuidade de $f(x)$ é infinita.

EXEMPLO 4

Se $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^3 + 3x^2 - 10x}$, determine as descontinuidades de f.

SOLUÇÃO

Como f é uma função racional, segue do Teorema (4.12) que suas únicas descontinuidades ocorrem com os zeros do denominador $x^3 + 3x^2 - 10x$.

Da fatoração do mesmo obtemos,

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - 10x &= x(x^2 + 3x - 10) \\ &= x(x + 5)(x - 2) \end{aligned}$$

Igualando a zero cada fator, obtemos que as descontinuidades são $0, -5$ e 2.

4.4 Retas Tangentes e Taxas de Variação [Aula 16]

Definição (4.14)

Seja f uma função definida em um intervalo aberto contendo a.

I) A taxa média de variação de $y = f(x)$ em relação a x no intervalo $[a, a + h]$ é

$$T_m = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

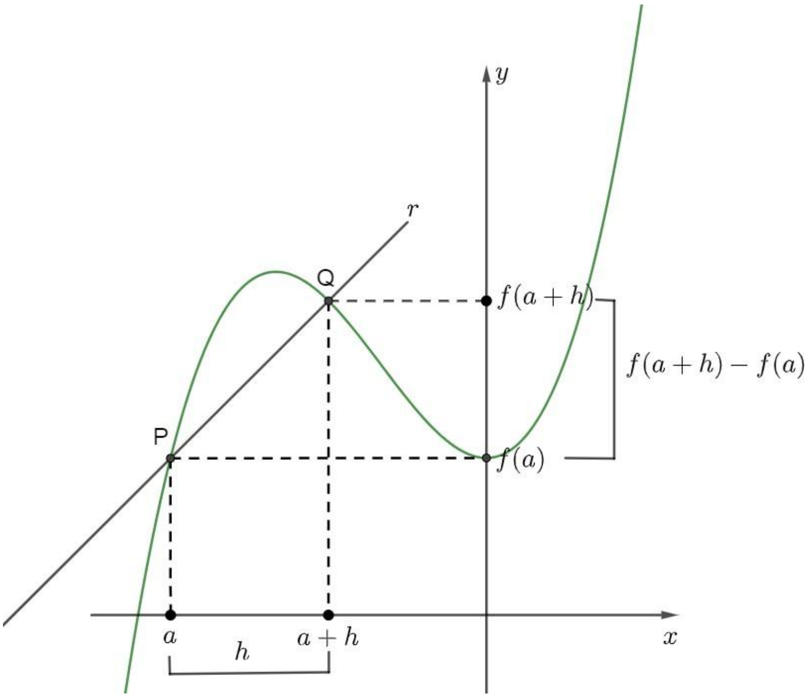
II) A taxa instantânea de variação de $y = f(x)$ em relação a x em a é

$$T_a = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Desde que o limite exista.

A interpretação geométrica da taxa média de variação é o coeficiente angular da reta r secante ao gráfico de f nos pontos $P = \big(a, f(a)\big)$ e $Q = \big(a + h, f(a + h)\big)$.

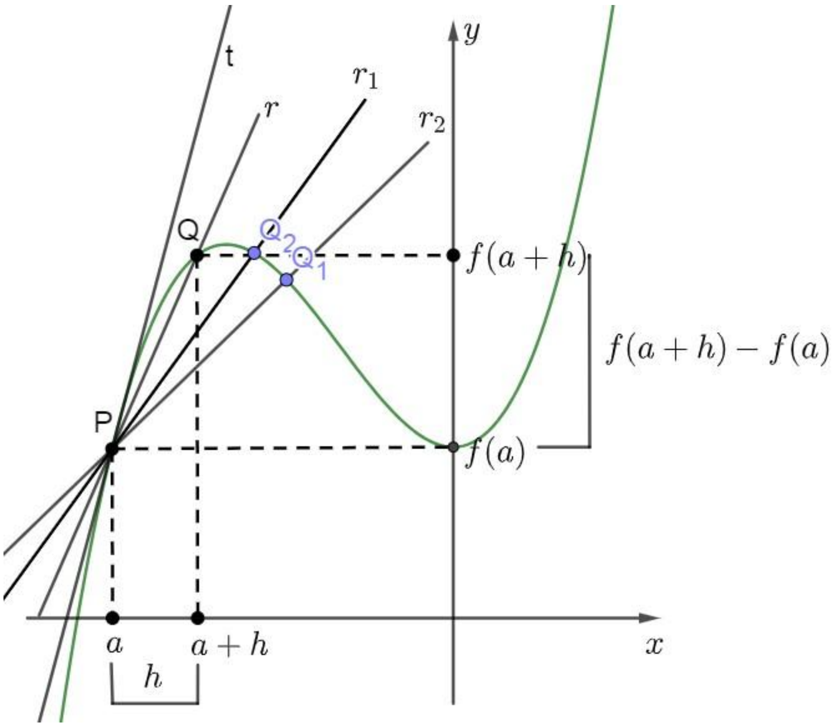
Figura 33 – Reta r secante a f



Fonte: O autor (2024)

Podemos tomar pontos Q do gráfico de f, cada vez mais próximos de P, de tal forma que a reta r, secante a f nos pontos P e Q, fique cada vez mais próxima da reta t tangente a f e que contém o Ponto P.

Figura 34 – Aproximação da reta t tangente a f por uma reta r secante a f.



Fonte: O autor (2024).

Quando $h \to 0$ temos que $f(a+h) \to f(a)$ assim o ponto $Q = \big(a, f(a+h)\big)$ fica cada vez mais próximo de $P = \big(a, f(a)\big)$ e a reta secante $r = reta(PQ)$ fica cada vez mais próxima da tangente. Assim o limite

$$T_a = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

É o coeficiente angular de t, a reta tangente a f que contém o ponto P.

Este limite é a base de um dos conceitos fundamentais do cálculo, a **derivada**. Por ora, devido ao caráter introdutório desse texto, continuaremos a usar o termo “taxa instantânea de variação de $f(x)$“ para indicar tal limite.

Usando a relação ponto-coeficiente angular podemos obter a equação de t.

Para um ponto $P = (x_0, y_0)$, temos que a equação da reta tangente a f que passa pelo o ponto P é dada por $y - y_0 = m(x - x_0)$. Usaremos em nosso estudo $m = T_a$

EXEMPLO 1

Seja $f(x) = x^2$ e seja a um número real arbitrário

a) Determine o coeficiente angular da tangente gráfico de f em $P = (a, a^2)$.

b) Determine a equação da tangente em $R = (-2,4)$.

SOLUÇÃO

a) Aplicando a Definição (4.14) temos que

$$\begin{aligned} T_a &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2ah + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2a + h) = 2a \end{aligned}$$

b) Coeficiente angular da tangente no ponto $R = (-2,4)$ é um caso particular em que $a = -2$, isto é $m = y_{-2} = 2(-2) = -4$.

$$y - 4 = -4 \cdot (x + 2) \Rightarrow \boxed{y = -4x - 4}$$

Corolário (4.15)

A taxa de variação de uma função constante é zero.

Se $f(x) = c$, para todo x no domínio respectivo, ou seja, f é uma função constante, então pela definição (4.14)

A taxa média de variação de $y = f(x)$ em relação a x no intervalo $[a, a + h]$ é

$$T_m = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0$$

A taxa instantânea de variação de $y = f(x)$ em relação a x em a é

$$T_a = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

Teorema (4.16) Taxa de Variação instantânea e a continuidade

Seja f uma função definida em um intervalo aberto (a, b). Se para $c \in (a, b)$

$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ existe, então f é contínua em c.

DEMONSTRAÇÃO

Temos que para h diferente de zero

$$f(c+h) - f(c) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot h$$

Aplicando limite quando $h \to 0$

$$\lim_{h\to 0} f(c+h) - \lim_{h\to 0} f(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h$$

Como $\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ existe e $\lim_{h\to 0} h = 0$ temos

$$\lim_{h\to 0} f(c+h) - f(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot 0 = 0$$

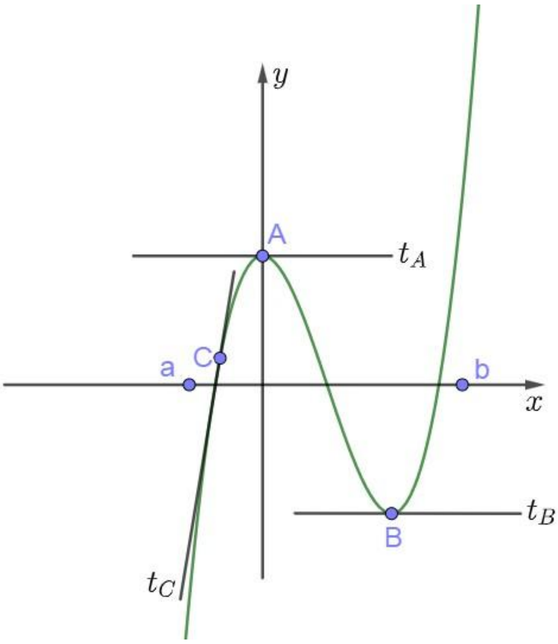
Assim, $\lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c)$

Portanto, f é contínua em c.

