



Universidade Federal do Pará
Campus Universitário Castanhal
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado

Uma Proposta de **Atividades Interativas**
para Introdução à Teoria dos Números

Antonio Ruan Barbosa do Nascimento

Castanhal
2024

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

Barbosa do Nascimento, Antonio Ruan.

Uma Proposta de Atividades Interativas para Introdução à
Teoria dos Números / Antonio Ruan Barbosa do Nascimento. —
2024.

126 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Valdelírio da Silva E Silva
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará,
Campus Universitário de Castanhal, Programa de Pós-Graduação
em Matemática em Rede Nacional, Castanhal, 2024.

1. Teoria dos Números. 2. TDICs. 3. Storytelling. 4.
Sequências Didáticas. 5. Desmos. I. Título.

CDD 512.72

**Uma Proposta de Atividades Interativas
para Introdução à Teoria dos Números**

Mestrado

01/2022 – 05/2024

Submissão 26/04/2024

Defesa 22/05/2024

Versão Final 27/05/2024

Universidade Federal do Pará
Campus Universitário Castanhal
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Antonio Ruan Barbosa do Nascimento

antonioruan.barbosa@gmail.com

Mestrando do Proformat

UFPA-Castanhal

Banca Examinadora:

Valdelírio da Silva e Silva

Orientador

Maria Eliana Soares

SEDUC/Pa – Membro Externo

Pedro Franco de Sá

UEPA – Membro Externo

Valberto Rômulo Feitosa Pereira

IFCE – Membro Externo

Augusto Lacerda Lopes de Carvalho Júnior

IFPA – Membro do Proformat Castanhal

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus. Pelos dons concedidos, pela oportunidade de utilizá-los e por sua presença nos melhores e piores momentos.

Meus agradecimentos à minha família, por todo o apoio, incentivo e dedicação para que eu chegasse até aqui. Em especial, minha falecida tia Maria Letícia, que Deus a tenha em um bom lugar.

Agradeço também à minha noiva, Jessica Gama, por todos os momentos que vivemos desde 2015. Obrigado por todo o apoio e motivação, pela incrível ajuda com todo o percurso acadêmico e, em especial, com a produção deste trabalho. Suas opiniões e ações, sempre sinceras, perspicazes e sensatas, foram fundamentais para meu crescimento acadêmico e pessoal.

Ao professor Valdelírio da Silva e Silva, por acreditar no meu potencial desde a graduação, por sua compreensão, apoio e incentivo. Suas ideias são sempre um ótimo exemplo do que podemos chamar de *easy to learn, hard to master*, e sim, isso foi um elogio.

De modo geral, a todos os meus amigos e colegas, da vida e/ou de trabalho, que contribuíram de forma direta ou indireta para minha formação como cidadão. Muito obrigado!

Epígrafe

“Claro que está acontecendo em sua mente [...],
mas por que isto significaria que não é real?”

(J.K. Rowling)

Resumo

Um conjunto de atividades interativas, organizadas como Sequências Didáticas, é apresentado como introdução à Teoria dos Números. As páginas iniciais contextualizam os assuntos seguindo a metodologia *Storytelling* e se enquadrando como avaliação diagnóstica. A teoria é apresentada formalmente, mas sem demonstrações, seguida de exemplos e exercícios de fixação, explorando as interatividades da Camada de Computação dos *Desmos*, que é a TDIC utilizada como ferramenta para a proposta. Diversos tópicos têm interpretação/aplicação geométrica (conversão de bases, MDC, TFA) ou calculadoras programadas para solução de tradicionais temas da teoria dos números (inteiros de Bezout, Equações Diofantinas, Congruência e Simplificação de Congruência Linear, e Sistema de Congruências Lineares pelo Teorema Chinês do Resto), a fim de trazer ao discente ferramentas para teste de verificação de seus conhecimentos. Finalizando cada grupo vem uma avaliação final para registro do aprendizado do discente. Como todas as atividades usam a *Classroom* do *Desmos*, o gerenciamento e *feedback* ficam a cargo do docente usando o painel de controle (trazido por um pequeno tutorial em apêndice). E já que a plataforma *Desmos* permite copiar e editar atividades, este trabalho possibilita aos docentes fazerem uso das sequências da forma que julgarem mais adequada, mesmo com substituição/edição de páginas. As considerações finais apontam para uma visão de que a combinação destes recursos, constitui uma promissora alternativa metodológica para o enriquecimento do processo de ensino e aprendizagem, com potencial de aprimoramento da prática docente, inovação em processos avaliativos e incentivo ao protagonismo discente.

Palavras-chaves: Teoria dos números; TDIC; *Storytelling*; Sequências Didáticas; *Desmos*.

Abstract

A set of interactive activities which are organized as a Didactic Sequency, they are part of the introduction to numbers theory. The first pages present a context of subjects what follows up the Storytelling methodology and also as diagnose evaluation. The theory has been presented formally. Nevertheless, there isn't demonstration, it also has examples of exercises that explores the interactive of *Desmos*' computer layer called DICT which is used as a tool for the purpose of this study. Some topics have a geometric interpretation and application (base conversions GCD, FTA) or calculators are programmed to solve traditional theme of the number theory (Bezout's integers, Diophantines equations, Congruences and Simplification of Linear Congruences, also Linear Congruence System by Chinese remainder theorem) as a result to give to the student tools to test the verification of their knowledge. Each group finishes with a final evaluation for registration of their learning. As all activities use one classroom from *Desmos*, the management and feedback come from the teacher who manages the dashboard of control (there is a short tutorial on appendix). In addition, the *Desmos* allows to copy and edit activities that gives to the teachers the possibility to use the sequencies the way what they think is the best way even into replacement or edition of pages. In conclusion the view of combination of these resources constitutes a promising alternative to enrich the process of teaching and learning, with the potential to improve teaching practice, innovate assessment processes and a boost to student protagonist.

Keywords: Theory of Numbers; DICT; *Storytelling*; Didactic Sequences; *Desmos*.

Lista de Figuras

1.1	Página inicial do <i>Desmos</i>	20
1.2	Página inicial do <i>Desmos Classroom</i>	21
1.3	Página inicial do <i>Desmos Classroom</i>	22
1.4	Painel de atividades personalizadas	22
1.5	Criação de turmas no <i>Desmos classroom</i>	23
1.6	Criação da Turma B	24
1.7	Lista de turmas	24
1.8	Configurações de turmas	24
1.9	Adição de professores colaboradores	25
1.10	Atribuindo atividades às turmas	25
1.11	Atividade atribuída à uma turma	26
1.12	Código de convite da turma A	26
1.13	Configurações do código de convite da turma A	27
1.14	Página inicial da turma A	27
1.15	Atividades atribuídas à uma turma	28
1.16	Painel de controle de uma atividade	28
1.17	Respostas dos alunos no modo anonimato	29
1.18	Definindo um “Ritmo”	29
1.19	Resumo	30
1.20	Respostas de “Tasha Inniss”	30
1.21	Respostas de “Kiran Gandhi”	31
1.22	Deixando comentários nas atividades	31
1.23	Adicionando <i>prints</i>	32
1.24	Relação de <i>prints</i>	32
2.1	Retângulo de largura 8 e altura 12	48
2.2	MDC e MMC de 8 e 12	48
2.3	Diagonal do retângulo de área ab	49
3.1	Narrativa da avaliação diagnóstica	57
3.2	Perguntas da avaliação diagnóstica	57
3.3	Atividade sobre divisibilidade	58
3.4	O algoritmo da divisão	58
3.5	Conversão de decimais em binários	59
3.6	Bases de numeração	59
3.7	Critérios de divisibilidade por 4 e 8	60
3.8	Atividade sobre conversão de decimais em binários	60

3.9	Mudança de base	61
3.10	Exemplo sobre mudança de base	61
3.11	Atividade proposta sobre mudança de base	62
3.12	Convertendo da base 10 para outra qualquer	62
3.13	Convertendo 315 para a base 4	63
3.14	Representação geométrica de uma equação diofantina	63
3.15	Exercício sobre representação geométrica de equações diofantinas	64
3.16	Calculadora para equações diofantinas	65
3.17	Apresentação das soluções	65
3.18	Congruências	66
3.19	Exercício sobre congruências	66
3.20	Atividades propostas sobre congruências	67
3.21	Proposição	67
3.22	Analogia do relógio	68
3.23	Circunferência das congruências	68
3.24	Resolução de congruências lineares	69
3.25	Calculadora de soluções de congruências lineares	69
3.26	Sistemas de congruências lineares	70
3.27	Exercício resolvido	70
3.28	Atividade proposta	71
3.29	Calculadora de simplificação de congruências lineares	71
3.30	TCR	72
3.31	Exercício resolvido	72
3.32	Atividade proposta	73
3.33	Calculadora de simplificação de múltiplas congruências lineares	73
3.34	Calculadora de sistemas pelo TCR	74
3.35	Calculadora de sistemas de congruências lineares	74
3.36	Parte da avaliação final	75
3.37	SD sobre MDC e MMC	75
3.38	O algoritmo de Euclides	76
3.39	Uma interpretação geométrica do MDC	77
3.40	Teoremas importantes	77
3.41	Exercício	78
3.42	Calculadora de inteiros de Bézout	78
3.43	Utilização da calculadora de inteiros de Bézout	79
3.44	Mensagem de erro	79
3.45	Exercício contextualizado com narrativa	80
3.46	Perguntas	80
3.47	Atividade proposta	81
3.48	Método geométrico para determinar MMC e MDC de dois números	82
3.49	A arte das cordas: calculadora de MDC	82
3.50	MDC de 14 e 4	83
3.51	Calculadora de MDC com cordas	83
3.52	Avaliação final	84
3.53	Questões	84

3.54	Item final	85
3.55	Avaliação diagnóstica	86
3.56	Perguntas	86
3.57	Números primos	87
3.58	Exemplo sobre TFA e fatoração	88
3.59	Número de divisores e sua soma	89
3.60	Atividade proposta	89
3.61	Mensagem	90
3.62	Divisores de um número natural menor do que 37	90
3.63	Calculadora de fatoração	91
3.64	Fatoração do número 3465	91
3.65	Número de divisores de 3465	92
3.66	Atividade narrativa da avaliação final	92
A.1	Página inicial do <i>Desmos Classroom</i>	98
A.2	Painel de atividades personalizadas	99
A.3	Criando uma nova atividade	99
A.4	Configurando uma nova atividade	100
A.5	Começando do zero	100
A.6	Configurações de uma atividade já criada	101
A.7	Adicionando uma calculadora	101
A.8	Adicionando texto	102
A.9	Formatação de texto	102
A.10	Resposta matemática	103
A.11	Prévia	104
A.12	Exibindo a calculadora	104
A.13	Inserindo páginas	105
A.14	Múltipla escolha	105
A.15	Adicionando alternativas	106
A.16	Prévia da múltipla escolha	106
A.17	Resposta livre	107
A.18	Recursos de resposta	107
A.19	Caixas de seleção	108
A.20	Prévia das caixas de seleção	108
A.21	Gráficos e desenhos	109
A.22	Plotando um gráfico	109
A.23	Prévia do gráfico e do desenho	110
A.24	Mídias e tabelas	110
A.25	Mídias e tabelas editadas	111
A.26	Prévia	111
A.27	Ferramentas de tela cheia	112
A.28	Calculadora gráfica	112
A.29	Prévia	113
A.30	Publicando	113
A.31	Área inicial da atividade	114

A.32 Compartilhando	114
A.33 Janela de adição de comandos da CL	115
A.34 Editando o <i>Script</i>	115
A.35 Desabilitando a calculadora	116
A.36 Mensagem de indisponibilidade da calculadora	116
A.37 Documentos da CL	117
A.38 Exemplo relacionado ao comando “ <i>title</i> ”	117
A.39 Executando a tarefa do exemplo	118
A.40 Divisibilidade	118
A.41 Blocos da atividade	119
A.42 Inserindo o comando “ <i>correct</i> ”	119
A.43 Página “Algoritmo da divisão”	120
A.44 Comando “ <i>correct</i> ” em tabelas	120
A.45 Calculadora de conversão de base	121
A.46 Blocos componentes	121
A.47 Texto do bloco “ <i>text</i> ”	122
A.48 <i>Script</i> do bloco “ <i>input</i> ”	122
A.49 Mensagem de erro	123
A.50 Mensagem de erro 2	123
A.51 Bloco “ <i>testasol</i> ”	124
A.52 Alternância de textos	124
A.53 Calculadora gráfica	125
A.54 Programação da calculadora	126
A.55 <i>Script</i> da calculadora	126

Lista de Tabelas

2.1	Mudança da base 10 para base “b”	36
2.2	Mudança de 176 na base 10 para a base 2	37
2.3	Algoritmo de Euclides para o cálculo do mdc	46
2.4	$\text{mdc}(684,177)$	46
3.1	Quadro resumo das definições de SD	53

Sumário

Introdução	13
1 O <i>Desmos</i> no ensino de Matemática	16
1.1 TDIC	16
1.2 Ensino Híbrido	17
1.3 A Metodologia Storytelling	17
1.4 O <i>Desmos</i>	19
1.5 <i>Desmos Classroom</i>	20
2 Tópicos de Teoria dos Números	33
2.1 O Algoritmo da Divisão	34
2.2 Máximo Divisor Comum	44
2.3 Mínimo Múltiplo Comum	46
2.4 O Teorema Fundamental da Aritmética	50
3 As Sequências Didáticas	52
3.1 Calculadoras de Equação Diofantina, de Congruência Linear e de Sistemas de Congruências Lineares	55
3.2 Atividade 1: O Algoritmo da Divisão ↗	56
3.3 Atividade 2: MDC e MMC ↗	75
3.4 Atividade 3: TFA ↗	85
Considerações Finais	93
Referências	95
Apêndice	97
A Criação de Atividades no <i>Desmos Classroom</i>	98
A.1 Exemplos de utilização da CL	114

Introdução

Nas últimas décadas, a democratização do acesso à tecnologia aumentou significativamente. Hoje em dia, a maioria das pessoas tem, em seu bolso, um computador mais potente do que aquele que levou o homem à lua, por exemplo.

Com esta facilidade de acesso, criaram-se diversas possibilidades de aplicação da tecnologia, sendo a educação uma das grandes beneficiadas com este processo.

Existe uma grande dificuldade relacionada à educação: o tempo! O tempo de aula não é suficiente para expor tudo o que seria necessário ao aluno saber, aplicar todos os exercícios, apresentar todos os vídeos e etc. Uma forma de contornar esta barreira é complementado o processo de ensino e aprendizagem com atividades extras, para além dos muros da escola.

No entanto, existe o dilema de como orientar os estudos uma vez que o estudante não se encontra mais na sala de aula, ou o problema de despertar o interesse dele em buscar conhecimento fora dela e/ou exercitar o que já adquiriu.

Uma alternativa interessante para lidar com este problema é a utilização das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), levando em consideração a adaptabilidade dos alunos às tecnologias atuais.

Segundo Moran & Bacich (2018), se faz necessário essa reinvenção do modo que pensamos em educação, sabendo da influência que a cultura digital trouxe para a realidade dos nossos estudantes. Ou seja, é relevante a integração desses meios digitais no processo de ensino e aprendizagem pois,

para impulsionar o engajamento dos estudantes nos processos de ensino e aprendizagem é premente recontextualizar as metodologias de ensino diante das suas práticas sociais inerentes à cultura digital, ou seja, integrar as mídias e as TDIC no desenvolvimento e na recriação de metodologias ativas (MORAN; BACICH, 2018, p. 16).

Segundo Bacich (2016), os estudos direcionados a esta área de pesquisa não são recentes, e diversos deles tentam analisar todo esse processo relacionado ao início dos avanços tecnológicos.

Os ambientes virtuais de troca de mensagens, compartilhamento de vídeos e atividades, dentre outros, são excelentes opções para interação fora da escola. Além do que, permitem que os usuários utilizem suas habilidades oriundas do contato com a tecnologia

para a construção do próprio conhecimento.

Com o contexto da pandemia de COVID-19, a sociedade passou por uma fase de adequação à nova realidade. Sendo assim, as diversas mudanças que ocorreram também influenciaram no contexto escolar, acelerando a adaptação de toda comunidade à uma outra modalidade, o ensino híbrido.

De acordo com Bacich (2016), essa modalidade é o ponto de convergência entre o modelo presencial e o *on-line*. Basicamente, a aprendizagem pode ocorrer em outros espaços e em outros horários, não somente na escola durante as aulas, ou seja, se discute que “não existe uma única forma de aprender e que a aprendizagem é um processo contínuo” (BACICH, 2016, p. 4). Sendo assim, deve-se repensar nossa prática docente e analisar formas de lidar com os novos desafios que nos são apresentados.

O método tradicional, de sala, quadro e pincel, não pode ser a única forma de estabelecer o processo de ensino e aprendizagem, precisamos de alternativas. A sociedade está evoluindo cada vez mais rápido, e a educação não pode continuar estagnada (FIGUEIREDO, 2014).

O objetivo deste trabalho é propor uma introdução à teoria dos números com a utilização de um conjunto de sequências didáticas, compostas por atividades interativas, na *classroom* do *Desmos*, na perspectiva da metodologia ativa *Storytelling*. Para tanto, discorre-se acerca das TDIC, do ensino híbrido, sobre a utilização de metodologias ativas no processo de ensino e aprendizagem, tópicos da teoria dos números e as possibilidades do uso da plataforma *Desmos* para a aplicação da metodologia.

Dentre os objetivos específicos do trabalho, estão: apresentar a plataforma *Desmos* e o ambiente *Desmos classroom*; utilizar a metodologia *Storytelling* no contexto de sequências didáticas sobre teoria dos números; orientar sobre as possibilidades do *classroom* no ensino híbrido, com um breve tutorial sobre a criação de turmas, atribuição de atividades e utilização do painel de controle.

A motivação para a elaboração deste texto surgiu de reflexões sobre de que formas a educação pode se beneficiar do aumento na democratização do acesso à tecnologia, quais as possibilidades que a plataforma *Desmos* proporciona para o processo de ensino e aprendizagem e sobre a necessidade de inovação na prática docente, com a perspectiva de aliar metodologias ativas e TDIC, no contexto do ensino híbrido ou assíncrono, como metodologia auxiliar ao ensino tradicional. Desta forma, a proposta é enriquecer a prática docente, fornecendo alternativas que complementem as estratégias já utilizadas.

Seguindo esta linha de pensamento, o ramo da Matemática escolhido foi a teoria dos números, devido a sua abrangência dentro do ensino básico e versatilidade de adaptação em contextos cotidianos, que contribuem para a construção das narrativas utilizadas na aplicação

da metodologia escolhida.

Deste modo, busca-se instigar professores à desenvolver práticas que encorajem os alunos a assumir sua responsabilidade como construtores do próprio conhecimento e protagonistas do processo educativo no qual estão inseridos (FIGUEIREDO, 2014).

Realizou-se uma pesquisa bibliográfica, para analisar estudos sobre teoria dos números, sequências didáticas, *Storytelling*, ensino híbrido, TDIC e identificar um número maior de possibilidades do que seria possível em uma coleta direta de informações do campo.

O capítulo 1 discorre sobre as TDIC no contexto do ensino de Matemática, principalmente no que diz respeito ao ensino híbrido. Há a apresentação da plataforma *Desmos*, do ambiente *Desmos classroom* e da metodologia ativa *Storytelling*.

O capítulo 2 contempla os tópicos de teoria dos números que foram utilizados na composição das atividades digitais no ambiente *Desmos classroom*, contando com definições, teoremas, corolários, lemas e afins. É a fundamentação teórica específica para o conteúdo de cada sequência didática, sendo os temas geradores: algoritmo da divisão, MMC, MDC e teorema fundamental da aritmética.

O capítulo 3 conta com a apresentação das atividades já prontas, evidenciando seu conteúdo e a proposta de interação com os discentes. O texto aborda alguns aspectos sobre sua construção na plataforma, as motivações para sua elaboração, as expectativas quanto a interação dos usuários com as atividades, algumas possibilidades para os docentes realizarem a gestão de atividades utilizadas e apresenta os meios de acesso, deixando aberto o espaço para que os professores interessados as utilizem como base para a elaboração de suas próprias atividades.

A decisão de não aplicar as atividades é oriunda de diversos fatores, como o tempo, por exemplo. No entanto, este fato não diminui a importância do produto, nem exclui a possibilidade de trabalhos posteriores, onde venham a ser feitas aplicações com diferentes públicos.

A pesquisa se mostrou relevante pois instiga os professores a buscarem métodos que possam complementar sua prática docente e apresentar ideias de utilização das TDIC no ensino de Matemática, além de disponibilizarmos uma sequência didática composta de três atividades prontas para serem utilizadas através da plataforma *Desmos*, contribuindo assim para a formação continuada dos professores.

— O *Desmos* no ensino de Matemática —

Atualmente, os recursos digitais tem sido amplamente utilizados na educação. Ferramentas de vídeoconferência, plataformas de compartilhamento de vídeos, agregadores de *Podcasts* e etc, são apenas alguns dos exemplos que podemos citar.

No que se refere à Matemática, temos diversos sites que desempenham tarefas específicas, como resolver determinado tipo de equação, plotar gráficos, elaborar simulados. Com a facilidade de acesso à internet, proporcionada, principalmente, pela popularização dos *smartphones*, é comum que os estudantes utilizem recursos como esses para realizar suas tarefas escolares, estudar para provas e tirar dúvidas.

Com a utilização correta, estes recursos podem se tornar excelentes aliados no processo de ensino e aprendizagem. Com este intuito, a plataforma *Desmos* fornece uma gama de ferramentas, recursos interativos e ambientes gratuitos, dos quais professores e estudantes podem se beneficiar para a construção de conhecimento matemático.

1.1 TDIC

A base nacional comum curricular (BNCC) cita, como uma competência geral da educação básica, o seguinte item:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2018, p.9).

As TDIC das quais o documento fala são o conjunto de recursos tecnológicos digitais que mediam os processos de emissão e recepção de informações entre os indivíduos. Como exemplo, temos: internet, redes sociais, softwares diversos (SCHUARTZ; SARMENTO, 2020).

Quando utilizadas de modo responsável e orientado, estas tecnologias podem contribuir para o processo cognitivo de construção do conhecimento por parte de cada estudante.

Com a capacidade de despertar a curiosidade e instigar a interação, pesquisa, experimentação, formulação de hipóteses e realização de testes, elas “podem enriquecer a aula, potencializar os processos reflexivos, contribuindo assim para a (re)elaboração de novos saberes” (SCHU-ARTZ; SARMENTO, 2020, p.431).

É importante ressaltar que, com a utilização das TDIC no exercício da docência, o professor não está apenas transmitindo informações de um modo diferente, ele possui uma ferramenta que pode contribuir ativamente para o desenvolvimento e a consolidação do processo de ensino e aprendizagem de cada estudante. Para tanto, o docente deve conhecer e dominar, pelo menos a nível intermediário, a manipulação do recurso tecnológico escolhido, de modo a vincular a prática aos objetivos traçados no planejamento prévio (SCHU-ARTZ; SARMENTO, 2020).

Com o intuito de motivar reflexões e estimular a curiosidade, a seguir tem-se a apresentação de uma metodologia ativa de ensino, assim como de uma TDIC, e suas relações com o processo de ensino e aprendizagem, ressaltando possibilidades e práticas que conversam com os objetivos da educação.

1.2 Ensino Híbrido

No contexto educacional da sociedade pós-pandêmica, temos uma realidade onde a utilização de recursos digitais tornou-se uma prática com nível razoável de aceitação entre os componentes das comunidades escolares. Sendo assim, podemos vislumbrar muitas oportunidades que antes talvez não fossem sequer cogitadas, como videoconferências, realização de atividades por aplicativos de mensagens, plataformas digitais, dentre outros.

Neste sentido, devemos estar atentos a novas tendências educacionais e possibilidades metodológicas, de modo a enriquecer a prática docente buscando maior eficiência e melhor adaptabilidade. Sabe-se que “atualização e busca contínua pelo saber passam a ser palavras de ordem nesta sociedade permeada pela informação e pelo conhecimento” (SCHU-ARTZ; SARMENTO, 2020, p.431).

Com estas especificidades em mente, pode-se conceber que o ensino híbrido, misto de ensino presencial e não presencial, é uma possibilidade latente para os próximos anos e tem um potencial enorme de revolução do sistema educacional vigente.

1.3 A Metodologia Storytelling

Recentemente, viralizou na internet um “meme” que dizia mais ou menos assim: “Hoje, na aula de Matemática, tinha uma questão em que Joãozinho foi à feira, comprou 300

bananas e 250 maçãs. Gente, quantas pessoas moram com Joãozinho?”.

O *post*, apesar de arrancar risadas, se refere a uma situação que é relativamente comum nas aulas de Matemática do ensino fundamental: a contextualização de conceitos e objetos matemáticos de modo descuidado e desconectado da realidade.

A BNCC orienta que a contextualização dos conteúdos é uma prática de grande importância para a assimilação e para o desenvolvimento do estudante, além de ser um recurso metodológico de muita valia para os professores. O documento afirma que o foco do ensino médio “é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade” (BRASIL, 2018, p.518).

Desta forma, é necessário que se leve em consideração o conjunto de conhecimentos e vivência prévias dos estudantes, que está relacionado com o contexto sociocultural e econômico onde estão inseridos, assim como é de grande importância que eles possuam espaço para interagir com seus colegas, de modo a construir um processo de investigação e raciocínio que os leve à formulação de explicações, com justificativas, para as situações problemas que a eles forem apresentadas (BRASIL, 2018).

Vale ressaltar que não necessariamente o processo de ensino e aprendizagem se dará exclusivamente pela análise e resolução de problemas. O conhecimento Matemático vai muito além disto. A investigação de propriedades, curiosidades, teorias e etc, é uma das formas com que grande parte do conhecimento matemático foi construído ao longo dos séculos. Apesar de ser absolutamente válida e importante a construção e aplicação de conhecimento para a resolução de eventuais problemas, em Matemática isto não é **necessário**.

Na história da humanidade, muitos conhecimentos matemáticos só obtiveram aplicação muito tempo após terem sido formulados, e em situações que a pessoa que os formulou talvez nem tivesse imaginado que poderiam ser utilizados. A generalização, abstração e o despreendimento da obrigação de aplicabilidade dos conhecimentos e descobertas é uma característica intrínseca à Matemática.

No entanto, para o ensino básico, é muito útil a prática de contextualizar e problematizar. É uma forma de criar interesse e, neste momento em que a sociedade se encontra, de imediatismo e aversão à ociosidade ou a inutilidade, de proporcionar uma sensação de satisfação e/ou autorrealização em quem consegue utilizar os conceitos e teorias para resolver situações-problema (SAPPI, 2019).

Não existe problema algum em contextualizar a adição em uma situação que envolva centenas de bananas e maçãs, no entanto, a situação de Joãozinho é pouco factível para a maioria dos estudantes. Uma excessão seria aquele estudante que possui vínculo com alguma lanchonete/frutaria/padaria que revende frutas ou produz saladas de fruta e tortas de maçã em grande escala, por exemplo, e que seja encarregado de realizar as compras para a empresa.

Não é provável que muitos estudantes do ensino fundamental estejam nessa posição.

A questão central é que a contextualização deve ser tratada com certo grau de responsabilidade e atenção, para que, ao invés de se tornar motivo de risos nas redes sociais, se torne motivo de reflexão, construção do conhecimento e aprimoramento do raciocínio lógico.

Em muitas atividades, vemos diversas questões contextualizadas em que as situações, por terem o único objetivo de levar um problema ao leitor, além de se tornarem pouco factíveis, são repetitivas, entediadas e até cômicas, seja devido a resultados totalmente desconexos da realidade ou situações impraticáveis, como a de Joãozinho.

Levando em consideração todos estes aspectos, apresenta-se a metodologia ativa de ensino *Storytelling*, que consiste no “uso de narrativas com significado social ou cultural para promover a reflexão acerca de conceitos e valores, de forma a consolidar essas ideias abstratas por meio da percepção da relevância e significância de tais conceitos e valores a um grupo de indivíduos” (VALENÇA; TOSTES, 2019, p. 222).

De acordo com Teodosio (2021), o *Storytelling* é uma metodologia que se vale de recursos pedagógicos e que proporciona uma situação favorável à utilização da criatividade, o desenvolvimento do senso crítico e a interação entre os sujeitos envolvidos.

Uma das competências específicas de Matemática para o ensino médio, segundo a BNCC, é:

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral. (BRASIL, 2018, p. 523).

O que, dentre outras coisas, quer dizer que os estudantes deveriam desenvolver a capacidade de criar estratégias para encarar situações do cotidiano com uma visão matemática e desempenhar atividades, resolver problemas ou realizar análises, com a alto grau de eficiência (FIGUEIREDO, 2014).

Deste modo, o *Storytelling* é uma forma de criar situações que simulem eventos reais e sirvam como uma espécie de treino para os estudantes. Ou seja, as narrativas ficcionais, que utilizam elementos e/ou contextos reais, podem contribuir para que estas competências sejam desenvolvidas, treinadas e postas à prova, assim aumentando a probabilidade de que, quando forem necessárias, sejam utilizadas com sucesso e tragam resultados satisfatórios.

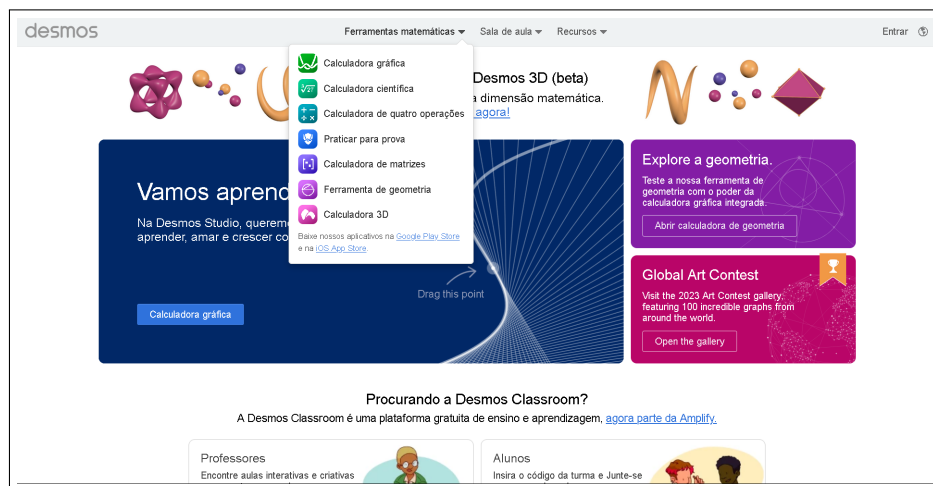
1.4 O Desmos

Desmos é uma plataforma digital que engloba um conjunto de ferramentas matemáticas gratuitas. Ela é propriedade da corporação *Desmos Studio*, que “é uma empresa de

benefício público com o objetivo de ajudar todos a aprender matemática, amar matemática e crescer com a matemática” (DESMOS, 2011).

A plataforma possui ferramentas como calculadora gráfica, tanto 2d quanto 3d, ferramenta geométrica, calculadora científica, calculadora de matrizes e outros recursos (figura 1.1). Também existem aplicativos *mobile* para os sistemas *Android* e *iOS*.

Figura 1.1: Página inicial do *Desmos*



Fonte: capturada da plataforma *Desmos*.

Segundo dados da própria plataforma, sua calculadora gráfica é utilizada, anualmente, por mais de 75 milhões de pessoas ao redor do mundo. Além disto, possuem parceria com avaliações estaduais e exames vestibulares digitais do Estados Unidos da América.

Recentemente, a plataforma realizou o 3º concurso artístico anual, no qual os participantes utilizam a calculadora gráfica para compor verdadeiras obras de arte. No *site*, há uma aba onde estão destacados os 20 gráficos escolhidos para apresentar de cada categoria, que são definidas por idade. É possível visualizar a página pelo link [Desmos concurso artístico](#).

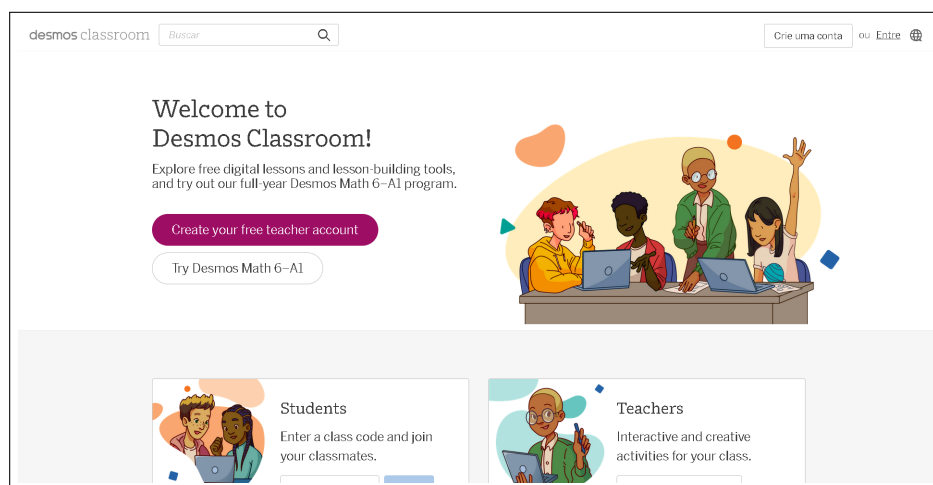
1.5 *Desmos Classroom*

Dentro da plataforma *Desmos*, há um recurso chamado *Desmos Classroom*, que é um ambiente para construção e utilização de atividades digitais (figura 1.2).

No decorrer de todo o texto, sempre que utilizarmos o termo “Atividade(s)”, estaremos nos referindo às atividades digitais que podem ser elaboradas neste ambiente da plataforma.

No *Classroom* é possível atribuir atividades às turmas criadas e receber os *feedbacks* de cada aluno, assim como um relatório detalhado da interação de cada estudante com as atividades atribuídas.

Figura 1.2: Página inicial do *Desmos Classroom*

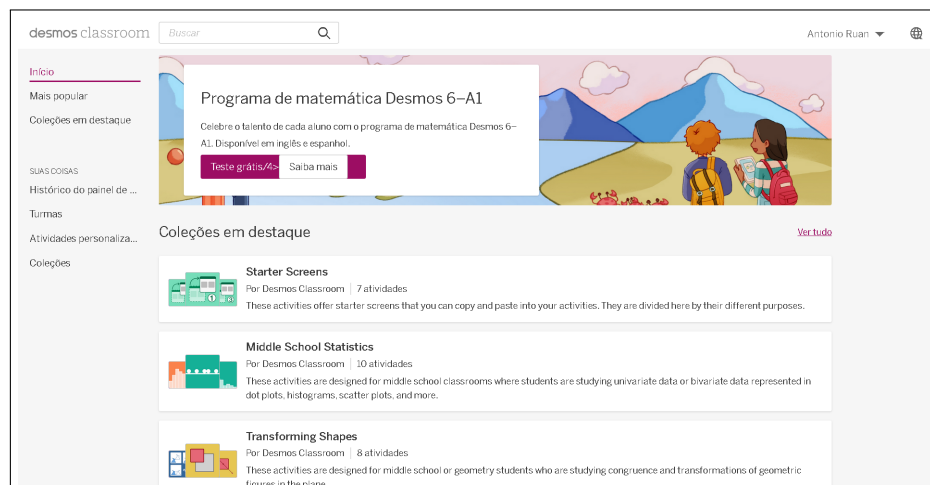


Fonte: capturada da plataforma *Desmos*.

Para aumentar o grau de interação e *feedbacks* dos estudantes, é possível adicionar às atividades a chamada *Computation Layer* (CL), que é uma camada de computação, utilizada com linguagem própria, baseada em *Java Script*, para automatizar e agilizar processos, trazendo recursos que apenas a ferramenta tradicional de montagem das atividades não possui, como a correção automática de atividades, por exemplo.

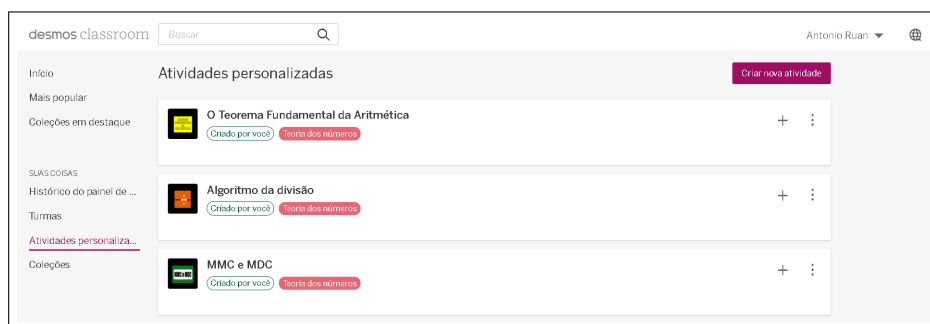
Atualmente, o *Desmos Classroom* está firmando parceria com a empresa de educação *Amplify*, assim dispondo de mais recursos para o desenvolvimento de suas ferramentas e de um programa chamado *Desmos Math 6–A1*, que é um conjunto de atividades para um ano inteiro, com conteúdos selecionados por uma equipe especializada.

Ao acessar o *classroom*, após fazer o registro, o usuário visualiza uma tela em que constam: um anúncio para o programa *Desmos Math 6–A1*, uma lista com coleções de atividades em destaque, uma barra de pesquisa para encontrar atividades pelo nome e um menu que inclui, dentre outras coisas, um acesso às produções do usuário (figura 1.3).

Figura 1.3: Página inicial do *Desmos Classroom*

Fonte: Capturada da plataforma Desmos.

Ao clicar em “Atividades personalizadas”, chega-se à um painel com as atividades feitas pelo usuário (figura 1.4), caso haja alguma, e uma opção de “Criar nova atividade”, onde se pode criar uma do zero. É possível também pesquisar uma atividade no painel inicial e copiá-la para poder editar e construir uma nova atividade a partir desse modelo.

Figura 1.4: Painel de atividades personalizadas

Fonte: capturada da plataforma Desmos.

