UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ – UFPA

FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA – FACET

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFM

VALDIR DE LIMA RODRIGUES

SÉRIE DE TAYLOR E EQUAÇÃO DE EULER PARA OBTENÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM COMPARAÇÃO COM O LIVRO DIDÁTICO DO ENSINO BÁSICO E APLICAÇÃO

ABAETETUBA
2023

VALDIR DE LIMA RODRIGUES

SÉRIE DE TAYLOR E EQUAÇÃO DE EULER PARA OBTENÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM COMPARAÇÃO COM O LIVRO DIDÁTICO DO ENSINO BÁSICO E APLICAÇÃO

VALDIR DE LIMA RODRIGUES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT da Universidade Federal do Pará, Campus Abaetetuba, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática na área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof.º. Dr. José Francisco da Silva Costa

ABAETETUBA
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R696s Rodrigues, Valdir de Lima.
SÉRIE DE TAYLOR E EQUAÇÃO DE EULER PARA OBTENÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM COMPARAÇÃO COM O LIVRO DIDÁTICO DO ENSINO BÁSICO E APLICAÇÃO / Valdir de Lima Rodrigues. — 2023.
59 f.

Orientador(a): Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Abaetetuba, 2023.

1. Série de Taylor e equação de Euler. 2. livro didático. 3. transformação trigonométrica. 4. aplicação. I. Título.

CDD 510

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
POS-GRADUACAO EM MATEMATICA EM REDE NACIONAL-ABAETETUBA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO Nº 2/2023 - PFMAB (11.09.37)

Nº do Protocolo: 23073.057194/2023-61

Abaetetuba-PA, 11 de agosto de 2023.

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL-ABAETETUBA, QUE AVALIOU O TEXTO DE **VALDIR DE LIMA RODRIGUES.**

No dia nove de agosto de dois mil e vinte e três, às 10:00 h, via conferência, a comissão examinadora do texto de Defesa de Dissertação de mestrado, apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional-Abaetetuba (PROFMAT), pelo discente **VALDIR DE LIMA RODRIGUES**, intitulado "**DESENVOLVIMENTO DA SÉRIE DE TAYLOR E EQUAÇÃO DE EULER PARA OBTENÇÃO DAS TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM COMPARAÇÃO COM O LIVRO DIDÁTICO DO ENSINO BÁSICO E APLICAÇÃO"**. Obedecendo o disposto nas Resoluções do Conselho Superior de Ensino e Pós-Graduação, foi constituída a comissão pelos membros: : **Presidente:** PROF. DR. **JOSÉ FRANCISCO DA SILVA COSTA** (UFPA), **Membro Externo:** PROF. DR. **ANTONIO MAIA DE JESUS CHAVES NETO** , **Membro Interno:** PROF. DR **SEBASTIÃO MARTINS SIQUEIRA CORDEIRO** (UFPA) **Membro Interno:** PROF. DR. **ROMULO CORREA LIMA** (UFPA). Após o candidato apresentar o texto de sua Defesa de Dissertação, e obedecendo o prazo regimental, foi dada a palavra aos examinadores para arguição, tendo o candidato respondido às perguntas formuladas. Com o encerramento das ponderações, a Comissão Examinadora se reuniu para proceder ao julgamento da Defesa de Dissertação, em que a Comissão Examinadora decidiu, **APROVAR** o discente **VALDIR DE LIMA RODRIGUES**, com nota **8,5** e conceito **BOM**, no Exame de Defesa de Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional-Abaetetuba. Nada mais havendo a tratar, o Presidente deu por encerrados os trabalhos às 11:50h. Eu Raimundo Hosana Negrão, secretário do PROFMAT, lavrei a presente ata, que segue assinada por todos os presentes. Abaetetuba -PA, 09 de agosto de 2023.

(Assinado digitalmente em 11/08/2023 13:20)
ANTONIO MAIA DE JESUS CHAVES NETO
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
ICEN (11.34)
Matrícula: ###529#2

(Assinado digitalmente em 11/08/2023 19:01)
JOSE FRANCISCO DA SILVA COSTA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
CABAE (11.09)
Matrícula: ###277#6

(Assinado digitalmente em 11/08/2023 09:10)
RAIMUNDO HOSANA NEGRAO
ASSISTENTE EM ADMINISTRACAO
CABAE (11.09)
Matrícula: ###482#1

(Assinado digitalmente em 11/08/2023 18:02)
ROMULO CORREA LIMA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
CABAE (11.09)
Matrícula: ###046#3

(Assinado digitalmente em 11/08/2023 16:32)
SEBASTIAO MARTINS SIQUEIRA CORDEIRO
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
CABAE (11.09)
Matrícula: ###496#3

Para verificar a autenticidade deste documento entre em https://sipac.ufpa.br/public/documentos/index.jsp informando seu número: **2**, ano: **2023**, tipo: **ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO**, data de emissão: **11/08/2023** e o código de verificação: **249999cd05**

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
POS-GRADUACAO EM MATEMATICA EM REDE NACIONAL-ABAETETUBA

FOLHA DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº 1/2023 - PFMAB (11.09.37)

Nº do Protocolo: 23073.063075/2023-48

Abaetetuba-PA, 31 de agosto de 2023.

VALDIR DE LIMA RODRIGUES

SÉRIE DE TAYLOR E EQUAÇÃO DE EULER PARA OBTENÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM COMPARAÇÃO COM O LIVRO DIDÁTICO DO ENSINO BÁSICO E APLICAÇÃO

Defesa de Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Abaetetuba da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 09 de agosto de 2023.

(Assinado digitalmente em 01/09/2023 10:21)
ANTONIO MAIA DE JESUS CHAVES NETO
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
ICEN (11.34)
Matrícula: ###529#2

(Assinado digitalmente em 03/09/2023 09:19)
JOSE FRANCISCO DA SILVA COSTA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
CABAE (11.09)
Matrícula: ###277#6

(Assinado digitalmente em 06/09/2023 17:05)
ROMULO CORREA LIMA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
CABAE (11.09)
Matrícula: ###046#3

(Assinado digitalmente em 11/09/2023 15:36)
SEBASTIAO MARTINS SIQUEIRA CORDEIRO
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
CABAE (11.09)
Matrícula: ###496#3

Dedico este trabalho a minha querida esposa Gracinilda, ao Professor Manoel Costa por seu compromisso e esforço a frente desse programa de mestrado no Campus de Abaetetuba e ao caro orientador Professor Francisco.

“A ciência sempre caminha em todas as direções, perscrutando a natureza e mostrando que sem ela, o homem não teria saído da caverna, não teria descoberto o fogo e nem seria capaz de mudar o mundo se não soubesse compreender a natureza, obtendo dela conclusões teóricas e práticas para escrever em equações os fenômenos que observa, análise e interpreta”.

Valdir de Lima Rodrigues

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, que dá aos seres humanos a fantástica capacidade de pensar e sentir.

A minha esposa e filhos. Ao meu pai, já envelhecido pelo tempo.

Ao orientador José Francisco da Silva Costa, por seu empenho e responsabilidade durante a elaboração desse trabalho.

A todos os professores que tive durante o curso e que trouxeram para Campus da UFPA em Abaetetuba esse curso de mestrado.

Ao professor Manoel Costa, grande colaborador durante essa jornada,

Em Especial a CAPES, pela bolsa de mestrado que recebi a qual foi de valiosa ajuda para mim durante todo o curso.

RESUMO

Esse trabalho tem como objetivo geral desenvolver a série de Taylor e equação de Euler para obtenção das transformações trigonométricas em comparação com o livro didático do ensino básico e aplicação. A metodologia tem caráter bibliográfico, baseando-se em autores a saber, (ÁVILA, 2008; B. BOYER, 2012; GUIDORIZZI 2014; IEZZI, 1978, 2010 e 2016), STEWART, 2006) que representam a base para o desenvolvimento dos formalismos com uso de derivadas inclusos na série de Taylor para expansão de funções transcendentes (seno e cosseno) em expressões polinomiais, resultando na equação de Euler. Outras referências bibliográficas que dão um suporte às aplicações e história da trigonometria, como (MORSCH, 2019; ANDRADE, 2019; DIEDERICHSEN, 2023; MARQUES, 2023). Esses autores dentre outros inseridos ao longo desse trabalho, consolidam o estudo para um melhor aprofundamento da História, desenvolvimento matemático e aplicações. Em relação aos resultados obtidos, verifica-se que existem duas maneiras de estudar a trigonometria, sendo a primeira pela série de Taylor e Euler e a segunda, pelos livros didáticos que utilizam o ciclo trigonométrico para obtenção das transformações e tábuas trigonométricas. Nesse sentido, o trabalho vem, como resultado para professores, apresentar uma maneira de conhecer o desenvolvimento da trigonometria considerando as derivadas, a série de Taylor e a equação de Euler, tendo em vista que esse formalismo não se encontra nos livros didáticos. Conclui-se a pesquisa considerando que o ciclo trigonométrico e a equação de Euler, apresentam duas metodologias diferentes para desenvolver as transformações trigonométricas, sendo que a segunda, é integralmente analítica, sendo a série de Taylor crucial para truncar as funções e aplicar em situações dos fenômenos cotidianos, principalmente no que concerne nas tábuas trigonométricas, utilizando as funções transcendentes na forma de funções polinomiais.
Palavras-chave: Série de Taylor e equação de Euler, livro didático, transformação trigonométrica, aplicações.

ABSTRACT

This work has the general objective of developing the Taylor series and Euler's equation to obtain trigonometric transformations in comparison with the textbook of basic education and application. The methodology is bibliographic in nature, based on authors (ÁVILA, 2008; B. BOYER, 2012; GUIDORIZZI 2014; IEZZI, 1978, 2010 and 2016), STEWART, 2006) who represent the basis for the development of formalisms with the use of derivatives included in the Taylor series for expansion of transcendental functions (sine and cosine) in polynomial expressions, resulting in Euler's equation. Other bibliographic references that support the applications and history of trigonometry, such as (MORSCH, 2019; ANDRADE, 2019; DIEDERICHSEN, 2023; MARQUES, 2023). These authors, among others inserted throughout this work, consolidate the study for a better deepening of History, mathematical development and applications. Regarding the results obtained, it appears that there are two ways of studying trigonometry, the first through the Taylor and Euler series and the second through textbooks that use the trigonometric cycle to obtain transformations and trigonometric tables. In this sense, the work comes, as a result for teachers, to present a way of knowing the development of trigonometry considering the derivatives, the Taylor series and the Euler equation, considering that this formalism is not found in textbooks. The research is concluded considering that the trigonometric cycle and Euler's equation present two different methodologies to develop trigonometric transformations, the second of which is fully analytical, with the Taylor series being crucial to truncate the functions and apply them in situations of everyday phenomena, mainly with regard to trigonometric tables, using transcendental functions in the form of polynomial functions.

Keywords: Taylor series and Euler equation, textbook, trigonometric transformation, applications.

SUMÁRIO

INTRUDUÇÃO

Os fenômenos periódicos são presentes no cotidiano, sua compreensão é importante para entender o próprio mundo em que o homem está inserido. O balançar das folhas causado pelo vento, o movimento periódico do relógio de pêndulo simples, o movimento dos planetas em torno do sol, dos elétrons em torno do núcleo atômico, o movimento das gangorras, das rodas de ventos, da roda gigante em parques de diversões etc. Todos esses fenômenos podem ser explicados e analisados por funções senos e cosseno que regem tais movimentos, o que leva a razão de estudar suas características, e que podem ser resolvidas com as soluções de equações diferenciais (PISKOUNOV, 2000).

No entanto, muitos desses fenômenos requerem conhecimentos de equações diferenciais de segunda ordem para obtenção das funções que determinam os deslocamentos em função do tempo o que levam as funções periódicas, como seno e cosseno ou com a introdução de uma função exponencial na amplitude de movimentos com a presença do atrito (SERWAY,2014)

Com a obtenção das funções periódicas torna-se possível investigar os movimentos de corpos que são regidos por essas funções, que sob certas condições, podem ser analisadas por meio de série de Taylor para expandir suas soluções em funções polinomiais de grau N (NETO, 2004; SYMON, 1971).

Diante dessa abordagem, esse trabalho objetiva compreender a série de Taylor e equação de Euler enfatizando as funções seno e cosseno e as formulações trigonométricas (DANTE, 2020) como aplicações voltadas para o ensino médio. Entretanto, considerando o aspecto metodológico a que se propõe o estudo a esse nível, busca-se desenvolver o trabalho dissertativo levando em conta os seguintes objetivos específicos:

- Verificar o aspecto histórico das contribuiçõe dos matemáticos para o estudo das séries de Taylor e equação de Euler para o desnvolviemnto matemático das funções periódicas;
- Mostrar o desenvolvimento e formalismo matemático das séries de Taylor e MacLaurin para expansão de funções transcendentes para expansão polinomial;
- Entender as transformações trigonométricas a partir das fórmulas de Euler em comparação com o livro didático do ensino básico, buscando uma comparação por meio de demonstrações entre o nível básico e a equação de Euler a nível superior;

- Analisar as habilidades e competências segundo a BNCC e as aplicabilidades das séries de Taylor com ênfase em aplicações da temática desenvolvida e aplicada a problemas direcionados ao ensino básico.

Justifica-se a temática supondo que a nível de ensino básico, não se tem um livro texto que venha aplicar a equação de Euler para desenvolver um estudo das equações trigonométricas como é observado no livro didático (IEZZI, 2010) que utiliza o ciclo trigonométrico com as definições das funções periódicas de seno e cosseno. A partir desse formalismo da educação básica, obtém-se a fórmula fundamental e outras equações como seno da soma, cosseno da soma etc. Desse modo, desenvolve-se outras equações até atingir as chamadas tábuas trigonométricas.

Para realizar outra vertente, busca-se por meio da série de Taylor, obterem as expansões em série das funções seno e cosseno para obtenção da fórmula de Euler. A ideia central nesse caso é realizar um desenvolvimento que leve em conta demonstrações para atingir os mesmos resultados de relações trigonométricas presentes nos livros Matemática: ciências e aplicações (IEZZI, 2010) e Fundamentos de Matemática Elementar (IEZZI, 1978)

No entanto, a diferença é que nesse formalismo, o desenvolvimento envolve um conhecimento matemático que extrapola o nível médio, pois o polinômio de Taylor envolve conceitos de derivadas que exige um conhecimento de nível superior (GUIDORIZZI, 2013).

É nessa parte que o trabalho dissertativo emana como contribuição para os professores de nível básico conhecer que pode construir uma metodologia que contribua para ampliar o conhecimento da trigonometria não se restringindo apenas nos livros didáticos e sim, buscar por meio do cálculo a nível superior (KONGUETSOF, 1974), um desenvolvimento que tenha como base de cálculo, demonstrações por meio de exponenciais complexas associadas as funções seno e cosseno que possibilita um desenvolvimento das equações trigonométricas, sem no entanto, utilizar o ciclo trigonométrico para atingir todo o formalismo analítico em que os livros textos a nível básico abordam (MUNEM, 2007)

Outra questão é que a nível básico, as tabelas (ou tábuas) trigonométricas podem ser obtidas levando em conta as funções de arcos metades com a utilização da fórmula fundamental (IEZZI, 2010). Assim, torna-se possível valores de ângulos de seno, cosseno e tangentes para ângulos que não são considerados notáveis. É dessa forma que o professor repassa aos alunos esse conhecimento. Nesse trabalho, com a utilização da série de Taylor é possível expandir as funções seno e cosseno em funções polinomiais, o que permite utilizá-las como recurso para obter as conhecidas tábuas trigonométricas, pois a nível de ensino básico, nenhum livro texto utiliza desse conhecimento. Assim busca-se desenvolver funções ao ponto de mostrar a possibilidade de ampliar o estudo, levando em conta a fórmula de Euler e a série de Taylor como bases fundamentais para desenvolvimento desse texto dissertativo.