Taxas de Variação e Valores máximos e mínimos de funções polinomiais.

Observe o gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Figura 35 – Retas tangentes ao gráfico de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$



Fonte: O autor (2024)

Na figura 35 destacamos 3 pontos de interesse com as respectivas tangentes ao gráfico de f. No intervalo $[a.b]$ os ponto A e B são valores máximo e mínimo locais de f, pois há valores maiores que y_A e menores que y_B no domínio de f fora do intervalo $[a.b]$. Nestes dois pontos a tangente fica horizontal, consequentemente os coeficientes angulares de t_A e t_B são iguais a zero. Já a tangente t_C possui inclinação diferente de zero e não é um máximo ou mínimo local.

Definição (4.17)

Seja c um número real no domínio de uma função f.

I) $f(c)$ é **máximo local** de f, se existe um intervalo aberto (a, b) contendo c, tal que $f(x) < f(c)$ para todo $x \in (a, b)$, com $x \neq c$.

II) $f(c)$ é **mínimo local** de f, se existe um intervalo aberto (a, b) contendo c, tal que $f(x) > f(c)$ para todo $x \in (a, b)$, com $x \neq c$.

Os valores de máximo e mínimo locais de f podem ser chamados de **extremos locais** de f.

Um teorema importante por nos fornecer as condições nas quais uma certa função assume seus valores extremos é o **Teorema de Weierstrass** cuja demonstração vai além do escopo desse trabalho mas pode ser encontrada em (GUIDORIOZZI, 2013, pág 513).

Teorema de Weierstrass (4.18)

Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida no intervalo $[a, b]$, fechado e limitado da reta. Então, existem números c e d, contidos em $[a, b]$, tais que, para todo $x \in [a, b]$,

$$f(c) < f(x) < f(d)$$

Ou seja, a função assume valores extremos.

Teorema (4.19)

Se uma função f tem um extremo local em um número c em um intervalo aberto então, o coeficiente angular da reta tangente a f em c é zero ou tal coeficiente não existe.

$$T_c = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = 0 \quad \text{ou} \quad T_c = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \quad \text{não existe}$$

Corolário (4.20)

Se T_c existe e $T_c = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \neq 0$ então $f(c)$ não é extremo local de f.

Teorema (4.21)

Se uma função f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e assumi seu máximo ou seu mínimo em um ponto c do intervalo (a, b), então

$$T_c = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = 0 \quad \text{ou} \quad T_c = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \quad \text{não existe}$$

Definição (4.22)

Um número c no domínio de uma função f é um número crítico de f, se

$$T_c = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = 0 \quad \text{ou} \quad T_c = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \quad \text{não existe}$$

Diretrizes para determinar os extremos de uma função contínua f em $[a,b]$ (4.23)

I) Determinar todos os números críticos de f em (a,b).

II) Calcular $T_c = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ para cada número crítico c obtido em I.

III) Calcular os valores extremos $f(a)$ e $f(b)$.

IV) Os valores máximo e mínimo de f em $[a,b]$ são o maior e menor valores da função calculados segundo II e III.

Teorema (4.24)

I) Se $g(x) = c\cdot f(x)$ então $\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = c\cdot\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right]$

II) Se $f(x) = x^n$ e $n\in\mathbb{N}$ então $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = na^{n-1}$.

III) Se $k(x) = f(x)+g(x)$, então

$$\lim_{h\to 0}\frac{k(a+h)-k(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-q(a)}{h}$$

IV) Se $f(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0$ com $n\in\mathbb{N}$, então

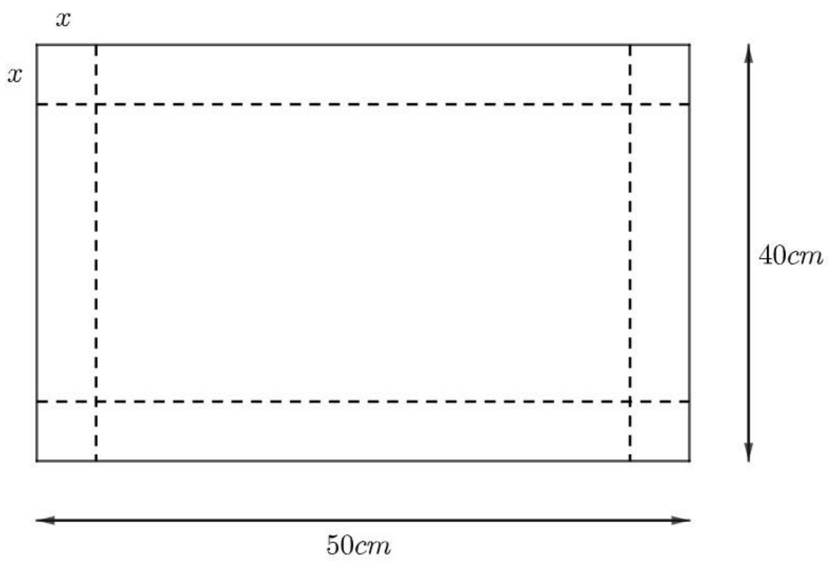
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = nb_n a^{n-1} + (n-1)b_{n-1}a^{n-2} + \cdots + 2b_2a + b_1$$

O item IV indica que podemos aplicar o Item II a cada um dos termos de uma função polinomial tratando a mesma como uma soma de potências de x.

As demonstrações dos itens do Teorema acima se encontram no ANEXO A.

EXEMPLO 2

A figura abaixo apresenta uma folha de papelão com $40\ cm$ x $50\ cm$, nesta folha faremos, em cada canto, um recorte quadrado de lado x, de modo a construir um sólido retangular de altura x. Determine o valor de x para que o volume desse sólido seja máximo.



SOLUÇÃO

O volume do sólido pode ser calculado da seguinte forma

$V(x) = x \cdot (50 - 2x) \cdot (40 - 2x) \Rightarrow V(x) = 4 \cdot (x^3 - 45x^2 + 500x)$

Como V é função polinomial e como tal é definida em todo ponto c do seu domínio, pelo teorema 4.16 temos que V é função contínua. De acordo com as limitações do problema temos que os valores possíveis para x variam entre 0 e 20, ou seja, o domínio de V é o intervalo $[0,20]$.

Pelo Teorema de Weierstrass, como V é uma função contínua, definida no intervalo fechado e limitado $[0,20]$, existem números c e d contidos em $[0,20]$ tais que para todo $x \in [0,20]$

$$V(c) \leq V(x) \leq V(d)$$

Ou seja, $V(x)$ assume valores extremos

Vamos determinar os valores extemos de $V(x)$ aplicando as diretrizes (4.23), com isso obteremos candidatos a valores de máximo e de mínimo de $V(x)$.

Pontos Críticos de V

Aplicando

$$\lim_{h\to 0}\frac{V(x+h)-V(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4[(x+h)^3-45(x+h)^2+500(x+h)]-4(x^3-45x^2+500x)}{h}$$

$= 4(3x^2-90x+500)$ (o limite existe para todo $c \in [0{,}20]$)

Fazendo $3x^2-90x+500=0$

Tal equação tem raízes $\{7{,}36; 22{,}64\}$

Como $x \in [0{,}20] \Rightarrow x = 7{,}36$ pode gerar volume máximo.

Devemos ainda calcular $V(0)$ e $V(20)$

$V(20) = 4\cdot(20^3-45\cdot 20^2+500\cdot 20) = 0$

$V(0) = 4\cdot(0^3-45\cdot 0^2+500\cdot 0) = 0$

$V(7{,}36) = 4\cdot(7{,}36^3-45\cdot 7{,}36^2+500\cdot 7{,}36) = 6{,}564{,}23\ cm^3$

Resposta: x deve ser igual a $7{,}36\ cm$ para que o volume seja máximo.

EXEMPLO 3

Se $f(x) = x^3 - 12x$, determine os valores máximos e mínimos de f no intervalo fechado $[-3{,}5]$.

SOLUÇÃO

Usaremos as diretrizes (4.22) e o Teorema (4.23)(IV)

$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = 3c^2 - 12$ (o limite existe para todo $c \in (-3{,}5)$

II) Vamos determinar os valores c tais que $3c^2 - 12 = 0 \Rightarrow c \in \{-2{,}2\}$

III) $f(-3) = (-3)^3 - 12(-3) = 9$, $f(5) = (5)^3 - 12(5) = 65$,

$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) = 16$, $f(2) = (2)^3 - 12(2) = -16$

IV) O valor máximo de f é $f(2) = -16$ e o valor mínimo de f é $f(5) = 65$.

