



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Rodrigo Oliveira dos Reis


**O conceito de variável: um estudo de caso com docentes do
ensino público básico**

Rio de Janeiro

2024

Rodrigo Oliveira dos Reis

**O conceito de variável: um estudo de caso com docentes do ensino público
básico**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre ao Programa de Pós-graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof.^a Dra. Jeanne Denise Bezerra de Barros
Coorientador: Prof. Dr. João Bosco Pitombeira de Carvalho

Rio de Janeiro

2024

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

R375 Reis, Rodrigo Oliveira dos
O conceito de variável: um estudo de caso com docentes do ensino público básico/ Rodrigo Oliveira dos Reis. – 2024.
78 f.: il.

Orientadora: Jeanne Denise Bezerra de Barros
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Variáveis (Matemática) - Teses. 2. Matemática - Estudo e ensino - Teses. I. Barros, Jeanne Denise Bezerra de. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 517

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte

Assinatura

Data

Rodrigo Oliveira dos Reis

**O conceito de variável: um estudo de caso com docentes do ensino público
básico**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre ao Programa de Pós-graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 26 de Março de 2024.

Banca Examinadora:

Prof.^a Dra. Jeanne Denise Bezerra de Barros (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. João Bosco Pitombeira de Carvalho (Coorientador)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof.^a Dra. Patrícia Nunes da Silva
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Isauro Beltrán Núñez
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Rio de Janeiro

2024

DEDICATÓRIA

Às minhas lindas meninas, meus eternos amores.

AGRADECIMENTOS

À minha família, pela paciência, parceria e motivação diária.

Aos meus pais, pelo dom da vida.

Aos meus orientadores, Jeanne Barros e João Bosco Pitombeira, pelo apoio e dedicação.

A todos os professores que passaram em minha vida, pelos ensinamentos e contribuições na minha formação como professor.

A Durval dos Reis (*in memoriam*) e Antônio Luzia de Mendonça (*in memoriam*), os maiores incentivadores da minha vida acadêmica.

À banca examinadora, pela disponibilidade em avaliar meu trabalho e pelas contribuições dadas.

A Paulo Freire e Darcy Ribeiro, meus grandes inspiradores para a luta por uma educação de qualidade, libertadora e transformadora.

A todos que lutaram e agiram para a democratização do ensino superior, especialmente os programas de pós-graduação.

À professora Adriana Feitosa, maior incentivadora e colaboradora pela minha permanência no ensino de Matemática.

Aos meus colegas de ProfMat, pelo companheirismo, paciência e boas risadas nos momentos mais difíceis.

A todos os professores participantes do questionário deste trabalho, pela dedicação, paciência e contribuição.

Senhores, patrões, chefes supremos
Nada esperamos de nenhum
Sejamos nós que conquistemos
A terra-mãe livre e comum
Para não ter protestos vãos
Para sair desse antro estreito
Façamos nós por nossas mãos
Tudo o que a nós nos diz respeito
Eugène Pottier

RESUMO

REIS, Rodrigo Oliveira dos. *O conceito de variável: um estudo de caso com docentes do ensino público básico*. 2024. 78 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2024. PROFMAT.

O conceito de variável é um dos temas de maior relevância para que os discentes, especialmente do Ensino Básico, tenham uma sólida base matemática. A partir de uma significativa construção e apreensão de tal conteúdo os alunos se desenvolverão de maneira adequada não só na Matemática, mas em todos os outros segmentos das Ciências Exatas. Entender o que é variável e, principalmente, que dominar este conceito é fundamental para o estudo de funções, visto que este conteúdo trata de relações entre variáveis (dependente e independente) de grande valia no estudo da Matemática. Esta pesquisa tem como objetivo geral a análise do entendimento por parte dos docentes entrevistados acerca do conceito de variável, seus diferentes modos de uso, principalmente no que tange a sua relação funcional, de modo que seja permitido observar se existem lacunas no entendimento dos professores com relação aos conceitos supracitados, de que modo tais lacunas possam interferir no processo de ensino aprendizagem. A partir desses pontos, será levantada uma descrição histórica do conceito de variável, discutindo brevemente o que é conceito na ótica de Vigotsky, analisando em seguida tanto as exigências sugeridas pelo MEC através da BNCC, quanto a descrição dos temas abordados nos livros didáticos e, finalmente, dar voz aos docentes, personagens centrais desta pesquisa. Tomadas as respostas dos docentes, haverá uma discussão das mesmas mediante a uma análise qualitativa, ferramenta fundamental deste trabalho para que seja possível verificar e apresentar as lacunas no processo de ensino-aprendizagem.

Palavras-chave: variável; funções; docência; conceito.

ABSTRACT

REIS, Rodrigo Oliveira dos. *The Concept of Variable: A Case Study with Basic Public Education Teachers*. 2024. 78 f. Dissertação (Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2024.

The concept of variable is one of the most relevant topics for students, especially in Basic Education, to have a solid mathematical foundation. From a significant construction and apprehension of such content, students will develop adequately not only in Mathematics, but in all other segments of Exact Sciences. Understanding what a variable is and, mainly, that mastering this concept is fundamental for the study of functions, since this content deals with relationships between variables (dependent and independent) of great value in the study of Mathematics. This research has the general objective of analyzing the understanding of the interviewed teachers regarding the concept of variable, its different ways of use, mainly with regard to its functional relationship, so that it is possible to observe whether there are gaps in the teachers' understanding. in relation to the aforementioned concepts, how such gaps may interfere in the teaching-learning process. From these points, a historical description of the concept of variable will be raised, briefly discussing what a concept is from Vygotsky's perspective, then analyzing both the requirements suggested by the MEC through the BNCC, as well as the description of the topics covered in the textbooks and, finally, give a voice to teachers, central characters in this research. Once the teachers' responses have been taken, there will be a discussion of them through a qualitative and quantitative analysis, a fundamental tool of this work so that it is possible to verify and present the gaps in the teaching-learning process.

Keywords: variable; functions; teaching; concept.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Evolução das produções científicas	21
Figura 2 - Distribuição do material encontrado por nacionalidade	21
Figura 3 - Teses e dissertações por área de conhecimento	22
Figura 4 - Modelo de ensino em espiral	25
Figura 5 - Esquema de Oresme	31
Figura 6 - Descritor de Habilidades - BNCC	37
Figura 7 - Atividade envolvendo variável- 6º Ano	41
Figura 8 - Atividade envolvendo variável - 6º ano	42
Figura 9 - Índice referente a Álgebra - 7º Ano	43
Figura 10 - Apresentação do capítulo 3 - 8º Ano	45
Figura 11 - Capítulo 5 - 8º ano	45
Figura 12 - Capítulo 2 - 9º ano	47
Figura 13 - Capítulo 4 - 9º ano	47
Figura 14 - Bianchini - Capítulo 5 - 6º ano	48
Figura 15 - Bianchini - Capítulo 5 - 7º ano	49
Figura 16 - Bianchini - Capítulo 6 - 7º ano	49
Figura 17 - Bianchini -Capítulo 7 - 7º ano	50
Figura 18 - Bianchini - Capítulo 4 e Capítulo 5 - 8º ano	50
Figura 19 - Bianchini - Capítulo 6 - 8º ano	51
Figura 20 - Bianchini - Capítulo 10 - 8º ano	51
Figura 21 - Bianchini -Capítulo 3 - 9º ano	52
Figura 22 - Bianchini - Capítulo 7 - 9º ano	52
Figura 23 - Bianchini - Capítulo 10 - 9º ano	53
Figura 24 - Atuação dos docentes.	63
Figura 25 - Região de atuação dos docentes.	64
Figura 26 - Origem de matrícula dos professores	64
Figura 27 - Tempo de experiência docente	65
Figura 28 - Entendimento de variável	66
Figura 29 - Resposta do professor 25 sobre o entendimento de variável	67
Figura 30 - Dificuldades apresentadas pelos discentes	67
Figura 31 - Professor 30 - Dificuldades dos alunos	68
Figura 32 - Análise do conhecimento prévio do aluno	69
Figura 33 - Como o professor analisa o conhecimento prévio	70
Figura 34 - Como o professor analisa o conhecimento prévio	70
Figura 35 - Lacunas nos alunos	71
Figura 36 - Descrição do Professor 29 sobre as lacunas nos alunos	72

Figura 37 - Sugestões de Metodologia	72
Figura 38 - Exemplo de Metodologia	73
Figura 39 - Entendimento de variável	75

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Quantitativos por portal e descritor	20
Tabela 2 - Unidade Temática x Objeto e Habilidade - 7º Ano - EF.	38
Tabela 3 - Unidade Temática x Objeto e Habilidade	38
Tabela 4 - Competências e habilidades do Ensino Médio que envolvem conceito e variável	39
Tabela 5 - Temas Algébricos e Habilidades BNCC - 7º Ano	42
Tabela 6 - Temas Algébricos e Habilidades BNCC - 8º Ano	44
Tabela 7 - Temas Algébricos e Habilidades BNCC - 9º Ano	46

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
MEC	Ministério da Educação e Cultura
BDTD	Biblioteca Digital de Teses e Dissertações

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	15
1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	18
1.1	Discussão sobre os trabalhos encontrados referentes ao conceito de variável	23
2	VARIÁVEL E FUNÇÕES: UMA BREVE ABORDAGEM HISTÓRICA.	26
2.1	Antiguidade	27
2.2	Idade Média	29
2.3	Período Moderno	32
3	A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR E ABORDAGEM DE VARIÁVEL E FUNÇÃO NOS LIVROS DIDÁTICOS.	35
3.1	A Base Nacional Comum Curricular - Matemática	35
3.2	Uma breve apresentação sobre o PNLD e sua aplicação na SME-RJ e SEEDUC-RJ.	40
3.2.1	<u>Uma breve descrição dos livros didáticos</u>	41
3.2.1.1	Projeto Teláris	41
3.2.1.2	Matemática Bianchini	48
4	UMA BREVE DESCRIÇÃO SOBRE CONCEITO	54
4.1	O conceito segundo Vigotsky	54
4.2	As situações de aprendizagem escolar na formação dos conceitos.	57
5	METODOLOGIA	60
6	A ABORDAGEM DOS PROFESSORES	66
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	74
	REFERÊNCIAS	77

APRESENTAÇÃO

*...Quantas vezes eu pensei em me jogar daqui
Mas aí, minha área é tudo o que eu tenho
A minha vida é aqui, eu não consigo sair
É muito fácil fugir mas eu não vou
Não vou trair quem eu fui, quem eu sou...
Racionais MC's*

A escola é um dos principais espaços de socialização, troca de conhecimento e mudança de realidade, seja ela social ou de expansão de pensamento e isso sempre despertou meu interesse nesse núcleo social.

Apesar de apreciar tal espaço e, dentro da realidade das escolas onde estudei, ser um aluno atuante no que tange às discussões da comunidade, minha identificação com o “me tornar professor” não foi imediato. Imaginava-me como engenheiro, militar, enfim nada com a docência.

Acredito que a proximidade que eu tinha com boa parte dos professores do meu Ensino Médio acabou sendo o passo inicial para despertar a docência em mim. No terceiro ano do Ensino Médio, não havia imaginado o que de fato era um vestibular. Conheci o PVNC (Pré Vestibular para Negros e Carentes). Durante minha trajetória neste curso, formávamos grupos de estudo onde cada um compartilhava com os demais colegas os conteúdos que dominavam e, desse modo, certifiquei-me de fato: serei professor.

No ano de 2002, ingressei no curso de Licenciatura em Física na Universidade Federal do Rio de Janeiro que, apesar de todas as dificuldades que encontrei para terminar o curso, muito devido às lacunas da minha formação básica, ratificou em mim o desejo de ser professor.

Já no início do curso, lecionava na rede privada de ensino e em projetos sociais. Em 2004 ingressei no Pré Vestibular Social da Fundação Cecierj onde permaneci até o ano de 2016 e tive a experiência ímpar de conhecer o alunado de diferentes regiões do Estado e suas particularidades. No Ensino Público, ingressei como Professor de Física da Rede Estadual no ano de 2008, atuando até a presente data.

O curso de Matemática entrou na minha vida por dois motivos principais. O primeiro deles foi o fato de lecionar tal disciplina sem ser formado na mesma e, confesso que isso me incomodava. O segundo foi a possibilidade de voltar pra Universidade e fazer um curso com calma, com uma base de conhecimento prévio mais sólida e sem a pressão de conclusão.

Nesse sentido, entrei em 2010 no curso de Licenciatura em Matemática na Universidade do Estado do Rio de Janeiro, campus FEBF e, finalmente, no ano de 2015, fui

convocado no concurso da Prefeitura do Municipal do Rio de Janeiro como professor de Matemática.

O incentivo para a formação continuada veio da Professora Adriana da Silva Feitosa que, por sinal, graças a ela consegui concluir minha graduação em Matemática. Dessa forma, hoje tenho a felicidade de finalmente participar de um programa de Mestrado que era algo almejado desde o início da primeira graduação.

Apesar de todas as dificuldades que enfrento nas escolas de ciclo básico que atuo, não tenho dúvidas sobre a minha permanência na educação e me manter sempre firme no sentido de tentar oferecer o melhor junto aos meus alunos. Visto que muitas das transformações positivas que tive em minha vida, principalmente no que tange à minha visão de mundo, de sociedade e consciência de classe, foram adquiridas no ambiente escolar, especialmente por conta do comprometimento dos professores que passaram em minha vida, sinto-me na obrigação moral de oferecer uma educação transformadora e de qualidade.

