

THIAGO DE LÍRIO LIMA

**TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO E UMA PROPOSTA DE
SEQUÊNCIA DE ENSINO PARA O ESTUDO DE PROGRESSÕES
GEOMÉTRICAS.**

**IFSP – SP
SÃO PAULO - SP
2024**

THIAGO DE LÍRIO LIMA

**TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO E UMA PROPOSTA DE
SEQUÊNCIA ENSINO PARA O ESTUDO DE PROGRESSÕES
GEOMÉTRICAS.**

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Luciano Aparecido Magrini

**IFSP – SP
SÃO PAULO - SP
2024**

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

1732t Lima, Thiago de Lirio
 Teorema fundamental do cálculo e uma proposta
 de sequência de ensino para o estudo de
 progressões geométricas / Thiago de Lirio Lima.
 São Paulo: [s.n.], 2024.
 108 f.

Orientador: Dr. Luciano Aparecido Magrini

Dissertação (Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional) - Instituto Federal
de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo,
IFSP, 2024.

1. Teorema Fundamental do Cálculo. 2.
Sequência de Ensino. 3. Progressões Geométricas.
4. Ensino Médio. I. Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD 510

THIAGO DE LÍRIO LIMA

**TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO E UMA PROPOSTA DE
SEQUÊNCIA DE ENSINO PARA O ESTUDO DE PROGRESSÕES
GEOMÉTRICAS.**

Dissertação apresentada e aprovada no dia 18 de abril de 2024 ao programa de Mestrado Profissional *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Luciano Aparecido Magrini
IFSP – *Campus* São Paulo
Orientador e Presidente da Banca

Prof. Dr. Amari Goulart
IFSP – *Campus* São Paulo
Membro Interno

Prof.^a Dra. Marta Cilene Gadotti
UNESP – *Campus* Rio Claro
Membro Externo

Prof.^a Ma. Camila de Souza Costa
IFSP – *Campus* São Paulo
Membro Externo

“Se eu vi mais longe, foi porque estava sobre os ombros de gigantes”

Sir Isaac Newton – 1675.

*“Eis que Deus é o meu ajudador, o Senhor é quem
me sustenta a vida.”*

Salmos 54:4

AGRADECIMENTOS

Agradeço à toda minha família pela força dada em todos estes anos de estudo, ao Professor Dr. Luciano Aparecido Magrini que me forneceu as orientações necessárias e cruciais para a realização dessa pesquisa, a todos os docentes e colegas de classe do IFSP – *Campus* São Paulo, que me apoiaram e encorajaram durante todo o período de desenvolvimento deste curso, e principalmente a Deus, que me deu o fôlego de vida e a oportunidade de frequentar este ambiente acadêmico.

RESUMO

Neste trabalho faz-se uma revisão do Teorema Fundamental do Cálculo abordando seus aspectos históricos e apresentando uma demonstração formal e, fundamentando-se nos conceitos estudados apresenta-se uma sugestão de sequência de ensino para o estudo de progressões geométrica no Ensino Médio. Essa dissertação também tem por finalidade elucidar detalhadamente a importância do Teorema Fundamental do Cálculo, destacando seus aspectos históricos, começando pelos gregos antigos (*Eudoxo*, *Arquimedes* e *Apolônio*) até chegar ao seu desenvolvimento no século XVII com *Newton* e *Leibniz*, proporcionando uma compreensão profunda sobre sua evolução, e como cada pessoa pôde contribuir para sua criação. Destaca-se que tanto *Newton* quanto *Leibniz*, de forma independente, conceberam o Teorema Fundamental do Cálculo ao perceberem a relação entre os problemas de cálculo de áreas (integrais) e a determinação de retas tangentes (diferenciação), compreendendo que podiam ser resolvidos simultaneamente. Por fim, é apresentada uma aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo no Ensino Médio, por meio de uma Sequência de Ensino, que tem como propósito fornecer ao professor uma ferramenta que enriquecerá sua abordagem sobre progressões geométricas.

Palavras-chave: Teorema Fundamental do Cálculo, Sequência de Ensino, Progressões Geométricas, Ensino Médio.

ABSTRACT

This paper reviews the fundamental theorem of calculus, approaches its historical aspects, and presents a formal demonstration; it also suggests a didactic sequence to study geometric progression in secondary school based on the concepts studied. This research also aims to elucidate thoroughly the importance of the Fundamental Theorem of calculus, highlighting its historical aspects starting with the ancient Greeks (Eudoxus, Archimedes, and Apollonius) until its development in the 17th century with Newton and Leibniz. This will provide a deep understanding of its evolution and how each person could contribute to its creation. It should be stressed that Newton and Leibniz independently conceived the Fundamental Theorem of calculus when realizing the relationship between the problems of calculating areas (integrals) and determining tangent lines (differentiation), understanding that they could be solved simultaneously. Finally, an application of the Fundamental Theorem of calculus in Secondary School is presented. It aims to provide the teacher with a tool that will enrich their approach to geometric progressions.

Keywords: Fundamental Theorem of Calculus, Teaching Sequence, Geometric Progressions, Secondary School

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Quadratura do círculo	19
Figura 2: Polígonos regulares inscritos e circunscritos.	19
Figura 3: Secções transversais.....	21
Figura 4: Espiral de Arquimedes.	22
Figura 5: Retta tangente a uma espiral.	22
Figura 6: Traçando uma circunferência em um ponto de tangência dado (<i>CRP</i>).....	23
Figura 7: Traçando uma circunferência em um ponto de tangência dado (1º Passo).....	24
Figura 8: Traçando uma circunferência em um ponto de tangência dado (2º Passo).....	24
Figura 9: Traçando uma circunferência em um ponto de tangência dado (3º Passo).....	25
Figura 10: Traçando uma circunferência em um ponto de tangência dado (4º Passo).....	25
Figura 11: Traçando uma circunferência em um ponto de tangência dado (5º Passo).....	25
Figura 12: Figura da queda de um objeto na Terra.....	27
Figura 13: Dedução da área do Círculo feita por <i>Kepler</i>	29
Figura 14: Pilhas de cartas com mesmo volume.	29
Figura 15: Paralelogramo dividido em dois triângulos pela diagonal.	31
Figura 16: Triângulo TPQ e $TP'Q'$	34
Figura 17: Integral de <i>Fermat</i>	36
Figura 18: Equação da reta de Descartes.....	39
Figura 19: Equação da circunferência de Descartes.....	39
Figura 20: Equação de distância de Pontos de Descartes.....	40
Figura 21: Achando uma reta tangente pelo método de Descartes (i).....	41
Figura 22: Achando uma reta tangente pelo método de Descartes (ii).....	41
Figura 23: Área sob a hipérbole.	45
Figura 24: Linhas tangentes à parábola $y = x^2$	51
Figura 25: Inclinação da tangente invariável.....	52
Figura 26: Gráfico de uma $f(x)$ e sua antiderivada $A(t)$	53
Figura 27: Função $f(x)$ e um ponto arbitrário P	58
Figura 28: Uma reta tangente com os pontos P e T	58
Figura 29: Triângulo característico PRT	59
Figura 30: Catetos do triângulo característico são dx e dy	59
Figura 31: Diferença entre dx , dy , Δx e Δy	61
Figura 32: Aproximação da reta tangente por meio de secantes.	62

Figura 33: Integral por meio do método de <i>Leibniz</i>	64
Figura 34: Área encontrada por meio de partições.	65
Figura 35: Análise da continuidade da função f	69
Figura 36: Limite de uma função em um ponto.	70
Figura 37: A soma inferior e a soma inferior.	72
Figura 38: Questões da atividade 1.....	84
Figura 39: Partições para encontrar a área de um quadrado.....	86
Figura 40: Questão da atividade 2.	90
Figura 41: Questão da atividade 3.	91
Figura 42: Tela de abertura do GeoGebra.	93
Figura 43: função $f(x) = 1/x$	94
Figura 44: Local para inserir pontos no plano.	94
Figura 45: Pontos inseridos.	95
Figura 46: Pontos com legenda.	95
Figura 47: Vinculação da soma com a função $f(x) = 1/x$	96
Figura 48: Área sob o gráfico de f	96
Figura 49: Comando Integral.....	97
Figura 50: Área abaixo do gráfico da função $f(x)$ e acima do eixo x	97
Figura 51: Comando da Soma de <i>Riemann</i> Superior no <i>Geogebra</i>	98
Figura 52: Soma de <i>Riemann</i> Superior com alusão à sequência.	98

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Triângulo de <i>Pascal</i>	43
Tabela 2: Triângulo <i>Pascal</i> expandido.....	44
Tabela 3: Monômios Formadores dos Fluentes (1666).....	49
Tabela 4: Parâmetros Multiplicativos dos Fluxos (1666).....	49

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	15
2. ALGUNS PRECURSORES DO CÁLCULO	18
2.1. <i>Eudoxo de Cnidos</i> (390 a.C. – 320 a.C.).....	18
2.2. <i>Arquimedes</i> (287? a.C. – 212? a.C.).....	19
2.3. <i>Apolônio de Pérgamo</i> (262 a.C. – 190 a.C.)	23
2.4. <i>Galileu Galilei</i> (1564 – 1642).....	26
2.5. <i>Boaventura Cavalieri</i> (1598 – 1647).....	28
2.6. <i>Pierre de Fermat</i> (1607 – 1665).....	31
2.7. <i>René Descartes</i> (1596 – 1650).....	37
2.8. Os criadores do Teorema Fundamental do Cálculo: <i>Newton e Leibniz</i>	41
2.8.1. Desenvolvimento do Teorema Fundamental do Cálculo por <i>Newton</i>	42
2.8.2. Desenvolvimento do Teorema Fundamental do Cálculo por <i>Leibniz</i>	55
3. O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO	68
3.1. Definições prévias.....	68
3.1.1. Função Contínua.....	68
3.1.2. Limite de funções	69
3.1.3. Derivada de uma função	70
3.1.4. Partição de um intervalo	71
3.1.5. Integral de <i>Riemann</i>	71
3.2. Teorema Fundamental do Cálculo (Parte I).....	78
3.3. Teorema Fundamental do Cálculo (Parte II)	80
4. PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DE ENSINO PARA O ESTUDO DE PROGRESSÕES GEOMÉTRICA NO ENSINO MÉDIO	82
4.1. Conteúdo a ser trabalhado.....	83
4.2. Objetivos Gerais da Sequência de Ensino	83
4.3. Recursos Didáticos	83

4.4.	Atividade 1.....	83
4.4.1.	Apresentação e objetivos da atividade 1.....	83
4.4.2.	Orientações sugeridas para a atividade 1.....	85
4.4.3.	Competências e habilidades desenvolvidas na atividade 1	88
4.4.4.	Notas sobre progressões geométricas e os resultados obtidos.....	88
4.5.	Atividade 2.....	89
4.5.1.	Apresentação e objetivos da atividade 2.....	89
4.5.2.	Orientações sugeridas para a atividade 2.....	90
4.5.3.	Competências e habilidades desenvolvidas na atividade 2	91
4.6.	Atividade 3.....	91
4.6.1.	Apresentação e objetivos da atividade 3.....	91
4.6.2.	Orientações sugeridas para a atividade 3.....	91
4.6.3.	Competências e habilidades desenvolvidas na atividade 3	99
4.7.	Possíveis Dificuldades	99
4.8.	Avaliação	100
5.	CONSIDERAÇÕES FINAIS	101
6.	REFERÊNCIAS	102
7.	APÊNDICES	106

1. INTRODUÇÃO

Podemos observar que, ao longo da história, o advento do cálculo diferencial e integral é fruto da busca da resolução de problemas de cálculo de áreas (quadraturas) de figuras e da obtenção de retas tangentes dado um ponto sobre uma curva qualquer, e da necessidade desenvolver ferramentas matemáticas apropriadas para o estudo da Mecânica Clássica. É através deste contexto que é desenvolvido um teorema que consegue conectar tais problemas: o Teorema Fundamental do Cálculo.

O Teorema Fundamental do Cálculo representa o cerne do Cálculo Diferencial e Integral, estabelecendo uma conexão vital entre esses dois conceitos. Essencialmente, este teorema afirma que, sob certas hipóteses que serão devidamente apresentadas ao longo deste trabalho, a integração e a derivação são operações inversas, ou seja, problemas que envolvem o cálculo de áreas sob um gráfico de uma função em um intervalo e a determinação de uma reta tangente em um ponto da função, estão intrinsecamente ligados e podem ser resolvidos simultaneamente.

O objetivo desse trabalho é realizar uma revisão do Teorema Fundamental do Cálculo, abordando seus aspectos históricos e apresentando uma demonstração formal e, fundamentando-se nos conceitos estudados, apresenta-se uma sequência de ensino para o estudo de progressões geométrica no Ensino Médio, neste contexto, para fins de organização e apresentação, a dissertação está organizada em três capítulos. O primeiro é referente a uma breve contextualização histórica, desde as primeiras ideias dos gregos antigos que motivaram ao desenvolvimento do Teorema Fundamental do Cálculo, até chegar a *Newton* e *Leibniz* que de fato criaram o teorema. Este enfoque histórico possibilita ao leitor explorar a origem dos conceitos e técnicas presentes na teoria, permitindo estabelecer conexões entre as ideias Matemáticas concebidas ao longo do tempo, oferecendo uma perspectiva dinâmica da evolução desse teorema. E incorporar fatos históricos é altamente relevante para o leitor, tendo em vista que ele terá a oportunidade de perceber a Matemática como uma construção humana, possibilitando realizar comparações entre os mais diversos processos matemáticos do passado com os do presente, estabelecendo conexões significativas entre ambos. E quem corrobora com essa visão é D'Ambrosio (1999) que cita que

As ideias Matemáticas aparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias Matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber. (D'AMBROSIO, 1999, pág. 97)

Saber a gênese de algo instiga a curiosidade, e na Matemática isso fica ainda mais evidente, pois proporciona ao indivíduo a percepção de como esta ciência se desenvolveu de maneira contextualizada, respondendo questionamentos referentes a como aquele conhecimento foi organizado e difundido entre as pessoas de regiões e épocas diferentes, que são essenciais para o desenvolvimento de uma visão crítica sobre o objeto que está sendo estudado, em outras palavras, “quase todo o desenvolvimento do pensamento matemático se deu por necessidade do homem diante do contexto da época” (LORENZATO, 2008, pág. 107). E a criação do Teorema Fundamental do Cálculo é um exemplo notório da herança de ideias entre as gerações, evidenciado pela epígrafe dessa dissertação “*Se eu vi mais longe, foi porque estava sobre os ombros de gigantes*” dita pelo próprio Isaac Newton, um dos criadores do teorema.

No segundo capítulo dessa dissertação é enunciado e demonstrado o Teorema Fundamental do Cálculo, para que, o intuitivo seja, de fato, transformado em conhecimento formal, pois

Uma demonstração (ou, como alguns preferem, prova) Matemática tem várias finalidades. Em primeiro lugar, compete-lhe estabelecer a *veracidade* relativa de um enunciado (a *tese* da demonstração). A veracidade da tese depende, claro, da veracidade dos enunciados pressupostos na demonstração, esta é suficiente para aquela. Em segundo lugar, uma demonstração deve *convencer-nos* da veracidade da tese que demonstra, desde que aceitemos os pressupostos dos quais essa demonstração depende. (DA SILVA, 2002, pág. 68)

Em princípio o conhecimento matemático se sustenta em demonstrações, e não em mera observação, pois o convencimento vem de algo que pode ser generalizado e não por alguns exemplos específicos. Esse processo assume um papel central na Matemática, que a torna diferente das outras ciências naturais. Porém, as demonstrações devem ser realizadas com rigor matemático, e a falta dele, tornam as demonstrações defeituosas, ou seja

Para demonstrar, isto é, produzir uma demonstração necessita-se de muito domínio do assunto, certa dose de astúcia para perceber estruturas, que o olhar comum não distingue e capacidade para estabelecer relações sutis. Para compreendê-la é necessária muita abstração.

Defende-se a sua formalização e rigor na dedução com base no princípio de que após ser concluída não pode deixar espaço para nenhuma dúvida tendo em vista, que não será analisada somente por um grupo de especialistas e aceita pelos demais como sendo real. Sabemos que a demonstração formal é utilizada em várias aulas por vários professores e em vários países do mundo. Será utilizada na resolução de vários problemas semelhantes. Vindo daí a sua importância e a relevância do seu estudo. Uma proposição demonstrada torna-se ferramenta para outras demonstrações e pode ser aplicada na resolução de problemas. (DOS SANTOS SILVA; SALES, 2010, pág. 4)

No terceiro capítulo propomos uma Sequência de Ensino utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo em progressões geométricas no Ensino Médio. O objetivo desta

proposta é oportunizar aos alunos dessa faixa etária um contato com temas mais avançados da Matemática, tais como infinitesimais, limites e integrais, pois “Estudar desde a necessidade que levou o homem de determinada época a pensar sobre determinado assunto até as aplicações práticas levaria o aluno a se motivar mais, a ficar mais tranquilo nas avaliações e ter mais prazer, pois as apresentações ficariam mais claras.” (ROSA, 1998, pág. 2). Além de oferecer ao docente uma ferramenta que enriquecerá sua atuação em sala de aula.

A aplicabilidade do Teorema Fundamental do Cálculo ilustra a ampla utilidade desse teorema em nosso cotidiano, sendo aplicável em diversas situações da Matemática, vinculando desde a geometria até o estudo de sequências, como é o caso das progressões geométricas.

2. ALGUNS PRECURSORES DO CÁLCULO

Nesse capítulo, apresentaremos matemáticos que colaboraram com o desenvolvimento do Cálculo ao longo da história, e que podemos considerar precursores do Cálculo. São eles: *Eudoxo de Cnidos* (390 a.C. – 320 a.C.), *Arquimedes* (287? a.C. – 212? a.C.), *Apolônio de Pérgamo* (262 a.C. – 190 a.C.), *Galileu Galilei* (1564 – 1642), *Boaventura Cavalieri* (1598 – 1647), *Pierre de Fermat* (1607 – 1665) e *René Descartes* (1596 – 1650). Os motivos pelos quais consideramos estes matemáticos estão expostos a seguir:

2.1. *Eudoxo de Cnidos* (390 a.C. – 320 a.C.)

Os primeiros desafios relacionados à história do cálculo, iniciado desde os antigos gregos, refere-se à determinação de áreas, volumes, comprimentos de arco e quadraturas, e um exemplo disso é a tentativa de construir um quadrado de área idêntica à de um círculo. (EVES, 2011). E para solucionar tais problemas, um grego se destacou, e seu nome era *Eudoxo*, que desenvolveu um método chamado método da exaustão, no qual admitia que

Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta se, quando, equimúltiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, os últimos equimúltiplos, considerados em ordem correspondente. (BOYER, 2019, pág. 80)

Tal método é visto como a gênese do Cálculo Integral, e para exemplificar, podemos analisar a quadratura do círculo, que constitui-se na inscrição de polígonos regulares, os quais não são difíceis de determinar suas áreas, e, à medida que o número de lados desses polígonos se torna cada vez maior, nos aproximamos da área real do círculo, o que também seria o germe da ideia de limites, pois tendendo o número de lados desses polígonos ao infinito, também tenderemos a área deles à área real do círculo (SILVA, 2019).

$$A_{\text{polígono } (n \text{ lados})} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A_{\text{círculo}}$$

Em outras palavras:

O método da exaustão é um procedimento que consiste em esgotar a região cuja área se quer calcular por meio de outras áreas conhecidas. A ideia central está em: dada uma região cuja área se pretende determinar, nela se inscrever regiões poligonais, cuja área é conhecida, e que se aproximem da primeira. A seguir, escolhe-se outra região poligonal que dê uma melhor aproximação e o processo continua, tomando polígonos com número cada vez maior de lados, de modo a “cobrir” toda a região dada. (BOYER, 2019, pág. 67)

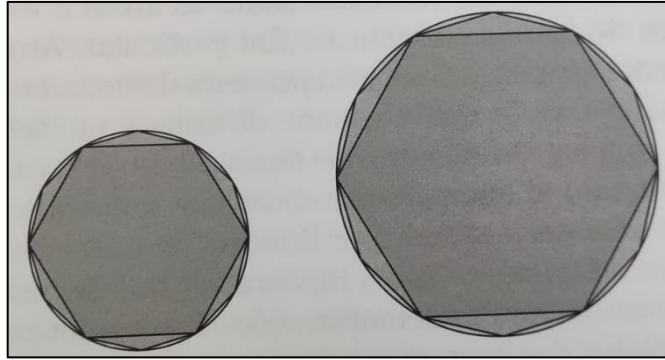


Figura 1: Quadratura do círculo
Fonte: Boyer, 2019, pág. 82

Dessa forma, as ideias de *Eudoxo* contribuíram para que *Newton* e *Leibniz* desenvolvessem o Teorema Fundamental do Cálculo, principalmente no que se refere ao conceito de limites e integral.

2.2. Arquimedes (287? a.C. – 212? a.C.)

Outra figura da Grécia que é importante para os alicerces do Cálculo, e, por consequência, do Teorema Fundamental do Cálculo, é Arquimedes. É praticamente unânime entre os historiadores que Arquimedes é um dos mais notáveis cientistas de todos os tempos, além de ser considerado o principal expoente da Matemática na antiguidade, destacando-se pela sua originalidade e rigor empregado em suas demonstrações, sobrepujando todos os matemáticos predecessores de sua época. (SILVA, 2019) No que concerne propriamente ao desenvolvimento do cálculo, Arquimedes propôs um refinamento do método da exaustão, sendo a principal diferença para o método de *Eudoxo* é que ele utilizou dois polígonos, um inscrito e outro circunscrito ao círculo, conforme a figura a seguir:

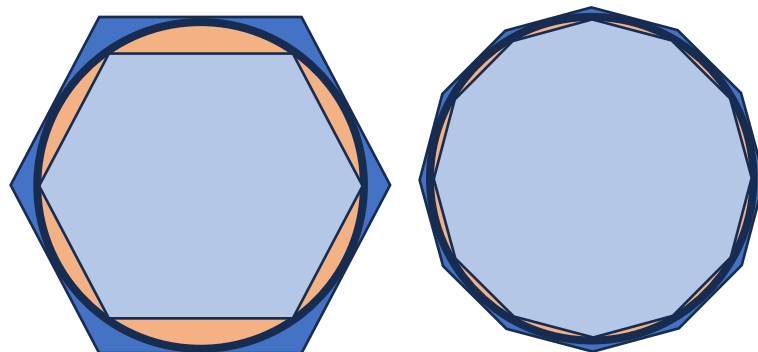


Figura 2: Polígonos regulares inscritos e circunscritos.
Fonte: o autor

Desta maneira podemos escrever a seguinte relação:

$$\text{área do polígono inscrito} < \text{área do círculo} < \text{área do polígono circunscrito}$$

Como exemplo, tomemos um círculo de $r = 2$, temos:

$$n = 3 \text{ lados: } 5,19615 < \text{área do círculo} < 20,7846$$

$$n = 6 \text{ lados: } 10,3923 < \text{área do círculo} < 13,8564$$

$$n = 12 \text{ lados: } 12,5664 < \text{área do círculo} < 12,8616$$

⋮
⋮
⋮

$$n = 96 \text{ lados: } 12,5574 < \text{área do círculo} < 12,5709$$

Calculando a área do círculo por meio da fórmula, temos:

$$A = \pi \cdot r^2 \Rightarrow A = 12,5664$$

Intuitivamente, é possível perceber que cada vez que o número de lados dos polígonos inscritos e circunscritos tende ao infinito, mais os valores de suas áreas tendem ao valor da área do círculo em si. E baseado nisso, Arquimedes conseguiu elencar um dos resultados mais importantes para a Matemática: uma aproximação para π tanto quanto se queira. Pois, com o método da exaustão, fazemos o seguinte processo:

$$\frac{\text{área do polígono inscrito}}{r^2} < A = \frac{\pi \cdot r^2}{r^2} < \frac{\text{área do polígono circunscrito}}{r^2}$$

Para observarmos o quanto essa aproximação é interessante, fazemos esse processo para um polígono de 96 lados:

$$\frac{12,5574}{2^2} < \pi < \frac{12,5709}{2^2} \Rightarrow 3,1394 < \pi < 3,14273$$

Dessa forma,

O que dá força ao método de Arquimedes não é só o resultado, mas também o fato de ele poder ser estendido. Bastaria continuar subdividindo nossos polígonos para aprimorar mais e mais a aproximação. Teoricamente, portanto, é possível conseguir uma aproximação para o número π tão precisa quanto quisermos, bastando para tanto encarar os cálculos. (LAUNAY, 2022, pág. 89)

Arquimedes também desenvolveu o método do equilíbrio, e com ele é possível resolver problemas relacionados a áreas e volumes, ele se embasava em repartir a região correspondente em diversas tiras planas, e pendurando “[...]esses pedaços numa das extremidades de uma alavanca dada, de tal maneira a estabelecer o equilíbrio com uma figura de área ou volume e centróide conhecidos. (EVES, 2011, pág. 422)

E foi por meio desse método, por exemplo, que Arquimedes conseguiu determinar a fórmula do volume de uma esfera (EVES, 2011):

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

E para chegar a essa conclusão Arquimedes desenvolveu o raciocínio seguir: Suponha que $AQDCP$ represente uma secção transversal de uma esfera com seu centro em O e diâmetro

AC conforme a figura a seguir. E suponha que AUV represente uma secção plana de um cone reto, cujo seu eixo é AC , e seu diâmetro da base representado por UV . Agora tome $IJUV$ um cilindro circular reto, cujo eixo é representado pelo segmento AC , e $UV = IJ$ sendo seu diâmetro, e suponha que $AH = AC$. Observe traçarmos um plano passando por um ponto S arbitrário do eixo AC , e que ele seja perpendicular a AC , teremos que esse plano cortará a esfera, o cone, e o cilindro em círculos com raios, respectivamente, $r_1 = SP$, $r_2 = SR$ e $r_3 = SN$. Ao nomearmos essas áreas como A_1 , A_2 e A_3 , Arquimedes descobriu que quando posicionamos A_1 e A_2 com centro no ponto H , equilibrarão com A_3 na posição que ele está, com A como ponto de apoio. Dessa forma, nomeando também os volumes da esfera, do cone e do cilindro de V_1 , V_2 e V_3 , temos que $V_1 + V_2 = \frac{1}{2}V_3$; e como $V_2 = \frac{1}{3}V_3$, teremos por consequência que a esfera deve ser $\frac{1}{6}V_3$. Como, por meio de *Eudoxo*, sabemos o volume do cilindro, implica que o volume da esfera também fica conhecido: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (BOYER, 2019).

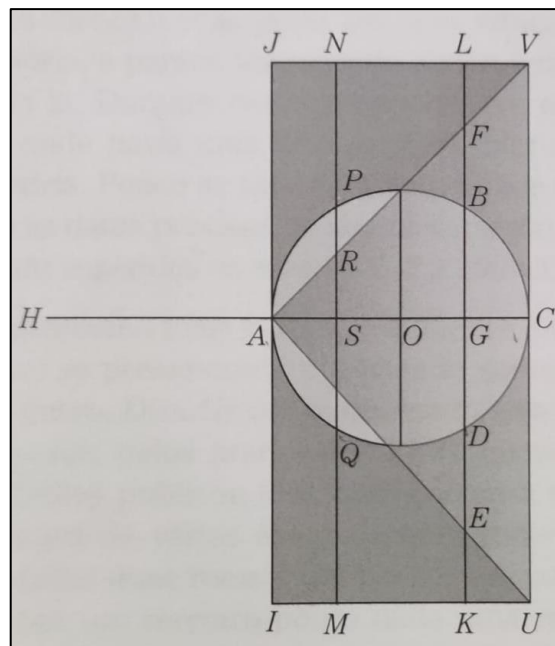


Figura 3: Secções transversais.
Fonte: Boyer, 2019, pág. 109

Também não podemos deixar de citar o tratado de Arquimedes sobre espirais. As quais se tratavam de curvas geradas “por um ponto, com movimento uniforme ao longo de uma reta enquanto esta mantém um movimento circular uniforme em torno de um ponto fixo” (SANTOS, 2011, pág.59). Atualmente, podemos representar essas espirais através de coordenadas polares:

$$r = k\theta, k \in R_+, \text{ e } k \text{ é uma constante.}$$

Onde a variação do raio vetor “ r ” está diretamente relacionada ao deslocamento do ângulo polar θ de maneira proporcional, que, por sua vez, é determinado pela posição do raio vetor em relação ao eixo da espiral.

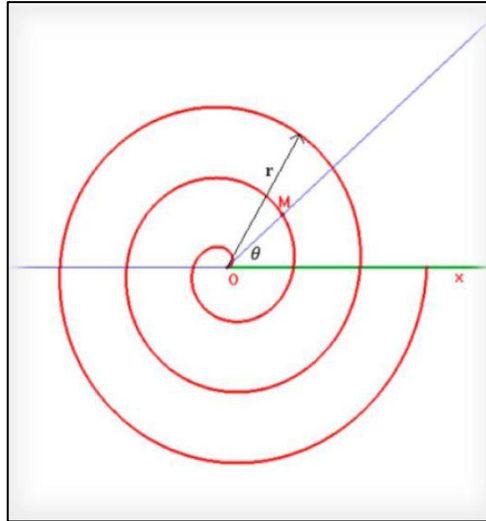


Figura 4: Espiral de Arquimedes.
Fonte: SANTOS, 2011, pág.60.

Arquimedes utilizou as espirais para resolver problemas de retas tangentes sobre uma curva e um ponto determinado, conforme podemos ver a seguir:

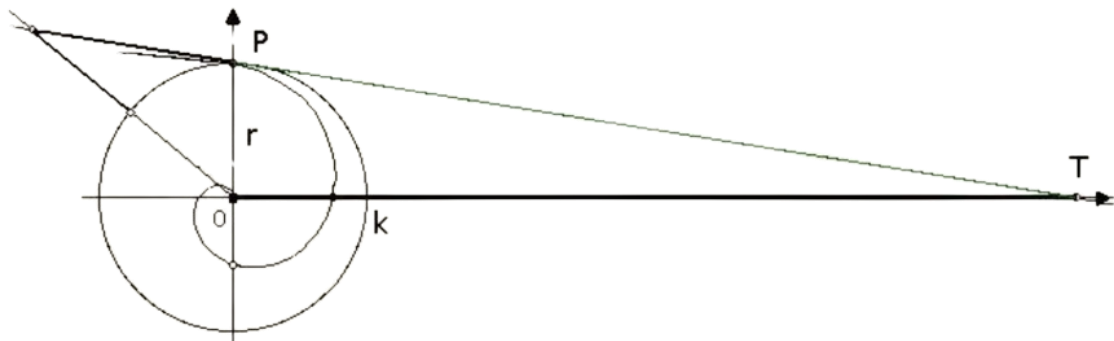


Figura 5: Reta tangente a uma espiral.
Fonte: SANTOS, 2011, pág.61.

Seja uma espiral de centro O , deseja-se traçar uma reta tangente a ela passando por um ponto P . Para isso é necessário:

- Trace o raio vetor \overline{OP} e o arco de circunferência \widehat{PK} , considerando K um ponto sobre o eixo horizontal;
- Trace o segmento \overline{OT} , perpendicular a \overline{OP} , com comprimento idêntico ao arco \widehat{PK} ;
- Trace a reta \overline{PT} , e esta é a reta que é tangente a espiral. (SANTOS, 2011)

Ao resolver esse problema, Arquimedes é vanguarda na noção intuitiva de derivada, que séculos depois passaria por um tratamento algébrico por meio da Geometria Analítica de *Descartes*.

E é dessa forma que Arquimedes é considerado um dos precursores do cálculo, pois conseguiu resolver problemas de áreas e volumes (integrais), assim como questões relacionadas à retas tangente à curvas (derivadas), que são pilares fundamentais para que *Newton* e *Leibniz* elaborassem posteriormente o Teorema Fundamental do Cálculo.

2.3. *Apolônio de Pérgamo* (262 a.C. – 190 a.C.)