4.5 Exercícios Propostos

Exercício 4.1

a) Se $f(x) = 3x - 1$ determine $\lim_{x \to -2} f(x)$

b) Se $f(x) = (x^2 + 2)$ determine $\lim_{x \to 3} f(x)$

c) Se $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ determine $\lim_{x \to 2} f(x)$

d) Se $f(x) = \frac{x^2-6x+8}{x-2}$ determine $\lim_{x \to 2} f(x)$

Exercício 4.2

a) Use a Definição 4.4 e mostre que $\lim_{x \to 4}(2x - 6) = 2$

b) Use a Definição 4.4 e mostre que $\lim_{x \to 3} 5x = 15$

c) Use a Definição 4.4 e mostre que $\lim_{x \to -6}(10 - 9x) = 64$

d) Use a Definição 4.4 e mostre que $\lim_{x \to 6}(3 - \frac{1}{2}x) = 0$

Exercício 4.3

Usando o teorema (4.7) determine o limite, quando existe.

a) $\lim_{x \to -2} \frac{x - 5}{4x + 3}$

b) $\lim_{x \to -2}(3x^3 - 2x + 7)$

c) $\lim_{x \to \sqrt{2}}(x^2 + 3)\,(x - 4)$

d) $\lim_{x \to -3} \frac{x + 3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{3}}$

Exercício 4.4

Classifique as descontinuidades de f como removíveis, tipo salto, ou infinitas.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & se\ x < 2 \\ 4 - x, & se\ x \geq 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^3, & se\ x \leq 1 \\ 2 - x, & se\ x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} |x + 5|, & se\ x \neq -2 \\ 2, & se\ x = 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} |x - 4|, & se\ x \neq 4 \\ 4, & se\ x = 4 \end{cases}$

Exercício 4.5

Explique por que f não é contínua em a.

a) $f(x) = \frac{3}{4+x}$ $\quad a = -4$

b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ $\quad a = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, se\ x \neq 3 \\ 4 \quad , se\ x = 3 \end{cases}$ $\quad a = 3$

d) $f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \neq 3 \\ 0, & se\ x = 3 \end{cases}$ $\quad a = 3$

Exercício 4.6

Mostre que se a posição de uma partícula no plano é dada por

$$S(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + S_0$$

Então a chamada velocidade instantânea dessa partícula é dada por

$$V = V_0 + at$$

Exercício 4.7

O lucro de uma empresa é dado pela expressão

$$L(x) = -100x^2 + 3000x + 4000$$

Determine a taxa da variação do lucro quando $x = 10$ e o valor de x para que o lucro seja máximo.

Exercício 4.8

Com base questão 1 resolva o seguinte problema

A trajetória de um corpo é representada pela função

$$A(x) = -\frac{1}{225}x^2 + \frac{2}{3}x$$

Onde A é altura em metros e x o deslocamento horizontal.

Determine a altura máxima e o valor da velocidade para $x = 50$.

CAPÍTULO 5
CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS

A motivação dessa proposta nasce da observação das muitas dificuldades de meus alunos devido às lacunas em sua formação. O pouco domínio das propriedades algébricas dos polinômios, em particular, trinômios de 2º grau associados a produtos notáveis, representam um sério obstáculo ao desenvolvimento de um aprendizado significativo e bem estruturado de funções, suas características e propriedades.

Numa perspectiva mais ampla, tais dificuldades geram insegurança, à medida que vão se somando e produzindo mais entraves ao processo de estudo, entendimento, aplicação e análise de resultados na resolução de problemas matemáticos. O desafio de todo professor é pensar, em estratégias que vão além da argumentação, que sejam mais do que apenas entrega de conteúdo. Penso no trabalho de professor como quem conta uma história ou escreve um livro e nas palavras de Freire (1981, p.8):

> Toda bibliografia deve refletir uma intenção fundamental de quem a elabora: a de atender ou a de despertar o desejo de aprofundar conhecimentos naqueles ou naquelas a quem é proposta. Se falta, nos que a recebem, o ânimo de usá-la, ou se a bibliografia, em si mesma, não é capaz de desafiá-los, se frustra, então, a intenção fundamental referida.
>
> A bibliografia se torna um papel inútil, [...]

Dessa forma, buscar práticas alternativas que estimulem e despertem o desejo pelo aprofundamento de conhecimentos nos estudantes é o grande desafio de nossa atividade. Nesse trabalho apresento o uso de material concreto como ferramenta lúdica para o resgate e aprofundamento de conceitos matemáticos, e ainda, um resgate da autoestima, da confiança e do desejo por conhecimento.

Para os alunos de Ensino médio, a sequência possibilita uma maneira simples baseada no entendimento de propriedades do binômio e não, no uso de fórmulas para apresentar o desenvolvimento de produtos notáveis e posteriormente no estudo de funções quadráticas. Para os alunos de graduação além das possibilidades apresentadas para alunos do ensino médio, fornece ferramentas essências para o estudo de Cálculo.

Nos 4 capítulos anteriores apresentamos a organização de minhas práticas ao longo dos últimos anos atuando como professor na rede federal, neste período trabalhei os capítulos 1 e 2 de forma experimental e pontual em turmas da 1ª série do ensino médio, em turmas de graduação apliquei esta sequência o ano passado. Em ambos os casos os resultados foram satisfatórios, mas sem um registro sistemático dos resultados.

Para o ano de 2024 pretendo aplicar esta sequência fazendo uso do material concreto (APÊNDICES C e D) desenvolvido em parceria com o grupo LABMAKER do Ifes campus de Alegre. A partir deste ano, a coleta de dados e organização dos resultados farão parte de um projeto de ensino sobre a eficácia da aplicação dessa sequência nas séries iniciais do Ensino Médio e em Fundamentos da Matemática do Curso de Agronomia do Ifes campus de Alegre. Os aspectos a serem considerados na pesquisa serão o aprendizado dos temas elencados no tempo proposto por esse texto.

A busca por técnicas e métodos que melhorem a qualidade de nossa aula deve ser uma meta constante em nossa atividade, apesar de acreditar na eficácia do processo aqui proposto, estamos abertos à toda crítica que possa contribuir para o aperfeiçoamento deste texto. Espero de alguma forma, ter contribuído, por meio das ideias aqui postas, para uma prática mais atrativa e interessante de se estudar funções.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

CAPÍTULO 1

Exercício 1.1

a) $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$
b) $x^2 + 12x + 36 = (x+6)^2$
c) $x^2 + 14x + 49 = (x+7)^2$
d) $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$

Exercício 1.2

a) $x^2 - 8x + 20 = 0 \Rightarrow (x-4)^2 + 4 = 0$

b) $x^2 - 5x + 29 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{91}{4} = 0$

c) $2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x - 1\right) = 0 \Rightarrow 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} - \frac{16}{16}\right] = 0$

$$\Rightarrow 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right] = 0$$

d) $3x^2 - 11x - 4 = 0 \Rightarrow 3\left[\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 - \frac{169}{36}\right] = 0$

Exercício 1.3

a) $x^2 - 10x + 21 = 0 \Rightarrow (x-7)(x-3) = 0$

b) $x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x+1)(x+3) = 0$

c) $x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x-5)(x-1) = 0$

d) $x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow 2\left[\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + \frac{40}{4}\right] = 0 \Rightarrow 2\left[\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] = 0$

$$\Rightarrow 2\left[\left(x - \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{7}{2} - \frac{3}{2}\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow 2\left(x - \frac{4}{2}\right)\left(x - \frac{10}{2}\right) = 2(x-2)(x-5)$$

Exercício 1.4

a) $x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow S = \{2,6\}$

b) $x^2 + 6x + 8 = 0 \Rightarrow S = \{-2,-4\}$

c) $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow S = \{2,3\}$

d) $x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow S = \{2,8\}$

CAPÍTULO 2
Exercício 2.1
a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

SOLUÇÃO

Obtemos os zeros resolvendo a equação $x^2 - 4x + 3 = 0$. Completando quadrado obtemos a forma canônica da função $(x-2)^2 - 1 = 0$. Por comparação, esta forma nos dá as coordenadas do vértice $V = (2, -1)$. Podemos interpretar a igualdade $(x-2)^2 - 1 = 0$ como diferença de dois quadrados,

Assim

$$(x - 2 + 1)(x - 2 - 1) = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 3) = 0$$

Segue dessa última igualdade que $x = 1$ ou $x = 3$ para zerar o produto.
Portanto,

$$S = \{1,3\}$$

Para terminar, lembre-se que $f(x)$ tem concavidade para cima $(a = 1 > 0)$, portanto o vértice é o ponto mais baixo do seu gráfico logo o y_V é o menor valor da imagem.