INTRODUÇÃO

No cotidiano de sala de aula do Ensino Médio, não é difícil deparar com a significativa dificuldade dos alunos em entender uma relação entre variáveis, analisar e discutir gráficos entre diversas outras limitações que envolvam os conceitos de variável e função.

Apesar de ainda ser um conhecimento um tanto abstrato por parte dos alunos e, ainda que soe peculiar, também há dificuldades entre docentes, os conceitos de variável e função tem sua etapa inicial de fundamentação desde a idade antiga.

Registros indicam que a construção de tal conhecimento possui primeiras datações desde a Idade Antiga (4000 A.E.C a 3500 E.C) até meados do primeiro milênio. Youschevitch (1976) sinaliza que, num primeiro momento, ocorreu apenas um estudo de casos particulares que analisavam a dependência entre duas grandezas. Por consequência disso, a definição e relação entre variáveis ainda não havia sido realizada. Desse modo, somente com Dirichlet (1805-1859), em meados do século XVIII, que há a consideração de função como uma relação entre variáveis, independente de fórmulas algébricas. Dito isto, observa-se a importância do entendimento do conceito de variável para que haja solidez e completude no entendimento de função.

A apresentação dos conteúdos das disciplinas Exatas confronta-se com a inexistência do aprendizado significativo de variável e funções. Com isso, o trabalho do educador fica limitado ao passo que o aluno se desmotiva ainda mais, contribuindo para a manutenção do estereótipo que as ciências exatas encontram-se num patamar de aprendizado quase que inatingível para o aluno.

Quando se trata de Educação Matemática, é de suma importância a promoção de discussões sobre as questões que permeiam o processo de ensino aprendizagem de qualidade. Desse modo, é preciso entender, de fato, quais lacunas existem e o que ocorre para que as mesmas insistam em dificultar a aprendizagem significativa dos conceitos de variável e função. A partir das observações realizadas, será possível designar um instrumento de planejamento e criação de estratégias, novas ou não, para a apreensão dos temas abordados.

Sendo assim, esta pesquisa tem como objetivo geral a análise do entendimento por parte dos docentes que atuam no Ensino Básico Público acerca dos conceitos de variável, seus diferentes modos de uso, principalmente no que tange a sua relação funcional, de modo que seja permitido analisar se existem lacunas nestes docentes com relação aos conceitos supracitados e, de que modo tais lacunas possam interferir no processo de ensino aprendizagem.

Resumidamente, fica a pergunta: Qual o entendimento dos professores do Ensino Básico sobre o conceito de função e variável e como os mesmos são trabalhados nas salas de aula?

Ao se aprofundar um pouco mais na análise a ser realizada junto aos docentes, a presente pesquisa tem como pretensão discutir as seguintes especificidades:

- Analisar o conceito de variável nas escolas de ensino básico.
- Verificar se os docentes do ensino básico compreendem o que é conceito, partindo da ótica de Vygotsky.
- Observar se os professores compreendem a diferença entre conceito e definição.
- Propor uma reflexão sobre como os conceitos podem ser abordados nas escolas.

A prática docente exige do educador uma série de características para que a mesma alcance seu efetivo êxito. Nesse sentido, é destacado, num primeiro momento, uma das principais contribuições deste trabalho junto aos leitores do mesmo: o convite à reflexão crítica do professor sobre sua prática docente. Também deve destacar-se que esta ponderação é tomada como uma das principais características norteadoras para a construção de uma educação transformadora de fato. De acordo com um dos grandes pensadores da educação, Paulo Freire, a reflexão pode ser entendida da seguinte forma:

A prática docente crítica, implicante do pensar certo, envolve o movimento dinâmico, dialético, entre o fazer e o pensar sobre o fazer. [...] O que se precisa é possibilitar, que, voltando-se sobre si mesma, através da reflexão sobre a prática, a curiosidade ingênua, percebendo-se como tal, se vá tornando crítica. [...] (FREIRE, 2001).

Dessa maneira, a reflexão crítica permanente deve constituir-se como orientação prioritária para a atuação dos professores que buscam a transformação do processo de ensino-aprendizagem mediante a sua prática educativa.

Tal reflexão será aprofundada exatamente sobre o entendimento do docente acerca do conceito de variável e como o mesmo é tratado dentro das unidades de Ensino Básico, identificadas as possíveis lacunas encontradas na formação de tais conceitos.

Outro ponto importante a ser destacado é a oportunidade dada aos professores em compartilharem suas dificuldades e distintas realidades, assim como a possibilidade de integração com essas realidades de outros docentes a fim de buscar possíveis ferramentas para que haja uma melhora no processo de ensino aprendizagem nas escolas como um todo. O pensar em educação, não só em Matemática, mas como um todo, deve respeitar as realidades individuais de cada comunidade escolar porém, é importante que haja entendimento em qual passo está o processo de ensino-aprendizagem de uma maneira geral.

Apresentando a estrutura básica desta pesquisa, a mesma foi distribuída basicamente em seis capítulos.

O primeiro capítulo apresenta o Estado da Questão que busca direcionar a presente pesquisa. Houve a preocupação em realizar um levantamento bibliográfico com análises

qualitativa e quantitativa para que se pudesse definir uma estratégia de abordagem do tema aqui tratado. No segundo capítulo ocorre uma abordagem histórica acerca dos conceitos de variável e funções. Houve aqui uma preocupação em descrever, ainda que de maneira breve, como decorreu a evolução na formação e entendimento de tais conceitos e apresentar como a História da Matemática pode ser um instrumento no despertar do interesse do educando para com o conteúdo ensinado. Para fins de linearização, este capítulo foi dividido em três momentos temporais (seções), abordando as metodologias, por assim dizer, de aplicação dos conceitos nesses momentos históricos. O terceiro capítulo busca apresentar um pouco da Base Nacional Comum Curricular no que tange à abordagem do conceito de variável, assim como as competências e habilidades que tal tema aborda. O tratamento dos livros didáticos trabalhados na rede Municipal de ensino do Rio de Janeiro e também na Rede Estadual do Rio de Janeiro, ambos do Ensino Fundamental, também foi um tema abordado nesse capítulo. Esta discussão se faz necessária para entender com qual material a comunidade escolar está trabalhando e se os mesmos abordam os conceitos que esta pesquisa busca discutir. Já no quarto capítulo, há uma reflexão sobre o que é conceito de uma forma geral, assim como as suas fases de formação e situações que envolvem tal formação. Afinal, muito se fala sobre o conceito de variável, conceito de funções, dentre outros conceitos, porém, há uma real compreensão sobre o que é conceito? Do mesmo modo, há uma compreensão sobre a diferença entre conceito e definição?

Dito isto, vale ressaltar que os capítulos descritos anteriormente buscam fundamentar teoricamente esta pesquisa. Seguindo pelo capítulo cinco, há a descrição metodológica do trabalho. A opção para realizar esta descrição somente no quinto capítulo se deu para que haja uma proximidade da mesma com a apresentação dos dados a fim de promover uma melhor compreensão e integração entre estes pontos.

Finalmente, no capítulo seis, ocorre o estudo de caso com os docentes, mediante a proposição e aplicação de um questionário, este que é uma das ferramentas centrais desta pesquisa, em conjunto com a apresentação e discussão das respostas. Naturalmente, neste mesmo capítulo, será realizada uma apresentação dos dados obtidos e discussão dos mesmos mediante a olhares tanto quantitativo, quanto qualitativo.

1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A escrita de um trabalho acadêmico apresenta uma série de obstáculos e incertezas, dentre eles, é possível destacar, a determinação do ponto de partida da dissertação. Nesse sentido, a elaboração do estado da questão pelo pesquisador atua no sentido de encaminhar sua produção, identificando o que já foi pesquisado sobre o assunto e, à partir daí, direcionar a pesquisa. O estado da questão apresenta, num primeiro momento, um levantamento bibliográfico de teses, dissertações e pesquisas, com o objetivo de estabelecer o seu objeto de estudo e, conseqüentemente, características importantes como sua metodologia.

Outro ponto relevante que transcende a apenas o papel de levantamento inventariante do estado da questão é a possibilidade de encontrar as consonâncias entre os trabalhos analisados e o que o autor pretende escrever, assim como as possíveis lacunas existentes no levantamento, de modo que permita ao pesquisador definir sua linha de trabalho, assim como possíveis contribuições no preenchimento de tais lacunas.

Soares (1989) aponta em sua pesquisa denominada *Alfabetização no Brasil - O estado do conhecimento*, as produções realizadas sobre Alfabetização entre as décadas de 1950 e 1980, de modo que descreve a importância de trabalhos dessa natureza:

[...] a multiplicidade de perspectivas e pluralidades de enfoques sobre Alfabetização não trarão colaboração realmente efetiva enquanto não se tentar uma articulação das análises provenientes de outras áreas de conhecimento, articulação que busque ou integrar estruturalmente estudos e resultados de pesquisas, ou evidenciar e explicar incoerências e resultados incompatíveis. Um primeiro e indispensável passo nesse sentido é a revisão dessas perspectivas, análises e estudos, de modo que se possa ter uma visão de “estado de conhecimento” em nosso País, na área da Alfabetização: uma revisão crítica dos estudos e pesquisas sobre Alfabetização que se vêm multiplicando nas últimas décadas [...] (SOARES, 1989, p. 2).

Outra observação importante é como o estado da questão deve ser compreendido, assim como sua necessidade:

Essa compreensão do estado de conhecimento sobre um tema, em determinado momento, é necessária no processo de evolução da ciência, afim de que se ordene periodicamente o conjunto de informações e resultados já obtidos, ordenação que permita indicação das possibilidades de integração de diferentes perspectivas, aparentemente autônomas, a identificação de duplicações ou contradições, e a determinação de lacunas e vieses (SOARES, 1989, p. 3).

O presente trabalho vislumbra analisar como o conceito de variável é compreendido e abordado pelos docentes do Ensino Básico. Entender o que é variável e, principalmente, que as mesmas são fundamentais para o estudo de funções, visto que este conteúdo trata de relações entre variáveis (dependente e independente) de grande valia no estudo da Matemática.

A fim de permitir que este trabalho possa ter relevância nas pesquisas sobre o tema proposto, além de proporcionar aos professores um retorno do que se é trabalhado em sala de aula, tornou-se fundamental um levantamento bibliográfico sobre o que se é produzido sobre variáveis e possíveis temas correlatos.

Sendo assim, este trabalho delimitou uma linha temporal de pesquisa nos últimos dez anos (decênio 2014 - 2023), buscando produções científicas como teses, dissertações e artigos científicos, de modo que foram tomados como plataformas:

1. Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD);
2. Periódicos da Capes;
3. Hemeroteca Hispânica de Artigos Científicos Hispânicos na Internet (Portal DIALNET).

Um ponto importante a ser destacado sobre a escolha dos portais é o fato de buscar trabalhos que abordem a realidade brasileira. Definidos os locais de pesquisa, as seguintes palavras-chave foram consideradas como os principais descritores dessa análise: conceito de variável, conceito de função, ensino de conceitos, ensino de variável, ensino de funções, ensino de conceitos em Matemática, ensino de conceitos em Ciências, conceitos Vygotsky.

Partindo de fato para análise quantitativa do presente estado do conhecimento, a Tabela 1 apresenta os resultados obtidos no levantamento dos dados das três plataformas de divulgação científica mencionadas anteriormente.

Esta tabela é a base primária para a abordagem quantitativa deste estado do conhecimento, de modo que seus números serão utilizados em algumas fundamentações. É importante ressaltar que duas das plataformas são brasileiras (*BDTD* e *Portal Capes*), ao passo que o Portal Dialnet é uma Plataforma Internacional que contém, em sua maioria, trabalhos de países latinos. É importante que essas informações sejam destacadas de maneira prévia para que haja uma coerência na abordagem dos dados apresentados.

Tabela 1 - Quantitativos por portal e descritor

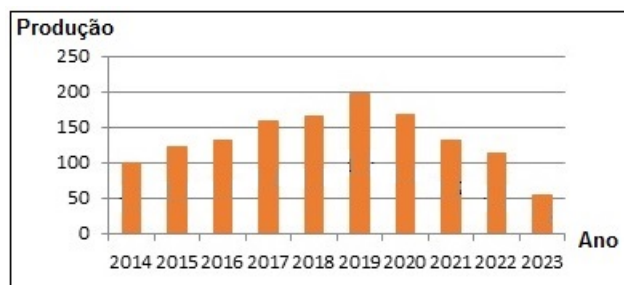
Revisão Bibliográfica – Ensino de Variável – Dados (2014-2023)				
Descritor	Produção Científica	BDTD	Periódicos Capes	DIALNET
Conceito de Variável	Dissertações	3	0	0
	Teses	2	0	0
	Artigos	0	10	7
Conceito de Função	Dissertações	150	1	0
	Teses	28	0	0
	Artigos	0	164	36
Ensino de Conceitos	Dissertações	338	1	0
	Teses	74	0	0
	Artigos	0	175	92
Ensino de Variável	Dissertações	1	0	0
	Teses	0	0	0
	Artigos	0	2	5
Ensino de Funções	Dissertações	146	0	0
	Teses	16	0	0
	Artigos	0	110	10
Ensino de Conceitos em Matemática	Dissertações	2	0	0
	Teses	0	0	0
	Artigos	0	0	0
Ensino de Conceitos em Ciências	Dissertações	2	0	0
	Teses	0	0	0
	Artigos	0	1	1
Conceitos Vygotsky	Dissertações	1	0	0
	Teses	0	0	0
	Artigos	0	2	1

Legenda: Apresentação dos dados colhidos nos portais pesquisados

Fonte: O próprio autor

Ao se analisar a produção científica sobre os temas abordados, de acordo com o gráfico exposto na Figura 1, é possível perceber o crescimento da quantidade produzida de trabalhos entre os anos de 2014 a 2019 e, a partir de 2019, houve uma queda nas pesquisas que englobam as palavras-chave. Vale destacar que, ainda que se tenha uma queda na produção, é considerável o número de publicações.