Nessa seção destacaremos *Apolônio*, que vivendo na mesma época de Arquimedes, e aparentemente compartilhando uma relação amigável e competitiva com seu rival, também desenvolveu um tratado sobre tangência, que diz:

dadas três coisas, cada uma das quais pode ser um ponto, uma reta ou um círculo, trace um círculo que seja tangente a cada uma das três coisas (onde tangência a um ponto deve ser entendida como significando que o círculo passa pelo ponto). Esse problema envolve dez casos, desde os dois mais fáceis (em que as três coisas são três pontos ou três retas) até o mais difícil de todos (traçar um círculo tangente a três círculos). [...] No entanto, estudiosos dos séculos dezesseis e dezessete em geral pensavam que *Apolônio* não tinha resolvido o último caso, por isso o consideravam como um desafio às suas capacidades. *Newton*, em sua *Arithmetica universalis*, foi um dos que deram uma solução, usando apenas a régua e compasso. (BOYER, 2019, pág. 112)

Não é objetivo dessa dissertação fazer a construção de cada uma das possíveis combinações citadas anteriormente, porém cabe apresentar uma delas para demonstrar como são importantes esses conceitos no desenvolvimento do cálculo: Traçando uma circunferência em um ponto de tangência dado (CRP).

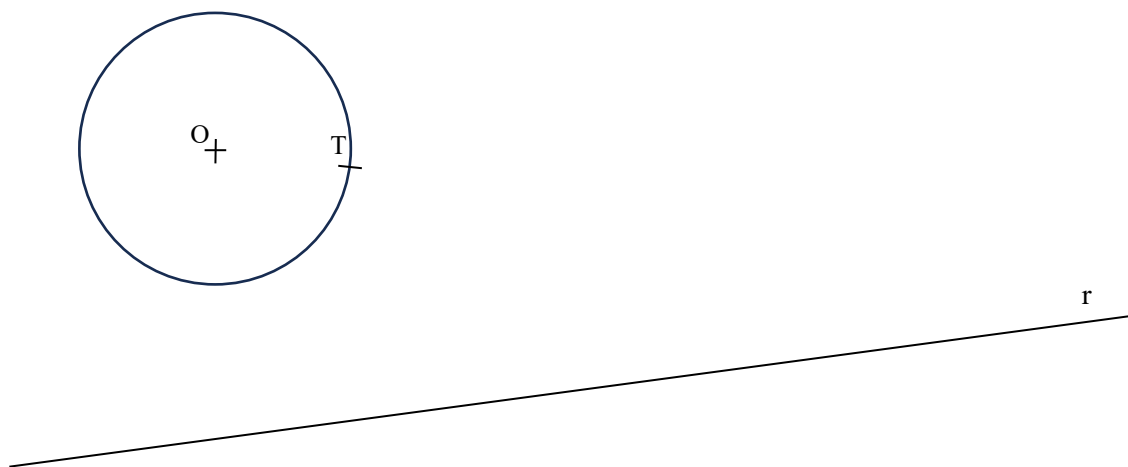


Figura 6: Traçando uma circunferência em um ponto de tangência dado (CRP).

Fonte: o autor

- **1º Passo:** traçar uma semirreta de origem no ponto O passando por T . Para que duas circunferências sejam tangentes entre si, seus centros precisam estar alinhados ao ponto de tangência T .

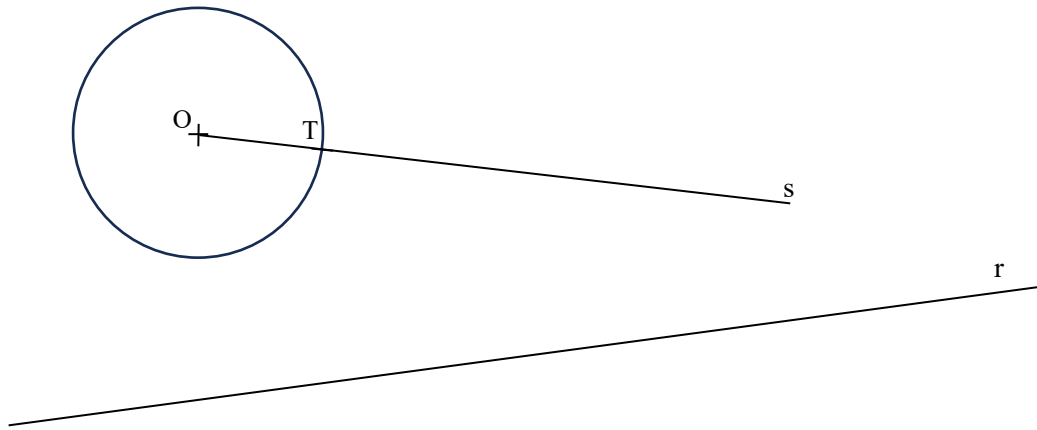


Figura 7: Traçando uma circunferência em um ponto de tangência dado (1º Passo).

Fonte: o autor

- **2º Passo:** Traçar uma reta perpendicular a reta s passando pelo ponto T e marque o ponto P que está sobre a reta r .

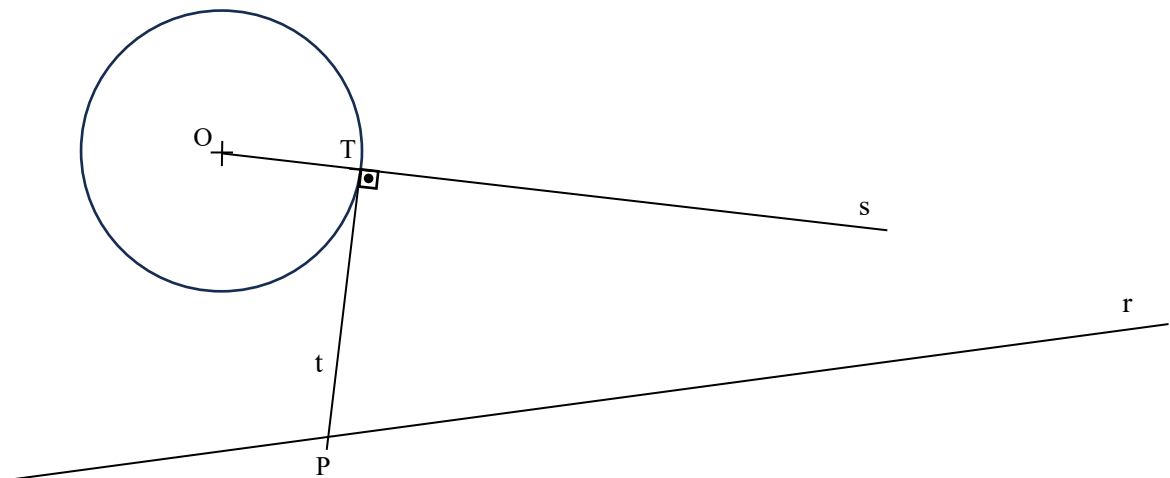


Figura 8: Traçando uma circunferência em um ponto de tangência dado (2º Passo)

Fonte: o autor

- **3º Passo:** Traçar uma bissetriz entre r e t no ponto P cortando a reta s no ponto O_1 , esse ponto será o centro da circunferência que vai tangenciar a circunferência já existente e reta r .

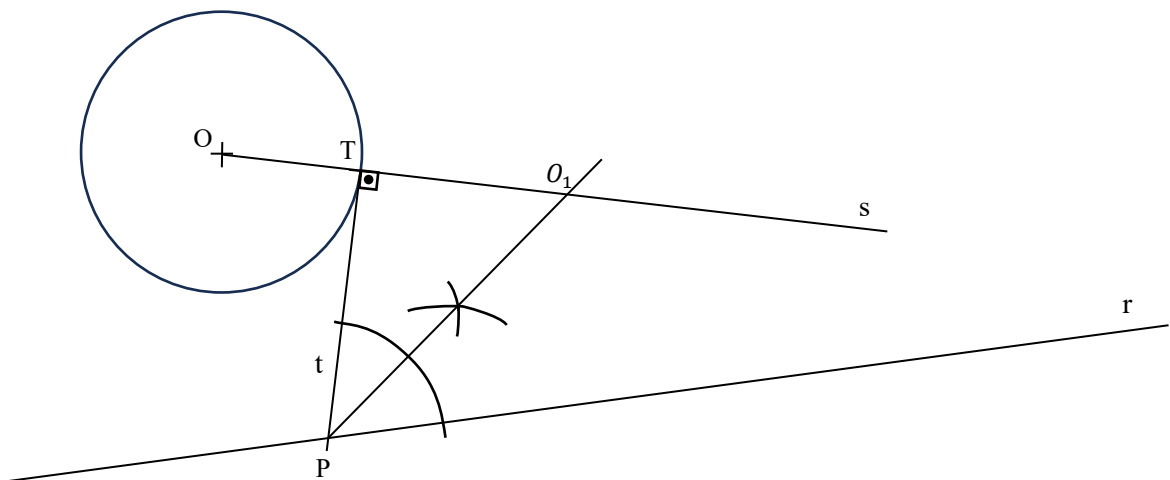


Figura 9: Traçando uma circunferência em um ponto de tangência dado (3º Passo)
Fonte: o autor

- **4º Passo:** Traçar uma reta perpendicular a reta r passando por O_1 , dessa forma achamos o ponto de tangência na reta r (T_r).

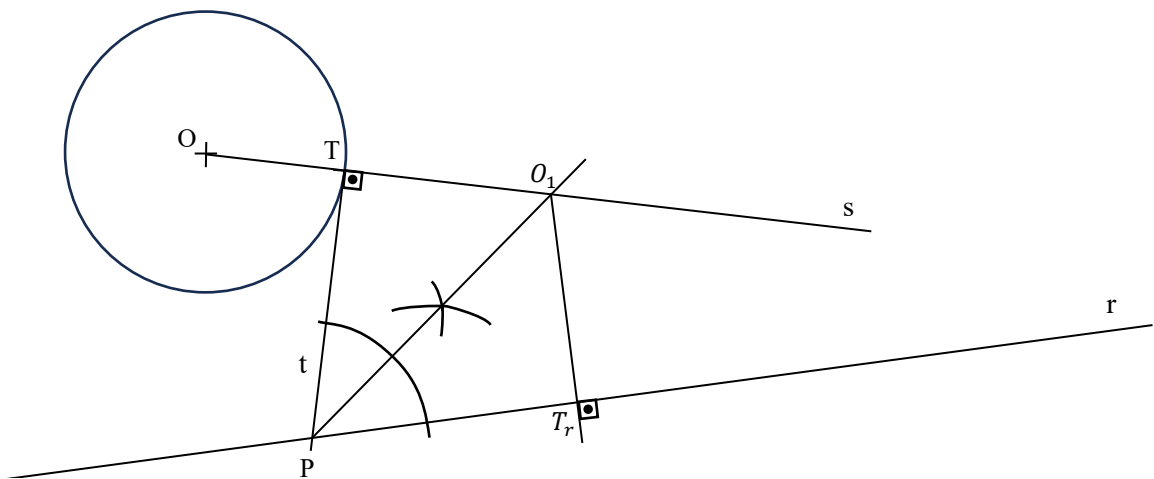


Figura 10: Traçando uma circunferência em um ponto de tangência dado (4º Passo).
Fonte: o autor

- **5º Passo:** Traçar a circunferência que tangencie a circunferência dada e a reta r .

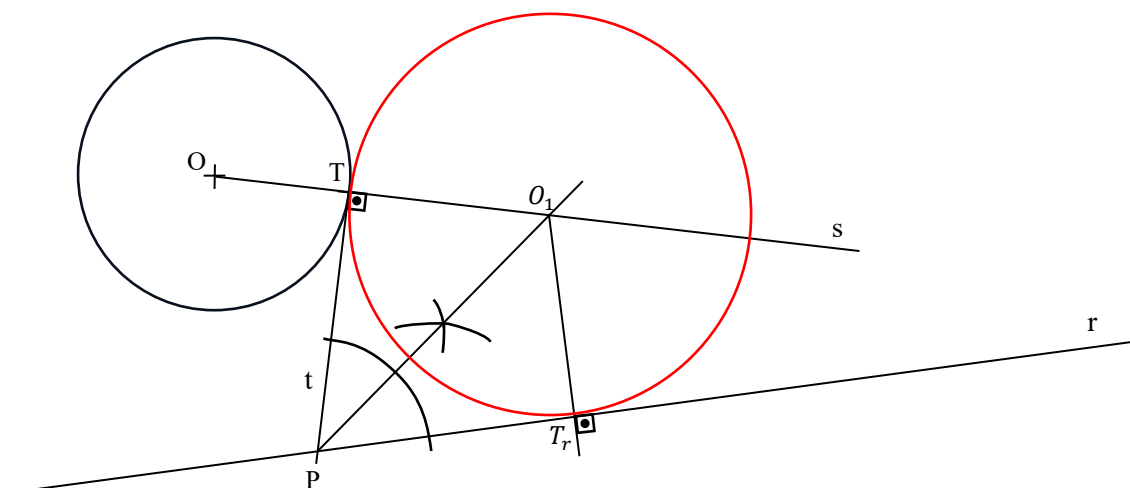


Figura 11: Traçando uma circunferência em um ponto de tangência dado (5º Passo).
Fonte: o autor

Assim, podemos ver que

Tanto *Apolônio* (262 a.C. - 190 a.C.) como Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.) exerceram forte influência no desenvolvimento matemático, não só em sua época, como nos séculos seguintes. As duas concepções, a quadratura e o traçado de reta tangente, movimentaram o pensamento lógico da Grécia Antiga por vários séculos, atribuindo a eles contribuições inestimáveis à Matemática. Somente no século XVII, *Newton* (1642 - 1727) e *Leibniz* (1646 - 1716) que, trabalhando de forma independente e utilizando pressupostos diferentes, descobriram que esses dois problemas estão inter-relacionados de maneira recíproca. A resolução desses problemas apresentados por eles, explicitaram que os dois conceitos fundamentais do Cálculo: a derivada [traçado da reta tangente] e a integral [quadratura], são resultados de operações uma inversa da outra. Com isso ficou estabelecido que resolvido um daqueles problemas, o outro, automaticamente, se resolve. Esse fato é hoje conhecido com o Teorema Fundamental do Cálculo. (SANTOS, 2011, pág.62)

2.4. Galileu Galilei (1564 – 1642)

Galileu *di Vincenzo Bonaulti* de Galilei foi outro cientista que colaborou para o desenvolvimento do cálculo. O renomado cientista do renascimento é conhecido pelas suas inúmeras contribuições para a Astronomia, Física e Matemática. Empregou uma abordagem inovadora para compreender e estudar os fenômenos da natureza, firmada na contínua e sistemática observação e excessiva experimentação. Em sua obra “*Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, intorno à due nuove scienze attenenti alla meccanica & i movimenti locali*” Galileu registra os princípios da cinemática, descrevendo que movimento no eixo horizontal era uniforme, e no eixo vertical ele é uniformemente variado, e, desprezando a existência do ar, a trajetória desse projétil é uma parábola. E isso é um fato incrível, pois para as cônicas, estudadas 2000 anos antes, Galileu encontrou aplicabilidade delas na ciência, como exemplo, as elipses, na astronomia, sendo órbitas de planetas, e a parábola, na física, como trajetória de objeto. (BOYER, 2019) E baseada nessas investigações de movimento uniformemente variado, o cientista italiano introduziu a noção intuitiva de taxas de variação por meio de infinitesimais, esboçando o conceito de derivada. Os infinitesimais carregam uma intuição geométrica, pois se tratam de “partículas minúsculas de dimensões infinitesimais, unidas entre si por uma infinidade de pequenos vazios, o que caracteriza uma espécie de “atomismo matemático””. (DE CARVALHO; D’OTTAVIANO, 2006, pág. 17) Este conceito acaba reverberando nos estudos de *Cavalieri*, que veremos na próxima seção, que foi um de seus discípulos.

Para elucidar qual era a ideia de infinitésimo para Galileu, faremos uma análise entre de um tratado que o italiano escreveu, nele acontece o diálogo entre dois personagens fictícios: Simplicio e Salvati no lançamento de um objeto para cima no planeta Terra. Simplicio começa argumentando que um objeto na Terra em rotação seria arremessado tangencialmente devido ao movimento da Terra. Simplicio pensa que a força centrífuga resultante faria com que o objeto se afastasse da superfície terrestre. Em seguida Salvati contra-argumenta que a distância QR

que um objeto tem que cair para permanecer na Terra enquanto ela gira um ângulo pequeno θ , é infinitesimalmente pequena comparada com a distância tangencial PQ que o objeto percorre horizontalmente. Isso significa que a tendência para baixo necessária para manter o objeto na Terra é muito pequena comparada com o impulso tangencial. Ele utiliza a ideia de infinitésimos de ordem superior para explicar que a componente vertical da força é suficiente para manter o objeto na Terra, apesar do movimento tangencial. Galileu está essencialmente dizendo que a variação na posição vertical (QR) é um infinitésimo de ordem superior em relação às variações horizontais (PQ). Em termos matemáticos, a distância QR diminui mais rapidamente que PQ à medida que θ se aproxima de zero, o que significa que QR é de ordem superior a PQ . Além disso, Salviati leva a discussão para o domínio dos números inteiros e quadrados perfeitos. Ele observa que, embora os quadrados perfeitos sejam menos frequentes à medida que avançamos na sequência dos números inteiros, existe uma correspondência biunívoca entre todos os inteiros e os quadrados perfeitos. Isso significa que podemos associar cada número inteiro a um quadrado perfeito de forma que cada inteiro tenha um correspondente único e vice-versa. Salviati então conclui que existem tantos quadrados perfeitos quanto inteiros, embora isso contradiga a intuição de que quadrados perfeitos são mais raros. No entanto, ele não avança para a ideia moderna de que conjuntos infinitos podem ter o mesmo tamanho, apesar de serem subconjuntos um do outro. Em vez disso, ele afirma que os conceitos de “igual”, “maior” e “menor” não se aplicam ao infinito da mesma forma que se aplicam a quantidades finitas. Galileu, através de Salviati, chega perto de uma compreensão moderna dos conjuntos infinitos, mas não alcança a conclusão de que um conjunto infinito pode ser igual a um subconjunto próprio. Ele ainda está limitado pela compreensão da época, afirmando incorretamente que não se pode dizer que um número infinito é maior que um número finito ou outro número infinito. (BOYER, 2019)

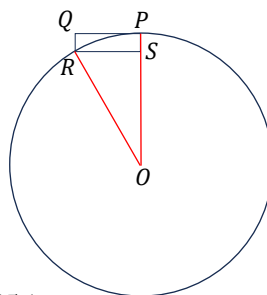


Figura 15.1

Figura 12: Figura da queda de um objeto na Terra.
Fonte: BOYER, 2019, pág. 232.

Logo, Galileu contribuiu com mais uma peça no quebra-cabeça do cálculo, que são os estudos dos infinitésimos, pensamento esse que *Leibniz* herdou para o desenvolvimento do que

ele chamaria de *diferenciais*, além de fornecer a *Newton* um vasto conhecimento de física, o qual foi aprimorado pelo inglês por meio do conceito de infinitésimos com o desenvolvimento de seu método de fluentes e fluxões que veremos em seções a seguir.

2.5. *Boaventura Cavalieri* (1598 – 1647)

Ao mesmo tempo que Galileu estudava os infinitesimais, a Europa, em pleno período do renascimento, vivenciava o ressurgimento do espírito grego por todo o continente, e isso se evidenciava nas ciências e nas artes. Contudo, os matemáticos não estavam tão preocupados com o rigor provenientes de Arquimedes e de *Eudoxo*, ficando satisfeitos em manipular infinitesimais, e assim, através disso, conseguir fórmulas para seus cálculos sem a necessidade de justificá-los por meio do método da exaustão de *Eudoxo*. É como Strogatz cita em sua obra

Enquanto isso, Galileu e seus alunos Evangelista *Torricelli* e *Bonaventura Cavalieri* calculavam áreas, volumes e centros de gravidade tratando-os como pilhas infinitas de linhas e superfícies. Como esses homens abordavam infinito e infinitésimos de forma descuidada, suas técnicas não eram rigorosas, embora intuitivas e potentes. Suas respostas vinham com muito mais facilidade e rapidez que se empregassem o método da exaustão. Assim, seu trabalho pareceu um avanço emocionante (embora hoje saibamos que Arquimedes os venceu: a mesma ideia jazia oculta em seu tratado sobre o Método, que, recoberto por um livro de orações, ainda se deteriorava em um mosteiro, no qual permaneceria até 1899). (STROGATZ, 2022, pág. 113)

É nesse cenário que nasce em 1598, na cidade de Milão, *Boaventura Cavalieri*, que desde sua infância tornou-se jesuado, e aos 15 anos foi discípulo de Galileu, e posteriormente tornando-se professor na universidade de Bolonha de 1629 até 1647, ano que faleceu. (EVES, 2011).

Cavalieri deixou um grande legado para a ciência atuando nas áreas da Matemática, Óptica e Astronomia, e conhecido por ser o grande responsável pelo uso dos logaritmos no continente europeu.

Além dos logaritmos, *Cavalieri* contribuiu também para o desenvolvimento das ideias que ajudariam *Newton* e *Leibniz* a consolidarem o cálculo moderno anos depois. Para isso, o italiano estudou com bastante entusiasmo a obra *Stereometria doliolum* (medição do volume de barris de vinho) (1615) de *Kepler*, na qual ele descreve que figuras planas são compostas de fatias com espessuras infinitesimais, e para entender melhor essa ideia, *Kepler* fatiou um círculo em diversos pedaços, e cada um deles sendo um triângulo de base infinitesimal, e dessa forma, ele constatou que a área desse círculo é igual a metade do retângulo de lado r (raio do círculo) e C (perímetro do círculo, que sabemos que vale $C = 2\pi r$), logo chegando a conclusão que a área do círculo é igual a: πr^2 .

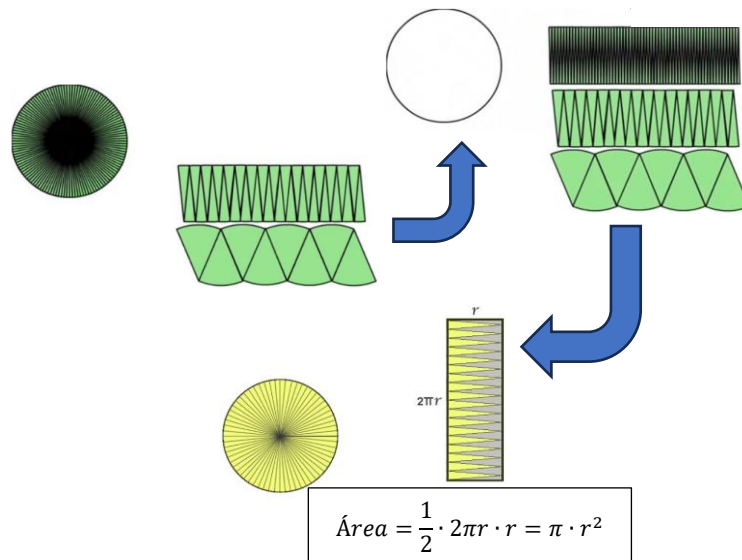


Figura 13: Dedução da área do Círculo feita por Kepler.

Fonte: o Autor

Essa conclusão jamais seria aceita por Arquimedes e *Eudoxo* como prova para a fórmula para a área do círculo, porém para os padrões da época eram bem interessantes. E pensando sobre esse fatiamento infinitesimal de *Kepler*, *Cavalieri* desenvolveu “o chamado método dos indivisíveis”, que é uma clara influência oriunda de seu mestre Galileu (EVES, 2011). Esse método consiste no seguinte: “Se dois sólidos têm alturas iguais, e se secções feitas por planos paralelos às bases e as distâncias iguais dessas estão sempre em uma dada razão, então os volumes dos sólidos estão também nessa razão.” (SMITH, 1959, pág. 605)

Esse método é bastante intuitivo, pois podemos considerar um sólido qualquer como uma pilha de fatias com espessuras infinitesimais. Tomemos o exemplo de um cubo, de forma que ele seja formado pelo empilhamento de fatias como citadas a pouco, o volume desse cubo será dado pela soma dessas fatias, e *Cavalieri* percebeu que, desde que não haja a destruição do contorno suave dos lados do cubo, o volume do sólido deformado desse cubo se mantém o mesmo do cubo original, como podemos ver na figura a seguir:



Figura 14: Pilhas de cartas com mesmo volume.

Fonte: DA COSTA MACHADO, 2021, pág.48

É importante salientar que este teorema seria pedra fundamental ao conceito de integral desenvolvido mais adiante, e sendo o equivalente a afirmação moderna do cálculo:

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Porém, é necessário termos em mente que este enunciado elaborado por uma integral e o teorema de *Cavalieri* tem demonstrações diferentes, pois o italiano fazia comparações entre as potências dos segmentos de um paralelogramo, que são paralelos à base, com as potências dos segmentos correspondentes em qualquer um dos dois triângulos em que o paralelogramo é dividido por uma diagonal. Seja o paralelogramo $AFDC$, que está dividido em dois triângulos por meio de sua diagonal CF (Fig. 15) e HE um indivisível do triângulo CDF paralelo à base CD , tome $BC = FE$, e traçando BM paralelo a CD , não é difícil mostrar que o indivisível BM localizado no triângulo ACF é congruente a HE . Dessa forma, é possível estabelecer a relação entre todos os indivisíveis do triângulo CDF e do triângulo ACF , ou seja, os triângulos em questão são congruentes também. Como o paralelogramo é composto pela soma dos indivisíveis dos dois triângulos, fica evidente que a soma das primeiras potências dos segmentos em um dos triângulos é metade da soma das primeiras potências dos segmentos no paralelogramo; outras palavras,

$$\int_0^a x \, dx = \frac{a^2}{2}$$

Com um argumento semelhante, mas bem mais complexo, *Cavalieri* demonstrou que a soma dos quadrados dos segmentos em um triângulo é um terço da soma dos quadrados dos segmentos em um paralelogramo. Para os cubos dos segmentos, ele descobriu a proporção de $1/4$.

Mais tarde, ele ampliou sua demonstração para incluir potências superiores. Finalmente, em seu trabalho *Exercitationes geometricae sex* de 1647, Cavalieri formulou a importante generalização de que, para potências n – ésimas, a razão é $1/(n + 1)$. Embora os matemáticos franceses da época já conhecessem esse resultado, Cavalieri foi o primeiro a publicá-lo, estabelecendo um teorema que abriria caminho para muitos algoritmos do cálculo.

A obra *Geometrica indivisibilibus*, que simplificou consideravelmente o problema das quadraturas, foi reeditada em 1653. No entanto, nessa época, os matemáticos já haviam alcançado resultados significativos em novas áreas, tornando os intrincados e trabalhosos métodos geométricos de Cavalieri obsoletos. O teorema mais importante na obra de Cavalieri era o equivalente a (BOYER, 2019)

$$\int_0^a x^n \, dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

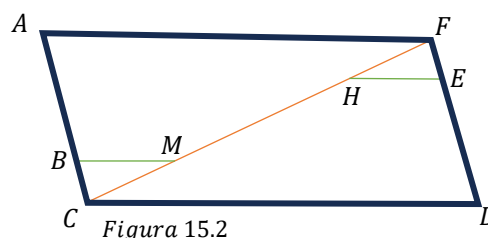


Figura 15: Paralelogramo dividido em dois triângulos pela diagonal.
BOYER, 2019, pág. 234.

E dessa maneira, os princípios de *Cavalieri* oferecem meios interessantes na resolução de problemas que envolvem determinação de áreas e volumes, suas bases intuitivas contribuindo para o desenvolvimento da ideia de integral de *Newton* e *Leibniz* anos mais tarde. (CAMPOS, 2007)

2.6. Pierre de *Fermat* (1607 – 1665)

Assim como *Newton* e *Leibniz* travariam anos mais tarde uma disputa sobre a consolidação do cálculo moderno, destacaremos a partir de agora uma outra rivalidade entre outros dois grandes gênios da Matemática, mesmo não sendo de ofício: Pierre de *Fermat* e René *Descartes*, ambos com personalidades bem diferentes, mas com grandes contribuições para o desenvolvimento de várias áreas da Matemática, sobretudo da geometria analítica e o cálculo de tangentes, ferramentas essas muito importantes para o desenvolvimento do cálculo pouco tempo depois.

Pierre de *Fermat* nasceu na França no ano de 1607, na cidade de *Beaumont de Lomagne*, próximo de *Toulouse*. Ele seguiu a tendência familiar, e foi estudar Direito na Universidade de *Orléans*, exercendo a profissão de advogado entre as cidades de *Bordeaux* e *Toulouse*. E foi em *Bordeaux* que seu desejo pela Matemática floresceu, e mesmo ele sendo um advogado bem ocupado, ele tinha prazer em tirar um tempo do seu dia para se dedicar aos Estudos das Ciências e Matemática (STEWART, 2019). Foi pioneiro em escrever a respeito do que veria a ser a geometria analítica em 1636, um ano antes do aparecimento da Geometria de *Descartes*, escrevendo a obra *Introdução aos Lugares Geométricos Planos*, e nela ele se propôs reconstruir as ideias de lugares geométricos introduzidas por *Apolônio*, e elencou o que seria o princípio fundamental da geometria analítica: “Sempre que em uma equação final encontram-se duas incógnitas, temos um lugar geométrico, a extremidade de um deles descrevendo uma linha, reta ou curva.” (BOYER, 2019, pág. 245).

Uma das diferenças entre *Fermat* e *Descartes*, é que o primeiro dava ênfase em solucionar equações indeterminadas, e o segundo recorria à construção geométrica das raízes

de equações algébricas determinadas, em outras palavras “Onde *Descartes* começara com um lugar geométrico das três e quatro retas, usando uma das retas como eixo das abscissas, *Fermat* começou com a equação linear e escolheu um sistema de coordenadas arbitrários sobre o qual a esboçou.” (BOYER, 2019, pág. 245).

Foi usando a notação do matemático *Viète*¹ que *Fermat* escreveu a equação de várias curvas. A primeira, sendo o caso mais simples, se trata de uma equação linear, que em latim fica “*D in A eaquetur B in E*”, e em simbolismo moderno fica: $Dx = By$. Essa equação linear se trata de um gráfico referente a uma semirreta com origem na origem do eixo das abscissas. Aqui vale frisar que tanto *Fermat* e *Descartes* não trabalhavam com abscissas negativas. Em seguida escreveu uma outra equação mais geral, esta que expressa um segmento de reta no primeiro quadrante: $ax + by = c^2$. (BOYER, 2019)

Para demonstrar a eficácia de seu método no tratamento de lugares geométricos, *Fermat* apresentou o seguinte desafio que havia descoberto por meio de sua abordagem inovadora: “Dado qualquer número de retas fixadas, em um plano, o lugar geométrico de um ponto, tal que é constante a soma de múltiplos quaisquer dos segmentos traçados a ângulos dados do ponto às retas dadas, é uma reta.” (BOYER, 2019, pág. 245). Isso, evidentemente, deriva diretamente do fato de que segmentos podem ser expressos como funções lineares das coordenadas, assim como das proposições de *Fermat* que afirmam que qualquer equação linear representa uma reta.

Além de retas, *Fermat* foi vanguarda em descrever outras curvas por meio de equações:

- $xy = k^2$ é uma hipérbole, e $a^2 + x^2 = ky^2$ uma hipérbole com ambos os ramos.
- $a^2 \pm x^2 = by$ é uma parábola;

¹ François *Viète* nasceu em *Fontenay-le-Comte*, na França. Estudou na escola de *Fontenay*, antes de entrar para o curso de advocacia na Universidade de *Poitiers*. Formou-se em 1560, época de grande agitação política e religiosa na França. Em 24 de outubro de 1573, Charles IX, rei da França, indicou *Viète* para o parlamento da Bretanha. Em 1580, seu sucessor, Henrique III, nomeou-o membro do conselho do rei, de maneira que *Viète* serviu ao reino da França por um bom tempo. Embora nunca tenha trabalhado como cientista ou matemático profissional, sempre esteve envolvido em estudos matemáticos ou astronômicos. Seu primeiro trabalho publicado o foi em Paris, no ano de 1571. *Viète* trabalhou com trigonometria, álgebra e geometria. Em *Canon Mathematicus seu ad triangula cum appendicibus*, de 1579, desenvolveu métodos para determinar triângulos planos e esféricos utilizando as seis funções trigonométricas, dando sua contribuição à trigonometria. Sua obra mais famosa é *In artem analyticam isagoge*, de 1591. Nela, apresenta um simbolismo algébrico de usar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes. A utilização das últimas letras do alfabeto para as incógnitas e das primeiras para as constantes foi introduzida posteriormente por Descartes. Antes de *Viète* era comum se usarem letras ou símbolos diferentes para as várias potências de uma quantidade. *Viète* usava a mesma letra devidamente qualificada, por exemplo, expressava A, *A quadratum*, *A cubum*, para indicar A, A², A³. Ao aplicar álgebra à trigonometria e à geometria em *Supplementum geometriae*, de 1593, deu sua contribuição aos três problemas clássicos da matemática grega, mostrando que, tanto a trissecção do ângulo como a duplicação do cubo dependem da resolução de uma cúbica; mostrou ainda como construir a tangente em qualquer ponto da espiral de Arquimedes. Apresentou um processo de aproximações sucessivas para resolver equações de segundo, terceiro e quarto grau em sua obra *De numerosa potestatum resolutione*, de 1600. François *Viète* morreu no dia 13 de dezembro em Paris. Fonte: <<http://ecalculo.if.usp.br/historia/viete.htm>>, acesso em 18 de fev. 2024.