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} |\ y \geq -1\}$$

Zeros	Coordenadas do Vértice	Conjunto Imagem
$S = \{1,3\}$	$V = (2, -1)$	$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$

b) $f(x) = x^2 - 8x + 12$

Zeros	Coordenadas do Vértice	Conjunto Imagem
$S = \{2,6\}$	$V = (4, -4)$	$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -4\}$

c) $f(x) = -x^2 + 6x - 8$

Zeros	Coordenadas do Vértice	Conjunto Imagem
$S = \{2,4\}$	$V = (3,1)$	$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 1\}$

d) $f(x) = -x^2 + 10x - 16$

Zeros	Coordenadas do Vértice	Conjunto Imagem
$S = \{2,8\}$	$V = (5,9)$	$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 9\}$

Exercício 2.2

a) De acordo com gráfico, temos $x_1 = 2$ e $x_2 = 6$ e ainda o ponto $C = (0{,}24)$. Aplicando a forma fatorada (2.3) temos $y = a(x-2)(x-6)$. Para determinar a vamos aplicar as coordenadas de C na função: $24 = a(0-2)(0-6) \Rightarrow a = 2$. Agora, podemos escrever $f(x)$ na forma geral.

$$f(x) = 2(x-2)(x-6) \Rightarrow f(x) = 2(x^2 - 8x + 12)$$
$$\therefore f(x) = 2x^2 - 16x + 24$$

b) $f(x) = -x^2 + 6x - 8$

c) De acordo com gráfico, temos $V = (3{,}1)$ e ainda o ponto $C = (0{,}10)$. Aplicando a forma canônica (2.4) temos $y = a(x-3)^2 + 1$. Para determinar a vamos aplicar as coordenadas de C na função: $10 = a(0-3)^2 + 1 \Rightarrow a = 1$. Agora, podemos escrever $f(x)$ na forma geral.

$$f(x) = 1(x-3)^2 + 1 \Rightarrow f(x) = (x^2 - 6x + 9) + 1$$
$$\therefore f(x) = x^2 - 6x + 10$$

d) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

Exercício 2.3

Queremos determinar t de modo que $p(t)$ seja máximo queremos determinar o t do vértice. Usando a expressão das Coordenadas do Vértice (2.1) para $p(t) = -t^2 + 10t + 24$ temos $t_V = \frac{-10}{2.(-1)} = 5$, ou seja, o mês com o maior número de infectados é o 5º mês. A sugestão aceita é a proposta III.

Exercício 2.4

Temos que $V(x) = K^2(R^2 - x^2) = -K^2x^2 + K^2R^2$ é uma função quadrática de valor máximo, o que o problema pede é o valor de x para $V(x)$ máximo. Usando a expressão das Coordenadas do Vértice (2.1) para $V(x) = -K^2x^2 + K^2R^2$ temos $x_V = \frac{0}{2.(-K^2)} = 0$. A velocidade é máxima quando $x = 0$. (Solução Alternativa: Basta notar que x^2 é um valor a ser subtraído de R^2, como $x^2 \geq 0$, temos que V é máximo quando $x = 0$).

Exercício 2.5

Queremos determinar o preço x que produz o maior lucro, queremos o x_V. Usando a expressão das Coordenadas do Vértice (2.1) para $L(x) = -x^2 + 14x - 45$ temos $x_V = \frac{-14}{2.(-1)} = 7$, ou seja, o preço que produz o maior lucro é R$ 7,00. A empresa deve investir na produção da barra IV.

Exercício 2.6

Temos a associação de 4 grandezas: Número de marmitex vendidos, Preço unitário, Desconto e Arrecadação. Usaremos uma tabela para avaliar como estas grandezas se relacionam.

Desconto	Preço unitário	Marmitex vendidos	Arrecadação.
0	15	210	$15 \cdot 210$
1	$15-1$	$210+30 \cdot 1$	$(15-1)(210+30 \cdot 1)$
2	$15-2$	$210+30 \cdot 2$	$(15-2)(210+30 \cdot 2)$
3	$15-3$	$210+30 \cdot 3$	$(15-3)(210+30 \cdot 3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x	$15-x$	$210+30 \cdot x$	$(15-x)(210+30 \cdot x)$

Temos que a arrecadação é uma função quadrática de valor máximo (-30) é o coeficiente de x^2 na forma geral da função $A(x)=(15-x)(210+30 \cdot x)$. Para fins de cálculo vamos usar a forma fatorada (2.3) da função $A(x)$.

$$A(x)=30 \cdot (15-x)(7+x)$$

Note que os zeros da função são $x_1=15$ e $x_2=-7$. Usando a relação (2.5) para o x_V temos

$$x_V=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{15-7}{2}=4$$

O valor do desconto deve ser de $R\$\,4{,}00$. E a arrecadação máxima ocorre quando $x=4$, assim,

$$A(4)=30 \cdot (15-4)(7+4)=30 \cdot 11 \cdot 11=3630$$

A arrecadação máxima é de $R\$\,3630{,}00$.

CAPÍTULO 3

Exercício 3.1

Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini em todos os itens.

a) $p(x) = x^2 - 6x + 15$ e $d(x) = x - 3$

	1	-6	15
3	1	-3	6

Temos $q(x) = x - 3$ e $r = 6$

b) $p(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 2$ e $d(x) = x - 2$

	1	-5	6	2
2	1	-3	0	2

Temos $q(x) = x^2 - 3x$ e $r = 2$

c) $p(x) = x^3 - 4x + 10$ e $d(x) = x - 2$

	1	0	-4	10
2	1	2	0	10

Temos $q(x) = x^2 + 2x$ e $r = 10$

d) $p(x) = x^2 - 8x + 13$ e $d(x) = x - 4$

	1	-8	13
4	1	-4	-3

Temos $q(x) = x - 4$ e $r = -3$

Exercício 3.2

Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini em os todos os itens.

a) $p(x) = 4x^2 - 13x + 3$ e $d(x) = x - 3$

	4	-13	3
3	4	-1	0

Temos $q(x) = 4x - 1$

b) $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 8$ e $d(x) = x - 2$

	2	-5	6	-8
2	2	-1	4	0

Temos $q(x) = 2x^2 - x + 4$

c) $p(x) = 5x^3 - 7x - 26$ e $d(x) = x - 2$

	5	0	-7	-26
2	5	10	13	0

Temos $q(x) = 5x^2 + 10x + 26$

d) $p(x) = 3x^2 - 4x - 32$ e $d(x) = x - 4$

	3	-4	-32
4	3	8	0

Temos $q(x) = 3x + 8$

Exercício 3.3

a) $p(x) = 6x^3 + 13x^2 + 9x + 2$

Como todos os coeficientes de $p(x)$ são positivos sua raiz deve ser negativa.
Veja que $p(-1) = 6(-1)^3 + 13(-1)^2 + 9(-1) + 2 = 0 \Rightarrow (x + 1)$ divide $p(x)$.

Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini.

	6	13	9	2
-1	6	7	2	0

Temos $q(x) = 6x^2 + 7x + 2$

Como $q(-1) = 1$ e $q(-2) = 12$, q não possui raízes inteiras. Se q possui uma raiz racional da forma $\frac{a}{b}$ com $mdc(a, b) = 1$ então $a \in \{\pm 1, \pm 2\}$ e $b \in \{2,3,6\}$.

Veja que $q\left(-\frac{1}{2}\right) = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 7\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)$ divide $q(x)$.

Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini novamente.

	6	7	2
$-\dfrac{1}{2}$	6	4	0

Temos $q_2(x) = 6x + 4 = 2(3x + 2)$

Assim,

$$p(x) = (x + 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)2(3x + 2) \Rightarrow \boxed{p(x) = (x + 1)(2x + 1)(3x + 2)}$$

b) $p(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$

Veja que $p(1) = 2(1)^3 + 5(1)^2 - 4(1) - 3 = 0 \Rightarrow (x - 1)$ divide $p(x)$.

Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini.

	2	5	-4	-3
1	2	7	3	0

Temos $q(x) = 2x^2 + 7x + 3$

Como $q(1) = 12$, $q(-1) = -2$, $q(-3) = 0 \Rightarrow (x + 3)$ divide $q(x)$.

Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini novamente.

	2	7	3
-3	2	1	0

Temos $q_2(x) = 2x + 1$

$$p(x) = (x - 1)q(x) \Rightarrow \boxed{p(x) = (x - 1)(x + 3)(2x + 1)}$$

c) $p(x) = 4x^3 + 5x^2 - 7x - 2$
Veja que $p(1) = 4(1)^3 + 5(1)^2 - 7(1) - 2 = 0 \Rightarrow (x-1)$ divide $p(x)$.

Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini.

	4	5	−7	−2
1	4	9	2	0

Temos $q(x) = 4x^2 + 9x + 2$

Como $q(1) = 15$, $q(-1) = -3$, $q(-2) = 0 \Rightarrow (x+2)$ divide $q(x)$.

Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini novamente.

	4	9	2
−2	4	1	0

Temos $q_2(x) = 4x + 1$

$$p(x) = (x-1)q(x) \Rightarrow \boxed{p(x) = (x-1)(x+2)(4x+1)}$$

d) $p(x) = x^3 + x^2 - 5x - 6$
Se $p(x)$ possui uma raiz inteira a então $a \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$. Veja que $p(-1) = -1$, $p(1) = -9$, $p(-2) = 0 \Rightarrow (x+2)$ divide $p(x)$.

Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini

	1	1	−5	−6
−2	1	−1	−3	0

Temos $q(x) = x^2 - x - 3$

Como $q(-3) = 9$, $q(3) = 3$, $q(x)$ não possui raízes inteiras. Se q possui uma raiz racional da forma $\frac{a}{b}$ com $mdc(a,b) = 1$ então $a \in \{\pm1, \pm3\}$ e $b = 1$. Sendo $b = 1$, $q(x)$ não possui raízes racionais, pois teríamos $\frac{a}{b} = \frac{a}{1} \in \mathbb{Z}$.

Vamos resolver a equação quadrática $x^2 - x - 3 = 0$

$$x^2 - x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 3 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) = 0$$

Temos $q(x) = \left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$
Portanto,

$$\boxed{p(x) = (x+2)\left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)}$$

Exercício 3.4

a) $\frac{x^3+6x^2+11x+6}{x+1}$

Comecemos observando que para o "denominador" ser válido $x \neq -1$. Note que $(-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 + 11 \cdot (-1) + 6 = 0$, assim, temos que $(x+1)$ divide o "numerador" dessa função quociente. Vamos usar o algoritmo de Briot-Ruffini.

	1	6	11	6
-1	1	5	6	0

Temos $q(x) = x^2 - 5x + 6$

Assim,

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}{x+1} = \frac{(x+1)(x^2 - 5x + 6)}{(x+1)} = x^2 - 5x + 6$$

A simplificação só é possível se $x \neq -1$

b) $\frac{x^3+3x^2-2x-6}{x+3}$

Comecemos observando que para o "denominador" ser válido $x \neq -3$. Note que $(-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 2 \cdot (-3) - 6 = 0$, assim, temos que $(x+3)$ divide o "numerador" dessa função quociente. Vamos usar o algoritmo de Briot-Ruffini.

	1	3	-2	-6
-3	1	0	-2	0

Temos $q(x) = x^2 - 2$

Assim,

$$\frac{x^3 + 3x^2 - 2x - 6}{x+3} = \frac{(x+3)(x^2 - 2)}{(x+3)} = x^2 - 2$$

A simplificação só é possível se $x \neq -3$.

c) $\frac{2x^3-5x^2+3x+2}{x-1}$

Comecemos observando que para o "denominador" ser válido $x \neq 1$. Note que $2 \cdot (1)^3 - 5 \cdot (1)^2 + 3 \cdot (1) + 2 = 2$, assim, temos que $(x-1)$ não divide o "numerador" dessa função quociente. Logo, não é possível simplificar esta função quociente.

d) $\frac{x^3-3x^2-10x+24}{x-2}$

Comecemos observando que para o "denominador" ser válido $x \neq 2$. Note que $(2)^3 - 3 \cdot (2)^2 - 10 \cdot (2) + 24 = 0$, assim, temos que $(x-2)$ divide o "numerador" dessa função quociente. Vamos usar o algoritmo de Briot-Ruffini.

	1	-3	-10	24
2	1	-1	-12	0

Temos $q(x) = x^2 - x - 12$

Assim,

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 10x + 24}{x-2} = \frac{(x-2)(x^2 - x - 12)}{(x-2)} = x^2 - x - 12$$

A simplificação só é possível se $x \neq 2$.

CAPÍTULO 4

Exercício 4.1

a) Se $f(x) = 3x - 1$ determine $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

$\lim\limits_{x \to -2} (3x - 1) = 3(-2) - 1 = -7$

b) Se $f(x) = (x^2 + 2)$ determine $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 3} (x^2 + 2) = 3^2 + 2 = 11$

c) Se $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ determine $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

$$\lim_{x \to 2} \left[\frac{x^2 - 4}{x - 2}\right] = \lim_{x \to 2} \left[\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\right] = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$$

d) Se $f(x) = \frac{x^2-6x+8}{x-2}$ determine $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

$$\lim_{x \to 2} \left[\frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}\right] = \lim_{x \to 2} \left[\frac{(x-2)(x-4)}{x-2}\right] = \lim_{x \to 2} (x - 4) = 2 - 4 = -2$$

Exercício 4.2

a) Use a Definição 4.4 e mostre que $\lim_{x \to 4}(2x-6) = 2$

$a = 4$, $L = 2$ e $f(x) = 2x - 6$,

Escolhendo δ

$$
\begin{aligned}
|f(x) - L| < \varepsilon \quad &\Rightarrow |(2x-6) - 2| < \varepsilon \\
&\Rightarrow |2x - 8| < \varepsilon \\
&\Rightarrow 2|x-4| < \varepsilon \\
&\Rightarrow |x-4| < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ podemos escolher } \delta = \tfrac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}
$$

Pela definição (4.4) dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
|x-4| < \delta \quad &\Rightarrow |x-4| < \frac{\varepsilon}{2} \\
&\Rightarrow 2|x-4| < \varepsilon \\
&\Rightarrow |2x-8| < \varepsilon \\
&\Rightarrow |(2x-6) - 2| < \varepsilon \\
&\Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon
\end{aligned}
$$

Logo, se $|x-4| < \delta$ então $|f(x) - 2| < \varepsilon$.

b) Use a Definição 4.4 e mostre que $\lim_{x \to 3} 5x = 15$

$a = 3$, $L = 15$ e $f(x) = 5x$,

Escolhendo δ

$$
\begin{aligned}
|f(x) - L| < \varepsilon \quad &\Rightarrow |5x - 15| < \varepsilon \\
&\Rightarrow 5|x-3| < \varepsilon \\
&\Rightarrow |x-3| < \tfrac{\varepsilon}{5} \text{ podemos escolher } \delta = \tfrac{\varepsilon}{5}
\end{aligned}
$$

Pela definição (4.4) dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \frac{\varepsilon}{5} > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
|x-3| < \delta \quad &\Rightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{5} \\
&\Rightarrow 5|x-3| < \varepsilon \\
&\Rightarrow |5x-15| < \varepsilon \\
&\Rightarrow |f(x) - 15| < \varepsilon
\end{aligned}
$$

Logo, se $|x-3| < \delta$ então $|f(x) - 15| < \varepsilon$.

c) Use a Definição 4.4 e mostre que $\lim_{x\to-6}(10-9x)=64$

$a=-6$, $L=64$ e $f(x)=10-9x$,
Escolhendo δ

$$|f(x)-L|<\varepsilon \quad \Rightarrow |10-9x-64|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow |-9x-54|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow 9|-x-6|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow |-x-6|<\frac{\varepsilon}{9} \text{ podemos escolher } \delta=\frac{\varepsilon}{9}$$

Pela definição (4.4) dado $\varepsilon>0$ existe $\delta=\frac{\varepsilon}{9}>0$ tal que

$$|x-(-6)|<\delta \quad \Rightarrow |x-(-6)|<\frac{\varepsilon}{9}$$
$$\Rightarrow 9|(-6)-x|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow |-54-9x|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow |-64+10-9x|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow |(10-9x)-64|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow |f(x)-64|<\varepsilon$$

Logo, se $|x-(-6)|<\delta$ então $|f(x)-64|<\varepsilon$.

d) Use a Definição 4.4 e mostre que $\lim_{x\to6}(3-\frac{1}{2}x)=0$

$a=6$, $L=0$ e $f(x)=3-\frac{1}{2}x$,
Escolhendo δ

$$|f(x)-L|<\varepsilon \quad \Rightarrow \left|3-\frac{1}{2}x-0\right|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow |6-x|<2\varepsilon$$
$$\Rightarrow |x-6|<2\varepsilon \text{ podemos escolher } \delta=2\varepsilon$$

Pela definição (4.4) dado $\varepsilon>0$ existe $\delta=2\varepsilon>0$ tal que

$$|x-6|<\delta \quad \Rightarrow |x-6|<2\varepsilon$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}|6-x|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow \left|3-\frac{1}{2}x\right|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow \left|3-\frac{1}{2}x-0\right|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow |f(x)-0|<\varepsilon$$

Logo, se $|x-6|<\delta$ então $|f(x)-0|<\varepsilon$.