Figura 1 - Evolução das produções científicas

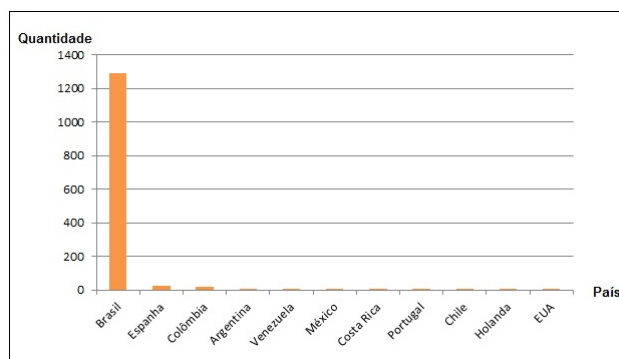


Legenda: Acompanhamento da produção científica no decênio 2014-2023

Fonte: O próprio autor

Quando se observa a distribuição dos trabalhos observados por país de pesquisa e divulgação científica, conforme ilustração da Figura 2, é possível perceber como os temas centrais têm grande número de produções de origem brasileira. Naturalmente, pelo fato de duas das três plataformas (BTDT e Portal Capes) de pesquisa apresentarem apenas produções do Brasil, o número de produções brasileiras de fato é significativamente maior. Apesar disso, vale destacar a quantidade significativa de produções brasileiras encontradas na plataforma DIALNET. Se fosse observado apenas esta plataforma, haveria 65 produções brasileiras (Figura 2).

Figura 2 - Distribuição do material encontrado por nacionalidade



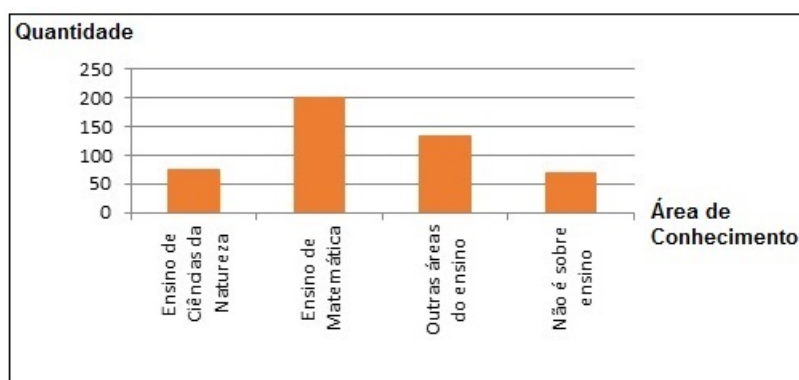
Legenda: Separação dos trabalhos por nacionalidade

Fonte: O próprio autor

Observando melhor os números da figura anterior, o Brasil lidera com 1291 produções, seguida pela Espanha com 23 trabalhos. Logo após, a Colômbia apresenta 19 produções e, Argentina, consta com 7 trabalhos. Venezuela, México e Costa Rica possuem 5 trabalhos cada, seguidos de Portugal com 3. Finalmente, Chile, Holanda e Estados Unidos da América encerram a lista com 1 trabalho de cada país.

Outra referência importante a ser adotada é a observação da distribuição de dissertações e teses produzidas no Brasil e dispostas por área de conhecimento (Figura 3).

Figura 3 - Teses e dissertações por área de conhecimento



Legenda: Distribuições de teses e dissertações por área

Fonte: O próprio autor

Analisando, ainda, a Figura 3, é perceptível o destaque do quantitativo de trabalhos para a docência, tendo o ensino de Matemática papel de destaque na elaboração dos trabalhos, representando 42% do total das produções. Do total de 476 dissertações e teses produzidas, o ensino de Matemática apresenta 200 produções, seguido de outras áreas da docência com 134 trabalhos, ensino de Ciências com 73 produções e, finalmente, 69 produções fora do âmbito do ensino.

1.1 Discussão sobre os trabalhos encontrados referentes ao conceito de variável

Retomando a ideia principal do presente trabalho que trata sobre o conceito de variável, o levantamento quantitativo observou que, dos cinco trabalhos encontrados, apenas dois abordam de fato o ensino de Matemática, que são eles:

1. *Um modelo teórico da Matemática para o ensino do conceito de variável*, elaborado por Olmar Gomez em sua tese de doutorado na Universidade Federal da Bahia.
2. *O conceito de variável: o Modelo 3UV nos exercícios de uma coleção de livros didáticos para os anos finais do Ensino Fundamental*, elaborado por Jamirley Priscila de Souza de Paula em sua dissertação de mestrado na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Sendo assim, a partir de agora se inicia a análise qualitativa deste estado da questão, de modo que sua fundamentação será referenciada nos trabalhos anteriormente mencionados.

O trabalho de Gómez é elaborado à partir do conceito de variável com foco na comunicação do tema no ensino. O autor estruturou sua tese como uma coletânea de artigos de modo que cada um possui um objetivo específico no que tange ao tema central:

1. Análise documental sobre o conceito de variável;
2. Apresentação de um modelo teórico para o ensino de variável com diretrizes tanto brasileiras, quanto colombianas (vale ressaltar que o autor é colombiano e buscou analisar ambas as realidades de ensino);
3. Elaboração de um modelo de ensino de conceito de variável partindo da análise de experiências de docentes em sala de aula;
4. Elaboração de um modelo teórico para o ensino do conceito de variável, tomando como base as fontes utilizadas nos três artigos anteriores.

Um aspecto importante do trabalho de Gómez é a descrição de diversos cenários em que o conceito de variável se apresenta nas salas de aula, buscando elucidar as formas de como o tema é ensinado além de servir como base de apoio para os professores e pesquisadores:

[...] Nos resultados, estruturamos sete cenários em que a variável aparece: no primeiro cenário a variável aparece como incógnita ou quantidade indeterminada, e a analisamos como símbolo de valores desconhecidos; no segundo cenário analisamos a variável em uma relação de dependência de quantidades; no terceiro cenário apresentamos a variável como marcador de posição para definir narrativas associadas a sistemas numéricos ou para parametrizar rotinas matemáticas; em quarto lugar

está o cenário que discute a variável como símbolo para nomear números ou grandezas; em quinto lugar está o cenário que realiza a variável como coleções de elementos; no sexto cenário analisamos a variável como nome de figuras geométricas; e no último cenário, a variável aparece para nomear proposições lógicas [...] (GÓMEZ, 2017, p. 9).

Outro ponto relevante em seu trabalho se trata da percepção das dificuldades apresentadas pelos docentes na construção do conceito de função junto aos alunos, ao passo da dificuldade destes em compreendê-los. Como já dito, o foco do trabalho do autor está na ação comunicativa, de modo que seu trabalho se baseia em quatro indicadores: *palavras-chave, mediadores visuais; narrativas endossadas* e, finalmente, *rotinas*.

Uma lacuna importante perceptível no texto é a ausência da discussão do que é conceito de uma forma geral, além de sua estrutura e metodologia de construção. Uma observação sobre os estudos de Vygotsky sobre o tema seria de grande contribuição para a discussão do tema.

No segundo trabalho analisado, Paula (2019) aborda o estudo de variável segundo o modelo 3UV (três usos da variável): variável como *incógnita*, variável como *valor genérico* e variável como *relação funcional*, tomando como palavras-chave *Anos finais do Ensino Fundamental, Modelo 3UV, Variável, Álgebra e Livro Didático*. Nesse sentido, há uma aproximação com o trabalho de Gómez (2017), apesar de este autor apresentar quatro usos da variável. (PAULA et al., 2019) apresenta uma interessante citação onde há uma linearidade sobre o uso do modelo 3UV:

Em primeiro lugar, devem ser trabalhadas com as incógnitas, mas também com os números genéricos e as relações funcionais e ainda deve aprender a passar com flexibilidade entre os distintos usos da variável. Em segundo lugar, que aprendam as regras que regem a linguagem algébrica, mas possam relacionar os distintos usos da variável com diversas situações. (URSINI et al, 2005, p. 22, apud PAULA 2019, p. 26).

Partido da análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), assim como da Base Nacional Comum Curricular, Paula et al. (2019) estruturou seu trabalho na análise de uma coleção de livros didáticos, Projeto Teláris de Luiz Roberto Dante, onde busca entender como o autor apresenta o uso da variável e se há uma consonância com o modelo 3UV. Segundo Paula et al. (2019), a definição desta coleção se deu pelo fácil acesso a mesma, aliado ao fato de ser um autor de destaque e do grande uso da sua obra nas escolas de ensino básico.

O principal parâmetro observado pela autora na coleção foi o tipo de exercício abordado. A análise foi feita de maneira qualitativa, onde agrupou as atividades entre diferenciadoras e integradoras, e também de maneira quantitativa, de modo que observou o número de atividades de cada tipo de abordagem de variável no modelo 3UV. Com relação à análise qualitativa, novamente a autora remete ao trabalho de Ursini (2005), falando sobre o ensino em espiral e destacando que as atividades diferenciadoras agem

no sentido de identificar qual o uso de variável, ao passo que as atividades integradoras buscam aliar os três usos da variável em um só exercício.

A Figura 4, apresenta um esquema do funcionamento do modelo de ensino de variável em espiral sugerido por Ursini (2005) *apud* Paula et al. (2019).

Figura 4 - Modelo de ensino em espiral



Legenda: Representação do ensino em espiral

Fonte: Paula et al. (2019), p. 33

De acordo com a Figura 4, inicialmente aplicam-se as atividades integradoras e, consolidada tal aplicação, inicia-se o trabalho com as atividades diferenciadoras. Vale ressaltar que, a cada giro da espiral, aumenta-se o grau de dificuldade das atividades.

Na apresentação e discussão dos dados de sua pesquisa, a autora observou que a coleção de livros em questão valoriza de maneira demasiada o uso da variável como incógnita, visto a quantidade de exercícios apresentados sobre o tema: são 344 exercícios de variável como incógnita, 20 como número genérico e 57 como relação funcional. Com relação à análise qualitativa, a autora destaca o ínfimo uso das atividades integradoras: 11 no total. Assim como no trabalho de Gómez, uma ausência percebida no trabalho de Paula é a discussão sobre o que é conceito e sua relevância.

2 VARIÁVEL E FUNÇÕES: UMA BREVE ABORDAGEM HISTÓRICA.

Neste primeiro momento, uma breve descrição sobre alguns momentos importantes no desenvolvimento histórico do conceito de função será realizada. Tal descrição se faz necessária por apresentar diferentes definições e compreensões para o mesmo e, pela possibilidade da realização de uma autoanálise sobre como esse conceito está consolidado no contexto escolar, tanto pelos docentes, quanto pelos discentes.

Proporcionar essa descrição histórica permitirá a percepção de que a construção de conceitos tão potentes como os de variável e de função não se deu em um único momento temporal. Diversos fatores influenciaram significativamente nessa elaboração, diretamente ligados às necessidades que cada sociedade da época tomava como relevantes junto à comunidade científica.

De maneira semelhante, apresentação e discussão dos conceitos matemáticos em sala de aula também perpassam pelos questionamentos levantados por alunos e professores, assim como formas de expressões (matemáticas, evidentemente) atuais com que esses conhecimentos são apresentados.

No que diz respeito à gênese do conceito de função, segundo Zuffi (2001), não há um consenso entre os autores como de fato relatam os historiadores. Boyer (1974) cita que, na França, há indícios de ideias primárias de função por volta de 1391, quando Nicole Oresme descreve geometricamente o movimento com aceleração uniforme.

Por outro lado, Youshevitch (1976, p. 39) relata três fases históricas relevantes no desenvolvimento da noção de função:

1. Antiguidade, quando os estudos de problemas particulares de dependência entre quantidade ainda não havia isolado o conceito de função e variável;
2. Idade Média, onde as ideias eram expressas com uma linguagem geométrica e mecânica, porém ainda prevaleciam, em cada caso concreto, as descrições verbais ou gráficas;
3. Período Moderno, a partir do século XVII, onde os conceitos passam a ser melhores definidos até chegar ao atual rigor matemático.

A partir dessa estrutura de períodos, haverá o desenrolar do presente capítulo.

2.1 Antiguidade

O conceito de função, ainda que instintivamente, já iniciava seus passos desde a Antiguidade. Nesse sentido, os povos babilônicos utilizavam tabelas sexagesimais de quadrados, raiz quadrada, cubos e raízes cúbicas. Outras tabelas utilizadas eram as de função de grau e linear zigue-zague¹ (NEUGEBAUER, 1957, apud YOUSCHEVITCH, 1976, p. 40) durante o reinado dos Selêucidas para estudos astronômicos.

Alguns indícios sobre o conceito de função também estão presentes nas ciências naturais e matemáticas da Grécia antiga. Acredita-se que os Pitagóricos tentaram determinar leis mais simples da Acústica, características que denotam o pleito da interdependência de grandezas físicas, como a relação entre os comprimentos e as frequências das notas emitidas por cordas dispostas a uma mesma tensão (YOUSCHEVITCH, 1976, p. 41).