1.5.1 *Computation Layer (CL)*

A CL é a camada de computação que permite executar funções, definir parâmetros e conectar componentes dentro do ambiente do *Desmos Classroom*. Com esta ferramenta, é possível tornar as atividades ainda mais interativas e eficientes, além de auxiliar o professor em diversos aspectos, como a correção de exercícios, por exemplo.

Utilizando o *Desmos Classroom* e a metodologia *Storytelling*, elaborou-se um conjunto de sequências didáticas, apresentado no capítulo 3, visando conciliar a utilização de uma metodologia ativa e uma TDIC no contexto do ensino híbrido de Matemática. Ao discorrer sobre estas sequências, são evidenciadas as contribuições/aplicações da CL nos elementos que as constituem.

Para um maior detalhamento sobre a CL, consultar a documentação oficial em [Computation Layer](#).

1.5.2 O Painel de Controle do *Desmos Classroom*

Na seção 1.5, foi apresentado o *Desmos classroom*. Agora, apresenta-se o ambiente onde, após criada uma atividade, pode-se gerenciá-la. Também será tratado sobre como criar uma turma, atribuir atividades a ela e outras mecânicas importantes.

1.5.2.1 Criação de Turmas

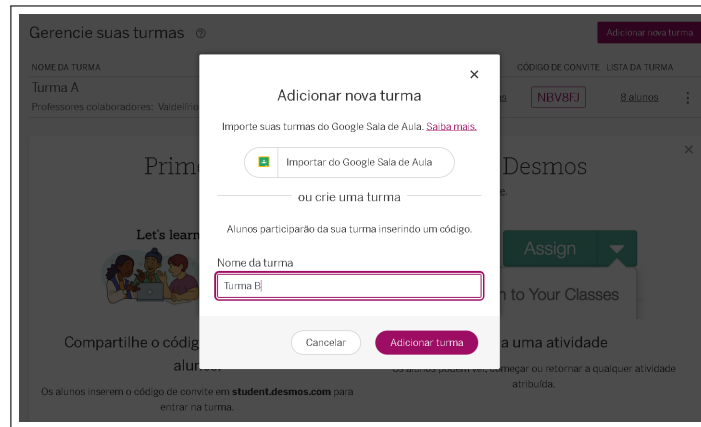
Na página inicial do *classroom*, há um item chamado “turmas”. Clicando sobre ele, acessamos a página onde se pode criar turmas para atribuir atividades (figura 1.5).

Figura 1.5: Criação de turmas no *Desmos classroom*



Fonte: capturada da plataforma *Desmos*.

Ao clicar em “Adicionar nova turma”, apresenta-se uma janela para a inserção de um nome. Acompanhe abaixo a criação da “Turma B” (figura 1.6).

Figura 1.6: Criação da Turma B

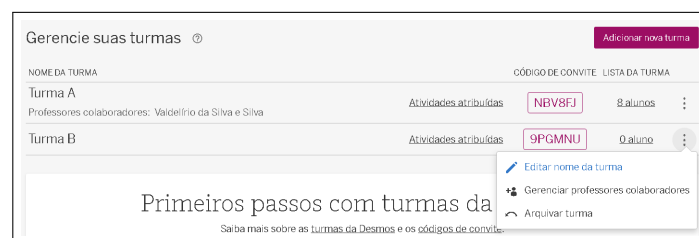
Fonte: capturada da plataforma Desmos.

Figura 1.7: Lista de turmas

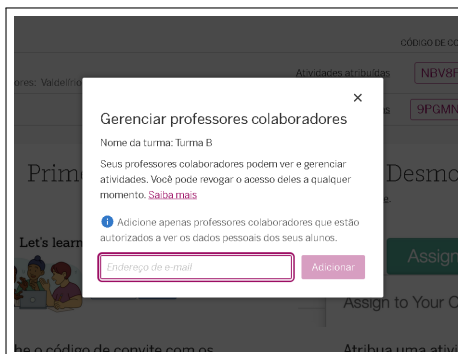
NOME DA TURMA	CÓDIGO DE CONVITE	LISTA DA TURMA
Turma A Professores colaboradores: Valdelino da Silva e Silva	Atividades atribuídas NBV8FJ	8 alunos
Turma B	Atividades atribuídas 9PGMNU	0 aluno

Fonte: capturada da plataforma Desmos.

Agora a turma fica disponível para ter atividades atribuídas. Clicando no símbolo formado por três pontos, um em cima do outro, tem-se acesso a algumas configurações, como as opções de renomear e de adicionar professores colaboradores, informando os respectivos endereços de *e-mail* desses professores, por exemplo (figura 1.8).

Figura 1.8: Configurações de turmas

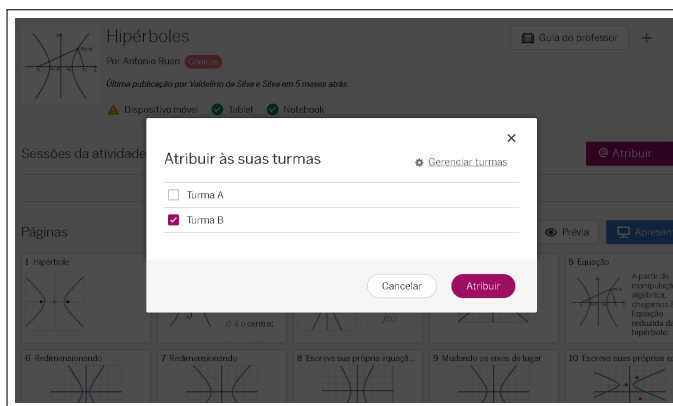
Fonte: capturada da plataforma Desmos.

Figura 1.9: Adição de professores colaboradores

Fonte: captura da plataforma *Desmos*.

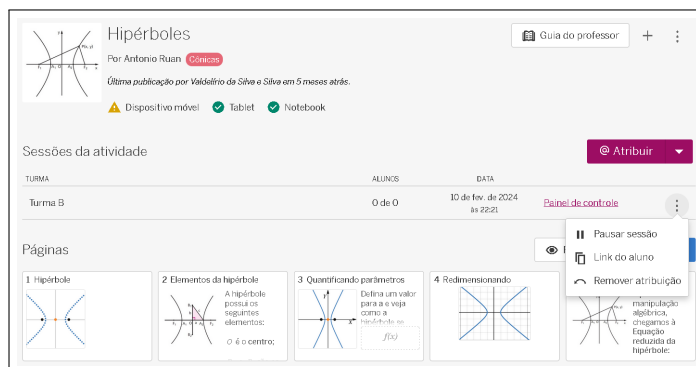
1.5.2.2 Atribuição de Atividades e Acesso dos Alunos

Depois criada a turma, basta escolher uma das atividades, acessá-la e clicar no botão “Atribuir”. Será apresentada uma janela onde é necessário escolher a turma para qual se quer atribuir a atividade.

Figura 1.10: Atribuindo atividades às turmas

Fonte: captura da plataforma *Desmos*.

A partir deste momento, aparecerão, na página inicial da atividade, informações sobre a turma para qual ela foi atribuída, como: nome, quantidade de alunos, data, painel de controle e uma seção de configurações onde se pode gerar um *link* para os alunos acessarem a atividade diretamente por ele. Caso o aluno ainda não esteja na turma, ele será automaticamente adicionado ao realizar o primeiro acesso.

Figura 1.11: Atividade atribuída à uma turma

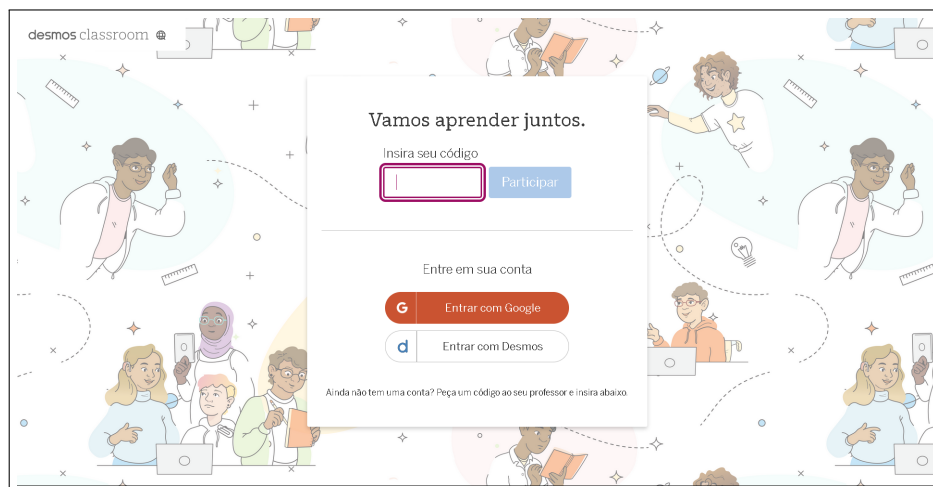
Fonte: captura da plataforma Desmos.

Outra forma para que os alunos possam acessar as turmas e, por consequência, as atividades a elas atribuídas, é o denominado “código de convite”. O código pode ser obtido na seção “Turmas”, como apresentado na imagem 1.7. Ao clicar sobre o código, temos instruções sobre como ele funciona.

Figura 1.12: Código de convite da turma A

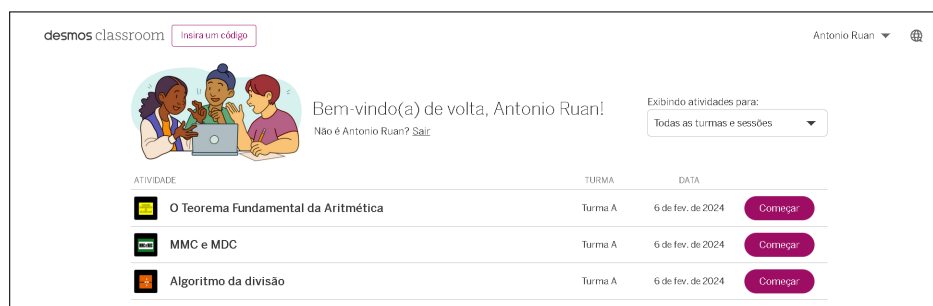
Fonte: captura da plataforma Desmos.

Nesta janela é possível desativar o código de convite ou alterar sua data de validade. Para o estudante ter acesso à turma pelo código, é necessário acessar o link e digitá-lo no campo determinado.

Figura 1.13: Configurações do código de convite da turma A

Fonte: capturada da plataforma *Desmos*.

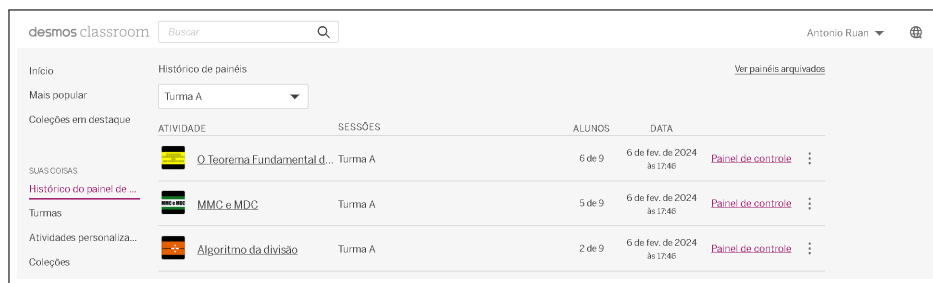
Caso o aluno não tenha cadastro no *Desmos classroom*, ele pode criar ou acessar com sua conta do Google. Após realizar o *login*, o aluno terá acesso às atividades que foram atribuídas.

Figura 1.14: Página inicial da turma A

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre a atividade autoral.

1.5.2.3 Painel de Controle

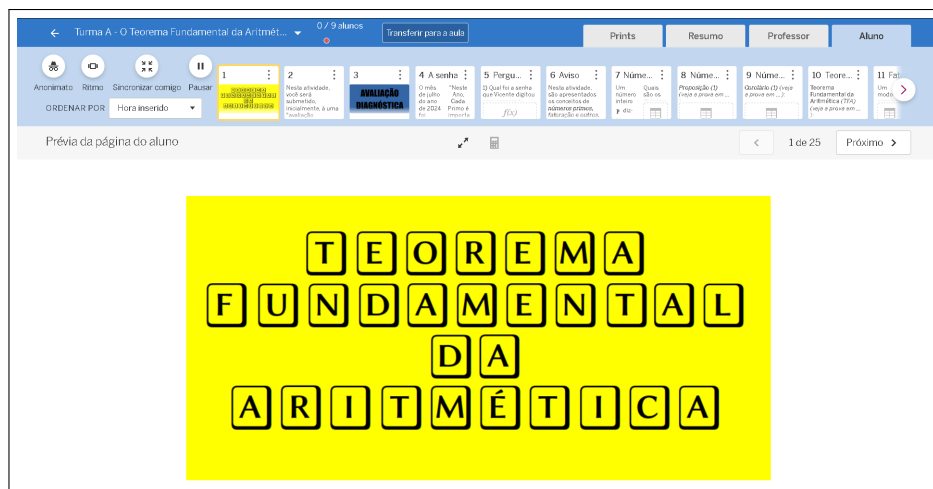
Na seção “Turmas” (imagem 1.7), temos a opção “Atividades atribuídas”. Clicando sobre esta opção, é apresentada uma relação com todas as atividades selecionadas, cada uma conta com a opção “Painel de controle”.

Figura 1.15: Atividades atribuídas à uma turma


ATIVIDADE	SESSÕES	ALUNOS	DATA	
O Teorema Fundamental d...	Turma A	6 de 9	6 de fev. de 2024 às 17:46	Panel de controle
MMC e MDC	Turma A	5 de 9	6 de fev. de 2024 às 17:46	Panel de controle
Algoritmo da divisão	Turma A	2 de 9	6 de fev. de 2024 às 17:46	Panel de controle

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre a atividade autoral.

Selecionando esta opção, o usuário é redirecionado para o painel, onde pode acessar diversas informações e configurações sobre a atividade e os alunos. Na parte superior direita temos as opções “Prints”, “Resumo”, “Professor” e “Aluno”. Já do lado direito, temos algumas funções, como “Anonimato”, “Ritmo”, “Sincronizar” e “Pausar”.

Figura 1.16: Painel de controle de uma atividade

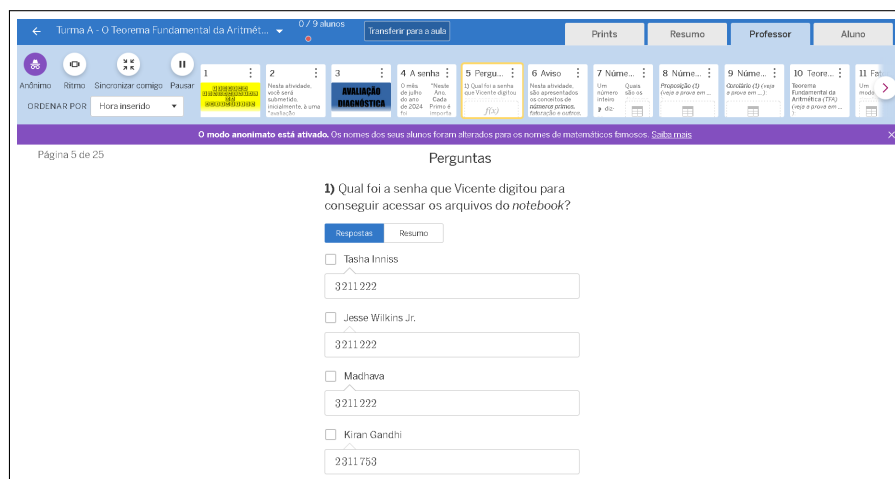
Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre a atividade autoral.

Os campos “Aluno” e “Professor” mostram as páginas da atividade do ponto de vista de cada um deles, respectivamente. No campo do aluno, pode-se observar a atividade em branco, enquanto no campo do professor, aparecem as respostas de cada aluno, por página, para que possa ser feita uma análise.

Na figura 1.17, pode-se observar uma página da atividade sobre o TFA, no campo do professor, em que os alunos registraram suas respostas. O modo “anonimato” foi ativado, para esconder os nomes dos alunos, que foram trocados automaticamente por nomes de

matemáticos famosos.

Figura 1.17: Respostas dos alunos no modo anônimo



Fonte: captura da plataforma *Desmos* sobre a atividade autoral.

Outro recurso interessante é o da função “Ritmo”, ela determina um intervalo de páginas da atividade ao qual o aluno terá acesso. No caso das SD, pode-se limitar inicialmente o acesso apenas às páginas da atividade relativas à avaliação diagnóstica, por um período determinado e informado aos alunos. Posteriormente, pode-se mudar o intervalo para as páginas que compreendem os conceitos e exercícios, finalizando com a avaliação final.

Figura 1.18: Definindo um “Ritmo”



Fonte: captura da plataforma *Desmos* sobre a atividade autoral.

Na seção “Resumo”, tem-se uma relação de informações que mostram a interação dos alunos com cada elemento da atividade.

Figura 1.19: Resumo

	7 Nme... Um número inteiro p diz...	8 Nme... Provação ID (veja a página em...)	9 Nme... Domínio ID (veja a página em...)	10 Teore... Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) (veja a página em...)	11 Fator... Um modo	12 Exerc... Fatore o número 488 sem usar...	13 Atvid... Fatore o número 288 sem usar...	14 Teore... Quadrado (veja a página em...)	15 MMC... Máximo Comum Divisor (veja a página em...)	16 Exerc... Determine o resto a partir de 25 e 360
Jagadish Chandra Bose										
Tasha Inniss	✓					✗	●			✗
Jesse Wilkins Jr.	✓									
Madhava	✓		✗			●	●			✗ ●
Kiran Gandhi	✗					✗	●			✗ ●
Erica Walker	✓		✓			✗	●			✗ ●

Alunos que ainda não começaram a atividade não são exibidos. Desative o anonimato para ver sua lista completa.

Fonte: captura da plataforma Desmos sobre a atividade autoral.

Os campos em cinza, ou com um travessão, representam páginas que não foram respondidas ou que não precisavam ser, como as de conteúdos, por exemplo. Os campos com um pequeno círculo cinza são aqueles que o aluno preencheu.

Caso o professor tenha introduzido, através de CL (veja em 1.5), a automatização das correções, o quadro de resumo indicará as atividades respondidas corretamente por um símbolo que lembra a letra V e as incorretas por um símbolo que lembra a letra X.

Clicando sobre cada campo do quadro resumo, pode-se acessar a página da atividade a qual ele se refere e verificar as respostas do aluno em questão. Cada linha do quadro representa um aluno e cada coluna representa uma página da atividade em questão.

Figura 1.20: Respostas de “Tasha Inniss”

Números primos

Um número inteiro p diz-se *primo* se tem exatamente dois divisores positivos: 1 e $|p|$. Caso contrário, o inteiro é dito *composto*.

Quais são os divisores próprios do número **12**? (complete a tabela)

Divisores próprios do número 12	
2	
3	
4	
6	

Alguns elementos do conjunto P dos números primos positivos são:

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, \dots\}$$

No caso dos números compostos a , ele possui pelo menos um divisor b (com $|b|$ diferente de 1 e de $|a|$), isto é, um divisor b tal que $1 < |b| < |a|$. Um divisor nessas condições diz-se um *divisor próprio* de a .

E do número 28?

Divisores próprios do número 28	

Assim, o número 2 é um *divisor próprio* do número 4, por exemplo.

Fonte: captura da plataforma Desmos sobre a atividade autoral.

Figura 1.21: Respostas de “Kiran Gandhi”

Exercitando

Fatore o número **500**, com auxílio da tabela a seguir, e escreva o número na forma descrita pelo **TFA**.

500	2
250	2
125	5
25	5
5	5
1	1

$\frac{250}{2} = 125$

Fonte: captura da plataforma *Desmos* sobre a atividade autoral.

Ao acessar uma página da atividade de determinado aluno, o professor consegue acionar a correção automática, caso a tenha programado, e deixar um comentário para o aluno.

Figura 1.22: Deixando comentários nas atividades

Exercitando

Determine o **mdc** e o **mmc** de **65** e **140**.

MDC	MMC
5	1 820

Determine o **mdc** e o **mmc** de **76** e **210**.

MDC	MMC

Comentário Da Aula

Não lido pelo aluno

Você acertou a primeira questão, mas deixou a segunda em branco.

alguns segundos atrás

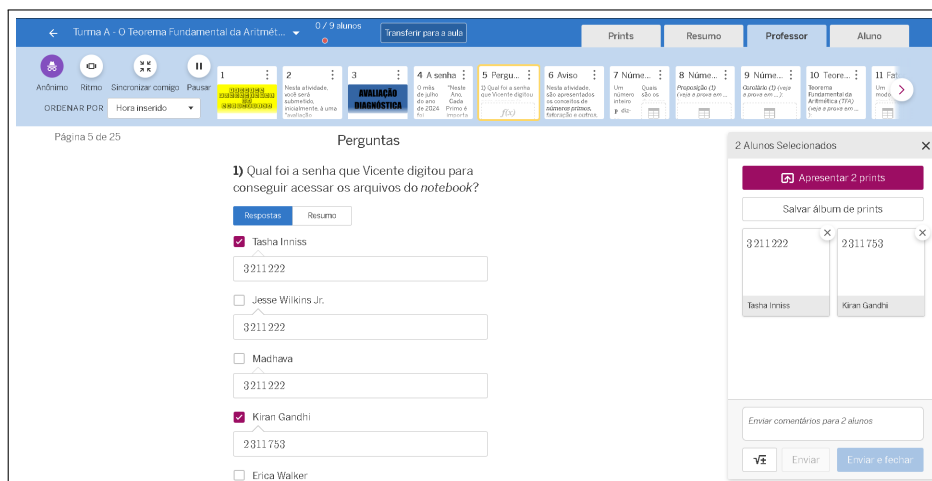
Página 16

Enviar comentários a Madhava

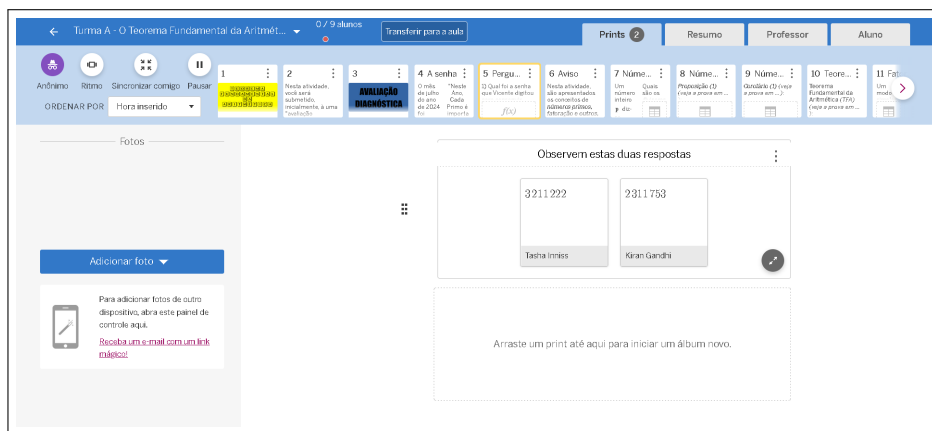
Enviar

Fonte: captura da plataforma *Desmos* sobre a atividade autoral.

Na seção do professor, é possível selecionar respostas dos alunos e salvar em um álbum, para comentários e discussões com a turma. O álbum fica disponível na seção “*Prints*” e pode ser nomeado.

Figura 1.23: Adicionando *prints*

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre a atividade autoral.

Figura 1.24: Relação de *prints*

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre a atividade autoral.

As funcionalidades do painel de controle são variadas e possuem grande potencial de auxiliar o professor em sua prática docente, sendo este o responsável por adequar o uso à realidade de cada turma.

A apresentação das atividades, no capítulo 3, tem o intuito de exemplificar uma aplicação para as teorias das quais tratou-se até agora, disponibilizar um produto que pode ser utilizado por professores e estudantes, fomentar a curiosidade dos estudantes e incentivar docentes a se capacitarem cada vez mais, em busca de elementos e práticas que agreguem qualidade e eficiência à sua prática.

Tópicos de Teoria dos Números

As SD elaboradas como produto final do presente trabalho são baseadas em tópicos da teoria dos números e são propostas no contexto da metodologia *Storytelling*, por meio da plataforma *Desmos*, onde o estudante se cadastra e acessa as atividades de qualquer lugar com acesso à *internet*, integrando uma turma virtual criada e gerenciada pelo professor.

O público alvo destas atividades, da forma como seguem, são discentes do ensino médio, devido a complexidade de alguns conteúdos. No entanto, elas podem ser adaptadas para trabalhar com os mesmos conceitos utilizando uma linguagem mais acessível, sendo destinadas a alunos de anos anteriores, por exemplo. O grau de formalidade utilizados em definições e teoremas se deu pela generalidade que se queria imprimir em cada atividade. Em estudos futuros, em que houver aplicação das SD, adaptações serão necessárias.

Deste modo, este capítulo aborda definições, teoremas, proposições e lemas pertinentes ao desenvolvimento das atividades, e que foram, também, apresentados nas SD.

Estas SD contemplam diversas habilidades da BNCC, seja de forma direta ou indireta, nas etapas de ensino fundamental e médio. Observe a seguir uma relação de algumas habilidades diretamente ligadas com os conteúdos apresentados.

- (EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.
- (EF07MA01) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.
- (EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.
- (EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.

- (EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.
- (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Este trabalho não se propõe a demonstrar os itens abordados, tais demonstrações podem ser facilmente encontradas na extensa literatura existente sobre o assunto.

A obra tomada como referência para a apresentação deste conteúdo foi o livro “Números: Uma introdução à Matemática”, de Milies & Coelho (2013), todas as demonstrações dos teoremas, das proposições, lemas e corolários utilizados constam nele.

2.1 O Algoritmo da Divisão

Definição 1 (Divisibilidade). Dizemos que um número inteiro a é **divisível** por um inteiro b quando existe um inteiro x tal que $a = bx$. Também podemos dizer que b é um **divisor** de a ou que a é um **múltiplo** de b . A notação utilizada é:

$$(i) \quad b|a \Leftrightarrow b \text{ divide } a$$

$$(ii) \quad b \nmid a \Leftrightarrow b \text{ não divide } a$$

Veja que, se $m|10$, m pode ser igual a 2, pois $10 = 2 \times 5$. Ou seja, temos que 10 é divisível por 2, 2 é um divisor de 10, 10 é um múltiplo de 2 ou ainda $2|10$.

Definição 2 (Algoritmo da divisão). Sendo a e b dois inteiros, com $b \neq 0$, quando b não divide a ($b \nmid a$), não existe um inteiro x tal que $a = bx$. No entanto, existem q e r , únicos, tais que

$$\mathbf{a = bq + r, com } 0 \leq r < |b|.$$

Por exemplo, observe que $3 \nmid 16$, mas que $16 = 3 \times 5 + 1$. Neste caso, $a = 16$, $b = 3$, $q = 5$ e $r = 1$.

Para chegar nesta conclusão, podemos verificar que 15 (3×5) é o múltiplo de 3 que mais se aproxima de 16 sem ultrapassar este valor. O valor $q = 5$ é chamado quociente e r é o resto, dado pela diferença entre 15 e 16.

Exemplo 1. Prove que, de três números inteiros consecutivos, um é múltiplo de 3.

Considere os inteiros consecutivos $n, n + 1$ e $n + 2$. Pelo *algoritmo da divisão*, temos q e r tais que

$$\mathbf{n} = \mathbf{3q} + \mathbf{r}, 0 \leq r < 3$$

(i) Para $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, temos:

$$n = 3q \text{ (múltiplo de 3)}$$

$$n + 1 = 3q + 1$$

$$n + 2 = 3q + 2$$

(ii) Para $\mathbf{r} = \mathbf{1}$, temos:

$$n = 3q + 1$$

$$n + 1 = 3q + 2$$

$$n + 2 = 3q + 3 = 3(q + 1) \text{ (múltiplo de 3)}$$

(iii) Para $\mathbf{r} = \mathbf{2}$, temos:

$$n = 3q + 2$$

$$n + 1 = 3q + 3 = 3(q + 1) \text{ (múltiplo de 3)}$$

$$n + 2 = 3q + 4$$

Deste modo, pelo menos um dos consecutivos é múltiplo de 3.

2.1.1 Mudança de Base

Escrever um número em uma base b significa utilizar um conjunto que possui uma quantidade b de algarismos para representá-lo. A base que geralmente utilizamos para representar os números é a **base 10**.

Isso significa que temos dez algarismos disponíveis para representar os números. Os algarismos que nós utilizamos são: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Os computadores por exemplo, utilizam o sistema **binário** (de base 2), que se vale apenas dos algarismos 0 e 1. Para que possamos converter números de um sistema para outro, utilizamos um método que descreveremos a seguir.

Teorema 1. *Seja $b \geq 2$, todo número \mathbf{a} pode ser escrito na forma:*

Tabela 2.2: Mudança de 176 na base 10 para a base 2

176	2	
0	88	2
0	44	2
0	22	2
0	11	2
1	5	2
1	2	2
0	1	2
1	0	2

Fonte: do autor.

Então 176 na base 2 é **10110000**.

2.1.2 Critérios de Divisibilidade

Utilizando a teoria das bases de numeração, podemos determinar alguns critérios para a divisibilidade de um número em base 10. Os tópicos a seguir tratam de alguns destes critérios.

2.1.2.1 Divisibilidade por 2 e 5

Os critérios de divisibilidade por 2 e 5 são os mais simples. Um número (na base 10) é divisível por 2 se seu último algarismo é par, e um número é divisível por 5 se termina em 0 ou 5.

Seja por exemplo um número de 4 algarismos na base 10

$$(abcd)_{10}$$

Temos que

$$(abcd)_{10} = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10^1 + d = 2 \times 5 \times (a \times 10^2 + b \times 10^1 + c) + d$$

Vemos que a primeira parcela do último membro é múltiplo de 2 e também de 5, e portanto o $(abcd)_{10}$ será divisível por 2 se d é par ($d = 2 \times e$, $e = 0, 1, 2, 3$ ou 4) pois

$$(abcd)_{10} = 2 \times [5 \times (a \times 10^2 + b \times 10^1 + c) + e]$$

E será divisível por 5 se d for 0 ou 5, pois

$$(abcd)_{10} = 5 \times [2 \times (a \times 10^2 + b \times 10^1 + c) + 0]$$

ou

$$(abcd)_{10} = 5 \times [2 \times (a \times 10^2 + b \times 10^1 + c) + 1]$$

Esse mesmo raciocínio serve para qualquer quantidade de algarismos no número.

2.1.2.2 Divisibilidade por 4 e 8

Um número é divisível por 4 se o número representando os dois últimos algarismos for divisível por 4. E o número será divisível por 8 se o número que representa os três últimos algarismos for divisível por 8.

Consideremos o número de 4 algarismos $(abcd)_{10}$, temos que

$$(abcd)_{10} = a \times 10^3 + b \times 10^2 + cd = 100 \times (a \times 10 + b) + cd = 4 \times 25(a \times 10 + b) + cd$$

Como a primeira parcela do último membro é divisível por 4, se cd também é divisível por 4 ($cd = 4 \times e$ com $e = 0, 1, \dots$, ou 24), teremos $(abcd)_{10}$ divisível por 4.

Também podemos escrever

$$(abcd)_{10} = a \times 10^3 + bcd = 1000 \times a + bcd = 8 \times 125 \times a + bcd$$

Então, se (bcd) for divisível por 8, $(abcd)_{10}$ também será.

Se (bcd) já é um número grande, basta usar de somas com múltiplos de 8 para verificar a divisibilidade. Por exemplo, $952 = 800 + 152 = 800 + 8 \times 19$.

2.1.2.3 Enunciando os Critérios para 3, 9 e 11.

Por enquanto vamos só enunciar os critérios de divisibilidades desses números. Mais adiante vamos demonstrá-las.

Um número é divisível por 3 se a soma de seus algarismos resulta num número divisível por 3.

Ex: verifique que 58794 é divisível por 3, e $5 + 8 + 7 + 9 + 4 = 33$.

Um número é divisível por 9 se a soma de seus algarismos resulta num número divisível por 9.

Ex: verifique que 6876 é divisível por 9, e $6 + 8 + 7 + 6 = 27$.

Um número é divisível por 11 se a soma dos algarismos de posição par for igual à soma dos algarismos de posição ímpar (ou que a subtração da somatória dos de ordem par com a somatória dos de ordem ímpar ser múltipla de 11).

Ex: verifique que 719455 é divisível por 11 e $7 - 1 + 9 - 4 + 5 - 5 = 11$.

2.1.2.4 Divisibilidade por 6 e 12

Um número é divisível por 6 se e somente se é divisível por 2 e por 3. É claro que se é divisível por 6 então podemos expressá-lo pelos fatores 2×3 . Reciprocamente, se tais fatores aparecem na decomposição do número, então ele é divisível por 6.

Um número é divisível por 12 se e somente se é divisível por 3 e por 4. A verificação disso é por analogia com o que foi pensado na divisibilidade por 6.

A divisibilidade para qualquer outro número composto (não primo) é tomada semelhantemente, mas isso ficará mais evidente com a decomposição de fatores primos no estudo do Teorema Fundamental da Aritmética.

2.1.2.5 Divisibilidade por 7, 11, 13 e 19

Para um número ser divisível por 7, fazemos em cadeia o seguinte procedimento: depois de separar o algarismo das unidades, fazemos a subtração do número sem o dígito das unidades, com o dobro desse da unidade, se isso resultar num número divisível por 7, então o número original também é.

Ex: 59794 é divisível por 7, e veja que $59794 \rightarrow 5979 - 8 = 5971 \rightarrow 597 - 2 = 595 \rightarrow 59 - 10 = 49$.

Uma outra maneira de verificar se um número é divisível por 11 é o de proceder em cadeia o seguinte: depois de separar o algarismo das unidades, fazemos a subtração do número sem o dígito das unidades com tal dígito, se ao final desse processo obtermos 0, então o número original é divisível por 11.

Ex: 719455 é divisível por 11, e temos que $719455 \rightarrow 71945 - 5 = 71940 \rightarrow 7194 - 0 = 7194 \rightarrow 719 - 4 = 715 \rightarrow 71 - 5 = 66 \rightarrow 6 - 6 = 0$.

Para um número ser divisível por 13 podemos proceder em cadeia: depois de separar o algarismo das unidades, fazemos a adição do número sem o dígito das unidades com o quádruplo de tal dígito, se ao final desse processo obtermos um múltiplo de 13, então o número original é divisível por 13.

Ex: 22659 é divisível por 13, e temos que $22659 \rightarrow 2265 + 36 = 2301 \rightarrow 230 + 4 = 234 \rightarrow 23 + 16 = 39$.

Para ver se um número é divisível por 19, procedemos em cadeia: depois de separar

os algoritmos das dezenas, fazemos a adição do número sem os dígitos das dezenas com o quádruplo do número das dezenas, se ao final desse processo obtermos um múltiplo de 19, então o número original é divisível por 19.

Ex: 8702 é divisível por 19, e vemos que $8702 \rightarrow 87 + 8 = 95$.

2.1.3 Equações Diofantinas Lineares

São equações da forma:

$$aX + bY = c$$

em que \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} são números inteiros, com \mathbf{a} e \mathbf{b} não ambos nulos. Este tipo de equação só possui soluções se $d|c$, com $d = \text{mdc}(a, b)$.

Teorema 2 (Solução geral). *Escrevendo $d = \text{mdc}(a, b)$ na forma $d = ra + sb$, com r e $s \in \mathbb{Z}$, temos que:*

$$x_0 = r \cdot \frac{c}{d}$$

e

$$y_0 = s \cdot \frac{c}{d}$$

são soluções (particulares) de $aX + bY = c$.

Todas as outras soluções são da forma:

$$x = x_0 + \frac{b}{d} \cdot t$$

e

$$y = y_0 - \frac{a}{d} \cdot t$$

com $t \in \mathbb{Z}$.

2.1.4 Equação Diofantina no Plano Cartesiano

Uma equação do tipo $aX + bY = c$, em que se admitem valores reais para as variáveis X e Y , representa uma reta no plano cartesiano. Observe a equação na seguinte forma (reduzida):

$$Y = \frac{-aX}{b} + \frac{c}{b}$$

Determinando, por exemplo, $\frac{-a}{b} = m$ e $\frac{c}{b} = n$, temos:

$$Y = mX + n$$

Deste modo, a resolução de uma equação diofantina se resume ao problema de encontrar os pontos da reta que possuem ambas as coordenadas inteiras.

2.1.5 Congruências

Sejam $m > 0$ um inteiro fixo, dois inteiros a e b dizem-se **congruentes módulo m** se m divide a diferença $a - b$. Nesse caso, escrevemos $a \equiv b \pmod{m}$.

Ou seja, $a \equiv b \pmod{m}$ se, e somente se, $m|(a - b)$, o que significa, de forma equivalente, que existe um $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a = b + mq$.

Proposição 1. *Dois inteiros a e b são congruentes módulo m se, e somente se, eles têm como resto o mesmo inteiro quando divididos por m .*

Proposição 2. *Sejam a, b, c, d inteiros arbitrários, valem as propriedades abaixo.*

- (i) $a \equiv a \pmod{m}$;
- (ii) Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $b \equiv a \pmod{m}$;
- (iii) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$, então $a \equiv c \pmod{m}$;
- (iv) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então $a + c \equiv b + d \pmod{m}$;
- (v) Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $a + c \equiv b + c \pmod{m}$;
- (vi) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então $ac \equiv bd \pmod{m}$;
- (vii) Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $a^n \equiv b^n \pmod{m}$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$
- (viii) Se $a + c \equiv b + c \pmod{m}$, então $a \equiv b \pmod{m}$.

Proposição 3. *Sejam a, b, c inteiros arbitrários, se $\text{mdc}(c, m) = 1$, então:*

$$ac \equiv bc \pmod{m} \implies a \equiv b \pmod{m}$$

2.1.5.1 Relação entre Equações Diofantinas e Congruências Lineares

Uma congruência $aX \equiv b \pmod{m}$ significa que $aX - b$ deve ser múltiplo de m . Isto nos leva a conclusão de que deve existir y tal que $aX = b - my$, ou seja, $aX + mY = b$.