Compreender o processo histórico, mostrando como os fatos aconteceram e forma como os filósofos matemáticos chegaram o formalismo matemático e suas conclusões (ROQUE, 2012). Nesse sentido o aspecto histórico é importante para uma compreensão ampla de um determinado conteúdo e um professor, ao desenvolver esse método de ensino, dá um sentido melhor para a qualidade de seu trabalho, abrindo discussões e debates entre ele e os alunos (ROONEY, 2012).

Assim sendo, o capítulo 1 tem essa finalidade, introduzir o contexto histórico como forma de valorizar a matemática, tornando para o aluno muito mais significativo o estudo.

O capítulo 2 busca construir a comparação entre os dois níveis de desenvolvimentos das fórmulas pelo ciclo trigonométrico e pela série de Taylor e fórmula de Euler que constitui numa importante contribuição para a trigonometria a nível superior (PEREIRA, 2014).

Uma vez que o aspecto histórico é importante para que o aluno compreenda o processo histórico em que a matemática passou e o capítulo 2 abre um contexto em que se deve compreender todo o formalismo matemático, incluindo conceitos, definições e formulações.

Outra importante contribuição consiste no desenvolvimento das transformações trigonométricas. Isto é, expressão de seno da soma, e cosseno da soma etc. A nível básico essas e outras expressões podem ser obtidas tomando como referência o ciclo trigonométrico com o conhecimento de geometria para obtenção dos resultados dessas expressões (IEZZI, 1978).

No entanto, é possível um aprofundamento da trigonometria considerando uma segunda metodologia de ensino com a utilização da série de Taylor, pois segundo essa teoria toda função continua, nesse caso as funções seno e cosseno, pode ser expandida na forma polinomial, o que permite a obtenção da equação de Euler (D’AMBROSIO, 2009).

Esse conhecimento representa uma grande vantagem na explicação de uma série de fenômenos encontrados na natureza e podem ser analisados e interpretados considerando certas restrições obtidas expandindo em um dois ou três termos da série de Taylor.

No caso do pêndulo simples, a oscilação pode variar para diferentes ângulos e para conseguir obter a equação do período desse movimento, expande-se a função periódica numa série de Taylor o que torna válido para qualquer ângulo de abertura em que acontece a oscilação.

No entanto, para tornar o movimento compreensível, restringe-se a oscilação para ângulos $\theta \leq 5º$o que leva a considerar para o cálculo do período a expressão,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Pois para esses ângulos contidos nesse intervalo, o cosseno na função em série de Taylor, aproxima-se da unidade e seno se iguala a própria tangente do ângulo quando se trunca a função e as restringe para funções lineares. Da mesma maneira, pode-se utilizar a série de Taylor para expansões polinomiais de funções que são resultados de equações diferenciais de primeira ou de segunda ordem de funções que envolve velocidade e espaços em movimentos de corpos que apresentam a presença de forças dissipativa (ROGERIO,1994).

Em geral, as soluções de movimentos de objetos que apresentam atritos, como o lançamento ou queda de corpos no campo gravitacional ou em movimento periódico com atrito, as soluções das equações diferenciais conduzem a expressões exponenciais que podem ou não envolver funções periódicas o que pode dificultar a análise e a interpretação dos resultados.

No entanto, pode-se expandir as soluções das funções da velocidade ou do espaço em funções polinomiais, restringindo-se as soluções a funções lineares e quadráticas ou até mesmo cúbicas o que se torna possível observar, interpretar e analisar o comportamento do corpo em função do tempo (HUGHES-HALLETT, 1974)

Portanto, observa-se o quanto é importante um aprofundamento dos movimentos periódicos, da trigonometria tomando como vertente a série de Taylor e a equação de Euller para que o professor tenha uma base mais sólida dessas teorias, podendo consolidar o estudo e ter um domínio mais amplo do conteúdo, abrangendo tanto o conhecimento a nível básico e superior.

1 ASPECTO HISTÓRICO DAS CONTRIBUIÇÕE DOS MATEMÁTICOS PARA O ESTUDO DAS SÉRIES

Nessa seção, procura-se mostrar os principais pensadores e matemáticos que contribuiram para o dessenvolvimento de séries. Matematemáticos como James Gregory; Broock Taylor; Colin Maclaurin e Leonard Euler, onde esse último deu um avanço significativo na construção da fórmula que hoje leva o seu nome. Assim sendo, a seção aborda as contribuições desses grandes matemáticos para o desenvolvimento das séries de Taylor e da identidade de Euler.

1.1 JAMES GREGORY

Era um escocês que nasceu em 1638 e que muito contribuiu para o desenvolvimento das séries de potências! Gregory teve contato com a matemática desenvolvida em outros países; houve um rico patrono que o apresentou a John Collins, que foi professor em Londres até 1660 e bibliotecário da Royal Society. Collins foi o grande correspondente da matemática em sua época e dessa forma contribuiu com Gregory com seu talento em conectar ideias de vários matemáticos da época (BOYER, 2012).

Em 1663 Gregory foi a Itália onde seu patrono o apresentou a Stefano Degli Angeli, um dos sucessores de Torricelli, e cujos trabalhos eram voltados principalmente para métodos infinitesimais, com destaque na quadratura de espirais, parábolas e hipérboles. Gregory estudou com Angeli de 1664 a 1668 antes de voltar para Londres. Provavelmente foi então que ele começou a ganhar gosto pela expansão de funções em séries de potências e dos processos infinitesimais ao ver o grande poder matemático que isso vislumbrava pois nota-se que foi durante esse período, na cidade italiana de Pádua, que ele publicou uma obra intitulada Vera circuli et hyperbolae quadratura contendo importantes resultados em análise infinitesimal. Um desses resultados é que

> “Gregory estendeu o algoritmo de Arquimedes a quadraturas de elipses e hipérboles. tomava um triângulo inscrito de área a_0 e um quadrilátero circunscrito de área A_0; duplicando sucessivamente o número de lados dessas figuras ele formava a sequência a_0, A_0, a_1, A_1, a_2, A_2, a_3, A_3, ... E mostrava que a_n é a média geométrica dos 2 termos imediatamente precedentes e A_n a média harmônica dos 2 termos precedentes. Assim, ele tinha duas sequências - a das áreas inscritas e a das áreas circunscritas - ambas convergindo para área da cônica; ele as usou para obter aproximações muito boas para setores elípticos e hiperbólicos” (BOYER, 2012, p. 268**).**

Esses resultados foram importantes visto que com isso ele chegou ao cálculo de algumas derivadas e integrais. No ano de 1668 Gregory retorna da Itália a Inglaterra e envia cópia de seu livro Vera circuli et hyperbolae quadratura e uma carta à Huygens esperando, com certeza, uma análise satisfatória de sua obra. O resultado foi uma decepção para Gregory; Huygens publicou um trabalho reivindicando ter chegado primeiro a alguns daqueles resultados. Isso gerou uma desagradável situação de disputa entre os dois. Hoje se sabe que Gregory dificilmente plagiou os resultados de Huygens, sua obra foi original.

Nesse mesmo ano ele ainda publicou dois livros, Geometriae pars Universales, em Pádua, e Exercícios Geométricos, em Londres, nos quais ele reunia resultados de matemáticos da França, Itália, Holanda e Inglaterra, além de resultados originais obtidos por ele. Sua abordagem matemática, por questões de opinião sua e por tendência da época, foi geométrica. Se o desenvolvimento fosse de forma analítica, poderia ter desenvolvido o cálculo antes de Newton e Leibniz, visto que ele conhecia, e dominava, todos os elementos que fundamentaram o cálculo (BOYER, 2012).

Conhecia o que é chamamos hoje de série de Taylor e Maclaurin a mais de 40 anos antes destes. Dominava muito bem o desenvolvimento de seno, cosseno e tangente em séries.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{1}$$

$$sen\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{2}$$

$$cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} ln\, x &= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n \end{aligned} \tag{4}$$

Foi matemático, inventor, astrônomo e professor das universidades de St Andrews em Edimburgo e membro da Royal Society. Contudo não teve, por certos motivos, o reconhecimento proporcional as suas obras e descobertas. Ele morreu ainda jovem no ano de 1675, entre os 36 ou 37 anos de idade (BOYER, 2012).

1.2 BROOCK TAYLOR

Taylor nasceu em Edmonton, Middlesex na Inglaterra em dezoito de agosto de1685. Seu pai se chamava John Taylor, da Casa de Bifrons, e de Olivia, filha de Nicholas Tempest. Era de uma família moderadamente rica. Seu pai, homem rigoroso severo, o expulsou da casa em 1721 quando este se casou com uma mulher que não era tão rica quanto seu pai queria. Essa mulher morreu pouco tempo depois durante um parto. Voltou para sua casa e se casou novamente em 1725, agora com as a aprovação e bençãos do pai. Esta segunda esposa também morreu durante um parto em 1730, porém a criança sobreviveu (O'CONNOR, 2000)!

No ano de 1701 John Taylor entra para o Saint John’s College, cujos catedráticos em matemática eram John Machin e John Keill. Taylor diplomado como bacharel em 1709, em 1712, com cerca de 27 anos de idade, é eleito como membro da Royal Society, da qual se tornou secretário em 1714, porém pediu demissão deste cargo em 1718 (O'CONNOR, 2000).

A razão que levou à demissão, muito provavelmente, devido o problema com a saúde e por esse tipo de tarefa, geralmente exigir muito de quem a assume. Como membro da Royal Society, Taylor participou, em 1712, do comitê formado por Newton (que era o então presidente da Royal Society) para o julgamento da questão da prioridade da invenção do cálculo entre Newton e Leibniz. Taylor era amigo e um entusiástico admirador de Newton. Atualmente, sabe-se que a descoberta de Newton foi cerca de 10 anos antes da de Leibiniz (O'CONNOR, 2000).

Taylor visitou a França diversas vezes por razões de saúde e para rever amigos. Durante estas visitas ele manteve uma constante correspondência com Pierre Rèmond e Montmort sobre as séries infinitas e sobre o trabalho de Montmort em probabilidade. Os anos entre 1714 e 1719 foram os mais produtivos de sua carreira como matemático (O'CONNOR, 2000).

Em 1715, saiu a primeira edição de seus livros Methodus Incrementurum directa et inversa e Linear Perspective. Era este livro que continha a série que conhecemos hoje como série de Taylor. Além de 13 artigos, alguns como cartas na Philosophical Transactiones durante os anos de 1712 a 1724. Nesses artigos ele fala de experimentos como capilaridade, o magnetismo e termômetro. Taylor estava conversando com Newton a respeito de um trabalho de Halley e depois dessa conversa lhe surgiu uma ideia a partir da qual ele desenvolveu o que nós conhecemos como série de Taylor (O'CONNOR, 2000).

Do ponto de vista didático, a Série de Taylor representou a maior contribuição de Taylor à matemática. Um estudo mais profundo de sua obra revela que esta foi muito maior que a simples relação que se faz de seu nome ao teorema do desenvolvimento de funções em series de potências. Ressalta-se que sua obra não era fácil de ser lida devido à concisão e respectiva dificuldade de interpretação (DIEDERICHSEN, 2023).

1.3 COLIN MACLAURIN

MacLaurin nasceu em fevereiro de 1698, em Kilmodan, na Escocia, onde seu pai era ministro da paroquia, o qual morreu seis semanas após seu nascimento. Colin passou a viver até os 9 anos apenas com a mãe e seus dois irmãos mais velhos. Aos 11 anos ele ingressa na universidade de Glasgou (O'CONNOR, 2017).

De fato, ele era uma criança prodígio. Graduasse aos 15 anos defendendo uma tese sobre a teoria da gravitação de Newton. Em 1719, com cerca de 21 anos de idade, foi eleito membro da Royal Society. Em 1724 recebeu um prêmio da Academia de Ciências por um trabalho sobre impacto de corpos. Aos 27 anos de idade, com a colaboração de Newton, tornou-se assistente de um professor de matemática na universidade de Edinburgo, tornando-se posteriormente o professor titular. Como Colin passava por dificuldade para obter recursos para se manter na universidade, Isaac Newton se ofereceu pessoalmente para custear tais despesas a fim de não tirar da universidade um jovem tão brilhante (O'CONNOR, 2017).

Em 1740 foi premiado novamente pela mesma academia francesa de Ciências por seu estudo sobre as marés, esse segundo prêmio ele dividiu com Euler e Daniel Bernouli. No ano de 1742 Colin publica sua obra <u>Treatise of Fluxions</u>, nela é apresentada de forma sistemática e logica os métodos dos fluxos de Newton, dando assim uma base matemática mais rigorosa ao trabalho de Newton, isso foi feito em resposta aos ataques que o reverendo Berkeley havia feito ao cálculo devido a uma falta de fundamentação rigorosa. Nessa obra faz várias aplicações do cálculo dando, assim, maior respaldo a essa tão importante parte da matemática, além de fazer uma exposição de sua expansão de funções em series de potencias e é nesse livro que aparece o que se conhece por série de MacLaurin. Morreu em Edinburgh em 1746 (BOYER, 2012).

1.4 LEONARD EULER.

Euler era filho de Paul Euler com Margaret Bruker. Foi de seu pai que ele recebeu as primeiras aulas de matemática. Ele era uma pessoa muito interessada por matemática, tanto que, por conta própria lia textos de matemática, e tinha aulas particulares desde os sete anos. Euler era muito religioso, chegou a cursar teologia, mas seu gosto por matemática era maior e, com uma motivação extra dada pelo matemático Johann Bernoulli acabou mudando para o curso de matemática.

Depois de terminar esse curso ele foi convidado a assumir uma cadeira de professor na universidade russa de São Petersburgo, ao que ele aceitou e assim foi morar na Rússia. No ano de 1727, Johann Bernoulli indicou seu melhor aluno, Leonard Euler, para trabalhar com Daniel Berrnoulli. Na Rússia ele se tornou membro da Academia de Ciências de São Petersburgo graças a sua amizade com os dois filhos de Bernoulli que o indicaram a Imperatriz Catarine I. Na Academia teve a oportunidade de conhecer grandes cientistas como Jakob Hermann, Daniel

Bernoulli e Christian Goldbach, além de se tornar professor de Física em 1730 (O'CONNOR, 1998).

O irmão de Daniel Bernoulli, que trabalhava junto com ele na academia, Nicolas, morreu devido a uma febre em 1725 e depois disso, Daniel ficou abatido até que em 1733 ele retornou para Basiléia na Suíça, tornando-se professor da Universidade. A cátedra de matemática de Daniel na Academia foi ocupada por Euler, que, com os recursos advindos desse trabalho, casou-se com Catharina Gsell, uma jovem suíça com quem teve 13 filhos. Segundo Euler, algumas das maiores realizações cientificas de sua vida ocorreram nesse período. Entre 1736 e 1737 Euler publicou o livro intitulado Mechânica (O'CONNOR, 1998).

Também começaram a aparecer seus primeiros problemas de saúde; ainda assim ele ganhou 2 prêmios da Academia de Ciências de Paris, um em 1938 e outro em 1940. Com os prêmios vieram também uma oferta de trabalho em Berlim, a qual de início recusou, mas depois aceitou. Em Berlim ele já chega como diretor de matemática da recém fundada Academia de Ciências da cidade. Durante os 25 anos que Euler morou na Alemanha ele produziu cerca de 380 artigos, além de livros.