- $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = c^2$ é um círculo; e
- $a^2 - x^2 = ky^2$ é uma elipse.

Fermat conseguiu extrapolar o seu tratado para três dimensões, escrevendo a seguinte proposição: “Dado qualquer número de retas, o lugar geométrico de um ponto, tal que é constante a soma dos quadrados dos segmentos traçados a ângulos dados do ponto às retas, é um lugar sólido.” (BOYER, 2019, pág. 245). Ou seja, *Fermat* conseguia resolver problemas de sólidos através de lugares geométricos, observando que as equações cúbicas e quárticas poderiam ser solucionadas por meio de cônicas, ao passo que tal situação tomaria grandes proporções na geometria de *Descartes*.

Infelizmente *Fermat* nunca chegou a publicar *Introdução aos Lugares Geométricos Planos*, daí o fato de que a maioria das pessoas credita unicamente a *Descartes* a autoria da geometria analítica, contudo, agora fica claro que *Fermat* havia desenvolvido seu método bem antes da publicação da obra de *Descartes* que descreve toda sua ideia sobre esse assunto: *La géométrie*. Na verdade, é lamentável que *Fermat* tenha publicado muito pouco ao longo de sua vida, uma vez que sua abordagem era consideravelmente mais sistemática e didática do que a de *Descartes*. Além do mais, sua geometria analítica apresentava muitas semelhanças com a nossa, já que ele frequentemente considerava as ordenadas como perpendiculares ao eixo das abscissas. Assim como *Descartes*, *Fermat* reconhecia a existência de uma geometria analítica em mais de duas dimensões, como ele indicou em outra ocasião quando escreveu:

Há certos problemas que envolvem só uma incógnita e que podem ser chamados determinados, para distingui-los dos problemas de lugares geométricos. Há outros que envolvem duas incógnitas e que nunca podem ser reduzidos a uma só; e esses são os problemas de lugares geométricos. Nos primeiros problemas, procuramos um ponto único, nos segundos uma curva. Mas se o problema proposto envolve três incógnitas, não apenas um ponto ou curva, mas toda uma superfície. Assim aparecem superfícies como lugares geométricos etc. (BOYER, 2019, pág. 246)

Fermat fez outras contribuições para a Matemática, principalmente no campo da teoria dos números, porém retrataremos agora as que foram preponderantes para o desenvolvimento do cálculo. Nesse sentido *Fermat* escreveu um tratado, que também não foi publicado, chamado *Método para achar máximos e mínimos*. Nele, numa notação moderna, ele utiliza a equação: $y = x^n$ para considerar os seguintes lugares geométricos:

- Quando o n for positivo, teríamos uma parábola; que atualmente denominamos “parábolas de *Fermat*”; e
- Quando o n for negativo, teríamos uma hipérbole, que atualmente denominamos “hipérboles de *Fermat*”

Mas o hábil Pierre não parou por aqui, para curvas polinomiais da forma $y = f(x)$, ele percebeu um modo muito perspicaz para determinar pontos da referida função que apresentam um valor máximo ou mínimo. Para isso, ele comparava o valor das imagens de x e um ponto próximo de valor $x + E$ nessa função, e ele tinha em mente que geralmente esses dois valores teriam valores bem distintos, contudo ele conjecturou que se $f(x)$ e $f(x + E)$ estivessem em uma situação de topo ou de fundo de uma curva lisa, tal variação seria ínfima, logo para encontrar os pontos de máximo e de mínimo, *Fermat* teve a ideia de igualar $f(x)$ e $f(x + E)$, e notou que os valores não eram idênticos, mas sim quase idênticos. Ou seja, o francês percebeu que quanto menor fosse o valor para E entre os dois pontos, mais próximo “chega a pseudoigualdade de ser uma verdadeira equação; por isso, *Fermat*, depois de dividir tudo por E fazia $E = 0$. Os resultados lhe davam as abscissas dos pontos de máximo e mínimo do polinômio.” (BOYER, 2019, pág. 246).

Todo esse raciocínio que *Fermat* teve é equivalente ao processo de derivação onde:

$$\lim_{E \rightarrow 0} \frac{f(x + E) - f(x)}{E}$$

Além de desenvolver um método para achar valores de máximo e de mínimo, *Fermat* também concebeu uma forma de aplicar seu método para valores adjacentes a um ponto, a fim de achar uma reta tangente nesse ponto numa curva polinomial da forma $y = f(x)$. Definindo um ponto $P(a, b)$ nessa curva a qual queremos determinar uma reta tangente sobre ele, seja um ponto próximo de P , onde $x = a + E, y = f(a + E)$, ele

“estará tão perto da tangente que se pode pensar nele como estando aproximadamente sobre a tangente, além de sobre a curva. Portanto, se a subtangente no ponto P é $TQ = c$ [...], os triângulos TPQ e $TP'Q'$ podem ser considerados praticamente semelhantes. Portanto, tem se a proporção $\frac{b}{c} = \frac{f(a+E)}{c+E}$ ” (BOYER, 2019, pág. 247)

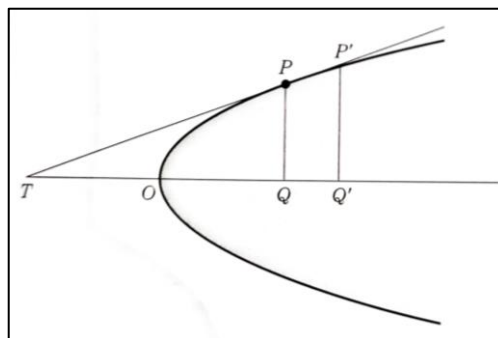


Figura 16: Triângulo TPQ e $TP'Q'$.
Fonte: BOYER, 2019, pág. 247

Lembrando que $b = f(a)$, e realizando as manipulações, temos:

$$\frac{b}{c} = \frac{f(a+E)}{c+E} \Rightarrow \frac{f(a)}{c} = \frac{f(a+E)}{c+E} \Rightarrow \frac{c+E}{c} = \frac{f(a+E)}{f(a)} \Rightarrow 1 + \frac{E}{c} = \frac{f(a+E)}{f(a)} \Rightarrow$$

$$\frac{E}{c} = \frac{f(a+E)}{f(a)} - 1 \Rightarrow \frac{E}{c} = \frac{f(a+E)}{f(a)} - \frac{f(a)}{f(a)} \Rightarrow \frac{E}{c} = \frac{f(a+E) - f(a)}{f(a)} \Rightarrow \frac{f(a)}{c} = \frac{f(a+E) - f(a)}{E}$$

Esse procedimento que *Fermat* apresentou seria equivalente em escrever:

$$\lim_{E \rightarrow 0} \frac{f(a+E) - f(a)}{E}$$

Ou seja, a inclinação da tangente em $x = a$, entretanto *Fermat* não explicou de maneira satisfatória esse processo, apenas alegando que ele era similar ao seu método para máximos e mínimos, que abriu margens para críticas de *Descartes*, contudo *Fermat* conseguiu respondê-las, até que *Descartes*, bem de má vontade, reconheceu a validade de seu método. (BOYER, 2019)

Mesmo não tendo em mãos a ferramenta de limites, o método do francês é equivalente ao usado atualmente, então pode-se dizer que *Fermat* foi pioneiro no cálculo de diferenciação. (STEWART, 2019).

Além de possuir um modo para determinar retas tangentes à curvas da forma $y = x^m$, *Fermat* também contribuiria em outro conceito basilar para o desenvolvimento do cálculo: as integrais. O francês partiu da fórmula de somas das potências dos inteiros, também conhecida como as desigualdades da forma:

$$1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m > \frac{n^{m+1}}{m+1} > 1^m + 2^m + 3^m + \dots + (n-1)^m$$

Dessa forma, poderemos obter o resultado para todos os valores de m , sendo eles inteiros e positivos (BOYER, 2019).

Então, suponha que precisamos achar a área abaixo da curva $y = x^n$, entre os valores $x = 0$ até $x = a$. A ideia que *Fermat* teve, foi subdividir o intervalo $[0; a]$ no eixo x em uma infinidade de subintervalos, tomando os pontos com as seguintes abscissas: a, aE, aE^2, aE^3, \dots , onde E é um valor inferior a um. Através desses pontos, *Fermat* determinava as ordenadas da curva, e em seguida estimava a área abaixo da curva utilizando os retângulos conforme a figura a seguir:

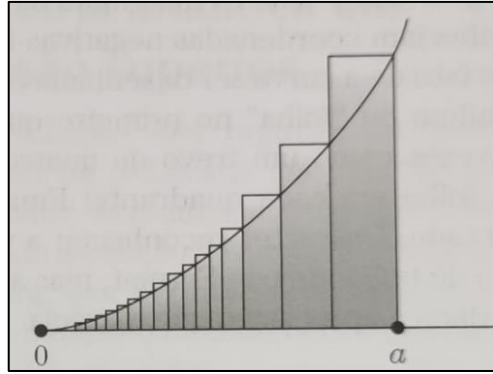


Figura 17: Integral de *Fermat*.
Fonte: BOYER, 2019, pág. 248

Após isso, o francês calculava as áreas dos sucessivos retângulos de aproximação circunscrita, somando do menor para o menor, obtendo uma progressão geométrica com os seguintes termos:

$$(a^n(a - aE); a^n E^n(aE - aE^2); a^n E^{2n}(aE^2 - aE^3); \dots)$$

Utilizando a fórmula da soma de infinitos termos, temos:

$$\frac{a^{n+1}(1 - E)}{1 - E^{n+1}} \quad \text{ou} \quad \frac{a^{n+1}}{1 + E + E^2 + \dots + E^n} \quad (i)$$

Em seguida, *Fermat* fez E tender a um ($E \rightarrow 1$), pois ele percebeu que os retângulos ficariam mais estreitos, e por sua vez, a soma dessas áreas se aproximaria da área real abaixo da curva em questão.

Por fim, o francês entendeu que, se o E fosse exatamente 1, na Equação (i) ele obteria a seguinte expressão:

$$\frac{(a^{n+1})}{(n + 1)} \quad (ii)$$

Essa expressão será a área procurada abaixo da curva $y = x^n$, desde $x = 0$ até $x = a$. Para demonstrar que essa fórmula abrange também qualquer número racional, na forma $\frac{p}{q}$, tomemos $n = \frac{p}{q}$, logo, obteremos a seguinte soma da progressão geométrica:

$$a^{(p+q)/q} \left(\frac{1 - E}{1 - E^{p+q}} \right) = a^{(p+q)/q} \left(\frac{1 + E + E + \dots + E^{q-1}}{1 + E + E^2 + \dots + E^{p+q-1}} \right)$$

E, no caso em que $E = 1$, por meio da Equação (ii) temos que:

$$\frac{a^{\left(\frac{p}{q}+1\right)}}{\frac{p}{q}+1} = \frac{a^{\frac{p+q}{q}}}{\frac{p+q}{q}} = \frac{q}{p+q} a^{(p+q)/q}$$

Em notação moderna, o que *Fermat* estava calculando, é o mesmo quando escrevemos

$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)}$$

E pode-se notar que isso representa

$$\int_a^b x^n dx = \int_0^b x^n dx - \int_0^a x^n dx$$

Agora quando temos valores negativos para n (salvo $n = -1$), o francês usava um procedimento similar, porém com E maior que 1, se aproximando de 1 por cima (pela direita), obtendo a área sob a curva, iniciando em $x = a$, até o infinito. Em outras palavras, para conseguir calcular $\int_a^b x^{-n} dx$, basta notar que isso representa

$$\int_a^b x^{-n} dx = \int_a^{\infty} x^{-n} dx - \int_b^{\infty} x^{-n} dx$$

Logo, podemos perceber que *Fermat*

descobriu os princípios básicos de derivação e integração. Já estabelecidos, a geometria analítica, reta tangente a uma curva, compreensão de máximos e mínimos de função, tudo isso escrito algebricamente, permitiu um avanço no cálculo que até então era impossível. (SILVA, 2019, pág. 21)

E para que esse conhecimento seja mais esclarecido no nível médio, essa dissertação propõe uma atividade utilizando esses conceitos de integrais com aplicação em progressões geométricas, para que os discentes tenham a oportunidade de ter contato com conceitos mais avançados da Matemática mais precocemente, num misto de noções intuitivas de integrais e simbologia moderna, para que, caso esse aluno deseje seguir na área das exatas, ele já tenha essas ideias mais estabelecidas.

2.7. René Descartes (1596 – 1650)

Descartes foi um pensador extremamente ambicioso, propondo a reconstrução do conhecimento humano por meio de um tripé composto por razão, ciência e ceticismo. Sua célebre frase “Penso, logo existo!” ilustra essa ambição, evidenciando que mesmo diante da dúvida, a certeza da existência é garantida pela própria incerteza. Essa afirmação ressalta a importância da reflexão crítica e do questionamento constante na busca pela verdade.

(STROGATZ, 2022) Embora seja muito mais conhecido por ser um filósofo, *Descartes* também fez um brilhante trabalho na Matemática, e no que diz respeito ao desenvolvimento do cálculo, o francês desempenhou um papel importante quando elaborou a geometria analítica, fazendo uma relação entre a álgebra e a geometria.

Em sua obra chamada *o Discurso sobre o Método*, *Descartes* abordou com maestria uma nova maneira de refletir sobre problemas filosóficos, incluindo três apêndices. O primeiro sobre óptica, com relevante importância para o desenvolvimento e melhorias das lentes para microscópios e telescópios, destacando-se o teorema de *Snell/Descartes*. O segundo é sobre o clima. E por fim, o terceiro, chamado de *La Géométrie*, que é considerado a pedra fundamental da geometria analítica, contudo,

la Géométrie não apresenta a Geometria Analítica tal como a conhecemos hoje. Nem mesmo os chamados “eixos cartesianos” aparecem explicitamente naquela obra, muito menos as equações das linhas geométricas mais conhecidas. O que *Descartes* fez foi mostrar, através da solução de vários problemas geométricos, que a Álgebra já havia alcançado tal nível de desenvolvimento que poderia ser empregada no estudo da Geometria, o oposto do que ocorrera na Antiguidade Clássica, quando as figuras geométricas eram utilizadas para esclarecer as questões da Aritmética e da Álgebra. Foram matemáticos posteriores, em especial *Newton*, que deram à Geometria Analítica o formato ao qual estamos habituados. (GARBI, 2010, pág. 71)

E Boyer também retrata que ele não empregava um sistema de coordenadas para a determinação precisa de pontos, como seria típico de um agrimensor ou geógrafo, tampouco concebia suas coordenadas como pares ordenados de números. Nessa perspectiva, o termo “produto cartesiano”, comumente utilizado na atualidade, é anacrônico. *La géométrie*, em sua época, representou um triunfo da teoria abstrata tão significativo quanto As Cônicas de Apolônio na antiguidade, embora ambas tenham eventualmente assumido papéis de grande utilidade. Além disso, a utilização de coordenadas oblíquas era praticamente idêntica nas duas obras, o que reforça a ideia de que a geometria analítica moderna tem suas raízes na antiguidade, em contraste com a abordagem medieval das latitudes de formas. As coordenadas desenvolvidas por Oresme, que exerceram influência sobre Galileu, se aproximam mais, tanto em termos de motivação quanto de estrutura, do ponto de vista moderno, do que as propostas por Apolônio e Descartes. Embora seja incerto se Descartes estava familiarizado com a representação gráfica das funções de Oresme, não há indícios em seu pensamento que sugiram que ele teria reconhecido alguma semelhança entre o propósito das latitudes de formas e sua própria classificação das construções geométricas. A teoria das funções acabou por se beneficiar significativamente das contribuições de Descartes; no entanto, a noção de forma ou função não parece ter desempenhado um papel evidente no desenvolvimento da geometria cartesiana.

Do ponto de vista matemático, Descartes provavelmente se destacou como o pensador mais habilidoso de sua época; no entanto, fundamentalmente, ele não se via estritamente como um matemático. Sua incursão na geometria foi apenas uma faceta de uma vida dedicada à ciência e à filosofia. Embora tenha ocasionalmente contribuído para a matemática através de correspondências posteriores, ele não abandonou nenhuma outra grande obra no campo. (BOYER, 2019)

Apesar disso, a contribuição de *Descartes* à história do pensamento científico e filosófico global é amplamente reconhecido como um ponto de referência significativo, devido à influência duradoura que ele teve sobre várias gerações de estudiosos que vieram após ele. Tal influência se dá principalmente do modo inteligente que *Descartes* idealiza a geometria analítica, que se baseia na atribuição de pontos no plano (podendo extrapolar para o espaço) com características que descrevem suas posições em relação a dois eixos de coordenadas (x e y), e analisando como essas coordenadas se relacionam quando o ponto está localizado em várias formas geométricas. Exemplos disso é a associação das equações a figuras geométricas:

- i. $Ax + By + C = 0$ refere-se à uma equação de uma reta, P de coordenadas $(x; y)$ é um ponto genérico dessa reta.

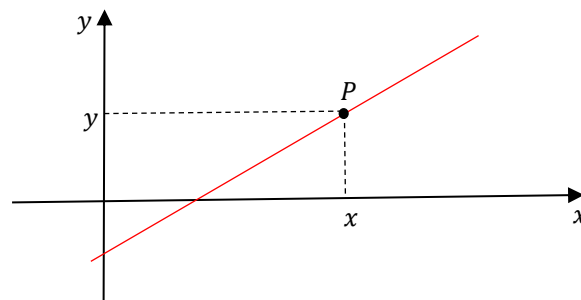


Figura 18: Equação da reta de Descartes.
Fonte: o Autor

- ii. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ refere-se à uma circunferência, onde a e b são coordenadas do centro, r é o raio da circunferência, e P de coordenadas $(x; y)$ é um ponto genérico dessa circunferência

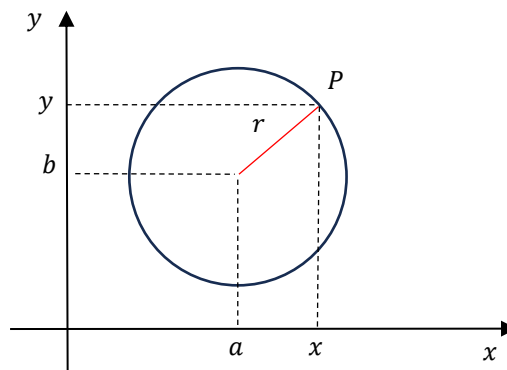


Figura 19: Equação da circunferência de Descartes.
Fonte: o Autor

Com esse tratamento algébrico que *Descartes* dá à geometria, é possível deduzir teoremas que comumente obtemos pela geometria euclidiana. O cálculo da hipotenusa é obtido via teorema de Pitágoras na geometria euclidiana, porém, *Descartes* consegue o mesmo resultado colocando tudo em função das coordenadas que esses pontos possuem. Suponha que desejamos calcular o valor de *hip*, e temos os pontos de coordenadas $(a; b)$ e $(c; d)$, podemos realizar os cálculos da seguinte maneira:

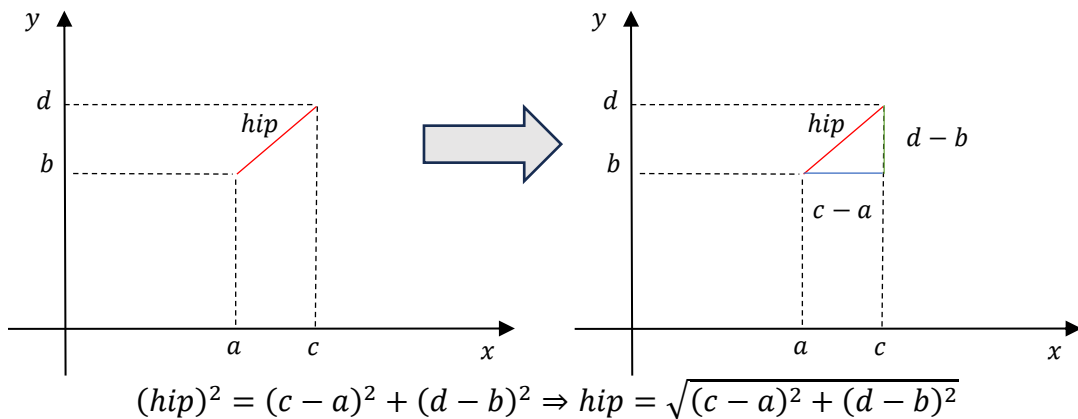


Figura 20: Equação de distância de Pontos de Descartes.

Fonte: o Autor

Descartes usa o teorema de Pitágoras, que é um fato da geometria euclidiana, mas temos agora uma fórmula apenas em função das coordenadas dos pontos no plano pré-estabelecido, não demandando que se haja alguma figura propriamente dita, dando um efeito altamente algébrico aos problemas genuinamente geométricos.

Outra contribuição que herdamos de *Descartes* foi a simbologia adotada por ele na sua obra prima *La Géométrie*, onde letras maiúsculas são utilizadas para representar números, sendo as últimas do alfabeto ($x; y; z$) para se referir às incógnitas, e as primeiras ($a; b; c$) para seus parâmetros. Esta simbologia se tornou amplamente difundida para a expressão de equações algébricas por meio de polinômios igualados a zero. (GARBI, 2010)

Contudo, o que *Descartes* mais se orgulhava era ter descoberto um método para determinar tangentes, e em 1637 ele apresentou ao mundo sua técnica, e para isso ele utilizou

a ideia de interseção dupla, mas empregou círculos, em vez de linhas, para cortar as curvas de interesse. Próximo ao ponto de tangência, um círculo típico cortaria a curva em dois pontos ou em nenhum.

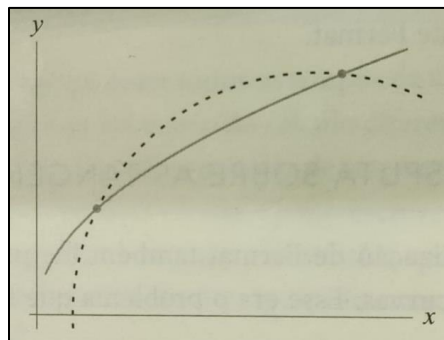


Figura 21: Achando uma reta tangente pelo método de Descartes (i).
Fonte: STROGATZ, 2022, pág 138

Ajustando a localização e o raio do círculo, *Descartes* podia forçar os dois pontos de interseção a se fundirem em um. Naquela interseção dupla – bingo! –, o círculo tocava a curva tangencialmente.

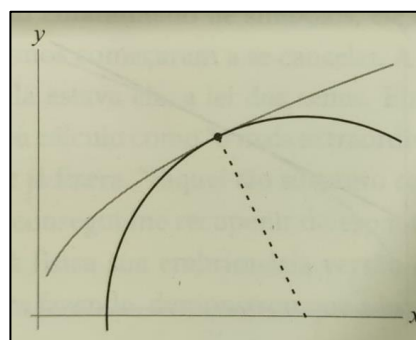


Figura 22: Achando uma reta tangente pelo método de Descartes (ii).
Fonte: STROGATZ, 2022, pág 138

Isso dava a *Descartes* tudo de que ele precisava para determinar a tangente da curva, assim com a normal, que faz um ângulo reto com a tangente, ao longo do raio do círculo. (STROGATZ, 2022, pág. 138)

E a geometria analítica seria uma ferramenta importante na estruturação do cálculo diferencial e integral de *Newton* e *Leibniz*, pois ela fornece as ferramentas necessárias para representar e analisar as funções e suas variações por meio de equações algébricas, podendo ser visualizadas em um plano cartesiano. Dessa forma, a geometria analítica oferece uma linguagem algébrica e visual para a manipulação de funções, simplificando a aplicação das ideias do cálculo diferencial.

2.8. Os criadores do Teorema Fundamental do Cálculo: *Newton* e *Leibniz*

Mesmo com todo o progresso significativo da Matemática, incluindo o estudo de infinitésimos, máximos e mínimos, retas tangentes a curvas (derivadas) e a determinação de áreas sob curvas (integrais), ainda havia a necessidade de estabelecer uma abordagem sistemática e generalizada para compreender e calcular todos esses conceitos nas mais diversas situações, impedindo os matemáticos de reiniciar praticamente do zero a cada novo problema.

E esse tenebroso quadro mudou com as descobertas do inglês Isaac *Newton* (1643 – 1727) e do alemão *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646 – 1716), pois

Ambos descobriram e provaram de maneira independente um teorema fundamental que tornou rotineiros esses problemas. O teorema conectava áreas a inclinações, conectando assim integrais a derivadas. Uma coisa espantosa. Como uma reviravolta em algum romance de *Charles Dickens*² – em que dois personagens aparentemente distantes são os parentes mais próximos –, integrais e derivadas eram consanguíneas. (STROGATZ, 2022, pág. 186)

Esse sistema elaborado por essas duas mentes brilhantes tem como pedra de esquina o Teorema Fundamental do Cálculo, e não que eles fossem os pioneiros da humanidade a percebê-lo, entretanto hoje “ambos recebem crédito por serem os primeiros a prová-lo, de modo geral, reconhecendo sua enorme utilidade e importância, e construindo um sistema algorítmico ao seu redor. Os métodos que desenvolveram são agora comuns.” (STROGATZ, 2022, pág. 187)

2.8.1. Desenvolvimento do Teorema Fundamental do Cálculo por *Newton*

Newton nasceu na cidade inglesa de *Woolsthorpe, Lincolnshire*, no ano de 1643, que coincidiu com o ano da morte de Galileu. De certa forma, podemos considerá-lo como padrinho científico do inglês, pois futuramente *Newton* acabaria descrevendo matematicamente o universo físico que o italiano havia observado com seu telescópio.

Órfão de pai desde o nascimento, *Newton* foi pressionado a contragosto para ser fazendeiro, uma vez sendo o homem mais velho. Com o passar do tempo, sua mãe percebeu que seria inútil lutar contra a vontade de seu filho, e assim, enviou-o para a casa dos avós em *Grantham* para que se preparasse durante nove meses para a universidade. Com a ajuda de seu tio, o reverendo *W. Ayscough*, que havia sido aluno de *Cambridge*, *Newton*, com 18 anos, matriculou-se no *Trinity College* da Universidade de *Cambridge* em junho de 1661.

Newton era muito dedicado aos estudos e ao trabalho. Entretanto, a obra que deixaria o jovem inglês marcado na história, seria aquela realizada na casa de sua família em *Grantham*, entre os anos de 1665 e 1667, longe da universidade devido a pandemia da peste bubônica que assolava Londres e os arredores. Esse período ficou conhecido como *anni mirabiles*, ou “anos

² *Charles John Huffam Dickens* (1812-1870) nasceu em *Landport*, no sul da Inglaterra, em 07 de fevereiro de 1812. Ainda criança, mudou-se com a família para Londres, e depois para *Chatham*. Foi considerado um dos principais escritores ingleses do século XIX e um dos grandes nomes da literatura mundial. Dentre as suas obras, várias ganharam fama mundial, dentre eles *Oliver Twist*, *A Christmas Carol* e *David Copperfield*. Além de escritor de livros, produziu diversos contos e trabalhou como jornalista, onde publicava seus contos em diversos periódicos. Dentre as suas obras, podemos citar Papéis Póstumos do Clube *Pickwick* (1836-1837), *Oliver Twist* (1837-1839), *Nicolas Nickleby* (1838-1839), *Armazém de Ambiguidades* (1840-1841), *Barnaby Rudge* (1841), *Canção de Natal* (1843), *Martin Chuzzlewit* (1843-1844), *Dombey e Filho* (1846-1848), *David Coperfield* (1849-1850), *Casa Desolada* (1852-1853), *Tempos Difíceis* (1854), *A Pequena Dorrit* (1855-1857), *História de Duas Cidades* (1859), *Grandes Esperanças* (1860-1861), *O Nosso Amigo Comum* (1864-1865) e *El Guardavía* (1866). Deixou inacabado seu último romance, *The Mystery of Edwin Drood*. (FERREIRA, 2020, pág. 25)

milagrosos”. Foi durante essa quarentena que *Newton* elaborou as primeiras ideias sobre o funcionamento do universo, e para isso intensificou seus estudos de Matemática e Filosofia.

Adquiriu e leu um exemplar da *Géométrie de Descartes*, onde encontrou grandes dificuldades para compreender o que estava disposto na obra, e assim relia incansavelmente até entender. *Newton* também leu com bastante entusiasmo as obras do matemático inglês *John Wallis* (membro fundador da *Royal Society*) que já influenciava Isaac consideravelmente, principalmente através de seu livro *Arithmetica Infinitorum*, que mostra alguns dos primeiros passos em direção ao Cálculo, pois

ele antevê o cálculo por prognosticar as perguntas a que o método viria a responder e discute as idéias geométricas de matemáticos que o haviam precedido e realizado algum trabalho nesse sentido. Lendo o livro de *Wallis* sobre as séries infinitas, *Newton* teve a inspiração para prolongar seu trabalho e inventar um método geral para analisar as curvas geométricas utilizando a álgebra — o cálculo, em essência. (BARDI, 2006, pág. 46)


Newton já conhecia a expansão $(a + b)^n$, e ele sabia que quando $n \in \mathbb{N}$ consistia na soma de $n + 1$ termos, cujos coeficientes eram facilmente obtidos por meio do triângulo de *Pascal*, porém a descoberta de *Newton* foi fazer n ser uma fração e posteriormente um número negativo, “Para esses casos, entretanto, a expansão envolve um número infinito de termos – ela se torna uma série infinita.” (MAOR, 2019, pág. 98)

Para entendermos a genialidade da descoberta de *Newton*, vamos escrever o triângulo de *Pascal* convencional e comparar com o que o inglês idealizou.

Tabela 1: Triângulo de *Pascal*.

$n = 0:$	1	0	0	0	0	0	...
$n = 1:$	1	1	0	0	0	0	...
$n = 2:$	1	2	1	0	0	0	...
$n = 3:$	1	3	3	1	0	0	...
$n = 4:$	1	4	6	4	1	0	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Fonte: MAOR, 2019, pág. 98

Pela relação de *Stiefel*, temos que cada número é obtido pela soma do número imediatamente superior e o seu anterior (à esquerda), formando o padrão . Os zeros que ficam ao final de cada fileira indicam que a expansão possui uma quantidade finita de termos. Para lidar com o cenário em que o n é um inteiro negativo, *Newton* estendeu a tabela para cima,

e para calcular cada termo de uma determinada fileira j , bastava fazer a diferença do número imediatamente abaixo com o seu antecessor. Por exemplo, o número 35 da fileira $n = -4$ é resultado de $15 - (-20)$.

Tabela 2: Triângulo *Pascal* expandido.