Exercício 4.3

a) $\lim_{x\to-2} \dfrac{x-5}{4x+3}$

Como $\lim_{x\to-2} 4x+3 = 4(-2)+3 = -5$ temos que

$$\lim_{x\to-2} \frac{x-5}{4x+3} = \frac{\lim_{x\to-2} x-5}{\lim_{x\to-2} 4x+3} = \frac{-2-5}{4(-2)+3} = \frac{7}{5}$$

b) $\lim_{x\to-2}(3x^3-2x+7)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}(3x^3-2x+7) &= \lim_{x\to-2} 3x^3 - \lim_{x\to-2} 2x + \lim_{x\to-2} 7 \\ &= 3\lim_{x\to-2} x^3 - 2\lim_{x\to-2} x + 7 \\ &= 3\cdot(-2)^3 - 2\cdot(-2) + 7 \\ &= 3\cdot(-8) + 4 + 7 = -13\end{aligned}$$

c) $\lim_{x\to\sqrt{2}}(x^2+3)\,(x-4)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\sqrt{2}}(x^2+3)\,(x-4) &= \lim_{x\to\sqrt{2}}(x^2+3)\cdot\lim_{x\to\sqrt{2}}(x-4) \\ &= \left[\lim_{x\to\sqrt{2}} x^2 + \lim_{x\to\sqrt{2}} 3\right]\cdot\left[\lim_{x\to\sqrt{2}} x - \lim_{x\to\sqrt{2}} 4\right] \\ &= \left[\left(\sqrt{2}\right)^2 + 3\right]\left(\sqrt{2}-4\right) = 5\left(\sqrt{2}-4\right) \\ &= 5\sqrt{2} - 20\end{aligned}$$

d) $\lim_{x\to-3} \dfrac{x+3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{3}}$

$$\lim_{x\to-3} \frac{x+3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{3}} = \lim_{x\to-3} \frac{x+3}{\frac{x+3}{3x}} = \lim_{x\to-3} \frac{(x+3)3x}{(x+3)} = \lim_{x\to-3} 3x = 3(-3) = -9$$

Exercício 4.5

a) $f(x) = \frac{3}{4+x}$ $\qquad a = -4$

$f(x)$ não é definida em $f(-4)$.

b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ $\qquad a = 1$

$f(x)$ não é definida em $f(-1)$.

c) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3}, se\ x\neq 3\\ 4 \quad , se\ x=3\end{cases}$ $\qquad a=3$

Veja que

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6\neq 4=f(3)$$

d) $f(x)=\begin{cases}1, & se\ x\neq 3\\ 0, & se\ x=3\end{cases}$ $\qquad a=3$

Veja que

$$\lim_{x\to 3} f(x)=1\neq 0=f(3)$$

Exercício 4.6

Seja $S(t)=\frac{at^2}{2}+v_0t+S_0$ a equação da posição de uma partícula no plano no decorrer do tempo.

A Velocidade média é a taxa média de variação da posição que é dada, com as devidas adaptações do Teorema (4.22) (I), por

$$T_m=\frac{S(t+h)-S(t)}{h}$$

A Velocidade instantânea é a taxa instantânea de variação da posição que é dada, com as devidas adaptações do Teorema (4.22)(II), por

$$T_t=\lim_{h\to 0}\frac{S(t+h)-S(t)}{h} \quad =\frac{2at}{2}+v_0+0=v_0+at$$

Exercício 4.7

Seja

$$L(x)=-100x^2+3000x+4000$$

Aplicando o Teorema (4.22)(II)

$$T_x=\lim_{h\to 0}\frac{L(x+h)-L(x)}{h} \quad =-200x+3000$$

Assim,

$$T_{10}=-200\cdot 10+3000=1000$$

Lucro máximo ocorre se $T_x=0$

$$-200x+3000=0\Rightarrow x=1{,}5$$

Exercício 4.8

Seja

$$A(x) = -\frac{1}{225}x^2 + \frac{2}{3}x$$

Devemos então determinar a expressão da taxa de variação instantânea da altura em função de x e determinar o que se pede.

Aplicando o Teorema (4.22)(II)

$$T_x = \lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h} \quad = -\frac{2}{225}x + \frac{2}{3}$$

Para determinar a altura máxima vamos usar o fato de que o valor máximo ocorre em ponto extremo, assim

$$-\frac{2}{225}x + \frac{2}{3} = 0 \quad \Rightarrow \frac{2}{225}x = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow x = \frac{225}{3} = 75$ (valor associado a altura máxima)

Altura máxima é

$$A(75) = -\frac{1}{225}75^2 + \frac{2}{3}75$$

$A(75) = -25 + 50 = 25\ m$ (Altura máxima)

Velocidade para $x = 50$

Aplicando a expressão da taxa instantânea de variação da posição(que é a velocidade instantânea), temos

$V = -\frac{2}{225}50 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{9} + \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ m/s

REFERÊNCIAS

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini**: **8º ano**. 10ª Ed. São Paulo: Moderna, 2022.

BORGATO, Keyla Cristina. **O ensino de produtos notáveis e fatoração de polinômios: uma articulação entre álgebra e geometria.** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Londrina, 2013.

BRASIL, Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Provas do ENEM**, Disponível em https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos. Acesso em 02 de janeiro de 2024.

BRASIL, Ministério da Educação (MEC). **Base Nacional Comum Curricular(BNCC).** Disponível em http://download.basenacionalcomum.mec. gov.br/. Acesso em 02 de janeiro 2024.

FRAGOSO, W. C., **Uma abordagem histórica da equação de 2º grau**, RPM - Revista do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, p20-25, 2000

FREIRE, Paulo. **Ação cultural para a liberdade.** 5ª Ed. Rio de Janeiro. Paz e Terra. 1981

GAY, Maria Regina Garcia. **Matemática: 9º ano**. Coleção Araribá Conecta. 1ª Ed. São Paulo: Moderna, 2022.

Guidorizzi, Hamilton Luiz. **Um curso de Cálculo, vol.1** 5ª Ed – [Reimp.] Rio de Janeiro: LTC, 2013

HEFEZ, abramo. **Curso de Álgebra, Volume I.** 5 ed. Rio de Janeiro : IMPA 2013.

Iezzi, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar - Vol.6.** 8ª Ed. São Paulo: Atual, 2013.

Iezzi, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar - Vol.8.** 8ª Ed. São Paulo: Atual, 2013.

SILVA, Lucylla Medeiros da. **Uma abordagem geométrica para operações básicas dos polinômios de 1º, 2º e 3º graus.** 2021. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Departamento de Matemática, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Natal, 2021.

SOARES, Tamiri Pinto. **Produtos notáveis: aplicação da atividade orientadora de ensino a partir da resolução de problemas.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Ilhéus, 2018.

SWOKOWSKI, Earl William. **Cálculo com Geometria**.Tradução de Alfredo Alves Faria. 2ª Ed. São Paulo: Makron Books,1994.

TEIXEIRA,Lilian Aparecida. **Matemática: 9° ano.** 1ª Ed. São Paulo: Moderna, 2022.

APÊNDICE A – AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA INICIAL

	NOME DA INSTITUIÇÃO		ANO
NOME		SÉRIE / TURMA	AVALIAÇÃO / TRIMESTRE Diagnótica I
PROFESSOR X		DISCIPLINA Matemática I	VALOR XXXXXXXXXXX

RESPOSTAS NÃO JUSTIFICADAS POR MEIO DE CÁLCULOS NÃO SERÃO ACEITAS.
A PROVA DEVE SER RESPONDIDA À CANETA PARA POSSÍVEL REVISÃO DE NOTA.

ENUNCIADOS

Questão 1 [EF08MA19]
Tenho um terreno quadrangular de lado 40 m. Quero uma calçada de 2m de largura de modo que essa calçada cerque apenas dois lados adjacentes desse terreno. Qual a medida da área dessa calçada?

Questão 2 [EF08MA09]
Determine as raízes de $x^2 - 14x + 9 = 0$

Questão 3 [EF09MA09]
Efetue o desenvolvimento do binômio $(x + 3)^2$.

Questão 4 [EF09MA09]
Qual o valor da diferença $48^2 - 47^2$?

Questão 5 [EF06MA03]
Em um salão serão colocadas 25 mesas de modo que em cada mesa devemos ter 8 convidados, mesmo assim restarão 7 convidados a serem acomodados. Qual o número de convidados para essa festa?

Questão 6 [EF06MA05]e [EF06MA03]
Qual a maior potência de 3 que divide 20376? E qual o valor do quociente dessa divisão?

Questão 7 [EF06MA07]
Organize as seguintes frações em ordem crescente $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{6}{11}$ *e* $\frac{7}{12}$.