No ano de 1759 Euler assume a direção da Academia, porém essa situação levou a desentendimentos com o então imperador da Prússia, Frederico Guilherme II, o Grande (que fora um dos mais notáveis promotores do desenvolvimento desse país), que o levaram a deixar o país e voltar para Rússia no ano de 1766. No ano de 1771 a casa de Euler foi destruída por um incêndio e ele, já velho e doente acabou ficando totalmente cego. Esses fatos não o fizeram parar de produzir. Euler foi o matemático que mais produziu escritos de todos os tempos. Um dos resultados mais importantes que Euler obteve ainda em sua juventude foi encontrar uma solução para o problema de Basel, que consistia em encontrar uma forma fechada para a soma das séries infinitas

$$\zeta(2) = \sum \left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{5}$$

Constata-se a solução para esse problema que representou um desafio entre os matemáticos da época a saber, Leibniz, Bernoulli, Stirling e de Moivre, no entanto a solução foi desenvolvida por Euler. Vale considerar ainda que Euler contribuiu em vários outros aspectos na área da matemática, sendo o descobridor de desenvolvimento de séries infinitas, cujos resultados incluiu a introdução de sua famosa constante δ, que provou ser o limite de:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - ln\, n \tag{6}$$

Historicamente, supõe-se que a análise matemática tenha partido de suas ideias. Em 1748, na obra Introductio in analysin infinitorum, conseguiu realizar a definição de funções desenvolvidas por Johann Bernoulli. Para isso Euler se baseou no desenvolvimento em funções elementares, ao invés das curvas geométricas. É nesse trabalho de pesquisa que é descrito com exatidão a seguinte fórmula matemática (O'CONNOR, 1998).

$$e^{xi} = cosx + isenx \tag{7}$$

A equação (7) foi obtida pela fórmula de Maclaurin a partir de expansões polinomiais. Do ponto de vista histórico, Euler recebe um destaque especial devido as grandes contribuições desenvolvidas da área de Matemática.

Para melhor compreender as contribuições e o período em que houve os desenvolvimentos matemáticos, foi feita a tabela a seguir.

Tabela 1- Principais matemáticos e contribuidores para o desenvolvimento das séries.

MATEMÁTICOS/DATA	**ANO**	**DESCOBERTAS**
James Gregory 1638-1675	1668	Em 1668 Gregory publica seus livros Vera circuli et hyperbolae quadratura e Geometriae pars Universales e fica claro que ele já tinha perfeito conhecimento da expansão de seno, cosseno e tangente em séries de potências
Broock Taylor 1685-1731	1715	Taylor publica o livro Methodus Incrementurum directa et inversa e Linear Perspective, no qual ele apresenta a série de potencias que depois levou o seu nome.
MacLaurin 1698-1746	1742	MacLaurin faz uma exposição de sua expansão de funções em series de potencias na obra Treatise of Fluxions. É_ nessa obra que aparece a série que leva seu nome.
Euler 1707-1783	1748	Desenvolveu num trabalho de pesquisa a obtenção fórmula matemática: $e^{xi} = cosx + isenx$

Fonte: autoria própria

2 DESENVOLVIMENTO E FORMALISMO MATEMÁTICO DAS SÉRIES

Essa seção irá abordar o desenvolvimento das funções seno e cosseno através das séries de potências. Expressar, usando a relação de Euler, as funções seno e cosseno além do desenvolvimento de várias transformações trigonométricas. Outro objetivo é mostrar aos professores de matemática de ensino médio uma fundamentação diversificada daquelas vistas em livros dessa etapa de ensino para as referidas funções e, para este mesmo fim, se fará ainda o desenvolvimento das transformações trigonométricas usando a relação de Euler.

2.1 TEOREMA DA SÉRIE DE TAYLOR E POLINOMIO DE ORDEM n

Será mostrado o teorema da série de Taylor e, em seguida, de forma simples, como se demonstra essa série do polinômio de Taylor. Antes do teorema serão definidos dois conceitos importantes:

Definição 1 - Diz-se que uma função f é analítica numa região R se ela é derivável em cada ponto de R; f é analítica num ponto z_0 se f é analítica numa região contendo z_0 (ÁVILA, 2012, p.50, 51).

Definição 2 - Dados os números $r > 0$ e z_0 complexo qualquer, chama-se disco aberto de centro z_0 e raio r ao conjunto $D_r(z_0)$ de todos os números complexos que estão a uma distância menor que r do ponto z_0, isto é:

$$D_r(z_0) = \{z: |z - z_0| < r\}$$

O disco fechado é o conjunto $\{z: |z - z_0| \leq r\}$, que incluí a fronteira, isto é, o círculo $\{z: |z - z_0| = r\}$ (ÁVILA, 2012, p.26).

Teorema: Seja uma função analítica numa região R, z_0 um ponto qualquer de R, e $r_0 > 0$ tal que o disco $|z - z_0| \leq r_0$ esteja todo contido em R. Então, nesse disco a função f pode ser desenvolvida em séries de potências de $z - z_0$.

Conhecida como série de Taylor da função f relativa ao ponto z_0, esse desenvolvimento é dado univocamente por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \tag{8}$$

O caso em que $z_0 = 0$ é conhecido como série de MacLaurin da função f (ÁVILA, 2012, p.134).

O polinômio de Taylor é usado, em casos mais simples, para se obter valores aproximados ou exatos de uma dada função que possua uma fórmula matemática cujos cálculos sejam mais difíceis que os cálculos com polinômios (isso, claro, se o polinômio for de um grau pequeno pois em um polinômio de grau elevado o cálculo também se tornara mais complicado). Porém esse não é o motivo mais importante para se usar essas séries. (STEWART, 2006)

A série de Taylor possui aplicação, tanto na área geométrica como também analítica, pois é possível truncar a série e aplicar num determinado problema que pode restringir e obter de maneira muito mais rápida a solução. Um exemplo disso pode ser entendido na área da Física no estudo da cinemática na situação em que um corpo cai no campo gravitacional com a ação da força peso e de forças de resistências.

Nesse caso, a solução do problema exige o domínio de uma equação diferencial de primeira ordem da velocidade em função do tempo. A solução leva ao desenvolvimento de uma função exponencial e não de um polinômio de grau 2. Para restringir o problema, expande a função velocidade em função do tempo considerando uma série de Taylor. Assim sendo, com a função exponencial desenvolvida em termos de polinômios, pode truncar a função para o grau 1, 2 e estudar o caso para os corpos cinemáticos sem a resistência do ar. Se caso se pretende expandir a série para grau maiores, a solução do problema leva a situações para os casos reais o que consiste em levar em conta as condições climáticas, como a força de resistência do ar.

Portanto, a série de Taylor pode ser aplicada em situações em que a expansão polinomial conduz a soluções mais simples, desprezando parâmetros que podem tornar o problema muito mais complicado. Dessa maneira e sem demonstração, pode-se considerar que se uma função é continua num intervalo $[a, b]$, pode-se expandir a função f(x) numa série de Taylor. Isto é: Seja f uma função derivável até a ordem n no intervalo I e seja x pertencente I. Logo,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{10}$$

A equação (10) denomina-se polinômio de Taylor, de ordem n, de f em torno de x_0. O polinômio de Taylor, de ordem n, de f em volta de $x_0 = 0$ denomina-se também polinômio de Mac-Laurin, de ordem n, de f. Também é possível representar a equação (10) pela fórmula

$$f(x) = P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{11}$$

Onde $f^{(n)}$ representa a derivada de ordem n da função f. Se a função f possuir infinitas derivadas então o polinômio de Taylor poderá ser de um grau também infinito.

2.1.1 O erro que se comete ao se aproximar uma função f por um polinômio de Taylor de ordem 1 possui esse erro tendendo a zero mais rapidamente do que x tende a x_0.

Seja uma função f derivável em x_0, então pode-se ver que:

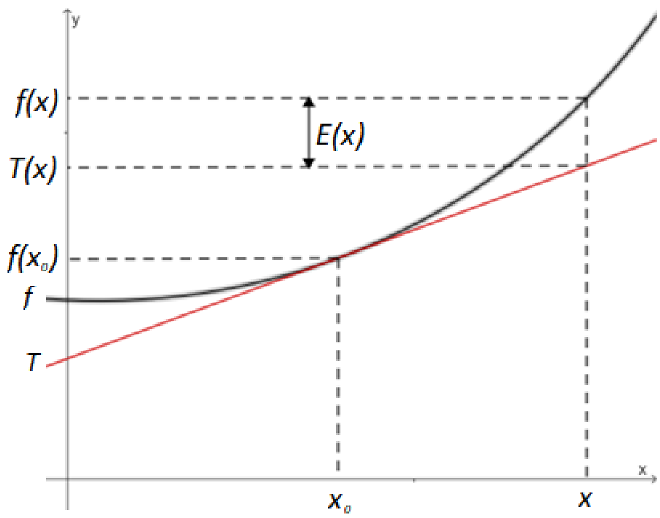
$f'(x_0)$ será o coeficiente angular da reta que tangência f e que o ponto $(x_0\,,\ f(x_0))$ pertencem a esta reta. Logo pode se escrever uma equação de reta da seguinte maneira:

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{12}$$

A equação (12) é o polinômio de Taylor de ordem 1 que se aproximará localmente de f.

O gráfico de T a seguir é a reta que tangencia o gráfico de f no ponto $(x_0\,,\ f(x_0))$

Gráfico 1 - Reta tangente a uma curva para uma função



Fonte: Autoria própria.

Nos valores próximos a x_0 percebe-se que os valores de $f(x)$ e de $T(x)$ também ficam próximos uns dos outros. Mas é claro que há, nesse caso, uma diferença entre $f(x)$ e $T(x)$, a não ser no ponto x_0, onde $f(x)$ e $T(x)$ tem os mesmos valores. Então para cada $x \in D_f$, seja $E(x)$ o erro que se comete na aproximação de $f(x)$ por $T(x)$ e pode-se escrever:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + E\,(x)$$

Veja que

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Além disso:

$$E(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$$

Note-se que, para $x \neq x_0$ pode ser feita a seguinte divisão

$$\frac{E(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$$

Fazendo o limite, tem-se que,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{x - x_0} = 0 \tag{13}$$

O que leva um resultado zero para o erro, pois fica claro que quando $x\ tende\ a\ zero$ $E(x)$ tende a zero mais rapidamente do que a diferença $x - x_0$. A função $T(x)$, da qual $E(x)$ depende, é a única função afim que tem esta característica. O polinômio de Taylor, de ordem n, de f em volta de x_0 é o único polinômio de grau no máximo n que aproxima localmente f em volta de x_0 de modo que o erro $E(x)$ tenda a zero mais rapidamente que $(x - x_0)^n$, quando $x \to x_0$ (STEWART, 2006; GUIDORIZZI, 2014)

2.1.2 A função linear no primeiro truncamento.

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

é também chamada de linearização de f em x_0. A aproximação de f por T é chamada de aproximação pela reta tangente de f em x_0.

O polinômio

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{14}$$

Chama-se polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de x_0 ou primeiro truncamento.

2.1.3 Função quadrática para o 2º truncamento

A fim de se ter uma aproximação melhor do que a aproximação pela reta tangente, será feita a aproximação da curva por uma função polinomial do 2º grau, $P_2(x)$, onde:

$$P_2(x) = A + Bx + Cx^2 \tag{15}$$

que é uma função conhecida pelos alunos da educação básica desde o 9º ano do ensino fundamental. Qual será a função polinomial do 2º grau que melhor se aproxima da curva num dado ponto da curva. Será estabelecido alguns critérios a fim de se ter de fato o polinômio do 2º grau que melhor se adequa a essa situação.

1ª-

$$f(x_0) = P_2(x_0), \tag{16}$$

ou seja, f e P tem o mesmo valor em x_0.

2º-

$$f'(x_0) = P'_2(x_0), \tag{17}$$

ou seja, f e P tem a mesma derivada em x_0.

3ª-

$$f''(x_0) = P''_2(x_0), \tag{18}$$

"A inclinação de f e P deve variar segundo uma mesma taxa" (STEWART, 2006, P.268) de variação em torno de x_0. Se esta última condição for satisfeita significa que as derivadas de f e P_2, nas proximidades do ponto x_0, podem continuar coincidindo e consequentemente a chance de que as curvas de f e P_2 coincidam nas proximidades desse ponto existe.

A fim de aproximar uma função f por uma função polinomial do 2º grau P_2 nas proximidades de x_0, o polinômio P_2 será escrito da forma:

$$P_2(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2 \tag{19}$$

Que é uma forma de escrever o polinômio da equação (15) parecida com a do polinômio da equação (14).

O problema consiste em achar os valores de A, B e C para que o polinômio da equação (18) satisfaça as três condições: Considere-se $A = f(x_0)$, já que este fato não causa nenhum problema ao polinômio da equação (18).

Atribuindo o valor de x_0 a x na equação (18), vem que,

$$P_2(x_0) = A + B(x_0 - x_0) + C(x_0 - x_0)^2,$$

$$P_2(x_0) = A$$

E, como

$$A = f(x_0),$$

Logo

$$P_2(x_0) = A = f(x_0)$$

A primeira condição está satisfeita. Fazendo a primeira derivada de P_2 a partir da equação (19):

$$P'_2(x) = B + 2C(x - x_0)$$

Essa derivada em $x = x_0$ será:

$$P'_2(x_0) = B + 2C(x_0 - x_0) \Rightarrow P'_2(x_0) = B$$

Como a segunda condição diz que equação (17):

$$f'(x_0) = P'_2(x_0),$$

Logo B deve ser igual a $f'(x_0)$, ou seja,

$$B = f'(x_0) = P'(x_0) \tag{20}$$

A derivada de segunda ordem de $P_2(x)$ a partir da equação (19) será:

$$P''_2(x) = 2C$$

Esta derivada no ponto x_0 será:

$$P''_2(x_0) = 2C$$

Como a terceira condição estabelece que equação (18):

$$f''(x_0) = P''_2(x_0)$$

Logo

$$f''(x_0) = P''_2(x_0) = 2C \Rightarrow C = \frac{f''(x_0)}{2} \tag{21}$$

Então o polinômio P_2 da equação (19) deve ser escrito como:

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \quad (22)$$

Que é o polinômio de Taylor de ordem 2 e que faz uma aproximação melhor do que o polinômio de ordem 1 (STEWART, 2006).

2.1.4 Exemplo de aplicação

Usando a equação (22), isto é,

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

para obter a aproximação de

$$f(x) = sen\, x \quad (23)$$

Como a função seno é analítica e pelo polinômio do 2º grau em torno de $x_0 = \frac{\pi}{2}$ (ou aproximação quadrática de $f(x) = sen\, x$, pode-se derivar (23),

$$f'(x) = cosx \quad (24)$$

Portanto,

$$f'(x_0) = cosx_0 = cos\frac{\pi}{2} = 1$$

Derivando (24), tem-se:

$$f''(x) = -senx \quad (25)$$

Portanto,

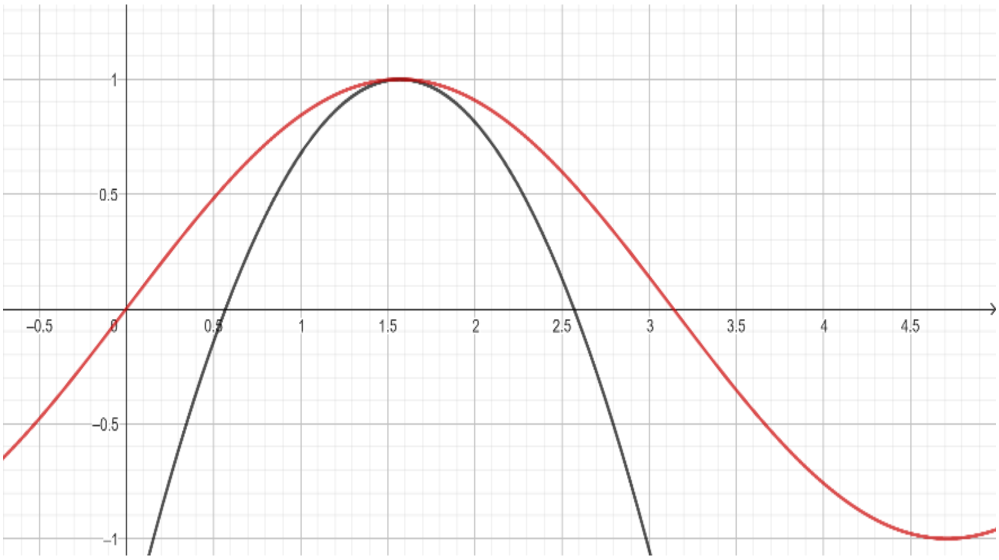
$$f''(x_0) = -senx_0 = -sen\frac{\pi}{2} = -1$$

Levando os valores das derivadas no ponto $\pi/2$ e na equação (22), obtém-se

$$P_2(x) = 1 - \frac{\pi^2}{4} + \pi x - x^2 \quad (26)$$

O gráfico a seguir mostra as funções $y = senx$ e a função dada pela equação (26).