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n = -4$	1	-4	10	-20	35	-56	84	...
$n = -3$:	1	-3	6	-10	15	-21	28	...
$n = -2$:	1	-2	3	-4	5	-6	7	...
$n = -1$:	1	-1	1	-1	1	-1	1	...
$n = 0$:	1	0	0	0	0	0	0	...
$n = 1$:	1	1	0	0	0	0	0	...
$n = 2$:	1	2	1	0	0	0	0	...
$n = 3$:	1	3	3	1	0	0	0	...
$n = 4$:	1	4	6	4	1	0	0	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Fonte: MAOR, 2019, pág. 99

Para abordar cenários quando n é uma fração, *Newton* analisou minuciosamente o padrão numérico do triângulo de *Pascal* até conseguir ler nas entrelinhas e interpolar corretamente os coeficientes para $n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ e assim por diante. Para $n = 1/2$, *Newton* chegou aos coeficientes $1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{5}{128}, \frac{7}{256}, \dots$. Dessa maneira, a expansão da expressão $(1+x)^{\frac{1}{2}}$, isto é $\sqrt{1+x}$, pode ser representada pela série infinita:

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)x - \left(\frac{1}{8}\right)x^2 + \left(\frac{1}{16}\right)x^3 - \left(\frac{5}{128}\right)x^4 + \left(\frac{7}{256}\right)x^5 - \dots \text{ (MAOR, 2019)}$$

Contudo, *Newton* jamais demonstrou a generalização da expansão binomial para n negativo e fracionário, apenas fez uma conjectura. Para confirmar, ele realizou a multiplicação da série $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ termo a termo por si mesma, e verificou que o resultado era $1+x$. Além dessa série, o inglês possuía outra pista que apontava que ele estava na direção correta. Para $n = -1$, temos os coeficientes no triângulo de *Pascal* iguais a $1, -1, 1, -1, \dots$. E se aplicarmos esses

coeficientes para expandir a expressão $(1 + x)^{-1}$ em potências de x teremos a série infinita:
 $1 - x + x^2 - x^3 + \dots$

Isso se tratava de uma série geométrica infinita com seu primeiro termo igual a 1 e razão $-x$. E “A álgebra elementar nos ensina que desde que a taxa comum fique entre -1 e 1 , a série vai convergir precisamente para $\frac{1}{1+x}$.” (MAOR, 2019, pág. 100) Dessa forma, *Newton* tinha consciência que sua conjectura estava correta pelo menos nesse caso, como também sabia que não podia tratar uma série infinita da mesma maneira que uma soma finita, porque nesse cenário a questão da convergência é essencial. É importante salientar que *Newton* não usou a palavra convergência, pois os conceitos de limites e convergência ainda não haviam sido estabelecidos, contudo o inglês sabia que o x necessitava ser suficientemente pequeno para que seus resultados tivessem validade. (MAOR, 2019)

E baseado nisso, *Newton* desenvolveu uma fórmula para sua expansão binomial:

$$(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} \cdot AQ + \frac{m-n}{2n} \cdot BQ + \frac{m-2n}{3n} \cdot CQ + \dots$$

Onde A refere-se ao primeiro termo da expansão (ou seja, $P^{\frac{m}{n}}$), B é o segundo termo e assim por diante. E *Newton* se utiliza dessa fórmula para expressar as equações de diversas curvas como séries infinitas de variável x , ou, em linguagem atual, como séries de potências de x . Por exemplo, *Newton* estudou a equação $(x + 1)y = 1$, cujo gráfico é uma hipérbole conforme a figura a seguir:

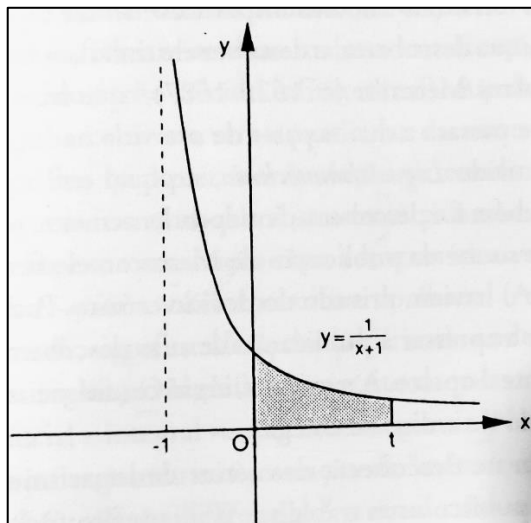


Figura 23: Área sob a hipérbole.
 Fonte: MAOR, 2019, pág. 101

Expandindo a equação:

$$(x + 1)y = 1 \Rightarrow y = (x + 1)^{-1} \Rightarrow y = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots (i)$$

Newton já havia estudado a descoberta de *Sant-Vicent*, que tratava do cálculo da área delimitada pela hipérbole $y = 1/x$ que resultava em $\log t$, tomando como base o eixo x e as ordenadas $x = 1$ e $x = t$. Logo, isso significa que a área hachurada no gráfico da hipérbole $y = 1/(x + 1)$ é igual a $\log(t + 1)$. Dessa forma, aplicando a fórmula de *Fermat* a cada termo da equação (i), e levando em conta que o resultado é uma igualdade entre áreas, *Newton* obteve a notável série

$$\log(t + 1) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots$$

Essa série converge para todos os valores de $t \in] - 1; 1]$ e, em princípio, poderia ser empregada para calcular os logaritmos de diferentes números, contudo, devido à sua taxa de convergência lenta, realizar tais cálculos se torna impraticável.

E foi dessa forma que *Newton* consegue enxergar a geometria em movimento, pensando as curvas não como algo estático, mas sim estruturas dinâmicas com grandes variáveis.

Newton estava interessado em resolver alguns problemas matemáticos e com isso viu uma relação entre o problema das áreas e o problema das tangentes. Esta correlação traz ao que hoje é denominado Teorema Fundamental do Cálculo, ao abordar o teorema, além da relação da integral com a antiderivada ou pela fórmula de se calcular uma área abaixo de uma curva, se abre um leque histórico a partir do original proposto por *Newton*. (VILLATE, 2022)

O Teorema Fundamental do Cálculo está associado com a relação inversa entre a derivação e a integração, e em alguns casos é lembrado como a fórmula que calcula a área abaixo de uma curva (VILLATE, 2022). Parte da solução de *Newton* surge da tentativa de resolver um problema milenar, mencionado anteriormente, que é o da quadratura das áreas, vindo da tentativa desde os gregos de encontrar um quadrado com a mesma área de um círculo, por exemplo. Filosoficamente os gregos estabeleceram diversas regras para esta construção com régua e compasso, e muitas não eram aceitas por incidir sobre elas o erro humano, fator esse que desqualifica a exatidão da área encontrada. Este problema apenas foi solucionado de uma maneira não mecânica com o cálculo infinitesimal advindo dos estudos de *Newton* e *Leibniz*. (VILLATE, 2022)

Tanto *Newton* como *Leibniz* utilizaram soluções propostas por contemporâneos no desenvolvimento do cálculo, como por exemplo a resolução do problema de retificação de curvas de *H. van Heuraet*, ou os estudos de *J. Hudde* e *R. Sluse* acerca do cálculo de tangentes e normais. Outra parte dos estudos envolveram realizar o traçado de retas tangentes a curvas tais como: as cônicas, a cissóide de *Diocles* e a concóide de *Nicomedes*. (ROQUE, 2012)

Tomando como base essa vasta bibliografia, *Newton* desenvolve seu cálculo de forma parametrizada, usando como fator preponderante o tempo, que servia como parâmetro. Como já mencionado anteriormente, o inglês calcava o seu raciocínio em estruturas dinâmicas, e para isso ele analisava o movimento das partículas em função da sua velocidade.

Embora utilizemos a palavra cálculo, vale aqui ressaltar alguns pontos,

O nome “cálculo” é uma abreviação de “cálculo diferencial e integral” que, juntos, formam as duas maiores ramificações dessa área (sendo também conhecido como cálculo infinitesimal). A palavra cálculo em si não tem relação alguma com este ramo particular da Matemática. Em seu sentido genérico, significa qualquer manipulação sistemática de objetos matemáticos, sejam números ou símbolos abstratos. (MAOR, 2019, pág. 103)

E era exatamente isso que *Newton* tinha em mente, resolver uma modalidade de problemas com uma série de passos que envolvia o raciocínio matemático, e para alcançar esse objetivo criou uma simbologia própria que veremos mais à frente.

De fato, é importante salientar que “O significado restrito da palavra cálculo – ou seja, o cálculo diferencial integral – é devido à *Leibniz*” (MAOR, 2019, pág. 103), e em toda a sua bibliografia *Newton* jamais mencionou essa palavra, ao invés disso ele nomeou seu trabalho de “método de fluxões”.

Newton percebeu que diversos fenômenos da natureza estão intrinsecamente ligados à taxa de mudanças referente a uma quantidade variável. Alguns fenômenos que podemos citar são a velocidade de um automóvel em movimento, as temperaturas de um lugar, até mesmo a corrente elétrica de um circuito fluindo em uma instalação. E o inglês incorporou essa fluidez em todo o seu pensamento, chamando todas essas variáveis (termo que adotamos atualmente) de *fluente*.

Logo, o “cálculo” diferencial de *Newton*

[...] está relacionado a descoberta da taxa de mudança de uma variável, ou, para usar a expressão de *Newton*, a *fluxão* de um determinado fluente. Esta escolha de palavras revela o funcionamento de sua mente. *Newton* era tanto físico quanto matemático. Sua visão de mundo era dinâmica, onde tudo se encontrava num estado contínuo de movimento, causado por forças conhecidas. Esta visão, é claro, não se originou com *Newton*; tentativas de explicar todo o movimento pela ação de forças recuam até a antiguidade e chegaram ao seu clímax quando o Galileu estabeleceu as fundações da mecânica no início dos 1600. (MAOR, 2019, pág. 103)

Mais tarde o inglês conseguiu consubstanciar as diversas observações conhecidas em uma sólida teoria: a lei da gravitação universal, a qual divulgou em sua famosa obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* em 1687.

Para entendermos como funcionava o método de fluxões, que ajudou o inglês para a formulação da gravitação universal e outras teorias, *Newton* construiu a seguinte ideia:

- t para indicar um intervalo de tempo, tão pequeno quanto se queira;

- p para indicar a velocidade de uma partícula x ;
- q para indicar a velocidade de uma partícula y ;
- $t \cdot p$ e $t \cdot q$ como o deslocamento das partículas x e y , respectivamente no intervalo de tempo t .

Agora, ele tomou por hipótese que x e y obedecessem a seguinte relação:

$$y^n = x^m, n \text{ e } m \in \mathbb{Z} \text{ (i)}$$

Considerando o deslocamento dessas partículas em um intervalo de tempo pequeno, tão pequeno quanto se queira (t), por (i) temos:

$$(y + t \cdot q)^n = (x + t \cdot p)^m \text{ (ii)}$$

Pelo teorema binomial desenvolvido por ele mesmo, podemos fazer a expansão desses binômios de (ii), resultando na seguinte igualdade:

$$nqy^{n-1} + tA = mpx^{m-1} + tB \text{ (iii)}$$

Onde A é a expansão polinomial que depende de y e de q , e B também é uma expansão polinomial, só que em função de x e de p .

Agora, como consideramos t um número muito pequeno, em outras palavras, um infinitesimal, temos que os produtos tA e tB tendem a zero, possibilitando que desconsideremos essas parcelas em (iii). Portanto:

$$nqy^{n-1} = mpx^{m-1} \Rightarrow \frac{q}{p} = \frac{mx^{m-1}}{ny^{n-1}} \text{ (iv)}$$

Além disso, ao analisarmos a equação (i), podemos obter:

$$y^n = x^m \Rightarrow y = x^{\frac{m}{n}} \text{ (v)}$$

Logo, ao fazermos a substituição de (v) em (iv) temos:

$$\frac{q}{p} = \frac{mx^{m-1}}{ny^{n-1}} \Rightarrow \frac{q}{p} = \frac{mx^{m-1}}{n \left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{n-1}} \Rightarrow \frac{q}{p} = \frac{mx^{m-1}}{n(x)^{m-\frac{m}{n}}} \Rightarrow \frac{q}{p} = \frac{m}{n} (x)^{\frac{m}{n}-1} \text{ (vi)}$$

O que fica evidente que o 2º membro da equação (vi) é a derivada de uma função polinomial de expoente racional, e o 1º membro $\left(\frac{q}{p}\right)$ se trata de uma taxa de variação, pois é a razão de duas velocidades.

É dessa forma que *Newton* concebe a ideia de derivada por meio de taxas de variação. Logo, podemos encaixar os conceitos de fluentes e fluxões nesse raciocínio.

Newton imaginou o gráfico de uma função como uma curva gerada por um ponto móvel $P(x, y)$. À medida que P traça a curva, ambas as coordenadas, x e y variam continuamente com o tempo; imaginava-se o próprio tempo como "fluindo" a uma

taxa uniforme – daí a palavra fluente. *Newton* então partiu para encontrar as taxas de mudança de x e y em relação ao tempo, isto é, suas fluxões. (MAOR, 2019, pág. 104)

Em outras palavras, fluente é a quantidade que mensura o fluxo ou movimento, e já as fluxões é a taxa de variação do fluxo, que em linguagem moderna, chamamos de derivada ou velocidade.

Aprofundando-se um pouco mais nesse método *Newtoniano*, podemos notar fortes traços do trabalho de *Johann Hudde*³ (1629 – 1704) de 1656, porém ele desenvolveu uma simbologia própria, onde *Newton* substituiu a notação p de velocidade por \dot{x} (RUSSO, 2017). E para uma demonstração dessa notação, observe as tabelas a seguir:

Tabela 3: Monômios Formadores dos Fluents (1666)

...	x^{-2}	x^{-1}	x^0	x^1	x^2	x^3	...
...	y^{-2}	y^{-1}	y^0	y^1	y^2	y^3	...

Fonte: o autor

Tabela 4: Parâmetros Multiplicativos dos Fluxos (1666)

...	$-3 \frac{\dot{x}}{x}$	$-2 \frac{\dot{x}}{x}$	$-1 \frac{\dot{x}}{x}$	$0 \frac{\dot{x}}{x}$	$1 \frac{\dot{x}}{x}$	$2 \frac{\dot{x}}{x}$	$3 \frac{\dot{x}}{x}$...
...	$-3 \frac{\dot{y}}{y}$	$-2 \frac{\dot{y}}{y}$	$-1 \frac{\dot{y}}{y}$	$0 \frac{\dot{y}}{y}$	$1 \frac{\dot{y}}{y}$	$2 \frac{\dot{y}}{y}$	$3 \frac{\dot{y}}{y}$...

Fonte: o autor

A primeira tabela é referente os monômios que formam os polinômios que serão derivados, e na segunda temos os parâmetros que serão utilizados para a obtenção do 1º fluxo (1ª derivada) referente a cada grau do monômio correspondente.

Vamos ver na prática a aplicação do método das fluxões em duas funções:

³ Em 1656-1657, *Schooten* tinha publicado uma obra sua, *Exercitationes mathematicae*, em que dava novos resultados sobre a aplicação da álgebra à geometria. Incluía descobertas feitas por seus discípulos mais capazes, tais como *Johann Hudde* (1629-1704), nobre que serviu durante cerca de trinta anos como burgomestre de *Amsterdã*. *Hudde* correspondeu-se com *Huygens* e *De Witt* sobre a manutenção de canais e problemas de probabilidades e expectativa de vida; em 1672 ele dirigiu a obra de inundar a Holanda para obstruir o avanço do exército francês. Em 1656, *Hudde* tinha escrito sobre a quadratura da hipérbole por meio de séries infinitas, como *Mengoli* fizera; mas o manuscrito perdeu-se. Nas *Exercitationes*, de *Schooten*, há uma secção por *Hudde* sobre o estudo de coordenadas de uma superfície de quarto grau, uma antecipação de geometria analítica no espaço que é anterior inclusive à de *Lahire*, embora menos explicitamente descrita. Além disso, parece que *Hudde* foi o primeiro matemático a permitir que um coeficiente literal em uma equação represente qualquer número real, seja positivo seja negativo. Esse passo final no processo de generalização das notações de *Viète* na teoria das equações foi feito em uma obra de *Hudde* intitulada *De reductione aequationum*, que também fazia parte da edição de 1659-1661 de *Schooten* da Geometria de *Descartes* (BOYER, 2019, pág. 258).

a) $y = x^3 + x^2 + x + 1$

$$y = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow \frac{\dot{y}}{y}y = \frac{3\dot{x}}{x}x^3 + \frac{2\dot{x}}{x}x^2 + \frac{1\dot{x}}{x} + \frac{0\dot{x}}{x}1$$

$$\Rightarrow \dot{y} = 3\dot{x}x^2 + 2\dot{x}x + 1\dot{x} \quad (\div \dot{x}) \Rightarrow \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 3x^2 + 2x + 1$$

Logo, o 1º fluxo (derivada) da função $y = x^3 + x^2 + x + 1$ é igual a $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 3x^2 + 2x + 1$

b) $y^2 = x^4 + x^3$

Se olharmos bem para essa função, é notório que ela pode ser reescrita da seguinte maneira: $y = \sqrt{x^4 + x^3}$ (*). E esse tipo de função não estava contemplado no método de *Newton*, porém, com algumas manipulações, é possível sua utilização. Observe:

$$y^2 = x^4 + x^3 \Rightarrow 2\frac{\dot{y}}{y}y^2 = \frac{4\dot{x}}{x}x^4 + \frac{3\dot{x}}{x}x^3 \Rightarrow 2\dot{y}y = 4\dot{x}x^3 + 3\dot{x}x^2 \quad (\div \dot{x})$$

$$\Rightarrow 2\frac{\dot{y}}{\dot{x}}y = 4x^3 + 3x^2 \Rightarrow \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{4x^3 + 3x^2}{2y} \Rightarrow \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{4x^3 + 3x^2}{2\sqrt{x^4 + x^3}}$$

Logo, o 1º fluxo da função $y^2 = x^4 + x^3$ ($y = (x^4 + x^3)^{\frac{1}{2}}$) igual a $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{4x^3 + 3x^2}{2\sqrt{x^4 + x^3}}$.

Perceba que, utilizando a regra da cadeia⁴, facilmente podemos comprovar que o resultado obtido para esse exemplo está correto.

Como já dito anteriormente, *Newton* entendia o 1º fluxo $\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$ como a razão de duas velocidades, e se compararmos com a notação de *Leibniz*, que veremos mais a diante, teremos:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \Rightarrow \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} \quad (\text{VILLATE, 2022})$$

Dessa forma, era de entendimento do inglês que a divisão da

fluxão de y pela de x (isto é, se calcularmos a relação $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$), teremos a taxa de variação de y em relação a x . Esta última quantidade possui um significado geométrico; ela mede a inclinação da curva em cada um de seus pontos. Mais precisamente, a taxa $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ é a inclinação da linha tangente para a curva no ponto $P(x, y)$, onde por inclinação queremos mencionar a proporção em que a linha se eleva naquele ponto. (MAOR, 2019, pág. 105)

Para ilustrar essa ideia, vamos ao seguinte exemplo: seja a função $y = x^2$, utilizando o método de fluxões temos:

⁴ Regra que foi desenvolvida posteriormente aos estudos de *Leibniz* e que utilizamos em nossos dias para facilitar os cálculos e veremos mais adiante nesta dissertação.

$$y = x^2 \Rightarrow \frac{\dot{y}}{y}y = \frac{2\dot{x}}{x}x^2 \Rightarrow \dot{y} = 2\dot{x}x \Rightarrow \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x$$

O que quer dizer que, a cada ponto P de coordenadas $(x; y)$, na parábola, temos que a reta tangente terá um coeficiente de inclinação (derivada) com o dobro da coordenada x no ponto dado.

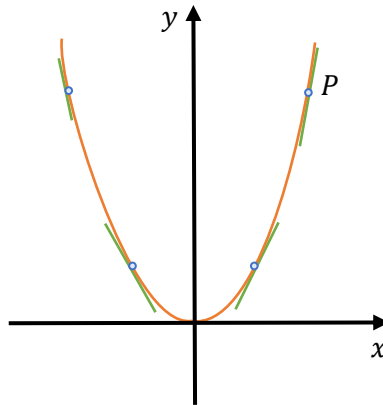


Figura 24: Linhas tangentes à parábola $y = x^2$
Fonte: MAOR, 2019, pág.106.

Como vimos na seção de precursores do Cálculo, já era de conhecimento de muitos deles o conceito de derivada, mas *Newton* se destacou por fornecer um procedimento geral, isto é, um algoritmo que oferecia um método para que possamos encontrar a taxa de variação de praticamente qualquer função (MAOR, 2019). Por exemplo, para funções do tipo $y = x^n$, temos que a derivada delas ficará assim: $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = nx^{n-1}$, (onde $n \in \mathbb{R}$). Esta forma de resolver derivadas é conhecida coloquialmente em nossos dias como a regra do tombo.

Vale salientar que os predecessores do inglês “[...] abriram o caminho, mas foi *Newton* quem transformou suas idéias em uma ferramenta poderosa universal, que logo seria aplicada com enorme sucesso em todos os ramos da ciência.” (MAOR, 2019, pág. 106)

Após a elaboração do método de fluxões, *Newton* conjecturou inverter o problema das tangentes, ou seja, dada a fluxão, seria possível encontrar o fluente? De fato, isso se tratava de um problema com nível de complexidade maior, como as crianças acham mais complicadas as divisões depois de verem as multiplicações, ou quando aprendem a extrair raízes quadradas depois de aprenderem potenciação envolvendo quadrados. Para casos triviais, os resultados poderiam ser obtidos por meio de “chutes”, palpites bem embasados, e um exemplo disso é o seguinte: dada a fluxão $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x$, encontre o fluente y . Uma solução imediata e óbvia é $y = x^2$, contudo podemos fornecer outras soluções, tais como $y = x^2 - 3$ ou $y = x^2 + \frac{3}{4}$, isto é,

qualquer função do tipo $y = x^2 + c$ ($c \in \mathbb{R}$) será válida. O motivo disso acontecer é que os gráficos de todas essas funções são oriundos da função $y = x^2$, onde apenas está ocorrendo a translação vertical dessa família de funções conforme a figura a seguir:

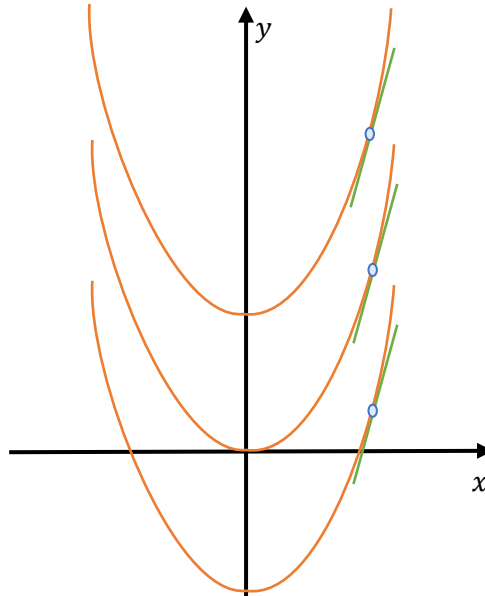


Figura 25: Inclinação da tangente invariável.
Fonte: MAOR, 2019, pág 107.

Desta maneira, dada uma determinada fluxão, esta terá uma infinidade de fluentes que a ela corresponde, apenas diferindo as constantes c arbitrárias.

Após entendido que a fluxão de $y = x^n$ é $\frac{\dot{y}}{x} = nx^{n-1}$, o inglês inverteu a fórmula, obtendo o seguinte resultado: se a fluxão for $\frac{\dot{y}}{x} = x^n$, temos que o fluente (já desconsiderando a constante) será $y = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ($n \in \mathbb{Q}$). Um exemplo desse raciocínio de *Newton* é, se $\frac{\dot{y}}{x} = x^{\frac{1}{2}}$, então teremos $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ (MAOR, 2019).

Contudo, nem tudo é um mar de rosas, a fórmula de *Newton* falhava para quando $n = -1$, visto que o denominador se torna zero. É o famoso caso para quando a fluxão é proporcional a $\frac{1}{x}$, caso este que instigou *Fermat* fervorosamente, onde ele se debruçou em inúmeras tentativas para obtenção de quadraturas de hipérbolas. Isaac já tinha conhecimento das obras de *Fermat*, e sabia que problemas daquela natureza envolviam logaritmos como vimos nas equações com infinitos termos, e para que ninguém se confundisse com os logaritmos “comuns” de *Briggs*⁵, o inglês nomeou de logaritmos hiperbólicos (MAOR, 2019).

⁵ Henry Briggs (1561 – 1631) foi professor de geometria em Gresham College, em Londres, e posteriormente em Oxford. Ficou tão admirado com a publicação de Napier que deixou seus estudos em Londres para visitá-lo. Conta-se que Briggs se atrasou na viagem e Napier já se conformara que de que não receberia sua visita quando batidas

Atualmente, para determinar o fluente de uma certa fluxão, utilizamos um processo que chamamos de integração indefinida ou antidiferenciação, logo se integrarmos uma função temos por resultado a sua integral indefinida (antiderivada). Contudo, é importante salientar que *Newton* fez muito mais que desenvolver regras para a diferenciação e a integração, ele reconheceu que existe uma ligação entre a área e a antidiferenciação, fato este que não é uma mera coincidência “[...]Ele percebeu, em outras palavras, que os dois problemas fundamentais do cálculo, o problema da tangente e o problema da área, eram problemas inversos. Este é o ponto principal do cálculo diferencial e integral.” (MAOR, 2019, pág. 108)

Para entendermos melhor como foi essa percepção *Newtoniana*, vamos a um exemplo. Seja uma função $A(t)$, e escolhamos convenientemente a letra A , pois ela vai se tratar da área sob o gráfico de uma certa função $f(x)$, de um valor fixado de x , digamos que $x = a$, até algum valor variável $x = t$, conforme a figura a seguir:

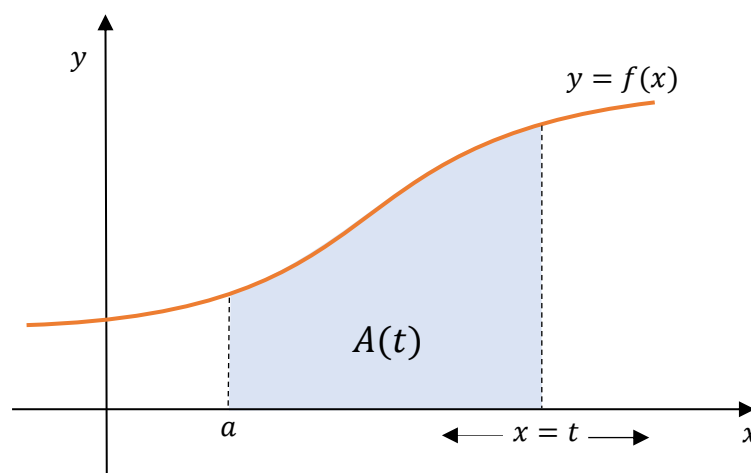


Figura 26: Gráfico de uma $f(x)$ e sua antiderivada $A(t)$.
Fonte: o autor

Então, $A(t)$ define a variação da área sob uma função, pois podemos mover $x = t$, para a direita ou esquerda, variando também a área a cada nova decisão para t , ou seja, a taxa

no portão foram ouvidas, e Briggs fora conduzido aos aposentos de Napier. Por quase vinte e cinco minutos ficaram sem dizer palavra um para o outro, e por fim Briggs disse ter empreendido a longa viagem para conhecer o nobre escocês e saber por qual engenho ou arte ele havia sido o primeiro a dar essa ajuda à astronomia, e que os logaritmos, agora conhecidos, se revelavam muito práticos. Dessa reunião, ambos concordaram que era melhor alterar as tábuas para que o logaritmo de 1 fosse 0, e o logaritmo do seno inteiro fosse 10.000.000.000, nascendo assim os logaritmos de Briggs, os mesmos dos dias atuais. A grande vantagem do novo sistema era que a progressão podia ser ajustada à base 10 do nosso sistema de numeração. Naturalmente, pode-se tomar qualquer número real maior do que 0 e, logicamente, diferente de 1, mas para cada base seria necessário uma tabela diferente, o que causaria muito trabalho. Briggs, então, começou o árduo trabalho de elaborar tábuas sobre o novo plano. Napier morreu com a satisfação de ter encontrado em Briggs um habilidoso amigo capaz de continuar seu trabalho. Briggs publicou em 1624 logaritmos de 1 até 20000 e 90000 de 100000 até com até 14 casas decimais no livro *Arithmetica logarithmica*. Não se sabe o porquê dessa lacuna entre 20000 e 90000 e que Briggs deixou, mas ela veio a ser preenchida por Adriano Vlacq (1600 – 1670). (GAMBERA, 2012)

de mudança da função da área com relação a t é igual, em cada ponto $x = t$, ao valor da função original nesse ponto.

Agora, em termos modernos, temos que a derivada de $A(t)$ é igual a $f(t)$, o que implica que $A(t)$ é a antiderivada de $f(t)$, logo, se quisermos encontrar a área abaixo de $y = f(x)$, é necessário determinar uma antiderivada de $f(x)$, onde é preciso substituir a variável t por x . É dessa maneira que os dois processos (encontrar a área e determinar a derivada) são o inverso um do outro. (MAOR, 2019)

Atualmente essa relação inversa entre esses dois processos é dada por meio do Teorema Fundamental do Cálculo, contudo “[...] *Newton* não fez uma demonstração formal do Teorema Fundamental, mas compreendeu plenamente a sua essência. A descoberta de *Newton* fundiu os dois ramos do cálculo antes considerados como assuntos distintos e não relacionados num único campo unificado.” (MAOR, 2019, pág. 108) Mesmo o inglês não realizando tal demonstração, esta será realizada no próximo capítulo desta dissertação, abrangendo os seus dois casos.

E toda essa percepção do cálculo fora anotada em rascunhos no ano de 1666 na qual intitulou “*Te October 1666 Tract on Fluxions*”, onde *Newton* desenvolve o problema das fluxões e na proposição seguinte trata do problema inverso das tangentes. Seguido das proposições se encontra o que hoje se consideraria uma tabela de integrais. (VILLATE, 2022). E lá ele descreve que o método de fluxões e fluentes é uma

série de regras para analisar e resolver, com o auxílio da álgebra, problemas relativos às curvas geométricas. Foi a resposta para algumas das grandes questões dos matemáticos da época — por exemplo, como achar a tangente (ou a inclinação) de uma curva em qualquer ponto dado, e como calcular quadraturas, as áreas sob curvas. (BARDI, 2006, pág. 51)

Newton trabalhou por meses o desenvolvimento de explicações e exemplos, inventando um método geral com diversas sugestões para solucionar problemas oriundos do movimento. E finalmente, em outubro de 1666, ele escreveu um panfleto de 48 páginas, descrevendo oito proposições com o seguinte título: “Para resolver problemas resultantes do movimento, as proposições seguintes são suficientes”. Este continha 12 problemas que seu método analítico resolveria utilizando a álgebra, neste artigo foram incluídos problemas de como traçar tangentes a curvas ou a taxa de variação instantânea (derivadas) em qualquer ponto ao longo da curva; obter os pontos de maior curvatura; determinar o comprimento de curvas; calcular a área sob uma curva (integral) ou até mesmo entre curvas.

Foi a partir do método de *Newton* que se pode expandir a solução para uma família maior de curvas, em 1666 em seus escritos parte de um problema particular de outro trabalho

de 1665. O “método de séries aproximadas” é o método de série de expansão que utiliza divisão e extração de raízes que chega ao processo do que *Newton* chama de equações finitas e expressando certas curvas localmente em termos de potência de séries de frações infinitas, que *Newton* chamou de “equações infinitas”. (GUICCIARDINI, 2009)

Depois de todas essas descobertas, *Newton* era outro homem, e sua felicidade era imensurável quando retornou a *Cambridge* em 1667. E mal sabia ele que *Leibniz* também faria as mesmas descobertas uma década depois, porém em 1667, por incrível que pareça, *Leibniz* não sabia quase nada de Matemática.

Retornando a *Cambridge*, mais precisamente em 2 de outubro de 1667, *Newton* recebeu o título de mestre e tornou-se *Fellow do Trinity College*. Em 1669, estudou com afinco os trabalhos de um matemático e professor de *Cambridge Isaac Barrow*, e ambos se tornaram amigos. Nesse mesmo ano *Newton* herdou a cátedra de *Barrow* na universidade, e sua fama e remuneração aumentaram bastante. *Barrow* foi decisivo para a ascensão de *Newton*, estreitando ainda mais os laços de amizade deles.

As próximas versões são refinamentos dos trabalhos preliminares, e na versão de 1704 ele dá mais importância a outras teorias e descobertas que sua versão do que é hoje conhecida como o Teorema Fundamental do Cálculo. (VILLATE, 2022) Contudo, *Newton* não chegou a publicar seus trabalhos a respeito do Cálculo, ou seja, todos seus pares, entre os anos de 1660 e 1670, não tiveram o privilégio de prestigiar seu método revolucionário. Alguns destes trabalhos são o *De Analysisi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* (“Sobre a análise por meio de equações tendo um número infinito de termos”). É importante salientar que este manuscrito terá um papel fundamental na guerra do Cálculo, pois será uma prova cabal que ele havia desenvolvido o Cálculo anteriormente a *Leibniz*. Outro trabalho foi em 1671 *Tractatus de Methodis Serierum et Fluxionum* (“Sobre a análise por meio de equações tendo um número infinito de termos”).