Questão 8 [EF06MA10]
Roberto adora pizza e como estava com muita fome, foi até uma pizzaria e decidiu que comeria um rodízio. Conforme o garçom passava, ele foi pedindo as fatias e por fim, havia comido:
$\frac{1}{2}$ *de pizza de queijo e presunto,* $\frac{3}{4}$ *de pizza de margerita,* $\frac{5}{8}$ *de pizza de frango e catupiry. Ao total, qual a fração que representa a quantidade de pizzas que Roberto comeu?*

Questão 9 [EF06MA11]
Resolva a expressão: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{2}{5}\right)^4 =$

Questão 10 [EF07MA01]
Qual é o menor múltiplo de 15 que é maior que 2000?

Questão 11 [EF08MA19]
A área de um quadrado é da por $A_{(x)} = x^2 - 8x + 4$ *. Se a área do quadrado mede 68, qual o valo de x?*

APÊNDICE B – AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL

	NOME DA INSTITUIÇÃO		ANO
NOME		SÉRIE / TURMA	AVALIAÇÃO / TRIMESTRE Diagnótica II
PROFESSOR X		DISCIPLINA Matemática I	VALOR XXXXXXXXXXX

RESPOSTAS NÃO JUSTIFICADAS POR MEIO DE CÁLCULOS NÃO SERÃO ACEITAS.
A PROVA DEVE SER RESPONDIDA À CANETA PARA POSSÍVEL REVISÃO DE NOTA.

ENUNCIADOS

Questão 1 [EF09MA09]
Efetue o desenvolvimento de $(x-8)^2$

Questão 2 [EF09MA09]
Determine as raízes da equação $x^2-6x+5=0$

Questão 3 [EF08MA19]
Qual o lado do quadrado que ao subtrairmos do valor de sua área, o dobro da medida do seu lado, obtemos 63?

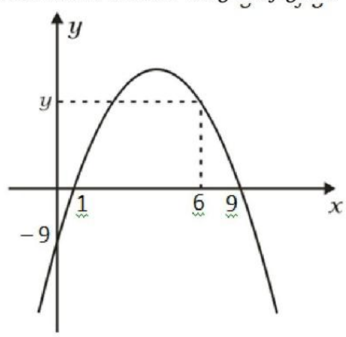
Questão 4 [EF09MA09]
Qual o valor da diferença 65^2-55^2*?*

Questão 5 [EF06MA09]
A turma de Carlos possui 28 alunos, dos quais $\frac{1}{4}$ *são meninas. Sabendo disso, qual o número de meninos?*

Questão 6 [EM13MAT503]
Um fabricante vende mensalmente x unidades de um determinado artigo por **V(x) = x² – x**, *sendo o custo da produção dado por* **C(x) = 2x² – 7x + 8**. *Quantas unidades devem ser vendidas mensalmente, de modo que se obtenha o lucro máximo? (Lucro = Venda – custo.)*

Questão 7 [EF09MA09]
Determine as raízes da equação $x^2-5x+6=0$

Questão 8 [EM13MAT502]
Determine o valor de y na figura



Questão 9 [EM13MAT302]
Uma agência de viagens vende pacotes turísticos coletivos com destino a Fortaleza. Um pacote para 40 clientes custa R$ 2000,00 por pessoa e, em caso de desistência, cada pessoa que permanecer no grupo deve pagar mais R$ 100,00 por cada desistente do pacote de viagem. Dessa forma, para que essa agência obtenha lucro máximo na venda desse pacote de viagens, o número de pessoas que devem realizar a viagem é igual a:

Questão 10 [EM13MAT503] **(CFO PMES 2013 – Exatus)**
A Apolônio foods apresenta sua arrecadação na forma de função quadrática. Sua arrecadação se estabelece em função do desconto dado. Sabe-se que a arrecadação diária máxima de 36.300 reais é atingida quando a mesma dá um desconto de 4 reais no preço de seu lanche, e quando não há desconto ela arrecada 31.500 reais. Que arrecadação se obtém com um desconto de 6 reais?

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO

	NOME DA INSTITUIÇÃO		ANO
NOME XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX		SÉRIE / TURMA	AVALIAÇÃO / TRIMESTRE Qualitativa
PROFESSOR X		DISCIPLINA Matemática I	VALOR XXXXXXXXXXX

Responda as questões sobre o método aplicado os resultados obtidos.

Questão 1
Você já havia estudado ou visto produtos notáveis com essa abordagem geométrica?
( ) **SIM** ( ) **NÃO**

Comentário:____

Questão 2
O método aplicado aqui te pareceu complicado?
( ) **SIM** ( ) **NÃO**

Comentário:____

Questão 3
Você já havia estudado produtos notáveis?
( ) **SIM** ( ) **NÃO**

Comentário:____

Questão 4
O uso de material concreto facilitou o seu aprendizado?
( ) **SIM** ( ) **NÃO**

Comentário:____

Questão 5
As tarefas iniciais propostas estavam claras?
( ) **SIM** ( ) **NÃO**

Comentário:____

Questão 6
Esse método deixou a aula mais interessante?
( ) **SIM** ( ) **NÃO**

Comentário:____

Questão 7
Você conseguiu relacionar o produto notável com a equação de 2º grau correspondente?
( ) **SIM** ( ) **NÃO**

Comentário:____

Questão 8
Comparando as notas das avaliações diagnósticas Inicial e Final, sua nota melhorou?
( ) **SIM** ( ) **NÃO**

Comentário:____

____

Questão 9
Você já usou a Fórmula de Bhaskara para determinar as raízes de uma equação de 2º grau?
( ) **SIM** ( ) **NÃO**

Comentário:____

____

Questão 10
Na sua opinião, a fórmula de Bhaskara é mais fácil do que completar quadrados para determinar as raízes de uma equação de 2º grau?
( ) **SIM** ( ) **NÃO**

Comentário:____

____

Questão 11
Você conseguiria associar os elementos do gráfico da função quadrática com o produto notável correspondente?

( ) **SIM** ( ) **NÃO**

Comentário:____

____

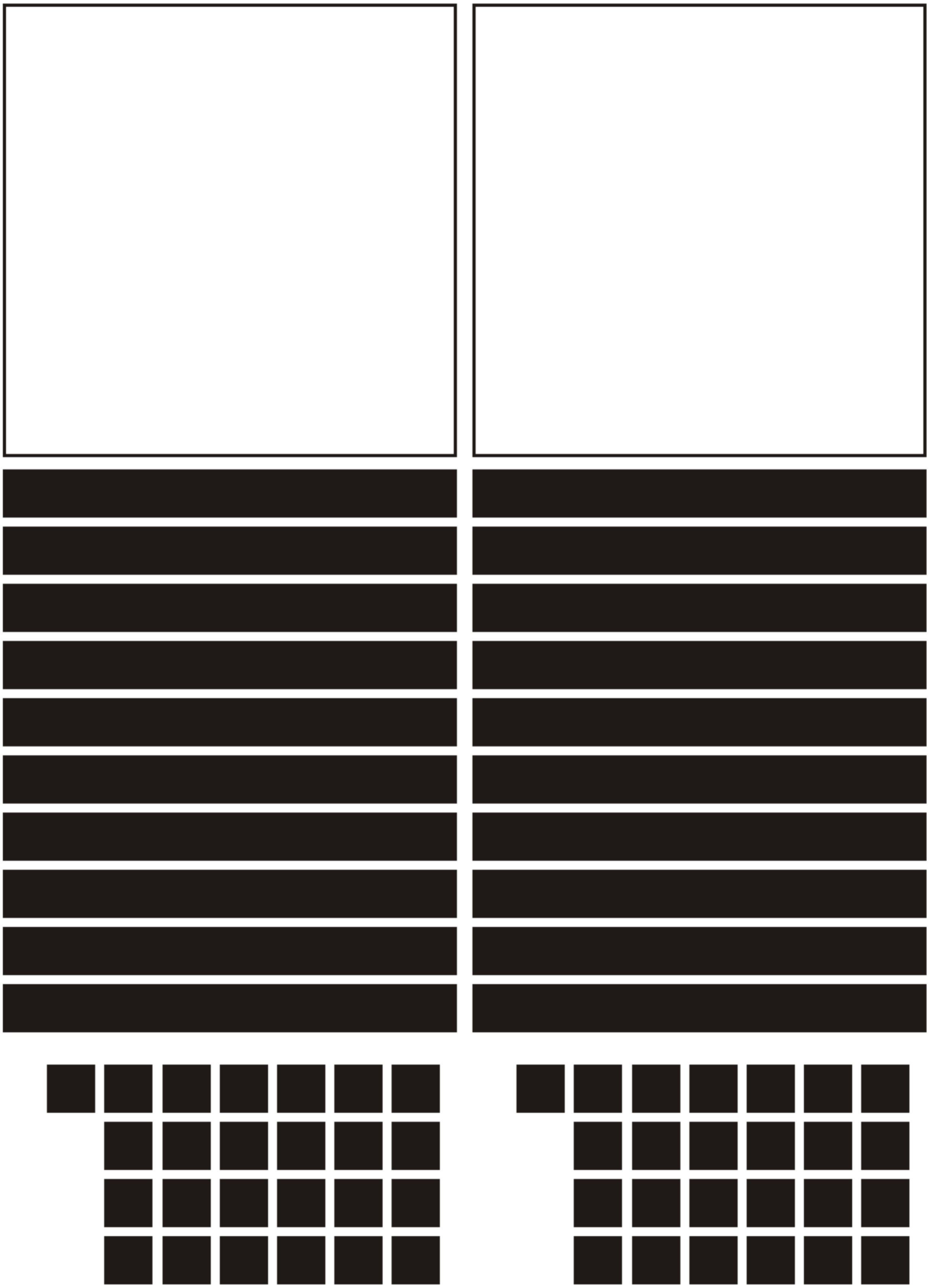
Questão 12
Você conseguiria escrever a função quadrática como produto de fatores binomiais?
( ) **SIM** ( ) **NÃO**

Comentário:____

____

Questão 13
Faça qualquer observação, que não tenha sido abordada, sobre o método, suas dificuldades e sugestões.