Desta forma, concluímos que, se X é a solução de $aX \equiv b \pmod{m}$, existe $y \in \mathbb{Z}$ tal que o par (x, y) é solução da equação diofantina $aX + mY = b$.

Teorema 3. *(Resolução de congruências lineares)*

A congruência $aX \equiv b \pmod{m}$ tem solução se e somente se $d = \text{mdc}(a, m)$ divide b .

Neste caso sabemos que, se (x_0, y_0) é uma solução particular da equação diofantina, sua solução geral é:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \frac{m}{d}t, \\y &= y_0 - \frac{a}{d}t, t \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Escrevendo d na forma $d = ra + sm$ e $b = b_1d$, com $r, s, b_1 \in \mathbb{Z}$, uma solução particular é dada por:

$$x_0 = rb_1, y_0 = sb_1.$$

Todas as soluções da congruência são da forma $x = rb_1 + \frac{m}{d}t$, $t \in \mathbb{Z}$. Atribuindo a t os valores $0, 1, \dots, d-1$, temos as d soluções distintas. Todas as outras são congruentes a estas.

2.1.5.2 Voltando às Divisibilidades por 3, 9 e 11

Sabemos que $10 \equiv 1 \pmod{3}$, e daí, pela propriedade (vii) podemos afirmar que $10^n \equiv 1 \pmod{3}$. E também, pela propriedade (ix), podemos dizer que $m \cdot 10^n \equiv m \pmod{3}$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}_+$.

Daí, seja por exemplo o número $(abcd)_{10}$, sabemos que $(abcd)_{10} = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d$ então, usando a conclusão acima e a propriedade (iv) podemos escrever que $(abcd)_{10} \equiv a + b + c + d \pmod{3}$, nos informando que $(abcd)_{10}$ e $a + b + c + d$ têm o mesmo resto, e portanto justificando o critério de divisibilidade por 3 afirmado antes.

O mesmo raciocínio fazemos para demonstrar o critério de divisibilidade por 9, só que partindo de $10 \equiv 1 \pmod{9}$.

Para demonstrar aquele primeiro critério de divisibilidade por 11, levamos em conta que $10 \equiv -1 \pmod{11}$. Disto temos que

$$10^2 \equiv 1 \pmod{11}, 10^3 \equiv -1 \pmod{11}, \dots$$

O que vemos é que potências de expoente par são congruentes a 1 enquanto as com expoentes ímpares são congruentes a -1. Logo poderemos afirmar, por exemplo, que

$$(abcde)_{10} = a \times 10^4 + b \times 10^3 + c \times 10^2 + d \times 10 + e$$

satisfaz

$$(abcde)_{10} \equiv -a + b - c + d - e \pmod{11}$$

confirmando que para um número ser divisível por 11, a diferença entre a somatória de algarismos de ordem par com a somatória de algarismos de ordem ímpar, deve ser divisível por 11 também.

2.1.6 Sistemas de Congruências Lineares

Resolver um sistema de congruências linear se resume a encontrar um inteiro que seja solução simultânea de duas ou mais congruências.

Proposição 4. *Sejam a e m inteiros e b um múltiplo de $d = \text{mdc}(a, m)$. Escrevendo $a = a_1d$, $b = b_1d$, $m = nd$ e d na forma $d = ra + sm$, temos que a congruência $aX \equiv b \pmod{m}$ é equivalente a $X \equiv rb_1 \pmod{n}$.*

A vantagem desta proposição é de que podemos facilmente encontrar a solução de $X \equiv rb_1 \pmod{n}$, ela é:

$$X = rb_1 + nt, t \in \mathbb{Z}$$

Lembrando que $n = \frac{m}{d}$, temos:

$$X = rb_1 + \frac{m}{d}t, t \in \mathbb{Z}.$$

2.1.6.1 Equivalência de Sistemas

Considerando um sistema da forma:

$$a_1X \equiv b_1 \pmod{m_1}$$

$$a_2X \equiv b_2 \pmod{m_2}$$

...

$$a_kX \equiv b_k \pmod{m_k}$$

Para que ele possua solução, cada congruência, individualmente, deve ter solução. Ou seja, para $d_i = \text{mdc}(a_i, m_i)$, a condição necessária é que $d_i | b_i$, $1 \leq i \leq k$.

Conforme a proposição 4, cada uma das equações do sistema é equivalente a uma equação da forma $X \equiv c_i \pmod{n_i}$, onde $n_i = \frac{m_i}{d}$ e $c_i = rb_i$.

Consequentemente, o sistema dado é equivalente ao sistema

$$X \equiv c_1 \pmod{n_1}$$

$$X \equiv c_2 \pmod{n_2}$$

...

$$X \equiv c_k \pmod{n_k}$$

A solução para esse sistema é dada pelo **Teorema Chinês do Resto** (reftcr).

2.1.6.2 Teorema Chinês do Resto (TCR)

Sejam n_1, n_2, \dots, n_k inteiros, relativamente primos dois a dois (se $i \neq j$, então $\text{mdc}(n_i, n_j) = 1$), e sejam c_1, c_2, \dots, c_k inteiros arbitrários, o sistema de congruências lineares

$$X \equiv c_1 \pmod{n_1}$$

$$X \equiv c_2 \pmod{n_2}$$

...

$$X \equiv c_k \pmod{n_k}$$

admite uma solução, que é única módulo $n = n_1 n_2 \dots n_k$.

Definindo $N_i = \frac{n}{n_i}$, ele é o produto de todos os inteiros n_1, \dots, n_k , exceto o próprio n_i , e eles são relativamente primos com n_i . Desta forma, $\text{mdc}(N_i, n_i) = 1$.

Podemos determinar inteiros r_i e s_i tais que:

$$r_i N_i + s_i n_i = 1, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Deste modo,

$$x_0 = c_1 r_1 N_1 + c_2 r_2 N_2 + \dots + c_k r_k N_k$$

é uma solução do sistema.

Sendo x qualquer outra solução do sistema, temos que $x \equiv x_0 \pmod{n}$.

2.2 Máximo Divisor Comum (MDC)

Sejam a e b inteiros não nulos, um inteiro c é chamado **divisor comum** de a e b se $c|a$ e $c|b$. O conjunto $D(a, b)$ de todos os divisores comuns de a e b é limitado superiormente. Ou seja, $D(a, b)$ tem máximo. A este valor chamamos **máximo divisor comum** de a e b , ou seja:

Definição 3 (MDC). *Chama-se máximo divisor comum de a e b o maior de seus divisores comuns, isto é,*

$$\mathbf{mdc}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{max}[\mathbf{D}(\mathbf{a}, \mathbf{b})]$$

Veja, por exemplo, que $D(10, 20) = \{1, 2, 5, 10\}$ e, portanto, $mdc(10, 20) = 10$.

Teorema 4 (Teorema de Bézout). *Sejam a, b inteiros e $\mathbf{d} = \mathbf{mdc}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Então existem inteiros r e s tais que $\mathbf{d} = \mathbf{ra} + \mathbf{sb}$.*

Teorema 5. *Sejam a, b inteiros. Um inteiro positivo d é o máximo divisor comum de a e b se e somente se se verifica:*

(i) $d|a$ e $d|b$;

(ii) Se $d'|a$ e $d'|b$, então $d'|d$.

Teorema 6 (Teorema de Euclides). *Sejam a, b e c inteiros tais que $\mathbf{a}|b\mathbf{c}$. Se $mdc(a, b) = 1$, então $\mathbf{a}|c$.*

Definição 4. *Dois inteiros a e b dizem-se relativamente primos se $mdc(a, b) = 1$.*

Portanto, podemos enunciar o teorema de Euclides como:

Se um número divide o produto de dois fatores e é relativamente primo com um deles, então divide o outro.

2.2.1 O Algoritmo de Euclides

No ensino fundamental ensina-se como encontrar o MDC de dois ou mais números através da fatoração destes números em fatores primos. Para números pequenos, este algoritmo funciona bem, mas para números maiores, pode ficar um tanto complexo e demorado. Um recurso bastante utilizado como alternativa a este método é o *algoritmo de Euclides*, que parte do seguinte teorema:

Teorema 7. *Sejam a, b inteiros, $b \neq 0$, e sejam q, r , o quociente e o resto da divisão de a por b , respectivamente. Então, $\mathbf{D}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{D}(\mathbf{b}, \mathbf{r})$; e conseqüentemente $\mathbf{mdc}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{mdc}(\mathbf{b}, \mathbf{r})$.*

Sabemos que existem apenas $b - 1$ inteiros não nulos menores do que b , ou seja, as divisões sucessivas que precisamos realizar possuem restos cada vez menores e, assim, não se estendem indefinidamente. Veja que para calcular o mdc de a e b , $a > b$, sem perda de generalidade, realizamos um processo como:

$$\begin{aligned}
 a &= bq_1 + r_1, 0 < r_1 < b \\
 b &= r_1q_2 + r_2, 0 \leq r_2 < r_1 \\
 r_1 &= r_2q_3 + r_3, 0 \leq r_3 < r_2 \\
 &\vdots = \quad \quad \quad \vdots \\
 r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n, 0 \leq r_n < r_{n-1} \\
 r_{n-1} &= r_nq_{n+1} + r_{n+1}, r_{n+1} = 0
 \end{aligned}$$

Temos que $r_n \mid r_{n-1}$, daí $\text{mdc}(r_{n-1}, r_n) = r_n$. Segue que $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r_1) = \dots = \text{mdc}(r_{n-2}, r_{n-1}) = \text{mdc}(r_{n-1}, r_n) = r_n$. Então o mdc de a e b é o último resto não nulo dessas divisões.

Para facilitar a manipulação dos quocientes e restos, vamos organizar os resultados em uma tabela:

Tabela 2.3: Algoritmo de Euclides para o cálculo do mdc

	q_1	q_2	q_3	\dots	q_{n-1}	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	r_2	\dots	r_{n-2}	r_{n-1}	r_n
r_1	r_2	r_3	r_4	\dots	r_n	0	

Fonte: do autor.

Exemplo 3. Calcular $\text{mdc}(684, 177)$

Tabela 2.4: $\text{mdc}(684, 177)$

	3	1	6	2	1	2
684	177	153	24	9	6	3 = $\text{mdc}(684, 177)$
153	24	9	6	3	0	

Fonte: do autor.

2.3 Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Sejam a e b inteiros não-nulos. Um inteiro c diz-se um *múltiplo comum* de a e b se $a \mid c$ e $b \mid c$. Indicaremos por $M(a, b)$ o conjunto de todos os múltiplos comuns de a e b e por $M^+(a, b)$ o conjunto de todos os múltiplos comuns positivos de a e b .

Certamente $M^+(a, b) \neq \emptyset$, pois $|a||b| \in M^+(a, b)$; logo, pelo *Princípio da Boa Ordem*, esse conjunto contém um elemento mínimo.

Definição 5. *Chama-se mínimo múltiplo comum de a e b o menor dos seus múltiplos positivos comuns, isto é,*

$$\mathbf{mmc}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min[\mathbf{M}^+(\mathbf{a}, \mathbf{b})]$$

Teorema 8. *Sejam a e b inteiros. Então, o $\mathbf{mmc}(a, b)$ divide todo outro múltiplo comum de a e b .*

Teorema 9. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e m um inteiro positivo. Então, $\mathbf{m} = \mathbf{mmc}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ se e somente se m verifica:*

(i) $a|m$ e $b|m$.

(ii) Se $a|m'$ e $b|m'$, então $m|m'$.

Teorema 10. *Sejam a e b inteiros, $m = \mathbf{mmc}(a, b)$ e $d = \mathbf{mdc}(a, b)$, então*

$$\mathbf{md} = |\mathbf{ab}|$$

Teorema 11. *Sejam a, b e c inteiros, temos que:*

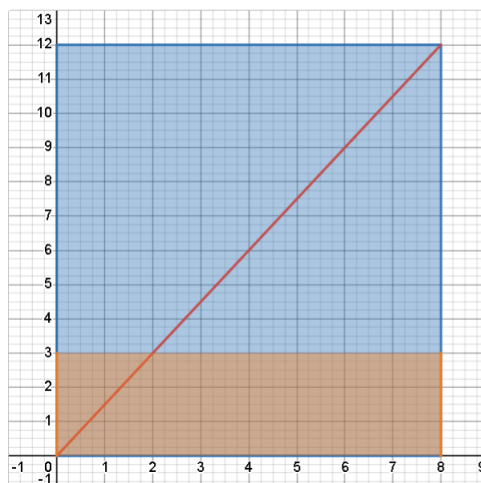
$$\mathbf{mmc}(a, b, c) = \mathbf{mmc}(\mathbf{mmc}(a, b), c) = \mathbf{mmc}(a, \mathbf{mmc}(b, c))$$

2.3.1 Método Geométrico para a Obtenção de MMC e MDC entre Dois Números

Para calcular simultaneamente o MMC e o MDC de dois números, pode-se recorrer também a um método geométrico. Apesar de possuir limitações, é um ótimo recurso visual que pode auxiliar no cálculo para o caso de números pequenos.

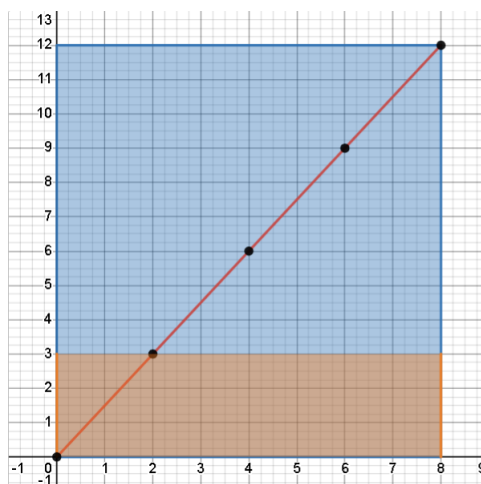
O método consiste em desenhar um retângulo com lados de medidas iguais aos números dos quais se deseja obter o MMC e o MDC, de modo que um de seus vértices fique sobre a origem dos eixos de coordenadas, e traçar sua diagonal. Este método foi consultado no trabalho de Nascimento (2015).

Observe o exemplo do cálculo do $\mathbf{mdc}(8, 12)$.

Figura 2.1: Retângulo de largura 8 e altura 12

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Agora, deve-se marcar sobre a diagonal todos os pontos que possuem as duas coordenadas inteiras.

Figura 2.2: MDC e MMC de 8 e 12

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

A quantidade n de segmentos em que a diagonal foi dividida é o MDC dos números iniciais (8 e 12). A área do retângulo de largura igual a inicial e altura igual a ordenada do primeiro ponto marcado sobre a diagonal é o MMC de 8 e 12. Nesse caso, $\text{mdc}(8, 12) = 4$ e $\text{mmc}(8, 12) = 24$.

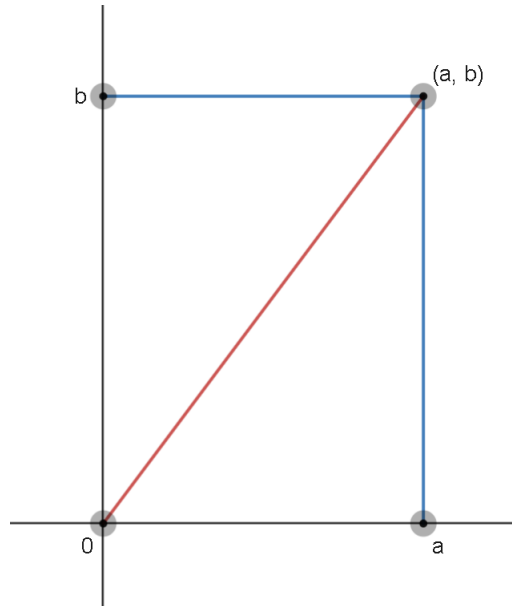
Veja que existem n retângulos iguais a esse dentro do retângulo inicial.

2.3.2 Justificativa do Método Geométrico

Para justificar o método, supõe-se $d = \text{mdc}(a, b)$ e que existem inteiros p e q tais que $a = dp$ e $b = dq$, sendo que p e q são coprimos, ou primos entre si ($\text{mdc}(p, q) = 1$).

Colocando o retângulo em um sistema de coordenadas ortogonais, com um dos vértices na origem, tem-se a seguinte situação:

Figura 2.3: Diagonal do retângulo de área ab



Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Pode-se concluir que a diagonal do retângulo está sobre a reta $y = \frac{b}{a}x$. Como $\frac{y}{x} = \frac{b}{a} = \frac{q}{p}$, os pontos $(0, 0)$, (p, q) , $(2p, 2q)$, ..., (dp, dq) pertencem à reta, dividindo-a em d segmentos congruentes.

Para mostrar que essas são as únicas coordenadas inteiras que representam os pontos sobre a diagonal, supõe-se que (r, s) está contido na diagonal e possui coordenadas inteiras.

Assim, $s = \frac{b}{a}r = \frac{d \cdot q}{d \cdot p}r$, que leva a $ps = qr$. Daí podemos afirmar que $p|qr$ e $q|ps$. No entanto, $\text{mdc}(p, q) = 1$, o que nos possibilita dizer, pelo teorema 6, que $p|r$ e $q|s$. Isso é equivalente a dizer que existem inteiros t_1 e t_2 tais que $r = p \cdot t_1$ e $s = q \cdot t_2$, com, logicamente, $0 \leq t_1 \leq r \leq a$ e $0 \leq t_2 \leq s \leq b$. Mas já que $ps = qr$, ficaremos com $p \cdot q \cdot t_2 = p \cdot t_1 \cdot q$, resultando em $t_1 = t_2 = t$. Assim, tem-se $s = tq$ e $r = tp$, com $0 \leq t \leq d$, ou seja, a diagonal fica dividida em d partes iguais.

Como as coordenadas dos $d + 1$ pontos sobre a diagonal são igualmente espaçadas, os d retângulos obtidos ao traçar as retas $y = q$, $y = 2q$, ..., $y = dq$ têm todos a mesma área

m . Assim, pelo teorema 10, $md = ab$ leva a conclusão de que m é o mínimo múltiplo comum de a e b .

2.4 O Teorema Fundamental da Aritmética (TFA)

Qualquer número inteiro diferente de 0, 1 e -1 pode ser escrito como um produto de números *primos*, de forma única, a menos da ordem dos fatores. Segue a definição de números primos.

Definição 6. Um inteiro p diz-se primo se tem exatamente dois divisores positivos, 1 e $|p|$.

A definição exclui o número zero, que possui infinitos divisores e os números 1 e -1 , que possuem um único divisor positivo cada.

Quando um número não é primo, diz-se que ele é **composto**. Assim, um número composto a possui pelo menos um divisor b tal que $|b|$ é diferente de 1 e de $|a|$, ou seja, $1 < |b| < |a|$. Este divisor é chamado **divisor próprio** de a .

Proposição 5. Seja p um número primo, e sejam a e b inteiros.

(i) Se $p \nmid a$, então $\text{mdc}(p, a) = 1$;

(ii) Se $p|ab$, então $p|a$ ou $p|b$.

Corolário 1. Se um número primo p divide um produto $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$, então $p|a_k$, para algum k , $1 \leq k \leq n$.

Teorema 12 (TFA). Seja a um inteiro diferente de 0, 1 e -1 . Então, existem primos positivos $p_1 < p_2 < \dots < p_r$ e inteiros positivos n_1, n_2, \dots, n_r tais que

$$\mathbf{a} = E p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r},$$

em que $E = \pm 1$, conforme \mathbf{a} seja positivo ou negativo. Esta decomposição é única.

Corolário 2. Sejam a e d inteiros diferentes de 0, 1 e -1 . Então, existem primos positivos $p_1 < p_2 < \dots < p_t$ e inteiros não-negativos $n_1, n_2, \dots, n_t, m_1, m_2, \dots, m_t$ (mas eventualmente iguais a zero, se necessário) tais que

$$a = E_1 \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_t^{n_t}$$

e

$$d = E_2 \cdot p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_t^{m_t}$$

em que $E_i = \pm 1$, $i = 1, 2$.

Lema 1. *Sejam*

$$a = E_1 \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_t^{n_t}$$

e

$$d = E_2 \cdot p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_t^{m_t}$$

inteiros positivos, onde p_1, p_2, \dots, p_t são primos positivos e $n_i, m_i, 1 \leq i \leq t$ são inteiros não-negativos.

Então, $d|a$ se, e somente se, $m_i \leq n_i, 1 \leq i \leq t$.

Teorema 13. *Sejam $a = p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_t^{n_t}$ e $b = p_1^{m_1} \cdot \dots \cdot p_t^{m_t}$ inteiros nas condições do Lema 1, então:*

$$d = \text{mdc}(a, b) = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_t^{\alpha_t}, \text{ em que } \alpha_i = \min(n_i, m_i), 1 \leq i \leq t,$$

$$m = \text{mmc}(a, b) = p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_t^{\beta_t}, \text{ em que } \beta_i = \max(n_i, m_i), 1 \leq i \leq t.$$


Proposição 6. *Seja $a = p_1^{n_1} \dots p_t^{n_t}$ a decomposição de um número $a > 1$ nas condições do TFA. Então, o número de divisores positivos de a e a soma de todos esses divisores estão dados, respectivamente por*

$$n(a) = (n_1 + 1)(n_2 + 1) \dots (n_t + 1)$$

$$s(a) = \frac{p_1^{n_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{n_2+1} - 1}{p_2 - 1} \dots \frac{p_t^{n_t+1} - 1}{p_t - 1}$$

As Sequências Didáticas

A produção a qual se refere este trabalho é a de criar uma série de atividades pensadas e organizadas para atingir determinado objetivo, através da apresentação de conceitos, proposta de exercícios e problematização de situações.

Com utilização da metodologia *Storytelling*, criou-se três Sequências Didáticas (SD), sobre tópicos de teoria dos números, compostas por atividades interativas na *classroom* do *Desmos*, que podem ser acessadas clicando [aqui](#) .

Antes de tomar conhecimento de conteúdo e forma das sequências, é necessário discorrer sobre a estrutura e as características básicas de uma SD.

Para Araújo (2013, p.323), SD “é um modo de o professor organizar as atividades de ensino em função de núcleos temáticos e procedimentos”. Enquanto, nos estudos de Guimarães & Giordan (2013, p.2), SD se trata de “um conjunto de atividades articuladas e organizadas de forma sistemática, em torno de uma problematização central”. Já para Ugalde & Roweder (2020, p.10), “é um instrumento que deve ser desenvolvido, considerando a perspectiva do ensino de conteúdos por meio de atividades sequenciadas, organizadas, com objetivos bem delimitados e explicados para professores e alunos”.

Portanto, podemos dizer que uma SD é um conjunto de atividades com objetivos bem definidos, e com uma organização sistemática, destinada a contribuir para a resolução e/ou análise de uma problemática, assim como para o desenvolvimento de habilidades e/ou competências. Sendo que, de acordo com Ugalde & Roweder (2020, p.10), “o objetivo da sequência didática é o aprimoramento da atividade pedagógica de modo a contribuir para uma aprendizagem significativa na formação dos discentes”.

Observe o quadro a seguir, com um panorama das definições de SD dadas pelos autores.

Tabela 3.1: Quadro resumo das definições de SD

Autor	Definição de Sequência Didática
Araújo (2013)	“é um modo de o professor organizar as atividades de ensino em função de núcleos temáticos e procedimentos”
Guimarães e Giordan (2013)	“um conjunto de atividades articuladas e organizadas de forma sistemática, em torno de uma problematização central”
Ugalde e Roweder (2020)	“é um instrumento que deve ser desenvolvido, considerando a perspectiva do ensino de conteúdos por meio de atividades sequenciadas, organizadas, com objetivos bem delimitados e explicados”

Fonte: do autor.

Ao aliar a utilização de uma TDIC com a metodologia *Storytelling*, temos um conjunto de estratégias que contribui para o processo de ensino e aprendizagem, que “possibilita melhor compreensão dos temas trabalhados, por meio da criação de situações de ensino-aprendizagem que têm o intuito de promover, de maneira mais eficiente e eficaz, a assimilação dos assuntos abordados” (UGALDE; ROWEDER, 2020, p.10).

O processo de elaboração de uma SD deve ser o foco principal do docente, para além de qualquer resultado final esperado, pois cada discente têm um processo de assimilação próprio, que é relacionado com as experiências e contexto sociocultural no qual está inserido. Focar apenas no produto final da aprendizagem é, de certa forma, tentar nivelar os processos cognitivos de cada estudante (GUIMARÃES; GIORDAN, 2013).

Desta forma, as SD também proporcionam um aprimoramento da prática docente, por serem “instrumentos desencadeadores das ações e operações da prática docente em sala de aula” (GUIMARÃES; GIORDAN, 2013, p.2).

Portanto, as SD constituem ferramentas que possuem grande potencial no desenvolvimento de habilidades docentes e discentes, já que, ao construir a SD, o professor deve levar em consideração diversos aspectos, que vão do técnico e específico ao qualitativo, relativo às características socioculturais e as possíveis interações oriundas deste processo. O professor é, então, o responsável por promover situações onde os alunos possam participar ativamente e realizar a construção do próprio conhecimento (GUIMARÃES; GIORDAN, 2013).

Para Ugalde & Roweder (2020), organizar a SD de acordo com a progressão dos

tópicos e conceitos, dos mais simples aos mais complexos, é uma forma organizacional que contribui para o processo de ensino e aprendizado. A organização da SD, de acordo com [Guimarães & Giordan \(2013\)](#), é uma importante prática para o desenvolvimento das habilidades do professor, cujo aprendizado se concretiza durante a reflexão sobre o conjunto de práticas e planejamento utilizado na concretização das ideias sobre a SD e o exercício da docência.

Seguindo as ideias de [Araújo \(2013, p.323\)](#), a estrutura base de um SD é dada por:

- Seção de abertura: apresentação da situação de estudo; descrição da tarefa de exposição oral ou escrita a ser realizada pelos alunos.
- Produção inicial (ou diagnóstica): o professor avalia as capacidades já adquiridas e ajusta as atividades e os exercícios previstos na sequência às possibilidades e dificuldades reais de uma turma.
- Módulos: conjunto de atividades ou exercícios sistemáticos e progressivos que permitem aos alunos apreenderem as características temáticas.
- Produção final: os alunos devem ser avaliados pelo professor ao colocarem em prática o conhecimento que adquiriram.

Com esta estrutura básica em mente, o professor deve adaptar cada etapa de acordo com sua realidade e a da turma. O foco deve ser no processo, mais do que no produto final da aprendizagem, já que cada passo da sequência é cuidadosamente escolhido de forma a dar prosseguimento lógico e propiciar a aprendizagem dos conceitos, promovendo a participação dos indivíduos e o desenvolvimento de seu processo cognitivo de aprendizagem por meio de interações ([GUIMARÃES; GIORDAN, 2013](#)).

Neste trabalho, todas as etapas das SD foram planejadas e construídas dentro do ambiente *Desmos classroom*, onde podem ser atribuídas aos estudantes em uma turma virtual criada pelo professor. As respostas e produções dos alunos referentes às tarefas da SD ficam armazenadas na plataforma, na qual o professor tem acesso para análise posterior.

A motivação para a elaboração das atividades surgiu de reflexões sobre as possibilidades em aliar às TDIC com a utilização metodologias ativas. Com o avanço tecnológico da sociedade, o ensino tradicional enfrenta cada vez mais dificuldade em cumprir, sozinho, o papel de despertar o interesse dos alunos nas aulas. Deste modo, espera-se que, ao utilizar a tecnologia associada à esta categoria de metodologias, possa-se auxiliar docentes no objetivo de que os alunos sejam protagonistas do processo de ensino e aprendizagem ([FIGUEIREDO, 2014](#)).

Durante a apresentação da SD sobre o algoritmo da divisão, são introduzidas algumas calculadoras para fins específicos, que foram construídas na calculadora gráfica do *Desmos*. Observe a seção a seguir, sobre sua composição.

3.1 Calculadoras de Equação Diofantina, de Congruência Linear e de Sistemas de Congruências Lineares

O *Algoritmo de Euclides* é, como o nome diz, um procedimento numérico sequencial, para determinação do *mdc* de dois inteiros a e b ($\text{mdc}(a, b) = d$). Temos nas telas da atividade *Algoritmo da Divisão* discussão do Algoritmo de Euclides para a determinação do $\text{mdc}(a, b) = d$, e resultante das etapas obtemos os inteiros de Bézout r e s da combinação $a \cdot r + b \cdot s = d$. Tais inteiros fazem parte das soluções, caso existam, de uma equação diofantina linear $aX + bY = c$.

$$x_o = r \cdot \frac{c}{d} + \frac{b}{d}t \text{ e } y_o = s \cdot \frac{c}{d} - \frac{a}{d}t, \forall t \in \mathbb{Z}$$

As etapas do algoritmo de Euclides podem ser programáveis, permitindo criar computacionalmente uma “calculadora” não só do MDC como também para as soluções de uma Equação Diofantina Linear. É comum nas linguagens de programação já existir uma função nativa, geralmente com nome *gcd* para o cálculo do MDC de dois inteiros, mas não muito comum para as soluções de Equações Diofantinas Lineares.

Já para uma congruência linear $ax \equiv b \pmod{m}$ vemos que pode ser escrita como $ax - b = m \cdot q$, ou

$$ax + m(-q) = b \text{ para algum } q \in \mathbb{Z}.$$

Ou seja, a solução de uma congruência linear pode ser determinada, se existir, por uma das soluções dessa última equação diofantina, e portanto, uma Calculadora de Congruência Linear pode ser obtida computacionalmente por adequação da Calculadora de Equação Diofantina.

Propomo-mos criar essas calculadoras para serem disponíveis nas atividades, mas esbarramos no fato do *Desmos* não ser explicitamente uma linguagem de programação. No entanto, existem comandos da sua calculadora gráfica que tomam ações mediante condições pré-estabelecidas pelo usuário, isto é, podemos inserir condicionais para realização de cálculos ou apresentação de resultados.

Baseando-se na sintaxe dessas condicionais da Calculadora Gráfica do *Desmos*, o influenciador digital Gallium-Gonzonllium apresentou dois vídeos em seu canal do *Youtube* com maneiras de criação de comandos para operadores lógicos, relacionais e de controles de fluxo para programação de um código computacional no *Desmos*. Esse vídeos ([Is Desmos a](#)

Programming Language? e Loops and Subroutines in *Desmos*) nos serviram para compormos nossas calculadoras.


A transcrição para a codificação na calculadora do *Desmos* foi baseada nos programas do trabalho *Subrotinas Construídas no Matlab para MDC, Coeficientes de Bézout, Equações Diofantinas Lineares, Congruências e Sistemas de Congruências Lineares* de autoria de [Barbosa \(2015\)](#).

A seguir, apresentam-se as SD construídas, que podem ser encontradas na coleção *Teoria dos Números*, com destaque para os elementos correspondentes a cada componente da estrutura proposta por [Araújo \(2013\)](#).

É importante salientar que o docente tem total controle sobre o ritmo da atividade (ver em [1.5.2.3](#)), podendo omitir ou delimitar intervalos de páginas que aparecerão para os alunos. Este recurso é muito importante, considerando a quantidade de página das atividades, o nível de conhecimento da turma, as escolhas metodológicas do professor e etc.

O objetivo destas atividade é apresentar uma introdução à tópicos de teoria dos números e relacioná-los com conceitos derivados mais avançados, fazendo a utilização de recursos interativos na plataforma *Desmos* na perspectiva de que os alunos sejam capazes de resolver problemas envolvendo estes conceitos.

3.2 Atividade 1: O Algoritmo da Divisão

Os conceitos abordados nesta atividade são: Divisibilidade, Algoritmo da divisão, bases de numeração, Equações Diofantinas Lineares e congruências. Ela pode ser acessada clicando [aqui](#) .

A SD inicia com um aviso ao usuário sobre sua estrutura, seus componentes e sua finalidade, além de uma recomendação para que o usuário a realize com calma e atenção ([UGALDE; ROWEDER, 2020](#)).

A atividade inicia com uma avaliação diagnóstica (figuras [3.1](#) e [3.2](#)), que se utiliza do *storytelling* para compor uma narrativa com elementos relativos ao cotidiano e à teoria do algoritmo da divisão, que contribuem para o processo de assimilação e interpretação das informações ([TEODOSIO, 2021](#)). O objetivo desta avaliação é obter informações sobre os conhecimentos do aluno e sua capacidade para aplicá-los na resolução de problemas, assim como obter informações sobre sua habilidade de interpretação de texto ([UGALDE; ROWEDER, 2020](#)).

Figura 3.1: Narrativa da avaliação diagnóstica

Prévia da página do aluno

4 de 38 Próximo >

O consórcio

Edvaldo cria Ovinos (ovelhas e carneiros) em sua propriedade, no interior do Pará, e estava com um problema que lhe tirava o sono: o excesso de moscas no esterco que fica embaixo do galpão.

O galpão suspenso onde eles ficam tem o piso feito de ripas, de modo que ficam espaços entre elas e as fezes dos animais caem por eles. Como as fezes dos ovinos são pequenas "bolinhas", elas ficam embaixo do galpão, aos montes, até a retirada para algum fim específico.

O que acontece é que as moscas procuram essas fezes para colocarem ovos, que dão origem a mais moscas. Chegou um momento em que ficava quase impossível andar por lá de boca aberta, correndo o risco de entrar moscas. Além do risco de contaminação por diversas doenças que essa situação proporciona.

Edvaldo pediu ajuda a seu sobrinho, Ryan, que fazia curso de técnico em agropecuária. Ryan sugeriu que Edvaldo criasse suas galinhas juntamente com os ovinos. Essa criação simultânea de espécies diferentes chama-se *consórcio*.

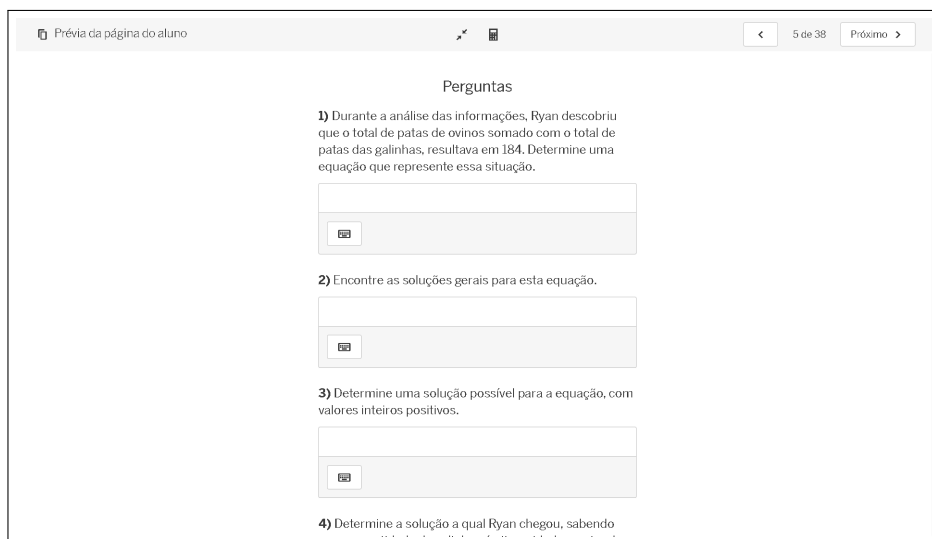
Ao pegar a ficha com as informações sobre os animais, que lhe tinha sido entregue mais cedo e estava impressa em uma qualidade horrível, não era possível identificar os números totais de ovinos e galinhas. No entanto, ele percebeu que a tabela continha algumas informações bem peculiares, como o número total de patas dos animais, que era 184, e o número de chips de identificação que foram colocados apenas nas ovelhas.

Ryan sabia que a quantidade de ovinos era oito unidades menor do que a quantidade de galinhas, pois ouviu seu tio comentando recentemente. Então ele decidiu que poderia calcular o número de animais fazendo uma estimativa: usaria a informação da quantidade total de patas e consideraria que a diferença entre os números de galinhas e ovinos.

Deste modo, ele encontrou as quantidades, continuou com o planejamento do projeto e na semana seguinte já estava tudo pronto para receber os animais.

Como era de se esperar, o consórcio deu certo e a quantidade de moscas sofreu significativamente.

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Figura 3.2: Perguntas da avaliação diagnóstica

Prévia da página do aluno

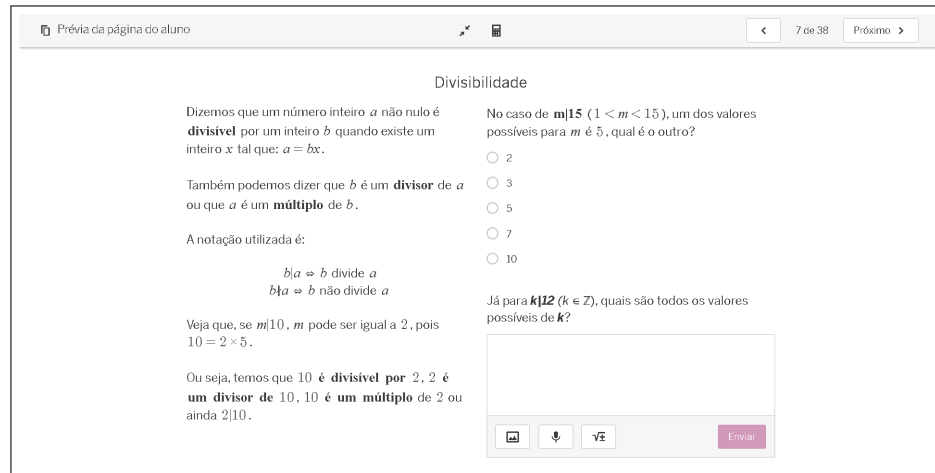
5 de 38 Próximo >

Perguntas

- 1) Durante a análise das informações, Ryan descobriu que o total de patas de ovinos somado com o total de patas das galinhas, resultava em 184. Determine uma equação que represente essa situação.
- 2) Encontre as soluções gerais para esta equação.
- 3) Determine uma solução possível para a equação, com valores inteiros positivos.
- 4) Determine a solução a qual Ryan chegou, sabendo que a quantidade de ovinos é oito unidades menor do que a quantidade de galinhas.