2.8.2. Desenvolvimento do Teorema Fundamental do Cálculo por *Leibniz*

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) nasceu em *Leipzig*, na Alemanha, numa família cujo pai era um professor de Ética e vice-presidente da Universidade de *Leipzig*, e sua mãe, filha de um advogado. Infelizmente seu pai falece em 1652, quando *Leibniz* tinha apenas seis anos. Desde a tenra infância o pequeno alemão já mostrava uma inteligência fora de série, já se interessando pela leitura de alto nível em sua escola primária, fato este descoberto quando *Leibniz* queria ler livros da biblioteca destinado a curso de nível superior, que curiosamente o seu pai tinha deixado para a própria biblioteca da Universidade de *Leipzig*.

Leibniz seguiu os passos do pai, e estudou Filosofia Acadêmica e Leis na Universidade de *Leipzig*, concluindo seu mestrado aos 17 anos com o título de *Principio Individui* (“Sobre o princípio do Indivíduo”). Foi motivo de orgulho para seu mentor, *Jacob Thomasius*, declarando publicamente que, apesar de se tratar de apenas um adolescente, o discente tem a capacidade de investigar qualquer coisa. Acabou se tornando um dos pensadores mais sublimes de sua época, contribuindo para o avanço de diversas áreas da ciência, tais como: Medicina, Filosofia, Geologia, Legislação, Física, e, é claro, Matemática.

O mais contraditório de tudo isso é que a Matemática não era o interesse principal de *Leibniz* no início de sua carreira, só despertando seu entusiasmo por ela quando já tinha quase 30 anos. Na verdade, ele encarava todas as ideias e descobertas humanas sendo apenas uma combinação de um pequeno número de elementos simples e básicos. Ele queria criar um sistema universal que relacionaria tais ideias para facilitar seu entendimento do mundo, e tal pensamento foi tese de seu doutorado sob título de *Dissertatio de Arte Combinatori* (Dissertação sobre a arte combinatória), onde ele descrevia um alfabeto *A characteristic universalis*, ou alfabeto do pensamento humano.

E foi nessa busca de encontrar um alfabeto do raciocínio humano que levou *Leibniz* a desenvolver o cálculo, mesmo não entendendo, até então, o suficiente de Matemática para tal. Foi nessa dissertação que *Leibniz* abriu a mente na busca de satisfazer seu entendimento sobre diferentes áreas do conhecimento, e nada mais empolgante que o Cálculo para preencher essa necessidade, pois ele é um “conjunto de conhecimentos que trata da análise de geometria e números, e para *Leibniz* este era um exemplo de um sistema lógico maior para analisar toda a sua *characteristica universalis*”. (BARDI, 2006, pág. 68).

Foi na França, numa missão de impedir uma guerra entre os alemães e franceses, que o jovem alemão despertou seu desejo pela Matemática. Como estava entre a nobreza da França, *Leibniz* teve acesso a uma das maiores mentes vivas de sua contemporaneidade: o físico e matemático holandês *Christian Huygens*. *Huygens* era excelente no que fazia, prova disso é que mesmo sendo holandês, era o principal membro da *Académie des Sciences*, mesmo em um país tão xenófobo como a França daquela época.

Huygens e *Leibniz* tornaram-se grandes amigos, e com ele o alemão se inspirou para estudar Matemática profundamente, e exemplo disso foi quando o holandês propôs que ele resolvesse a soma da sequência: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} \dots$ e rapidamente *Leibniz* chegou à solução que é 2.

Vendo o talento de *Leibniz*, *Huygens* foi indicando livros para ele, sendo um deles o

Arithmetica Infinitorum, de *John Wallis*, que tanto havia inspirado *Newton* poucos anos antes. Outro livro importante foi do matemático jesuíta belga *Gregory St. Vincent* (1584 – 1667), que abordava a soma de um número de infinitos de retângulo infinitamente delgados, o que já sinalizava o Cálculo Integral, na aplicação de um conjunto de truques algébricos para somar todos esses minúsculos retângulos.

Leibniz também leu a obra de *Cavalieri* chamada *Geometria* de 1635, que mostra a ideia do indivisível, e que um cone tem um terço do volume do cilindro que se ajustaria em sua volta, e outras, tais como: René *Descartes*, Evangelista *Torricelli* (obra sobre como determinar áreas sob curvas parabólicas), *Pascal* (discutiu indivisíveis e infinitesimais), *John Hudde* (falou da regra para a construção de tangentes), *Sluse* etc. O alemão foi gostando tanto de Matemática que começou a produzir trabalhos originais, e em quatro anos passou de um advogado leigo em Matemática para um profundo conhecedor dessa disciplina.

Com tantos estudos *Leibniz* chegou a desenvolver um método usando uma série de números racionais que solucionava um problema que incomodava seus contemporâneos: a quadratura do círculo, ou seja, achar um quadrado com a mesma área de um círculo, que foi bem elogiada por *Huygens*.

E não terminava por aí, *Leibniz* perceberia que poderia combinar os trabalhos de *Pascal* (infinitesimais) e *Sluse* (regra das tangentes) e aplicar sobre qualquer curva geométrica, e não somente, ao círculo, levando-o ao desenvolvimento do Cálculo.

Mas como *Leibniz* conseguiu compilar toda essa teoria Matemática dessa vasta bibliografia e chegar nas suas ideias sobre o cálculo? Para responder essa pergunta precisamos deixar claro que *Leibniz* tinha uma percepção de mundo diferente de seu contemporâneo inglês, tendo por consequência abordagens distintas sobre o cálculo. Enquanto *Newton* era físico e matemático, baseando seu ponto de vista em movimentos de partículas, *Leibniz* fundamentou sua Matemática com um toque mais filosófico, com viés mais abstrato. O alemão tinha forte pensamento algébrico, o que o influenciou a realizar incrementos, pequenos acréscimos nos valores das variáveis x e y , a qual deu o nome de diferenciais.

Observemos o uso dessa ideia para resolver o problema de achar uma reta tangente numa curva. Seja uma função $y = f(x)$ e um ponto $P(x; y)$ qualquer sobre ela conforme a figura:

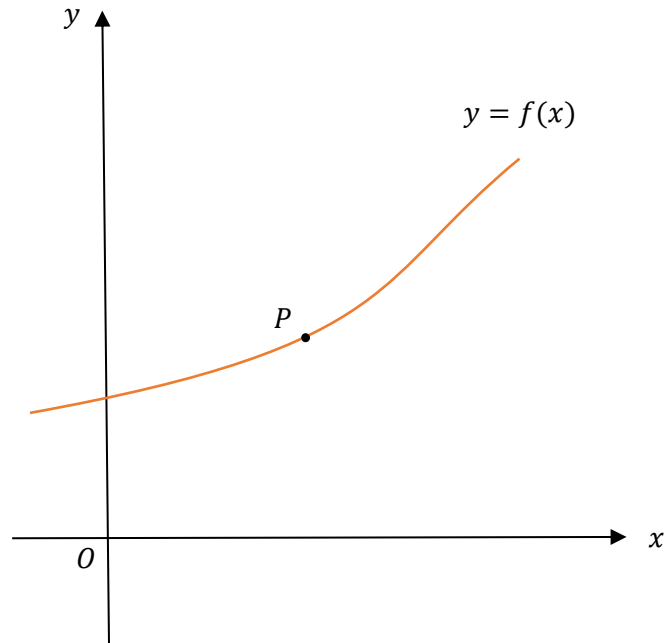


Figura 27: Função $f(x)$ e um ponto arbitrário P .
Fonte: o autor

Tracemos agora uma reta tangente ao ponto P , e destaquemos um ponto T vizinho ao ponto P contido na reta tangente.

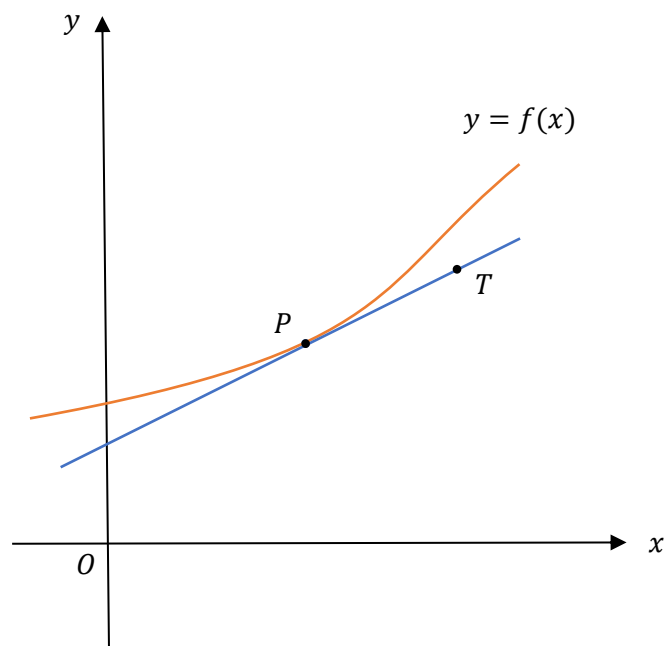


Figura 28: Uma reta tangente com os pontos P e T .
Fonte: o autor

Em seguida formemos o triângulo retângulo PRT , retângulo em R :

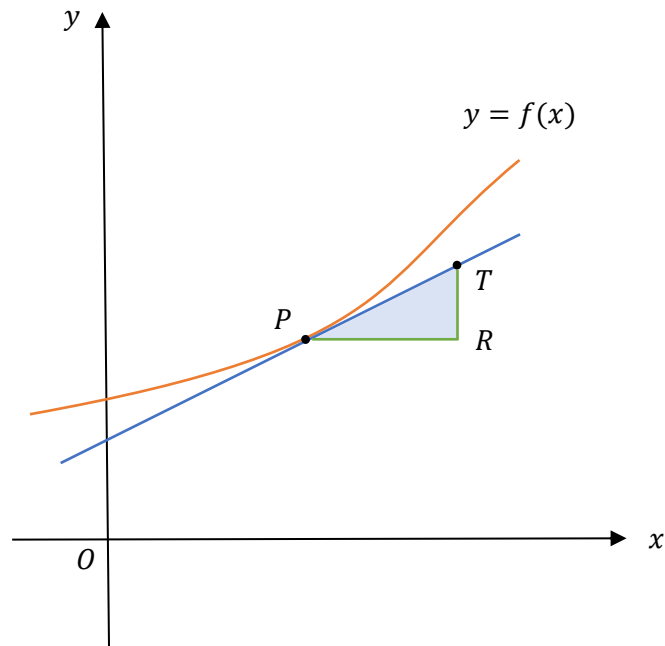


Figura 29: Triângulo característico PRT.
Fonte: o autor

Leibniz batizou esse triângulo como triângulo característico; onde seus catetos PR e RT são os referidos incrementos nas coordenadas x e y quando nos deslocamos de P para T . O alemão chamou tais incrementos de dx e dy respectivamente conforme a figura.

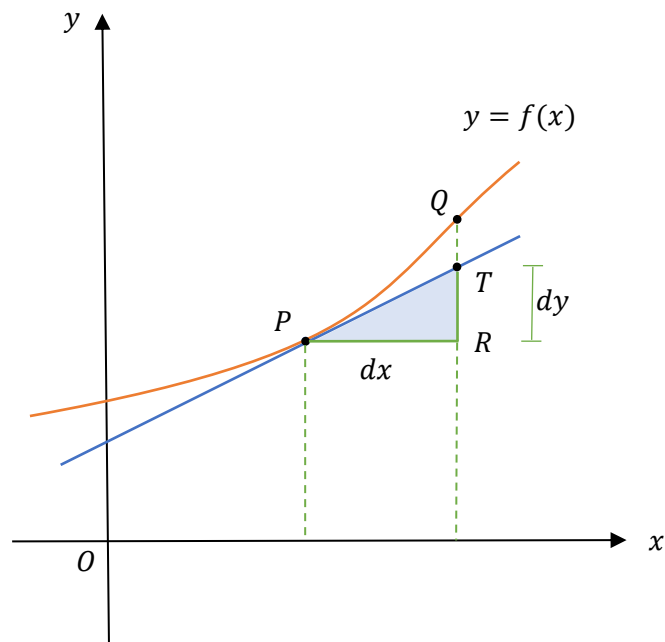


Figura 30: Catetos do triângulo característico são dx e dy .
Fonte: o autor

A abstração de *Leibniz* começou a ficar mais evidente quando ele argumenta que dx e dy eram suficientemente pequenos, fazendo que a linha tangente ao gráfico no ponto P seria praticamente idêntica ao próprio gráfico na vizinhança de P . Em outras palavras, o segmento \overline{PT} quase coincidirá com o segmento “curvo” \overline{PQ} (MAOR, 2019).

Agora, para resolver de fato o problema da reta tangente, ou seja, achar a inclinação da reta tangente passando por P , precisamos encontrar a proporção altura-largura do triângulo característico, ou melhor: $\frac{dy}{dx}$. E para *Leibniz* isso tinha um significado muito mais profundo, pois como dx e dy são quantidades “infinitamente pequenas”, “sua relação representa não apenas a inclinação da linha tangente a P , mas também a inclinação do gráfico em P . A proporção $\frac{dy}{dx}$ é, portanto, o equivalente de *Leibniz* para a fluxão de *Newton* ou taxa de mudança da curva.” (MAOR, 2019, pág. 116) Fato este que Bonfim (2017) também corrobora quando cita que

A concepção de diferencial de *Leibniz* era de uma diferença entre dois valores infinitamente próximos de uma variável, diferente da ideia central do cálculo de *Newton* que era a taxa de variação (velocidade ou fluxos). Os fluxos de *Newton* são as diferenciais de *Leibniz*. (BONFIM, 2017, pág. 82)

Além disso, para o alemão os conceitos de fração e razão eram diferentes. Para ele a fração “era uma divisão de dois números, logo, era uma quantidade obtida pela divisão de duas quantidades [...] A quantidade de uma razão pode ser expressa por uma fração, mas a razão em si é uma relação independente dos termos que a compõem.” (ROQUE, 2012, pág. 361)

Ainda de acordo com Roque (2012):

Não se trata, portanto, da divisão infundada de duas quantidades infinitamente pequenas dy e dx , mas de uma relação cujo estatuto é independente do estatuto dos termos que a compõem. Mesmo não sendo uma quantidade, essa relação pode ser expressa por uma função, que é o que acontece quando escrevemos $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. *Leibniz* não chegou a enunciar desse modo, pois não propôs um conceito de função. Pode-se argumentar, no entanto, que ele já admitia que as quantidades devem estar em relação. Esta conclusão sugere que não é relevante investigar a justificativa dos infinitesimais, sendo mais instrutivo ressaltar que eles sempre aparecem em relação. [...] As diferenciais dx e dy seriam infinitesimais não relacionadas. Mas, concretamente, *Leibniz* precisava de um cálculo diferencial sem diferenciais, operando sobre as relações entre essas diferenciais, relações consideradas autônomas e submetidas a regras próprias. A relação entre duas diferenciais não é uma dx diferencial; é resultado de uma operação de diferenciação (e as derivadas de ordens superiores resultarão da mesma operação reiterada). Logo, essa relação não pode ser entendida como um quociente entre duas quantidades infinitamente pequenas, não atribuíveis ou evanescentes, o que seria contraditório com a impossibilidade de dividir 0 por 0.[...] A riqueza da notação proposta por *Leibniz* é justamente ter introduzido o operador “ d ”, separando-o, ao mesmo tempo, da quantidade x à qual ele se relaciona e indicando a ligação com essa quantidade (ROQUE, 2012, pág. 362).

Só que, mesmo com esse embasamento, existia um problema vital no argumento de *Leibniz* referente ao gráfico: a linha tangente não é exatamente a linha curva citada na vizinhança do ponto P , ou seja, as duas não são coincidentes. Elas só se coincidiriam se os pontos P e T também coincidisse, o que tornaria o triângulo característico um único ponto, por sua vez implicando que dx e dy tivessem comprimento igual a zero, e assim a proporção deles

se tornaria uma expressão indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$. Atualmente, superamos esta situação por meio de limites, fato este que falaremos mais à frente.

Voltando ao gráfico, observe os pontos P e Q pertencentes à $f(x)$. Agora chamemos \overline{PR} e \overline{RQ} de Δx e Δy respectivamente, onde PRQ forma uma figura semelhante a um triângulo.

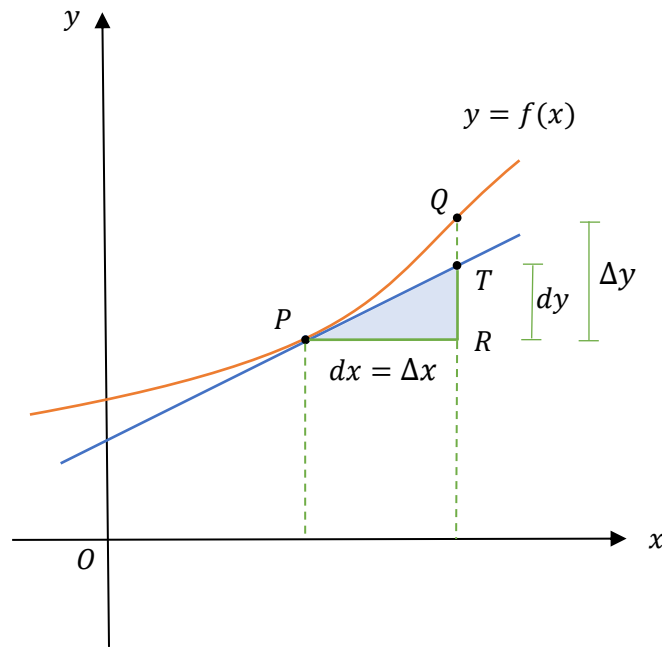


Figura 31: Diferença entre dx , dy , Δx e Δy .
Fonte: MAOR, 2019, pág 115.

Perceba que Δx é igual a dx , entretanto Δy é levemente maior que dy , isso se justifica pelo fato que o ponto Q está acima do ponto T . Dessa forma, a proporção altura-comprimento na $f(x)$ entre os pontos P e Q é $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Por fim, ao induzirmos que Δx e Δy se aproximem de 0, perceberemos que essa proporção se aproximará de um determinado limite, e a ele chamamos em nossos dias de $\frac{dy}{dx}$. Algebricamente, podemos escrever:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Para resumir:

O que *Leibniz* chamou de $\frac{dy}{dx}$ e pensou como uma proporção entre dois pequenos acréscimos, escreve-se hoje em dia como $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Geometricamente, a proporção $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ - chamada de quociente diferencial - é a inclinação da linha secante entre P e Q [...]. À medida que Δx se aproxima de 0, o ponto Q se move para trás em direção a P ao longo do gráfico, fazendo com que a linha secante gire levemente até que, no limite, ela coincidirá com a linha tangente. E é a inclinação desta última que nós representamos por $\frac{dy}{dx}$ e chamamos de derivada de y em relação a x . (MAOR, 2019, pág. 116)

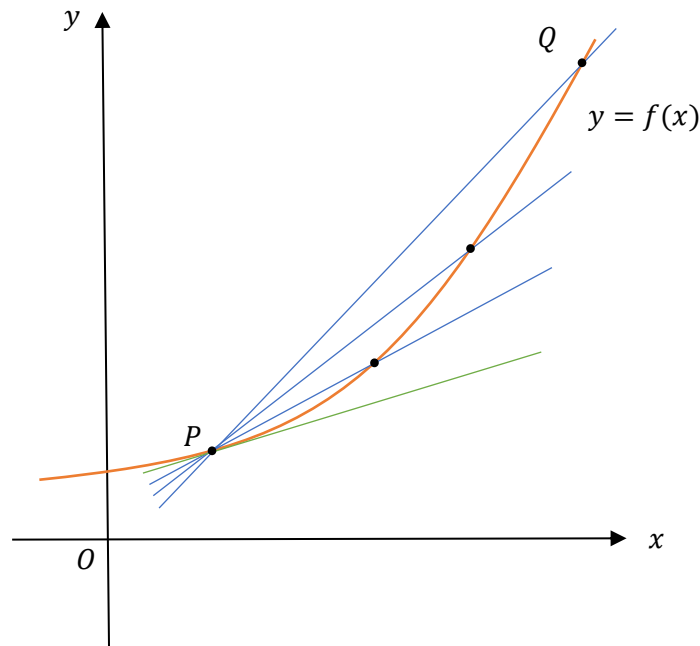


Figura 32: Aproximação da reta tangente por meio de secantes.
Fonte: MAOR, 2019, pág 117.

Até esse ponto, tanto *Newton* como *Leibniz* estavam sendo submetidos à inúmeras críticas de todos os lados, porque as pessoas não estavam entendendo o conceito dos infinitesimais, conceito este que os dois precisavam explicar para sustentar suas ideias sobre o cálculo, algo que eles mesmos, muitas vezes, não tinham total clareza.

Mas tanto *Newton* como *Leibniz* tinham respostas para tais objeções:

O primeiro empregou uma imagem física do intervalo fluindo para zero, mas na realidade sem chegar lá. A distância percorrida também flui para zero, assim como a velocidade média. O que importa, disse *Newton*, é para onde ela flui. Chegar lá é irrelevante. Então ele chamou seu método de "fluxões" – coisas que fluem. *Leibniz* preferiu tratar o intervalo de tempo como um infinitesimal, querendo dizer com isso não uma grandeza fixa diferente de zero que pode ser tão pequena quanto se queira (o que não faz sentido lógico), mas uma grandeza variável diferente de zero que pode se tornar tão pequena quanto se queira. É praticamente o mesmo ponto de vista que de *Newton*. Tirando ou pondo alguma precisão na terminologia, é o mesmo ponto de vista que usamos hoje, conhecido como "tendendo ao limite". Mas foram necessários vários séculos para desemaranhar tudo isso. É sutil. Mesmo hoje os alunos de graduação em Matemática levam algum tempo para se acostumar. (STEWART, 2019, pág. 80)

Dessa maneira, mesmo com tais argumentos, a comunidade científica não compreendia, e muitas vezes se recusava a compreender, que o limite entre as proporções de quantidades que tendam a zero era tão plausível quanto as proporções dessas mesmas quantidades finitas (ainda que muito pequenas), fato esse que abalava a confiança dos acadêmicos sobre as bases do cálculo. E esses questionamentos só seriam sanados no século XIX, quando o conceito de limite foi determinado com embasamento matemático robusto. (MAOR, 2019)

Para entendermos plenamente a visão do cálculo para *Leibniz*, façamos um exemplo de como o alemão derivaria a função $y = x^2$, utilizando a notação moderna. Primeiramente, vamos acrescentar uma quantidade Δx em x , e tal aumento corresponde em y da seguinte forma:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 \Rightarrow \Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

Dessa forma o coeficiente diferencial $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ será:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Agora, se tendermos Δx a zero, então $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tenderá à $2x$, e esta última expressão que denominamos como $\frac{dy}{dx}$. Esse resultado pode ser generalizado da seguinte forma:

$$\text{Se } y = x^n (n \in \mathbb{Q}) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

Observe que essa conclusão é igual à que *Newton* obteve por seu método de fluxões.

Isto posto, *Leibniz* continuou trabalhando em seus conceitos, deduzindo regras gerais para que possamos operar derivadas $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ com diversas combinações de funções. Tais regras atualmente denominamos como regras de diferenciação, o que são amplamente estudadas em qualquer curso padrão de cálculo. Façamos agora um resumo utilizando a notação moderna:

- 1) Ao derivarmos uma constante isso resultará em 0. Ou seja, é uma consequência referente ao fato de que a inclinação do gráfico de uma função constante, que é uma linha reta, tem inclinação zero, independente do ponto que analisemos.
- 2) Ao fazermos o produto de uma função por uma constante, somente será necessário realizar a diferenciação da função, e em seguida multiplicar esse resultado pela constante. A simbologia para esse procedimento fica assim: $y = ku$, onde $u = f(x)$, então $dy/dx = k(du/dx)$.
- 3) Ao efetuarmos a adição entre duas funções $u = f(x)$, e $v = g(x)$, a derivada dessa soma será igual à adição das derivadas dessas funções realizadas de forma individual. Em se tratando da simbologia, ela fica da seguinte forma: se $y = u + v$ então, $dy/dx = du/dx + dv/dx$.
- 4) Seja y o resultado da multiplicação de duas funções, temos que $y = uv$, então $dy/dx = u(dv/dx) + v(du/dx)$. Uma regra ligeiramente mais intrincada é aplicável à divisão de duas funções.
- 5) Consideremos que y é uma função de uma variável x , e que x é uma função de outra variável t (por exemplo, tempo); em termos simbólicos, podemos escrever $y = f(x)$ e $x = g(t)$. Isso implica que y é uma função indireta, ou uma função composta de

$y = f(x) = f[g(t)]$. Assim, a derivada de y em relação a t é possível ser encontrada realizando o produto entre as derivadas das duas funções componentes: $dy/dt = (dy/dx) \cdot (dx/dt)$. Essa é a renomada “regra da cadeia”. A princípio, parece ser apenas a regra comum de cancelamento de frações, mas é importante lembrar que as “proporções” dy/dx e dx/dt são, na verdade, os limites das proporções, obtidos quando o numerador e o denominador de cada uma tendem para zero. A regra da cadeia demonstra a grande utilidade da notação de *Leibniz*: podemos manipular o símbolo dy/dx como se fosse de fato uma relação entre duas quantidades. Em comparação à simbologia de Newton, a do inglês não tem o mesmo poder sugestivo. (MAOR, 2019)

Além do estudo das derivadas, *Leibniz* também concentrou esforços na resolução de problemas que envolvem achar áreas abaixo de curvas, as chamadas integrais. Só que, diferentemente de *Newton*, que notou rapidamente que a integração e a diferenciação são operações inversas (sabendo uma fluxão, encontre o fluente), o alemão não captou isso de imediato. Primeiro ele se referiu ao problema da seguinte maneira: sabendo uma função $y = f(x)$, calcule a região sob a curva de $f(x)$ começando de um ponto fixo em x , por exemplo, $x = a$, até um ponto variável $x = t$.

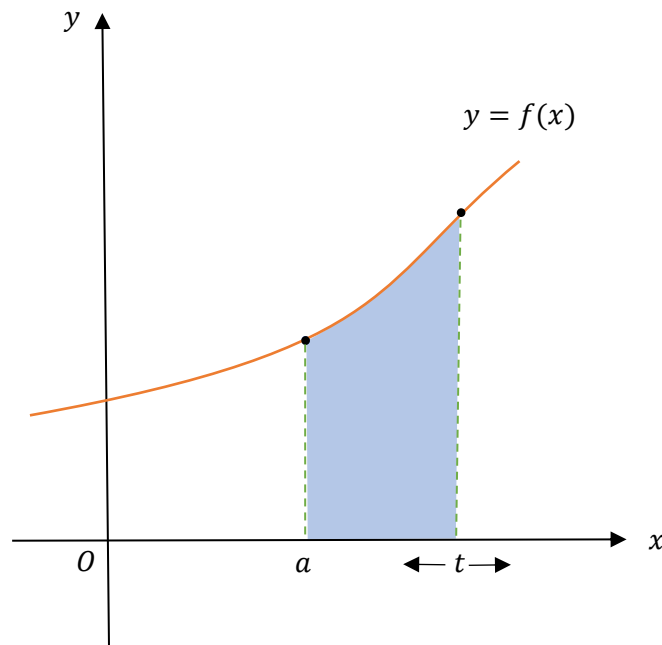


Figura 33: Integral por meio do método de *Leibniz*.
Fonte: o autor.

Para conseguir calcular essa área, o alemão teve a ideia de reparti-la em diversas barras estreitas, cada uma delas de largura dx e alturas y , sendo cada altura dependendo de x ,

conforme a figura. A partir da soma das áreas dessas faixas, ele conseguiria encontrar a área total abaixo da curva $f(x)$. Ou seja,

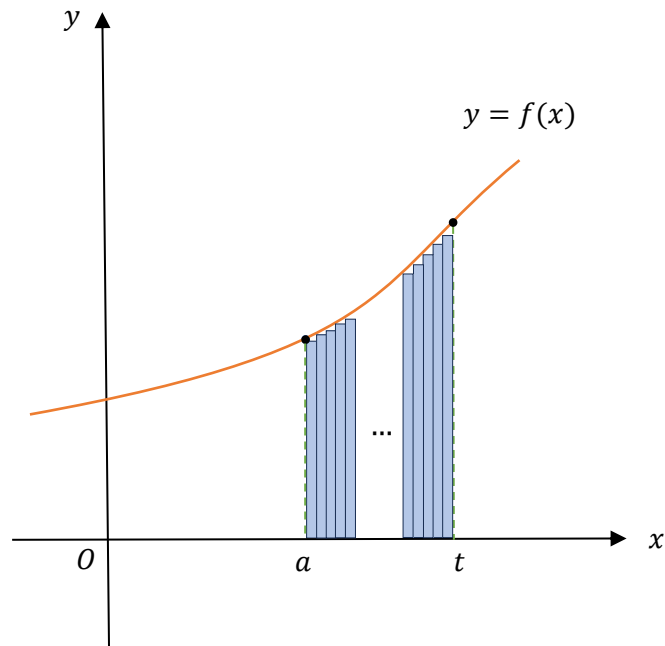


Figura 34: Área encontrada por meio de partições.
Fonte: o autor

Contudo,

Normalmente supõe-se que os dx 's sejam iguais entre si (ordenadas equidistantes) mas isso não é necessário. Se na figura todos os dx 's forem iguais, os dy 's serão diferentes (caso contrário a curva seria uma reta). Assim, quando tratarmos de curvas, os dx 's e os dy 's, não ambos, poderão ser iguais. Isso depende do que é natural e útil no problema que está sendo tratado. Isso significa que as próprias diferenciais são variáveis; elas dependem do local da curva onde estão situadas. (BOMFIM, 2017, pág. 84)

E para fazer estes cálculos, *Leibniz* também desenvolveu uma notação própria, que se mostrou muito melhor do que a idealizada por seu rival inglês, tanto que é verdade que nos dias de hoje a simbologia do alemão é imensamente utilizada.

Seu símbolo para a antiderivada de uma função $y = f(x)$ é $\int y dx$, onde o \int alongado é chamado de integral (indefinida) (o dx indica meramente que a variável de integração é x). Por exemplo, $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$, como pode ser verificado diferenciando o resultado. A constante somada c provém do fato de que qualquer função dada tem um número infinito de antiderivada, obtidas a partir da adição de uma constante arbitrária, [...] daí o nome de integral “indefinida”. (MAOR, 2019, pág. 119)

Dessa maneira, ao somar as áreas das diversas faixas, *Leibniz* notou que teria a área total sob o gráfico, denotando da seguinte forma:

$$A = \int y dx$$

Podemos perceber o quanto o alemão foi muito perspicaz ao desenvolver sua notação, pois em primeiro lugar ele vinculou à uma

[...] ideia de uma linguagem simbólica universal. Segundo, pelo reconhecimento de que somar sequências e tomar as suas diferenças são operações inversas e que, semelhantemente, a determinação de áreas e a de tangentes são operações inversas, e terceiro, o triângulo característico e o seu uso para deduzir transformações gerais de áreas (por exemplo, a transmutação).

As principais etapas dos estudos de *Leibniz* na sua descoberta envolveram respectivamente o tratamento analítico das transformações de quadraturas mediante o simbolismo de *Cavalieri*, a introdução do novo símbolo \int , a introdução do símbolo d para operação inversa de \int e a exploração das regras para $\int e dx$.