No período Alexandrino, houve um desenvolvimento de toda uma trigonometria de cordas correspondendo uma circunferência de um dado raio R , a partir de teoremas de geometria juntamente com regras de interpolação. Mais uma vez a tabulação se faz presente ao se descrever acordes que equivalem a regras de senos. Dentre estas tabelas, destaca-se a encontrada no Almagesto de Ptolomeu, onde numerosas tabelas astronômicas de quantidades, equivalentes às funções racionais, funções irracionais e as mais simples funções seno estão presentes (PEDERSEN, 1974, apud YOUSCHEVITCH, 1976, p. 42).

É importante destacar que nem só de tabulação se limitavam o estudo dos matemáticos gregos. Na teoria das cônicas os denominados sintomas, são propriedades planimétricas básicas de curvas correspondentes e consequentes da própria definição, como sendo seções planas do cone (YOUSCHEVITCH, 1976, p. 40). Dito isso, em uma linguagem matemática moderna, o sintoma de alguma seção cônica representaria para cada ponto da curva e a mesma relação funcional entre sua semicorda y e o segmento x do diâmetro conjugado com a corda, de modo que as extremidades de tal segmento seriam o ponto de intersecção do diâmetro com a corda e o vértice correspondente (YOUSCHEVITCH, 1976, p.40). É importante destacar que também havia uma descrição algébrica grega sobre os sintomas (ZEUTHEN 1966, apud, YOUSCHEVITCH, 1976, p.40), de modo que identidades e equações de primeiro e segundo grau foram representadas por áreas de determinados retângulos. De fato, o significado dos sintomas a partir da descrição antiga causa certa estranheza. Segundo Youschevitch (1976), tal problema seria (futuramente) melhor compreendido com o uso da linguagem da geometria analítica por equações de

¹ Na obra *The Exact Sciences in Antiquity*, Neugebauer utiliza o termo função linear zigue-zague para descrever o comportamento da posição das constelações em tabelas astronômicas dos Selêucidas. A representação geométrica desta descrição apresenta o formato zigue-zague.

curvas de segunda ordem em relação aos vértices das mesmas curvas.

Dentre tantos problemas estudados e resolvidos na matemática grega, destaca-se a determinação de raízes de polinômios cúbicos (polinômios de 3^o grau) que foram calculados com o uso de seções cônicas (curvas de segunda ordem). Em uma linguagem mais atual, as raízes das equações correspondentes foram consideradas como coordenadas de pontos de intersecção de duas dessas curvas apropriadas.

No que tange à matemática grega da antiguidade, não há a introdução de fórmulas algébricas, algoritmos literais ou expressões analíticas. Destaca-se o uso de dígitos e a notação de várias quantidades por distintas letras do alfabeto.

Apesar da falta de simbolismo da matemática grega, além de uma efetiva ideia consistente de funcionalidade, suas conquistas no aumento da quantidade de dependências funcionais usadas, assim como na descoberta de novas metodologias de estudo, contribuíram significativamente no desenvolvimento da matemática *a posteriori*, desde a criação da nova álgebra, geometria analítica e cálculo infinitesimal nos séculos XVI e XVII.

Ao observar o sistema Ptolomaico de mundo e toda sua descrição astronômica, Pedersen (1974) destaca a mudança contínua e periódica dos planetas (apud YOUSCHEVITCH, 1976, p. 42). As determinações das posições dos astros realizadas por Ptolomeu usando uma padronização de procedimentos, tanto explicado por exemplos numéricos, quanto por formulações verbais generalistas. Tais procedimentos eram usados para compilar tabelas astronômicas que, apesar do termo ainda não ser utilizado, tabulavam funções, que poderiam conter até três variáveis.

Caso se cobre o saber analítico de funções, destaca Pedersen (1974), os antigos não dominavam o seu conceito (apud YOUSCHEVITCH, 1976, P. 42). Porém, caso se leve em consideração a associação de elementos de um conjunto (instantes de tempo, como os astrônomos antigos o tomavam) com a posição relativa dos astros, o sentido de função de fato está presente no *Almagesto*, faltando apenas à palavra em si.

Apesar disso, Youshevitch (1976) destaca que a matemática antiga não necessita apenas da citação da palavra função ou alguma equivalência. Existe uma lacuna não preenchida que é a falta de alusão à ideia geral que unifica as dependências concretas separadas entre quantidades ou números em qualquer forma, seja verbal, gráfica ou tabelada.

Naturalmente, existe uma distância significativa entre o instinto de funcionalidade e a percepção de fato sobre tal (BELL, 1945, *apud* YOUSCHEVITCH, 1976, p. 43). A mesma ideia se aplica quando se discute a análise de funções particulares e o surgimento do conceito de função em um ou outro grau de generalidade (YOUSCHEVITCH, 1976, p. 43).

O estudo do movimento foi outra grande contribuição da matemática grega. Na filosofia natural, Arquimedes faz a distinção de três formas principais dos processos de

mundo: alteração ou mudança de qualidade; mudança de magnitude ou quantidade (aumento e redução); e movimento local, sendo acompanhada necessariamente das duas anteriores. Nesse sentido, o movimento local foi dividido entre uniforme, onde arcos de circunferência iguais são percorridos em intervalos de tempo iguais, e em movimento diferente. Ressalta-se que conceitos importantes como velocidade média e instantânea ainda não são introduzidos neste momento, logo não há uma análise mais abstrata de quantidade variável.

Obviamente, a mecânica e a astronomia grega são impressionantes, ainda que ambas não tenham transposto os limites do movimento uniforme. Ao se tratar dos movimentos irregulares dos corpos celestes, há uma redução dos mesmos a sistemas anteriores com combinações de movimentos circulares uniformes. Não houve um estudo profundo do movimento não uniforme.

Como se pode notar nos breves exemplos citados anteriormente, apesar de aparentar certo fundamento instintivo sobre funções, a fundamentação matemática na Antiguidade não desenvolveu de fato uma noção geral tanto de quantidade de variável, quanto de função. No que tange à aplicabilidade, seu maior desenvolvimento se deu na área astronômica. Claro que seu objetivo estava mais voltado para a tabulação de funções determinadas de relações entre conjuntos discretos e constantes isoladas, com finalidades práticas, como a Astronomia, por exemplo.

2.2 Idade Média

Com o crescimento da ciência nos países árabes, consideravelmente após a queda da sociedade antiga, houve um aumento significativo na quantidade de utilização de funções, apesar de não ter ocorrido novos desenvolvimentos no que diz respeito ao seu conceito. Dito isto, ressalta-se que seus métodos de estudo também avançaram. Youshevitch (1976, p.45) destaca que, neste período, as principais funções trigonométricas foram introduzidas, assim como os métodos de tabulação foram melhorados, como a utilização conjunta da interpolação quadrática com a linear. Os estudos de raízes positivas de polinômios cúbicos via uso de seções cônicas também tiveram grandes avanços, além de outros progressos na óptica e astronomia.

Um fator importante destacado por Botelho e Rezende (2007, p.3) foi o contato entre europeus e os povos orientais mediante as Cruzadas e viagens comerciais. Isso viabilizou a tradução dos pensadores gregos e a disseminação de suas ideias. Desse modo, diversas universidades foram criadas e, ao passo disso, o pensamento aristotélico foi adotado como modelo para ciência e filosofia contemporâneas. Tal feito denominou-se como filosofia escolástica.

O modelo escolástico foi duramente questionado por pensadores como Roger Bacon

e Guilherme de Ockam, que defendiam que as ideias científicas obrigatoriamente devem ser obtidas através da experimentação, portanto a matemática passou a ser o principal instrumento para se estudar os fenômenos naturais (BOTELHO; REZENDE, 2007, p. 66). Partindo do pensamento aristotélico de aumento e redução de formas, iniciaram ao estudo matemático do movimento quantitativo e local.

Nesse sentido, tomam-se como qualidades ou formas alguns fenômenos como luz, calor, velocidade, enfim, fenômenos que possuem graduação de intensidade e que mudam continuamente dentro de uma limitação. Partindo disso, Youshevitch (1976) destaca que diversos conceitos relevantes foram introduzidos, como a velocidade instantânea, aceleração, quantidade variável como sendo um grau ou fluxo de qualidade. Assim, os pensamentos cinemático e matemático ganharam um papel importante.

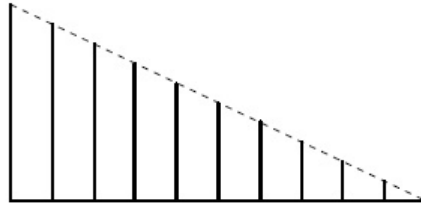
A teoria dos cálculos (doutrina da intensidade das formas), com destaque para a cinemática, desenvolveu-se por William Heytesbury, Richard Swinshead e outros, especialmente na linha da cinemático-aritmética (YOUSCHEVITCH, 1976, p. 46). Ao passo disso, na França, Nicole Oresme teve um papel importante no desenvolvimento na direção geométrica. Este demonstrou um notório interesse pela Teoria das Configurações de Qualidades, ou seja, de uma maneira “mais conhecida”, de latitudes de formas.

De acordo com a teoria de latitude das formas, as quantidades e grandezas que se relacionam são representadas geometricamente; portanto a relação entre variáveis, em uma função, ainda não tinha surgido (BARROS; SILVA; SILVA, 2021). Youshevitch (1976) relata que Oresme restringiu seus estudos apenas às qualidades lineares. Botelho e Rezende (2007) ainda destacam que um exemplo do estudo de qualidades lineares é o movimento com aceleração constante, descrevendo a velocidade variando com o tempo de um objeto que desce um plano inclinado.

Na Universidade de Paris, como destacam Botelho e Rezende (2007), ao estudar o movimento com aceleração constante, Oresme representou geometricamente a velocidade variando com o tempo marcando os instantes ao longo de uma linha horizontal, denominadas longitudes, e as velocidades em cada instante foram representadas ao longo de uma linha vertical, perpendiculares às longitudes, denominadas latitudes.

Ainda de acordo com Oresme, a razão entre duas intensidades de alguma qualidade seria a mesma das latitudes correspondentes, assim, latitudes e longitudes poderiam ser consideradas no uso da intensidade e extensão. A linha que liga as extremidades das latitudes descreveria a “linha de intensidade”, ou “linha de cume”, que, como também delimitada por esta linha, representa a qualidade dada e seus graus (BOTELHO; REZENDE, 2007, p.3). A figura a seguir, Figura 5, ilustra geometricamente o esquema de Oresme.

Figura 5 - Esquema de Oresme



Legenda: Exemplo da representação geométrica de Oresme

Fonte: Botelho e Rezende (2007, p. 66)

Observe que as teorias desenvolvidas durante o século XIV aparentam estar baseadas em uma utilização previamente consciente em uma ideia geral sobre variáveis dependentes e independentes. Obviamente, até aqui, ainda falta uma definição consistente e direta sobre elas, mas cada uma é sim designada por um termo especial (latitude e longitude). A latitude seria interpretada como a variável dependente, ao passo que a longitude, seria a variável independente. Logo, seguindo esse pensamento, tem-se a linha de cume como um embrião de uma futura representação gráfica de uma relação funcional. Deste modo, uma função seria definida como uma descrição verbal de sua propriedade ou diretamente por uma representação geométrica² (YOUSCHEVITCH, 1976, p.45).

O estudo das “funções do tempo” (cuja variável independente é o tempo) é um componente importante da teoria das latitudes. Bourbaki (1969) *apud* Youschevitch (1976) ressalta que, estes estudos, foram realizados sem considerações infinitesimais, porém tais considerações não apenas estavam subentendidas nos conceitos de velocidade e aceleração, como aplicada para resolver problemas como áreas de figuras ilimitadas em extensão, cálculos de velocidade média cujas velocidades instantâneas mudam com saltos de acordo com alguma lei, infinitas vezes num dado intervalo de tempo, conforme uma progressão geométrica (YOUSCHEVITCH, 1976). Sendo assim, calcular a soma da progressão geométrica infinita seria o principal instrumento de solução de tais problemas.

O estudo do movimento acelerado e o cálculo da sua velocidade média, realizados por Oresme, são um grande avanço da matemática da Idade Média mas, ressalta-se que não houve uma conexão entre tal movimento e a queda livre dos corpos pesados. Desse

² Thus these theories, developed in the 14th century, seem to be founded on a conscious use of general ideas about independent and dependent variable quantities; though direct definitions of these quantities are lacking, each of them is designated by a special term. The latitude of a “quality” is interpreted in a most general manner as being a variable quantity dependent on its longitude and, similarly, the “line of summit” is understood to be a graphical representation of some continuous functional relation. Thus, in these theories, a function is defined either by a verbal description of its specific property or directly by a graph.

modo, Galileu promove realização de tal feito, assim como a demonstração do teorema de Merton, que menciona que um corpo em movimento uniformemente acelerado percorre, num dado intervalo de tempo, a mesma distância percorrida por um corpo que se desloca com uma velocidade constante e igual à velocidade média do primeiro.

É possível perceber que, principalmente no século XIV, houve um significativo avanço na matemática e, certamente, no desenvolvimento do conceito de função. Tais avanços superam, inclusive, os feitos realizados até o início do mesmo século. Alguns resultados particulares tiveram fundamental importância histórica, por exemplo, o cálculo de áreas finitas de figuras geométricas de extensão ilimitada e também a divergência da série harmônica (YOUSCHEVITCH, 1976, p.49).