Gráfico 2- Função $senx$ truncada no polinômio em grau 2.



Fonte: autoria própria.

2.1.5 Polinômios de graus maiores

A fim de obter aproximações ainda melhores de uma função f serão usados polinômios de graus mais altos de modo que $f(x_0) = P_n(x_0)$ e que as n primeiras derivadas de f sejam iguais as n primeiras derivadas de P_n em $x = x_0$. O polinômio procurado será escrito da forma a seguir:

$$P_n = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \cdots + c_n(x - x_0)^n \qquad (27)$$

Derivando repetidamente o polinômio P_n em $x = x_0$, verifica-se que essas condições são satisfeitas com

$$c_0 = f(x_0), c_1 = f'(x_0), c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \dots, c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad (28)$$

E de modo geral

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad (29)$$

Onde $f^{(n)}$ representa a derivada de ordem n da função f. O polinômio procurado ficara da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned} \qquad (30)$$

2.2 CÁLCULO DO POLINÔMIO DE TAYLOR PARA AS FUNÇÕES SENO E COSSENO.

Para a função seno, $f(x) = sen\, x$, será utilizada a fórmula da equação (11) para desenvolver o polinômio.

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - x_0)^n$$

para simplificar o desenvolvimento, as derivadas serão calculadas no ponto $x_0 = 0$, que corresponderá ao que se chama de série de Mac-Lauren.

Primeiro serão obtidas algumas derivadas de seno.

Seja $f(x) = senx$ para todo $x \in R$ temos:

$f'(x) = cosx \quad e, para\; x = 0 \;\; f'(0) = cos0 = 1$ (a derivada do seno é igual ao cosseno)

$$f''(0) = -sen0 = 0$$

A derivada da função cosseno é $-senx$

$$f^{(3)}(x) = -cosx \quad e, para\; x = 0 \;\; f^{(3)}(0) = -1,$$

$$f^{(4)}(x) = senx \quad e, para\ x = 0 \quad f^{(4)}(0) = sen0 = 0,$$

$$f^{(5)}(x) = cosx \quad e, para\ x = 0 \quad f^{(5)}(0) = cos0 = 1,$$

$$f^{(6)}(x) = -senx \quad e, \quad para\ x = 0 \quad f^{(6)}(0) = -sen0 = 0,$$

$$f^{(7)}(x) = -cosx \quad e, para\ x = 0 \quad f^{(7)}(0) = -cos0 = -1,$$

$$f^{(8)}(x) = senx \quad e, para\ x = 0 \quad f^{(8)}(0) = sen0 = 0$$

E assim por diante esse padrão irá se repetir. Como se fará para $x_0 = 0$, só irá ser usado x na fórmula da equação (11), pois $(x - x_0) = (x - 0) = x$

$$f(x) = senx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

$$= sen0 + cos0.x - \frac{sen0.x^2}{2!} - \frac{cos0.x^3}{3!} + \frac{sen0.x^4}{4!} + \frac{cos0.x^5}{5!} - \frac{sen0.x^6}{6!} - \frac{cos0.x^7}{7!}$$

$$+ \frac{sen0.x^8}{8!} + \cdots = 0 + x - 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} - 0 - \frac{x^7}{7!} + 0 \ldots,$$

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots$$

Veja que: todos os termos que possuem $sen\,0$ serão anulados; os termos diferentes de zero vão alternando entre os sinais positivo e negativo e seguindo o padrão com expoentes ímpares, então chega-se à equação (2):

$$f(x) = sen\,x = \sum_{0}^{n} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

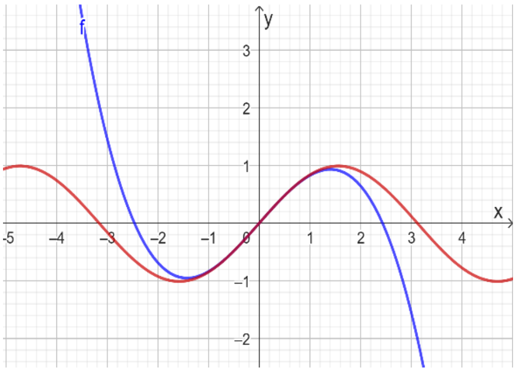
Para $f(x) = cosx$ não se fará o desenvolvimento, dando apenas o resultado já exibido da série de potencias para esta função (equação (3)) em torno do ponto $x_0 = 0$. Veja:

$$f(x) = cos\,x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots = \sum_{0}^{n} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

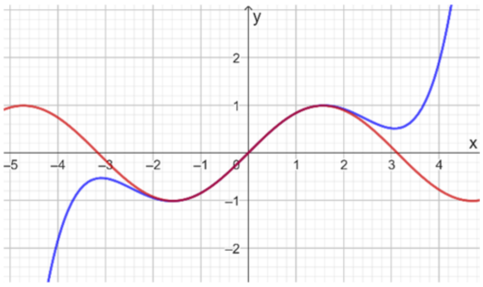
Observa-se que, o polinômio Taylor da função $f: R \to R\ com\ f(x) = senx$ consegue aproximar seus valores aos da imagem da função f, por exemplo, em torno do ponto $x_0 = 0$, comparando o gráfico de $f(x) = senx$ com o da função polinomial correspondente aos polinômios de Taylor de grau III, V, VII e IX:

Gráfico 3 – polinômios de III, IV, VII e IX e seus respectivos gráficos

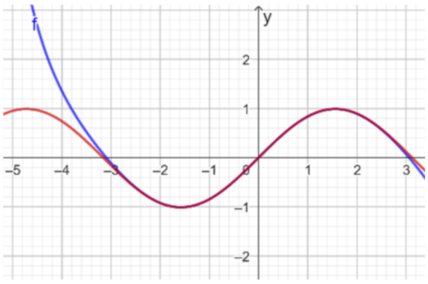
1º- para $P(x) = x - \frac{x^3}{3!}$



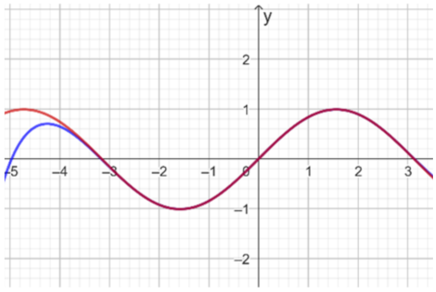
2º- para $P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$



3º- para $P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$



4º- para $P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$



Fonte: Autoria própria.

Quanto mais aumentamos o grau do polinômio mais seu gráfico se aproxima do gráfico da função seno. Na verdade, quando n tende ao infinito, para a função seno, o gráfico do polinômio corresponde exatamente ao da função.

2.3 SURGIMENTO DAS TABELAS TRIGONOMÉTRICAS

Uma das importantes aplicações da série de Taylor é a construção das tabelas trigonométricas. O livro didático desenvolve valores de seno, cosseno e tangente a partir do conhecimento de arcos notáveis e a partir desses arcos, usa as transformações trigonométricas para obter valores de arcos não notáveis bem como os valores das funções seno, cosseno e tangente correspondentes aqueles arcos.

A série de Taylor não necessita desses arcos notáveis, pois a transformações de funções transcendentes em funções polinomiais podem ser utilizadas para obter tabelas trigonométricas ou outras tabelas de inúmeras outras funções, como por exemplo, as de logarítmicos.
O observe as funções a seguir,

$$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots$$

Para obter a tábua trigonométrica do seno, a variável x representa o valor em radiano. Como um radiano ou x=1, representa um Ângulo de 57º, pode-se obter o valor desse Ângulo, sem no entanto, fazer uma relação do o ângulo notável como se observa a nível básico. Assim, pode-se calcular:

$$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = sen1 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} -= 0{,}84166 \ldots$$

Esse valor corresponde ao seno do ângulo de 57º. Dessa maneira, pode-se obter a tabela trigonométrica para o $sen\,x$. De modo análogo, pode-se obter as outras tabelas de funções cosseno e tangente. A Tabela 3, mostra os valores dos ângulos obtidos a partir da série de Taylor. Para obter a tabela 3, usa-se uma regra de três, pois 1 rad corresponde a um ângulo de 57º. Logo, $1º = \frac{1}{57}$, $2º = \frac{2}{57}$, assim sucessivamente. Dessa maneira é possível obter as tabelas trigonométricas. Para valores de radianos pequenos, basta truncar a série até o primeiro termo.

$$senx = x = \frac{1}{57} = 0{,}0175$$

Tabela 2- valores de seno, cosseno e tangente de 1º a 5º

A. GRAUS (º)	SENO	COSSENO	TANGENTE
1	0,00173	0,9998	0,0175
2	0,0349	0,9994	0,0349
3	0,0523	0,9986	0,0524
4	0,0698	0,9976	0,0699
5	0,0872	0,9962	0,0875

Fonte: Autoria própria.

Assim são obtidas as tábuas trigonométricas com a utilização da série de Taylor. Essa técnica representa um excelente exercício para que o professor compreenda os caminhos que a série de Taylor possui para atingir valores de funções que não sejam de arcos notáveis.

2.4 FÓRMULA DE EULER PARA SENO E COSSENO

Para chegar a identidade de Euler, serão feitas algumas considerações:

1º- A série de Taylor para a função exponencial $f: R \to R, com\ f(x) = e^x$ em torno do ponto $x_0 = 0$ é, como mostrado na equação (1):

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \ldots$$

2º - considerando o valor $x = 1$ na equação (1) tem-se:

$$e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad (31)$$

Aqui não se fará o desenvolvimento da série de Taylor para e^x por ser algo simples. É só lembrar que a derivada de função exponencial $f(x) = e^x$ é $f'(x) = e^x$. Da mesma forma as próximas derivadas, portanto $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots f^{(n)}(x) = e^x$.

Baseado no Teorema da Série de Taylor será feito o desenvolvimento:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} \ldots \qquad (32)$$

E pode-se considerar, para $z = e^{iy}\ com\ y \in R$, o seguinte desenvolvimento:

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} \ldots,$$

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!} = 1 + iy + \frac{i^2y^2}{2!} + \frac{i^3y^3}{3!} + \frac{i^4y^4}{4!} + \frac{i^5y^5}{5!} + \frac{i^6y^6}{6!} + \frac{i^7y^7}{7!} + \frac{i^8y^8}{8!} \ldots \qquad (33)$$

Como sabe-se que $i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i,\ i^6 = -1,\ i^7 = -i,\ i^8 = 1$, e assim por diante. Então tem-se na equação (33):

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - i\frac{y^7}{7!} + \frac{y^8}{8!} + i\frac{y^9}{9!} \ldots \qquad (34)$$

Reorganizando a série da equação (34), agrupando separadamente os termos que não possuem i dos termos que possuem i, ficando assim:

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} + \cdots + iy - i\frac{y^3}{3!} + i\frac{x^5}{5} - i\frac{y^7}{7!} + i\frac{y^9}{9!} \ldots$$

Com i em evidência:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} \ldots + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{x^5}{5} - \frac{y^7}{7!} + \frac{y^9}{9!} \ldots\right) \qquad (35)$$

Essas séries que foram agrupadas na equação (35) correspondem a série da função cosseno e da função seno, portanto:

$$e^{yi} = cosy + iseny$$

E assim se chega à equação (7). Veja ainda o seguinte: se for considerado um valor negativo, como -y, tem-se:

$$e^{-yi} = cos(-y) + isen(-y)$$

Como se sabe que $cos(-y) = cosy$ e $sen(-y) = -seny$, pode ser feito ainda:

$$e^{-yi} = cosy - iseny \tag{36}$$

Somando a equação (7) com (36) tem-se:

$$e^{yi} + e^{-yi} = 2cosy$$

Logo

$$cosy = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2} \tag{37}$$

Agora multiplicando a equação (36) por -1 tem-se:

$$-e^{-yi} = -cosy + iseny \tag{38}$$

Somando a equação (7) com (38):

$$e^{yi} - e^{-yi} = 2iseny\,,$$

$$seny = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i} \tag{39}$$

As equações (7), (36), (37) e (39) são as fórmulas de Euler que relacionam seno e cosseno e é a partir delas que irá ser deduzido as relações trigonométricas que será feito no próximo capítulo (ÁVILA, 2008).

2.5 TRANFORMAÇÕES TRIGONOMETRICAS A PARTIR DAS FÓRMULAS DE EULER.

A seguir são feitas as deduções de cada uma das fórmulas de transformações trigonométricas a partir das fórmulas de Euler. Poderia ter-se deduzido apenas a fórmula do cosseno da soma e a partir dela se chegar as outras. Mas o objetivo é justamente mostrar que, usando as fórmulas de Euler é possível se chegar a cada uma das fórmulas de transformações trigonométricas. Mostrando assim mais utilidade para as fórmulas de Euler, inclusive nessa parte da trigonometria

Nesse caso, serão consideradas nesse tópico duas vertentes, a primeira condiz com demonstrações de relações trigonométricas, baseando em dois livros (IEZZI, 1978,2010). A tabela 2 a seguir ilustram os resultados obtidos com os desenvolvimentos das fórmulas com se observa a tab**e**la 3.

Tabela 3 - Transformações trigonométricas

Transformação	Fórmula	Critério de solução Nível superior
$Sen\ (a+b)$	$\boldsymbol{sen\,a\cos b + sen\,b\cos a}$	Fórmula de Euler
$Sen(a-b)$	$\boldsymbol{sen\,a\cos b - sen\,b\cos a}$	Fórmula de Euler
$Cos(\ a+b)$	$\boldsymbol{cosacosb - senasenb}$	Fórmula de Euler
$Cos(a-b)$	$\boldsymbol{\cos a\cos b + \sin a\sin b}$	Fórmula de Euler
$Sen(2a)$	$\boldsymbol{2\,sen\,a\cos a}$	Fórmula de Euler
$Cos(2a)$	$\boldsymbol{cos^2 a - sen^2 a}$	Fórmula de Euler
$Sen(a/2)$	$\boldsymbol{\pm\sqrt{1-\cos a/2}}$	Fórmula de Euler
$Cos(a/2)$	$\boldsymbol{\pm\sqrt{1+\cos a/2}}$	Fórmula de Euler
$tg(a+b)$	$\boldsymbol{\tan a + \tan b/1 - tga.tgb}$	Fórmula de Euler
$tg(a-b)$	$\boldsymbol{\tan a - \tan b/1 + tga.tgb}$	Fórmula de Euler
$Tg(2a)$	$\boldsymbol{2\tan a/1 - tg^2 a}$	Fórmula de Euler

Fonte: Autoria própria.