Pesquisas sobre o método de *Leibniz*, nos mostra que o uso das letras \int e d para a soma e a diferença indicam uma escolha consciente de um simbolismo que mostrasse a analogia entre o cálculo de somas e diferenças e entre o cálculo das áreas e das tangentes. A busca de regras operacionais para estes símbolos reforça que *Leibniz* procurava por símbolos que possibilitassem a tradução de argumentos (no caso os argumentos sobre as quadraturas e as tangentes) em cálculos com fórmulas. Essas foram as linhas principais da descoberta de *Leibniz* no período outubro-novembro de 1675. Os manuscritos são datados de 25, 26 e 29 de outubro, 1 e 11 de novembro de 1675. Essas foram ideias iniciais de *Leibniz* mais tarde aperfeiçoadas até um sistema consistente. (BOMFIM, 2017, pág. 84)

E isso também é endossado por Eves que cita que

Leibniz inventou o seu cálculo entre 1673 e 1676. Usou pela primeira vez o símbolo de integral, um S alongado, derivado da primeira letra da palavra latina *summa* (soma) em 29 de outubro de 1675. O objetivo era indicar uma soma de indivisíveis. Algumas semanas depois ele já escrevia diferenciais e derivadas como o fazemos hoje, assim como escrevia $\int x dy$ e $\int y dx$ para integrais. Seu primeiro artigo sobre o cálculo diferencial só apareceu em 1684. Nele se define dx como um intervalo finito arbitrário e dy pela proporção $dy:dx = y: \text{subtangente}$ (EVES, 2011, pág. 443)

Só que, como vimos na seção dos precursores do cálculo, a concepção de somar uma grande quantidade de formas pequenas para a determinação da área de uma certa figura vem desde os gregos antigos, chegando até *Fermat*, que utilizou com brilhantismo esse conceito para conseguir a quadratura da família de curvas $y = x^n$. Contudo, foi o Teorema Fundamental do Cálculo (que mostrou a relação inversa entre os processos de integração e diferenciação) que tornou o novo cálculo em uma ferramenta que revolucionou a Matemática.

Maor descreve com maestria os detalhes desse teorema, como também qual era seu objetivo:

O teorema envolve a área sob o gráfico de $f(x)$. Denotando esta área por $A(x)$ (porque ela é em si uma função de x), o teorema diz que a taxa de variação, ou derivada de $A(x)$, em cada ponto x é igual a $f(x)$; em símbolos escrevemos $dA/dx = f(x)$. Mas isto, por sua vez, implica que $A(x)$ é uma *antiderivada* de $f(x)$: $A(x) = \int f(x) dx$.

Essas duas relações inversas são o núcleo de todo o cálculo diferencial e integral. Em notação abreviada podemos escrevê-las como:

$$\frac{dA}{dx} = y \Leftrightarrow A = \int y dx.$$

Aqui o y é uma forma resumida de $f(x)$ e o símbolo \Leftrightarrow ("se, e somente se") significa que cada declaração implica na outra (isto é, as duas afirmações são equivalentes). *Newton* também chegou ao mesmo resultado, mas foi a notação superior de *Leibniz* que expressou a relação inversa entre diferenciação e integração (isto é, entre os problemas da tangente e da área) de modo tão claro e conciso. (MAOR, 2019, pág. 120)

E assim como ele fez com a diferenciação, *Leibniz*, elaborou um conjunto de regras formais para a integração. Podemos citar o exemplo, se $y = u + v$, onde u e v são funções em relação a variável x , isso implica que:

$$\int y dx = \int u dx + \int v dx$$

Analogamente, acontece para $y = u - v$. E da mesma forma que o resultado de uma subtração pode ser confirmado por meio da soma, essas regras podem ser verificadas diferenciando-se o resultado. Entretanto, não há regras gerais para a integração quando se trata do produto ou quociente de duas funções, tornando assim o processo de integração muito mais complexo que a diferenciação. (MAOR, 2019)

3. O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Depois da apresentação do contexto histórico e a evolução do cálculo no capítulo anterior é chegada a hora de detalhar, com caráter mais formal, como consiste a demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo. É importante dizer que o principal resultado desse teorema é fazer a relação entre a integração e a diferenciação como operações inversas, ou seja, “os problemas de cálculos de área sob um gráfico de uma função em um intervalo e o problema de construção de uma reta tangente num ponto da função estão interligados e podem ser resolvidos juntos.” (SILVA, 2019, pág.31),

E esse fato também é exposto por *Stewart* quando

o mentor de *Newton* em *Cambridge*, *Isaac Barrow* (1630 – 1677), descobriu que esses dois problemas estão, na verdade, estreitamente relacionados. Ele percebeu que a derivação e a integração são processos inversos. O Teorema Fundamental do Cálculo dá a relação inversa precisa entre a derivada e a integral. Foram *Newton* e *Leibniz* que exploraram essa relação e usaram-na para desenvolver o cálculo como um método matemático sistemático. Em particular, eles viram que o Teorema Fundamental os capacitava a calcular áreas e integrais muito mais facilmente, sem que fosse necessário calculá-las como limites de somas. (STEWART, 2016, pág. 347)

Dessa forma, o Teorema Fundamental do Cálculo representa uma ferramenta de grande importância na simplificação do cálculo de integrais. Ele substitui um processo anterior tedioso e pouco prático, baseado em limites de somas, por uma abordagem mais direta e poderosa. Este teorema é composto por duas partes, ambas convergindo para resultados numéricos equivalentes, porém com interpretações diferentes que reverberam em diversos campos da Matemática. Essas interpretações serão exploradas nos próximos tópicos.

3.1. Definições prévias

Para demonstrar as duas partes do Teorema Fundamental do Cálculo faz-se necessário definirmos alguns conceitos, como também enunciar alguns teoremas que serão essenciais no decorrer da demonstração.

3.1.1. Função Contínua

Dizemos que uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}, X \subset \mathbb{R}$, é contínua em um determinado ponto $x_0 \in X$, quando a seguinte condição for atendida: seja $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ tal que (NETO, 2022):

$$x \in X, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Para elucidar essa ideia, observe a seguinte situação com a função f a seguir:

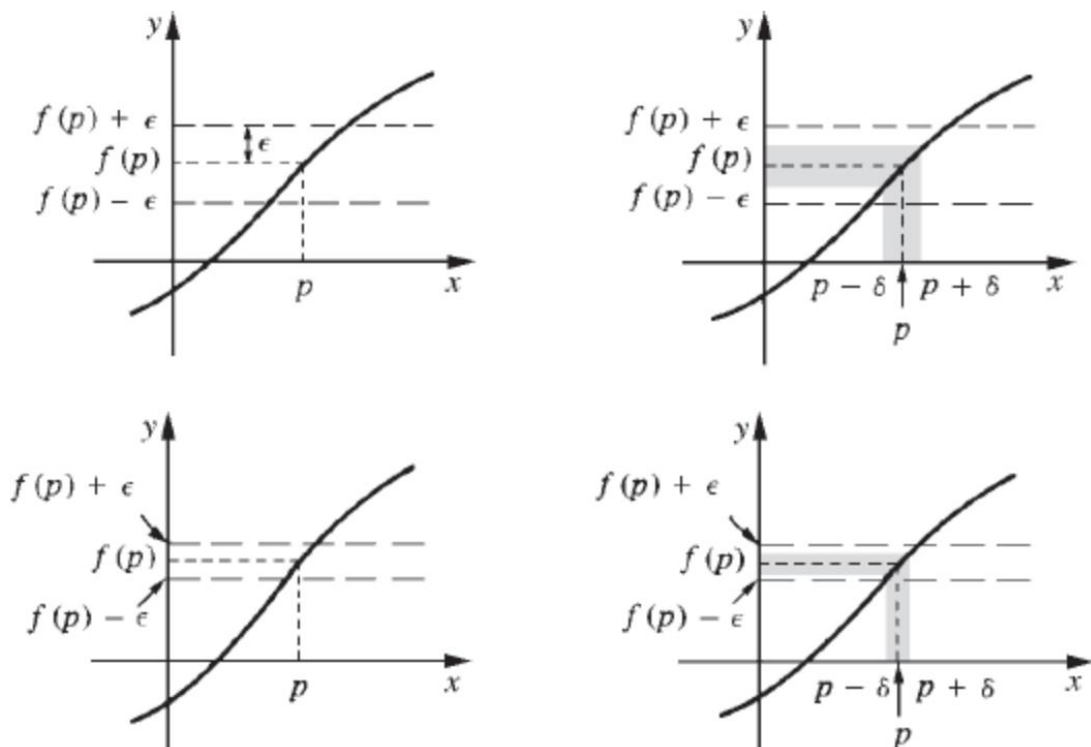


Figura 35: Análise da continuidade da função f .

Fonte: Guidorizzi, pág. 60

Podemos observar que a função em questão obedece a propriedade de Neto (2022) no ponto p , em que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, e que δ dependa de ε , de tal forma que $f(x)$ mantém-se no intervalo $(f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon)$ quando x movimentar-se no intervalo $]p - \delta, p + \delta[$, com x no domínio de f .

3.1.2. Limite de funções

Para que o conceito de limites tenha o rigor matemático necessário, comecemos com a definição de vizinhança: “Definição 3.1: Fixado $a \in \mathbb{R}$ uma vizinhança de a é um intervalo da forma $(a - r, a + r)$, onde r é um real positivo. Nesse caso, diremos que r é o raio da vizinhança $(a - r, a + r)$ e que todo $x \in (a - r, a + r)$ é uma aproximação de a com erro menor que r .” (NETO, 2022, pág. 114)

Tendo em mãos essa definição, tomemos um conjunto $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, e que $x_0 \in I$, e ainda $f: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada. A ideia é criar uma definição rigorosa ao ponto que seja possível fazer com que $f(x)$ se aproxime tanto quanto quisermos de um valor L , desde que escolhamos x do intervalo I próximo o suficiente (mas não igual) de x_0 . Para isso, é razoável exigir que, para cada vizinhança de L , podemos encontrar uma vizinhança correspondente de x_0 onde a função f mapeia os pontos dessa vizinhança em pontos próximos a L .

Uma vez estabelecida uma vizinhança de x_0 e conhecermos o seu raio, e

$$x \in (x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\} \Leftrightarrow 0 < |x - x_0| < r,$$

podemos resumir a discussão anterior na seguinte definição:

“Definição 3.2: Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $x_0 \in I$ e $f: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada. Dizemos que **f tem limite L quando x tende a x_0** , denotamos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, se para cada $\varepsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que $x \in I$ e $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.” (NETO, 2022, pág. 115)

E para elucidar essa definição, a figura a seguir sintetiza como é feita sua aplicação:

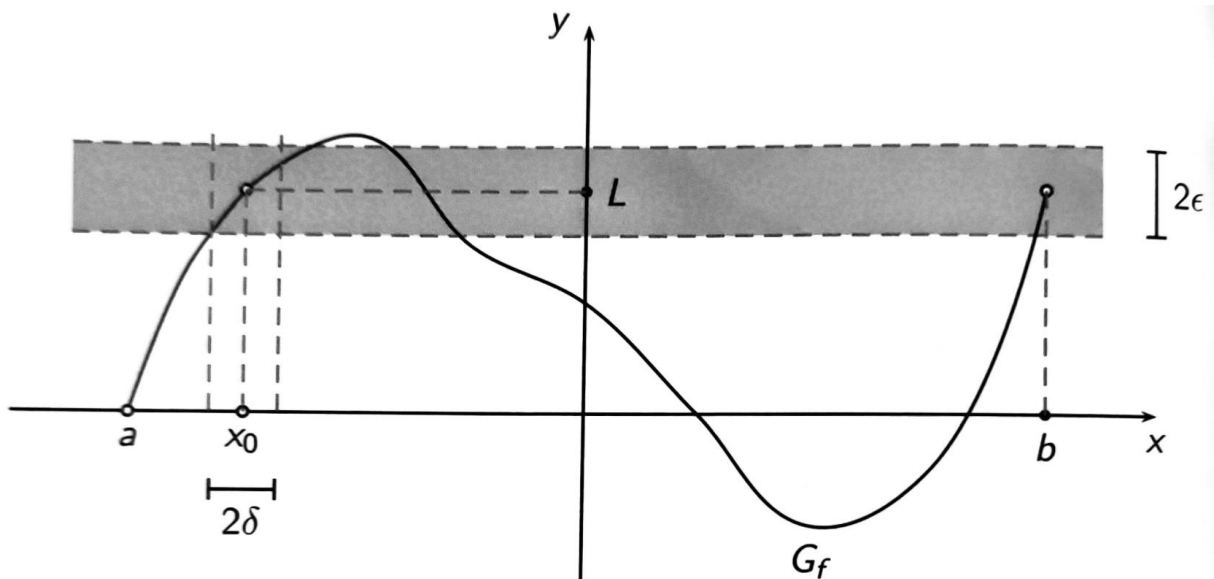


Figura 36: Limite de uma função em um ponto.
Fonte: Neto, 2022, pág. 116.

Assim, $x \in I$ e $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ ocorrerá quando, dado um $\varepsilon > 0$ para L , existir um erro $\delta > 0$ para x_0 de tal forma que as aproximações $x \neq x_0$ de x_0 no intervalo I tenham um erro menor que δ , e que elas correspondam a aproximações $f(x)$ de L que, por sua vez, tenham um erro menor que ε . Em termos geométricos, buscamos que, para cada valor de x que esteja no intervalo I e esteja suficientemente próximo de x_0 , mas não seja igual a x_0 , o ponto correspondente no gráfico da função f , com coordenada x , permaneça dentro da região cinza do plano (figura 36).

3.1.3. Derivada de uma função

Após consolidarmos adequadamente o conceito de limite, podemos explorar e compreender a derivada de uma função com mais profundidade. A derivada de uma função em um ponto é definida como o limite da taxa de variação média da função à medida que o intervalo

sobre o qual essa taxa é calculada se aproxima de zero. Baseado nisso, Neto (2022) define a derivada da seguinte forma:

“Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada. Fixado $x_0 \in I$, diremos que f é **derivável** em x_0 se existir o limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Nesse caso, tal limite será denominado a derivada de f em x_0 , sendo denominado por $f'(x_0)$.” (NETO, 2022, pág. 131)

3.1.4. Partição de um intervalo

Seja o intervalo $[a; b] \in \mathbb{R}$, dizemos que uma partição P desse intervalo é um subconjunto finito de pontos de $[a; b] \in \mathbb{R}$, ou seja, $P = \{x_0; x_1; x_2; \dots; x_n\} \subset [a; b]$ e que $a \in P$ e $b \in P$, onde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Chamaremos o intervalo $[x_{i-1}; x_i]$, cujo comprimento é $x_i - x_{i-1}$, de o i – éximo intervalo da partição P . E, em relação ao intervalo $[a; b] \in \mathbb{R}$, temos que $\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = b - a$ (LIMA, 2016).

3.1.5. Integral de Riemann

Baseada na definição de partições, tomemos as partições P e Q do intervalo $[a; b] \in \mathbb{R}$, dizemos que Q *refina* P quando $P \subset Q$. A forma mais fácil de refinar uma partição é adicionar um único ponto. Dessa forma, seja uma função limitada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, utilizaremos a seguinte notação:

$$m = \inf\{f(x); x \in [a, b]\} \text{ e } M = \sup\{f(x); x \in [a, b]\}.$$

Em especial, temos $m \leq f(x) \leq M$ para $\forall x \in [a, b]$. Se $P = \{x_0; x_1; x_2; \dots; x_n\}$ é uma partição de $[a, b]$, podemos dizer que as notações $m_i = \inf\{f(x); x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$, $M_i = \sup\{f(x); x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$ e $\omega_i = M_i - m_i$ vão indicar o ínfimo, o supremo e a oscilação de f no i – éximo intervalo de P respectivamente. Como estamos tratando de funções contínuas, temos que m_i e M_i são valores que efetivamente são assumidos por f no intervalo $[x_{i-1}; x_i]$.

Dessa forma, a soma inferior de f em relação à partição P é

$$s(f; P) = m_1(x_1 - x_0) + \dots + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}).$$

Já a soma superior de f em relação à partição P é

$$S(f; P) = M_1(x_1 - x_0) + \dots + M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}).$$

É facilmente perceptível que, $m(b - a) \leq s(f; P) \leq S(f; P) \leq M(b - a)$ para qualquer que seja a partição P . E ainda temos que, $S(f; P) - s(f; P) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x_i - x_{i-1})$.

Quando a função f estiver implicitamente entendida no contexto, é possível utilizar simplesmente $s(P)$ e $S(P)$ ao invés de $s(f; P)$ e $S(f; P)$ respectivamente.

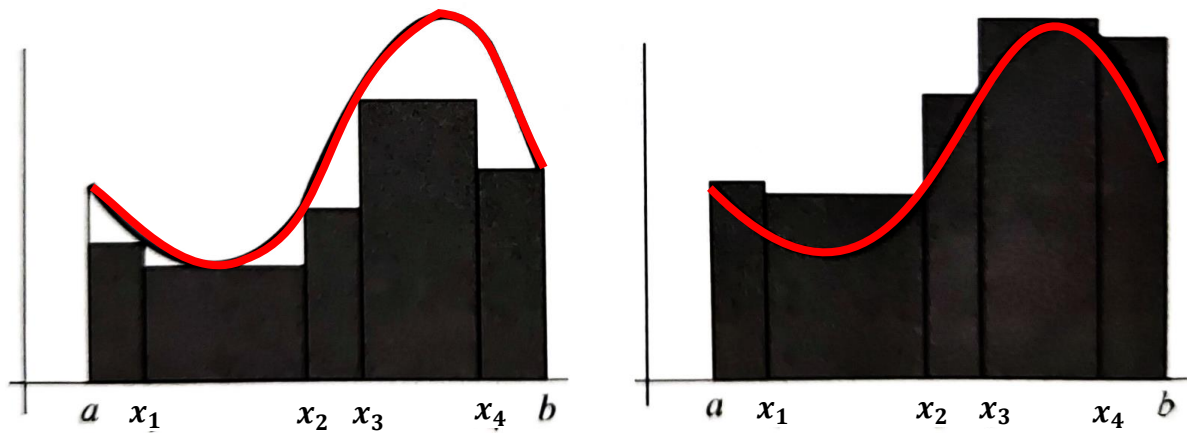


Figura 37: A soma inferior e a soma superior.
Fonte: Lima (2016, pág. 124)

Se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, então os números $s(f; P)$ e $S(f; P)$ são, respectivamente, aproximações por falta e por excesso da área delimitada pelo gráfico de f , pelo intervalo $[a, b]$ no eixo das abscissas e pelas linhas verticais traçadas nos pontos a e b deste eixo. Se $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b]$, então essas somas são aproximações dessa área, porém, com sinal invertido.

Dessa maneira, a integral inferior e a integral superior da função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são definidas, nessa ordem, por

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_P s(f; P), \quad \int_a^b f(x)dx = \inf_P S(f; P)$$

onde o *sup* e o *inf* precisam ser tomados relativamente a todas as partições P de $[a, b]$ (LIMA, 2016).

Para demonstrar os próximos teoremas faz-se necessário enunciar os seguintes lemas:

Lema 1: “Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in A$ e todo $y \in B$ se tenha $x \leq y$. Então $\sup A \leq \inf B$. A fim de ser $\sup A = \inf B$ é necessário e suficiente que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existam $x \in A$ e $y \in B$ com $y - x < \varepsilon$.” (LIMA, 2016, pág.121).

Lema 2: “Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos limitados e $c \in \mathbb{R}$. São também limitados os conjuntos $A + B = \{x + y; x \in A, y \in B\}$ e $c \cdot A = \{cx; x \in A\}$. Além disso, tem-se $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ e $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$, $\inf(c \cdot A) = c \cdot \inf(A)$, caso seja $c \geq 0$. Se $c < 0$ então $\sup(c \cdot A) = c \cdot \inf A$ e $\inf(c \cdot A) = c \cdot \sup A$ ”. (LIMA, 2016, pág.122).

Lema 3: “Sejam $A' \subset A$ e $B' \subset B$ conjuntos limitados de números reais. Se, para cada $a \in A$ e cada $b \in B$, existem $a' \in A'$ e $b' \in B'$ tais que $a \leq a'$ e $b' \leq b$, então $\sup A' = \sup A$ e $\inf B' = \inf B$.” (LIMA, 2016, pág.123).

Teorema 1: Quando se refina uma partição, a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta. Ou seja: $P \subset Q \Rightarrow s(f; P) \leq s(f; Q)$ e $S(f; Q) \leq S(f; P)$.

Demonstração: primeiramente, consideremos que a partição $Q = P \cup \{r\}$ seja resultado de P quando acrescentada de um único ponto r , e que $x_{j-1} < r < x_j$. Agora, suponha que m' e m'' , nessa ordem, sejam os ínfimos de f nos intervalos $[x_{j-1}, r]$ e $[r, x_j]$. Logo, temos que $m_j \leq m'$, $m_j \leq m''$, e $x_j - x_{j-1} = (x_j - r) + (r - x_{j-1})$. Assim

$$\begin{aligned} s(f; Q) - s(f; P) &= m''(x_j - r) + m'(r - x_{j-1}) - m_j(x_j - x_{j-1}) \\ &= (m'' - m_j)(x_j - r) + (m' - m_j)(r - x_{j-1}) \geq 0 \end{aligned}$$

Para generalizar, obtendo o resultado geral, de forma que Q resulta de P no acréscimo de k pontos, utiliza-se k vezes o que acabamos de provar. Da mesma forma, $P \subset Q \Rightarrow S(f; Q) \leq S(f; P)$. ■

Corolário 1: Para quaisquer partições P, Q do intervalo $[a, b]$ e qualquer função limitada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tem-se $s(f; P) \leq S(f; Q)$.

Demonstração: Uma consequência do Teorema 1, temos que a partição $P \cup Q$ refina ao mesmo tempo P e Q , portanto $s(f; P) \leq s(f; P \cup Q) \leq S(f; P \cup Q) \leq S(f; Q)$. ■

Corolário 2: Dada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, se $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$ então

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

Demonstração: as desigualdades das extremidades do corolário são triviais, e a central é consequência do Corolário 1 e do Lema 1 enunciado. ■

Corolário 3: Seja P_0 uma partição de $[a, b]$. Se considerarmos as somas $s(f; P)$ e $S(f; P)$ apenas relativas às partições P que refinam P_0 , obteremos os mesmos valores para $\int_a^b f(x) dx$ e $\int_a^b f(x) dx$.

Demonstração: Dessa maneira, bastamos combinar o Teorema 1 e o Lema 3 enunciado que o Corolário é demonstrado. ■

Assim, podemos dizer que uma função limitada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável quando sua integral inferior e superior são iguais. Esse valor é chamado de integral (de Riemann) de f , e usamos a seguinte notação para indicá-lo: $\int_a^b f(x) dx$. (LIMA, 2016).

Teorema 2 (Condição imediata de integrabilidade): Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. As seguintes afirmações são equivalentes: (LIMA, 2016)

- (1) f é integrável.
- (2) Para todo $\varepsilon > 0$, existem partições P, Q de $[a, b]$ tais que $S(f; Q) - s(f; P) < \varepsilon$.
- (3) Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que $S(f; Q) - s(f; P) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$.

Demonstração: Considere A o conjunto das somas inferiores e B o conjunto das somas superiores da função f . Através do Corolário 1 do Teorema 1, temos que $s \leq S \forall s \in A$ e $\forall S \in B$. Supondo que (1) seja verdadeiro, isso implica que $\sup A = \inf B$. Dessa forma, pelo Lema 1 enunciado, é possível deduzir que (1) \Rightarrow (2). Agora, para demonstrar que (2) \Rightarrow (3) é necessário só observar que se $S(f; Q) - s(f; P) < \varepsilon$ então, como a partição $P_0 = P \cup Q$ refina ambas P e Q , pelo Teorema 1 temos que $s(f; P) \leq s(f; P_0) \leq S(f; P_0) \leq S(f; Q)$, o que nos permite concluir que $S(f; Q) - s(f; P) < \varepsilon$. E por fim, (3) \Rightarrow (1), pelo Lema 1 enunciado. ■

Teorema 3: Seja $a < c < b$. A função limitada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, suas restrições $f|_{[a, c]}$ e $f|_{[c, b]}$ são integráveis. No caso afirmativo, tem-se

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (\text{LIMA, 2016}).$$

Demonstração: Considere A e B , nessa ordem, os conjuntos das somas inferiores de $f|_{[a, c]}$ e $f|_{[c, b]}$. Facilmente pode ser verificado que $A + B$ é o conjunto das somas inferiores de f em relação às partições de $[a, b]$ que possuem o ponto c . Através do Corolário 3 do Teorema 1, ao calcular a integral inferior de f , é somente necessário considerar as partições desse tipo, porque elas são as que refinam $P_0 = \{a, c, b\}$. Por meio do Lema 2 enunciado,

$$\int_a^b f(x)dx = \sup(A + B) = \sup A + \sup B = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

E usando o mesmo raciocínio, temos que:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Dessa forma,

$$\int_a^b f - \int_a^b f = \left(\int_a^c f - \int_a^c f \right) + \left(\int_c^b f - \int_c^b f \right)$$

Tendo em vista que as duas parcelas inseridas nos parênteses são maiores ou iguais a zero, sua soma será zero se, e somente se, elas forem ambas nulas. Dessa maneira, f é integrável se, e somente, suas restrições $f|_{[a, c]}$ e $f|_{[c, b]}$ o são. Sendo isso verdade, vale a igualdade $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. ■

Esse teorema pode ser generalizado, ou seja, ele ainda será válido não importando a ordem entre os pontos a, b, c . Então seja função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in I$, $[a, b] \in I$, e que, por definição seja:

- i. $\int_c^c f(x)dx = 0$;
- ii. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Para pontos que não sejam ordenados no conjunto I , isto é, não necessariamente $a < c < b$ ($a, b, c \in I$), temos os seguintes cenários:

- $c < a < b$:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \left(\int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx \right), \text{ pelo Teorema 3} \Rightarrow$$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \left(-\int_a^c f(x)dx + \int_a^b f(x)dx \right), \text{ pela definição ii} \Rightarrow$$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

- $a < b < c$:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \left(\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \right) + \int_c^b f(x)dx, \text{ pelo Teorema 3} \Rightarrow$$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \text{ pela definição ii} \Rightarrow$$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

- $c = a$ e $c = b$:

Para $c = a$, temos:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx = 0 + \int_a^b f(x)dx, \text{ pela definição } i \Rightarrow$$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Para $c = b$, temos:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + 0, \text{ pela definição } i \Rightarrow$$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Logo, fixado a e b , o c pode variar em qualquer local do domínio, independente de sua posição em relação ao $[a, b] \subset I$. Assim

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, c \in I.$$

Teorema 4: Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função constante, digamos $f(x) = c$ para todo $x \in [a, b]$, mostre que

$$\int_a^b f(x)dx = c(b - a). \text{ (NETO, 2022, pág. 215)}$$

Demonstração: Seja $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$, onde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, a função constante $f(x) = c$ é nos pontos desses subintervalos. Também seja a soma inferior $s(f; P)$ para a função f em relação à partição P definida como:

$$s(f; P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i,$$

onde $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ e $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

No caso de $f(x) = c$, temos $m_i = c$ para todos os i porque a função é constante.

Então,

$$s(f; P) = \sum_{i=1}^n c \Delta x_i = c \sum_{i=1}^n \Delta x_i.$$

Como $\sum_{i=1}^n \Delta x_i = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = b - a$,

$$s(f; P) = c(b - a).$$

E seja a soma superior para a função f em relação à partição P é definida como:

$$S(f; P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

onde $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

Como já demonstrado acima, $\sum_{i=1}^n \Delta x_i = b - a$,

$$S(f; P) = c(b - a)$$

Para qualquer partição P do intervalo $[a, b]$, tanto a soma inferior quanto a soma superior de f são iguais a $c(b - a)$:

$$s(f; P) = S(f; P) = c(b - a).$$

Portanto, a integral de f sobre $[a, b]$ é:

$$\int_a^b f(x) dx = c(b - a).$$

Logo, isso mostra que, para a função constante $f(x) = c$, a integral $[a, b]$ é igual a $c(b - a)$. ■

Teorema 5: Sejam $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integráveis. Então: (LIMA, 2016, pág. 128)

Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x) \leq \int_a^b g(x)$.

Demonstração: Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, isso implica que $s(f; P) \leq s(g; P)$ e $S(f; P) \leq S(g; P) \forall$ a partição P , donde $\int_a^b f(x) \leq \int_a^b g(x)$. ■

Teorema 6: Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável, então a função $|f|: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ também é integrável, e vale a desigualdade abaixo:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (\text{NETO, 2022, pág. 230})$$

Demonstração: É visível pela desigualdade $||f(y)| - |f(x)|| \leq |f(y) - f(x)|$ que a oscilação de $|f|$ não supera a de f em qualquer conjunto. Dessa maneira,

f integrável $\Rightarrow |f|$ é integrável. Ademais, como $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \forall x \in [a, b]$, pelo Teorema 5, temos que

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

isto é,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \blacksquare$$

3.2. Teorema Fundamental do Cálculo (Parte I)

O principal intuito dessa secção é fornecer uma demonstração rigorosa do Teorema Fundamental do Cálculo, e para isso nos basearemos nos teoremas e lemas já enunciados e demonstrados, e na seguinte definição:

“Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em cada intervalo $[a, b] \subset I$. Fixado $c \in I$, a **integral indefinida de f baseada em c** é a função $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_c^x f(t) dt$ ” (NETO, 2022, pág. 242)

Se $f, F: I \rightarrow \mathbb{R}$, pelo Teorema 3, temos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} F(a) - F(b) &= \int_c^a f(t) dt - \int_c^b f(t) dt = -\int_a^c f(t) dt - \int_c^b f(t) dt \\ &= -\left(\int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt \right) = -\int_a^b f(t) dt = \int_b^a f(t) dt \end{aligned}$$

Essa função, da forma que foi definida, significa que calcular $\int_b^a f(t) dt$ seria o mesmo de que subtrair a imagem em F dos extremos de integração. E o que o Teorema Fundamental do Cálculo definirá quem é exatamente essa função F .

Teorema Fundamental do Cálculo (Parte I): “Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em todo intervalo $[a, b] \subset I$ e $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ a integral indefinida de f baseada em $c \in I$. Se f é contínua em $x_0 \in I$, então F é derivável em x_0 , com $F'(x_0) = f(x_0)$ ”. (NETO, 2022, pág. 242)

Demonstração: dizer que F é derivável em x_0 , é demonstrar que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = L$$

No caso, o enunciado do Teorema Fundamental do Cálculo diz que $L = f(x_0)$. Em outras palavras, utilizando a definição de limites, o que precisamos mostrar é que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } x \in I, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

Investiguemos $\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right|$:

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{x - x_0} (F(x) - F(x_0)) - f(x_0) \right|$$

Pelo de integral indefinida temos:

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{x - x_0} (F(x) - F(x_0)) - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt - f(x_0) \right|$$

Como $x \neq x_0$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} (F(x) - F(x_0)) - f(x_0) \right| \\ &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt - f(x_0) \cdot \frac{x - x_0}{x - x_0} \right| \end{aligned}$$

Colocando em evidência $\frac{1}{x - x_0}$, temos:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} (F(x) - F(x_0)) - f(x_0) \right| \\ &= \left| \frac{1}{x - x_0} \left[\int_{x_0}^x f(t) dt - f(x_0) \cdot 1 \cdot (x - x_0) \right] \right| \end{aligned}$$

Pelo Teorema 4

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} (F(x) - F(x_0)) - f(x_0) \right| \\ &= \left| \frac{1}{x - x_0} \left[\int_{x_0}^x f(t) dt - f(x_0) \cdot \int_{x_0}^x 1 dt \right] \right| \end{aligned}$$

Como $f(x_0)$ é uma constante, podemos inseri-la na integral:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} (F(x) - F(x_0)) - f(x_0) \right| \\ &= \left| \frac{1}{x - x_0} \left[\int_{x_0}^x f(t) dt - \int_{x_0}^x f(x_0) dt \right] \right| \end{aligned}$$

Como a diferença das integrais é a integral da diferença, temos:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} (F(x) - F(x_0)) - f(x_0) \right| \\ &= \left| \frac{1}{x - x_0} \left[\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right] \right| \end{aligned}$$

Pela propriedade de módulos, temos:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} (F(x) - F(x_0)) - f(x_0) \right| \\ &= \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| \end{aligned}$$

Pelo Teorema 6, temos:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} (F(x) - F(x_0)) - f(x_0) \right| \\ &= \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| \leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \right| \end{aligned}$$

Como f é uma função contínua em x_0 , temos que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } x \in I, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Como t é parâmetro na integral $\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt$, então:

$$\begin{aligned} x_0 - \delta < x < x_0 < x_0 + \delta \text{ ou } x_0 - \delta < x_0 < x < x_0 + \delta &\Rightarrow \\ x_0 - \delta < t < x_0 + \delta &\Rightarrow 0 < |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Logo, pelos Teoremas 4, 5 e 6

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &\leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \right| < \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x \varepsilon dt \right| \\ &= \frac{1}{|x - x_0|} |\varepsilon(x - x_0)| = \frac{1}{|x - x_0|} \varepsilon |x - x_0| = \varepsilon \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &< \varepsilon \\ \text{quando } x \in I, 0 < |x - x_0| < \delta & \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} &= f(x_0) \end{aligned}$$

Portanto, F é derivável em x_0 , com $F'(x_0) = f(x_0)$. ■

3.3. Teorema Fundamental do Cálculo (Parte II)

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em todo intervalo $[a, b] \subset I$ e $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma integral indefinida de f , isto é, existe $a \in I$ tal que $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t) dt$, para todo $x \in I$ (LIMA, 2016).