2.3 Período Moderno

Um grande salto no desenvolvimento do conceito de função e variável a partir do século XVII, deveu-se aos estudos desenvolvidos por René Descartes com seus métodos de coordenadas no desenvolvimento do que é denominado atualmente como plano cartesiano. Youshevitch (1976) destaca a grande semelhança entre os estudos de Descartes e Nicole Oresme, de modo a sugerir que este de fato tenha proporcionado uma influência sobre àquele.

Neste método, Descartes viabiliza a determinação de raízes de equações e problemas algébricos mediante a redução a uma padronização. Na prática isso significaria encontrar a solução a partir das interseções entre as curvas planas geradas pelo problema e o eixo cartesiano.

Tomando a linha histórica até aqui destacada nesta pesquisa, verifica-se, enfim, o surgimento de uma metodologia clara onde denota que uma equação com duas variáveis (x e y) é uma forma de introduzir uma dependência entre quantidades, permitindo de fato o cálculo de seus valores correspondentes. Essa introdução de funções como equações proporcionou uma revolução significativa no aprimoramento da matemática.

Seguindo adiante, aparece Isaac Newton com seu método dos fluentes onde toma o tempo como argumento universal, interpretando variáveis dependentes e como quantidades que fluem de maneira contínua, possuindo uma taxa de mudança (YOUSCHEVITCH, 1976, p. 55). Desse modo, Newton ainda denota como fluente (a variável independente) a quantidade correlacionada e a quantidade relacionada toma o papel de variável dependente. Este método dos fluentes sugere, de uma maneira mais abstrata, a introdução do conceito de derivação (YOUSCHEVITCH, 1976, p. 55).

Ao passo disso, Leibniz (1646-1716) também realizou estudos significativos sobre o cálculo diferencial e integral e, destaca-se aqui, que Youshevitch (1976, p. 56) atribui a tal matemático o primeiro uso da palavra função propriamente dita no manuscrito “O

método inverso das tangentes, ou sobre funções” (*Methodus tangentium inversa, seu de functionibus*). Youshevitch (1976) destaca também que o feito de Leibniz transcende ao uso da palavra função, pois de fato consolida o seu conceito, não de maneira analítica, mas como relação entre variáveis.

Alguns anos mais tarde, Bernoulli também utilizou a palavra função, efetuando sua primeira definição explícita como uma expressão analítica, apesar de não descrever procedimentos para a construção de funções da variável independente.

Quem de fato estruturou de uma forma mais detalhada o conceito de função foi Leonhard Euler (1707-1783), aluno de Bernoulli (1700-1782). Em seu trabalho *Introductio in analysin infinitorum*, de 1748, Euler realiza definições importantes como as noções iniciais de função, constantes como valores que se mantém e definindo variável como um conjunto, ou até mesmo um subconjunto, de números complexos (YOUSCHEVITCH, 1976, p.61)

Em sua definição, Euler faz uma alteração significativa sobre a definição de Bernoulli, onde altera a terminologia quantidade para expressão analítica: “Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta em qualquer modo desta quantidade variável e números ou quantidades constantes” (YOUSCHEVITCH, 1976, p. 60).

Seu desenvolvimento nos estudos de funções adentrou às operações envolvendo funções, chegando a funções logarítmicas e exponenciais além de funções fornecidas pelo cálculo diferencial e integral. Destaca-se também as funções implícitas, explícitas, teoremas de existência de uma função, função inversa a uma função dada e representação paramétrica de uma função.

No ano de 1755, Euler propõe uma definição um pouco mais elaborada do conceito de função, de modo a torná-la um pouco mais universal e abstrata:

Se algumas quantidades dependem tanto de outras quantidades que, se estas forem alteradas as primeiras sofrem mudança, então as primeiras quantidades são chamadas de funções da última. Esta denominação é de natureza mais ampla e compreende todos os métodos por meio do qual uma quantidade pode ser determinada por outras. Se, portanto, x denota uma quantidade variável, então todas as quantidades que dependem de x em qualquer caminho ou são determinados por ele, são chamados de funções dele³ (YOUSCHEVITCH, 1976, p.70).

Quando se observa até o século XVII, Youshevitch (1976) ressalta que Euler foi quem apresentou com melhor consistência o conceito de função, dividindo as mesmas

³ If some quantities so depend on other quantities that if the latter are changed the former undergo change, then the former quantities are called functions of the latter. This denomination is of broadest nature and comprises every method by means of which one quantity could be determined by others. If, therefore, x denotes a variable quantity, then all quantities which depend upon x in any way or are determined by it are called functions of it.

em explícitas (cuja forma é conhecida), implícitas (onde as funções são introduzidas por equações não resolvidas de F , x , y e z) e funções dadas por certas condições (como equações diferenciais). Além da definição formal de Função e suas representações, os conceitos de continuidade e descontinuidade também tiveram um importante tratamento por Euler.

Diversos outros matemáticos como Dirichlet, Lobatchevsky e Fourier, procuraram aprimorar o conceito de função e suas aplicações. É importante destacar que, apesar disso, Euler possuiu um papel fundamental sobre a introdução do conceito de função visto que, ainda com recursos limitados para sua época, conseguiu estruturar um pensamento funcional com uma notável solidez.

Ao se tomar uma linguagem mais atual onde, para cada elemento de x , tem a transformação em $f(x)$, chega-se então à definição de George Boole (1815 – 1864):

Qualquer expressão algébrica envolvendo o símbolo x é chamada uma função de x e pode ser representada sob a forma geral abreviada $f(x)$. [...] Nestes mesmos princípios de notação, se em alguma função transformarmos x em 1, o resultado será expresso pela forma $f(1)$; se na mesma função transformarmos x em 0, o resultado será expresso pela forma $f(0)$ (RÜTHING, 1984 *apud* BOTELHO, 2007, p.73).

Ao passo disso, Botelho e Rezende (2007) destacam que Richard Dedekind (1831-1916), outro notável matemático, tomou a ideia de aplicação para formular a definição do conceito de função:

Em uma aplicação de um sistema S uma lei é entendida, de acordo com a qual cada elemento s de S está associado a um determinado objeto que é chamado a imagem de s e denotada por $\phi(s)$; dizemos também que $\phi(s)$ corresponde ao elemento s , que $\phi(s)$ é originada ou gerada pela aplicação ϕ , que s é transformado em $\phi(s)$ pela aplicação ϕ (*ibid.*) (BOTELHO; REZENDE, 2007, p. 73).

Finalmente tem-se a definição de G. H. Hardy (1877-1947) onde são enumeradas três características que, obrigatoriamente, devem ser satisfeitas por uma função que é determinada pela relação entre duas quantidades variáveis x e y (BOTELHO, 2007, p. 73):

- y será sempre obtido por um valor de x ;
- para cada valor de x para o qual y é dado, corresponde um único valor de y ;
- a relação entre x e y expressa através de uma fórmula analítica, na qual o valor de y que corresponde a um dado valor de x pode ser calculado por substituição direta de x (SILVA, 1999, *apud* BOTELHO, 2007, p. 73).

Nesse sentido, chega-se, enfim a uma definição um tanto quanto mais atual que, possivelmente, seja a mais utilizada dentro das aulas do Ensino Básico.

3 A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR E ABORDAGEM DE VARIÁVEL E FUNÇÃO NOS LIVROS DIDÁTICOS.

A abordagem de funções e variáveis em sala de aula, assim como a apresentação de qualquer outro conteúdo didático, está diretamente ligada a parâmetros e normativas pré-definidas pelas instâncias de educação, como o Ministério da Educação e Cultura. Tais normativas, ainda que respeitem a autonomia docente, indicam quais competências e habilidades devem ser trabalhadas junto aos alunos, além de selecionar qual grupo de livros didáticos podem participar do programa de seleção, a fim de ser distribuídos junto às escolas de Ensino Básico e ser distribuídos junto aos professores.

3.1 A Base Nacional Comum Curricular - Matemática

Definindo de maneira breve, a BNCC é um documento normativo que vislumbra determinar o conjunto de aprendizagens fundamentais que os alunos precisam desenvolver em todas as etapas e modalidades da Educação Básica (Ensinos Fundamental e Médio). Vale ressaltar que a importância deste documento se dá na busca da garantia dos direitos do educando no que tange à sua aprendizagem e ao seu desenvolvimento.

A discussão sobre a construção da BNCC começou a partir de 2015, com homologação em 2018 e, finalmente, instituída em todas as escolas e segmentos de ensino até o fim de 2021.

Durante a apresentação desse documento, dois parâmetros aparecem como fundamentais no desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem: Competências e Habilidades. Na BNCC competência é definida:

“[...] como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho” (MEC, 2017).

A abordagem do conceito, um ponto chave deste trabalho, ganha importância no documento da BNCC. No que diz respeito à Matemática, o documento também relata a importância do desenvolvimento no educando de competências gerais, realizando uma separação entre o Ensino Fundamental e Ensino Médio. Para o Ensino Fundamental, destacam-se oito competências específicas e norteadoras, de modo que apenas a terceira, a seguir, realiza a citação sobre conceitos:

3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança

quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções (MEC, 2017, p. 267).

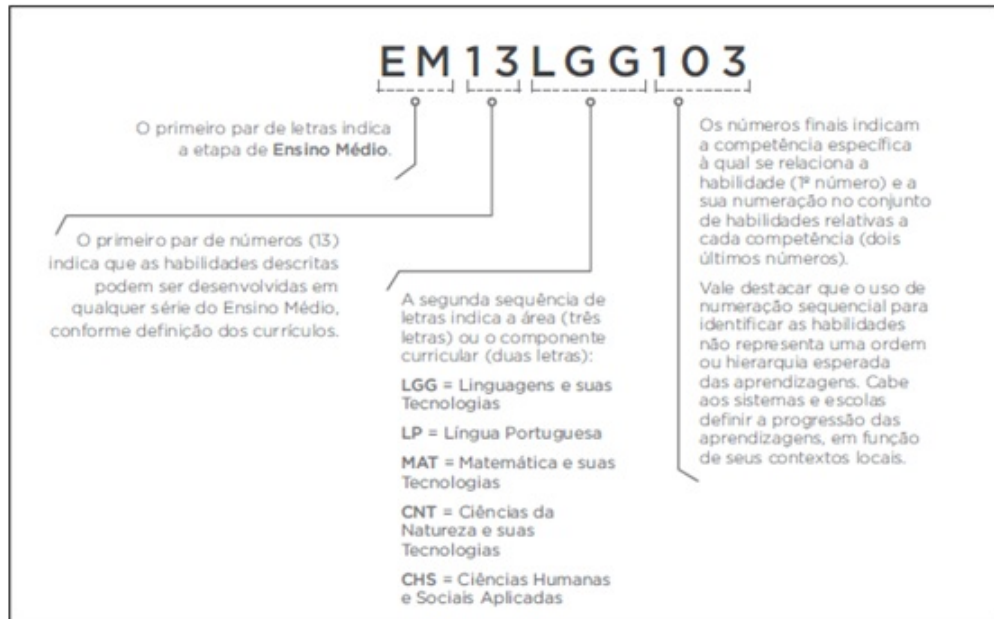
Ao se tratar do Ensino Médio, cinco são as competências específicas dentre as quais há a proposição e desenvolvimento das habilidades de tal segmento de ensino (MEC, 2017, p. 531). Dentre estas, quatro destacam uso dos conceitos:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, seja fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (MEC, 2017, p.531).

Na BNCC, a Matemática se faz presente como um dos quatro componentes gerais da Educação Básica. Assim como Língua Portuguesa, é a única que é obrigatória em todos os anos e segmentos de ensino da Educação Básica, não sendo de livre escolha.

Antes de descrever as competências e habilidades Matemáticas presentes na BNCC, é importante a apresentação da simbologia que retrata o código alfanumérico que permite a identificação de tais habilidades interligadas aos possíveis anos de escolaridade e disciplinas aplicadas (observe a Figura 6).

Figura 6 - Descritor de Habilidades - BNCC



Legenda: Descritor de Habilidades e Competências - BNCC

Fonte: mec.gov.br

A BNCC já busca exigir o estudo da Álgebra já nos anos iniciais do Ensino Fundamental, de modo a introduzir as sequências numéricas e regularidades. Ao se buscar a determinação do conceito de variável, um dos pilares do presente trabalho, tal conteúdo surge, pela primeira vez, a partir do 7º ano do Ensino Fundamental, onde se tem a discussão sobre variável e incógnita. A Tabela 2 apresenta os descritores da BNCC .

Tabela 2 - Unidade Temática x Objeto e Habilidade - 7º Ano - EF.

Unidade Temática	Objeto de Conhecimento	Habilidade
Álgebra	Linguagem algébrica: variável e incógnita	(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita. (EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.

Legenda: Primeira aparição de variável e incógnita

Fonte: mec.gov.br

Quando se trata de Funções, a Tabela 3 apresenta como o conceito surge pela primeira vez, no 9º ano do Ensino Fundamental.

Tabela 3 - Unidade Temática x Objeto e Habilidade

Unidade Temática	Objeto de Conhecimento	Habilidade
Álgebra	Funções: representações numérica, algébrica e gráfica	(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

Legenda: Primeira aparição de função e conceito

Fonte: mec.gov.br

Obviamente, o estudo da álgebra, variáveis e funções, não se restringe aos dois anos apresentados. Em outros conteúdos, incluindo os apresentados no 8º ano do Ensino Fundamental, tem-se o uso de conhecimentos referentes a funções e variáveis, ainda que indiretamente. É importante ressaltar que o intuito desta seção foi indicar o ponto em que os termos variáveis e função foram de fato iniciados.