APÊNDICE D – MOLDE PARA A PRODUÇÃO DO MATERIAL CONCRETO



APÊNDICE E – FOTO DO KIT COM MATERIAL CONCRETO

APÊNDICE F – FOTO DO KIT COM MATERIAL CONCRETO (SOLUÇÃO)

ANEXO A - DEMONSTRAÇÕES DAS FÓRMULAS E TEOREMAS

Fórmula Quadrática

Considere uma equação de 2º grau de forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Aplicando o método de completar quadrados, temos.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tomando $b^2 - 4ac = \Delta$ (discriminante) temos como soluções

$$S = \left\{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$$

A igualdade $\Delta = b^2 - 4ac$ define se a equação possui soluções em $\mathbb{R}$.

Teorema 4.7

No que segue, suponha que os limites $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ existem, logo existem L e M, números reais tais que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = M$$

De acordo com a definição (4.4) Dados ε_1,ε_2 ∈ $\mathbb{R}_*^+$ existem δ_1, δ_2 ∈ $\mathbb{R}_*^+$ tais que

Se $0 < |x - a| < \delta_1$ então $|f(x) - L| < \varepsilon_1$.

Se $0 < |x - a| < \delta_2$ então $|f(x) - L| < \varepsilon_2$.

I) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

DEMONSTRAÇÃO

Note que

$$\begin{aligned} |[f(x) + g(x)] - (L + M)| &= |[f(x) - L] + (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \quad (1) \end{aligned}$$

Podemos escolher x suficientemente próximo de a com $0 < \delta < min\{\delta_1, \delta_2\}$ tal que $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\varepsilon$ e $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\varepsilon$. Segue do resultado (1) (onde aplicamos a desigualdade triangular) que se $0 < |x - a| < \delta$ temos

$$\begin{aligned} |[f(x) + g(x)] - (L + M)| &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

Assim,

Se $0 < |x - a| < \delta$ então $|[f(x) + g(x)] - (L + M)| < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$

Portanto,

$\lim_{x \to a} |f(x) + g(x)| = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

II) $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

DEMONSTRAÇÃO

Devemos mostrar inicialmente que se k é uma função positiva e $\lim_{x\to a} k(x) = 0$ então $\lim_{x\to a} f(x)k(x) = 0$

Da definição (4.4) com $\lim_{x\to a} f(x) = L$ tomando $\varepsilon_1 = 1$ existirá δ_1 tal que

Se $0 < |x-a| < \delta_1$ então $|f(x) - L| < 1$. E ainda,

$|f(x)| = |f(x) - L + L| \leq |f(x) - L| + |L| < 1 + |L|$

Se $0 < |x-a| < \delta_1$ então $|k(x)f(x)| < (1+|L|)k(x)$ (2)

Como $\lim_{x\to a} k(x) = 0$ para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta_3 > 0$ tal que

Se $0 < |x-a| < \delta_3$ então $|k(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{(1+|L|)}$ (3)

Tomando $\delta_4 = min\{\delta_1, \delta_3\}$ então sempre que $0 < |x-a| < \delta_4$ temos que as desigualdades (2) e (3) são verdadeiras. Assim,

$$|k(x)f(x)| < (1+|L|)\cdot\frac{\varepsilon}{(1+|L|)} = \varepsilon$$

Portanto,

Se $0 < |x-a| < \delta_4$ então $|k(x)f(x) - 0| < \varepsilon$

O que prova que se $\lim_{x\to a} k(x) = 0$ então $\lim_{x\to a} k(x)f(x) = 0$ (4)

Agora, Note que

$$\begin{aligned} f(x)g(x) - LM &= f(x)g(x) - Mf(x) + Mf(x) - LM \\ &= f(x)[g(x) - M] + M[f(x) - L] \end{aligned}$$

Como $\lim_{x\to a}[g(x) - M] = 0$ e $\lim_{x\to a}[f(x) - L] = 0$, pelo resultado (4) então

$\lim_{x\to a}[f(x)g(x) - LM] = \lim_{x\to a} f(x)[g(x) - M] + \lim_{x\to a} M[f(x) - L] = 0 + 0$

$\lim_{x\to a}[f(x)g(x) - LM] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM$

$\therefore \lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$

III) $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ desde que $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

DEMONSTRAÇÃO

Veja que

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \frac{1}{|M||g(x)|} |g(x) - M|$$

Pelo resultado (4) do item II $\lim_{x \to a} |g(x) - M| = 0$, temos então

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \lim_{x \to a} \left[\frac{1}{|M||g(x)|} |g(x) - M| \right] = 0$$

Assim,

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$$

Pelo item II temos que

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \lim_{x \to a} \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} \left[\frac{1}{g(x)} \right] = L. \frac{1}{M} = \frac{L}{M}$$

$$\therefore \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

IV) $\lim_{x \to a} [c \cdot g(x)] = \mathrm{c} \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

DEMONSTRAÇÃO

Do item II temos

$$\lim_{x \to a} [c \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} c \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

Pelo item I do teorema (4.6)

$$\lim_{x \to a} [c \cdot g(x)] = c \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

V) $\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

DEMONSTRAÇÃO

$$\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a}[f(x) + (-1)g(x)]$$

Pelo item I temos

$$\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a}(-1)g(x)$$

Pelo item IV

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] &= \lim_{x \to a} f(x) + (-1) \lim_{x \to a} g(x) \\ &= \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)\end{aligned}$$

Teorema (4.24)

I) Se $g(x) = c \cdot f(x)$ então $\lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = c \cdot \left[\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right]$.

DEMONSTRAÇÃO

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{c \cdot f(a+h) - c \cdot f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} c \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= c \cdot \left[\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right]\end{aligned}$$

II) Se $f(x) = x^n$ e $n \in \mathbb{N}$ então $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = na^{n-1}$

DEMONSTRAÇÃO

Aplicando a definição (4.14)(II)

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^n - (a)^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a^n + \binom{n}{1} h a^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} h^{n-1} a^1 + h^n - (a)^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\binom{n}{1} a^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} h^{n-2} a^1 + h^{n-2}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0}(na^{n-1} + \cdots + nh^{n-2}a^1 + h^{n-2}) = na^{n-1}\end{aligned}$$

III) Se $k(x) = f(x) + g(x)$, então

$$\lim_{h\to 0}\frac{k(a+h)-k(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-q(a)}{h}$$

DEMONSTRAÇÃO

Aplicando a definição (4.14)(II)

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{k(a+h)-k(a)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(a+h)+g(a+h)]-[f(a)+g(a)]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(a+h)-f(a)]+[g(a+h)-g(a)]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(a+h)-f(a)]}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{[g(a+h)-g(a)]}{h}\end{aligned}$$

IV) Se $f(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ com $n \in \mathbb{N}$, então

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = nb_n a^{n-1} + (n-1)b_{n-1}a^{n-2} + \cdots + 2b_2 a + b_1$$

DEMONSTRAÇÃO

Pelo Teorema (4.24)(III) e o corolário (4.15)

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{b_n(a+h)^n - b_n a^n}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{b_{n-1}(a+h)^{n-1} - b_{n-1}a^{n-1}}{h}\\ &\quad + \ldots + \lim_{h\to 0}\frac{b_1(a+h)-b_1 a}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{b_0 - b_0}{h}\end{aligned}$$

Pelo Teorema (4.24)(I)

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= b_n\left[\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^n - a^n}{h}\right] + b_{n-1}\left[\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^{n-1} - a^{n-1}}{h}\right]\\ &\quad + \cdots + b_1\left[\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)-a}{h}\right] + 0\end{aligned}$$

Pelo Teorema (4.24)(II)

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= b_n(na^{n-1}) + b_{n-1}[(n-1)a^{n-2}] + \cdots + b_1[1] + 0\\ &= nb_n a^{n-1} + (n-1)b_{n-1}a^{n-2} + \cdots + b_1\end{aligned}$$