Fonte: Capturada da plataforma *Desmos*.

Após esta etapa, temos a apresentação de conceitos matemáticos relacionados com o tema gerador da SD. Atrilados à apresentação dos conteúdos, tem-se exemplos, exercícios resolvidos e atividades propostas.

Figura 3.3: Atividade sobre divisibilidade


Prévia da página do aluno

7 de 38 Próximo >

Divisibilidade

Dizemos que um número inteiro a não nulo é **divisível** por um inteiro b quando existe um inteiro x tal que: $a = bx$.

Também podemos dizer que b é um **divisor** de a ou que a é um **múltiplo** de b .

A notação utilizada é:

$$b|a \Leftrightarrow b \text{ divide } a$$

$$b \nmid a \Leftrightarrow b \text{ não divide } a$$

Veja que, se $m|10$, m pode ser igual a 2, pois $10 = 2 \times 5$.

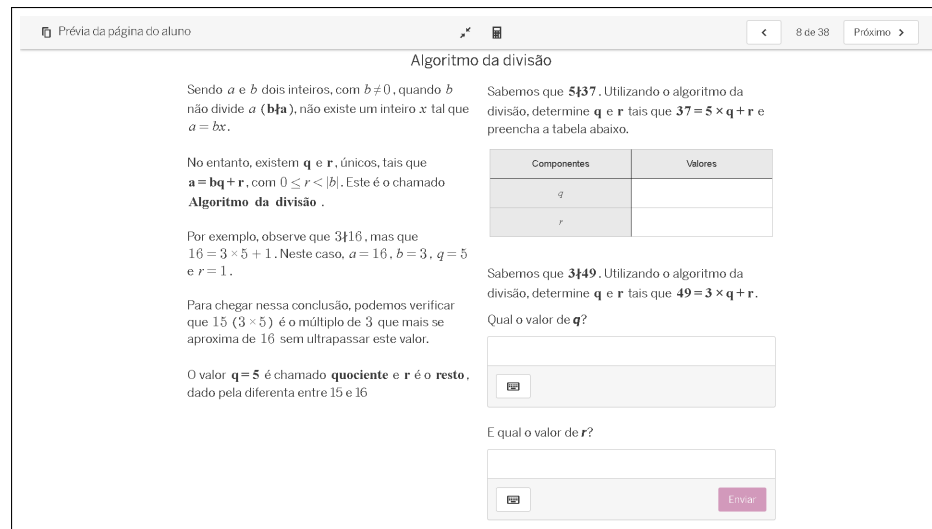
Ou seja, temos que 10 é **divisível por 2**, 2 é um **divisor de 10**, 10 é um **múltiplo de 2** ou ainda $2|10$.

No caso de $m|15$ ($1 < m < 15$), um dos valores possíveis para m é 5, qual é o outro?

2
 3
 5
 7
 10

Já para $k|12$ ($k \in \mathbb{Z}$), quais são todos os valores possíveis de k ?

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Figura 3.4: O algoritmo da divisão


Prévia da página do aluno

8 de 38 Próximo >

Algoritmo da divisão

Seja a e b dois inteiros, com $b \neq 0$, quando b não divide a ($b \nmid a$), não existe um inteiro x tal que $a = bx$.

No entanto, existem q e r , únicos, tais que $a = bq + r$, com $0 \leq r < |b|$. Este é o chamado **Algoritmo da divisão**.

Por exemplo, observe que $3 \nmid 16$, mas que $16 = 3 \times 5 + 1$. Neste caso, $a = 16$, $b = 3$, $q = 5$ e $r = 1$.

Para chegar nessa conclusão, podemos verificar que 15 (3×5) é o múltiplo de 3 que mais se aproxima de 16 sem ultrapassar este valor.

O valor $q = 5$ é chamado **quociente** e r é o **resto**, dado pela diferença entre 16 e 15.

Sabemos que $5 \nmid 37$. Utilizando o algoritmo da divisão, determine q e r tais que $37 = 5 \times q + r$ e preencha a tabela abaixo.

Componentes	Valores
q	<input type="text"/>
r	<input type="text"/>

Sabemos que $3 \nmid 49$. Utilizando o algoritmo da divisão, determine q e r tais que $49 = 3 \times q + r$. Qual o valor de q ?

E qual o valor de r ?

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Em determinado momento, é apresentada a dinâmica de utilizar tabelas para a resolução do exercício de modificar a notação de um número, de base dez para base dois (figura 3.5). É um recurso simples que funciona, basicamente, como uma “calculadora manual” de conversão de números do sistema decimal para o sistema binário.

Figura 3.5: Conversão de decimais em binários

Prévia da página do aluno

10 de 38 Próximo >

"Escrevendo em Binário"

Observe a tabela abaixo. Ela serve para escrevermos números utilizando o sistema binário.

2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

Imagine que você queira escrever o número **5**. Para que ele seja representado em binário, devemos pensar em quais potências de base 2 podemos utilizar para formá-lo.

Observe que $5 = 1 + 4 = 2^0 + 2^2$. Ou seja, utilizamos as potências de expoentes **zero e dois**.

Assim, vamos colocar o número **1** nas posições relativas às potências utilizadas e **0** nas potências menores não utilizadas.

2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
				1	0	1

Portanto, o número **5** é equivalente a **101**, no sistema de numeração de base dois.

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

A atividade conta com algumas páginas dedicadas aos critérios de divisibilidade (figura 3.7) de alguns números, onde são apresentados argumentos baseados na notação da base de numeração decimal (figura 3.6).

Figura 3.6: Bases de numeração

Prévia da página do aluno

13 de 48 Próximo >

Bases de numeração

Seja $b \geq 2$, todo número a pode ser escrito na forma:

$$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \dots + r_1 b + r_0$$

em que $n \geq 0$, $r_i \neq 0$ e, para cada índice i , $0 \leq i \leq n$, tem-se que $0 \leq r_i < b$.


Assim, o símbolo $(r_n r_{n-1} r_{n-2} \dots r_1 r_0)_b$ representa a expressão de a na base b .

Por exemplo, a representação do número

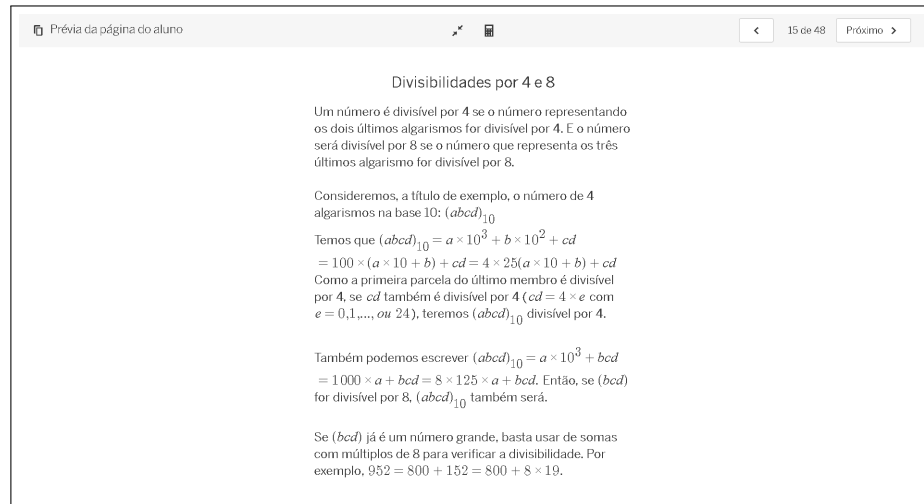
$$n = 3 \times 10^2 + 6 \times 10 + 5,$$

na base 10 é $(365)_{10}$ ou apenas 365.

No sistema binário, esse número seria $(101101101)_2$, já que:

$$n = 1 \times 2^8 + 0 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 = 365$$


Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Figura 3.7: Critérios de divisibilidade por 4 e 8


Divisibilidades por 4 e 8

Um número é divisível por 4 se o número representando os dois últimos algarismos for divisível por 4. E o número será divisível por 8 se o número que representa os três últimos algarismos for divisível por 8.

Consideremos, a título de exemplo, o número de 4 algarismos na base 10: $(abcd)_{10}$

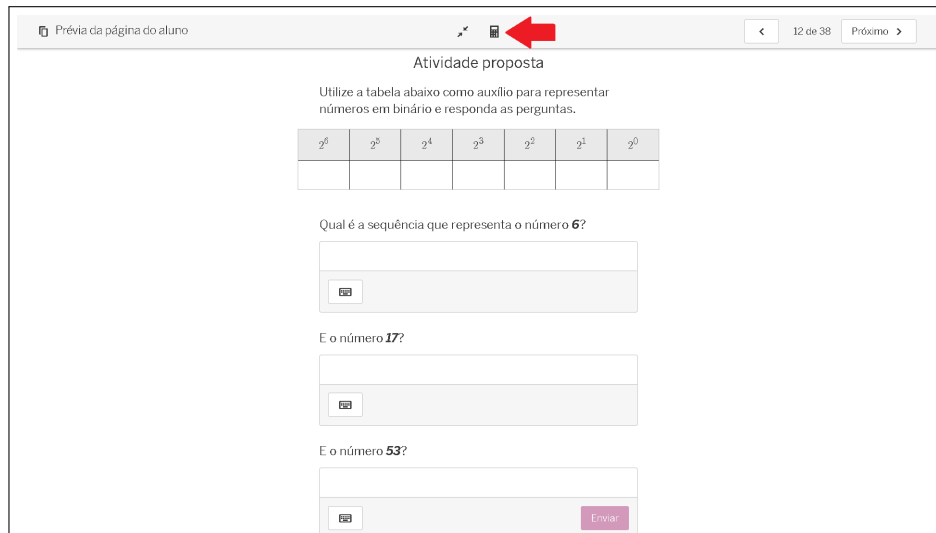
Temos que $(abcd)_{10} = a \times 10^3 + b \times 10^2 + cd$
 $= 100 \times (a \times 10 + b) + cd = 4 \times 25(a \times 10 + b) + cd$
 Como a primeira parcela do último membro é divisível por 4, se cd também é divisível por 4 ($cd = 4 \times e$ com $e = 0, 1, \dots, \text{ou } 24$), teremos $(abcd)_{10}$ divisível por 4.

Também podemos escrever $(abcd)_{10} = a \times 10^3 + bcd$
 $= 1000 \times a + bcd = 8 \times 125 \times a + bcd$. Então, se (bcd) for divisível por 8, $(abcd)_{10}$ também será.

Se (bcd) já é um número grande, basta usar de somas com múltiplos de 8 para verificar a divisibilidade. Por exemplo, $952 = 800 + 152 = 800 + 8 \times 19$.

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Durante os exercícios, os usuários podem utilizar uma calculadora disponibilizada pelo autor da atividade, ela se encontra na parte superior central, ao lado do ícone de minimizar/maximizar a página da atividade.

Figura 3.8: Atividade sobre conversão de decimais em binários


Atividade proposta

Utilize a tabela abaixo como auxílio para representar números em binário e responda as perguntas.

2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

Qual é a sequência que representa o número **6**?

E o número **17**?

E o número **53**?

Enviar

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

A seção que aborda a generalização e um método mais eficaz para a mudança de base, também apresenta tabelas como recurso, apenas adequando sua utilização ao método

abordado.

Figura 3.9: Mudança de base

Prévia da página do aluno

14 de 38 Próximo >

Mudança de base

Para mudar um número n da base 10 para uma outra **base** b qualquer, devemos seguir os passos abaixo:

1. Dividir o número por b , obtendo assim um quociente q_0 e um resto r_0 ;
2. Dividir o quociente q_0 por b , obtendo um quociente q_1 e um resto r_1 ;
3. Continuar as divisões até que o quociente q_n obtido seja zero.

O número formado por $r_n r_{n-1} \dots r_1 r_0$ é o número n base b .

ATENÇÃO: Ressaltamos que ao realizar o processo, obtemos os restos na ordem inversa, ou seja, primeiro r_0 , depois r_1 , r_2 e assim por diante.

Veja a seguir a transformação de **176 da base 10** para a base **2**.

Começamos dividindo 176 por 2 e obtendo quociente **88** e um resto **0**. Depois dividimos o quociente 88 por 2 e obtemos resto 0.

Seguimos dividindo os quocientes e anotando os restos, até que chegamos ao quociente zero, onde verificamos que o resto é **1**.

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Figura 3.10: Exemplo sobre mudança de base

Prévia da página do aluno

15 de 38 Próximo >

Mudança de base

Para escrever números na base 5, por exemplo, utilizamos os algarismos **0, 1, 2, 3 e 4**. Veja a conversão do número $(366)_{10}$:

366	5		
1	73	5	
	3	14	5
		4	2

Como obtemos os restos na ordem inversa, o correto é **$(2431)_5$** .

Para confirmar, podemos utilizar a seguinte forma:

$$(2431)_5 = 2 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 = (366)_{10}$$

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Figura 3.11: Atividade proposta sobre mudança de base

Prévia da página do aluno

Atividade proposta

Utilize a tabela a seguir como auxílio para responder.

Transforme o número $(65)_{10}$ para base **3** e registre sua resposta abaixo:

Transforme o número $(320)_{10}$ para base **7** e registre sua resposta abaixo:

Enviar

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Em seguida, temos uma calculadora de conversão de bases, feitas na calculadora gráfica. Ela converte um número na base 10 para outra base qualquer, retornando também uma apresentação geométrica do resultado (figura 3.12).

Figura 3.12: Convertendo da base 10 para outra qualquer

Conversão de um número em base 10 para uma outra base qualquer

Insira um inteiro positivo qualquer representando o na base 10

Insira um número inteiro positivo para o qual representará a nova base b .

Verifique que com os algarismos na nova base e os expoentes mostrados, você pode retornar à representação decimal. Por exemplo temos que $3 \times 5^1 + 1 \times 5^0 = 16$. Tente para outros valores!

Base 10

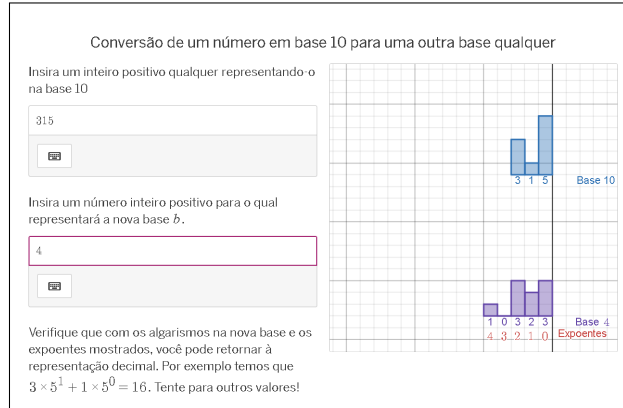
Base 5

Expoentes

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Além de retornar o número convertido, esta calculadora também apresenta um breve resumo da forma expandida dos números e mostra os expoentes relativos à expansão do resultado. Veja na figura 3.13 o exemplo da conversão do número 315 para a base 4.

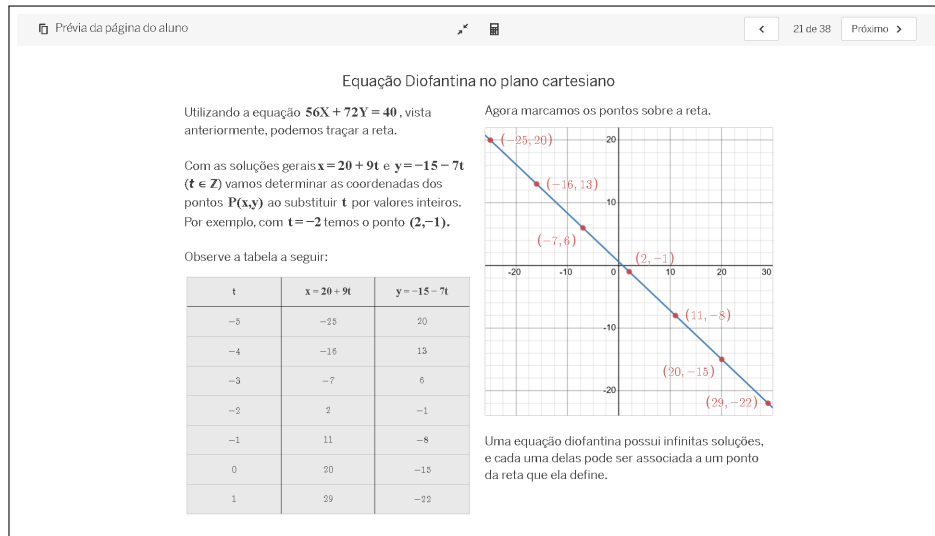
Figura 3.13: Convertendo 315 para a base 4



Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

A seguir, temos a seção sobre equações diofantinas, na qual apresentam-se definição, método de cálculo, propriedades e etc. Além disto, é enfatizada a questão geométrica, que discorre sobre a interpretação de uma equação deste tipo como uma reta no plano cartesiano e suas soluções como pontos desta reta.

Figura 3.14: Representação geométrica de uma equação diofantina



Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

O exercício proposto nessa seção envolve, além da determinação de soluções particulares e gerais, a determinação de suas representações geométricas. O usuário é orientado a encontrar soluções particulares em determinado intervalo e registrá-las em uma tabela, a

qual está conectada com um gráfico, via CL (veja em 1.5), que mostra os pontos sobre a reta, caso sejam determinados corretamente.

Figura 3.15: Exercício sobre representação geométrica de equações diofantinas

Prévia da página do aluno

< 22 de 38 Próximo >

Exercitando

Dada a equação $54X + 21Y = 906$, encontre sua solução geral.

Vamos, primeiramente encontrar o **mdc(54, 21)** com o algoritmo de Euclides.

	2	1	1	3
54	21	12	9	3
12	9	3	0	

Agora, vamos escrever **$d = \text{mdc}(21, 54) = 3$** na forma **$3 = r \cdot 54 + s \cdot 21$** utilizando os resultados da tabela acima.

$3 = 12 - 1 \cdot 9$
 $3 = 12 - 1 \cdot (21 - 1 \cdot 12)$
 $3 = 12 - 1 \cdot 21 + 1 \cdot 12 = 2 \cdot 12 - 1 \cdot 21$
 $3 = 2 \cdot (54 - 2 \cdot 21) - 1 \cdot 21$
 $3 = 2 \cdot 54 - 4 \cdot 21 - 1 \cdot 21$
 $3 = 2 \cdot 54 - 5 \cdot 21$
 $3 = (2) \cdot 54 + (-5) \cdot 21$

ou seja, $r = 2$ e $s = -5$.

Encontre as soluções particulares e registre os valores na tabela abaixo.

x_0	y_0

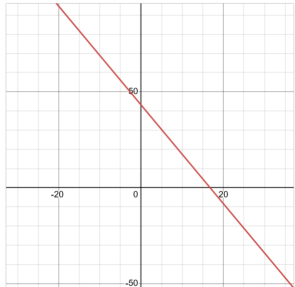
E as soluções gerais na próxima tabela.

x	y

Utilizando suas respostas, preencha a tabela com os valores das coordenadas de cada ponto $P(x,y)$ para marcá-los sobre a reta $54X + 21Y = 906$.

Os valores de **t** já foram pré selecionados, para que os pontos apareçam no gráfico abaixo da tabela, utilize estes valores para determinas as coordenadas.

t	x	y
-88		
-87		
-86		
-85		
-84		
-83		
-82		



Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Na próxima página, temos uma calculadora de soluções de equações diofantinas (figura 3.16). O usuário deve inserir os coeficientes nos campos determinados e clicar em “Calcular”, na calculadora gráfica ao lado.

Figura 3.16: Calculadora para equações diofantinas

Calculadora de soluções de equações diofantinas

Entre com os inteiros para uma equação diofantina linear $ax + by = c$, em seguida clique em Calcular

$a =$

$b =$

$c =$

Calcular

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Na figura 3.17, temos um exemplo de como são apresentadas as soluções.

Figura 3.17: Apresentação das soluções

Calculadora de soluções de equações diofantinas

Entre com os inteiros para uma equação diofantina linear $ax + by = c$, em seguida clique em Calcular

$a = 5$

$b = -2$

$c = 13$

$x_{sol} = 13 - 2 \cdot t$

$t \in \mathbb{Z}$

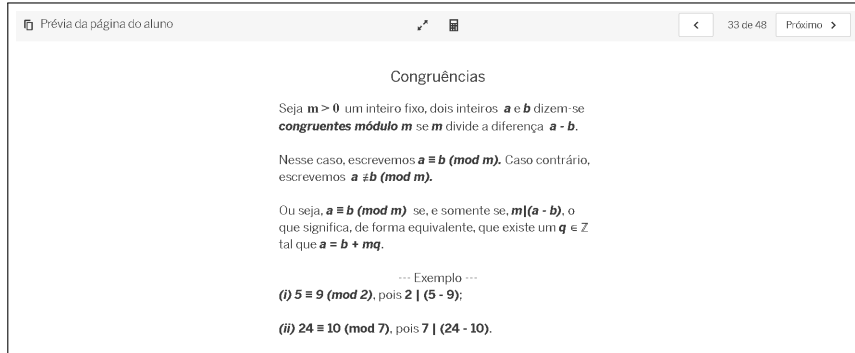
$y_{sol} = 26 - 5 \cdot t$

Calcular

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

O próximo tópico tratado na atividade é o de congruências, onde é feita a apresentação da teoria (figura 3.18), de alguns exercícios resolvidos (figura 3.19) e a proposta de algumas atividades para o usuário responder (figura 3.20).

Figura 3.18: Congruências



Prévia da página do aluno

33 de 48 Próximo >

Congruências

Seja $m > 0$ um inteiro fixo, dois inteiros a e b dizem-se **congruentes módulo m** se m divide a diferença $a - b$.

Nesse caso, escrevemos $a \equiv b \pmod{m}$. Caso contrário, escrevemos $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Ou seja, $a \equiv b \pmod{m}$ se, e somente se, $m \mid (a - b)$, o que significa, de forma equivalente, que existe um $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a = b + mq$.

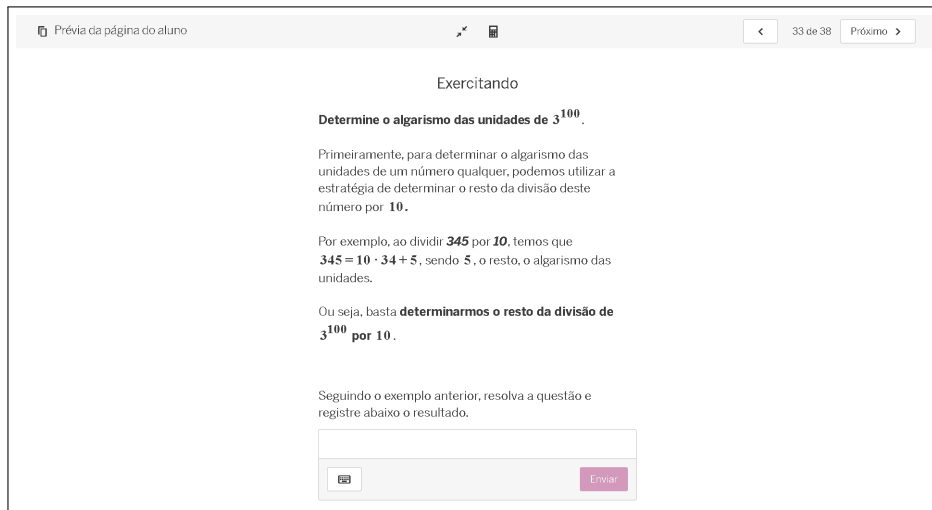
... Exemplo ...

(i) $5 \equiv 9 \pmod{2}$, pois $2 \mid (5 - 9)$;

(ii) $24 \equiv 10 \pmod{7}$, pois $7 \mid (24 - 10)$.

Fonte: capturada da plataforma Desmos sobre atividade de autoria própria.

Figura 3.19: Exercício sobre congruências



Prévia da página do aluno

33 de 38 Próximo >

Exercitando

Determine o algarismo das unidades de 3^{100} .

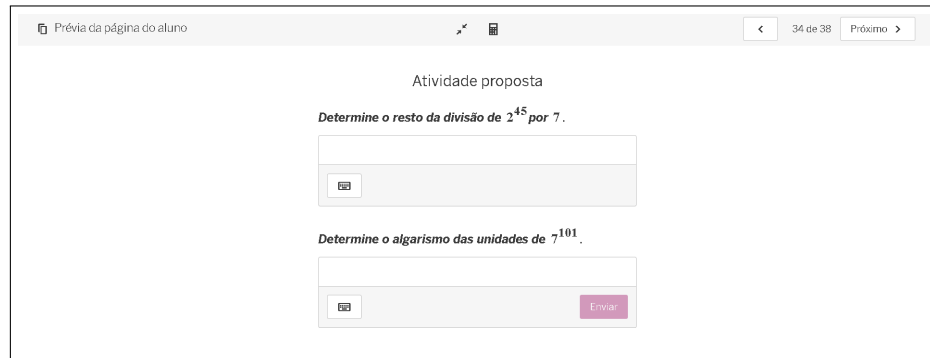
Primeiramente, para determinar o algarismo das unidades de um número qualquer, podemos utilizar a estratégia de determinar o resto da divisão deste número por **10**.

Por exemplo, ao dividir **345** por **10**, temos que $345 = 10 \cdot 34 + 5$, sendo **5**, o resto, o algarismo das unidades.

Ou seja, basta **determinarmos o resto da divisão de 3^{100} por 10**.

Seguindo o exemplo anterior, resolva a questão e registre abaixo o resultado.

Fonte: capturada da plataforma Desmos sobre atividade de autoria própria.

Figura 3.20: Atividades propostas sobre congruências

Prévia da página do aluno

Atividade proposta

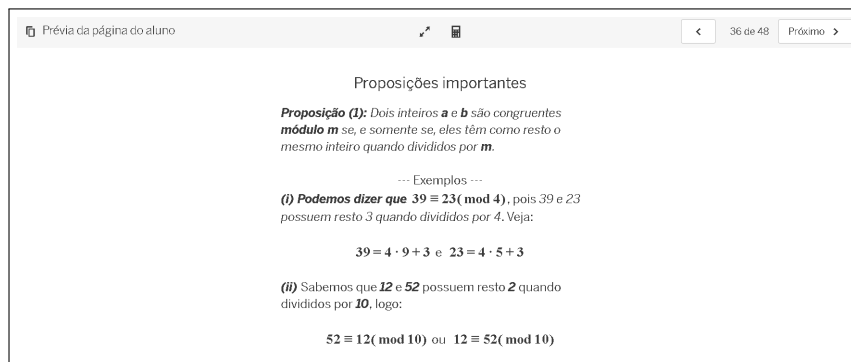
Determine o resto da divisão de 2^{45} por 7.

Determine o algoritmo das unidades de 7^{101} .

Enviar

Fonte: capturada da plataforma Desmos sobre atividade de autoria própria.

De uma proposição apresentada (figura 3.21), temos uma interpretação geométrica das congruências (figuras 3.22 e 3.23).

Figura 3.21: Proposição

Prévia da página do aluno

Proposições importantes

Proposição (I): Dois inteiros **a** e **b** são congruentes módulo **m** se, e somente se, eles têm como resto o mesmo inteiro quando divididos por **m**.

... Exemplos ...

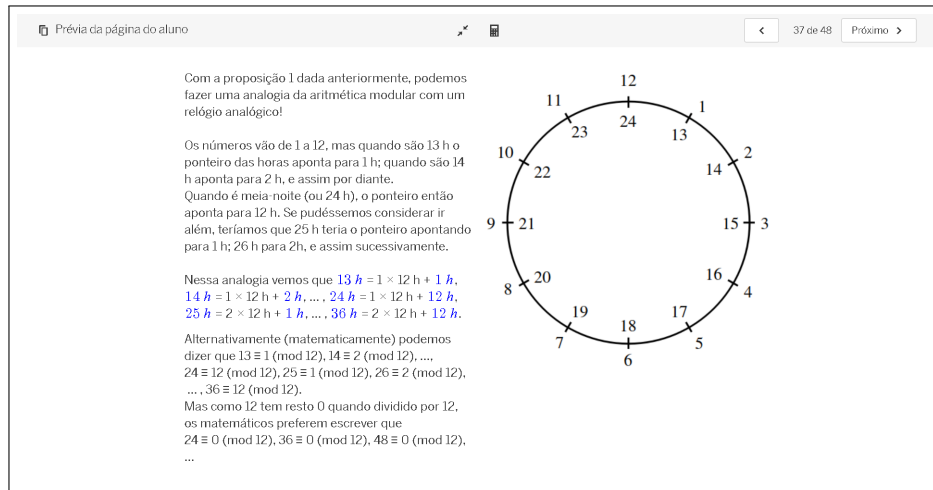
(i) Podemos dizer que $39 \equiv 23 \pmod{4}$, pois 39 e 23 possuem resto 3 quando divididos por 4. Veja:

$$39 = 4 \cdot 9 + 3 \quad \text{e} \quad 23 = 4 \cdot 5 + 3$$

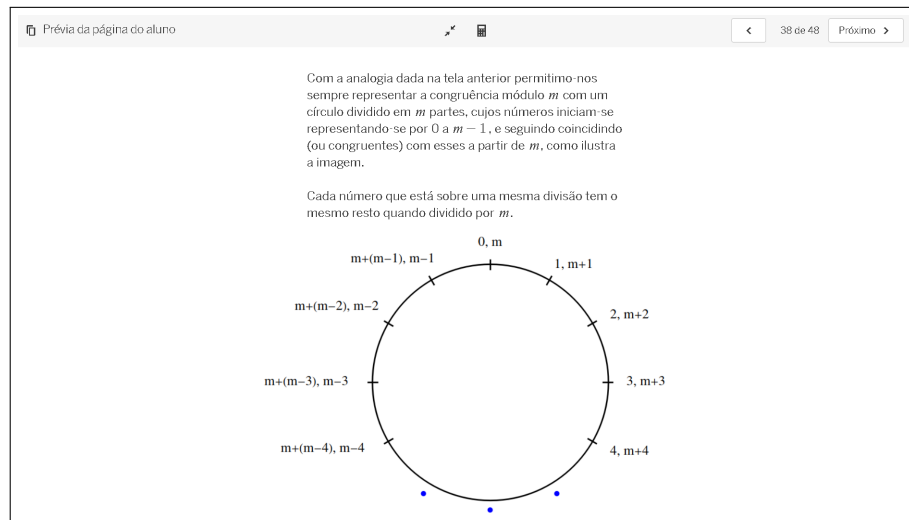
(ii) Sabemos que 12 e 52 possuem resto 2 quando divididos por 10, logo:

$$52 \equiv 12 \pmod{10} \quad \text{ou} \quad 12 \equiv 52 \pmod{10}$$

Fonte: capturada da plataforma Desmos sobre atividade de autoria própria.

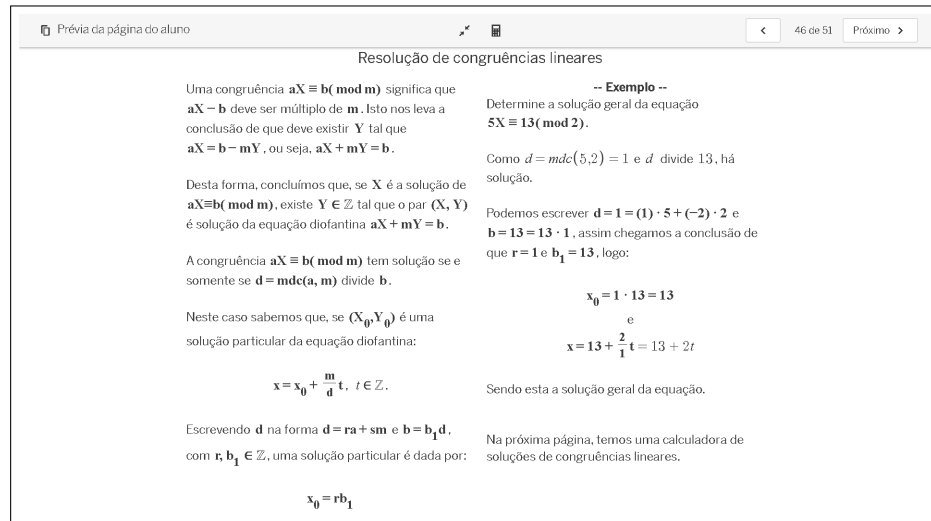
Figura 3.22: Analogia do relógio

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Figura 3.23: Circunferência das congruências

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Na próxima página, temos a apresentação da teoria de resolução de congruências lineares (figura 3.24), junto com um exemplo.

Figura 3.24: Resolução de congruências lineares


Uma congruência $aX \equiv b \pmod{m}$ significa que $aX - b$ deve ser múltiplo de m . Isto nos leva a conclusão de que deve existir Y tal que $aX = b - mY$, ou seja, $aX + mY = b$.

Desta forma, concluímos que, se X é a solução de $aX \equiv b \pmod{m}$, existe $Y \in \mathbb{Z}$ tal que o par (X, Y) é solução da equação diofantina $aX + mY = b$.

A congruência $aX \equiv b \pmod{m}$ tem solução se e somente se $d = \text{mdc}(a, m)$ divide b .

Neste caso sabemos que, se (X_0, Y_0) é uma solução particular da equação diofantina:

$$x = x_0 + \frac{m}{a}t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Escrevendo d na forma $d = ra + sm$ e $b = b_1d$, com $r, b_1 \in \mathbb{Z}$, uma solução particular é dada por:

$$x_0 = rb_1$$

-- Exemplo --
 Determine a solução geral da equação $5X \equiv 13 \pmod{2}$.

Como $d = \text{mdc}(5, 2) = 1$ e d divide 13, há solução.

Podemos escrever $d = 1 = (1) \cdot 5 + (-2) \cdot 2$ e $b = 13 = 13 \cdot 1$, assim chegamos a conclusão de que $r = 1$ e $b_1 = 13$, logo:

$$x_0 = 1 \cdot 13 = 13$$

e

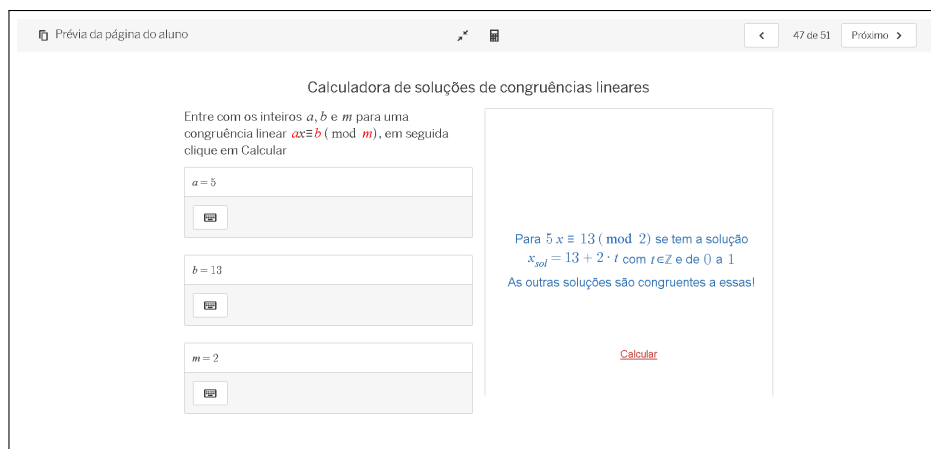
$$x = 13 + \frac{2}{1}t = 13 + 2t$$

Sendo esta a solução geral da equação.

Na próxima página, temos uma calculadora de soluções de congruências lineares.

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Em seguida, apresentamos a calculadora de resolução de congruências. Para utilizá-la, basta inserir os valores nos campos determinados, à esquerda, e clicar em “Calcular”. Na figura 3.25, temos a calculadora apresentando um resultado, que é a resolução da congruência mostrada no exemplo da página anterior.

Figura 3.25: Calculadora de soluções de congruências lineares


Calculadora de soluções de congruências lineares

Entre com os inteiros a , b e m para uma congruência linear $ax \equiv b \pmod{m}$, em seguida clique em Calcular

$a = 5$

$b = 13$

$m = 2$

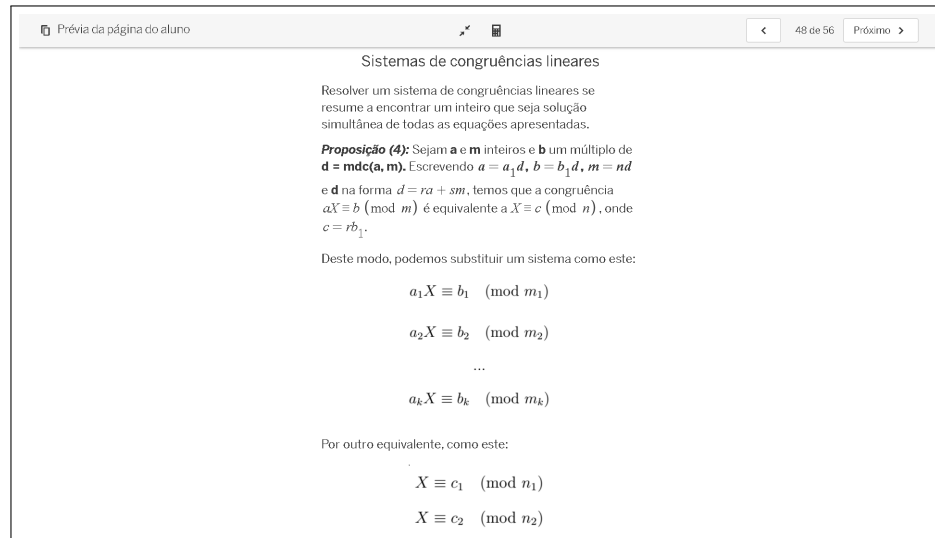
Para $5x \equiv 13 \pmod{2}$ se tem a solução $x_{sol} = 13 + 2 \cdot t$ com $t \in \mathbb{Z}$ e de 0 a 1

As outras soluções são congruentes a essas!

Calcular

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

O próximo tópico abrange os sistemas de congruências lineares (figura 3.26), onde se discorre sobre a simplificação de congruências lineares.

Figura 3.26: Sistemas de congruências lineares

Prévia da página do aluno

Sistemas de congruências lineares

Resolver um sistema de congruências lineares se resume a encontrar um inteiro que seja solução simultânea de todas as equações apresentadas.