Ao analisar as habilidades, na BNCC, o Ensino Médio, além de uma presença mais

marcante dos conteúdos referentes às funções, os mesmos são apresentados de uma maneira mais esmiuçada e, conforme indicado nas competências exigidas, é possível perceber um destaque na compreensão dos conceitos.

As habilidades e competências não estão definidas diretamente por ano de escolaridade, cabendo ao professor, mediante a sua realidade escolar, determinar a qual ano determinado conteúdo será apresentado. Dentre as habilidades exigidas no Ensino Médio, a Tabela 4 apresenta aquelas que tratam especificamente de conceito e variável :

Tabela 4 - Competências e habilidades do Ensino Médio que envolvem conceito e variável

Competência Específica	Es-	Habilidade
1		(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolva a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
2		(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.
4		(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
5		(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Legenda: Função e variável no ensino médio

Fonte: mec.gov.br

Naturalmente a Base Nacional Comum Curricular também exige o tratamento esmiuçado dos diversos tipos de funções (linear, quadrática, exponencial, dentre outras) assim como seus temas correlatos (progressões, juros simples, compostos,...). Nesse contexto, pode-se observar a importância dada a interpretação, construção do conhecimento e análise e resolução de problemas, ante a apresentação de definições.

3.2 Uma breve apresentação sobre o PNLD e sua aplicação na SME-RJ e SEEDUC-RJ.

De acordo com o portal do MEC, o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) é um programa federal de análise, compra e distribuição gratuita de livros didáticos, pedagógicos e também literários para escolas da rede pública de ensino Básico além de outras instituições de educação infantil, filantrópicas ou confessionais que não possuem fins lucrativos e sejam conveniadas ao poder público (BRASIL, 2019).

Com relação à escolha dos materiais, cabe à própria escola a realização. Os materiais devem estar inscritos no PNLD e devidamente aprovados em avaliações coordenadas pelo Ministério da Educação e, a partir disso, as secretarias regionais de ensino estipulam a metodologia de definição do livro didático para a escolha durante o período de vigência.

Esta seção apresenta, de maneira muito breve, duas realidades distintas: uma escola da Secretaria Municipal de Ensino do Rio de Janeiro (SME/RJ) e uma escola da Secretaria Estadual de Educação do Rio de Janeiro (SEEDUC/RJ) situada no município de Duque de Caxias.

A Escola Municipal Zélia Braune é uma escola vinculada à SME/RJ, situada no bairro Jardim América, pertencente à 4ª Coordenadoria Regional de Ensino e atende apenas os anos finais do Ensino Fundamental. O Colégio Estadual Fernando Figueiredo, situada em Imbariê, Duque de Caxias, pertence a 5ª Metropolitana da Secretaria Estadual de Educação do Rio de Janeiro. Tal escola possui uma realidade interessante, visto que a rede municipal de Duque de Caxias não atende por completo o Ensino Fundamental, cabendo à Rede Estadual de Ensino também oferecer tal modalidade de ensino.

Apesar de situarem em municípios distintos, a realidade das duas unidades de ensino, no que tange aos anos finais do Ensino Fundamental, é bem semelhante. Os alunos encontram-se na faixa etária compreendida entre 10 e 15 anos, estão dispostos apenas nos turnos da manhã e tarde e são moradores de bairros periféricos das cidades destacadas.

As escolas participaram do PNLD 2019, com validade para os quatro anos seguintes, cuja metodologia de escolha de livros se deu através da análise pelos docentes de cada unidade dos títulos disponíveis no programa e, a partir da definição de dois títulos, um prioridade e um suplente, o governo federal realiza a distribuição buscando conciliar a prioridade da unidade escolar e quantidade de títulos disponíveis. Em ambas as escolas, o título prioridade foi contemplado e distribuído junto a alunos e professores.

A equipe docente do Colégio Estadual Fernando Figueiredo optou pela coleção Projeto Teláris de Luiz Roberto Dante. O corpo docente da Escola Municipal Zélia Braune adotou o texto Matemática Bianchini, cujo autor é Edwaldo Bianchini.

3.2.1 Uma breve descrição dos livros didáticos

No decorrer do presente texto, é realizado um breve relato sobre os títulos adotados pelas escolas, levando-se em consideração o conceito de variável e como ele é disposto junto aos anos de escolaridade do segundo segmento do Ensino Fundamental. É importante destacar que o objetivo não é avaliar os conteúdos apresentados, porém descrever se o conceito de variável é apresentado em cada coleção e os anos de escolaridade que contemplam tal conteúdo.

3.2.1.1 Projeto Teláris

Conforme mencionado anteriormente, esta coleção é adotada no Colégio Estadual Fernando Figueiredo e se trata de uma bibliografia de grande referência junto aos professores do ensino básico. Seu autor, Luiz Roberto Dante, atua há anos na produção de livros didáticos e possui grande aceitação junto aos docentes.

Em sua obra do 6^o ano do Ensino Fundamental, Dante (2020a) não faz uma referência formal sobre variável, porém utiliza de atividades onde o educando possa, ainda que de maneira indireta, familiarizar-se com a variável abordada como um valor desconhecido. A Figura 7 apresenta um exemplo de abordagem de variável em exercícios do 6^o ano:

Figura 7 - Atividade envolvendo variável- 6^o Ano

78 ▶ Pedro, Paulo e José são irmãos. Juntos eles têm 48 miniaturas de bonecos. Paulo tem o dobro de miniaturas de José e Pedro tem o triplo de miniaturas de José. Quantas miniaturas cada um tem?

Legenda: Uso de variável como valor desconhecido

Fonte: Dante (2020a, p.57)

Ainda no 6^o ano, Dante também introduz em suas questões a variável como relação funcional. Novamente não há uma formalização de tal abordagem, porém utiliza o conceito de físico de velocidade média, para que o aluno se permita a pensar sobre tais relações. Desse modo, a seguinte atividade é apresentada na Figura 8.

Figura 8 - Atividade envolvendo variável - 6º ano

- Um trem tem 1 km de medida de comprimento. Ele vai atravessar um túnel de 1 km de medida de extensão a uma velocidade que mede 1 km por minuto. Quanto tempo esse trem levará para atravessar o túnel?

Legenda: Uso de variável como relação funcional

Fonte: Dante (2020a, p. 57)

Enfim, novamente reforçando, por mais que haja uma abordagem de variável por meio de exercícios contextualizados, no livro texto do 6º ano do Ensino Fundamental, não há formalização alguma acerca do tema proposto.

Ao se tratar do 7º ano do Ensino Fundamental, Dante (2020b) começa, efetivamente, a realizar uma abordagem formal sobre o conceito de variável como incógnita trabalhando temas correlatos. A tabela correlaciona as unidades temáticas adotadas no livro (1ª coluna) com as devidas habilidades propostas na BNCC. Observe a Tabela 5:

Tabela 5 - Temas Algébricos e Habilidades BNCC - 7º Ano

Linguagem algébrica: variável e incógnita	(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolos, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita
Linguagem algébrica: variável e incógnita	(EF07MA14) Classificar seqüências e recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na Matemática, mas também nas Artes e na Literatura.
Linguagem algébrica: variável e incógnita	(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em seqüências numéricas.
Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma seqüência numérica.	(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma seqüência numérica são, ou não, equivalentes.
Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.
Equações polinomiais do 1º grau	(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.

Legenda: Objetos de Conhecimento x Habilidades BNCC

Fonte: Dante (2020b, p. XXII)

Dessa forma, Dante (2020b) insire de fato a abordagem do conceitos de maneira

direta, dedicando capítulos de sua obra para a realização dos mesmos e, pensando no modelo 3UV de Paula et al. (2019) que, no presente trabalho, foi comentado na descrição qualitativa do estado da questão, a variável é aqui abordada tanto como valor desconhecido ao se trabalhar expressões algébricas, quanto como incógnita na introdução de equações do 1º grau com uma incógnita.

Essa abordagem direta é realizada pelo autor em apenas um capítulo que é subdividido em três seções:

1. Expressões algébricas - onde é descrito a variável como valor desconhecido;
2. Equações - neste subcapítulo é descrito o conceito de incógnita, raízes, soluções de uma equação e equivalência;
3. Equações do primeiro grau com uma incógnita - onde há a formalização das equações desse tipo e trabalhado seus temas correlatos.

A Figura 9 ilustra a forma como o autor setoriza em seu volume dedicado ao 7º ano os conceitos referentes ao ensino de variável.

Figura 9 - Índice referente a Álgebra - 7º Ano

Capítulo 4		
Expressões algébricas e equações do 1º grau 94		
1 Expressões algébricas 96		
Máquinas programadas para gerar operações 98		
Expressões algébricas equivalentes 99		
Valor numérico de uma expressão algébrica 100		
Restrições para o denominador 101		
Sequências e expressões algébricas 103		
Leitura 106		
Jogos 108		
	2 Equações 109	
	Incógnita de uma equação 110	
	Solução ou raiz de uma equação 110	
	Conjunto universo e conjunto solução de uma equação 110	
	Equações equivalentes 111	
	Jogos 112	
		3 Equações do 1º grau com 1 incógnita 113
		Propriedades fundamentais da igualdade 113
		Resolução de equações do 1º grau com 1 incógnita 113
		Explorando a ideia de equilíbrio 116
		Outras situações-problema que envolvem a resolução de equações do 1º grau com 1 incógnita 121
		Leitura 126
		Revisando seus conhecimentos 128
		Testes oficiais 130
		Verifique o que estudou 131

Legenda: Descrição do índice referente a abordagem algébrica 7º ano

Fonte: Dante (2020b, p.7)

Naturalmente, a partir da abordagem desses temas, o livro texto se desenrola ligando os mesmos com os demais conteúdos que são tratados ao longo de sua apresentação.

O livro-texto do 8º ano proporciona uma abordagem de variável mais profunda, de modo que trabalha expressões algébricas, detalhando a variável como o valor desconhecido e mencionando o que ocorre com uma expressão algébrica a partir do momento que valores numéricos são determinados para suas variáveis.

A Tabela ?? que se segue aborda os temas centrais do livro texto do 8º ano com as habilidades descritas na BNCC.

Tabela 6 - Temas Algébricos e Habilidades BNCC - 8º Ano

Valor numérico de expressões algébricas	(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas utilizando as propriedades das operações.
Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano	(EF08MA07) Associar uma equação linear do 1º grau com duas incógnitas no plano cartesiano.
Sistemas de equações do 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano	(EF08MA08) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.
Equação polinomial do 2º grau do tipo $ax = b$	(EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações do tipo $ax = b$.
Sequências recursivas e não recursivas	(EF08MA10) Identificar as regularidades de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita identificar os números ou as figuras seguintes.
Sequências recursivas e não recursivas	(EF08MA11) Identificar as regularidades de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita identificar os números seguintes.
Variação de grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais	(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano.
Variação de grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais	(EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

Legenda: Apresentação de temas centrais do 8º ano e suas respectivas habilidades do BNCC

Fonte: Dante (2020c, p. XXII)

Dito isso, o livro divide a abordagem dos conteúdos em dois capítulos centrais. No Capítulo 3, o texto discute tanto as expressões algébricas quanto a estrutura de um polinômio (termos, grau, operações,...), abordando a variável como um valor desconhecido. A partir desses estudos, o autor já aborda um caso particular de equações do segundo grau ($ax^2 = b, a \neq 0$). Outro ponto importante, no Capítulo 3, é a correlação entre proporcionalidade e gráficos, o que pode permitir, ainda no 8º ano, uma visão intuitiva do conceito gráfico de função. A Figura 10 apresenta a descrição desses conteúdos.

Figura 10 - Apresentação do capítulo 3 - 8º Ano

Capítulo 3	
Expressões algébricas, equações e proporcionalidade	76
1º Expressões algébricas	78
A ideia de expressão algébrica	78
Valor numérico de uma expressão algébrica	78
Expressões algébricas particulares:	
monômios	79
Monômios semelhantes ou termos semelhantes	79
Polinômios	81
Grau de um polinômio	82
Operações com polinômios	83
2º Equações	88
Equação do 2º grau do tipo $ax^2 = b$, com $a \neq 0$	89
Matemática e tecnologia	91
3º Proporcionalidade	92
Regra de 3 composta	93
Proporcionalidade e gráfico	96

Legenda: Descrição dos conteúdos abordados no capítulo 3 do 8º ano

Fonte: Dante (2020c, p. 7)

Após o Capítulo 3, o próximo capítulo do livro-texto do 8º ano dedicado a Álgebra e, conseqüentemente, que realiza a abordagem de variável, é o de número 5 (o Capítulo 4 é dedicado a outro assunto). O capítulo em questão irá novamente trabalhar com variável como incógnita na medida que realiza os estudos de equações e sistemas de equações, ambos do primeiro grau, desta vez com duas incógnitas, conforme ilustra a Figura 11.

Figura 11 - Capítulo 5 - 8º ano

Capítulo 5	
Sistemas de equações do 1º grau com 2 incógnitas	134
1º Equações do 1º grau com 2 incógnitas	136
Gráfico das soluções de uma equação do 1º grau com 2 incógnitas	138
2º Sistemas de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas	139
Soluções de um sistema de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas	140
Métodos de resolução de um sistema de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas	142
Classificação de sistemas de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas quanto ao número de soluções	147
Resolução de problemas que envolvem sistemas de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas	151

Legenda: Descrição dos conteúdos abordados no capítulo 5 no livro texto do 8º ano

Fonte: Dante (2020c, p. 8)

Observe que, novamente, há uma abordagem gráfica acerca de variável. Tratando-se de equações do 1º grau com uma variável, o aluno já tem seu primeiro contato, ainda que de maneira não-formal, sobre a linearidade de funções de grau 1 e a equação da reta no plano cartesiano.