Demonstração: considere $F' = f$, pela parte I do Teorema Fundamental do Cálculo, ao fixarmos $a \in I$ e definirmos $\varphi = \int_a^x f(t)dt$, obtemos $\varphi' = f$. Podemos observar que ambas as funções $F, \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$, possuindo a mesma derivada, se diferenciam por uma constante. Como $\varphi(a) = 0$, essa constante corresponde a $F(a)$. Logo, $F(x) = F(a) + \varphi(x)$, ou seja, $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$, para todo $x \in I$. ■

4. PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DE ENSINO PARA O ESTUDO DE PROGRESSÕES GEOMÉTRICA NO ENSINO MÉDIO

Nesse capítulo trataremos de uma aplicação dos conceitos do Teorema Fundamental do Cálculo no Ensino Médio com o uso de progressões geométricas. Será proposta uma Sequência de Ensino que pode ser trabalhada em sala de aula, sendo possível o docente explorar o contexto histórico por trás dos conceitos envolvidos.

Essa Sequência de Ensino foi desenvolvida visando oferecer aos alunos oportunidade de construir e desenvolver de conceitos mais avançados de Matemática, como limites, integrais e o Teorema Fundamental do Cálculo, e proporcionar ao docente uma alternativa de explorar esses conceitos em paralelo ao ensino de progressões geométricas. Dessa forma, essas atividades instigarão os discentes a desenvolver sua lógica com o uso da teoria Matemática trabalhada em sala de aula.

A Sequência de Ensino pode ser desenvolvida por alunos de qualquer ano do Ensino Médio que já tenham visto o conteúdo de funções (até logarítmica) e progressões geométricas. A intenção é que os estudantes usem o conhecimento construído como ferramenta para o pleno entendimento de conceitos mais avançados da Matemática, tais como: infinitesimais, séries e integrais. Essa Sequência de Ensino, possui um problema interessante, que vincula a soma de infinitos termos de uma progressão geométrica com a área de um quadrado, tornando mais concreto esse processo, e ainda uma outra atividade que extrapola o conceito de progressões geométricas, chegando à série harmônica, fazendo um paralelo com a análise de funções e o uso do Teorema Fundamental do Cálculo.

Dessa maneira, é muito relevante que as atividades proporcionem aos alunos um envolvimento com suas próprias realidades, desenvolvendo autonomia na construção do seu próprio aprendizado, ou seja, incentivam o uso dos conhecimentos prévios dos discentes de maneira natural e condições adequadas, isto é, a aprendizagem dos estudantes deve acontecer “[...] de modo envolvente, enriquecedor, e que possa realmente ter significado e sentido para quem aprende, propondo condições didáticas que sustentem essas situações.” (GONÇALVES, 2023, pág. 48)

Durante o desenvolvimento das atividades em classe, é normal que o aluno utilize conhecimentos matemáticos que ele já domina para resolver problemas dos mais diversos temas, e dessa forma, podemos entender que muitas vezes o estudante tenta adequar sua cognição a uma situação problema, e essa é a natureza da técnica de resolução de problemas onde o papel crucial do professor que “[...] não deve ser apenas de ensinar ou restringir-se

somente a comunicação do saber, cabe a ele propor problemas que provoquem a busca por um novo saber, iniciando o processo de aprendizagem.” (GONÇALVES, 2023, pág. 48)

Dessa forma, o professor, no papel de mediador da situação, possibilita maior autonomia por parte dos alunos, não fornecendo

[...] ele mesmo, a resposta, fazendo com que o aluno participe efetivamente da elaboração da cognição. O aluno pode, então, desenvolver novos saberes com base em suas experiências pessoais, com sua própria interação com o meio. (TEIXEIRA e PASSOS, 2013, p. 162)

4.1. Conteúdo a ser trabalhado

- Progressão Geométrica (P.G.): significado, sequências, razão (q), tipos de P.G., soma dos infinitos termos de uma P.G.;
- Conceitos intuitivos sobre: infinitesimais, limites, integrais e o Teorema Fundamental do Cálculo.

4.2. Objetivos Gerais da Sequência de Ensino

- Entender como podemos achar a soma de uma Progressão Geométrica por meio da geometria;
- Compreender a ideia de infinitesimais, e como podemos aplicá-la na soma de uma Progressão Geométrica;
- Compreender as ideias iniciais do conceito de séries.
- Apresentar que existem diversos tipos de série, entre elas a geométrica e a harmônica;
- Apresentar as noções intuitivas sobre: infinitesimais, limites, integrais e o Teorema Fundamental do Cálculo;
- Compreender a relação de uma sequência com uma função.

4.3. Recursos Didáticos

- Quadro negro e giz ou lousa branca e canetão (explicação do professor).
- Caderno, caneta, lápis, borracha, lápis-de-cor (para o desenvolvimento das atividades pelos alunos).
- Computadores, software *Geogebra* (opcionais).

4.4. Atividade 1

4.4.1. Apresentação e objetivos da atividade 1

Depois de apresentamos toda parte histórica do Teorema Fundamental do Cálculo e sua demonstração, essa dissertação tem como um de seus objetivos propiciar aos alunos do Ensino Médio os primeiros contatos com conteúdos mais abstratos da Matemática que são

abordados no Ensino Superior, já preparando os discentes para o pleno entendimento desses conceitos.

Para isso, essa Sequência de Ensino foi composta por três atividades, sendo a primeira constituída por dois exercícios.

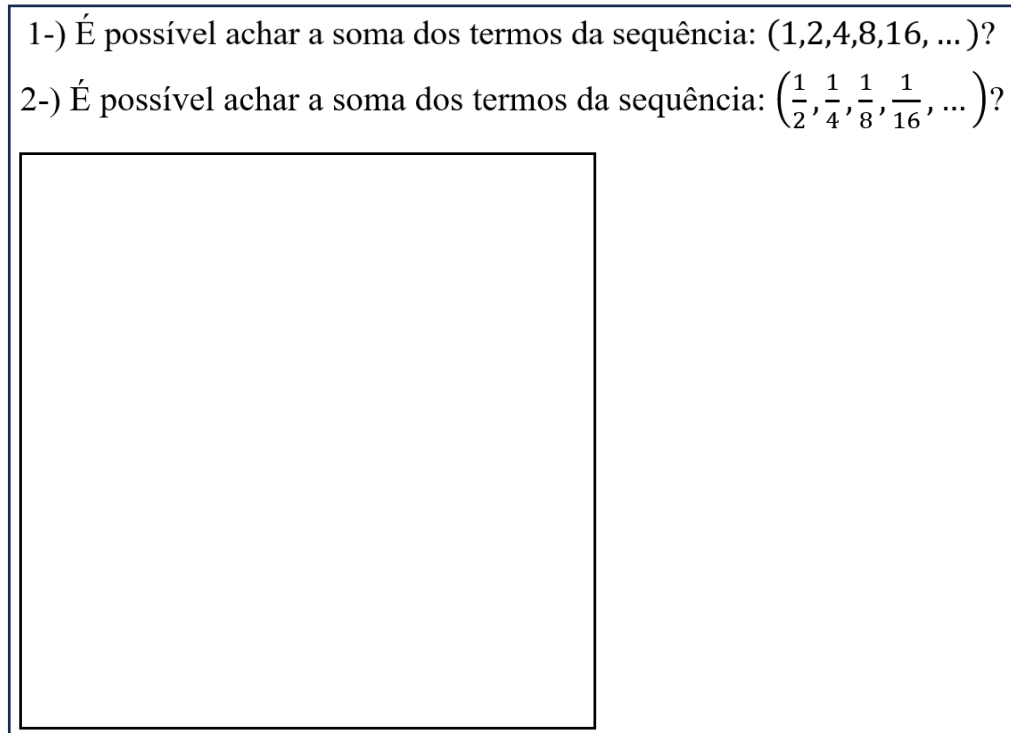


Figura 38: Questões da atividade 1.
Fonte: o autor

O primeiro exercício verifica se o aluno tem a percepção que a sequência em questão se trata de uma progressão geométrica, e que ainda ao somar os seus termos os tendem ao infinito. Nesse momento, se o docente desejar recordar os conceitos sequência e de progressão geométrica com os estudantes seria muito interessante, e para que esse trabalho seja mais prático, mais diante nessa dissertação disporemos a definição de progressões geométricas, como também a demonstração da fórmula do termo geral e da soma finita e infinita de termos.

O segundo exercício foi elaborado no intuito de vincular a soma infinita de termos de uma progressão geométrica de razão $|q| < 1$ a área de um quadrado, para isso o docente fará uso de conceitos de limites e medidas infinitesimais, ou seja, o discente terá a oportunidade de relacionar literalmente uma progressão geométrica com uma aplicação da geometria. É nessa segunda atividade que o professor pode fazer uso da parte histórica dessa dissertação para mostrar como esses conceitos influenciaram na evolução da Matemática.

Dessa forma, objetivo dessa atividade é fazer com o aluno tenha entendimento sobre sequências e progressões geométricas, tendo os primeiros contatos com conceitos de limites e

infinitesimais, compreender as ideias iniciais do conceito de séries, percebendo que o estudo sobre elas não se trata somente do uso de fórmulas.

4.4.2. Orientações sugeridas para a atividade 1

Para que o professor possa aproveitar o máximo do potencial dos alunos nessa Sequência de Ensino, sugere-se que ele os organize em grupos de três a quatro pessoas durante todas as atividades. Em um primeiro momento, peça para que eles leiam as questões sem qualquer discussão prévia, somente alertando aos discentes que o quadrado desenhado pode auxiliá-los na segunda questão. Observe que através desse procedimento, o professor propicia uma condição favorável para a aprendizagem dos alunos, colocando-os como protagonistas.

Após o tempo de aproximadamente 7 a 10 minutos, o docente conduzirá os alunos à seguinte reflexão: Como a soma de infinitas parcelas pode resultar em um número?

Veja que, o docente não traz de imediato uma resposta pronta, contudo, induz a situação para que os discentes pensem numa solução para o problema com os conhecimentos que eles já possuem, mesmo que ainda não haja um rigor matemático estabelecido.

Respondendo a indagação sugerida, a primeira questão da atividade é referente a exatamente isso, pois se for feita a soma $(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots)$ chegaríamos a algum número exato? E a resposta é não, pois o resultado é infinito. Mas o que seria infinito? É um número?

E abordar a questão do infinito, já no Ensino Médio, é crucial para o pleno desenvolvimento do pensamento matemático do adolescente, pois se trata de algo bem abstrato, e que se leva tempo para que se consolide. Então, até a chegada desse jovem no ensino superior, sua mente estará mais preparada para adentrar em conceitos muito mais avançados.

Contudo, como falar desse assunto com a turma? O professor pode refletir com ela sobre algumas falas de Soares: “o infinito como sendo fruto de um processo crescente e interminável, descartando a ideia do infinito como algo que se pudesse determinar.” (SOARES, 2014, pág. 4) Ou também de Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.):

Pois bem, se o infinito não se pode quantificar – senão seria uma quantidade como de duas ou três coisas, pois isto é o que significa quantidade – assim também o que está num lugar é assim porque ocupa algum sítio: e isto para cima ou para baixo, ocupando uma das seis direções, e cada uma destas apresenta um certo limite. Fica claro que na atualidade não existe um corpo infinito. (...) Tornando-se evidente que o infinito existe num sentido e noutro não. Pois bem, diz-se que é, por um lado, em potência e por outro em atualidade. (...) De maneira que existe um número infinito em potência e não em atualidade. (ARISTÓTELES apud SAMPAIO, 2008, p.207).

Após a reflexão sobre o conceito do infinito, o docente pode recordar o conceito de progressão geométrica e suas fórmulas de termo geral e somas de termos, e em seguida trabalhar com a noção intuitiva de limites fazendo somas parciais dos termos da sequência:

$$\frac{1}{2} = 0,5$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0,875$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0,9375$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = 0,96875$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64} = 0,984375$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} = \frac{127}{128} = 0,9921875$$

Nesse momento, é importante chamar a atenção dos alunos de que os resultados dessas somas parciais dos termos estão aumentando se aproximando de 1. Mas será que essa barreira pode ser ultrapassada?

Para responder essa pergunta, utilizaremos o quadrado que tem 8 cm de lado já impresso na atividade. Essa medida foi escolhida convenientemente para facilitar as partições que faremos a partir de agora. O docente, nessa etapa, pode convencionar que o quadrado tem 1 unidade de área, e orientar os estudantes a cortarem ao meio o quadrado, e pintar de uma cor uma das metades, em seguida, os alunos farão a mesma coisa com a outra metade, e assim por diante conforme a figura:

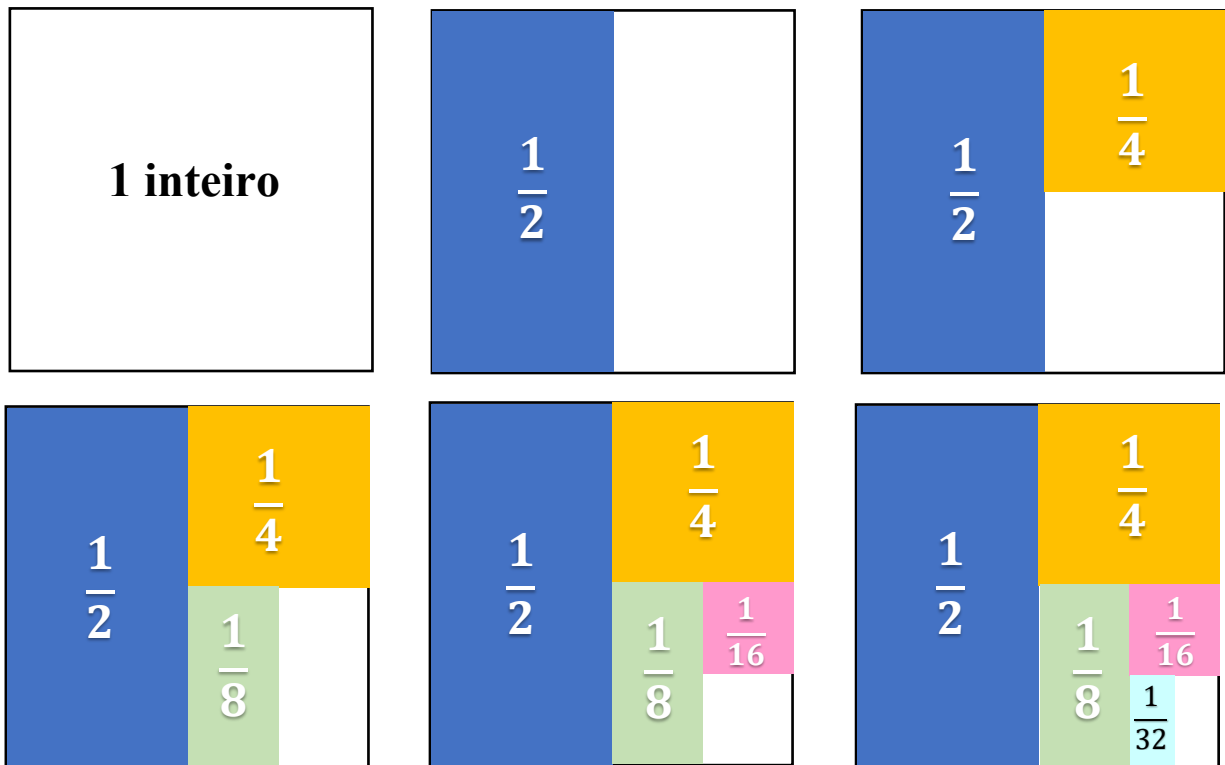


Figura 39: Partições para encontrar a área de um quadrado.
Fonte: o autor.

Observe que, o próximo termo da sequência corresponde à metade da parte não pintada que falta, ou seja, mesmo fazendo repartições infinitas, a soma das partes pintadas não pode, jamais, ultrapassar área de uma unidade inteira.

Nesse momento, o docente pode refazer a pergunta: seria possível ultrapassar a barreira do 1? Essa, com certeza, não é uma demonstração formal para dizer que realmente essa soma não vai ultrapassar a barreira do 1, porém é uma ótima maneira de introduzir o conceito de limites para os alunos.

Então, até agora temos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} \dots \leq 1$$

Agora, outro questionamento que pode ser colocado: a soma é estritamente menor que 1? Ou é igual a 1?

A princípio, os alunos podem achar que essa soma nunca vai chegar a ser 1, pois sempre estamos pintando metade do que sobra, e obrigatoriamente está sempre sobrando um pedacinho. Para sanar essa dúvida, o professor pode sugerir a seguinte situação: suponha que a soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} \dots$ seja menor que 1, que seja então igual a 0,999999, que é razoavelmente próximo de 1. Seria possível essa soma ser exatamente esse valor?

Se o processo de “pintura” (soma) for continuado infinitamente, o pedaço que sobra sempre vai diminuindo pela metade, em outras palavras, chegará o momento que ele será menor que 0,000001, logo a soma proposta é maior que 0,999999.

Se o mesmo processo for feito para verificarmos se a soma é menor que 0,999999999, a conclusão será a mesma:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} \dots \leq 0,999999999$$

Dessa maneira, a soma sempre vai conseguir transpor a barreira de qualquer número menor do que 1, logo:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} \dots = 1$$

Assim, dizemos que a soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} \dots$ converge para 1.

Por fim, o docente pode concluir a atividade aplicando a fórmula de uma P.G infinita de $|q| < 1$, que nessa sequência é $q = \frac{1}{2}$, e comparar os resultados obtidos, e além também de

utilizar a parte histórica dessa dissertação para ampliar o entendimento de limites, como, por exemplo, Arquimedes conseguir fazer uma aproximação para π .

4.4.3. Competências e habilidades desenvolvidas na atividade 1

- EF07MA08: Ler, compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador;
- EM13MAT508: Identificar e associar progressões geométricas (P.G.) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas;
- EM13MAT505: Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

4.4.4. Notas sobre progressões geométricas e os resultados obtidos

Uma sequência numérica é chamada de progressão geométrica, quando cada termo (a_n), a partir do segundo (a_2), é obtido realizando o produto do termo o anterior por uma constante q , chamada razão da progressão geométrica.

Através de uma progressão geométrica ($a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$) de razão q , podemos deduzir qualquer termo dela em função de seu primeiro (a_1). Para isso, é necessário apenas considerar a definição progressão de geométrica:

$$a_2 = a_1 \cdot q \qquad a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \qquad a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

Dessa forma, podemos generalizar esse raciocínio para o n -ésimo termo com a seguinte fórmula:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*$$

Veja que essa fórmula caracteriza a lei de formação de uma função, onde n é o número de termos da progressão geométrica até o termo a_n .

Além de deduzir a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica, também é possível realizar a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$ e primeiro termo (a_1) conhecidos com a seguinte fórmula:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Demonstração: considere a soma dos n termos da progressão geométrica:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad (I)$$

Agora multipliquemos ambos os membros da equação (I) pela razão q :

$$\begin{aligned}
 q \cdot S_n &= q \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) \Rightarrow \\
 q \cdot S_n &= q \cdot a_1 + q \cdot a_2 + q \cdot a_3 + \dots + q \cdot a_n \Rightarrow \\
 q \cdot S_n &= a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} \quad (II)
 \end{aligned}$$

Subtraindo (I) de (II), temos:

$$\begin{aligned}
 q \cdot S_n - S_n &= (a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1}) - (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) \Rightarrow \\
 S_n \cdot (q - 1) &= a_{n+1} - a_1 \Rightarrow \\
 S_n &= \frac{a_{n+1} - a_1}{q - 1} \xrightarrow{q \neq 1} \\
 S_n &= \frac{[a_1 \cdot q^{(n+1)-1}] - a_1}{q - 1} \Rightarrow \\
 S_n &= \frac{(a_1 \cdot q^n) - a_1}{q - 1} \Rightarrow \\
 S_n &= \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \blacksquare
 \end{aligned}$$

Podemos extrapolar esse raciocínio para calcular a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica com razão $q \in \mathbb{R}$ e $|q| < 1$, contudo, esse cálculo será explorado na atividade 2 dessa sequência de ensino, por enquanto apenas enunciaremos a fórmula:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

Agora utilizando essa fórmula poderemos comprovar os resultados obtidos nessa atividade dessa sequência de ensino:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1/2}{1 - 1/2} = \frac{1/2}{1/2} = 1$$

O docente pode aproveitar a oportunidade e apresentar o conceito de série, e dizer que as progressões geométricas são séries geométricas.

Dessa maneira, a atividade proposta consegue vincular os conhecimentos prévios dos estudantes, com o desenvolvimento de novos saberes a partir de suas experiências pessoais, e de sua própria interação com o ambiente.

4.5. Atividade 2

4.5.1. Apresentação e objetivos da atividade 2

A segunda atividade tem por objetivo a solidificação da análise dos possíveis casos que podem aparecer na soma de uma quantidade extremamente grande de uma P.G., ou seja, pela definição de progressão geométrica, temos que a_1 e q são dados, e o n é o número de termos que estamos somando, então, na fórmula da soma de uma quantidade finita de termos:

$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$, desejamos fazer o aluno refletir a respeito quando o n tende ao infinito ($n \rightarrow \infty$) e como se comporta os limites nesses casos.

Análise a fórmula $S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$, para quando $n \rightarrow \infty$ em cada caso para q :

- $q > 1$:
- $q = 1$:
- $0 < q < 1$:
- $q = 0$:
- $-1 < q < 0$:
- $q < -1$:

Figura 40: Questão da atividade 2.
Fonte: o autor

Dessa forma, o aluno começará a desenvolver o conceito de limites, algo crucial para a próxima atividade, que fará a ligação com sequências, funções e o Teorema Fundamental do Cálculo.

4.5.2. Orientações sugeridas para a atividade 2

Nessa atividade, sugere-se que o professor permita que os alunos, primeiramente, realizem uma conversa entre eles, de cerca de uns dez minutos, para que assim eles possam discutir algumas soluções. Em um segundo momento, o professor pode interagir com os discentes propondo dividir o exercício em casos, facilitando as reflexões sobre a questão. Por fim o docente pode explicar cada caso proposto utilizando intuitivamente os conceitos de limites:

- a. $q > 1$: então teremos que $q^n \rightarrow \infty$, então, na fórmula implicará que, se o $a_1 > 0$, $S_\infty = \frac{\infty}{q-1} = \infty$, e $a_1 < 0$, $S_\infty = \frac{-\infty}{q-1} = -\infty$. Então não teria muito sentido fazer a soma de infinitos casos. Aqui vale ressaltar que esse resultado mostra que essa soma é divergente e dizer o que isso significa.
- b. $q = 1$: não se aplica, pois o denominador não pode ser zero;
- c. $0 < q < 1$ e $-1 < q < 0$: implica que $q^n \rightarrow 0$, logo

$$S_\infty = \frac{a_1(0-1)}{q-1} = \frac{-a_1}{q-1} \Rightarrow S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

- d. $q < -1$: $q^n \rightarrow \infty$ (n par) e $q^n \rightarrow -\infty$ (n ímpar), e de maneira análoga ao caso de $q > 1$, o resultado de para $S_\infty = \pm\infty$.

O professor também pode escrever o resultado na forma de módulo:

$$|q| > 1 \Rightarrow q^n \rightarrow \infty$$

$$|q| < 1 \Rightarrow q^n \rightarrow 0 \Rightarrow S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

Ao final da atividade, recomendamos que o docente comente que a manipulação de progressões geométricas não é somente uma memorização de fórmulas, mas sim que há um raciocínio matemático robusto que sustenta estas fórmulas.

4.5.3. Competências e habilidades desenvolvidas na atividade 2

- EM13MAT508: Identificar e associar progressões geométricas (P.G.) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas;

4.6. Atividade 3

4.6.1. Apresentação e objetivos da atividade 3

O objetivo dessa última atividade é apresentar um novo de tipo série aos alunos: a série harmônica, apresentar aos alunos o Teorema Fundamental do Cálculo, e que esse teorema é uma poderosa ferramenta matemática que permite, entre outras coisas, fazer cálculos de áreas e deduzir que uma série harmônica diverge.

A fórmula $S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$ vale para a sequência $(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \dots)$? Como descobrir sua soma? (*Dica: pense a respeito da função $f(x) = \frac{1}{x}$*)

Figura 41: Questão da atividade 3.
Fonte: o autor

Para que os alunos entendam o funcionamento do Teorema Fundamental do Cálculo, a atividade começa instigando os discentes a utilizar uma fórmula de soma de termos de uma progressão geométrica, o intuito disso é que os alunos percebam que, quando procurarem a razão da suposta progressão, não se trata do tipo de sequência que eles já vinham trabalhando. Assim, por meio de conhecimentos prévios, portas de curiosidade se abrirão na mente dos alunos, portas essas que permitirão acessar novos conhecimentos, no caso o Teorema Fundamental do Cálculo.

4.6.2. Orientações sugeridas para a atividade 3

Para isso, recomendamos ao docente que ele permita que os alunos, em grupos de três a quatro, discutam entre eles alguma solução a respeito. Por meio de seus conhecimentos prévios, espera-se que os alunos percebam duas coisas. A primeira é que eles observem que a fórmula no enunciado serve para casos de progressões geométricas com finitos termos, necessitando utilizar a fórmula $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$ vista na atividade anterior. A segunda é que os alunos

se atentem que a sequência apresentada no enunciado não se trata de uma P.G. mas sim um outro tipo de sequência.

Mesmo não sabendo que tipo de sequência é essa, uma resposta esperada dos estudantes é achar que a soma desses termos resulte em algum número, pois podem associar com o caso visto na primeira atividade dessa sequência de ensino, em outras palavras, os alunos podem conceber em sala de aula, quando se trata de limites, até mesmo no ensino superior, que a soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} \dots$ é convergente porque está se somando números cada vez menores, dando a entender que em certo momento as parcelas vão se tornando tão pequenas, que elas não serão mais relevantes para contribuir com a soma. E isso pode parecer verdade quando olhamos somente para um tipo de série, que no caso, a geométrica. Mas diante de uma situação como essa, cabe a nós professores trabalharmos para que esse erro não prejudique a aprendizagem, pois

Em relação à aprendizagem de conceitos matemáticos, a maioria dos pesquisadores em didática da Matemática defende a ideia de que um dos fatores que mais influenciam essa aprendizagem é o tratamento que o professor dá ao erro do aluno. Tal tratamento está intimamente ligado à concepção de aprendizagem que tem esse professor (ALMOULOU, 2007. p. 131).

Esse tipo de erro é um clássico exemplo de um obstáculo epistemológico, que

[...]se caracteriza por um conhecimento, uma concepção, e não por uma dificuldade ou uma falta de conhecimento, que produz respostas adaptadas num certo contexto e, fora dele, produz respostas falsas. Assim, cada conhecimento é suscetível de ser um obstáculo à aquisição de novos conhecimentos. Os obstáculos se manifestam pela incompreensão de certos problemas ou pela impossibilidade de resolvê-los com eficácia, ou pelos erros que, para serem superados, deveria conduzir ao estabelecimento de um novo conhecimento. (TRINDADE, 1996, pág. 3)

E com o objetivo de que esse obstáculo epistemológico seja superado, foi preparada essa atividade 3 que fechará o estudo dos limites e, agora, integrais no contexto de séries.

Antes partir para a resolução da atividade em si, sugere-se ao docente que fará uso dessa Sequência de Ensino, a utilização do contexto histórico apresentado nessa atividade antes e durante o desenvolvimento dos trabalhos, pois isso dará um sentido do porquê dessas ferramentas (limites, infinitesimais, integrais e o Teorema Fundamental do Cálculo) foram e são importante na resolução de problemas, e mostrará aos discentes que o conhecimento humano não é oriundo do acaso, mas sim fruto da evolução do pensamento crítico e racional.

Para iniciar a resolução dessa situação-problema, é recomendável vincular essa série à $f(x) = \frac{1}{x}$, e a motivação disso se deve ao fato que cada termo da série é o inverso dos números naturais, e permita que os alunos tentem resolver o problema com essa sugestão aproveitando seus conhecimentos sobre funções e de progressões geométricas. Após esse momento, o

professor pode apresentar essa vinculação no quadro ou por meio de recursos tecnológicos (*Geogebra*), como será mostrado a seguir. Os principais itens do layout inicial desse aplicativo (ver Figura 45), são: a janela de visualização, a janela de álgebra, o campo de entrada, onde daremos a maioria dos comandos, algumas ferramentas, um teclado virtual, com algumas teclas adicionais, e opções de configuração.

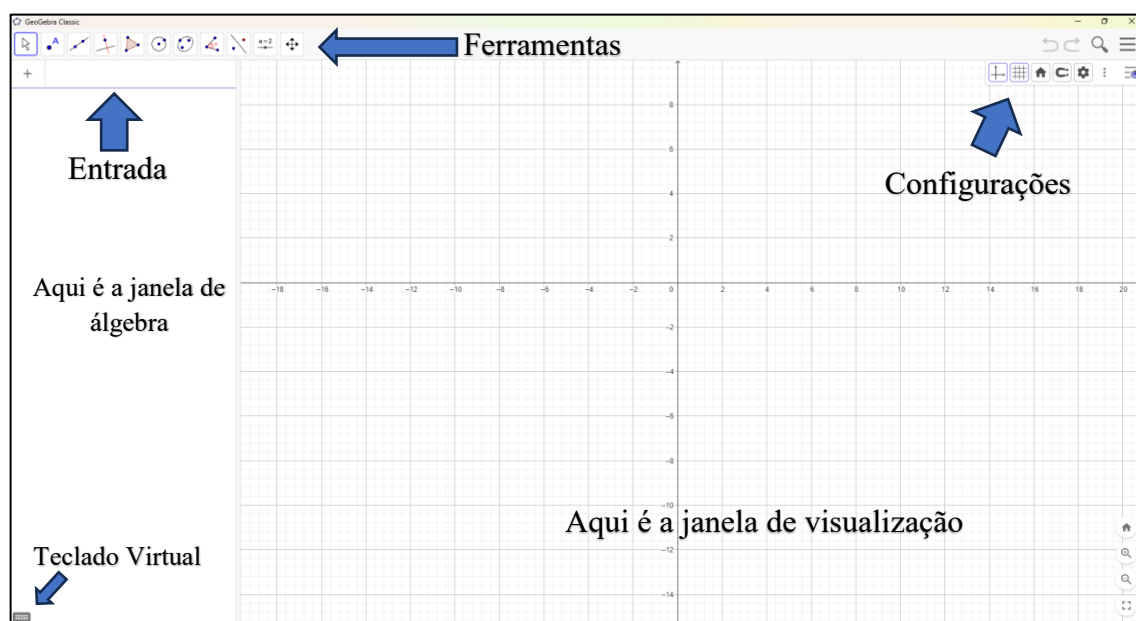



Figura 42: Tela de abertura do GeoGebra.

Fonte: o autor

Para mudar o tamanho das fontes, clique em , em seguida configurações, e escolha o tamanho da fonte.

No campo entrada digite: $f(x) = 1/x, x > 0$, e colocamos a restrição de $x > 0$, pois a parte negativa de x não interessa ao exercício que estamos tratando. E clicando com o botão direito do mouse em cima da função, clique em configurações, e podemos fazer uma série de configurações conforme a necessidade do usuário, tais como: troca de do nome da função, cor, estilo entre outros.