Proposição (4): Sejam a e m inteiros e b um múltiplo de $d = \text{mdc}(a, m)$. Escrevendo $a = a_1 d$, $b = b_1 d$, $m = nd$ e d na forma $d = ra + sm$, temos que a congruência $aX \equiv b \pmod{m}$ é equivalente a $X \equiv c \pmod{n}$, onde $c = rb_1$.

Deste modo, podemos substituir um sistema como este:

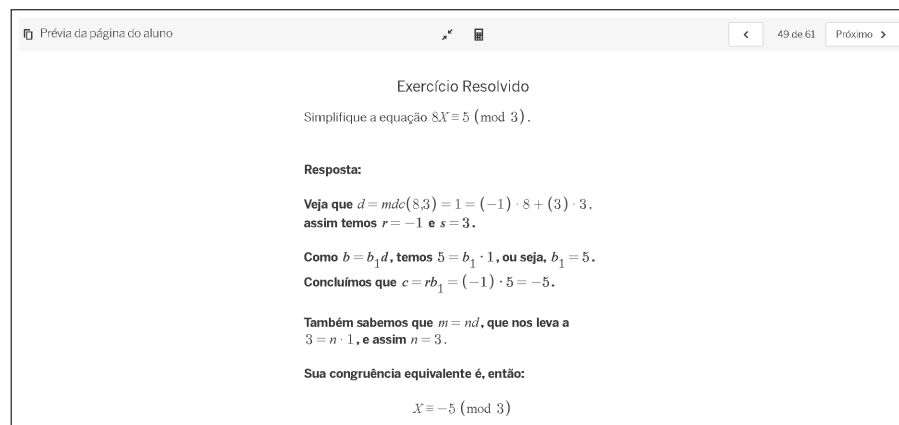
$$\begin{aligned} a_1 X &\equiv b_1 \pmod{m_1} \\ a_2 X &\equiv b_2 \pmod{m_2} \\ &\dots \\ a_k X &\equiv b_k \pmod{m_k} \end{aligned}$$

Por outro equivalente, como este:

$$\begin{aligned} X &\equiv c_1 \pmod{n_1} \\ X &\equiv c_2 \pmod{n_2} \end{aligned}$$

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

A exposição da teoria é seguida por um exemplo (figura 3.27) e uma atividade proposta (figura 3.28). Caso a atividade seja respondida corretamente, o usuário tem acesso à uma calculadora de simplificação de congruências lineares (figura 3.29).

Figura 3.27: Exercício resolvido

Prévia da página do aluno

Exercício Resolvido

Simplifique a equação $8X \equiv 5 \pmod{3}$.

Resposta:

Veja que $d = \text{mdc}(8, 3) = 1 = (-1) \cdot 8 + (3) \cdot 3$, assim temos $r = -1$ e $s = 3$.

Como $b = b_1 d$, temos $5 = b_1 \cdot 1$, ou seja, $b_1 = 5$.

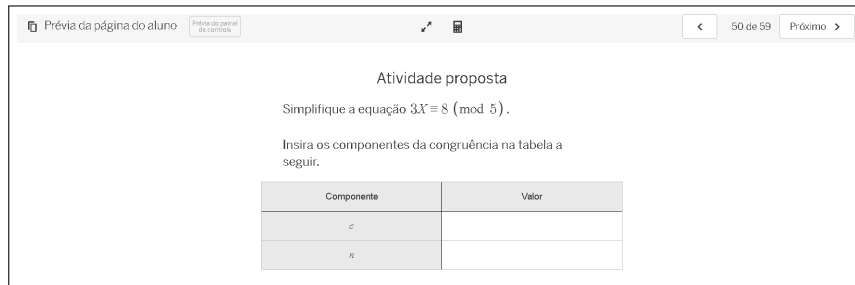
Concluimos que $c = rb_1 = (-1) \cdot 5 = -5$.

Também sabemos que $m = nd$, que nos leva a $3 = n \cdot 1$, e assim $n = 3$.

Sua congruência equivalente é, então:

$$X \equiv -5 \pmod{3}$$

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Figura 3.28: Atividade proposta

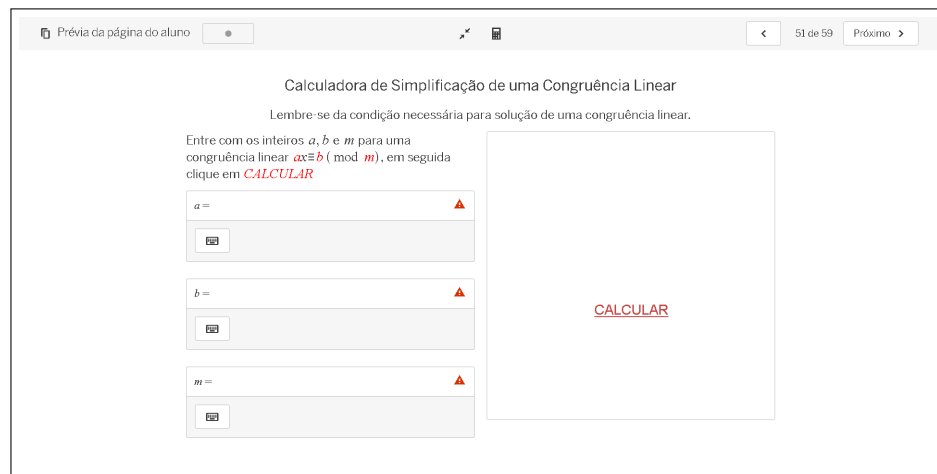
Atividade proposta

Simplifique a equação $3X \equiv 8 \pmod{5}$.

Insira os componentes da congruência na tabela a seguir.

Componente	Valor
c	
x	

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Figura 3.29: Calculadora de simplificação de congruências lineares

Calculadora de Simplificação de uma Congruência Linear

Lembre-se da condição necessária para solução de uma congruência linear.

Entre com os inteiros a , b e m para uma congruência linear $ax \equiv b \pmod{m}$, em seguida clique em **CALCULAR**

$a =$

$b =$

$m =$

CALCULAR

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Logo após estas páginas, há a teoria sobre o TCR (figura 3.30), com exemplos (figura 3.31) e proposta de atividades (figura 3.32).

Figura 3.30: TCR

Prévia da página do aluno 49 de 56 Próximo >

Teorema Chinês do Resto (TCR)

Sejam n_1, n_2, \dots, n_k inteiros, relativamente primos dois a dois (se $i \neq j$, então $\text{mdc}(n_i, n_j) = 1$), e sejam c_1, c_2, \dots, c_k inteiros arbitrários, o sistema de congruências lineares

$$\begin{aligned} X &\equiv c_1 \pmod{n_1} \\ X &\equiv c_2 \pmod{n_2} \\ &\dots \\ X &\equiv c_k \pmod{n_k} \end{aligned}$$

admite uma solução, que é única módulo $n = n_1 n_2 \dots n_k$.

Definindo $N_i = \frac{n}{n_i}$, temos que $\text{mdc}(N_i, n_i) = 1$. Deste modo, podemos determinar r_i e s_i tais que:

$$r_i N_i + s_i n_i = 1, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Assim,

$$x_0 = c_1 r_1 N_1 + c_2 r_2 N_2 + \dots + c_k r_k N_k$$

é uma solução do sistema.

Sendo x qualquer outra solução, temos que

$$x \equiv x_0 \pmod{n}$$

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Figura 3.31: Exercício resolvido

Prévia da página do aluno 51 de 57 Próximo >

Exercício Resolvido

Dado o sistema

$$\begin{aligned} 6X &\equiv 2 \pmod{4} \\ 2X &\equiv 1 \pmod{3} \\ 4X &\equiv 2 \pmod{7} \end{aligned}$$

determine sua solução.

Resposta:

Primeiramente, vamos determinar o sistema equivalente, de acordo com as igualdades da proposição 4. Observe a tabela abaixo.

a	b	m	d
a_1	6	b_1	1
a_2	2	b_2	1
a_3	4	b_3	2

Agora, escrevemos d na forma $d = ra + sm$. Veja a tabela:

d	d = ra + sm	r	s
$d_1 = \text{mdc}(6,4)$	2	1	-1
$d_2 = \text{mdc}(2,3)$	1	1	0
$d_3 = \text{mdc}(4,7)$	1	2	-1

O próximo passo é determinar c e n . Sendo $c = rb$ e $n = \frac{m}{d}$. Observe a tabela:

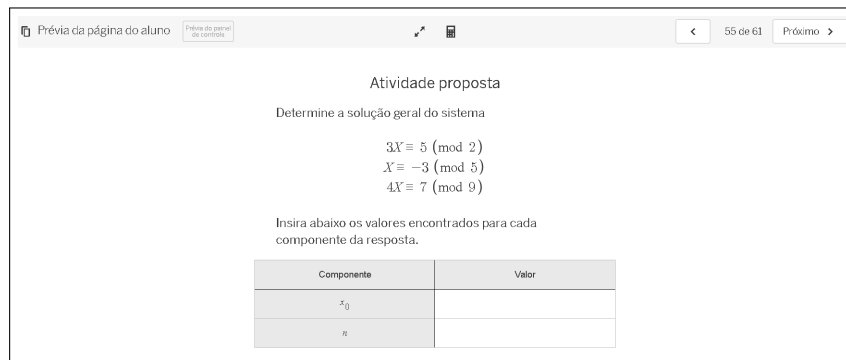
c	n
c_1	2
c_2	-1
c_3	4

Por fim, utilizamos os valores obtidos para montar o sistema equivalente, com congruências na forma $X \equiv c \pmod{n}$.

$$\begin{aligned} X &\equiv 1 \pmod{2} \\ X &\equiv -1 \pmod{3} \\ X &\equiv 4 \pmod{7} \end{aligned}$$

Agora, vamos utilizar o TCR para encontrar a solução deste sistema.

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Figura 3.32: Atividade proposta


Atividade proposta

Determine a solução geral do sistema

$$3X \equiv 5 \pmod{2}$$

$$X \equiv -3 \pmod{5}$$

$$4X \equiv 7 \pmod{9}$$

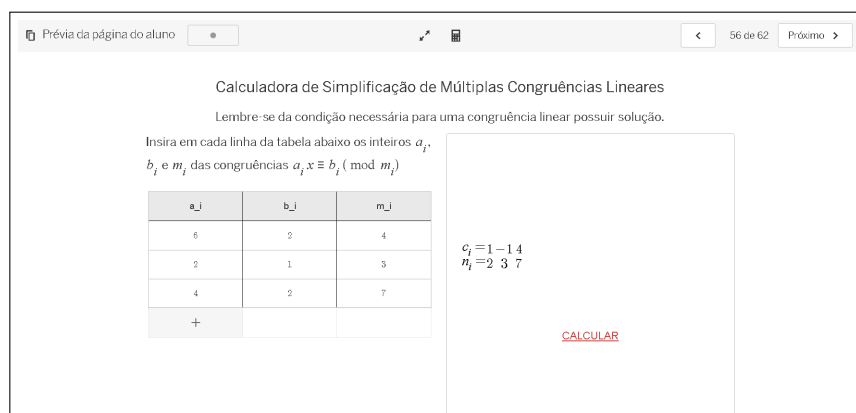
Insira abaixo os valores encontrados para cada componente da resposta.

Componente	Valor
x_0	
n	

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Caso esta atividade seja respondida corretamente, três outras calculadoras são liberadas para a utilização: a calculadora de simplificação de múltiplas congruências lineares (figura 3.33), a calculadora de congruências lineares no padrão do TCR (figura 3.34) e a calculadora de sistemas de congruências lineares na forma inicial (figura 3.35).

Nesta primeira calculadora, temos uma tabela para a entrada dos elementos de cada congruência e o resultado apresentados são os elementos c e n das congruências no formato utilizado para aplicação do Teorema Chinês do Resto.

Figura 3.33: Calculadora de simplificação de múltiplas congruências lineares


Calculadora de Simplificação de Múltiplas Congruências Lineares

Lembre-se da condição necessária para uma congruência linear possuir solução.

Insira em cada linha da tabela abaixo os inteiros a_i , b_i e m_i das congruências $a_i x \equiv b_i \pmod{m_i}$

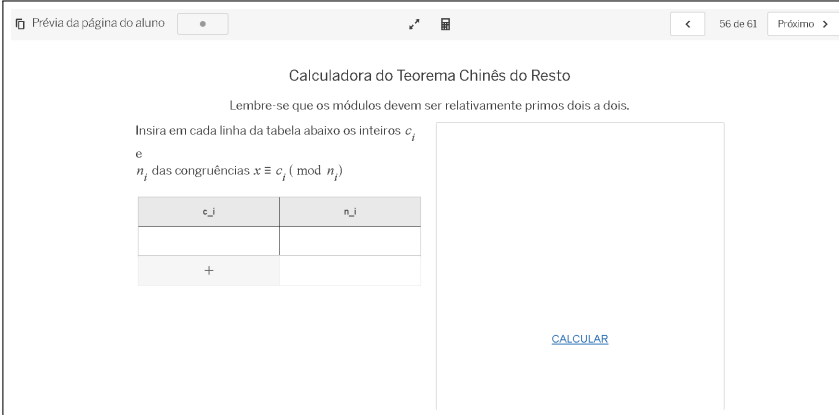
a_i	b_i	m_i
6	2	4
2	1	3
4	2	7
+		

$c_1 = 1 - 1 4$
 $n_1 = 2 3 7$

[CALCULAR](#)

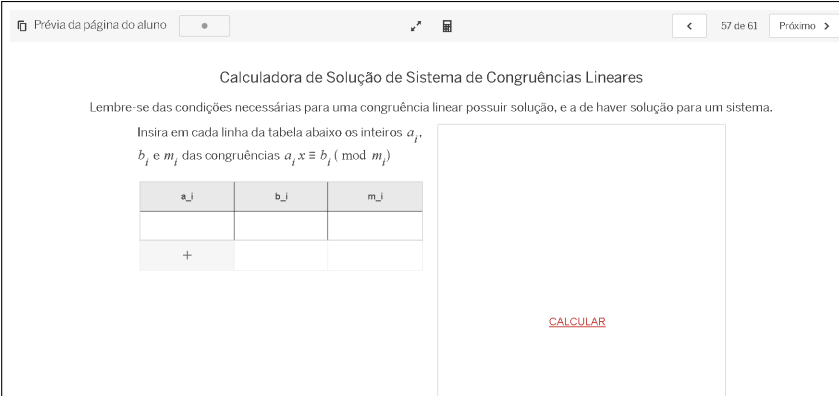
Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Na segunda pode-se utilizar os resultados da primeira, ou os resultados obtidos pelos cálculos feitos sem calculadora.

Figura 3.34: Calculadora de sistemas pelo TCR

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

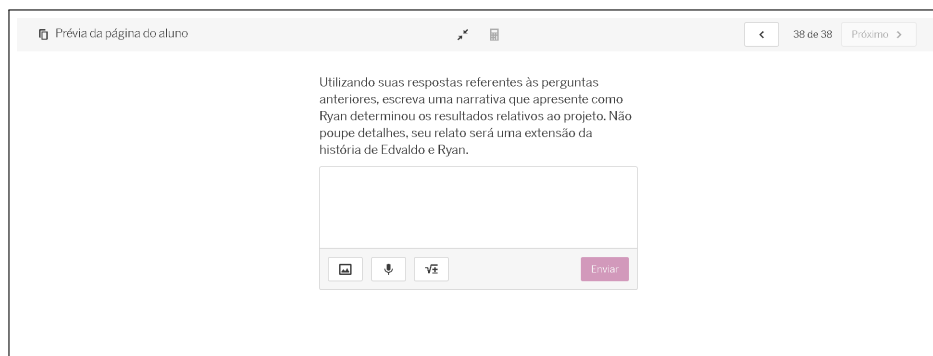
Na terceira temos a calculadora “completa”, digamos assim. O único requisito é inserir os dados das equações iniciais corretamente.

Figura 3.35: Calculadora de sistemas de congruências lineares

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.


A primeira calcula a solução de um sistema no qual todas as congruências estão no formato $X \equiv c \pmod{n}$, utilizando o TCR. Já a segunda, calcula a solução de sistemas em que as congruências estão no formato $aX \equiv b \pmod{m}$.

Ao final, temos a “avaliação final”, em que é repetida a aplicação da atividade que constitui a avaliação diagnóstica, com a adição de uma atividade com finalidade narrativa, na qual o usuário deve utilizar a criatividade, as teorias estudadas e experiência adquirida, para construir um relato que colabore com a narrativa apresentada (TEODOSIO, 2021).

Figura 3.36: Parte da avaliação final

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

3.3 Atividade 2: MDC e MMC

Os conceitos abordados nesta atividade são: Máximo Divisor Comum (MDC), o algoritmo de Euclides, teorema de Bézout, teorema de Euclides, Mínimo Múltiplo Comum (MMC). Ela pode ser acessada clicando [aqui](#) .

Esta SD, diferente das outras, conta com duas narrativas na avaliação diagnóstica, sendo que uma tem elementos referentes ao tópico MDC e a outra ao MMC. Ambas contam com perguntas que exigem do usuário capacidade de leitura e interpretação, utilização de conceitos matemáticos na resolução de problemas e análise de situações com elementos do cotidiano (UGALDE; ROWEDER, 2020).

Figura 3.37: SD sobre MDC e MMC

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Avançando na SD, tem-se a definição de MDC e do algoritmo de Euclides, com exemplos, exercícios e atividades propostas.

Figura 3.38: O algoritmo de Euclides

O algoritmo de Euclides

Agora, veja o cálculo do $\text{mdc}(684,177)$ pelo algoritmo de Euclides.

	3	1	6	2	1	2	∞
684	177	153	24	9	6	3 = $\text{mdc}(684,177)$	
153	24	9	6	3	0		

Primeiramente, dividimos 684 por 177, o que nos leva a um quociente igual a 3 e um resto igual a 153.

Depois, vamos dividir 177 pelo resto obtido no passo anterior (153). Isto nos deixa com um quociente igual a 1 e um resto igual a 24.

Repetindo o processo, o **último resto**, não nulo, é o $\text{mdc}(684,177)$.

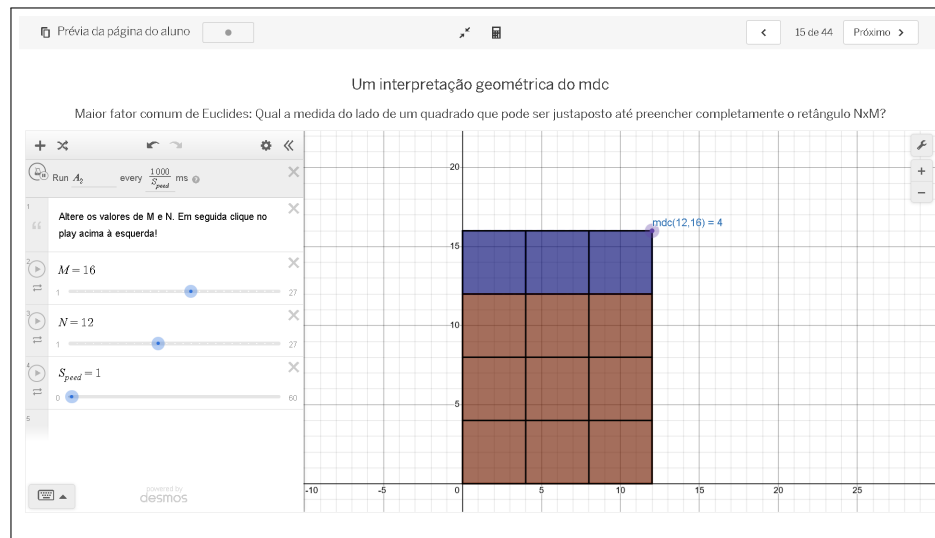
Fonte: capturada da plataforma Desmos sobre atividade de autoria própria.

Em seguida, temos um recurso interativo, na calculadora gráfica, que fornece o MDC entre dois números com uma interpretação geométrica do maior fator. O usuário determina os dois números em um controle deslizante e é gerado um quadrilátero equiangular com lados de medidas iguais a estes dois valores.

Na calculadora foi escrito um algoritmo que executa um preenchimento da figura com quadrados. O algoritmo delimita, em primeiro momento, o maior quadrado possível e repete o processo com o restante da figura, caso haja.

Portanto, caso a figura inicial seja um quadrado, ela fica totalmente preenchida logo no início, e a medida de seu lado é o MDC. Na situação em que a figura inicial é um retângulo, ele fica dividido em um quadrado e um retângulo, que é o próximo a ser dividido. O processo continua até que a figura fique totalmente preenchida.

Observando a figura 3.39, podemos perceber que o retângulo está totalmente preenchido por quadrados de lado com medida igual a 4. Este é o MDC relativo aos dois números iniciais (12 e 16).

Figura 3.39: Uma interpretação geométrica do MDC

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Além disto, ao apresentar alguns teoremas importantes, são citados alguns exemplos.

Figura 3.40: Teoremas importantes

Teoremas importantes

Teorema de Bézout (1):
Sejam a, b inteiros e $d = \text{mdc}(a, b)$. Então existem inteiros r e s tais que $d = ra + sb$.

..... Exemplo
Considerando os números 15 e 35, determine os valores de r e s para os quais se aplica o teorema de Bézout.

Utilizando o algoritmo de Euclides, podemos verificar que $d = \text{mdc}(15, 35) = 5$.

$$\begin{array}{r|rr} & 2 & 3 \\ 35 & 15 & 5 \\ \hline 5 & 0 & \end{array} \quad \text{::}$$

Deste modo, temos $5 = r \cdot 15 + s \cdot 35$.

Novamente pelo algoritmo de Euclides, podemos verificar que $5 = 35 - 2 \cdot 15$, o que nos leva a:

$$5 = (-2) \cdot 15 + 1 \cdot 35$$

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

O primeiro teorema apresentado foi o de Bézout. Na página seguinte, há um pequeno exercício (figura 3.41) que, caso respondido corretamente, dá acesso à uma calculadora que determina os inteiros de Bézout (figura 3.42), dados a e b nos termos do teorema.

Figura 3.41: Exercício

Prévia da página do aluno

Teoremas importantes

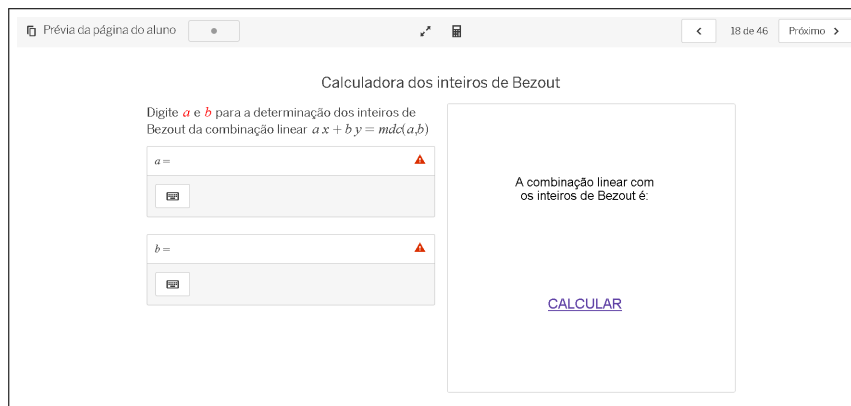
A cada novo conceito, Luiz se submeteu a exercícios para verificar se havia compreendido como utilizar a teoria para resolver alguns problemas. Observe o problema a seguir e resolva.

Considerando os números 6 e 27, nessa ordem, determine os valores de r e s para os quais se aplica o teorema de Bézout.

O valor de r é:

O valor de s é:

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Figura 3.42: Calculadora de inteiros de Bézout

Prévia da página do aluno

Calculadora dos inteiros de Bezout

Digite a e b para a determinação dos inteiros de Bezout da combinação linear $ax + by = mdc(a,b)$

$a =$

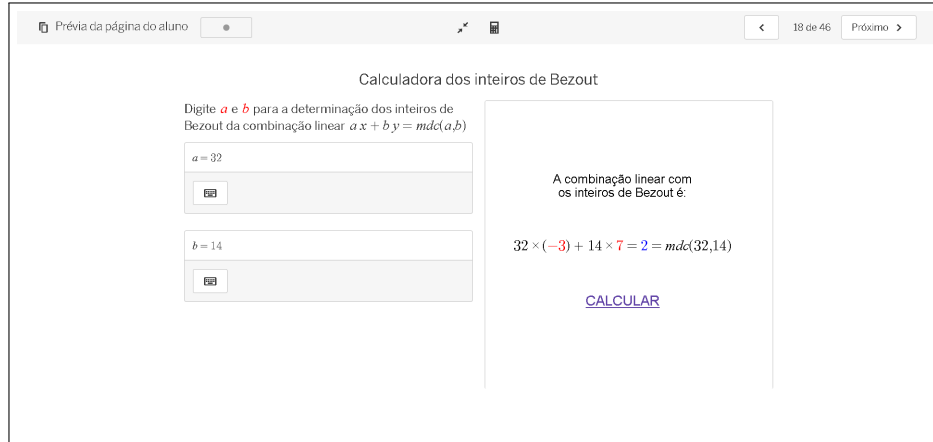
$b =$

A combinação linear com os inteiros de Bezout é:

[CALCULAR](#)

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Na figura 3.43, temos um exemplo da utilização da calculadora. Deve-se inserir os valores de a , b e clicar em “Calcular”. Caso a atividade não seja respondida ou as respostas estejam incorretas, temos apenas a mensagem da figura 3.44.

Figura 3.43: Utilização da calculadora de inteiros de Bézout

Calculadora dos inteiros de Bezout

Digite a e b para a determinação dos inteiros de Bezout da combinação linear $ax + by = mdc(a,b)$

$a = 32$

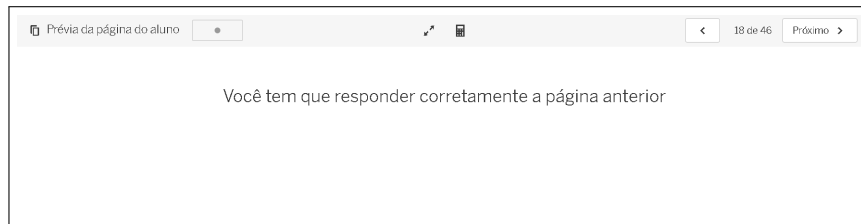
$b = 14$

A combinação linear com os inteiros de Bezout é:

$32 \times (-3) + 14 \times 7 = 2 = mdc(32,14)$

[CALCULAR](#)

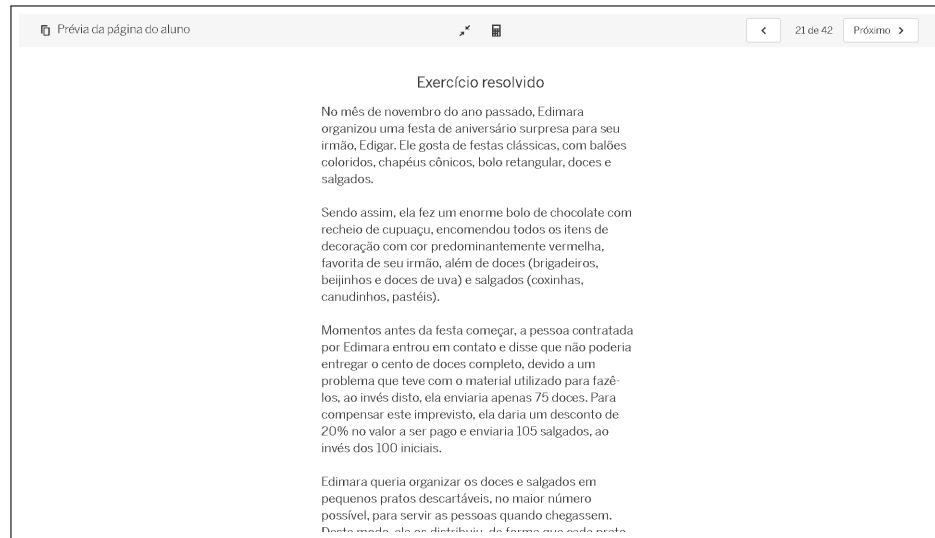
Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Figura 3.44: Mensagem de erro

Você tem que responder corretamente a página anterior

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Finalizando a parte relativa ao MDC, temos um exercício resolvido, com narrativa, seguido de uma atividade proposta ao usuário, para que possa exercitar seu raciocínio de acordo com o contexto da narrativa apresentada (SAPPI, 2019).

Figura 3.45: Exercício contextualizado com narrativa

Prévia da página do aluno

21 de 42 Próximo >

Exercício resolvido

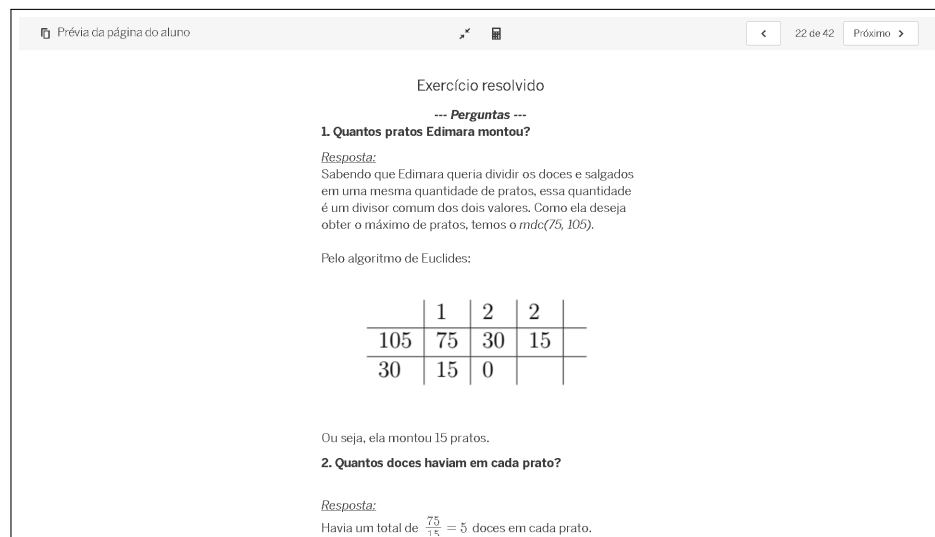
No mês de novembro do ano passado, Edimara organizou uma festa de aniversário surpresa para seu irmão, Edgar. Ele gosta de festas clássicas, com balões coloridos, chapéus cônicos, bolo retangular, doces e salgados.

Sendo assim, ela fez um enorme bolo de chocolate com recheio de cupuaçu, encomendou todos os itens de decoração com cor predominantemente vermelha, favorita de seu irmão, além de doces (brigadeiros, beijinhos e doces de uva) e salgados (coxinhas, canudinhos, pastéis).

Momentos antes da festa começar, a pessoa contratada por Edimara entrou em contato e disse que não poderia entregar o cento de doces completo, devido a um problema que teve com o material utilizado para fazê-los, ao invés disto, ela enviaria apenas 75 doces. Para compensar este imprevisto, ela daria um desconto de 20% no valor a ser pago e enviaria 105 salgados, ao invés dos 100 iniciais.

Edimara queria organizar os doces e salgados em pequenos pratos descartáveis, no maior número possível, para servir as pessoas quando chegassem. Desta modo, ela se distribuiu da forma que cada prato

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Figura 3.46: Perguntas

Prévia da página do aluno

22 de 42 Próximo >

Exercício resolvido

--- Perguntas ---

1. Quantos pratos Edimara montou?

Resposta:
Sabendo que Edimara queria dividir os doces e salgados em uma mesma quantidade de pratos, essa quantidade é um divisor comum dos dois valores. Como ela deseja obter o máximo de pratos, temos o $mdc(75, 105)$.

Pelo algoritmo de Euclides:

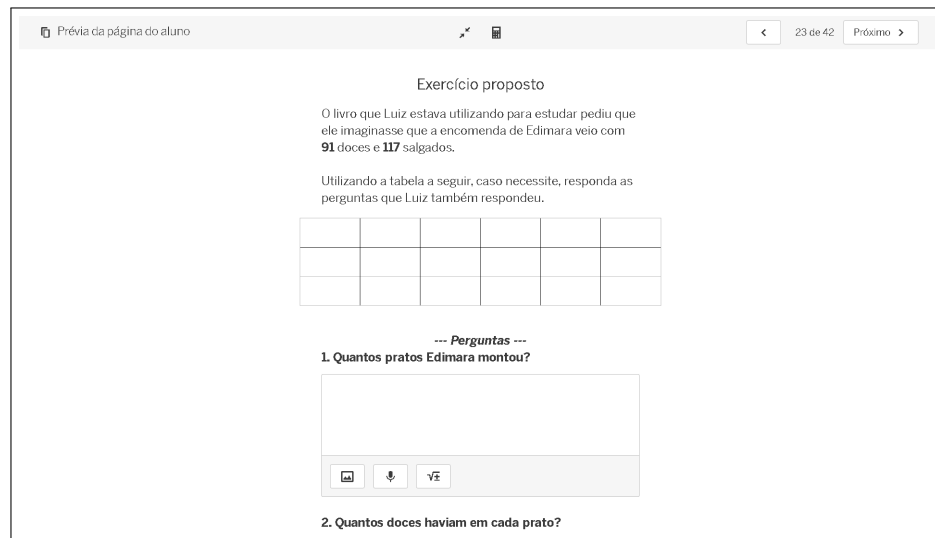
	1	2	2	
105	75	30	15	
30	15	0		

Ou seja, ela montou 15 pratos.

2. Quantos doces haviam em cada prato?

Resposta:
Havia um total de $\frac{75}{15} = 5$ doces em cada prato.

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Figura 3.47: Atividade proposta

Prévia da página do aluno

23 de 42 Próximo >

Exercício proposto

O livro que Luiz estava utilizando para estudar pediu que ele imaginasse que a encomenda de Edimara veio com **91** doces e **117** salgados.

Utilizando a tabela a seguir, caso necessite, responda as perguntas que Luiz também respondeu.

--- Perguntas ---

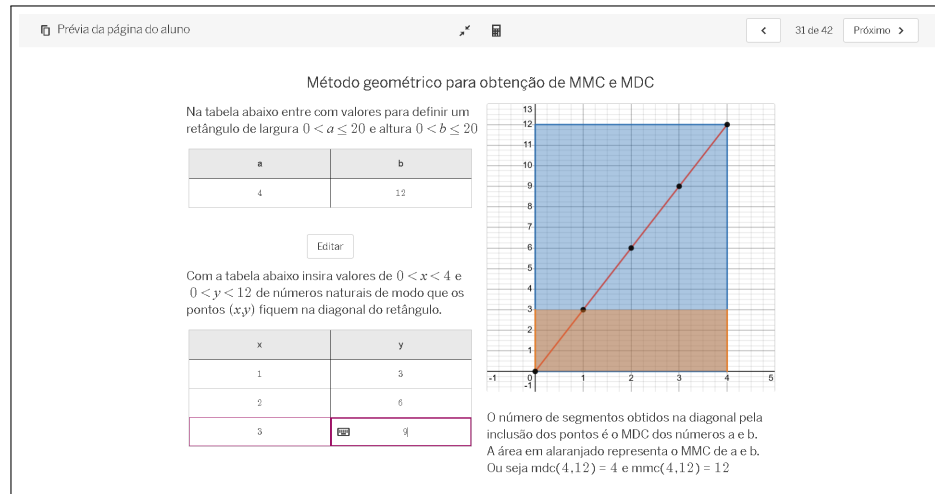
1. Quantos pratos Edimara montou?

2. Quantos doces haviam em cada prato?

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

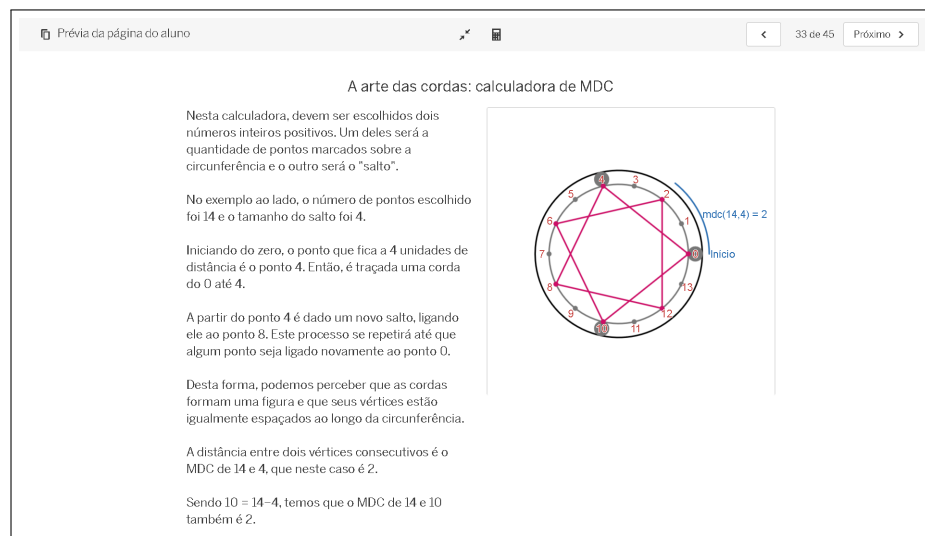
A parte relativa ao MMC segue a mesma estrutura, com teoremas, exemplos, exercícios e etc. Um destaque é a apresentação de um método geométrico para o usuário calcular MDC e MMC entre dois números.

Após a apresentação, temos um exercício onde o usuário escolhe dois inteiros em um determinado intervalo, e destaca os pontos, com coordenadas inteiras, de uma reta formada. Assim, é possível, utilizando os elementos geométricos apresentados, determinar os valores de MMC e MDC.

Figura 3.48: Método geométrico para determinar MMC e MDC de dois números

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Na página seguinte, há a descrição de outra atividade interativa. O usuário escolhe dois números, o primeiro será a quantidade de pontos, igualmente espaçados, marcados sobre uma circunferência. O segundo se refere ao tamanho do “salto”. Acompanhe o exemplo da figura 3.49.