Finalmente, ao se observar o texto do 9º ano, além de iniciar formalmente o conceito de variável como relação funcional, Dante (2020d) trabalha com as raízes de uma equação do segundo grau, seja completa, seja incompleta. Outro fator interessante a ser ressaltado é a indicação de se aplicar novamente a proporcionalidade entre grandezas. Como neste momento da obra, já ocorre introdução da relação funcional, o conceito de proporcionalidade pode ser inserido nesse mesmo contexto.

A Tabela 7, a seguir apresenta os temas algébricos centrais abordados no livro texto do 9º ano, destacando também as habilidades específicas de cada tema.

Tabela 7 - Temas Algébricos e Habilidades BNCC - 9º Ano

Funções: representações numérica, algébrica e gráfica.	(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência biunívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
Razão entre grandezas de espécies diferentes	(EF09MA07) Resolver problemas que envolvam razões entre grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.
Grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais	(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.
Expressões algébricas: fatoração de produtos notáveis/ Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações	(EF08MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

Legenda: Descrição dos temas indicados e as respectivas habilidades BNCC do 9º ano.

Fonte: Dante (2020d, p. XXV)

Assim como no livro do 8º ano os temas centrais apresentados no presente volume, também são divididos em dois capítulos principais. No Capítulo 2, há uma abordagem primária de produtos notáveis e também a fatoração polinomial. Essa abordagem atua como uma ferramenta para o retorno de variável como incógnita ao se determinar as raízes de uma equação do segundo grau. Ressalta-se que desta vez a abordagem dessas equações será de todos os possíveis casos ($ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$). A figura a seguir, Figura 12, ilustrará apenas o índice do Capítulo 2 com o caso particular que será a apresentação das

equações do 2º grau.

Figura 12 - Capítulo 2 - 9º ano

Capítulo 2	
Produtos notáveis, fatoração e equações do 2º grau	34
3 Equações do 2º grau com 1 incógnita	48
Equações do 2º grau completas e equações do 2º grau incompletas	49
Raízes ou soluções de uma equação	50
Resolução de equações incompletas do 2º grau	51
Resolução de equações completas do 2º grau cujo primeiro membro é um trinômio quadrado perfeito	54
Resolução de quaisquer equações completas do 2º grau	55
Jogos	60
Observações referentes à resolução de equações do 2º grau	61
Determinação de uma equação do 2º grau conhecidas as raízes	63
Um novo caso de fatoração: trinômio do 2º grau	64
Outras situações que envolvem equações do 2º grau	65
Revisando seus conhecimentos	67
Testes oficiais	68
Verifique o que estudou	69

Legenda: Descrição do índice de equações do 2º grau

Fonte: Dante (2020d, p. 6)

A abordagem de variável como relação funcional é dada no Capítulo 4 do livro de Dante (2020d, p.110). Como já dito, dessa vez há a formalização da variável como relação funcional abordando problemas que envolvem o conceito de função. Ao se desenvolver o estudo das funções, é possível observar que o autor realiza a sua representação gráfica e também a determinação de seus zeros (raízes) (DANTE, 2020d, p.128).

Figura 13 - Capítulo 4 - 9º ano

Capítulo 4	
Explorando a ideia de função	110
1 A ideia intuitiva de função	112
Função: uma relação de dependência unívoca entre 2 variáveis	114
2 A noção de função por meio de conjuntos	117
Definição e notação	118
Valor de uma função	118
Domínio, contradomínio e conjunto imagem	121
Leitura	123
3 Representação gráfica de uma função	125
Construção do gráfico de uma função	126
Zeros de uma função	128
Reconhecendo se um gráfico é de uma função	129
Resolução de problemas que envolvem o conceito de função	131
Função afim	132
Gráfico de uma função afim	133
Funções e sistemas de 2 equações do 1º grau	137

Legenda: Descrição do Capítulo 4: Funções

Fonte: Dante (2020d, p. 7)

Dois destaques são relevantes nessa rápida observação do índice do 9º ano:

- A apresentação de produtos notáveis e fatoração que, em boa parte das obras, é realizada em livros do 8º ano;
- O livro se limita apenas as funções do 1º grau. Visto que equações do 2º grau já foram apresentadas, as funções do 2º grau também poderiam ser trabalhadas neste livro. Esta apresentação também é realizada em outras obras do Ensino Fundamental.

3.2.1.2 Matemática Bianchini

A coleção Matemática Bianchini é a base adotada na Escola Municipal Zélia Braune, unidade pertencente à Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro. A escolha desta obra se deu mediante ao consenso do grupo de docentes atuantes na unidade que, após uma análise das obras referenciadas, acreditou que era a que melhor atendia as necessidades da comunidade escolar.

Ao observar o volume referente ao sexto ano, o texto já apresenta uma discussão algébrica formal onde, diferentemente da obra de Dante (2020a), já pauta a discussão variável, além da realização de generalizações. A Figura 14 abaixo ilustra o capítulo em que se trata esse tema:

Figura 14 - Bianchini - Capítulo 5 - 6º ano

CAPÍTULO 5 Um pouco de Álgebra		109
1. Apresentando a variável	110
2. Generalizando conclusões	112
3. Critérios de divisibilidade	113
Trabalhando a informação - Construindo um gráfico de colunas	116
4. Propriedades da igualdade	118
Para saber mais - A temperatura e a Álgebra	119
Diversificando - Desafiando a sua inteligência	122

Legenda: Descrição do Capítulo 6 - Álgebra

Fonte: Bianchini (2018a, p. 7)

Nesse sentido, já aparece uma diferença entre as obras observadas, Teláris e Bianchini, visto que Dante (2020a) trabalha com variáveis através de situações problemas, sem nenhuma formalização. Ressalta-se que Bianchini (2018a) propõe uma formalização inicial, porém não há nenhum tipo de aprofundamento.

O texto do 7º Ano inicia o aprofundamento de variável, dedicando três capítulos para sua abordagem. No Capítulo 5 ocorre a introdução das equações Bianchini (2018a,

p. 109). Nesse momento do livro texto, o autor realiza uma introdução de expressões algébricas, onde se aborda a variável como valor desconhecido e, desenrolando suas propriedades, introduz também a variável como incógnita na medida que realiza o estudo da equações do 1º grau. A Figura 15 apresenta a descrição do capítulo em questão.

Figura 15 - Bianchini - Capítulo 5 - 7º ano

CAPÍTULO 5		Equações	110
1.	Um pouco de História		111
2.	Números representados por letras		112
3.	Valor numérico de uma expressão algébrica		115
4.	Termos algébricos		117
	Termos semelhantes		118
	Simplificação de expressões algébricas		118
5.	Sentenças matemáticas e equações		120
	Equações		121
	Raiz de uma equação		122
	Conjunto universo e solução de uma equação		123
6.	Equações do 1º grau com uma incógnita		125
	Equações equivalentes		125
7.	Resolução de equações		126
	Equacionando problemas		129
	Para saber mais - A Matemática na História		134
	Voltando aos problemas históricos		135
	Trabalhando a informação - Média e estimativas		138
	Diversificando - Problemas de papiros e um pouco de "mágica"		140

Legenda: Descrição do Capítulo 5 - Equações

Fonte: Bianchini (2018b, p. 7)

No capítulo 6, Bianchini (2018b, p. 141) continua com a abordagem algébrica ao se trabalhar com as inequações, denotando as semelhanças e, principalmente, principais diferenças das equações, definindo matematicamente as desigualdades, conforme ilustra a Figura 16.

Figura 16 - Bianchini - Capítulo 6 - 7º ano

CAPÍTULO 6		Inequações	141
1.	O que é inequação?		142
	Para saber mais - Resolver problemas é uma arte!		144
2.	Solução de uma inequação		146
3.	Resolução de inequações		147
	Propriedades da desigualdade		149
	Resolvendo problemas com inequações		151
	Trabalhando a informação - Alfabetizando com gráficos e tabelas		154
	Diversificando - Pesagem de bolinhas		157

Legenda: Descrição do Capítulo 6 - Inequações

Fonte: Bianchini (2018b, p. 8)

Finalizando o trabalho algébrico do 7º ano, conforme a Figura 17, o autor aborda os sistemas de equações, discutindo elementos como par ordenado e plano cartesiano.

Naturalmente, o autor introduz as equações do 1º grau com duas incógnitas, encerrando o capítulo com os sistemas de equações.

Figura 17 - Bianchini -Capítulo 7 - 7º ano

CAPÍTULO 7 Sistemas de equações		158
1. Par ordenado e plano cartesiano		159
Par ordenado		159
Plano cartesiano		159
2. Equações do 1º grau com duas incógnitas		162
Trabalhando a informação – Possibilidades e probabilidades		165
3. Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas		166
Resolução de sistemas		167
Trabalhando a informação – Interpretando um gráfico de linha		171

Legenda: Descrição do Capítulo 7 - Sistemas de Equações do 1º Grau

Fonte: Bianchini (2018b, p. 8)

Novamente, ocorre uma diferença com relação a Dante no que diz respeito a abordagem dos conteúdos. Bianchini trabalha com sistemas de equações do 1º grau já no 7º ano, ao passo que Dante aborda tal conteúdo apenas no 8º ano.

No volume 3, referente ao 8º ano, ocorre uma formalização entre variável e incógnita, onde há uma discussão entre tais conceitos. Nesse momento, o autor trabalha de maneira mais aprofundada as expressões algébricas de modo a apresentar monômios, polinômios, frações algébricas e operações afins. A Figura 18 ilustra o índice dos capítulos trabalhados:

Figura 18 - Bianchini - Capítulo 4 e Capítulo 5 - 8º ano

CAPÍTULO 4 Cálculo algébrico		91	CAPÍTULO 5 Polinômios e frações algébricas		108
1. Incógnita e variável		92	1. Polinômios		109
2. Expressões algébricas		93	2. Operações com polinômios		110
Valor numérico de uma expressão algébrica		94	Adição de polinômios		110
3. Monômios		98	Subtração de polinômios		112
Monômios semelhantes		98	Multiplicação de polinômio por monômio		113
Para saber mais – Cálculo algébrico e dízima periódica		100	Multiplicação de polinômio por polinômio		115
4. Operações com monômios		101	Divisão de polinômio por monômio		116
Adição algébrica de monômios		101	Polinômios com uma só variável		117
Multiplicação e divisão de monômios		103	Divisão de polinômio por polinômio		118
Potenciação de monômios		104	Trabalhando a informação – Interpolação e extrapolação gráfica		121
Diversificando – Troca de e-mails		107	3. Frações algébricas		123
			Valor numérico de fração algébrica		123

Legenda: Descrição dos Capítulo 4 e 5 - Cálculo algébrico e Polinômios

Fonte: Bianchini (2018c, p. 7)

Novamente, observando as diferenças com Dante (2020d), a abordagem de produtos notáveis e fatoração feita por esse autor ocorre apenas no volume 4 (9º ano), ao passo que, na obra de Bianchini (2018d), há a discussão desse tema já no 8º ano. Observe a

Figura 19, onde esses conteúdos são apresentados.

Figura 19 - Bianchini - Capítulo 6 - 8º ano

CAPÍTULO 6		Produtos notáveis e fatoração	126
1. Os produtos notáveis			127
Quadrado da soma de dois termos			127
Para saber mais – A Matemática na História			131
Quadrado da diferença de dois termos			132
Produto da soma pela diferença de dois termos			134
Cubo da soma e da diferença de dois termos			136
2. Fatoração de polinômios			138
Para saber mais – Fatorando expressões numéricas			139
Fatoração colocando em evidência um fator comum			140
Fatoração por agrupamento			142
Fatoração da diferença de dois quadrados			144
Fatoração do trinômio quadrado perfeito			146
Fatoração da diferença e da soma de dois cubos			149
3. Simplificando frações algébricas			150
Problemas e equações			152
Trabalhando a informação – Construindo um gráfico de barras			154

Legenda: Descrição do Capítulo 6 - Produtos notáveis e fatoração

Fonte: Bianchini (2018c, p. 7 - 8)

A Figura 20 apresenta o Capítulo 10 do livro-texto do 8º ano onde Bianchini (2018c, p. 210) realiza a introdução de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, tema que encerra a abordagem de variável neste ano de escolaridade.

Figura 20 - Bianchini - Capítulo 10 - 8º ano

CAPÍTULO 10		Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas	210
1. Revisão e desenvolvimento da resolução de sistemas do 1º grau			211
Método da substituição			212
Método da adição			213
Para saber mais – Método da comparação			216
Trabalhando a informação – Composição de um gráfico de colunas formadas a partir de outros gráficos			217
2. Representações gráficas			218
Soluções de uma equação do 1º grau com duas incógnitas			218
Solução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas			220
Para saber mais – Raiz quadrada ou diferença de dois quadrados?			221
3. Classificação de um sistema de equações			222
Sistema determinado			222
Sistema impossível			223
Sistema indeterminado			224
Diversificando – Onde está o erro?			227

Legenda: Descrição do Capítulo 10 - Sistemas de equações do 1º grau

Fonte: Bianchini (2018c, p. 9)

Finalizando a apresentação da coleção de Bianchini (2018d), o texto do 9º ano também aborda o conceito de variável em três capítulos. No primeiro deles, a variável será trabalhada como relação entre grandezas, ao desenrolar o estudo da proporcionalidade. Desse modo, ainda que não haja a formalização, algumas relações funcionais já são analisadas, como a Figura 21 apresenta logo a seguir.