- **Mostrar que $\boldsymbol{sen(a+b) = sen\,a\cos b + sen\,b\cos a}$**

Demonstração: da equação (39) tem-se:

$$senx = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

Então, para essa soma de arcos, ocorre o seguinte:

$$sen(a+b) = \frac{e^{(a+b)i} - e^{-(a+b)i}}{2i} = \frac{e^{ai}e^{bi} - e^{-ai}e^{-bi}}{2i}$$

Usando as equações (7) e (36) nesta última expressão:

$$\frac{e^{ai}e^{bi} - e^{-ai}e^{-bi}}{2i} = \frac{(cosa + isena)(cosb + isenb) - (cosa - isena)(cosb - isenb)}{2i},$$

$$\frac{cosacosb + isenbcosa + isenacosb - senasenb}{2i} +$$

$$\frac{-cosacosb + isenbcosa + isenacosb + senasenb}{2i}$$

Eliminando os termos destacados ficará assim:

$$sen(a+b) = \frac{2isenacosb + 2isenbcosa}{2i} = senacosb + senbcosa$$

Para o resta das deduções veja apêndice A.

3.1 TRANSFORMAÇOES TRIGONOMETRICAS DEDUZIDAS COM BASE NO VOL. 3

Neste capítulo será feito as deduções das transformações trigonométricas baseadas em um livro didático e no volume 3 da coleção Fundamentos de Matemática Elementar (IEZZI, 1978, 2010) a fim de se ver como essas deduções eram feitas em livros voltados para a educação básica.

- **O cosseno da soma.**

Considere-se os pontos P, Q e R sobre o ciclo trigonométrico, de raio igual a 1, associados aos números a, a+b e -b, respectivamente. Os arcos $\widehat{AQ}$ e $\widehat{RP}$ possuem a mesma medida, logo o comprimento das cordas $\overline{AQ}$ e $\overline{RP}$ são também iguais, ou pode-se dizer também que a distância entre os pontos A e Q é igual a distância entre R e P. E seja também o ponto A de coordenadas $(0,1)$. Sendo o sistema de coordenadas cartesianas uOv, então os pontos serão:

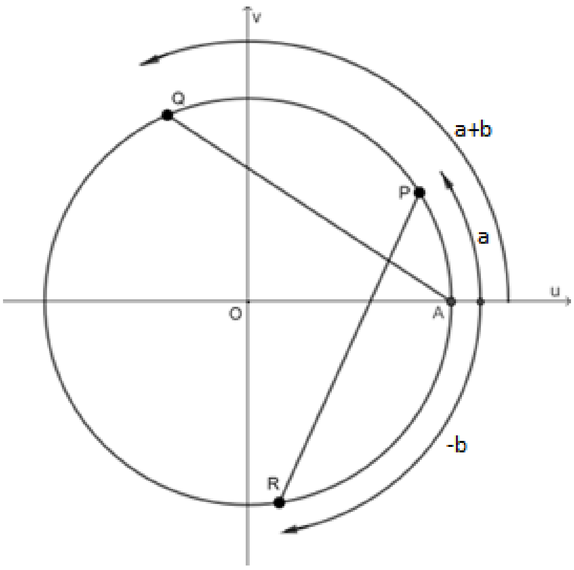
$A(0,1)$

$P(cos\, a\,, sen\, a)$

$Q(cos(a+b)\,, sin(a+b))$

$R(cos(-b)\,, sin(-b)) = R(cos\, b\,, -sin\, b)$

Figura 1- ciclo trigonométrico com cordas traçadas e pontos marcados



Fonte: Autoria própria.

Lembre-se que $sen(-b) = -sen\, b$ e que $cos(-b) = cos\, b$.

Usando a fórmula da distância entre dois pontos tem-se:

$$d_{AQ} = \sqrt{\left(x_Q - x_A\right)^2 + \left(y_Q - y_A\right)^2} = \sqrt{(cos(a+b) - 1)^2 + (sen(a+b) - 0)^2}\,,$$

$$d_{AQ} = \sqrt{cos^2(a+b) - 2\,cos(a+b) + 1 + sen^2(a+b)}\,,$$

$$d_{AQ} = \sqrt{2 - 2cos\,(a+b)}$$

Agora para P e R tem-se:

$$d_{RP} = \sqrt{(x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2}\,,$$

$$d_{RP} = \sqrt{(cos\, a - cos(-b))^2 + (sen\, a - sen(-b))^2}\,,$$

$$d_{RP} = \sqrt{(cos\, a - cos\, b)^2 + (sen\, a + sen\, b)^2}\ ,$$

$$d_{RP} = \sqrt{cos^2 a - 2cosacosb + cos^2 + sen^2 a + 2senasenb + sen^2 b}\ ,$$

$$d_{RP} = \sqrt{2 - 2cosacosb + 2senasenb}$$

Como:

$$d_{AQ} = d_{RP}$$

$$2 - 2\, cos(a + b) = 2 - 2cosacosb + 2senasenb \Rightarrow cos(a + b)$$

$$= cosacosb - senasenb\ ,$$

$$cos(a + b) = cosacosb - senasenb \tag{40}$$

A partir da fórmula da equação (40), e para ficar mais fácil, pode-se deduzir as outras fórmulas. Para o resta das deduções veja apêndice B.

3 HABILIDADES E COMPETENCIAS SEGUNDO A BNCC E APLICABILIDADES DAS SÉRIES PARA O ENSINO BÁSICO

3.1 HABILIDADES E COMPETENCIAS SEGUNDO A BNCC

A BNCC, que é: “é um documento normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da educação básica” (MEC, 2018); na etapa do ensino médio, na área de Matemática e suas tecnologias, trata claramente das funções seno e cosseno e dos fenômenos periódicos, como pode-se ver na competência específica 3 e habilidade EM13MAT306.

- **Competência específica 3**

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

Foi feito referência apenas a competência específica 3 de Matemática e suas Tecnologias com a habilidade EM13MAT306 relacionada a ela porque é só nessa competência e sua respectiva habilidade que se faz referência ao uso das funções seno e cosseno e dos fenômenos periódicos.

Os problemas têm de ser contextualizados, podendo ou não vir explicito no problema os conhecimentos matemáticos que serão utilizados. nesse sentido o estudante tem ainda que ser capaz de identificar o problema e os conhecimentos matemáticos necessários para resolvê-lo em variados contextos. “Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas” (MEC, 2018)

Uma coisa a se notar na BNCC para o Ensino Médio na área de Matemática e suas Tecnologias é que na habilidade EM13MAT306 não se diz para fazer modelagens utilizando as funções trigonométricas, mas sim para resolver e elaborar problemas que envolvam esses conhecimentos. Na competência específica 5 de matemática se destaca a importância do estudante identificar padrões, que é algo existente nos fenômenos periódicos e que ajudará os alunos a identificarem os contextos onde esses conhecimentos das funções seno e cosseno possam ser empregados, podendo usar aplicativos de álgebra e geometria para ajudar na busca da solução.

O estudante tem também de se tornar capaz de interpretar os resultados, comunicá-los aos colegas e fazer a argumentação necessária na defesa desses resultados. Então esse aprendizado já não pode ser mais vazio de significado, baseado na simples memorização de procedimentos matemáticos e desconectado da realidade.

A BNCC diz para fazer modelagem para problemas que envolvam as funções polinomiais de 1º e 2º graus. Ao se ler as cinco competências especificas para a área de matemática e suas tecnologias verifica-se que todas são mobilizadas na hora de resolver problemas, como os de fenômenos periódicos. Parece um pouco confuso, pois na competência especifica 3, onde a habilidade EM13MAT306 está inserida se diz claramente para o aluno ser capaz de fazer modelagens, na verdade quando o aluno fizer as modelagens com as funções polinomiais de 1º e 2º graus , ele terá, de fato, competência para fazer modelagens na área de matemática, mas a habilidade para fazer modelagens com funções seno e cosseno (ou seja, ter feito, e aprendido, de fato as modelagens precisamente com essas funções) não é exigido. É por esse motivo que não se fará modelagens com essas funções aqui nesse trabalho. (MEC, 2018)

3.2 OS FENÔMENOS PERÍODICOS OBSERVADOS NA NATUREZA

Os Movimentos periódicos são presentes na natureza e em situações do dia a dia como: o movimento dos planetas em orbitas elípticas em torno do Sol; da Lua, com suas fases, em torno da terra; o movimento de rotação da terra; rodas gigantes de parques de diversões; no movimento dos pistões de um motor a combustão; cada elétron, em torno do núcleo atômico, descreve uma orbita elíptica, implicando isso em um período e frequências próprias; as ondas de luz e de som, com suas propriedades de refração, reflexão, difração, ressonância, efeito do doppler, são fenômenos periódicos estudados, compreendidos e explicados com o auxílio de funções seno e cosseno e tem aplicações em áreas como medicina, infravermelho, construção de instrumentos sonoros; Ondas de rádio usadas em telecomunicações.

O estudo do movimento harmônico simples permitiu a construção dos relógios de pêndulo, que foram muito importantes como instrumentos de medição do tempo; está presente em situações como: gangorras, balanços, colchoes de mola, em molas;

As equações de muitos desses movimentos periódicos são diferenciais de segunda ordem, o que tornava seu estudo inviável para o nível do Ensino Médio. Porém há situações em que é possível se fazer aproximações fundamentadas matematicamente no polinômio de Taylor, e assim tornar a equação muito mais simples e acessível para estudantes desse nível.

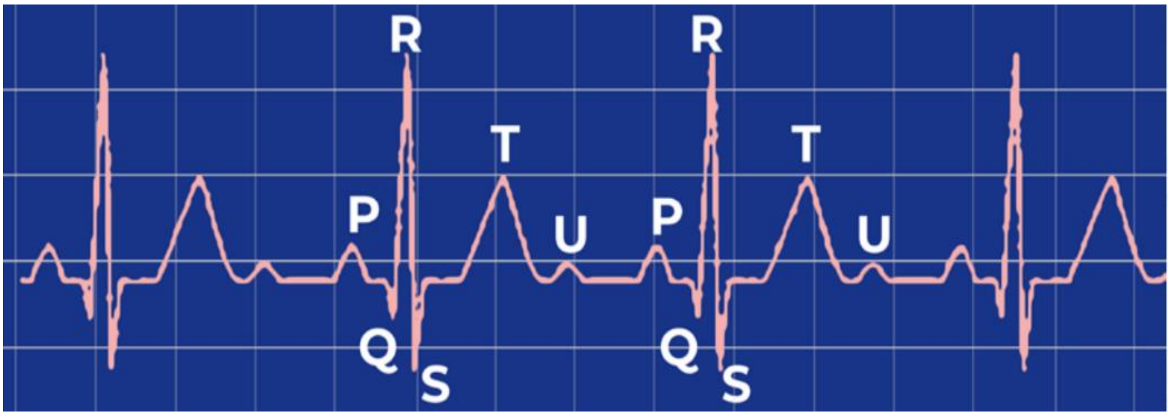
3.3 AS APLICABILIDADES DAS FUMÇÕES TRIONOMETRICA E DAS SÉRIES NO ENSINO BÁSICO

2.1.1 O eletrocardiograma.

O eletrocardiograma (também conhecido como ECG) é um exame médico rotineiro que analisa a presença de anomalias relacionadas à atividade elétrica do músculo cardíaco. Por meio do registro do exame de ECG, são mostrados impulsos elétricos do coração na forma de gráficos com ondas positivas e negativas dentro de um quadriculado específico.

Como o coração de uma pessoa bate (em certas condições), mais ou menos em um mesmo ritmo, uma batida completa em um intervalo de tempo praticamente igual, com uma intensidade de pulsos elétricos praticamente iguais, então podemos esperar uma boa regularidade nas ondas produzidas ao se examinar o coração de uma pessoa normal; vale ressaltar que estão representadas vários tipos de onda em um mesmo trecho de um eletrocardiograma, são elas: P, Q, R, S, T e U, e esse é um dos motivos de não se ver nele uma representação de onda tão perfeita como de uma função seno (MORSCH, 2019).

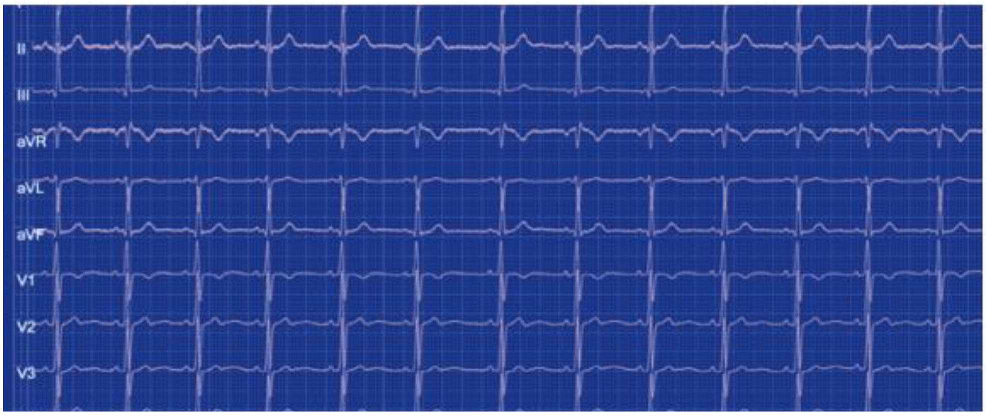
Figura 2- Como se apresentam as ondas P, Q, R, S, T e U em um eletrocardiograma.



Fonte: MORSCH. Telemedicina Morsch, 2019. **Guia básico de Eletrocardiografia**. Disponível em: https//telemedicinamorsch.com.br/materiais-gratuitos. Acesso em: 03 jul. 2023.

Observa-se a seguir como é o bastante padronizado o formato das ondas produzidas no eletrocardiograma de uma pessoa saudável.

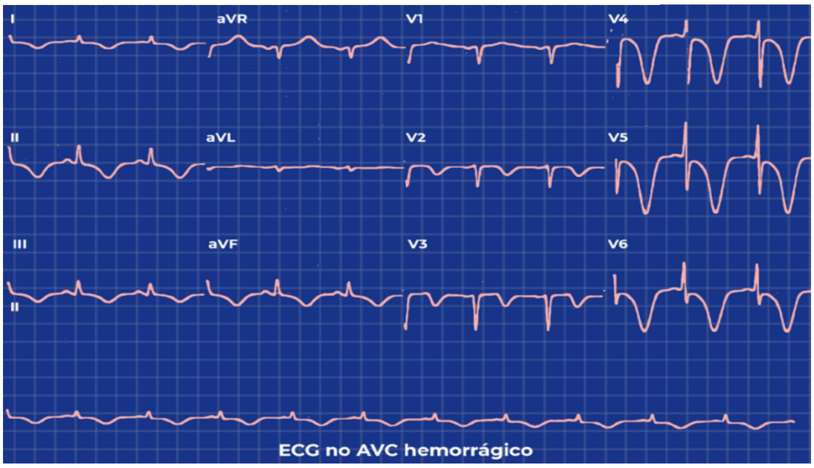
figura 3- Eletrocardiograma de uma pessoa saudável.



Fonte: MORSCH. Telemedicina Morsch, 2019. **Guia básico de Eletrocardiografia**. Disponível em; https//telemedicinamorsch.com.br/materiais-gratuitos. Acesso em: 03 jul. 2023.