Figura 3.49: A arte das cordas: calculadora de MDC

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

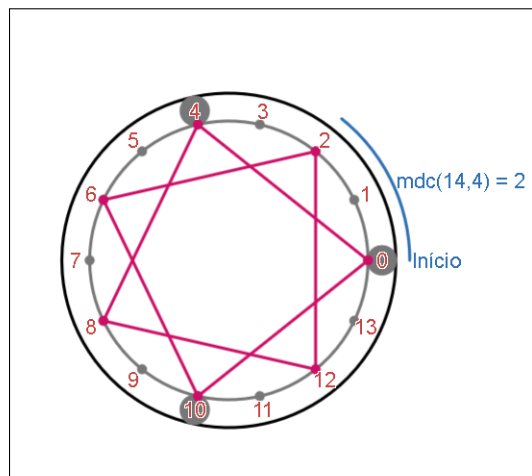
O número de pontos escolhido foi 14 e o tamanho do salto foi 4. Iniciando do zero, o ponto que fica a 4 unidades de distância é o ponto 4. Então, é traçada uma corda do 0

até o 4. A partir do ponto 4 é dado um novo salto, ligando ele ao ponto 8. Este processo se repetirá até que algum ponto seja ligado novamente ao ponto 0.

Desta forma, podemos perceber que as cordas formam uma figura e que seus vértices estão igualmente espaçados ao longo da circunferência. A distância entre dois vértices consecutivos é o MDC de 14 e 4, que neste caso é 2.

Sendo $10 = 14 - 4$, temos que o MDC de 14 e 10 também é 2. Isto se dá pelo fato de que um salto de tamanho quatro no sentido anti-horário é igual a um salto de tamanho dez no sentido horário. Ou seja, ambos os saltos formam a mesma figura (3.50).

Figura 3.50: MDC de 14 e 4



Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

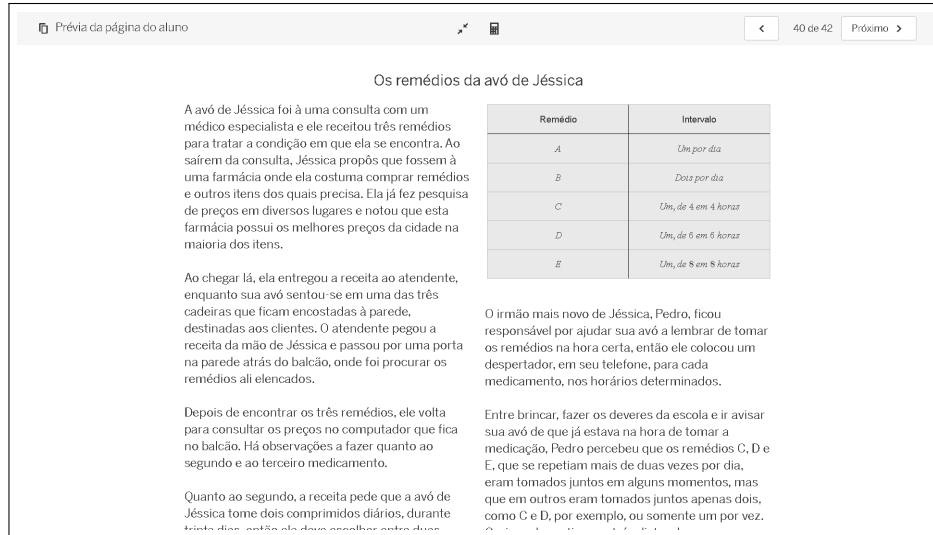
Em seguida, temos a calculadora de fato, com campos para a inserção dos números que se quer utilizar (figura 3.51).

Figura 3.51: Calculadora de MDC com cordas

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Por fim, retornam as narrativas e perguntas da avaliação diagnóstica, com a adição de um item para que o usuário crie sua própria narrativa, baseado naquelas que foram apresentadas e nos resultados que ele obteve durante a resolução das atividades.

Figura 3.52: Avaliação final



Prévia da página do aluno

40 de 42 Próximo

Os remédios da avó de Jéssica

A avó de Jéssica foi à uma consulta com um médico especialista e ele receitou três remédios para tratar a condição em que ela se encontra. Ao saírem da consulta, Jéssica propôs que fossem à uma farmácia onde ela costuma comprar remédios e outros itens dos quais precisa. Ela já fez pesquisa de preços em diversos lugares e notou que esta farmácia possui os melhores preços da cidade na maioria dos itens.

Remédio	Intervalo
A	Um por dia
B	Dois por dia
C	Um, de 4 em 4 horas
D	Um, de 6 em 6 horas
E	Um, de 8 em 8 horas

Ao chegar lá, ela entregou a receita ao atendente, enquanto sua avó sentou-se em uma das três cadeiras que ficam encostadas à parede, destinadas aos clientes. O atendente pegou a receita da mão de Jéssica e passou por uma porta na parede atrás do balcão, onde foi procurar os remédios ali elencados.

Depois de encontrar os três remédios, ele volta para consultar os preços no computador que fica no balcão. Há observações a fazer quanto ao segundo e ao terceiro medicamento.

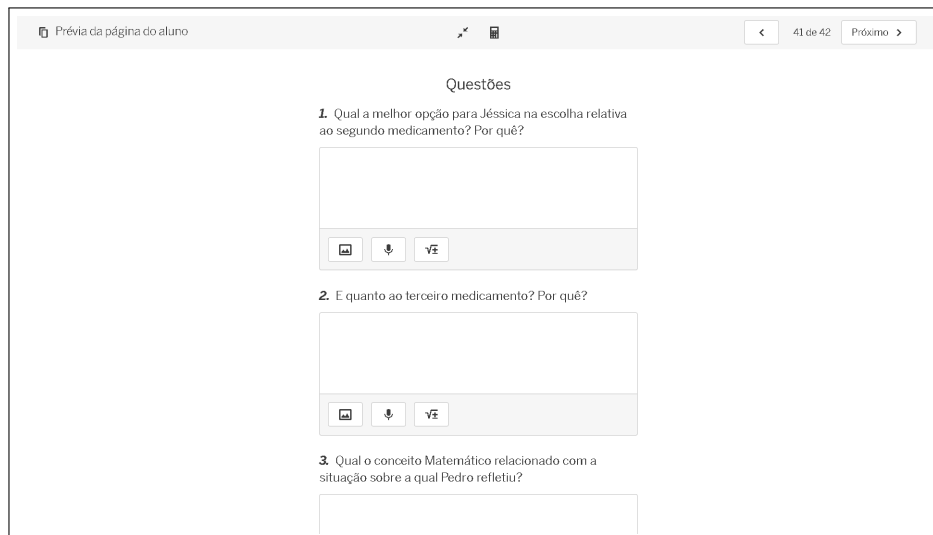
Quando ao segundo, a receita pede que a avó de Jéssica tome dois comprimidos diários, durante três dias, sendo que dois comprimidos, entre dois dias.

O irmão mais novo de Jéssica, Pedro, ficou responsável por ajudar sua avó a lembrar de tomar os remédios na hora certa, então ele colocou um despertador, em seu telefone, para cada medicamento, nos horários determinados.

Entre brincar, fazer os deveres da escola e ir avisar sua avó de que já estava na hora de tomar a medicação, Pedro percebeu que os remédios C, D e E, que se repetiam mais de duas vezes por dia, eram tomados juntos em alguns momentos, mas que em outros eram tomados juntos apenas dois, como C e D, por exemplo, ou somente um por vez.

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Figura 3.53: Questões



Prévia da página do aluno

41 de 42 Próximo

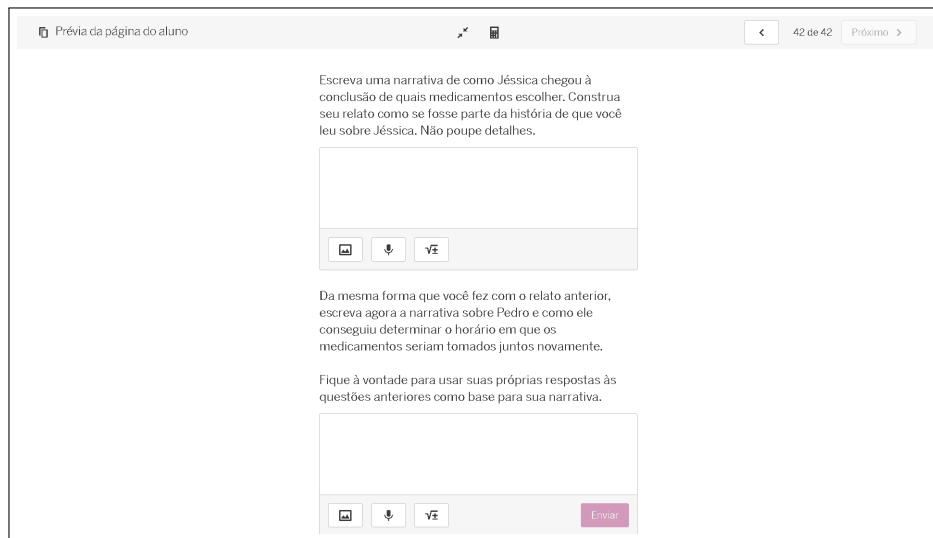
Questões

1. Qual a melhor opção para Jéssica na escolha relativa ao segundo medicamento? Por quê?

2. E quanto ao terceiro medicamento? Por quê?

3. Qual o conceito Matemático relacionado com a situação sobre a qual Pedro refletiu?

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Figura 3.54: Item final

Prévia da página do aluno

< 42 de 42 Próximo >

Escreva uma narrativa de como Jéssica chegou à conclusão de quais medicamentos escolher. Construa seu relato como se fosse parte da história de que você leu sobre Jéssica. Não poupe detalhes.

[Imagem] [Download] [Verificar]

Da mesma forma que você fez com o relato anterior, escreva agora a narrativa sobre Pedro e como ele conseguiu determinar o horário em que os medicamentos seriam tomados juntos novamente.

Fique à vontade para usar suas próprias respostas às questões anteriores como base para sua narrativa.

[Imagem] [Download] [Verificar] Enviar

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

3.4 Atividade 3: O TFA

Os conceitos abordados nesta atividade são: números primos, Teorema Fundamental da Aritmética, fatoração, MMC e MDC, divisores. Ela pode ser acessada clicando [aqui](#) [↗](#).

Do mesmo modo que as outras SD, esta começa com uma avaliação diagnóstica baseada na análise e interpretação de um texto, seguida de aplicação de conceitos matemáticos para a resolução de problemas.

Figura 3.55: Avaliação diagnóstica

Prévia da página do aluno

4 de 25 Próximo

A senha

O mês de julho do ano de 2024 foi marcado por uma notícia nada feliz, o irmão de Vicente faleceu vítima de um acidente causado por uma pessoa que estava dirigindo alcoolizada. Uma vida perdida pela imprudência alheia, que deixou saudades nos membros de uma família e uma dor que perdura.

Vicente e seu irmão, Jorge, tinham uma relação bem próxima, apesar de alguns desentendimentos clássicos em uma relação de irmãos. Apesar de tudo, eram parceiros e sempre contribuíam para o bem estar da família e uma boa convivência.

A forma que Vicente encontrou para encarar o luto foi passando horas no quarto de seu irmão, procurando quaisquer coisas que pudessem fazê-lo sentir mais próximo de Jorge. Em sua busca, encontrou alguns desenhos, poesias, uns jogos de tabuleiro personalizados e uma revista de Matemática onde Jorge conseguiu publicar seu último artigo científico.

Certo dia, veio à mente de Vicente que no notebook de seu irmão poderiam haver algumas outras produções que ele pudesse ver. Como o notebook ainda estava lá, intocado, ele foi até o quarto, levantou a tampa do aparelho e acessou:

"Neste Ano, Cada Primo é importante. Estaremos Lado a Lado, ao Contrário de antes"

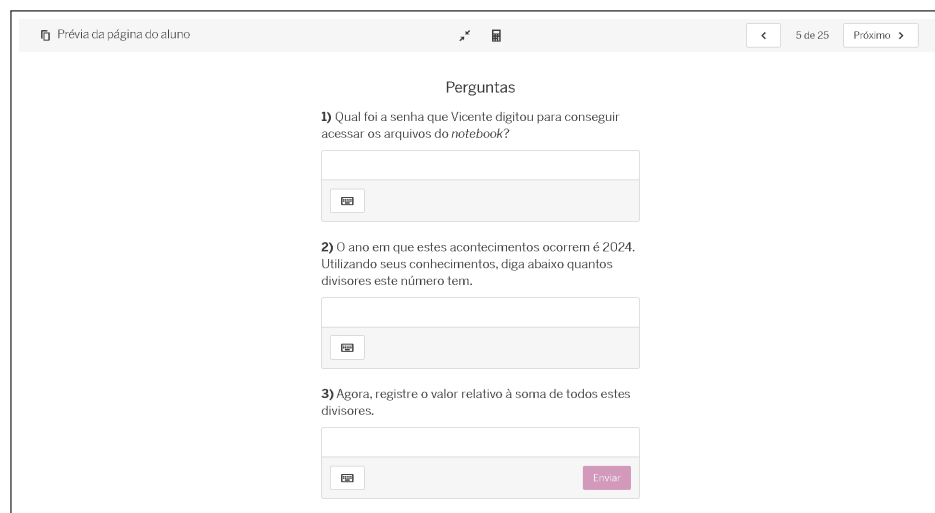
Vicente achou interessante que seu irmão tivesse escrito algo assim, mas não pelo fato de que eles não tinham primos, e sim pelos erros de português que Jorge cometera. Ele era muito rígido quanto à escrita na forma padrão da língua portuguesa, com suas regras e exceções.

Sendo assim, por qual motivo ele escreveria uma frase com estes erros tão evidentes, em meio a diversas outras, escritas de forma impecavelmente corretas? Isso deveria ter algum significado.

Os erros que Vicente encontrou na frase são oriundos do fato de que algumas palavras estão escritas com letra maiúscula no meio da sentença, de forma equivocada, sendo elas "Ano", "Cada", "Primo", "Lado" e "Contrário".

De repente, Vicente percebeu. Poderia se tratar de uma dica para a senha do notebook. Sendo assim, mãos à obra. A frase deveria poder ser traduzida em números, pensou ele, então analisou cada parte.

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Figura 3.56: Perguntas

Prévia da página do aluno

5 de 25 Próximo

Perguntas

1) Qual foi a senha que Vicente digitou para conseguir acessar os arquivos do notebook?

2) O ano em que estes acontecimentos ocorrem é 2024. Utilizando seus conhecimentos, diga abaixo quantos divisores este número tem.

3) Agora, registre o valor relativo à soma de todos estes divisores.

Enviar

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

A sequência segue com apresentação dos números primos, com exemplos e exercícios.

Figura 3.57: Números primos

Prévia da página do aluno

7 de 25 Próximo >

Números primos

Um número inteiro p diz-se *primo* se tem exatamente dois divisores positivos: 1 e $|p|$. Caso contrário, o inteiro é dito *composto*.

Quais são os divisores próprios do número **12**?
(complete a tabela)

Alguns elementos do conjunto P dos números primos positivos são:

$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, \dots\}$

Divisores próprios do número 12

No caso dos números compostos a , ele possui pelo menos um divisor b (com $|b|$ diferente de 1 e de $|a|$), isto é, um divisor b tal que $1 < |b| < |a|$. Um divisor nessas condições diz-se um *divisor próprio* de a .

E do número 28?

Divisores próprios do número 28

Assim, o número 2 é um *divisor próprio* do número 4, por exemplo.

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

O próximo tópico é o TFA e fatoração, em que temos a definição, exemplos, exercícios e atividades propostas. Veja, a seguir, a parte da SD que apresenta um exercício resolvido sobre o tema.

Figura 3.58: Exemplo sobre TFA e fatoração

Prévia da página do aluno

11 de 25 Próximo >

Fatoração

Um modo simples de escrever um inteiro nas condições do **TFA** é através da **fatoração**.

Para fatorar, nós dividimos o número em questão pelos números primos, preferencialmente em ordem crescente, quantas vezes for possível, até o quociente final ser **1**.

Observe a fatoração do número **180**.
Primeiramente, vamos dividir por **2** (caso não fosse divisível por **2**, passaríamos para o próximo primo: **3**).

180	2
90	

Agora, verificamos se é possível dividir o quociente (**90**) por **2**. Como a resposta é *sim*, dividimos por ele novamente.

180	2
90	2
45	

Agora já não é possível dividir por **2**, mas pelo primo consecutivo é possível.

180	2
90	2
45	3
15	

Vamos continuar o processo até o quociente ser 1.

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

O produto de todos os primos utilizados (coluna da direita) é a forma fatorada de **180**.

$$180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

Podemos agrupar os fatores de acordo com as propriedades de potências.

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

ou

$$180 = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$$

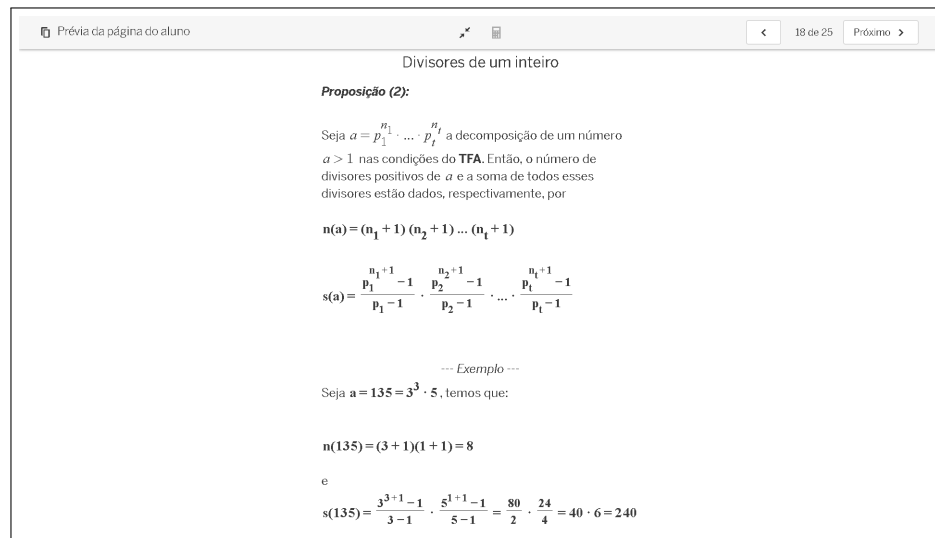
Pelo **TFA**, o formato é:

$$a = E \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r}$$

Deste modo, $a = 180$, $E = 1$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$.

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Da mesma forma que as outras SD, continuamos com a apresentação de alguns tópicos, seguidos de exercícios. O último tópico, antes da avaliação final, é sobre o cálculo do número de divisores de um número e da soma destes divisores.

Figura 3.59: Número de divisores e sua soma


Divisores de um inteiro

Proposição (2):

Seja $a = p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_l^{n_l}$ a decomposição de um número $a > 1$ nas condições do TFA. Então, o número de divisores positivos de a e a soma de todos esses divisores estão dados, respectivamente, por

$$n(a) = (n_1 + 1)(n_2 + 1) \dots (n_l + 1)$$

$$s(a) = \frac{p_1^{n_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{n_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_l^{n_l+1} - 1}{p_l - 1}$$

--- Exemplo ---

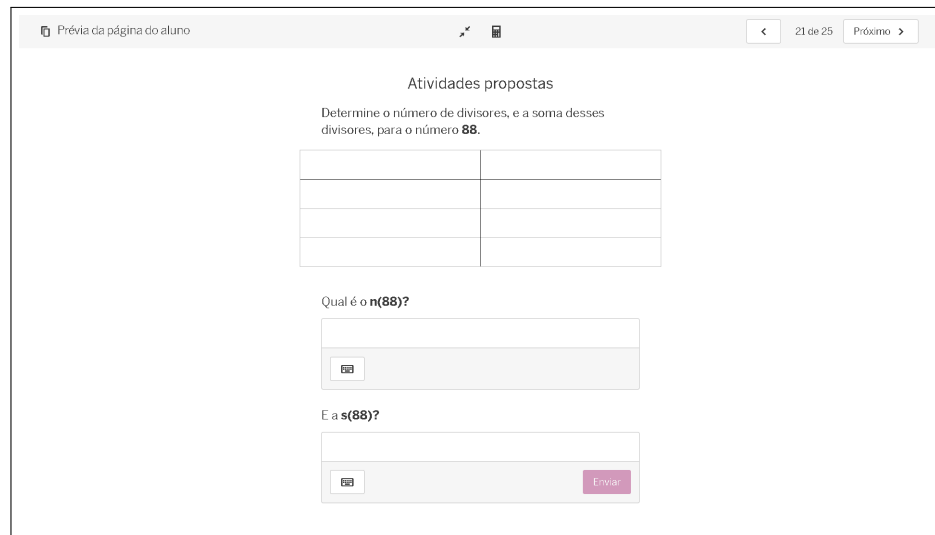
Seja $a = 135 = 3^3 \cdot 5$, temos que:

$$n(135) = (3 + 1)(1 + 1) = 8$$

e

$$s(135) = \frac{3^{3+1} - 1}{3 - 1} \cdot \frac{5^{1+1} - 1}{5 - 1} = \frac{80}{2} \cdot \frac{24}{4} = 40 \cdot 6 = 240$$

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Figura 3.60: Atividade proposta


Atividades propostas

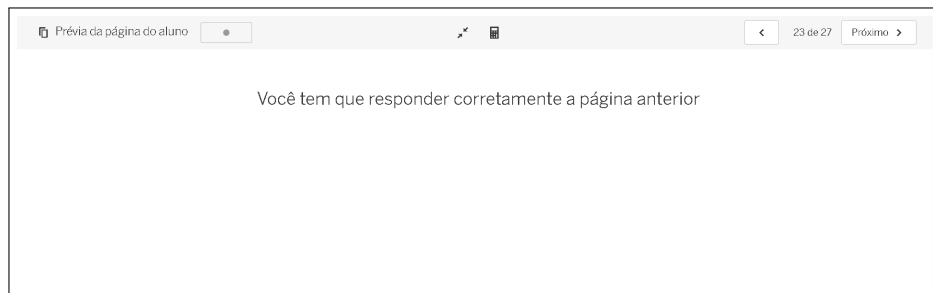
Determine o número de divisores, e a soma desses divisores, para o número **88**.

Qual é o $n(88)$?

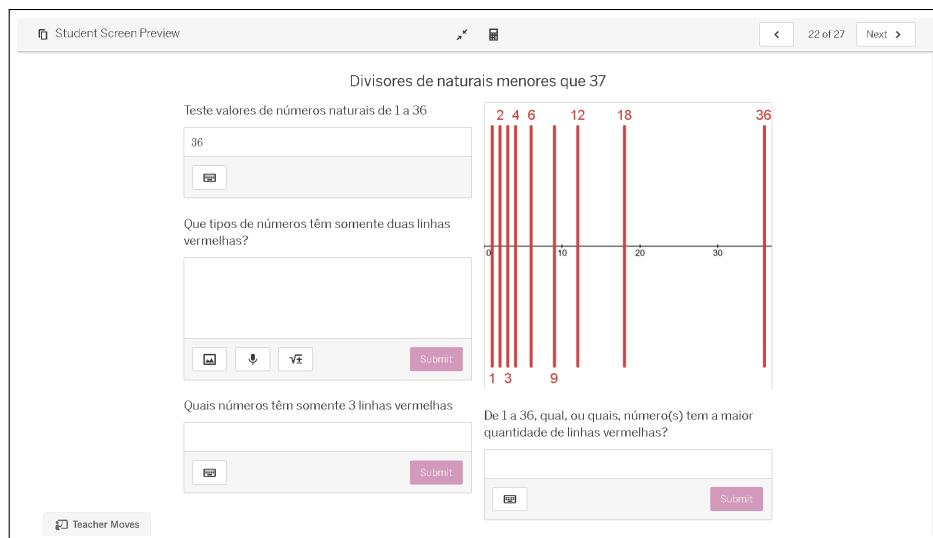
E a $s(88)$?

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Ao responder corretamente esta última atividade proposta, o usuário tem acesso à uma página que contém uma calculadora que retorna os divisores de um número natural menor do que 37 e algumas perguntas relacionadas à este tema (figura 3.62). Se a atividade não for respondida, ou for respondida incorretamente, é apresentada apenas a mensagem da figura 3.61.

Figura 3.61: Mensagem

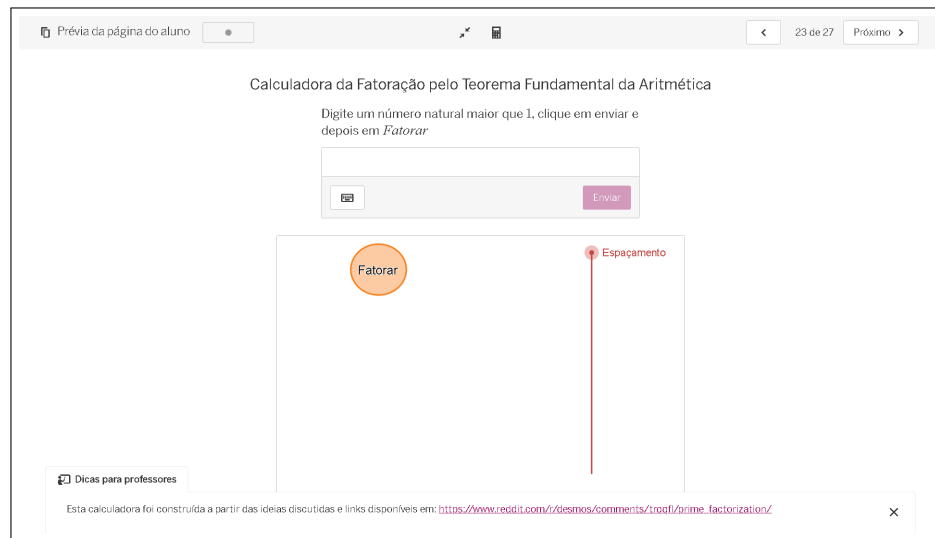
Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Figura 3.62: Divisores de um número natural menor do que 37A screenshot of a Desmos activity titled "Divisores de naturais menores que 37". The activity includes several interactive elements:

- A text input field with the value "36" and a "Submit" button.
- A question: "Que tipos de números têm somente duas linhas vermelhas?". Below it is a large empty text area for the answer, with a "Submit" button.
- A question: "Quais números têm somente 3 linhas vermelhas". Below it is a large empty text area for the answer, with a "Submit" button.
- A question: "De 1 a 36, qual, ou quais, número(s) tem a maior quantidade de linhas vermelhas?". Below it is a large empty text area for the answer, with a "Submit" button.
- A number line from 0 to 36 with vertical red lines at intervals of 2. The numbers 2, 4, 6, 12, 18, and 36 are labeled above the lines. The numbers 1, 3, and 9 are labeled below the lines.
- Navigation buttons at the top: "Student Screen Preview", a left arrow, "22 of 27", and a right arrow labeled "Next".
- A "Teacher Moves" button at the bottom left.

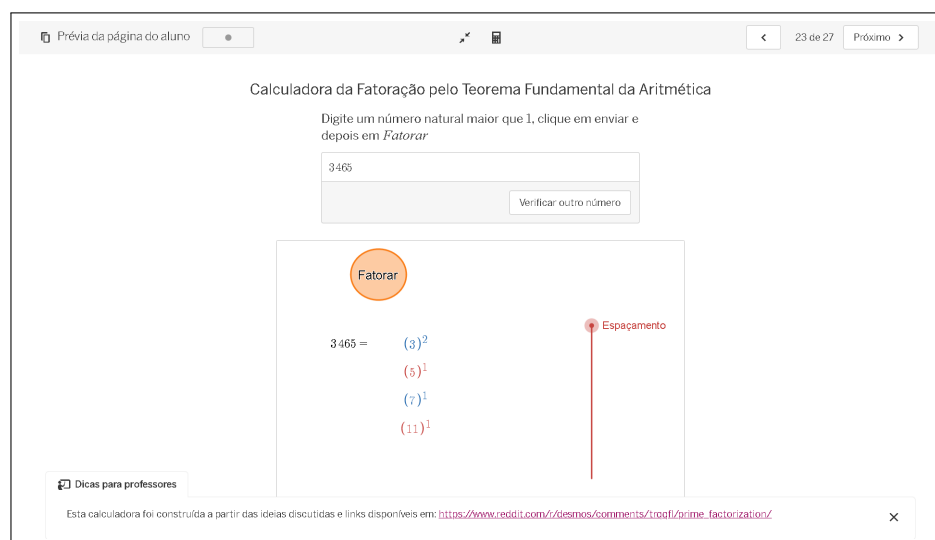
Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Caso esta última atividade seja respondida, o usuário terá acesso à calculadora de fatoração (figura 3.63), caso contrário, verá apenas uma mensagem, como anteriormente.

Figura 3.63: Calculadora de fatoração

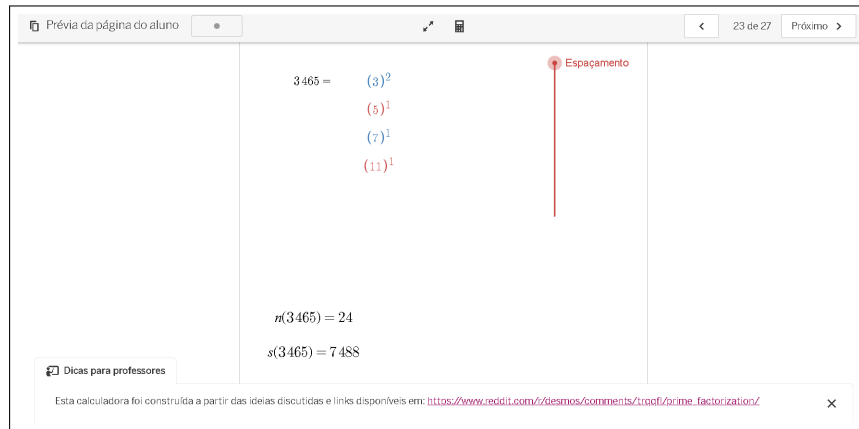
Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

A calculadora mostra os fatores, com seus respectivos expoentes, em uma coluna. O espaçamento entre eles pode ser alterado com um controle deslizante (figura 3.64). Para realizar a fatoração, é necessário clicar no botão “Fatorar”.

Figura 3.64: Fatoração do número 3465

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

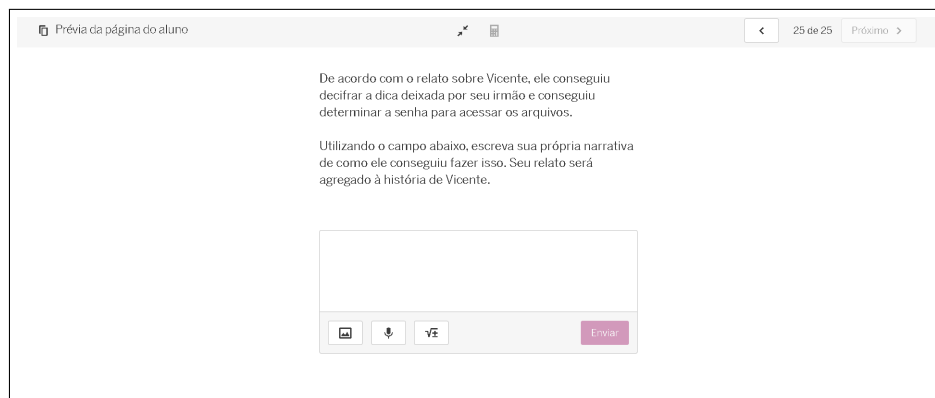
A calculadora também retorna a quantidade de divisores do número que foi fatorado e a soma destes divisores (figura 3.65).

Figura 3.65: Número de divisores de 3465

The screenshot shows a Desmos calculator interface. The main display area contains the prime factorization of 3465: $3465 = (3)^2 (5)^1 (7)^1 (11)^1$. Below this, it shows the number of divisors: $n(3465) = 24$ and the sum of divisors: $s(3465) = 7488$. A red vertical line with a dot at the top is labeled "Espaçamento". At the bottom left, there is a "Dicas para professores" button. At the bottom, a small text box contains the URL: https://www.reddit.com/r/desmos/comments/trcofl/prime_factorization/.

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Por fim, a avaliação final é composta pela narrativa apresentada na avaliação diagnóstica e as perguntas, com a adição de uma atividade com finalidade narrativa, análoga às atividades finais das outras duas SD, na qual o usuário deve construir sua própria narrativa, baseada naquela que foi apresentada, de acordo com a orientação dada.

Figura 3.66: Atividade narrativa da avaliação final

The screenshot shows a Desmos activity interface. The main text area contains the following instructions: "De acordo com o relato sobre Vicente, ele conseguiu decifrar a dica deixada por seu irmão e conseguiu determinar a senha para acessar os arquivos. Utilizando o campo abaixo, escreva sua própria narrativa de como ele conseguiu fazer isso. Seu relato será agregado à história de Vicente." Below the text is a large empty text input field. At the bottom, there are icons for image, download, and undo, along with a purple "Enviar" button.

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre atividade de autoria própria.

Considerações Finais

A utilização das TDIC na educação mostram-se uma alternativa para reinventar práticas no contexto do processo de ensino e aprendizagem. A cultura digital é cada vez mais presente na sociedade e a tendência é que ela seja ainda mais abrangente no futuro.

Os docentes necessitam estar em contínuo processo de aprimoramento e atualização de seus métodos e ferramentas. As metodologias ativas são grandes aliadas da comunidade escolar, assim como as mídias digitais, o ensino híbrido demonstrou isto de forma indiscutível, durante o período da pandemia do Coronavírus (MORAN; BACICH, 2018).

Este trabalho objetivou propor uma introdução à teoria dos números com a utilização de um conjunto de sequências didáticas, compostas por atividades interativas, na *classroom* do *Desmos*, na perspectiva da metodologia ativa *Storytelling*. No entanto, fornece mais do que isto, sendo uma demonstração de como aliar uma TDIC com a utilização de uma metodologia ativa no contexto do ensino híbrido, servindo como um incentivo para o aprimoramento da prática docente.

O processo de elaboração das atividades se mostrou bastante enriquecedor. Em primeiro momento, a escolha da plataforma *Desmos* se deu a partir de experiências prévias com a plataforma, sendo levados em consideração características como a facilidade de acesso e a enorme gama de recursos, tanto para docentes como para discentes.

A escolha da metodologia a ser utilizada levou em consideração as possibilidades do *Desmos* e a forma como se objetivou abordar os conteúdos, demandando bastante pesquisa e planejamento, o que permitiu explorar de diversas formas a plataforma, no que se refere ao *Desmos classroom*, principalmente.

O ambiente do *classroom*, apesar de limitado em alguns aspectos, principalmente visuais, é um convite à criatividade, com diversas possibilidades de interação e gerenciamento. A elaboração das SD proporcionou o contato com diversas características intrínsecas à esta TDIC e a reflexão sobre a maneira de abordar alguns itens, como o modo de apresentação de conteúdos, interatividade com os usuários (por meio de tabelas, campos para respostas matemáticas ou livres e etc), gráficos, textos e correções automatizadas, dentre outros.

A forma como se pode gerenciar cada atividade, através das turmas, definindo um ritmo, enviando comentários e compartilhando informações, é de grande auxílio no processo

avaliativo, tanto qualitativo quanto quantitativo. Com o tutorial sobre a utilização do painel de controle, os docentes estão aptos a gerenciar as atividades atribuídas às turmas com eficiência e versatilidade. Sendo um incentivo para que o processo avaliativo seja cada vez mais integrado com as práticas metodológicas e recursos utilizados no ensino.

As SD aqui apresentadas estão disponíveis na coleção [Teoria dos Números](#) e podem ser aplicadas diretamente em turmas da escolha de cada professor. Os exercícios e a avaliação final podem também ser utilizados como elementos avaliativos, contribuindo de forma quantitativa e qualitativa. Uma possibilidade é realizar a avaliação diagnóstica de forma remota, assim como a avaliação final, enquanto a apresentação de conteúdos e realização de exercícios é feita presencialmente.

Durante a elaboração de atividades na plataforma, o docente contribui para o aprimoramento da própria prática docente, desenvolvendo habilidades, exercitando a criatividade e explorando metodologias. Ao utilizar as SD aqui propostas como modelo para a construção de novas atividades, com temas variados, cada docente estará promovendo a divulgação da plataforma, na qual professores e alunos podem encontrar auxílio para o desenvolvimentos de suas atividades e/ou de seu processo individual de ensino e aprendizagem ([BACICH, 2016](#)).

Ao final da elaboração das atividades, foi possível observar que as possibilidades para a utilização do *Desmos* são inúmeras, dependendo da disposição e criatividade dos docentes. A realidade de cada turma, escola e comunidade interfere bastante na utilização destes recursos, já que em certos casos, acesso à internet de qualidade ou computadores é praticamente inexistente, sendo assim, cabe aos professores determinar o que deve ou não ser feito para contribuir com a educação de cada indivíduo.

Felizmente, existe a possibilidade de compor atividades que podem ser tranquilamente realizadas em smartphones, com acesso razoável à internet. Desta forma, cada docente deve se apropriar de técnicas e metodologias que permitam essa utilização, ao mesmo tempo que trabalha com as limitações que lhe são apresentadas ([SCHUARTZ; SARMENTO, 2020](#)).

Dependendo da disposição de cada profissional, pode-se incrementar ainda mais sua prática com a utilização da plataforma *Desmos*, com cursos, tutoriais, estudos guiados por materiais disponibilizados na própria plataforma e com o acréscimo da CL nas atividades do *classroom*, expandindo ainda mais as possibilidades.

Espera-se que os recursos e ideias apresentados neste trabalho contribuam para o desenvolvimento e/ou aprimoramento de práticas pedagógicas cada vez mais focadas em evidenciar o aluno como protagonista da construção do próprio conhecimento, dando a ele liberdade para desenvolver seu processo cognitivo, ao mesmo tempo que se utiliza da tecnologia para orientar e auxiliá-lo nesta jornada.