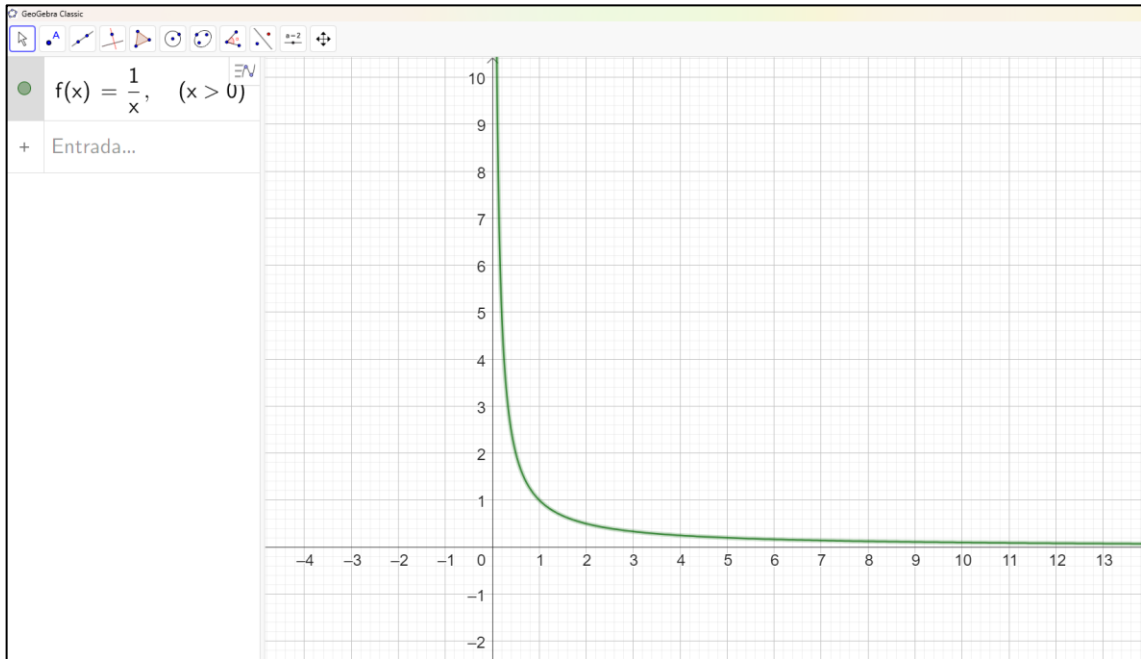


Figura 43: função $f(x) = 1/x$.

Fonte: o autor

Agora destacaremos os pontos da sequência na função $f(x) = 1/x$, para isso clique no lugar indicado, e depois clique nos locais correspondentes na função:

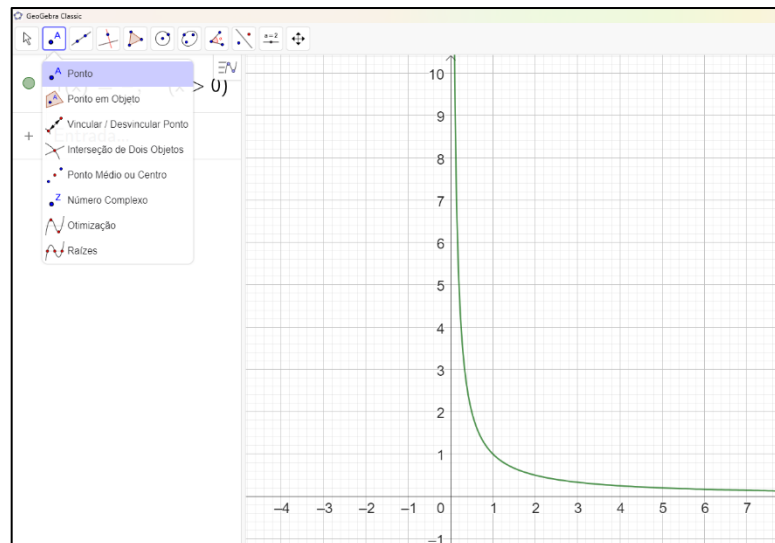


Figura 44: Local para inserir pontos no plano.

Fonte: o autor

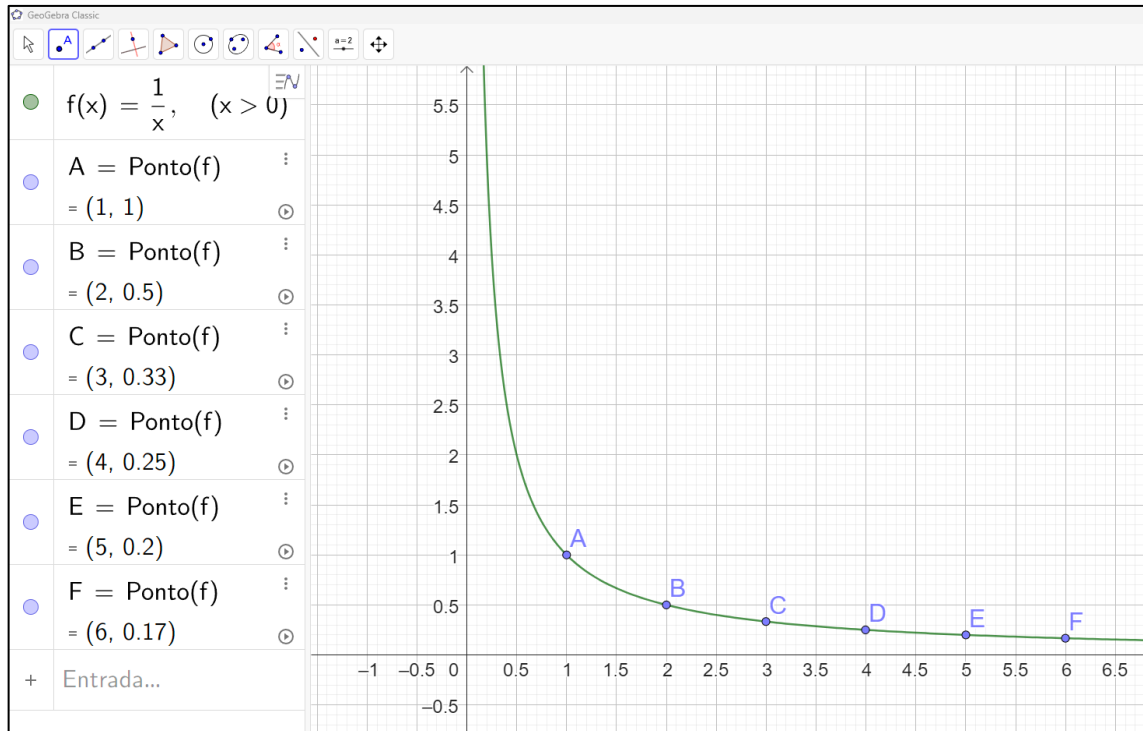


Figura 45: Pontos inseridos.
Fonte: o autor

Para que os pontos fiquem mais evidentes, e seus respectivos valores fracionários, clique com o botão direito em cima de cada ponto, selecione configurações, e digite no campo legenda os valores conforme a figura:

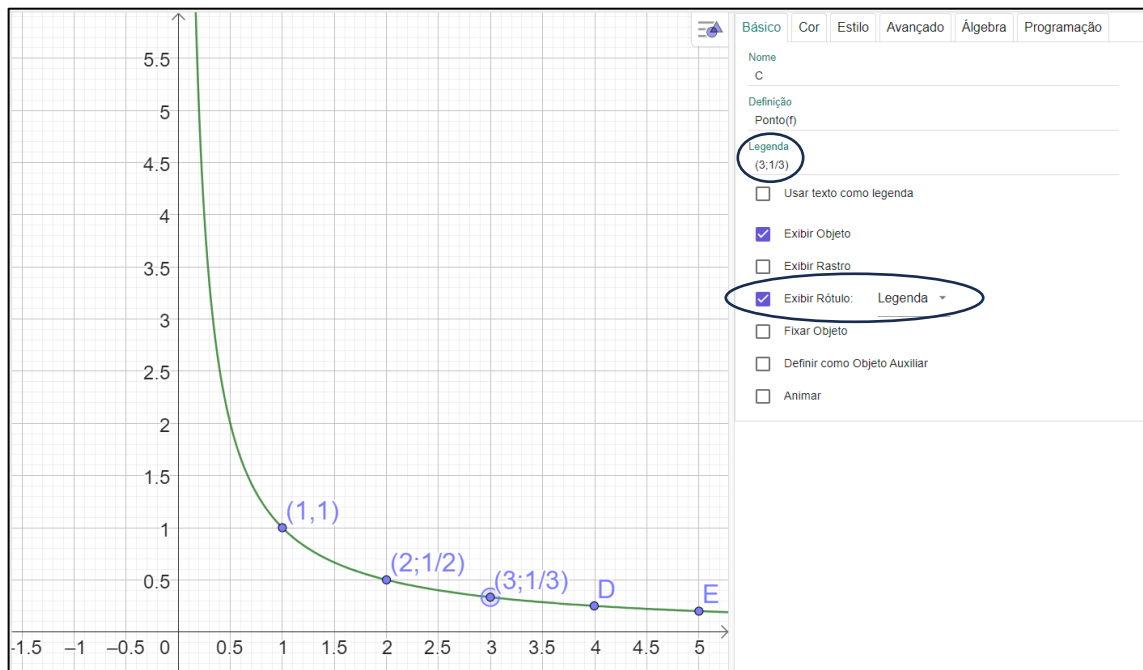


Figura 46: Pontos com legenda.
Fonte: o autor

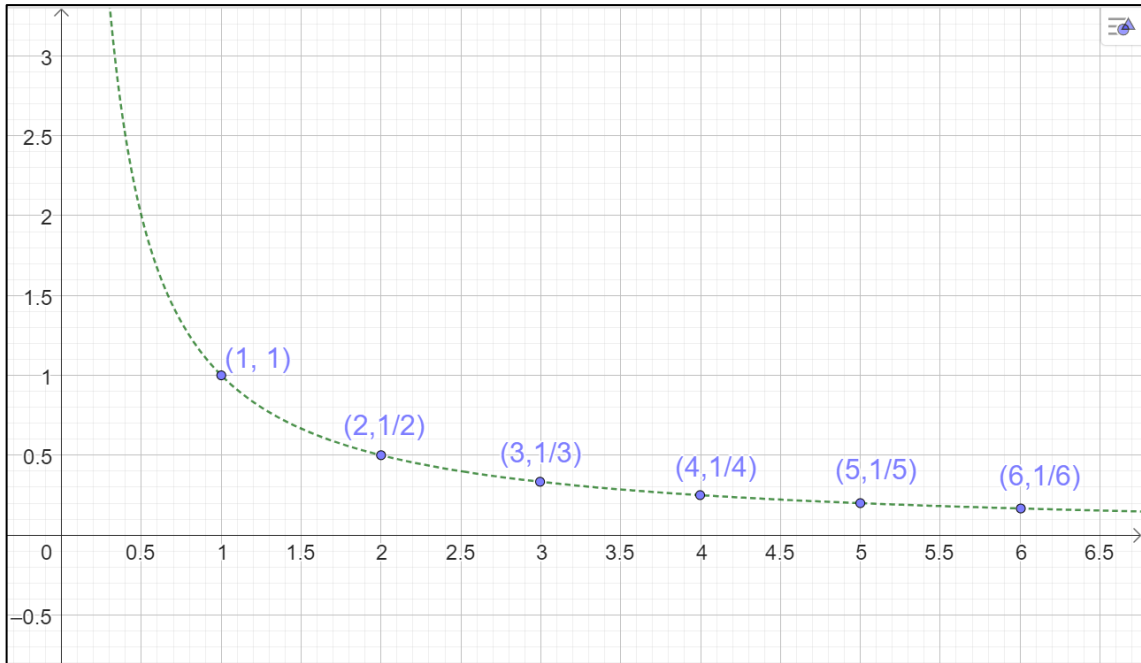


Figura 47: Vinculação da soma com a função $f(x) = 1/x$

Fonte: o autor

Nesse momento, o professor precisa apresentar aos discentes uma definição intuitiva a respeito do que é integral que desenvolvemos durante essa dissertação, e que reforçaremos nesse item:

Para calcular a área sob o gráfico, podemos raciocinar da seguinte maneira: vamos subdividir o intervalo considerado em muitos pequenos intervalos, suficientemente pequenos [...]. Assim, em cada um dos pequenos intervalos, uma fatia da área que buscamos pode ser calculada como se fosse um pequeno retângulo; depois, para se ter a área procurada, basta somar as áreas de todos os retangulinhos. (MACHADO, 2008, pág. 3)

A figura a seguir representa a ideia do autor e pode ser aproveitada para mostrar aos alunos (Soma de *Riemann*):

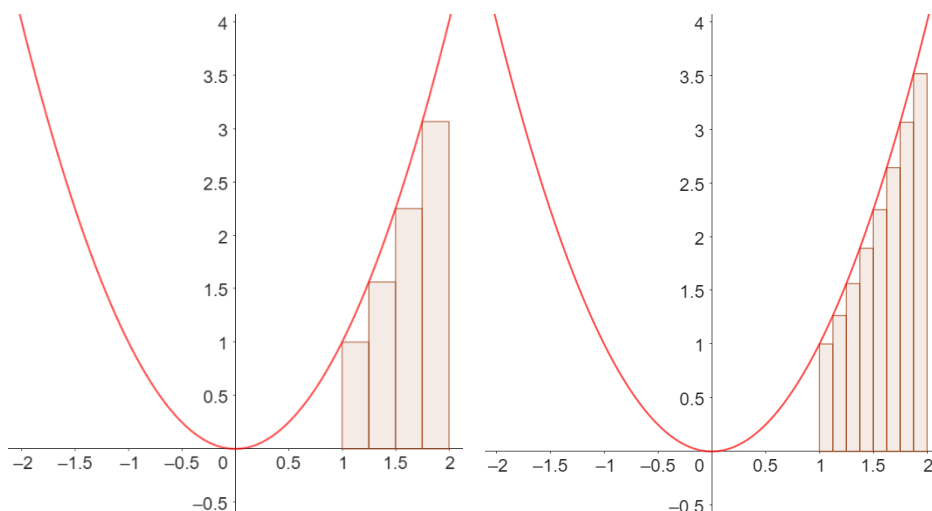


Figura 48: Área sob o gráfico de f .

Fonte: o autor

A revista Cálculo, na reportagem espacial “Cálculo sem pressa é bom”, destaca o conceito de integral em linguagem informal que também pode ser apresentado aos discentes:

Integração é isso: se o estudante precisa achar a área de uma figura geométrica cheia de curvas, ele fatia a figura, substitui cada fatia por um retângulo (isto é, substitui cada fatia por uma figura cuja área é fácil de calcular), e soma todas as fatias. Conforme o número de fatias aumenta, a área de todos os retângulos somados se aproxima da área real; conforme o número de fatias tende ao infinito, a área de todos os retângulos somados tende à área real exata. (SIMÕES, 2012, p. 32)

Após os alunos compreenderem esse conceito de integral, a ideia é tentar calcular a área (A) abaixo da curva até um valor determinado para x , suponha começando em $x = 1$ até $x = 6$, e posteriormente extrapolando essa ideia para um x tão grande quanto se queira, e para fazer isso, use o comando Integral conforme a figura:

Integral(Função, Valor de x Inicial, Valor de x Final) ⋮

↓
Integral($f(x)$, 1, 6)

Figura 49: Comando Integral
Fonte: o autor

O resultado do procedimento fica assim:

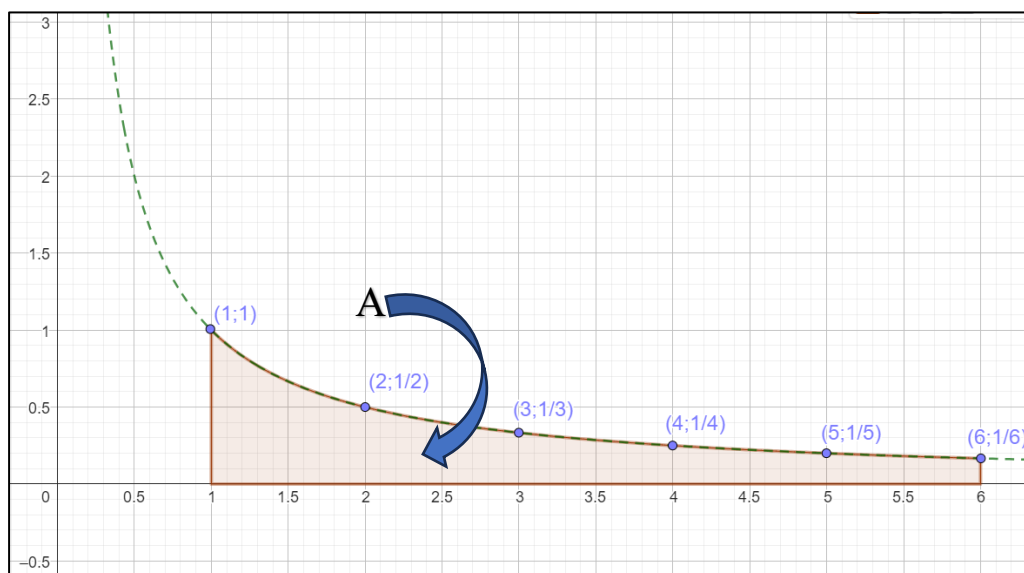


Figura 50: Área abaixo do gráfico da função $f(x)$ e acima do eixo x .
Fonte: o autor

Logo, o que estamos tentando fazer é a integral da $f(x)$, de $x = 1$ até $x = 6$:

$$A = \int_1^6 \frac{1}{x} dx$$

Embora o aluno não domine todas as regras de integração, o intuito dessa atividade é apenas introduzir o assunto, assim o professor pode citar apenas os resultados, porque queremos que haja a análise desses resultados. Contudo, se o docente sentir necessidade de entrar em detalhes nessas regras, isso não prejudicará o andamento dos trabalhos.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, abordado no capítulo anterior, temos que:

$$A = \int_1^6 \frac{1}{x} dx = (\ln x)|_1^6 = (\ln 6) - (\ln 1) \cong 1,79$$

Isto posto, no campo entrada, e utilizando o comando Soma de *Riemann Superior*, digite:

SomaDeRiemannSuperior(Função, Valor de x Inicial, Valor de x Final, Número de Retângulos)(f)



$$b = \text{SomaDeRiemannSuperior}(f(x), 1, 6, 5) \\ = 2.28$$

Figura 51: Comando da Soma de *Riemann Superior* no *Geogebra*
Fonte: o autor

Com esse comando teremos:

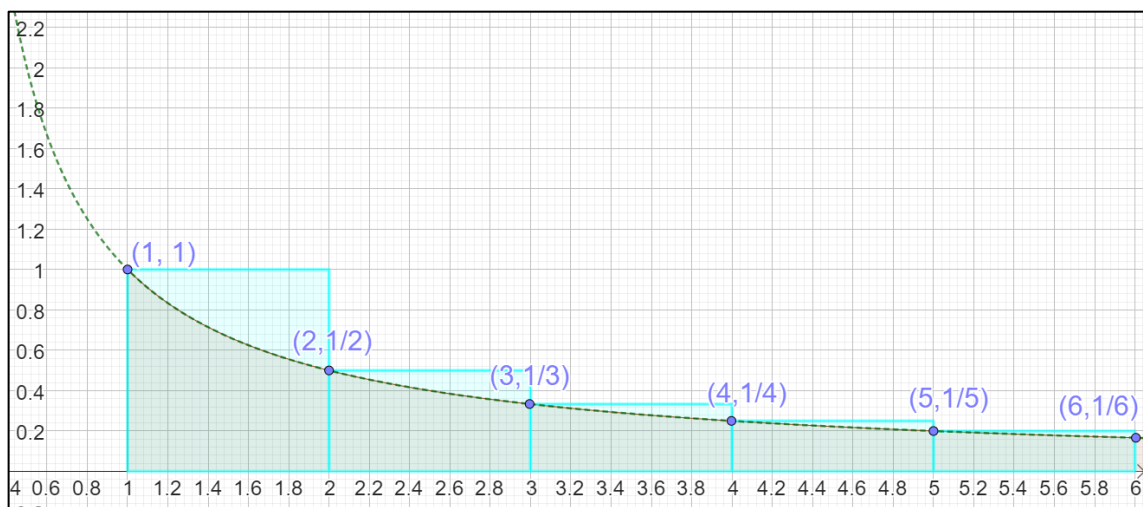


Figura 52: Soma de *Riemann Superior* com alusão à sequência.
Fonte: o autor

Observe que podemos considerar que a área de cada retângulo formado seja correspondente a cada número da sequência, tendo em vista que cada um desses retângulos tem

base 1, e sua altura o valor de cada número que forma a sequência. Também é importante salientar que todos os retângulos sempre ficam acima da função $f(x)$, logo se somarmos as áreas desses cinco retângulos teremos uma área superior à área sob o gráfico de $f(x)$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cong 2,28 > A$$

Dessa forma, se extrapolarmos esse raciocínio para $x \rightarrow \infty$, percebe-se que a área A vai divergir, pois ela está vinculada a uma função logarítmica de base maior que um, que tem como característica ser crescente, e que $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x) = \infty$. Por consequência, a sequência $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \dots$ também vai divergir, uma vez que as áreas dos retângulos representam cada um desses termos e que eles estão sempre acima da função f . E um comentário muito pertinente que o professor pode realizar é mencionar que a série que foi analisada se trata de uma série harmônica.

Após esta atividade, espera-se que o aluno compreenda que, nem sempre quando os números de uma sequência tendem a zero, a soma deles também tenderá a zero. Neste contexto, é evidente que a atividade pode estabelecer condições propícias para a aprendizagem dos alunos, tornando-se significativa e relevante para eles de maneira enriquecedora.

4.6.3. Competências e habilidades desenvolvidas na atividade 3

- EM13MAT508: Identificar e associar progressões geométricas (P.G.) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas;
- EF09MA06: Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
- EM13MAT305: Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

4.7. Possíveis Dificuldades

A não familiaridade com progressões geométricas, com problemas de lógica, ou até mesmo com conteúdos mais primários, como o uso de frações, podem sim acarretar dificuldades no entendimento de assuntos mais avançados (infinitos e limites, integrais), e cabe a nós professores, orientar o aluno para que ele supere as barreiras que podem aparecer, e “para que o mesmo possa produzir significados relevantes no que se refere à construção dos números

reais de forma adequada e que possibilite a aprendizagem” (CEZAR, 2013, pág.2). E essa fala se aplica tranquilamente a quaisquer assuntos que viemos a tratar.

4.8.Avaliação

A avaliação ocorrerá mediante a participação ativa dos estudantes, levando em conta o envolvimento com a questão e a resolução dos problemas, suas contribuições para a compreensão das situações, bem como o esforço demonstrado por cada grupo nas soluções dos problemas apresentados.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho explorou-se a importância do Teorema Fundamental do Cálculo na evolução da Matemática. Devido à sua relevância, foi escolhido como objeto de estudo dessa dissertação. Vimos que esse teorema revelou uma íntima relação entre os problemas de integração (áreas) e de diferenciação (retas tangentes sobre curvas), permitindo resolvê-los simultaneamente. Além disso, verificamos que esse teorema simplificou o processo de cálculo de integrais, que anteriormente exigia o uso de limites e somas exaustivas, tornando-o mais prático e eficiente.

Desde sua gênese, com os gregos antigos, até sua concepção, com *Newton* e *Leibniz* no século XVII, compreendemos a profundidade desse teorema e sua influência ao longo da história, pois entender o passado é participar de sua reconstrução. Ademais, destacamos o quanto importante foi sua demonstração formal, e que é dessa forma que diferenciamos a Matemática das outras ciências naturais.

Também foi proposta uma Sequência de Ensino, que oferece uma abordagem enriquecedora entre o Teorema Fundamental do Cálculo e as progressões geométricas, possibilitando aos professores oportunizar aos alunos um contato com temas mais avançados da Matemática, tais como infinitesimais, limites e integrais. Por fim, espera-se que essa dissertação possa contribuir para uma melhor compreensão do Teorema Fundamental do Cálculo e sua aplicação no Ensino Médio, aguçando espírito de descoberta dos estudantes, e disponibilizando aos professores uma ferramenta que permita inovar em suas aulas.

6. REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da Matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

BARDI, Jason Socrates. **A Guerra do Cálculo**. São Paulo: Record, 2006.

BONFIM, S. H.; CALÁBRIA, A. R. **O Cálculo Diferencial e Integral de *Newton* e *Leibniz*: aproximações e distanciamentos no método**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da Matemática**. Editora Blucher, 2019.

CAMPOS, Ronaldo Pereira. **A abordagem do Teorema Fundamental do Cálculo em livros didáticos e os registros de representação semiótica**. PUC-SP: 2007.

CEZAR, M. S. **A Produção de Significados na Construção dos Números Reais**. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 17., Vitória: IFES/UFES, 2013.

D'AMBROSIO, Ubiratã. **A história da Matemática: questões historiográficas, políticas e reflexos na educação Matemática**. Pesquisa em educação Matemática: concepções e perspectiva. São Paulo: Editora UNESP, 1999

DA COSTA MACHADO, Luiza Lucia Mendes. **O PRINCÍPIO DE *CAVALIERI* E SUAS APLICACOES: AREAS E VOLUMES**. 2021. (PROFMAT)

DA SILVA, Jairo José. **A demonstração Matemática da perspectiva da lógica Matemática**. Bolema-Boletim de educação Matemática, v. 15, n. 18, p. 68-78, 2002.

DE CARVALHO, Tadeu Fernandes; D'OTTAVIANO, Itala M. Lofredo. Sobre *Leibniz*, *Newton* e infinitésimos, das origens do cálculo infinitesimal aos fundamentos do cálculo diferencial paraconsistente. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 8, n. 1, 2006.

DOS SANTOS SILVA, Marcilene Moreira; SALES, Antonio. **O PROFESSOR DO ENSINO FUNDAMENTAL E A DEMONSTRAÇÃO EM MATEMÁTICA**. Anais do Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática, v. 4, n. 1, 2010.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

GAMBERA, ARTUR REZZIERI. **UMA ABORDAGEM HISTÓRICA SOBRE LOGARITMOS**. UNESP, São José do Rio Preto: 2012

GARBI, Gilberto Geraldo. **O romance das equações algébricas**. Editora Livraria da Física, 4ª Edição, São Paulo: 2010.

GONÇALVES, Vicente Lourenço. **CARDINALIDADE DE CONJUNTOS INFINITOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA**. 87 f. Dissertação de Mestrado PROFMAT – Instituto Federal de São Paulo, Câmpus São Paulo, São Paulo - SP, 2023.

GUICCIARDINI, Niccolò. Método versus Cálculo en las críticas de *Newton a Descartes y Leibniz*. **Departamento de Filosofía y Ciencias Sociales**, Universidad de Siena. Siena, Itália. pág. 9 a 38, fevereiro, 2009. Disponível em: <http://www.scielo.org.co/pdf/ef/n39/n39a02.pdf>. Acesso em: 30/05/2023

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. Volume 1. 5ª Edição – [Reimpág.], Rio de Janeiro: LTC, 2014.

LAUNAY, Mickaël. **A fascinante história da Matemática**. Editora Bertrand Brasil, 2022.
MAOR, Eli. **e: A História de um Número**. – 8ª Edição. São Paulo: Record, 2019.

LIMA, Elon Lages. **Análise real vol. 1: Funções de uma Variável**. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

LORENZATO, Sérgio. **Para aprender Matemática**. 2. ed. Campinas-SP: Autores Associados, 2008.

MACHADO, N. J. **Cálculo Diferencial e Integral na Escola Básica**: possível e necessário. São Paulo: USP, 2008.

NETO, Antonio Caminha Muniz. **Fundamentos de cálculo**. – 2.ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2022.

ROQUE, Tatiana; DE CARVALHO, João Bosco Pitombeira. **Tópicos de história da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

ROSA, Jocélia et al. **História da Matemática no Ensino da Matemática**. São Paulo: Produção Independente, 1998.

RUSSO, Caroline L. **A Simbologia na História do Cálculo**. São Paulo, 2017. 64 pág. TCC - licenciatura em Matemática - Instituto Federal *Campus* São Paulo.

SAMPAIO, Patrícia Alexandra da Silva Ribeiro. **Infinito uma história a contar**. *Millenium-Journal of Education, Technologies, and Health*, n. 34, p. 205-222, 2008.

SANTOS, Walkíria Corrêa dos et al. **As ideias envolvidas na gênese do Teorema Fundamental do Cálculo, de Arquimedes a Newton e Leibniz**. 2011. Trabalho de Conclusão de Curso (PUC).

SILVA, Marciel Fernandes da. **Teorema Fundamental do Cálculo**: Origem, demonstração e aplicação. 2019. Trabalho de Conclusão de Curso.

SIMÕES, M. Cálculo sem pressa é bom. **Cálculo: Matemática para todos**. 13. ed. São Paulo: Segmento, 2012. p. 24-33.

SMITH, D. E., *Sourcebook in Mathematics*, 2 vols. New York: Dover, 1959; reimpressão em brochura da edição de 1929.

SOARES, Gabriel de Oliveira; FLÔRES, Marcia Viaro; ANJOS, Fernando Freitas dos; **Noções de Infinito Matemático dos Alunos do Ensino Médio do Instituto Federal Farroupilha**. Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria (RS). 2014.

STEWART, IAN. **Desbravadores da Matemática**: da alavanca de Arquimedes aos fractais de *Mandelbrot*. 1.ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2019.

STEWART, J. **Cálculo** –Volume I. Tradução da 8ª Edição Norte-Americana. 8. ed. São Paulo: *Cengage Learning* Edições Ltda, 2016.

STROGATZ, Steven. **O poder do infinito**: Como o cálculo revela os segredos do universo. Sextante, 2022.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães; PASSOS, Claudio Cesar Manso. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy *Brousseau*. **Revista Zetetiké – FE/Unicamp**, Campinas, v. 21, n. 1, p. 155-168, 2013.

TRINDADE, J. A. O. **Os obstáculos epistemológicos e a Educação Matemática**. Dissertação de Mestrado em Educação: Educação Matemática. Florianópolis: CED/UFSC, 1996.

VILLATE, Weimar. Elementos para un argumento didáctico desde el estudio histórico del Teorema Fundamental del Cálculo en *Newton*. **Ciencia e Interculturalidad**, Colômbia, vol. 30, núm. 01, pág. 26 - 39, janeiro, 2022. Disponível em: <<http://portal.amelica.org/ameli/journal/416/4163252002/html/>>. Acesso em: 16/01/2024.

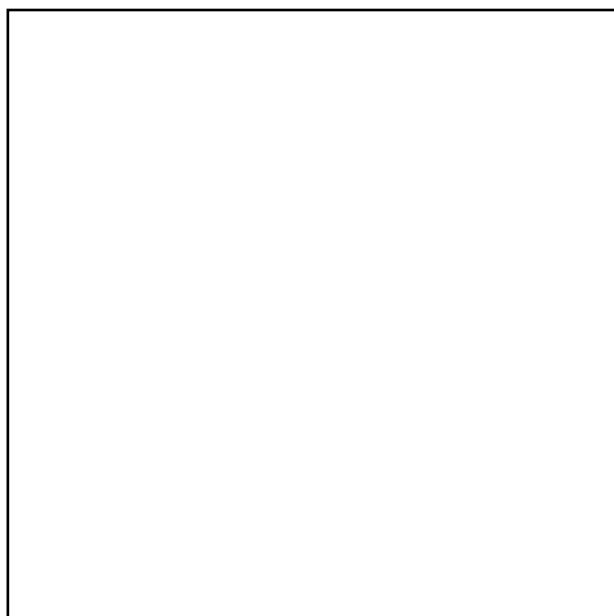
7. APÊNDICES

Atividade 1

LOGO DA ESCOLA	ESCOLA:	
	PROFESSOR (A):	
	ALUNO (A)	
	TURMA:	DATA:
	DISCIPLINA: MATEMÁTICA	PONTOS:
MOTIVO:	ATIVIDADE	

1-) É possível achar a soma dos termos da sequência: $(1, 2, 4, 8, 16, \dots)$?

2-) É possível achar a soma dos termos da sequência: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots)$?



Atividade 2

LOGO DA ESCOLA	ESCOLA:	
	PROFESSOR (A):	
	ALUNO (A)	
	TURMA:	DATA:
	DISCIPLINA: MATEMÁTICA	PONTOS:
MOTIVO:	ATIVIDADE	

Analise a fórmula $S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$, para quando $n \rightarrow \infty$ em cada caso para q :

- $q > 1$:
- $q = 0$:

- $q = 1$:
- $-1 < q < 0$:

- $0 < q < 1$:
- $q < -1$:

Atividade 3

LOGO DA ESCOLA	ESCOLA:	
	PROFESSOR (A):	
	ALUNO (A)	
	TURMA:	DATA:
	DISCIPLINA: MATEMÁTICA	PONTOS:
MOTIVO:	ATIVIDADE	

A fórmula $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ vale para a sequência $\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \dots\right)$? Como descobrir sua soma? (*Dica: pense a respeito da função $f(x) = \frac{1}{x}$*)