É claro que de um pico de uma onda para outra não se tem uma situação perfeitamente igual, mas pode ser visto que se trata de um fenômeno periódico, com bastante regularidade e é com um bom conhecimento dessa regularidade (ex.: como a altura que a onda R atinge, a variação de espaço, mesmo que de poucos milímetros, de uma onda para outra) que o médico vai observar as alterações, que de acordo com a medicina, vão indicar determinado tipo de problema de saúde. Ve-se então o quanto é importante ter conhecimento da regularidade e um fenômeno periódico. Na verdade, aqui nesse caso é de fundamental importância para o médico conhecer essa regularidade, esse padrão. Agora, na imagem a seguir, é possível ver o quanto está distante de um padrão o eletrocardiograma referente a um possível paciente com AVC hemorrágico (MORSCH, 2019). Habilidade mobilizada EM13MAT306.

Figura 4 - eletrocardiograma no AVC Hemorrágico

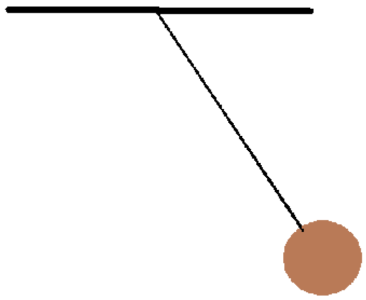


Fonte: MORSCH. Telemedicina Morsch, 2019. **Guia básico de Eletrocardiografia**. Disponível em; https//telemedicinamorsch.com.br/materiais-gratuitos. Acesso em: 03 jul. 2023.

2.1.2 Aplicações das séries ao Movimento Harmônico Simples do Pêndulo

A aplicação do polinômio de Teylor se dá também no cálculo do período de um pêndulo que executa um movimento harmônico simples (ou MHS).

Figura 6: pendulo



Fonte: Autoria própria.

Período de um movimento harmônico simples é calculado pela fórmula:

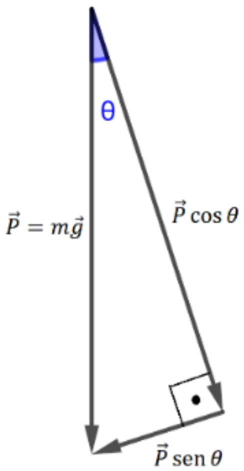
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{k}} \tag{41}$$

Onde T, da equação (41), representa o período de uma oscilação completa, m é a massa do corpo que executa o MHS, L é o comprimento fio, e k é uma constante que vem da fórmula a seguir (MARQUES, 2023):

$$F_x = -kx \tag{42}$$

Onde F_x é a força restauradora que vai devolver o corpo de massa m a sua posição de equilíbrio (posição em que a esfera de massa m da figura estaria se estivesse em repouso). Ao se observar a figura a força que está atuando para que isso ocorra é

figura 7- Decomposição vetorial da força peso atuante na esfera do pêndulo simples.



Fonte: Autoria própria.

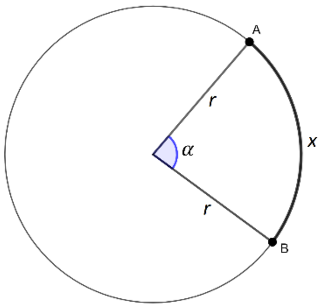
$$F = -P\,sen\,\theta = -mg\,sen\,\theta \tag{43}$$

Obs.: Essa expressão para equação (43) foi conseguida fazendo-se uma simples decomposição vetorial do vetor peso na direção tangente ao movimento que a esfera executa como se vê na figura 7, onde g é a aceleração da gravidade local.

Sabe-se da trigonometria que em uma circunferência de raio r, a medida de um ângulo central α, como da figura 8, é dado ângulo por:

$$\alpha = \frac{x}{r}$$

Figura 8 - circunferência com ângulo central α.



Fonte: Autoria própria.

Logo para este caso, como se vê nessa figura, tem-se $sen\,\theta = sen\frac{x}{L}$, e substituindo esse valor na equação (43)

$$F = -mg\,sen\frac{x}{L} \tag{44}$$

Para obter o polinômio de Taylor de ordem I, ou ainda, a linearização de $y = sen\frac{x}{L}$, em torno de $x_0 = 0$, pode-se usar a equação (14).

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Sendo

$$f(x_0) = sen\frac{0}{L} = 0 \quad e \quad f'(x_0) = cos\frac{0}{L} = 1,$$

$$P_1(x) = 0 + 1.\frac{1}{L}(x - 0) = \frac{x}{L}$$

Portanto, em vez de usar $sen\frac{x}{L}$, pode-se usar apenas $\frac{x}{L}$, que é a nossa aproximação pelo polinômio de Taylor, sendo que se considera a variação do ângulo pequena, de $0^o < \theta < 3^o$ no máximo. Agora substituindo $sen\frac{x}{L}$ por $\frac{x}{L}$ na equação (44) tem-se:

$$F = -mg\frac{x}{L} \Rightarrow F = -\frac{mg}{L}x$$

Então a constante referida na equação (42) vale $\frac{mg}{L}$. Agora substituindo-se este valor da constante na equação (41) tem-se:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{L}}},$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

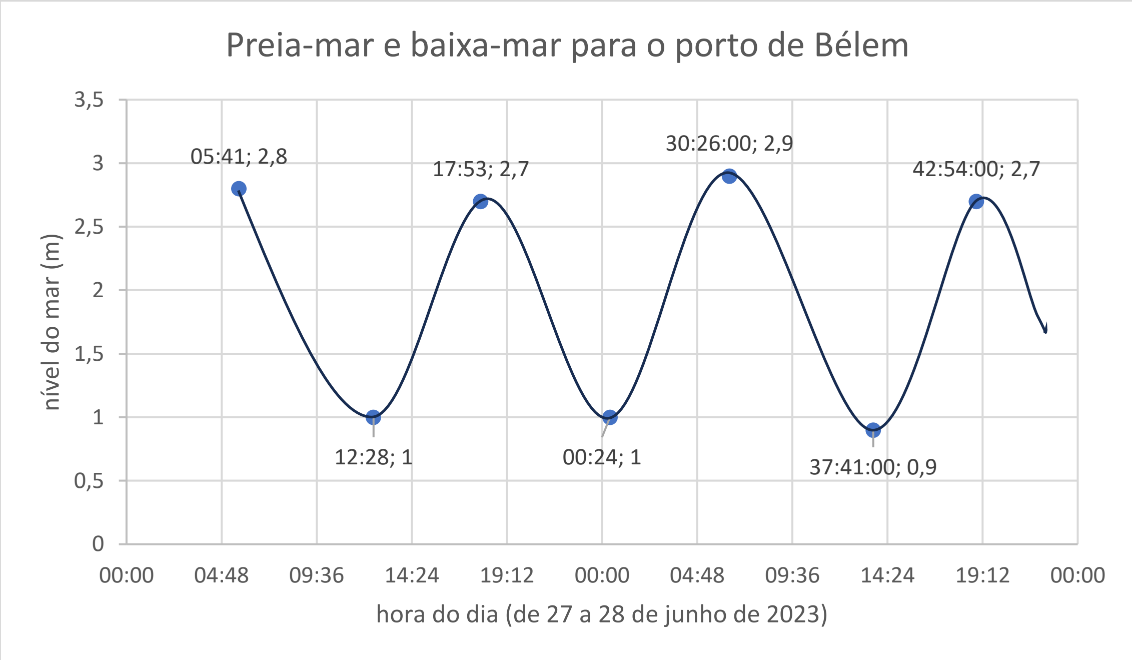
Que é a equação do período de um pêndulo em MHS. Portanto a expansão da função seno, truncada num polinômio de 1º grau, foi relevante para simplificar a fórmula de cálculo do período do pêndulo.

2.1.3 Fenômeno das marés.

Um fenômeno periódico muito importante para pessoas que moram em regiões ribeirinhas da Amazônia, no litoral ou próximas do litoral, as margens de rios, são as marés. A vida de muitas pessoas é influenciada por esse fenômeno. Há atividades turísticas que só são possíveis com marés baixas. O surfe é mais bem praticado com maré baixa, as ondas são melhores. A pesca é geralmente melhor na maré alta por haver maior movimentação de peixes. Na região amazônica é muito utilizado o transporte de pessoas e mercadorias pelos rios e há situações em que isso só é possível por rios e igarapés com maré alta.

Quando alguém está em uma praia é fácil perceber que o nível do mar varia de a cordo com o passar das horas, isso ocorre devido as marés, que é a elevação e diminuição do nível do mar devido a forças gravitacionais exercidas, para essa situação, principalmente pela Lua, por estar mais próxima da Terra, e pelo Sol sobre a Terra, além de outros fatores que também influenciam. O período (tempo decorrido) entre duas mares altas é de aproximadamente de 12 horas e 25 minutos, podendo variar poucos minutos para mais ou para menos. A seguir é apresentado um gráfico relacionando a altura do nível do mar com a hora do dia (DANTE, 2020).

gráfico 4- Marés para Belém entre os dias 27 e 28 de junho de 2023.



Fonte: Autoria própria.

O gráfico 4 foi feito com base nos dados disponibilizados no site da Marinha do Brasil apenas para as preia-mares e baixa-mares, no caso, os pontos em azul. A linha que une os pontos foi acrescentada sem precisão matemática e apenas para destacar o quanto o gráfico desse fenômeno de sobe e desce do nível do mar pode ser comparado com o de uma função seno ou cosseno. Há variações entre as alturas atingidas na preia-mar (quando atine a maior altura) e na baixa-mar (quando atine a menor altura) e, portanto, na amplitude da maré (diferença entre as consecutivas preia-mares e baixa-mares).

Além de, como foi dito, variações no período. Os próprios alunos do ensino médio podem tomar esse exemplo e, com os dados disponíveis no site da Marinha do Brasil para as marés, construir o seu próprio gráfico usando o programa Word da Microsoft, indo na opção **inserir**, **gráfico,** e escolher o modelo: **dispersão com linhas suaves e marcadores**, esse gráfico não será perfeito, mas se aproximará da situação real. Habilidades desenvolvidas: EM13MAT101 e EM13MAT306.

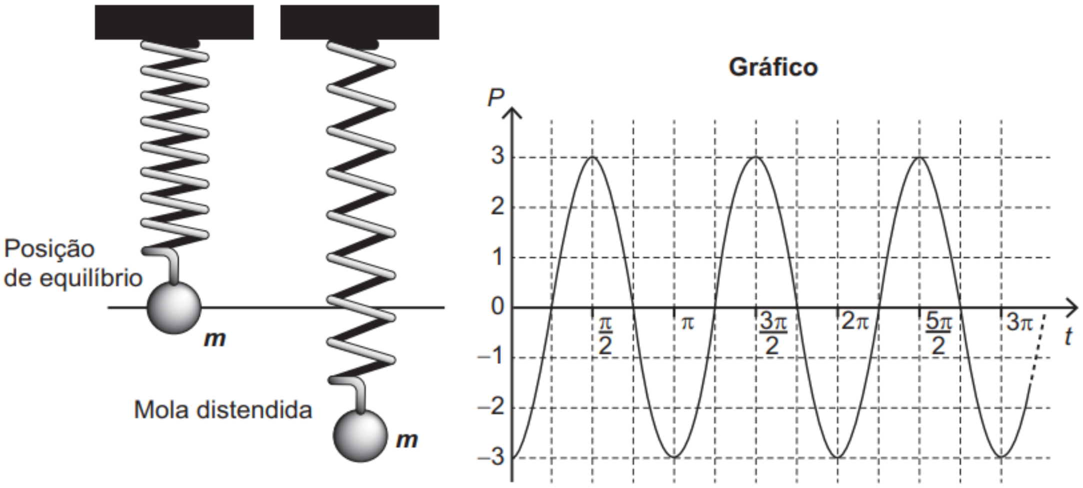
2.1.4 Movimento periódico de um sistema massa-mola

Uma mola é solta da posição distendida conforme a figura. A figura a direita representa o gráfico da posição P (em cm) da massa m em função do tempo t (em segundo) em um sistema de coordenadas cartesianas. Esse movimento periódico é descrito por uma expressão do tipo

$P(t) = \pm Acos(\omega t)$ ou $P(t) = \pm Asen(\omega t)$ em que $A > 0$ é a amplitude de deslocamento máximo e ω é a frequência, que se relaciona com o período T pela fórmula $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Considere a ausência de quaisquer forças dissipativas.

Figura 9- sistema massa-mola e gráfico do respectivo deslocamento da massa.



Fonte: PROVAS e Gabaritos. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira | Inep. Disponível em: https//www.gov.br. acesso em: 03 jun. 2023.

A expressão algébrica que representa as posições $P(t)$ da massa m, ao longo do tempo,

Resolução:

Como o movimento é periódico e é regido por uma expressão do tipo:

$$P(t) = \pm Acos(\omega t) \text{ ou } \quad P(t) = \pm Asen(\omega t)$$

Pode-se considerar que: ao observar o gráfico percebe-se que: a amplitude máxima é 3

$$A = 3cm$$

E que quando t = 0 tem-se $P(t) = -3$. Como são 4 expressões (duas positivas e duas negativas), pode ocorrer uma das situações:

$$P(t) = +Acos(\omega t) = 3cos(\omega.0) = 3cos0 = 3.1 = 3$$

$$P(t) = -Acos(\omega t) = -3\,cos(\omega.0) = -3.1 = -3$$

$$P(t) = +Asen(\omega t) = +3sen(\omega.0) = 3sen0 = 3.0 = 0$$

$$P(t) = -Asen(\omega t) = -3sen(\omega.0) = -3.sen0 = -3.0 = 0$$

A única expressão que deu o resultado correto para t = 0 foi a segunda.

Agora, como:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{45}$$

E o período do movimento, ao se observar o gráfico, é de π, logo substituindo T por π em (45) tem-se que:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\pi} \Rightarrow \omega = 2$$

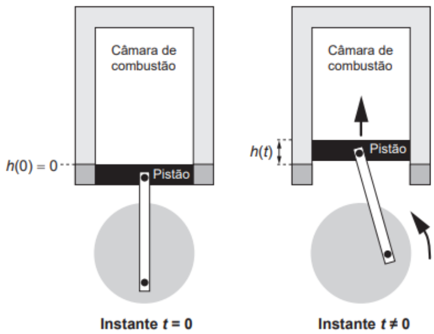
Agora substituindo $\omega = 2$ em tem-se

$$P(t) = -3cos(2t)$$

3.3.1 Motor a combustão

Na construção de um motor que deverá atender as necessidades de um determinado veículo, e para o qual o esquema de movimentação vertical do pistão em sua câmara de combustão é representado na figura 9.

Figura 10- esquema simplificado de pistões em suas câmaras de combustão.



Fonte: PROVAS e Gabaritos. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira | Inep. Disponível em: https//www.gov.br. Acesso em: 03 jun. 2023.

A função $h(t) = 4 + 4\,sen\left(\frac{3t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ definida para $t \geq 0$. Descreve como varia a altura h, medida em centímetro, da parte superior do pistão dentro da câmara de combustão, em função do tempo t medido em segundo. Nas figuras estão indicadas as alturas dos pistões em dois instantes distintos. Qual será a altura da parte superior do pistão no instante t= π segundos.

Resolução: Como t = π segundos e substituindo esse valor na equação dada obtém-se:

$$h(t) = 4 + 4\,sen\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow h(t) = 4 + 4\,sen\left(\frac{2\pi}{2}\right)$$

$$h(t) = 4 + 4\,sen(\pi)$$

como seno de π vale zero, logo:

$$h(t) = 4 + 4.0 \Longrightarrow h(t) = 4 + 0 \Longrightarrow h(t) = 4$$

Então a altura da parte superior do pistão é de 4 cm. Esse é um exemplo de aplicação da função seno em uma situação pratica vivenciada pela indústria automobilística; mais uma vez leva a perceber o quanto a matemática é importante para o desenvolvimento tecnológico e no mundo do trabalho.