Referências

- ARAÚJO, D. L. de. O que é (e como faz) Sequência Didática? *Entrepalavras*, v. 3, n. 1, p. 322–334, 2013. 52, 54, 56
- BACICH, L. Ensino híbrido: Proposta de formação de professores para uso integrado das tecnologias digitais nas ações de ensino e aprendizagem. In: SBC. *Anais do XXII Workshop de Informática na Escola*. Uberlândia, MG, 2016. p. 679–687. 13, 14, 94
- BARBOSA, E. N. T. *Subrotinas Construídas no Matlab para MDC, Coeficientes de Bézout, Equações Diofantinas Lineares, Congruências e Sistemas de Congruências Lineares*. Dissertação (TCC de graduação) — Universidade Federal do Pará. Campus Universitário Castanhal, 2015. 56
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação, 2018. 16, 18, 19
- DESMOS, S. P. *Desmos Classroom, Computation Layer Documentation*. 2011. Disponível em: <<https://teacher.desmos.com/computation-layer/documentation>>. Acesso em 03 jan. 2024. 19
- FIGUEIREDO, J. C. T. *Digital Storytelling no eLearning: estudo de caso da sua aplicação a um módulo no ensino superior*. Lisboa: UAB, 2014. 14, 15, 19, 54
- GUIMARÃES, Y.; GIORDAN, M. Elementos para validação de sequências didáticas. In: *Encontro Nacional de Pesquisa Em Educação Em Ciências*. Águas de Lindóia, SP: Universidade Federal de Goiás, 2013. 52, 53, 54
- MILIES, F. C. P.; COELHO, S. P. *Números: uma introdução à matemática*. São Paulo: Edusp, 2013. 34
- MORAN, J.; BACICH, L. Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática. porto alegre: Penso. 2018. 13, 93
- NASCIMENTO, F. L. d. Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: uma abordagem em suas propriedades e aplicações. Universidade Federal do Ceará, 2015. 47
- SAPPI, K. A. M. *Storytelling: uma abordagem contextualizada no ensino de química na temática estequiometria*. Fortaleza: UFC, 2019. 18, 79
- SCHUARTZ, A. S.; SARMENTO, H. B. d. M. Tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) e processo de ensino. *Revista Katálysis*, SciELO Brasil, v. 23, p. 429–438, 2020. 16, 17, 94

TEODOSIO, E. de S. Storytelling como uma metodologia ativa no ensino de Matemática. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, v. 8, n. 23, p. 258–268, 2021. [19](#), [56](#), [74](#)

UGALDE, M. C. P.; ROWEDER, C. Sequência Didática: uma proposta metodológica de ensino-aprendizagem. *Educitec-Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico*, v. 6, p. e99220–e99220, 2020. [52](#), [53](#), [56](#), [75](#)

VALENÇA, M. M.; TOSTES, A. P. B. O Storytelling como ferramenta de aprendizado ativo. *Carta Internacional*, v. 14, n. 2, 2019. [19](#)

Apêndice

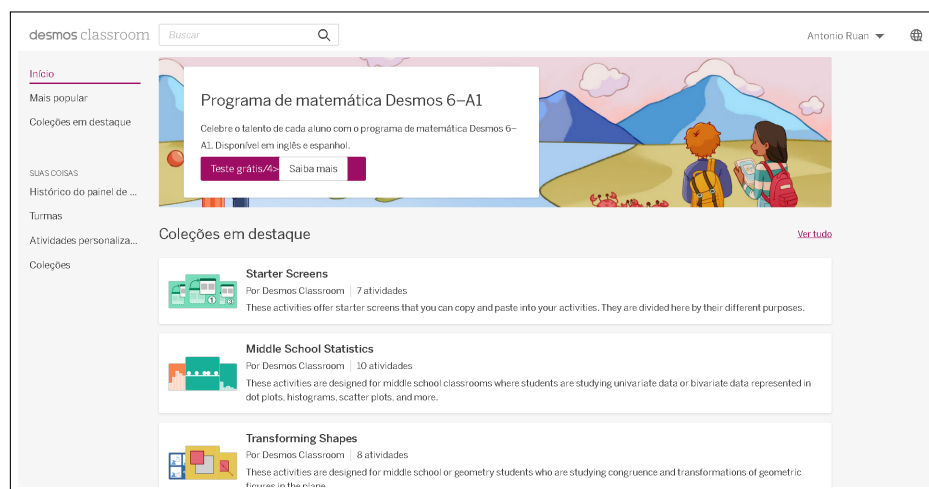
A

Criação de Atividades no *Desmos Classroom*

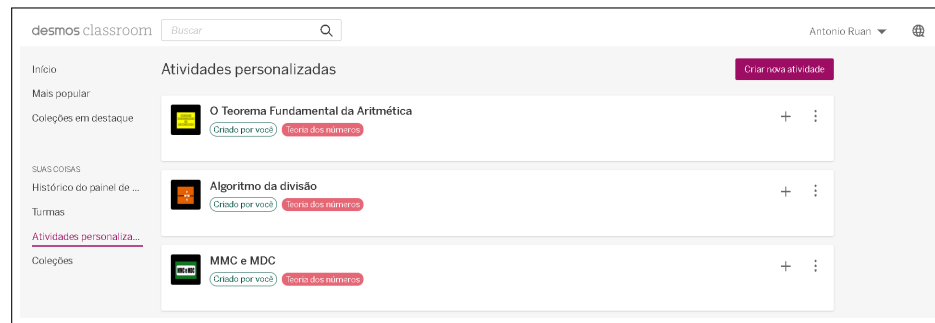
Como descrito na subseção 1.5, o *Desmos Classroom* fornece uma interface onde se pode criar atividades digitais para serem utilizadas com as turmas. Neste breve tutorial, mostraremos alguns passos simples para a utilização deste recurso.

Ao acessar o *link*, realizar o cadastro e fazer o *login*, o usuário é redirecionado para a página inicial (figura A.1). Clicando em “Atividades personalizadas”, é possível acessar o painel com as atividades feitas pelo usuário (figura A.2), caso haja alguma, e uma opção de “Criar nova atividade”, onde se pode criar uma nova.

Figura A.1: Página inicial do *Desmos Classroom*



Fonte: capturada da plataforma *Desmos*.

Figura A.2: Painel de atividades personalizadas

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

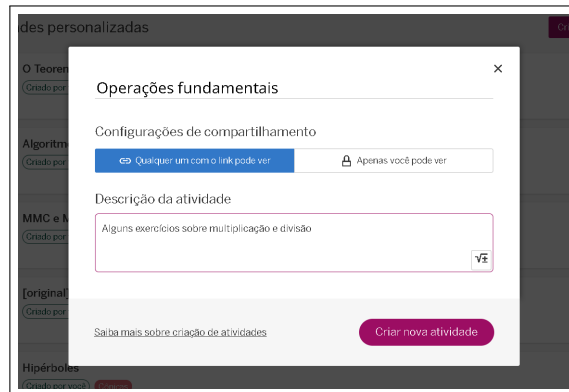
Selecione a opção “Criar nova atividade”, visualizamos uma janela na qual devemos inserir um nome para a atividade, selecionar se a atividade pode ser acessada por pessoas com o *link* ou se ela ficará privada, além de um campo para adicionar uma descrição (figura A.3).

Figura A.3: Criando uma nova atividade

Fonte: capturada da plataforma *Desmos*.

Como exemplo, criaremos a atividade “Operações fundamentais”, que pode ser acessada por quem tiver o *link* e cuja descrição é “Alguns exercícios sobre multiplicação e divisão” (figura A.4).

Figura A.4: Configurando uma nova atividade



Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

Clicando em “Criar nova atividade”, somos redirecionados para o ambiente de criação, com suas ferramentas e recursos, ainda em branco (figura A.5). Deste modo, podemos iniciar nosso processo de configuração e elaboração da atividade.

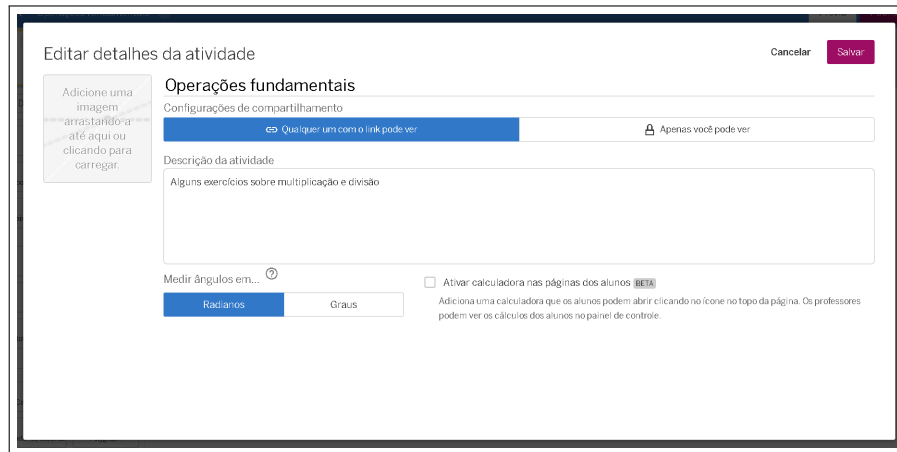
Figura A.5: Começando do zero



Fonte: capturada da plataforma *Desmos*.

Na região superior esquerda, podemos acessar as configurações da atividade, clicando em seu nome ou no ícone ao lado dele, ambos levam ao mesmo menu de configuração (figura A.6).

Figura A.6: Configurações de uma atividade já criada

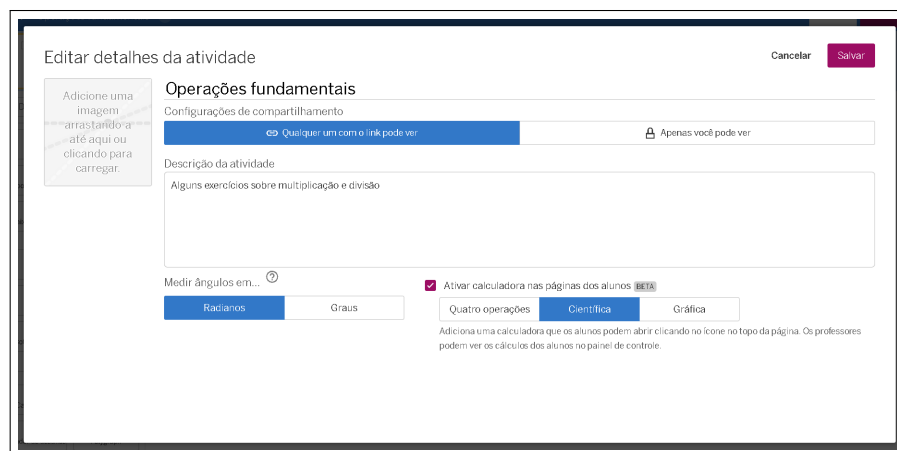


Fonte: captura da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

Neste menu, vemos as configurações que já nos foram apresentadas ao criar a atividade, com acréscimo das opções de poder adicionar uma imagem que servirá como uma espécie de “capa”, escolher se os ângulos serão trabalhados em radianos ou em graus e uma opção de disponibilizar uma calculadora em cada página da atividade, para que os alunos possam utilizá-la como auxílio.

Vamos adicionar uma calculadora. Clicando sobre o campo destinado a este objetivo, podemos escolher entre uma calculadora com apenas as quatro operações, uma científica e uma gráfica (figura A.7). Vamos selecionar a calculadora mais simples, aquela com apenas as quatro operações básicas, clicamos em “Salvar” e voltamos à área de criação.

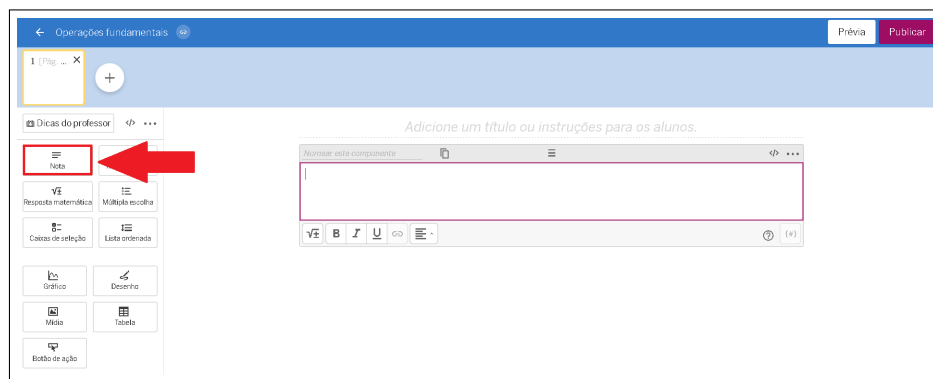
Figura A.7: Adicionando uma calculadora



Fonte: captura da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

No parte superior central de cada página, temos um campo para inserção de um título ou de instruções sobre o que deve ser desenvolvido. Para adicionar textos, utilizamos a opção “Notas” (figura A.8). Ao clicar nesta opção, uma caixa para textos é inserida automaticamente, mas é possível também clicar, segurar e arrastar para o local que se deseja. A opção de arrastar é útil quando já existem outros elementos adicionados à página e queremos colocar um novo em um local específico.

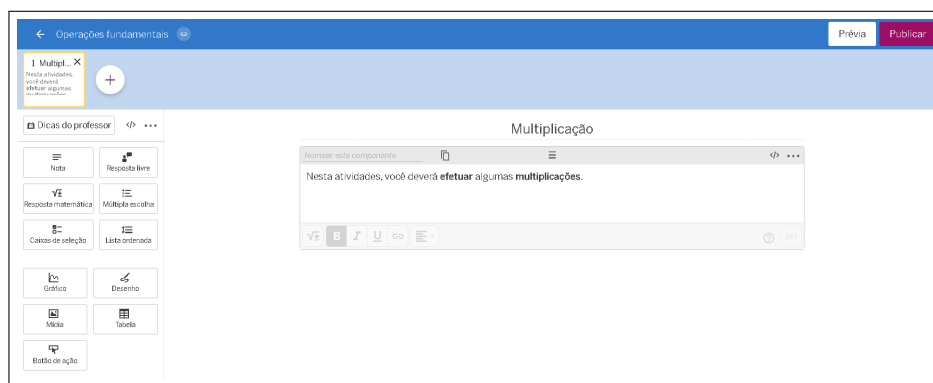
Figura A.8: Adicionando texto



Fonte: capturada da plataforma *Desmos*.

Na caixa de texto, existem algumas opções simples de formatação, como as opções de negrito, itálico e sublinhado, uma opção que permite inserir equações e opções de alinhamento de texto (figura A.9). Para realizar a formatação, é necessário selecionar a opção desejada antes de digitar o texto ou selecionar a parte que se deseja formatar e depois selecionar a opção desejada.

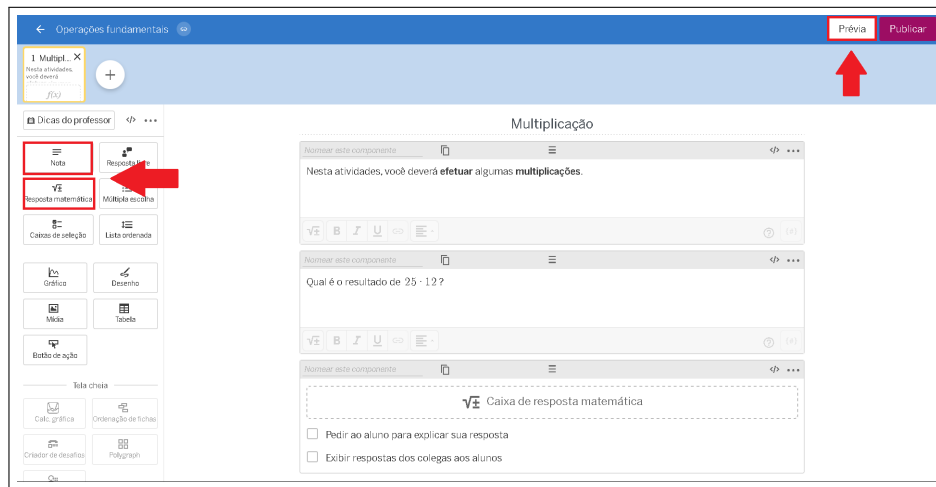
Figura A.9: Formatação de texto



Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

Veja a seguir um exemplo onde inserimos uma nota na qual escrevemos uma pergunta, utilizando a opção de equação matemática para escrever uma multiplicação, e adicionamos o elemento “Resposta matemática” logo abaixo, para que o aluno possa responder a pergunta.

Figura A.10: Resposta matemática

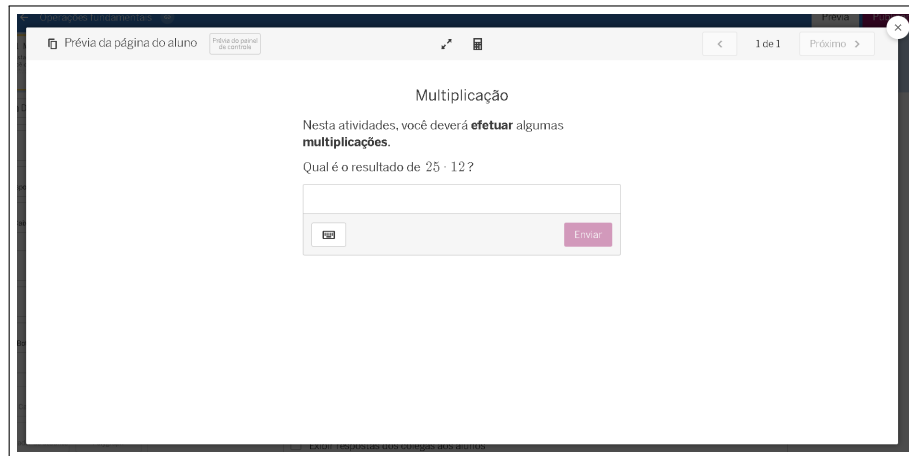


Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

Na caixa de resposta, existem as opções de pedir ao aluno que explique sua resposta, na qual o campo destinado para isto aparecerá após ele inserir a resposta e enviar, e a opção de exibir as respostas dos colegas aos alunos.

Ao clicar em “Prévia”, podemos observar como a atividade aparecerá para os alunos, após finalizadas as edições (figura A.11).

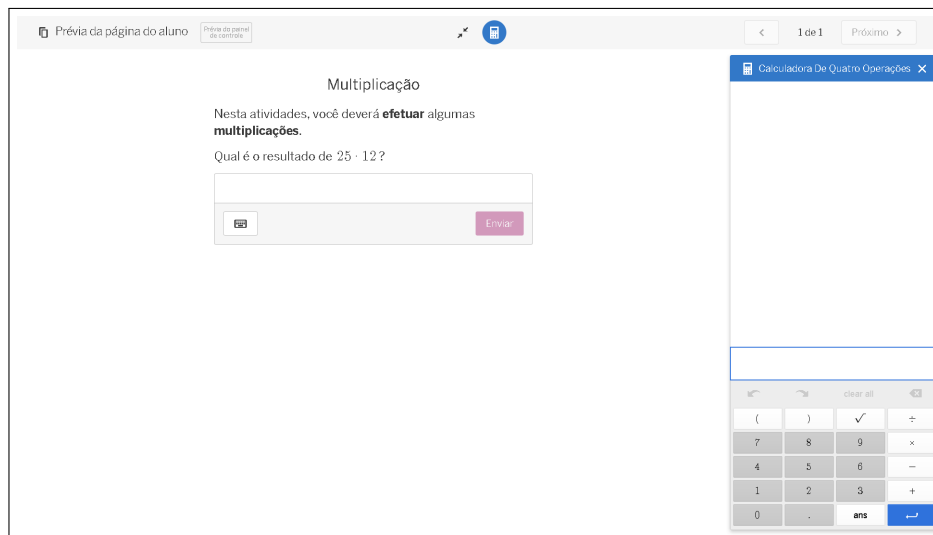
Figura A.11: Prévia



Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

Na parte superior central, temos duas opções: maximizar a janela da atividade e utilizar a calculadora. A opção de maximizar deixa a atividade em tela cheia e o da calculadora, que nós adicionamos no início da atividade, mostra uma calculadora de quatro operações básicas (figura A.12).

Figura A.12: Exibindo a calculadora

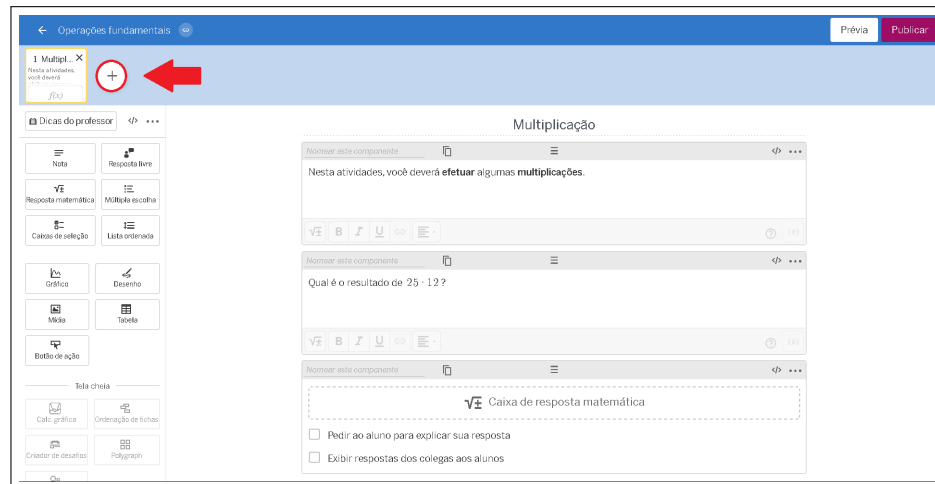


Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

Na parte superior esquerda, ao lado da primeira, e por enquanto única, página da atividade há um botão circular com o símbolo “+”. Este botão serve para adicionar novas

páginas na atividade (figura A.13).

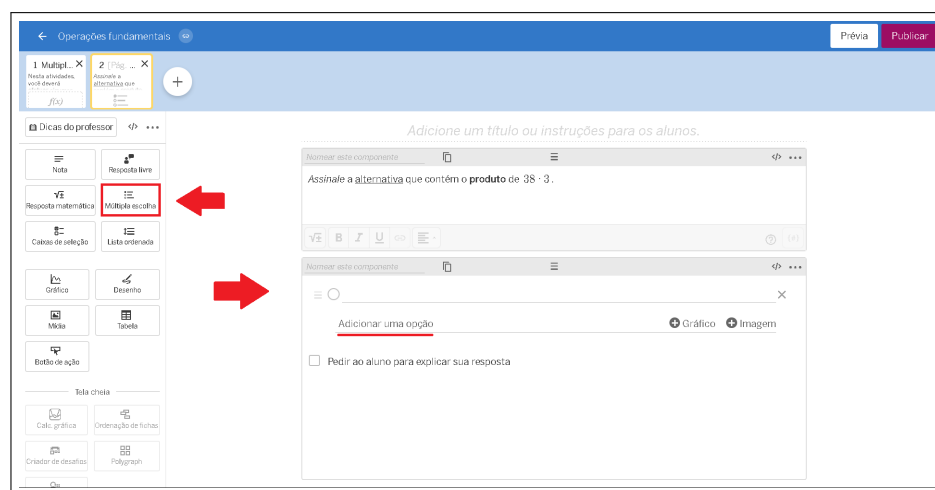
Figura A.13: Inserindo páginas



Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

Na segunda página, vamos inserir uma nova pergunta, mas agora com opção de múltipla escolha, que pode ser adicionada com a ferramenta “Múltipla escolha” (figura A.14). Neste janela, aparece inicialmente um campo para adicionar uma alternativa e podemos adicionar mais ao clicar em “Adicionar uma opção”.

Figura A.14: Múltipla escolha

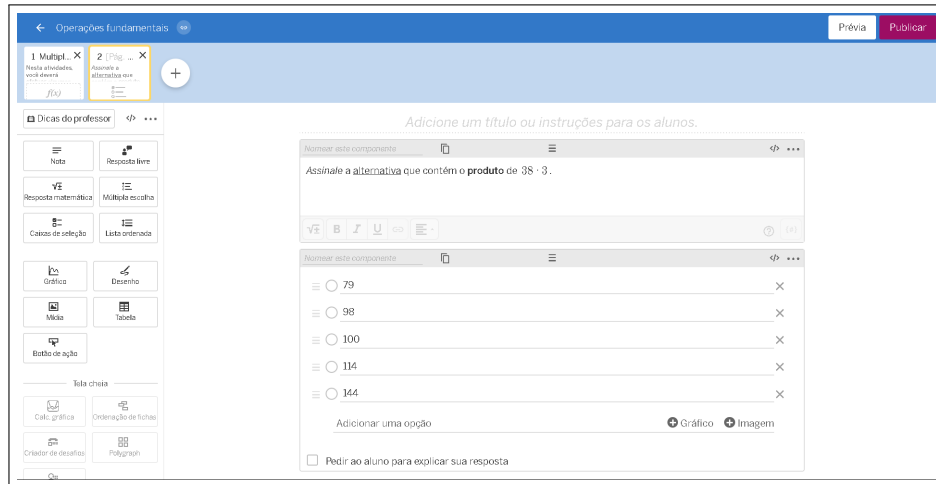


Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

Na figura A.15, podemos ver que foram adicionadas cinco alternativas para a per-

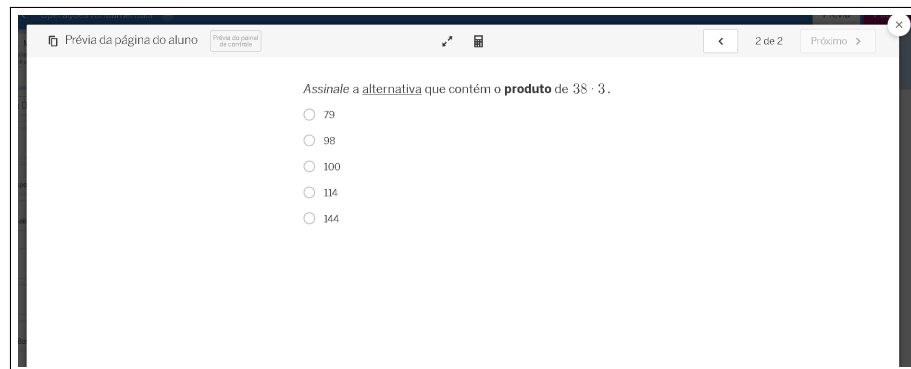
gunta, e na figura A.16 vemos, através da prévia, como a página será apresentada aos alunos.

Figura A.15: Adicionando alternativas



Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

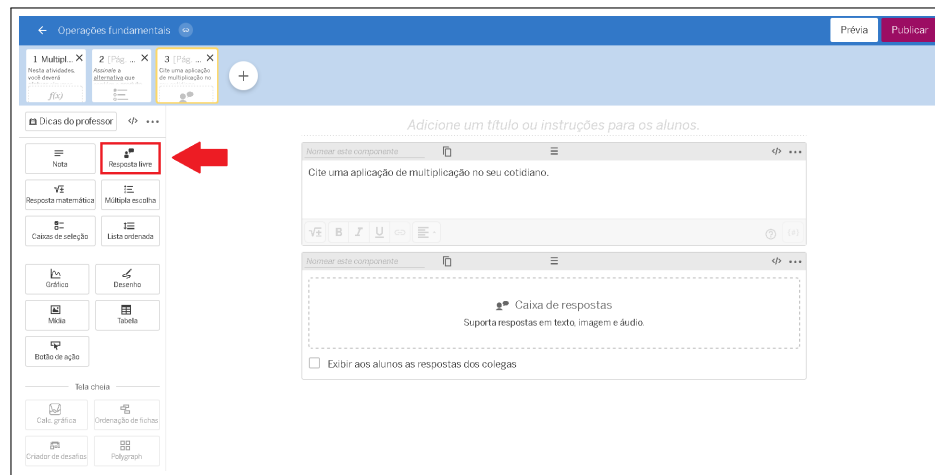
Figura A.16: Prévia da múltipla escolha



Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

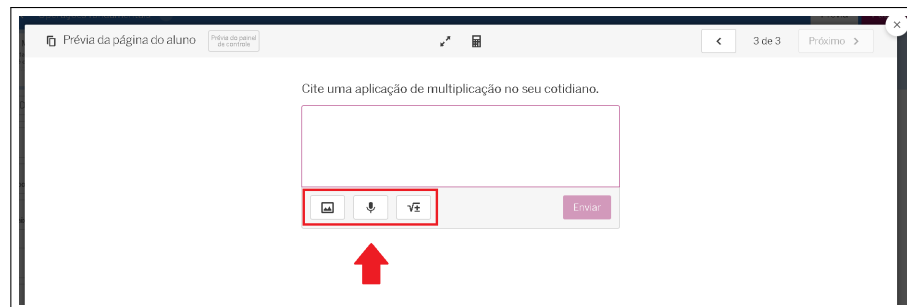
Em uma nova página, vamos adicionar uma pergunta e um campo gerado pela ferramenta “Resposta livre”, para a resposta (figura A.17). Na figura A.18, podemos ver a prévia, na qual verificamos que a resposta do aluno pode incluir equações, áudios e imagens, além de texto.

Figura A.17: Resposta livre



Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

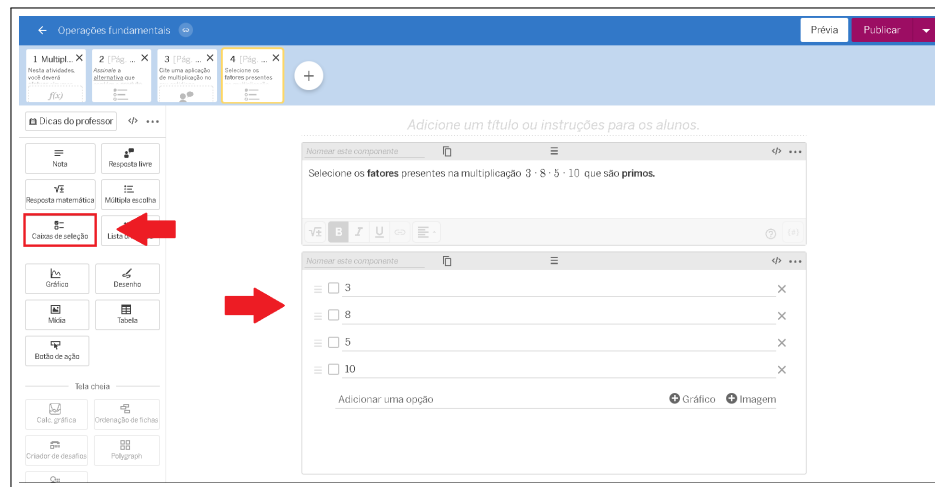
Figura A.18: Recursos de resposta



Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

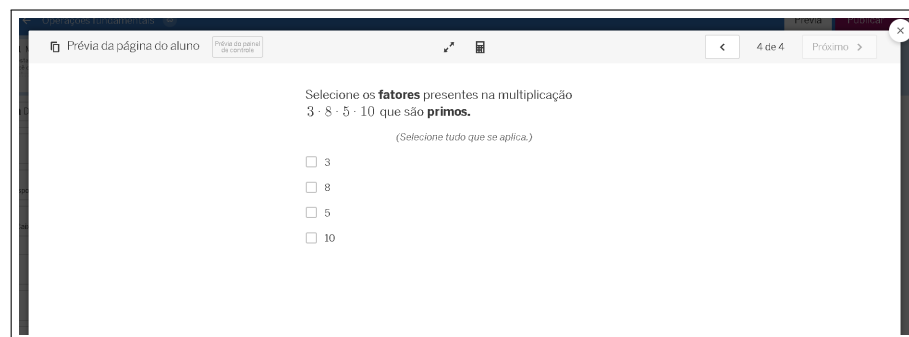
A ferramenta “Caixas de seleção” permite criar alternativas selecionáveis, como podemos observar na figura A.19. Veja a prévia na figura A.20.

Figura A.19: Caixas de seleção



Fonte: captura da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

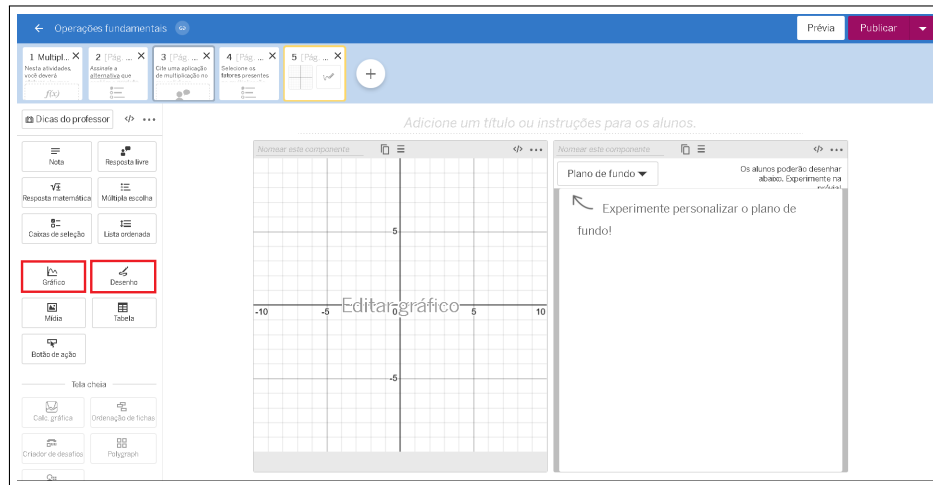
Figura A.20: Prévia das caixas de seleção



Fonte: captura da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

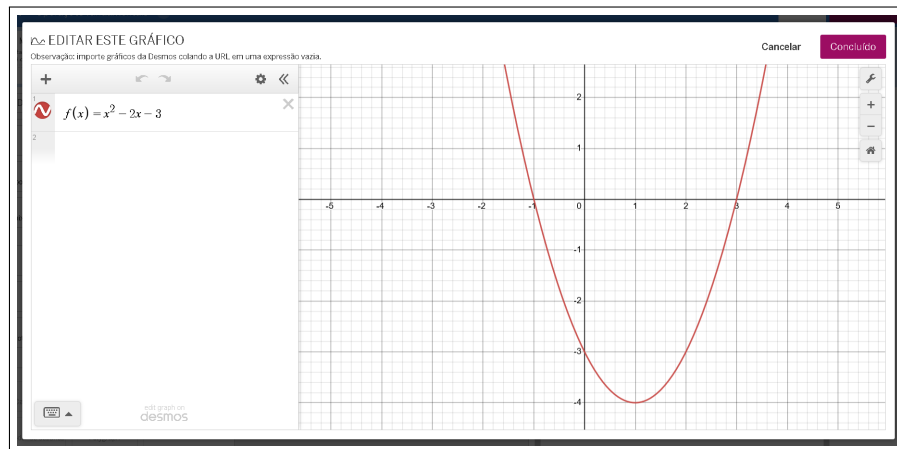
Temos outras ferramentas muito úteis, como a ferramenta “Gráficos”, que permite inserirmos diversos tipos de gráfico, e uma ferramenta de desenho (figura A.21). Para plotar um gráfico, basta clicar sobre a área inserida na página e digitar a equação (figura A.22).

Figura A.21: Gráficos e desenhos



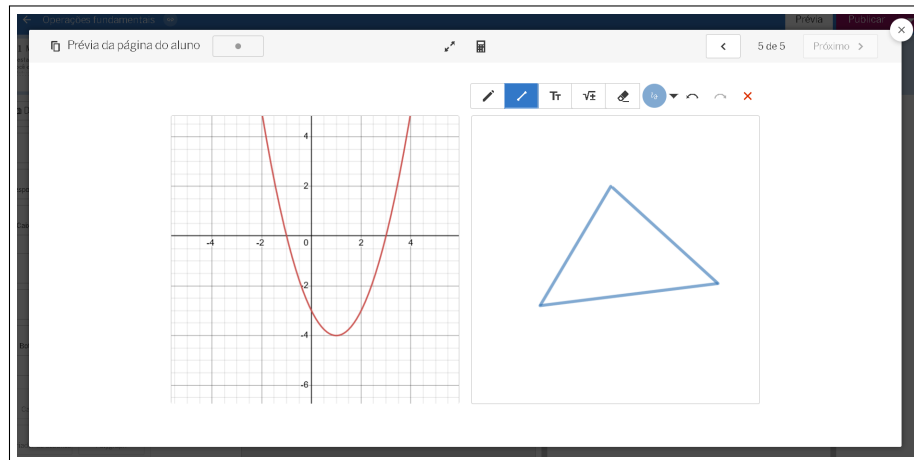
Fonte: captura da plataforma *Desmos*.

Figura A.22: Plotando um gráfico



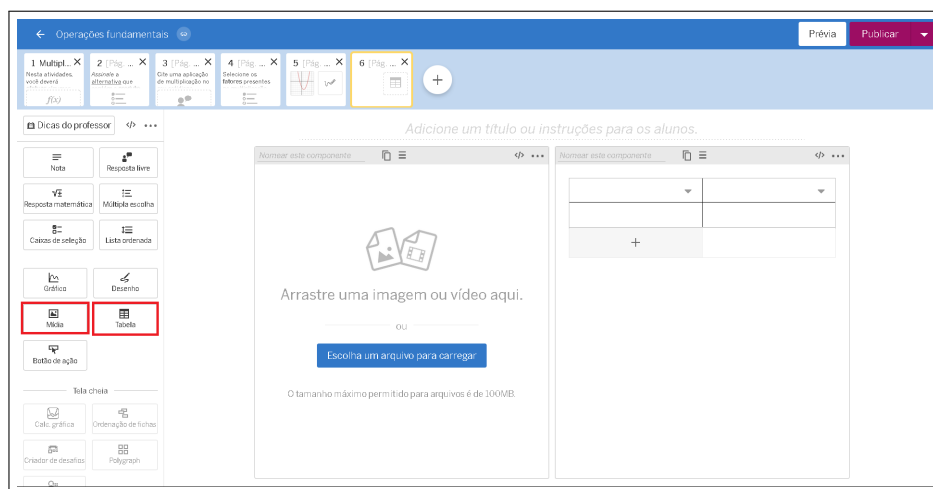
Fonte: captura da plataforma *Desmos*.

Na figura A.23, podemos observar uma prévia onde plotamos o gráfico $f(x) = x^2 - 2x - 3$ e fizemos um desenho de um triângulo.