CONCLUSÃO

Verificou-se no capítulo 1 que trouxe como temática o aspecto histórico das contribuições dos matemáticos para o estudo das séries; quais foram os principais matemáticos que participaram do desenvolvimento da série de Taylor e a equação de Euller.

A descoberta de leis, axiomas e postulados não surgem por acaso. Foi preciso esforços e dedicação (pode-se citar Euler como exemplo disso) de um grupo de pessoas que com a pesquisa, conseguiram descobrir importantes resultados e esses resultados, podem ser úteis na interpretação de fenômenos e aplicações em diversas áreas conhecimento. O conhecimento que foi produzido precisou ser divulgado, compartilhado, para que, de fato, resultasse em maior desenvolvimento possível da matemática. Isso foi evidenciado no caso de John Collins, que desempenhou papel importante divulgando as ideias, e de James Gregory, que não teve a merecida valorização de seu trabalho.

O aspecto histórico é valorizado na introdução de conteúdos nos livros didáticos que foram utilizados nesse trabalho. Dessa maneira, a escolha do capítulo 1 não foi construído de maneira aleatória ou apenas para dar volume ao trabalho dissertativo e sim com intuito de assegurar o objetivo específico, visando a importância para inclusão no processo de ensino, tornando o conhecimento muito mais atrativo para os alunos diante da motivação e curiosidade que pode obter quando analisa como aconteceu as grandes descobertas e os resultados da pesquisa investigativa ou experimental pelos matemáticos.

Para o capítulo 2, abordou-se como temática o desenvolvimento e formalismo matemático das séries, a saber dedução das fórmulas de transformações trigonométricas a partir das fórmulas de Euler em comparação com o livro didático do ensino básico e habilidades e competências segundo a BNCC e aplicabilidades das séries no ensino básico. Foi possível mostrar, tomando como exemplo a função seno, que o polinômio de Taylor efetivamente consegue aproximar seus valores dos da função seno e, quanto mais se aumenta o grau desse polinômio melhor fica a aproximação em torno de um dado ponto. Conseguiu-se também deduzir as transformações trigonométricas a partir da equação de Euler contribuído assim para percepção de que essas transformações são todas validas nesse formalismo.

Apesar de o formalismo não corresponder a um conhecimento teórico a nível médio, no entanto deve ser abordado ao nível de uma dissertação de mestrado, pois o texto pode ser direcionado para leitura e servir para professores que pretendem estudar as séries e conhecer um pouco mais como obter as transformações trigonométrica por série de Taylor e identidade de Euler. Outra questão que foi verificado nesse capítulo foi considerar a série de Taylor mostrando como podem ser obtidas as tábuas trigonométricas uma vez que no ensino básico essa abordagem não realizada, pois seria preciso conhecer as expansões polinomiais. Nesse caso, verificou-se nesse contexto a forma como foi possível mostrar valores de seno para construção de tábuas trigonométricas. O mesmo critério de solução pode ser aplicado para cosseno, tangente utilizando a mesma analogia.

Portanto, constatou-se nesse capítulo a importância de utilizar a teoria que foi desenvolvida e compreender de maneira mais aprofundada o estudo da trigonometria, suas transformações construindo um paradigma entre os ensinos básico e superior.

O capítulo 3, tratou da BNCC e das aplicações a nível médio como contribuição para uma melhor compreensão do tema que foi abordado. Como a BNCC diz que o conhecimento deve ser contextualizado, desenvolvido com foco em habilidades e competências, a fim de que a teoria tenha um sentido amplo e um significado crucial para o aluno. Essa aplicabilidade deve trazer um sentido, uma motivação e um acervo de curiosidade ao ponto de fazer que o aluno compreenda a natureza, os fenômenos que observa no cotidiano e a partir de um conhecimento teórico e abordado no contexto educacional, seja capaz de associar com o cotidiano, construindo um elo entre a teoria e a prática. Foram dados os exemplos, tanto de aplicação do polinômio de Taylor, para obter de forma mais simples a fórmula de cálculo do período do pêndulo simples, ressaltando a importância desse polinômio para a matemática, como de aplicação da função seno a fenômenos periódicos, estes últimos a fim de atender as exigências da BNCC.

Espera-se ter alcançado, diante de cada pessoa que venha ler este trabalho, os objetivos propostos, e assim contribuir para que professores da educação básica tenham uma visão das funções seno e cosseno a partir do polinômio de Taylor e fórmula de Euler, das transformações e tabelas trigonométricas.

APENDICE A: DEMOSTRAÇAO DAS RELAÇÕES TRIGONOMETRICAS PELA FÓRMULA DE EULER.

- **Mostrar que:** $\boldsymbol{sen^2x + cos^2x = 1}$

Demonstração: elevando as equações (39) e (37) ao quadrado tem-se:

Somando as duas últimas igualdades obtém-se:

$$sen^2x = \left(\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}\right)^2 \qquad cos^2x = \left(\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}\right)^2$$

$$sen^2x + cos^2x = \left(\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}\right)^2,$$

$$sen^2x + cos^2x = \frac{e^{2xi} - 2e^{xi}e^{-xi} + e^{-2xi}}{4i^2} + \frac{e^{2xi} + 2e^{xi}e^{-xi} + e^{-2xi}}{4},$$

$$sen^2x + cos^2x = \frac{-e^{2xi} + 2e^{xi}e^{-xi} - e^{-2xi} + e^{2xi} + 2e^{xi}e^{-xi} + e^{-2xi}}{4}$$

Eliminando-se as partes simétricas e somando as semelhantes chega-se:

$$sen^2x + cos^2x = \frac{4e^{2xi}e^{-2xi}}{4} \Rightarrow sen^2x + cos^2x = 1$$

- **Mostrar que** $\boldsymbol{cos(a+b) = cosacosb - senasenb.}$

Demonstração; da equação (37) tem-se:

$$cosx = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

logo:

$$cos(a+b) = \frac{e^{(a+b)i} + e^{-(a+b)i}}{2} = \frac{e^{ai}e^{bi} + e^{-ai}e^{-bi}}{2}$$

Dessa vez irá ser acrescentado $e^{ai}e^{-bi} - e^{ai}e^{-bi}$ a expressão:

$$cos(a+b) = \frac{e^{ai}e^{bi} + e^{-ai}e^{-bi} + e^{ai}e^{-bi} - e^{ai}e^{-bi}}{2}$$

Fazendo o agrupamento dos termos destacados:

$$cos(a+b) = \frac{e^{ai}\left(e^{bi} + e^{-bi}\right)}{2} - \frac{e^{-bi}\left(e^{ai} - e^{-ai}\right)}{2}$$

nesta última expressão há, de acordo com as equações (37) e (39), a expressão do cosseno e, com um pequeno ajuste, do seno. Portanto:

$$cos(a+b) = e^{ai}\frac{\left(e^{bi} + e^{-bi}\right)}{2} - e^{-bi}\frac{\left(e^{ai} - e^{-ai}\right)i}{2i} = e^{ai}cosb - ie^{-bi}sena$$

Usando as equações (7) e (36) na última parte da igualdade acima:

$$cos(a+b) = (cosa + isena)cosb - i(cosb - isenb)sena$$

$$cos(a+b) = cosacosb + isenacosb - isenacosb - senasenb$$

$$cos(a+b) = cosacosb - senasenb$$

- **Mostrar que** $\boldsymbol{sen(a-b) = sen\,a\cos b - sen\,b\cos a.}$

Demonstração: da equação (39) tem-se:

$$senx = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

logo

$$sen(a-b) = \frac{e^{(a-b)i} - e^{-(a-b)i}}{2i} = \frac{e^{ai}e^{-bi} - e^{-ai}e^{bi}}{2i}$$

Usando (7) e (36) na equação acima tem-se:

$$sen(a-b) = \frac{(cos\, a + i\, sin\, a)\,(cos\, b - i\, sin\, b) - (cos\, a - i\, sin\, a)(cos\, b + i\, sin\, b)}{2i} =$$

$$sen(a-b) = \frac{cosacosb - isenbcosa + isenacosb + senasenb}{2i} +$$

$$\frac{-cosacosb - isenbcosa + isenacosb - \ senasenb}{2i}$$

Eliminando os termos semelhantes a equação ficará assim:

$$sen(a+b) = \frac{2i\, sen\, a\, cos\, b - 2i\, sen\, b\, cos\, a}{2i} = sen\, a\, cos\, b - sen\, b\, cos\, a$$

- **Mostrar que $\boldsymbol{cos(a-b) = cos\, a\, cos\, b + sin\, a\, sin\, b}$.**

Demonstração: da equação (37) tem-se:

$$cosx = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

logo:

$$cos(a-b) = \frac{e^{(a-b)i} + e^{-(a-b)i}}{2} = \frac{e^{ai}e^{-bi} + e^{-ai}e^{bi}}{2}$$

Usando as equações (7) e (36) na equação acima:

$$cos(a-b) = \frac{(cos\, a + i\, sen\, a)\,(cos\, b - i\, sen\, b) + (\, cos\, a - i\, sen\, a)(cos\, b + i\, sen\, b)}{2},$$

$$cos(a-b) = \frac{cosacosb - isenbcosa + isenacosb + senasenb +}{2}$$

$$\frac{cosacosb + isenbcosa - isenacosb + senasenb}{2}$$

Eliminando os termos destacados obtém-se:

$$cos(a-b) = cos\, a\, cos\, b - sin\, a\, sin\, b$$

- **Mostrar que $\boldsymbol{sen(2a) = 2\, sen\, a\, cos\, a}$.**

Demonstração: da equação (39) tem-se:

$$sen\, x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

Logo

$$sen(2a) = \frac{e^{2ai} - e^{-2ai}}{2i} = \frac{(e^{ai})^2 - (e^{-ai})^2}{2i} = \frac{(e^{ai} + e^{-ai}).\,(e^{ai} - e^{-ai})}{2i},$$

$$sen(2a) = \left(e^{ai} + e^{-ai}\right) sen\, a \qquad (45)$$

E como de (37) tem-se:

$$cos\,a = \frac{e^{ai} + e^{-ai}}{2} \Rightarrow e^{ai} + e^{-ai} = 2\,cos\,a$$

Logo, substituindo esta última expressão na equação (45):

$$sen\,2a = 2\,sen\,a\,cos\,a$$

- **Mostrar que $\boldsymbol{cos\,2a = cos^2 a - sen^2 a}$**

Demonstração: da equação 37 tem-se:

$$cosx = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

Logo

$$cos\,2a = \frac{e^{2ai} + e^{-2ai}}{2} = \frac{e^{2ai} + e^{-2ai} + 2e^{ai}e^{-2ai} - 2e^{2ai}e^{-2ai}}{2} = \frac{\left(e^{2ai} + e^{-2ai}\right)^2 - 2e^{2ai}e^{-2ai}}{2}$$

Multiplicando essa última parte da igualdade por $\frac{2}{2}$ tem-se:

$$cos2a = \frac{(e^{i} + e^{-xi})^2}{2} . \frac{2}{2} - \frac{2.1}{2} . \frac{2}{2} = \frac{(e^{2ai} + e^{-2ai})^2}{2^2} . 2 - 1 = 2cos^2 a - 1$$

Lembre-se que $e^{2ai}e^{-2ai} = 1$.

$$cos2a = 2cos^2 a - 1$$

Agora que já terminou a dedução, veja que pode ser mudado essa última expressão usando $sen^2 a + cos^2 a = 1$,

$$cos2a = 2cos^2 a - (sen^2 a + cos^2 a)\,,$$

$$cos2a = cos^2 a - sen^2 a$$

- **Mostrar que: $\boldsymbol{sen\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\,a}{2}}}$**
- Demonstração: Como da equação (39) tem-se:

$$sen\,x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \rightarrow sen\,\frac{a}{2} = \frac{e^{\frac{ai}{2}} - e^{-\frac{ai}{2}}}{2i}$$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado têm-se:

$$sen^2\frac{a}{2} = \frac{\left(e^{\frac{ai}{2}} - e^{-\frac{ai}{2}}\right)^2}{(2i)^2} = \frac{e^{ai} - 2.\,e^{\frac{ai}{2}}.\,e^{\frac{-ai}{2}} + e^{-ai}}{-4} = \frac{e^{ai} - 2 + e^{-ai}}{-4} =$$

Usando as equações (7) e (36) última expressão acima temos:

$$sen^2\frac{a}{2} = \frac{cos\,a + i\,sen\,a - 2 + cos\,a - isen\,a}{-4} \Rightarrow sin^2\frac{a}{2} = \frac{2\,cos\,a - 2}{-4} \Rightarrow$$

$$sen^2\frac{a}{2} = \frac{1 - cos\,a}{2}$$

Racionalizando,

$$sen\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\,a}{2}}$$

➢ **Mostrar que:** $\boldsymbol{cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+cos\,a}{2}}}$

Demonstração: Como da equação (37) tem-se:

$$cosx = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

Logo:

$$cos\frac{a}{2} = \frac{e^{\frac{a}{2}i} + e^{-\frac{a}{2}i}}{2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$$cos^2\frac{a}{2} = \frac{\left(e^{\frac{ai}{2}} + e^{-\frac{ai}{2}}\right)^2}{2^2} = \frac{e^{ai} + 2.e^{\frac{ai}{2}}.e^{\frac{-ai}{2}} + e^{-ai}}{4} = \frac{e^{ai} + 2 + e^{-ai}}{4} = \frac{e^{ai} + e^{-ai}}{4} + \frac{2}{4}$$

Como de (37) sabe-se que

$$cosx = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

então:

$$cos^2\frac{a}{2} = \frac{cos\,a}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow cos^2\frac{a}{2} = \frac{cos\,a + 1}{2}$$

Racionalizando tem-se:

$$cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{cos\,a + 1}{2}}$$

➢ **Mostrar que:** $\boldsymbol{tan(a + b) = \frac{tan\,a + tan\,b}{1 - tan\,a\,tan\,b}}$

Demonstração: como

$$tan\,x = \frac{sen\,x}{cos\,x}$$

E de (39) e (37)

$$sen\,x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}, \qquad cos\,x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

Logo

$$tan(a + b) = \frac{sen(a + b)}{cos(a + b)} = \frac{\frac{e^{(a+b)i} - e^{-(a+b)i}}{2i}}{\frac{e^{(a+b)i} + e^{-(a+b)i}}{2}} = \frac{e^{(a+b)i} - e^{-(a+b)i}}{(e^{(a+b)i} + e^{-(a+b)i})i},$$

$$= \frac{e^{ai}e^{bi} - e^{-ai}e^{-bi}}{(e^{ai}e^{bi} + e^{-ai}e^{-bi})i}$$

Substituindo $e^{x} = cos\,x + i\,sen\,x$ e $e^{-x} = cos\,x - i\,sen\,x$ na última igualdade:

$$tan(a+b) = \frac{(cos\,a + isen\,a)(cos\,b + i\,sen\,b) - (cos\,a - i\,sen\,a)(cos\,b - i\,sen\,b)}{(cos\,a + isen\,a)(cos\,b + i\,sen\,b) + (cos\,a - i\,sen\,a)(cos\,b - i\,sen\,b)i},$$

$$tan(a+b) = \frac{2i\,sen\,b\,cos\,a + 2i\,sen\,a\,cos\,b}{(2cos\,a\,cos\,b - 2\,sen\,a\,sin\,b)i} = \frac{sen\,b\,cos\,a + sen\,a\,cos\,b}{cos\,a\,cos\,b - sen\,a\,sen\,b}$$