Figura A.23: Prévia do gráfico e do desenho

Fonte: captura da plataforma *Desmos*.

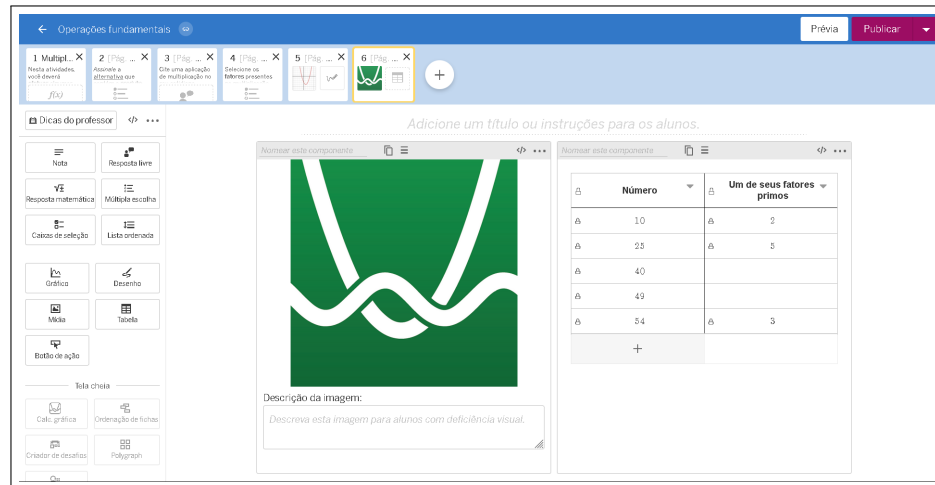
Com a ferramenta “Mídia”, podemos inserir imagens ou vídeos e com a ferramenta “Tabela”, é possível adicionar tabelas preenchidas, em branco ou parcialmente preenchidas, sendo possível configurar de modo que os alunos possam preencher ou editar cada tabela criada (figura A.24).

Figura A.24: Mídias e tabelas

Fonte: captura da plataforma *Desmos*.

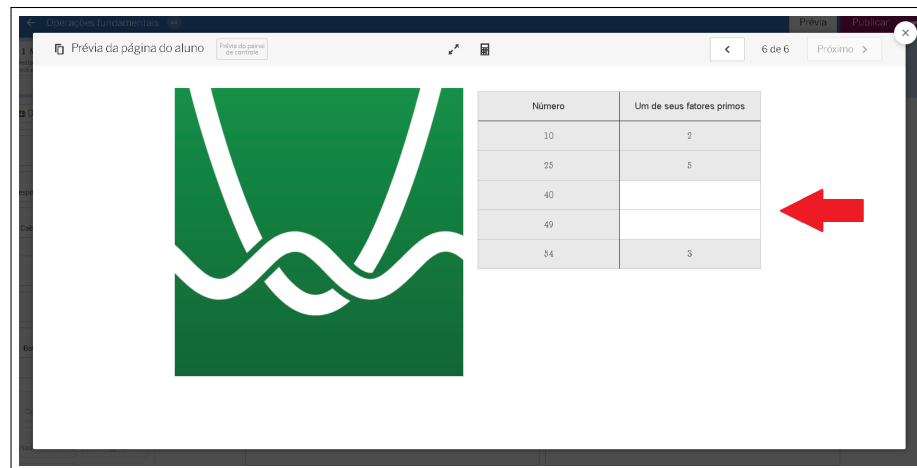
Observe na figura A.25, que foram inseridas uma imagem (logotipo do *Desmos*) e uma tabela parcialmente preenchida. Na prévia (figura A.26), podemos verificar que é possível que os alunos insiram valores na tabela.

Figura A.25: Mídias e tabelas editadas



Fonte: captura da plataforma *Desmos*.

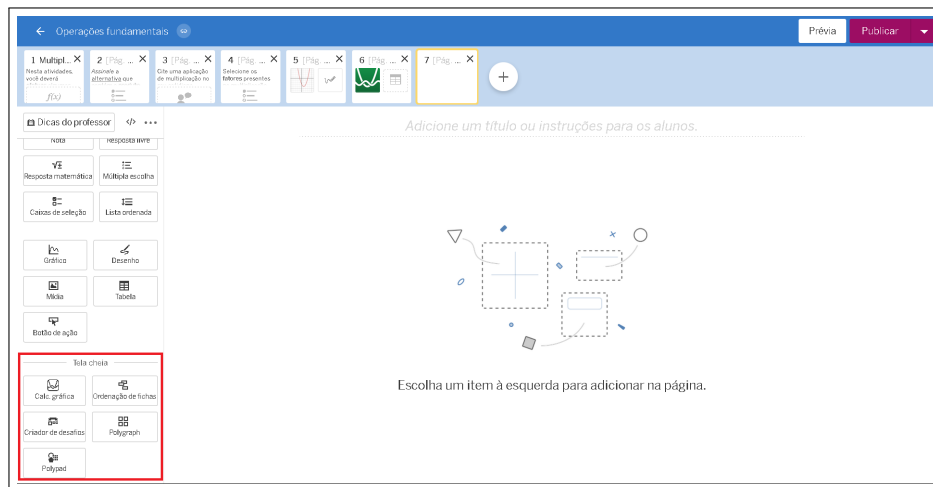
Figura A.26: Prévia



Fonte: captura da plataforma *Desmos*.

Algumas ferramentas só ficam disponíveis para ser utilizadas sozinhas em uma página, são as ferramentas da seção “Tela cheia” (figura A.27).

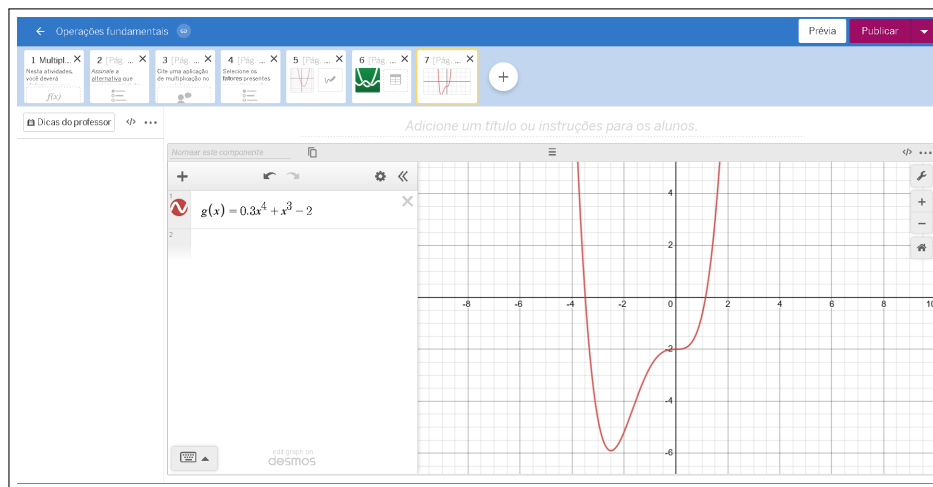
Figura A.27: Ferramentas de tela cheia



Fonte: captura da plataforma *Desmos*.

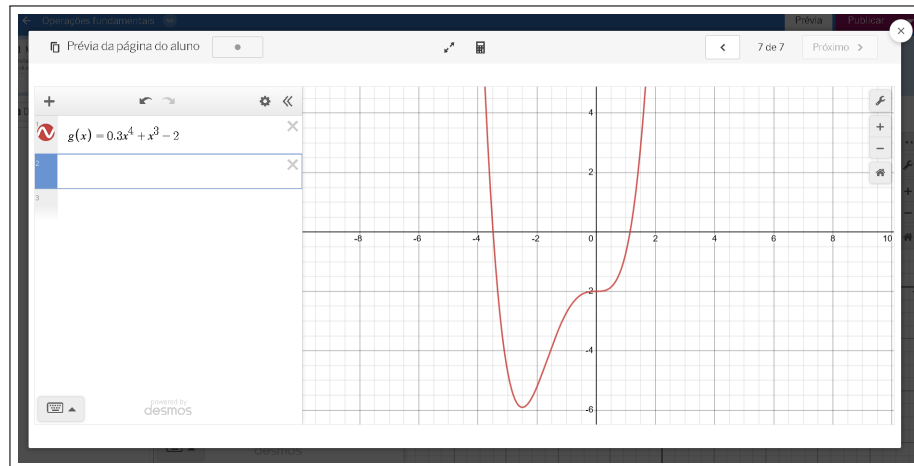
Uma delas é a calculadora gráfica, que pode ser disponibilizada em branco para os alunos ou com algum elemento já adicionado (gráficos, pontos, etc) (figura A.28), como podemos ver na prévia (figura A.29).

Figura A.28: Calculadora gráfica



Fonte: captura da plataforma *Desmos*.

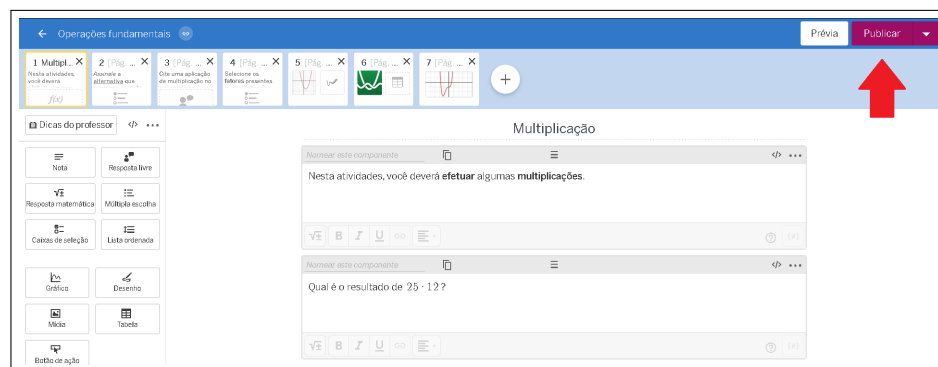
Figura A.29: Prévia



Fonte: capturada da plataforma *Desmos*.

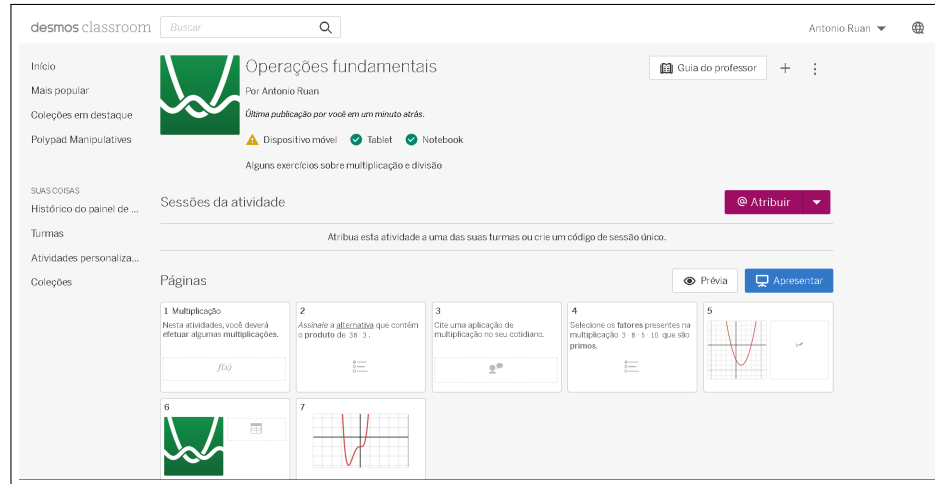
Para salvar a atividade, clicamos em “Publicar” (figura A.30) e teremos nossa atividade pronta para ser compartilhada (figura A.31).

Figura A.30: Publicando



Fonte: capturada da plataforma *Desmos*.

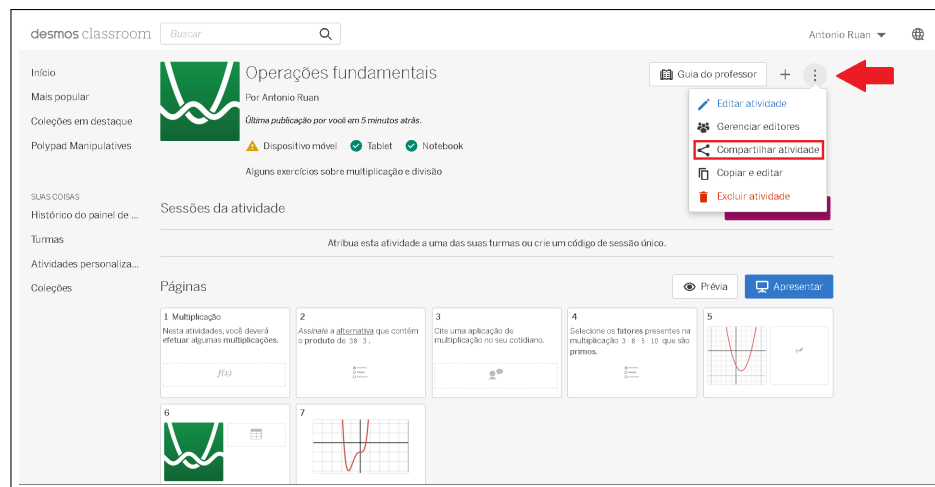
Figura A.31: Área inicial da atividade



Fonte: captura da plataforma *Desmos*.

Podemos compartilhar a atividade isoladamente, através do *link* individual (figura A.32), ou atribuí-la à uma turma.

Figura A.32: Compartilhando



Fonte: captura da plataforma *Desmos*.

A.1 Exemplos de utilização da CL

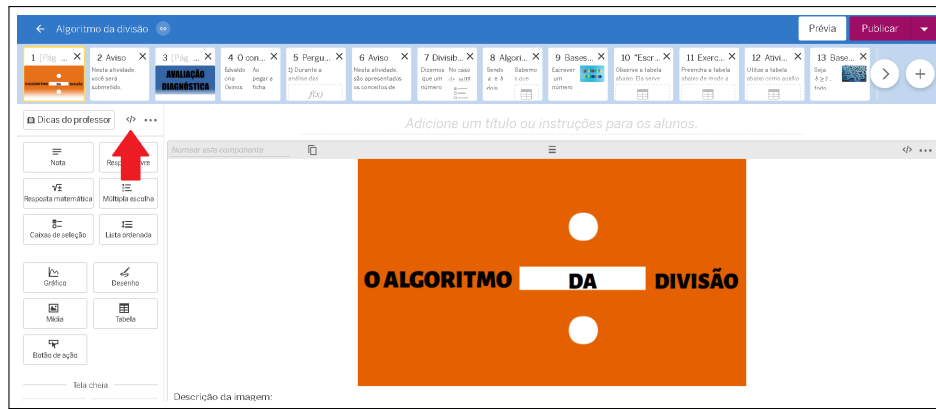
Como abordado na seção 1.5.1 do capítulo 1, a *Computation Layer* é um recurso que nos permite relacionar os elementos inseridos em atividades do *Desmos Classroom*. A

seguir, abordamos a utilização deste recurso, utilizando como exemplo as sequências didáticas apresentadas no capítulo 3.

Já vimos como adicionar uma calculadora à atividade. Uma observação importante é que ao fazer isso, a calculadora fica disponível em todas as páginas. Para desabilitá-la em uma página escolhida, devemos utilizar um comando da CL.

Para isto, no ambiente de edição da atividade, escolha a página e clique no botão indicado na figura A.33.

Figura A.33: Janela de adição de comandos da CL



Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

Ao fazer isto, uma janela aparecerá (figura A.34). Esta janela é onde fica o chamado *Script* da CL da página escolhida. O *Script* é toda a sequência de comandos utilizados na página, para determinados fins.

Figura A.34: Editando o *Script*



Fonte: capturada da plataforma *Desmos*.

Ainda na figura A.34, podemos verificar que, à lateral direita, temos uma série de comandos, com suas funções descritas. Estes são todos os comandos de CL que podem ser aplicados na página.

Dentre eles, temos o “*disableCalculatorReason*”, que desabilita a calculadora e indica uma razão para tal. Observe, na figura A.35, como ele pode ser utilizado.

Figura A.35: Desabilitando a calculadora



Fonte: capturada da plataforma *Desmos*.

Após clicar em “Concluído”, podemos verificar que a calculadora, antes ativa nesta página, apresenta uma mensagem caso o usuário tente acessá-la (figura A.35).

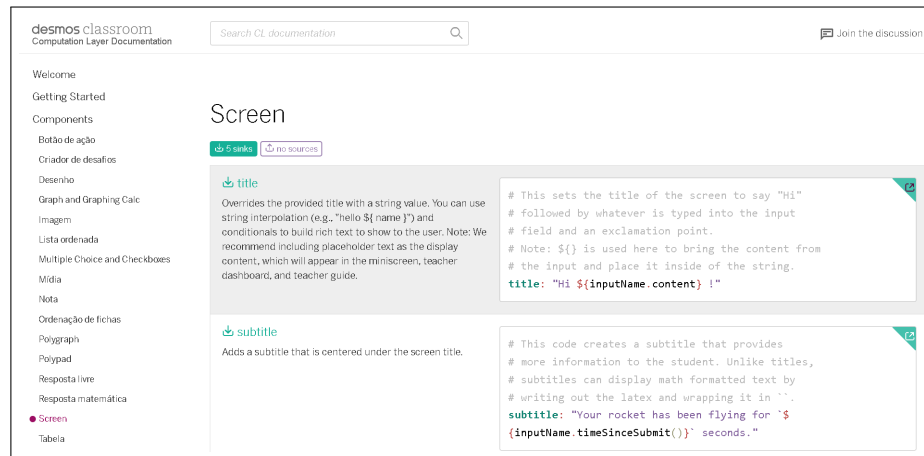
Figura A.36: Mensagem de indisponibilidade da calculadora



Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

Na figura A.34, indicamos com uma seta vermelha a palavra “Documentos”, ela está destacada e conectada ao *link* de uma página onde podemos encontrar a documentação que orienta o uso da CL (figura A.37).

Figura A.37: Documentos da CL

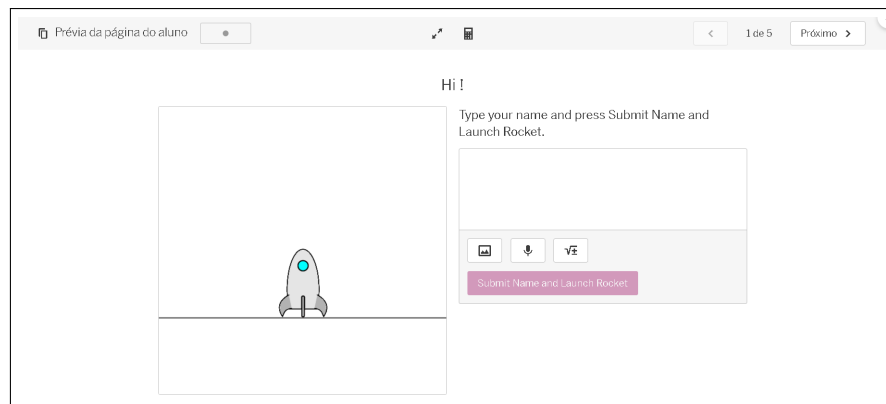


Fonte: capturada da plataforma *Desmos*.

É possível acessar esta página clicando [aqui](#).

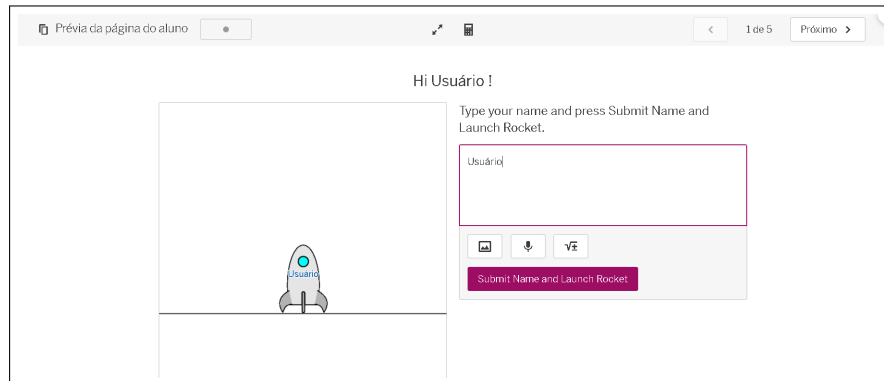
Clicando no ícone indicado na figura A.37, temos acesso à um exemplo sobre o comando a qual se refere. Veja o exemplo ao qual somos redirecionados ao clicar no ícone que vimos na figura anterior e que se refere ao comando “*title*” (figura A.38).

Figura A.38: Exemplo relacionado ao comando “*title*”



Fonte: capturada da plataforma *Desmos*.

Ao inserir o nome na caixa de resposta, o título da página se altera, assim como, o mesmo nome, é atribuído visualmente ao foguete (figura A.39).

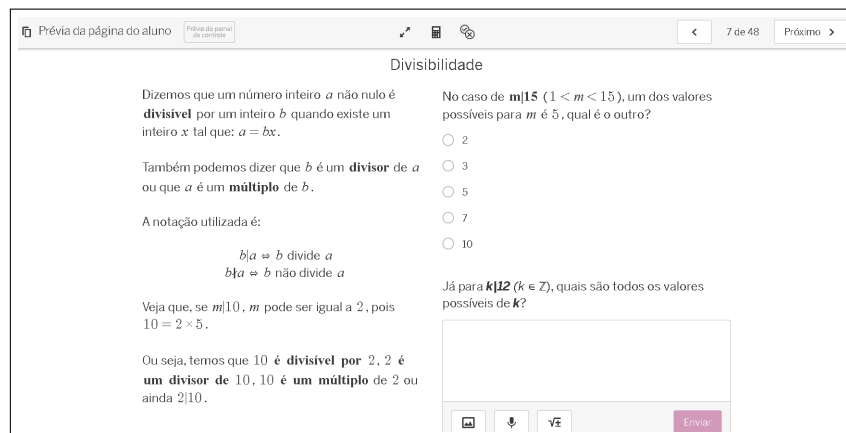
Figura A.39: Executando a tarefa do exemplo

Fonte: captura da plataforma *Desmos*.

Ao clicar no botão para submeter a resposta, o foguete é lançado e sobe até sumir da tela. Esta é apenas a primeira página do exemplo, ainda há outras quatro para dar uma noção ainda melhor de uma gama de aplicações para este comando.

Deste modo, a documentação da CL se mostra bastante interessante e útil para que um usuário leigo comece a aprender e expanda seu conhecimento.

Continuando na atividade sobre o algoritmo da divisão, temos a página de título “Divisibilidade”, com apresentação de teoria e um exercício de múltipla escolha (figura A.40).

Figura A.40: Divisibilidade

Fonte: captura da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

É possível que o professor adicione um comando, em CL, para que o *Classroom* identifique se o aluno respondeu corretamente. O comando é o “*correct*” e ele deve ser adicionado ao bloco referente à ferramenta de múltipla escolha (figuras A.41 e A.42).

Figura A.41: Blocos da atividade

The screenshot shows the Desmos activity editor interface. At the top, there is a navigation bar with 13 tabs labeled from 1 to 13, each with a small icon. Below this is a sidebar on the left with various tool icons like 'Nota', 'Resposta livre', 'Resposta matemática', etc. The main workspace is divided into two components. The first component, titled 'Divisibilidade', contains text explaining divisibility and a list of options for a multiple-choice question. A red arrow points to a 'correct' button in the component's control panel.

Fonte: captura da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

Figura A.42: Inserindo o comando “correct”

The screenshot shows the 'Edit script' interface for a 'MÚLTIPLA ESCOLHA COMPONENT'. The script editor shows the command `correct: this.isSelected(2)`. The right sidebar shows the component's configuration options, including 'choiceContent', 'correct', 'disableChange', and 'explainPrompt'.

Fonte: captura da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

O professor consegue ver, no painel de controle (seção 1.5.2), quais alunos acertaram e quais erraram a resposta, como visto na figura 1.19 da seção 1.5.2, no capítulo 3.

Este comando também funciona em tabelas, por exemplo. Veja na figura A.43 a tabela da página “Algoritmo da divisão”, as respostas registradas nela podem ser corrigidas automaticamente com o comando da figura A.44.

Figura A.43: Página “Algoritmo da divisão”

Prévia da página do aluno

Algoritmo da divisão

Sendo a e b dois inteiros, com $b \neq 0$, quando b não divide a ($b \nmid a$), não existe um inteiro x tal que $a = bx$.

No entanto, existem q e r , únicos, tais que $a = bq + r$, com $0 \leq r < |b|$. Este é o chamado **Algoritmo da divisão**.

Por exemplo, observe que $3 \nmid 16$, mas que $16 = 3 \times 5 + 1$. Neste caso, $a = 16$, $b = 3$, $q = 5$ e $r = 1$.

Para chegar nessa conclusão, podemos verificar que 15 (3×5) é o múltiplo de 3 que mais se aproxima de 16 sem ultrapassar este valor.

O valor $q = 5$ é chamado **quociente** e r é o **resto**, dado pela diferença entre 16 e 15

Sabemos que $5 \nmid 37$. Utilizando o algoritmo da divisão, determine q e r tais que $37 = 5 \times q + r$ e preencha a tabela abaixo.

Componentes	Valores
q	
r	

Sabemos que $3 \nmid 49$. Utilizando o algoritmo da divisão, determine q e r tais que $49 = 3 \times q + r$.

Qual o valor de q ?

E qual o valor de r ?

Enviar

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

Figura A.44: Comando “*correct*” em tabelas

Editar o script da Computation Layer

```

1 correct:
2 (this.cellNumericValue(1,2) = 7) and (this.cellNumericValue(2,2) = 2)
3

```

TABELA COMPONENT

13 sinks 4 sources

cellContent
Sets the contents of a cell given the row index and column index of the cell. (Row index 1 is the first row underneath the header.)

cellDisableEvaluation
Disable the evaluation of math typed by the student in this cell. Only affects cells in math type columns.

cellEditable
Overrides all other mechanisms of deciding whether the student can edit this cell.

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

Observe a figura A.45. Ela apresenta uma página da atividade que disponibiliza uma calculadora de conversão de base. Na figura A.46, podemos ver alguns dos blocos componentes da página.

Figura A.45: Calculadora de conversão de base

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

Figura A.46: Blocos componentes

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

Aqueles que estão indicados pelas setas vermelhas são parte dos blocos que apresentam os textos da página. O texto pode ser inserido através da CL também, como se pode observar na figura A.47.

Figura A.47: Texto do bloco “texta”



Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

Existem, nessa página, dois blocos de respostas matemáticas, que são denominados “*inputa*” e “*inputb*” (figura A.46). São estes blocos que recebem os valores referentes ao inteiro que se quer converter e a base para qual se quer fazer a conversão, respectivamente.

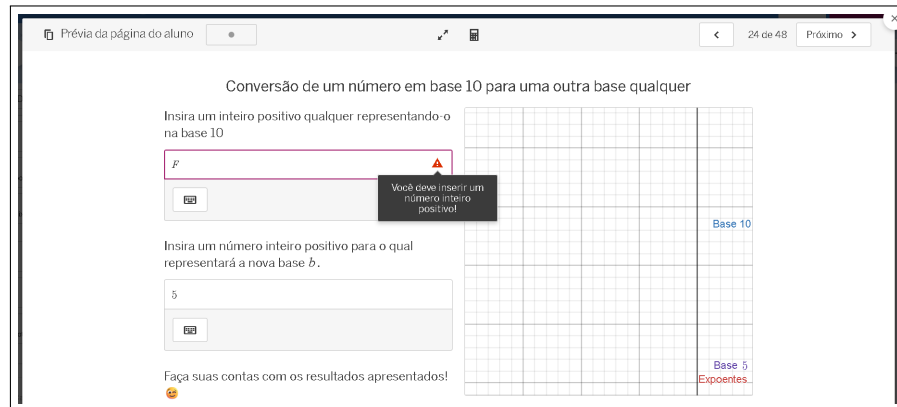
Veja na figura A.48 o *Script* do bloco “*inputa*”.

Figura A.48: *Script* do bloco “*inputa*”



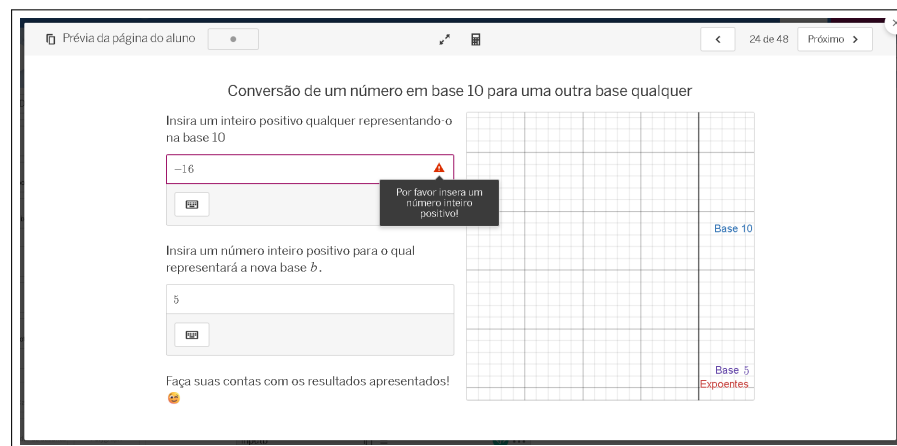
Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

A primeira linha usa o comando “*when isUndefined(this.numericValue)*” para estabelecer a mensagem de erro que vem em seguida, entre aspas, quando o valor digitado não for um valor numérico (figura A.49).

Figura A.49: Mensagem de erro

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

A segunda linha utiliza o comando “*this.numericValue* ≤ 0” para estabelecer uma mensagem de erro para o caso de ser digitado um inteiro não positivo (figura A.50). Já a terceira linha, estabelece simplesmente que em outros casos não há mensagem de erro.

Figura A.50: Mensagem de erro 2

Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

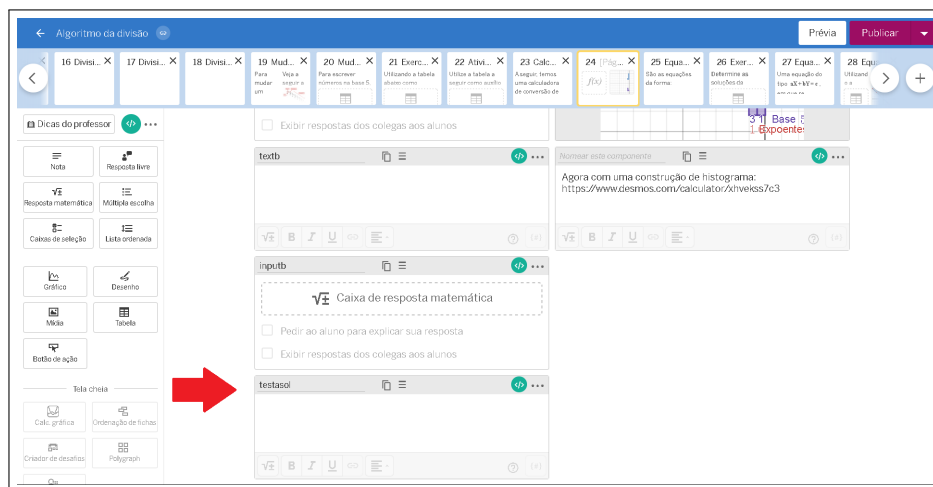
As outras duas linhas do “*script*” temos o comando “*initialLatex*”, que estabelece o valor inicial que aparece na caixa de resposta e o comando “*showSubmitButton*”, recebendo o valor lógico “Falso”, que esconde o botão de enviar a resposta (botão que já vem com o bloco de resposta matemática).

Se você observou com atenção, pode ter notado que na figura A.45 a página tem um texto, ao final da coluna da esquerda, que apresenta a representação decimal do número 16

com a nova base e os expoentes obtidos. No entanto, nas figuras A.49 e A.50, a mensagem que aparece é diferente, uma mensagem genérica.

O que controla isto é um outro bloco de texto, intitulado “testasol” (figura A.51). Neste bloco, enquanto os valores iniciais permanecerem na página, o primeiro texto é mostrado, mas a partir do momento em que os valores são editados pelo usuário, a segunda mensagem aparece. Veja o “*script*” deste componente na figura A.52.

Figura A.51: Bloco “testasol”



Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

Figura A.52: Alternância de textos



Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

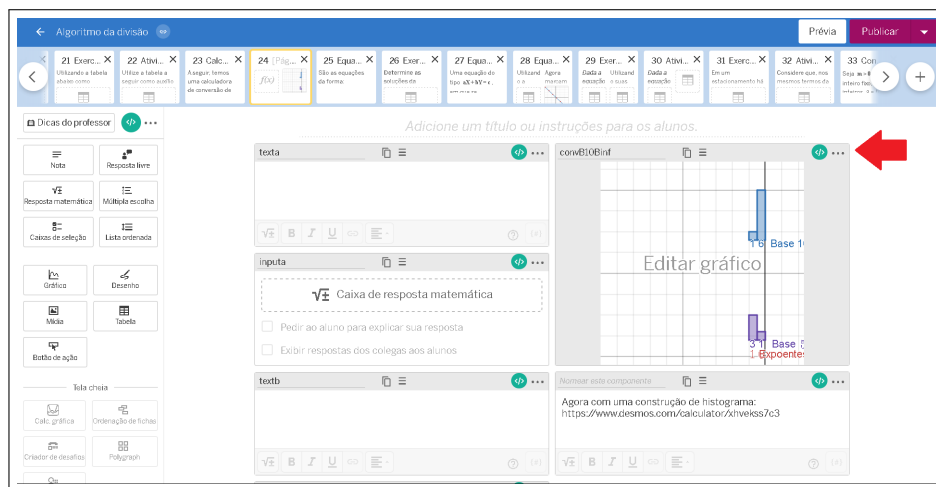
Os comandos *when* e *otherwise* são os responsáveis pela troca. Sendo que o primeiro é seguido de uma condição para ocorrer (que o primeiro número seja 16 e o segundo seja 5) e o segundo abrange os outros casos.

Observe que ao determinar as condições para o primeiro texto aparecer, é utilizada a linha de comando: “*when inputa.numericValue = 16 and inputb.numericValue = 5*”. Veja que o termo antes do número 16 é “*inputa.numericValue =*”. Isso significa, literalmente, “o valor numérico que está em *inputa* é igual a”. O mesmo ocorre no outro comando.

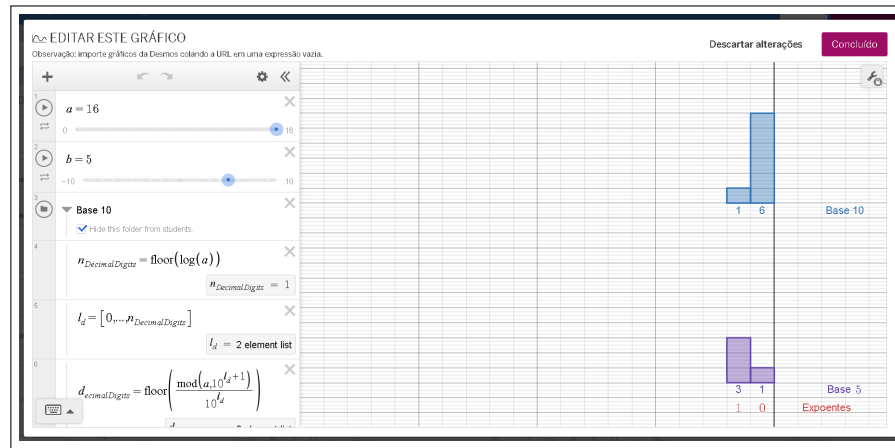
Isso quer dizer que este bloco de texto está utilizando um valor que foi inserido em outro componente para determinar o texto que ele irá mostrar. Essa interação é uma das grandes vantagens de se utilizar a CL na composição das atividades e tem inúmeras aplicações.

A conversão de bases é feita, de fato, no bloco chamado “convB10Binf” (figura A.53), que se trata de uma calculadora gráfica, com fórmulas para realizar os cálculos e elementos geométricos para realizar a apresentação na tela (figura A.54).

Figura A.53: Calculadora gráfica

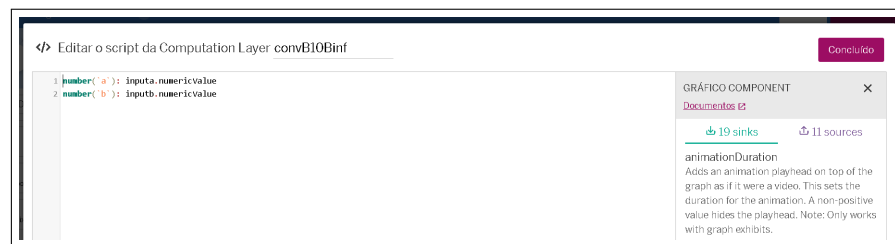


Fonte: capturada da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

Figura A.54: Programação da calculadora

Fonte: captura da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

Dentro destas fórmulas, são inseridos os valores de a e b , que são obtidos quando o usuário os insere nos blocos “*inputa*” e “*inputb*”. Para que a calculadora gráfica consiga saber quais números foram inseridos, precisamos atribuir comandos em seu *script* (figura A.55).

Figura A.55: *Script* da calculadora

Fonte: captura da plataforma *Desmos* sobre uma atividade de autoria própria.

Novamente, são utilizados os comando para “chamar” os números inseridos nos blocos de resposta matemática e cada número é atribuído à uma variável que é utilizada nos cálculos. Caso o usuário não edite a página, os valores destas variáveis são aqueles determinados inicialmente nos *script* responsáveis por eles.

Este foi apenas um exemplo de utilização da CL na elaboração de atividades, existem inúmeras outras possibilidades e diversos outros recursos, comandos e elementos que não abordamos aqui. A página do *Desmos* que contém a documentação relativa à CL é uma fonte de informação valiosa e que auxilia nos estudos de uma forma ímpar.

Deste modo, concluímos nosso pequeno tutorial. Acreditamos que as informações fornecidas aqui são suficientes para a criação de atividades básicas. A atividade que criamos

na primeira seção deste passo-a-passo está disponível através do *link* [ATIVIDADE](#).