Dividindo o dividendo e o divisor da última igualdade por $cos\,a\,cos\,b$:

$$tan(a+b) = \frac{\frac{sen\,b\,cos\,a + sen\,a\,cos\,b}{cos\,a\,cos\,b}}{\frac{cos\,a\,cos\,b - sen\,a\,sen\,b}{cos\,a\,cos\,b}} = \frac{\frac{sen\,b\,cos\,a}{cos\,a\,cos\,b} + \frac{sen\,a\,cos\,b}{cos\,a\,cos\,b}}{\frac{cos\,a\,cos\,b}{cos\,a\,cos\,b} - \frac{sen\,a\,sen\,b}{cos\,a\,cos\,b}} = \frac{tan\,b + tan\,a}{1 - tan\,a\,tan\,b},$$

$$tan(a+b) = \frac{tan\,a + tan\,b}{1 - tan\,a\,tan\,b}$$

➢ **Mostrar que:** $\boldsymbol{tan(a-b) = \frac{tan\,a - tan\,b}{1 + tan\,a\,tan\,b}}$

Demonstração: como

$$tan\,x = \frac{sen\,x}{cos\,x}$$

Substituindo as equações (37) e (39) tem-se:

$$tan(a-b) = \frac{sen(a-b)}{cos(a-b)} = \frac{\frac{e^{(a-b)i} - e^{-(a-b)i}}{2i}}{\frac{e^{(a-b)i} + e^{-(a-b)i}}{2}} = \frac{e^{(a-b)i} - e^{-(a-b)i}}{(e^{(a-b)i} + e^{-(a-b)i})i} = \frac{e^{ai}e^{-bi} - e^{-ai}e^{bi}}{(e^{ai}e^{-bi} + e^{-ai}e^{bi})i}$$

Substituindo $e^{ix} = cos\,x + i\,sen\,x$ e $e^{-ix} = cos\,x - i\,sen\,x$ na última igualdade:

$$tan(a-b) = \frac{(cos\,a + i\,sen\,a)(cos\,b - i\,sen\,b) - (cos\,a - i\,sen\,a)(cos\,b + i\,sen\,b)}{(cos\,a + isen\,a)(cos\,b - i\,sen\,b) + (cos\,a - i\,sen\,a)(cos\,b + i\,sen\,b)i},$$

$$tan(a+b) = \frac{-2i\,sen\,b\,cos\,a + 2i\,sen\,a\,cos\,b}{(2cos\,a\,cos\,b + 2\,sen\,a\,sen\,b)i} = \frac{sen\,a\,cos\,b - sen\,b\,cos\,a}{cos\,a\,cos\,b + sen\,a\,sen\,b}$$

Dividindo o dividendo e o divisor da última igualdade por $cos\,a\,cos\,b$, tem-se:

$$tan\,x = \frac{\frac{sen\,a\,cos\,b - sen\,b\,cos\,a}{cos\,a\,cos\,b}}{\frac{cos\,a\,cos\,b + sen\,a\,sin\,b}{cos\,a\,cos\,b}} = \frac{\frac{sen\,a\,cos\,b}{cos\,a\,cos\,b} - \frac{sen\,b\,cos\,a}{cos\,a\,cos\,b}}{\frac{cos\,a\,cos\,b}{cos\,a\,cos\,b} + \frac{sen\,a\,sen\,b}{cos\,a\,cos\,b}} = \frac{tan\,a - tan\,b}{1 + tan\,a\,tan\,b},$$

$$tan(a-b) = \frac{tan\,a - tan\,b}{1 + tan\,a\,tan\,b}$$

➢ **Mostrar que:** $\boldsymbol{tan\,2a = \frac{2tan\,a}{1 - tan^2\,a}}$

Demonstração: como

$$tan\,x = \frac{sen\,x}{cos\,x}$$

Substituindo (39) e (37):

$$tan\,2a = \frac{\frac{e^{2ai} - e^{-2ai}}{2i}}{\frac{e^{2ai} + e^{-2ai}}{2}},$$

$$tan\,2a = \frac{\frac{\left(e^{ai}\right)^2 - \left(e^{-ai}\right)^2}{2i}}{\frac{(e^{ai})^2 + (e^{-ai})^2}{2}} = \frac{\left(e^{ai}\right)^2 - \left(e^{-ai}\right)^2}{2i} . \frac{2}{(e^{ai})^2 + (e^{-ai})^2}$$

Como

$$e^{ix} = cos\,x + i\,sen\,x \quad e \quad e^{-ix} = cos\,x - i\,sen\,x$$

Tem-se

$$tan\,2a = \frac{(cos\,x + i\,sen\,x)^2 - (cos\,x - i\,sen\,x)^2}{i[(cos\,x + i\,sen\,x)^2 + (cos\,x - i\,sen\,x)^2]},$$

$$tan\,2a = \frac{cos^2\,a + 2i\,cos\,a\,sen\,a - sen^2\,a - cos^2\,a + 2i\,cos\,a\,sen\,a + sen^2\,a}{i[cos^2\,a + 2i\,cos\,a\,sen\,a - sen^2\,a + cos^2\,a - 2i\,cos\,a\,sen\,a - sen^2\,a]},$$

$$tan\,2a = \frac{4i\,cos\,a\,sen\,a}{i[2\,cos^2\,a - 2\,sen^2\,a]} = \frac{2\,cos\,a\,sen\,a}{cos^2\,a - sen^2\,a}$$

Multiplicando e dividindo esta última igualdade por $\frac{1}{cos^2\,a}$:

$$tan\,2a = \frac{\frac{2\,sen\,a}{a}}{1 - \frac{sen^2\,a}{cos^2\,a}} = \frac{2\,tan\,a}{1 - tan^2\,a},$$

$$tan\,2a = \frac{2\,tan\,a}{1 - tan^2\,a}$$

APÊNDICE B: DEMONSTRÇÕES DAS RELAÇÕES TRIGONOM´TRICAS PELA FÓRMULA A NÍVEL MÉDIO

- **Cosseno da diferença**

Como

$$cos(a - b) = cos\,(a + (-b))$$

Pode-se usar equação (40) e fazer:

$$cos(a + (-b)) = cosacos(-b) - senasen(-b),$$

$$cos(a - b) = cosacosb + senasenb \tag{46}$$

- **Seno da soma**

Como:

$$sen(a + b) = cos\left(\frac{\pi}{2} - (a + b)\right) = cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right)$$

Logo tem-se pela equação (46)

$$sen(a - b) = cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right).cosb + sen\left(\frac{\pi}{2} - a\right).senb,$$

E como:

$$cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = sena \quad e \quad sen\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = cosa$$

Tem-se então:

$$sen(a + b) = senacosb + senbcosa \tag{47}$$

- **Seno da diferença**

Demonstração: usando a equação (47) pode-se fazer o seguinte:

$$sen(a - b) = sen\big(a + (-b)\big) = senacos(-b) + sen(-b)cosa = senacosb - senbcosa$$

Então:

$$sen(a - b) = senacosb - senbcosa$$

- **Tangente da soma**

Como:

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

Será usada a fórmula (40) e (47) para se chegar a uma fórmula para tangente.

$$tg(a+b) = \frac{sen(a+b)}{cos(a+b)} = \frac{senacosb + senbcosa}{cosacosb - senasenb} \qquad (48)$$

Agora multiplicando o numerador e o denominados da equação (48) por

$$\frac{1}{cosacosb}$$

Tem-se

$$tg(a+b) = \frac{\frac{senacosb + senbcosa}{cosacosb}}{\frac{cosacosb - senasenb}{cosacosb}},$$

$$tg(a+b) = \frac{\frac{senacosb}{cosacosb} + \frac{senbcosa}{cosacosb}}{\frac{cosacosb}{cosacosb} - \frac{senasenb}{cosacosb}} = \frac{tga + tgb}{1 - tgatgb},$$

$$tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tgatgb} \qquad (49)$$

- **Tangente da diferença**

Como:

$$tg(a-b) = tg(a+(-b))$$

Pode-se usar a equação (49) e fazer:

$$tg\big(a+(-b)\big) = \frac{tga + tg(-b)}{1 - tgatg(-b)} = \frac{tga + (-tgb)}{1 - tga(-tgb)}$$

E lembrando que $tg(-\alpha) = -tg\alpha$, então:

$$tg(a-b) = \frac{tga - tgb}{1 + tgatgb}$$

Fórmulas de multiplicação

- **Cosseno de 2a**

Através da equação 40 e considerando-se $2a = a + a \quad e \quad a = b$, pode ser feito:

$$cos(a+b) = cos(a+a) = cos\,a\,cos\,a - sen\,a\,sen\,a = cos^2 a - sen^2 a\ ,$$

$$cos(2a) = cos^2 a - sen^2 a$$

- **Seno de 2a**

Através da equação (47) e considerando-se $2a = a + a \quad e \quad a = b$, pode-se fazer:

$$sen(a+b) = sin(a+a) = sen\,a\,cos\,a + sen\,a\,cos\,a = 2\,sen\,a\,cos\,a\ ,$$

$$sen(2a) = 2sen\,a\,cos\,a$$

- **Tangente de 2a**

Através da equação (49) e considerando-se $2a = a + a \quad e \quad a = b$, pode-se fazer:

$$tan(a+b) = tan(a+a) = \frac{tan\,a + tan\,a}{1 - tan\,a\,tan\,a} = \frac{2\,tan\,a}{1 - tan^2\,a},$$

$$tan(2a) = \frac{2\,tan\,a}{1 - tan^2\,a}$$

Fórmulas de divisão

- **Cosseno de a/2**

Antes de chegar-se à fórmula de divisão lembre-se que:

$$cos(2a) = cos^2 a - sen^2 a \qquad (50)$$

Lembre-se ainda da relação:

$$sen^2\,a + cos^2\,a = 1$$

E desta equação pode-se fazer:

$$sen^2\, a = 1 - cos^2\, a \tag{51}$$

Substituindo a equação (51) na equação (50) tem-se:

$$cos(2a) = cos^2 a - (1 - cos^2\, a) = 2cos^2\, a - 1$$

$$cos\, 2a = 2cos^2\, a - 1$$

Agora considerando-se $2a = x$ e substituindo esse valor na equação acima:

$$cos\, x = 2cos^2 \frac{x}{2} - 1 \Rightarrow cos^2 \frac{x}{2} = \frac{cos\, x + 1}{2} \Rightarrow cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{cos\, x + 1}{2}}\ ,$$

$$cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{cos\, x + 1}{2}}$$

Da mesma forma pode-se chegar a $sen \frac{x}{2}$ e $tan \frac{x}{2}$. Veja como elas ficam:

$$sen \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - cos\, x}{2}}$$

$$tg \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - cos\, x}{1 + cos\, x}}$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

A. MUNEM, Cálculo, Guanabara Dois S.A.,Rio de Janeiro, 2007

ALDAIR MORSCH, José. Como ler e interpretar eletrocardiograma: importância, passos e desafios. **Morsch Telemedicina,** 2019. Disponível em: https://telemedicinamorsch.com.br/materiais-gratuitos. Acesso em: 03 jun. 2023.

ANDRADE, Thais Marcelle de, et al. **Matemática Interligada**: Trigonometria, fenômenos periódicos e programação. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2019.

ÁVILA, Geraldo. **Variáveis Complexas e Aplicações**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

B. BOYER, Carl; UTA C., Merzbach; [tradução de Helena Castro]. **História da matemática**. São Paulo: Blucher, 2012.

CDCC-USP. **Mecânica II-Pendulo simples**. São Carlos: Experimentoteca, [s.d.]. Disponível em: https://sites.usp.br/wp-content/uploads/sites/512/2019/07/pendulo.pdf. Acesso em: 03 jul. 2023.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em Contextos**: Trigonometria e Sistemas Lineares. 1. ed. São Paulo: Ática, 2020.

D'Ambrosio, U. (2009). Euler, um matemático multifacetado. Revista Brasileira de Hist´oria da Matem´atica, 9:13–31

HUGHES-HALLETT, Debora; Gleason, Andrew M. Calculus, Joohn Wiley & Sons , United States of America, 1974.

DIEDERICHSEN, Julieta. Taylor, Brook (1685-1731). **Faculdade de Engenharia Mecânica. Unicamp,** 2023. Disponível em: www.fem.unicamp.br. Acesso em: 06 jun. 2023.

EQUIPE COM-OBMEP. Colin MacLaurin. **Clubes de Matemática da OBMEP,** [sd]. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/b_colin-maclaurin/. Acesso em: 08 jun. 2023.

IEZZI, Gelson et al. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Limites, derivadas e noções de integral, Atual, São Paulo, 1993. v. 8.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014. v. 1.

IEZZI, Gelson et al. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Trigonometria. 2. ed. São Paulo: Atual Editora, 1978. v. 3.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: ciências e aplicações**: ensino médio. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010. v. 2.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática Ciências e Aplicações**: Ensino Médio. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 2.

J. O'CONNOR, John; F. ROBERTSON, Edmund. James Gregory (1638-1675). **University of St Andrews,** 2000. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gregory/. Acesso em: 30 maio 2023.

J. O'CONNOR, John; F. ROBERTSON, Edmund. Brook Taylor. **University of S. Andrews,** 2000. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uc/Biographies/Taylor/. Acesso em: 07 jun. 2023.

KONGUETSOF, Leonidas. **Cálculo Diferencial e Integral**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, , 1974

MARQUES, Gil Da Costa. Movimento Harmônico Simples (MHS). **USP-Universidade de São Paulo,** 2023. Disponível em: https://midia.atp.usp.br/plc/plc0002/impressos/plc0002_11.pdf. Acesso em: 20 jul. 2023.

ROGERIO, Mauro Urbano; H. Corrêa, A. Amélia, Cálculo Diferencial e Integral: funções de uma variável, UFG, Goiânia, 1994.

NETO, João Barcelos. Mecânica Newtoniana, Lagrangiana E Hamiltoniana. 1 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2004.

O'CONNOR, John; ROBERTSON, Edmund F. Colin MacLaurin. **University of S. Andrews,** 2017. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Maclaurin/. Acesso em: 08 jun. 2023.

O'CONNOR, John; ROBERTSON, Edmund F.. Daniel Bernoulli. **University of S. Andrews,** 1998. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Daniel/. Acesso em: 10 jun. 2023.

O'CONNOR, John ; ROBERTSON, Edmund F.. Leonard Euler. **University of S. Andrews,** 1998. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler/. Acesso em: 10 jun. 2023.

PEREIRA, D. E. (2014). Correspondências científicas como uma relação didática entre história e ensino de matemática: o exemplo das cartas de Euler a uma princesa da Alemanha. Tese de Doutorado, UFRN, Natal/RN.

PISKOUNOV, N. Cálculo Diferencial e Integral. 18 ed. Edições Lopes da Silva, Porto, 2000. v.1

PROVAS e Gabaritos. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira Inep. Disponível em: https//www.gov.br. acesso em: 03 jun. 2023.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática – Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** São Paulo: Zahar, 2012.

ROONEY, Anne. **A História da Matemática.** São Paulo: M. Books do Brasil Editora, 2012.

SERWAY, Raymond A. e JEWETT, John W. Princípios de Física. Mecânica Clássica Volume 1. 5 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014

STEWART, James: [tradução: vários tradutores] **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006. v. 1.

SYMON, Keith Randolph. Mechanics. 3 ed. Massachusetts (EUA): Addison-Wesley, 1971

TIBÚRCIO, Carlos Eduardo. Leonard Euler. **IMECC/Unicamp,** [sd]. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/~sandra/CCA/history/euler/euler.html. Acesso em: 08 jun. 2023.