Figura 21 - Bianchini -Capítulo 3 - 9º ano

CAPÍTULO 3		Grandezas proporcionais	62
1. Razão entre grandezas de naturezas diferentes			63
Gramatura de um papel			63
Velocidade média			63
Densidade demográfica			64
Consumo médio			64
Densidade absoluta de uma matéria			64
Trabalhando a informação – Comparando gráficos de barras			67
2. A proporcionalidade entre grandezas			69
3. Grandezas diretamente proporcionais			72
Para saber mais – Medida de arcos de uma circunferência			76
4. Grandezas inversamente proporcionais			78
5. Regra de três simples			80
Para saber mais – Resolvendo problemas com o auxílio de um quadro			83
Trabalhando a informação – Construindo gráficos de barras e de colunas			84
6. Regra de três composta			86

Legenda: Descrição do Capítulo 3 - Grandezas proporcionais

Fonte: Bianchini (2018d, p. 7)

A abordagem de variável como incógnita retorna ao volume 4 na medida em que se introduz as equações do 2º grau com uma incógnita analisando seus casos e resoluções. Cabe ressaltar que Dante (2020c) já realiza a resolução de equações particulares do 2º grau já no 8º ano. A Figura 22 apresenta a ordem em que Bianchini (2018d) desenvolveu esses temas.

Figura 22 - Bianchini - Capítulo 7 - 9º ano

CAPÍTULO 7		Equações do 2º grau	143
1. Equações do 2º grau com uma incógnita			144
Raízes de uma equação do 2º grau			146
2. Resolvendo equações do 2º grau			148
Equações do 2º grau incompletas			148
Equações do 2º grau completas			150
3. A fórmula resolvente de uma equação do 2º grau			155
Para saber mais – Número de ouro			157
4. Estudando as raízes de uma equação do 2º grau			160
Relações de Girard			162
Composição de uma equação do 2º grau			164
Trabalhando a informação – A leitura de um mapa, anamorfose geográfica			166

Legenda: Descrição do Capítulo 7 - Equações do 2º grau

Fonte: Bianchini (2018d, p. 8)

Finalmente, a relação funcional é formalmente apresentada na obra de Bianchini (2018d). Ressalta-se que, diferentemente de Dante (2020d), o autor conceitua as funções de primeiro e segundo graus, analisando seus sinais, gráficos e, em particular para equações quadráticas, o estudo de seus máximos e mínimos, conforme ilustrado na Figura 23.

Figura 23 - Bianchini - Capítulo 10 - 9º ano

CAPÍTULO 10 Estudo das funções		216		
1. Conceito de função		217	3. Função polinomial do 2º grau	238
Para saber mais – Função, um longo caminho na história da Matemática		223	Gráfico de uma função polinomial do 2º grau	239
Gráfico de uma função		224	Zeros de uma função polinomial do 2º grau	243
Como reconhecer o gráfico de uma função		226	Coordenadas do vértice da parábola	245
2. Função polinomial do 1º grau		229	Valor máximo e valor mínimo de uma função polinomial do 2º grau	246
Gráfico de uma função polinomial do 1º grau		230	Construção do gráfico de uma função polinomial do 2º grau	248
Variação de uma função polinomial do 1º grau		233	Para saber mais – Uso do computador: parábolas	250
Para saber mais – Uso do computador: retas		234	Estudo do sinal de uma função polinomial do 2º grau	251
Estudo do sinal de uma função polinomial do 1º grau		235	Para saber mais – Sistema de equações do 2º grau	252
Para saber mais – Proporcionalidade na função linear		237	Diversificando – Cercando	256

Legenda: Descrição do Capítulo 9 - Estudo das funções

Fonte: Bianchini (2018d, p. 9)

De uma maneira geral, a coleção Matemática Bianchini, apresenta uma proposta de conteúdos um tanto quanto mais elaborada, introduzindo uma maior quantidade de usos de variável ao se comparar com a obra Projeto Teláris.

4 UMA BREVE DESCRIÇÃO SOBRE CONCEITO

Segundo Ribeiro (2008, p. 26), quando se trata de planejar situações de ensino, é ímportante o pleno domínio dos conceitos da respectiva área de conhecimento a ser ensinada, que são denominados saberes disciplinares, além de diversos outros procedimentos que viabilizam uma aprendizagem significativa.

Nessa linha de pensamento, cabem perguntas do tipo:

- De fato os docentes apresentam os conceitos a serem trabalhados?
- Há um processo de formação de conceitos junto aos alunos ou ocorre apenas uma apresentação de definições?
- O quê de fato é conceito?

Sendo assim, há uma proposição da análise das respostas de tais perguntas em uma tentativa de observar lacunas existentes no processo de ensino-aprendizagem, realizando uma reflexão sobre a importância de entender o conceito e estruturá-lo de maneira sólida no alunado do Ensino Básico.

Para aprofundar o conhecimento sobre os temas descritos nas três perguntas apresentadas anteriormente, as seções seguintes apresentam de maneira sucinta a ótica de Vigotsky sobre conceitos e como os mesmos devem ser estruturados e abordados.

4.1 O conceito segundo Vigotsky

Um dos grandes estudiosos sobre o ensino de conceitos, Vigotsky (2002) *apud* Ribeiro (2008) destaca a separação de conceitos espontâneos e conceitos específicos.

Os conceitos espontâneos são definidos por Vigotsky como aqueles que são adquiridos mediante uma relação espontânea estabelecida diretamente com os objetos reais (RIBEIRO, 2008). Esta autora destaca o fato de que tal situação não carece de um nível de consciência ou quaisquer arbitrariedades de operações, tendo em vista que o aluno apega-se a qualquer característica do objeto de estudo. Nesse sentido, surge a assimilação, onde há a independência da obrigatoriedade da atividade de ensino na obtenção do conhecimento.

É importante destacar que, mesmo com as lacunas deixadas pelos conceitos espontâneos, como a assimilação via tentativa e erro, Vigotsky (2002) *apud* Ribeiro (2008) indica a necessidade da previsão dessa modalidade de conceito na elaboração do planejamento docente, buscando fundamentar o desenvolvimento dos conceitos científicos. Vale

ressaltar que Vigotsky foi um grande crítico do verbalismo conceitual no qual considera que a formação de conceitos se dá mediante a atividade consciente (RIBEIRO, 2008).

A criança adquire consciência dos seus conceitos espontâneos relativamente tarde; a capacidade de defini-los por meio de palavras, de operar com eles à vontade, aparece muito tempo depois de ter adquirido os conceitos. Ela possui o conceito [...], mas não está consciente do seu próprio ato de pensamento. O desenvolvimento de um conceito científico, por outro lado, geralmente começa com sua definição verbal e com sua aplicação em operações não-espontâneas [...] Poder-se-ia dizer que o desenvolvimento dos conceitos espontâneos da criança é ascendente (indutivo), enquanto o desenvolvimento dos seus conceitos científicos é descendente (dedutivo) (VIGOTSKY (1991, p.93) *apud* NÉBIAS (1999)).

Os conceitos científicos aparecem como aqueles que são obtidos via introdução de procedimentos lógicos como atividades orientadas e conscientes. O planejamento docente deve ser realizado de maneira compartilhada e apoiado em fundamentos teóricos de internalização das atividades.

A introdução dos conceitos científicos não abre mão dos conceitos espontâneos, pelo contrário, no aprendizado escolar há também um estabelecimento dos conceitos espontâneos. Vigotsky (2002) *apud* Nébias(1999) destaca a importância da atividade na apropriação destes conceitos científicos. Dessa forma, apropriação de conhecimentos é constituída a partir de habilidades formadas mediante a um processo sistematizado. De acordo com Nébias (1999), Vigotsky compara a aprendizagem de conceitos científicos ao aprendizado de uma língua estrangeira:

A aprendizagem dos conceitos científicos ou da segunda língua na escola baseia-se num conjunto de significados da palavra, desenvolvidos previamente e originários das experiências cotidianas da criança. Este conhecimento espontaneamente adquirido medeia a aprendizagem do novo. Assim, os conceitos cotidianos estão 'entre o sistema conceitual e o mundo dos objetos' exatamente da mesma maneira que a primeira língua de cada um medeia os pensamentos e a segunda língua (PANOFSKY et al.(1996, p.245-6), *apud* NÉBIAS (1999)).

Vigotsky (1991) *apud* (NÉBIAS, 1999) indica que o processo de formação de conceitos se inicia já na infância, apesar de também ressaltar que o amadurecimento das funções intelectuais básicas que de fato constituem o processo psicológico de tal processo formativo solidifica-se de fato na adolescência.

Quando se trata do processo formativo de um conceito, Vigotsky(1991) *apud* Nébias (1999, p. 134 - 135) sinaliza que três são as suas fases:

Fase 1 - Agregação desorganizada: Ocorrem amontoados vagos de objetos desiguais e os fatores perceptuais, neste momento, são irrelevantes. Destaca-se também o predomínio de sínteses, ainda que sejam de elementos díspares. Desse modo, de acordo com Vigotsky, uma criança de três anos e um adulto podem se entender visto que compartilham de um mesmo contexto, além de utilizarem palavras com significados iguais,

apesar de estarem baseadas em operações psicológicas distintas. Sendo assim, o conceito real ainda não está de fato desenvolvido.

Fase 2 - Pensamentos por complexos: Nessa fase há uma associação dos objetos não somente com impressões subjetivas da criança, indicando também que relações concretas e factuais que existem entre esses objetos, podendo mudar uma ou mais vezes durante o processo de ordenação. Ressalta-se que tais características selecionadas talvez pareçam irrelevantes para os adultos (DER VEER VALSINER, (1996), *apud* NÉBIAS (1999)).

Quando se toma um estágio mais avançado desta fase, Vigotsky (1991) *apud* Nébias (1999) destaca a identificação da combinação de objetos em grupos que compartilham características que os distinguem e, simultaneamente, se complementam. Desse modo, ao se dar a passagem para os conceitos propriamente ditos, tem-se o pseudoconceito, um último tipo de complexos.

Fase 3 - Grau de abstração: Nesta última fase de formação dos conceitos, existe a obrigação de viabilizar a simultaneidade da generalização (denominada união) com a diferenciação (denominada separação). Desse modo, há exigência da tomada consciente da atividade mental, visto que implica em uma relação especial com o objeto, onde internaliza-se o que de fato é primordial ao conceito e se compreende que o mesmo faz parte de um sistema. Sendo assim, primeiramente os conceitos potenciais são formados, fundamentados no isolamento de atributos comuns e, logo em seguida, os conceitos verdadeiros são formados. Vigotsky (1991) *apud* Nébias (1999) afirma que esta capacidade de abstração será dada na adolescência (NÉBIAS, 1999, p. 135).

Nébias (1999) comenta que, no pseudoconceito, a criança propõe uma generalização através de fenótipos apesar de que, psicologicamente, seu conceito ainda é muito diferente do conceito propriamente dito de um adulto. Esta autora ainda menciona o fato de que o pensamento por complexos é bem característico dos povos primitivos, de modo que uma dada palavra não porta o conceito de fato, mas “nome de família”, para grupos de objetos concretos, associados factualmente (NÉBIAS, 1999).

Vigotsky (1991) *apud* Nébias (1999) destaca também que os pseudoconceitos são característicos dos esquizofrênicos onde “regridem do pensamento conceitual para um nível primitivo, rico em imagens e símbolos”.

Ao contrário do que muitas vezes acontece em sala de aula, onde o aluno é capaz de realizar uma definição sem a devida compreensão do conceito, para Vigotsky, o adolescente é capaz da formação de conceitos antes de conseguir defini-los.

“No entanto, mesmo depois de ter aprendido a produzir conceitos, o adolescente não abandona as formas mais elementares; elas continuam a operar ainda por muito tempo, sendo na verdade predominantes em muitas áreas do seu pensamento. A adolescência é menos um período de consumação do que de crise e transição” (Vygotsky, 1991, p.68) *apud* Nébias (1999).

É importante destacar que, além da definição e caracterização dos conceitos científicos e conceitos espontâneos, Vigotsky leva em consideração a perspectiva histórico-cultural como base fundamental para o aprendizado. De acordo com (FERREIRA; SCHLICKMANN, 2022, p. 645), Vigotsky(1896-1934) pesquisou o desenvolvimento humano sempre em sua relação com o meio, destacando a dinamicidade e a dialeticidade dessa relação entre o indivíduo e meio mediada pelos signos, particularmente pela linguagem oral e escrita.

Mello (2004, p.136) observa que, na perspectiva histórico-cultural, a capacidade de aprender da criança fundamenta-se na potencialidade da criança em aprender tantas outras potencialidades, na medida que essa criança convive com outros indivíduos de maior faixa etária, como crianças mais velhas e adultos.

Para a teoria histórico-cultural, a criança nasce com uma única potencialidade, a potencialidade para aprender potencialidades; com uma única aptidão, a aptidão para aprender aptidões; com uma única capacidade, a capacidade ilimitada de aprender e, nesse processo, desenvolver sua inteligência - que se constitui mediante a linguagem oral, a atenção, a memória, o pensamento, o controle da própria conduta, a linguagem escrita, o desenho, o cálculo - e sua personalidade - a autoestima, os valores morais e éticos, a afetividade.

Nesse sentido, Mello (2004, p.136-137) destaca ainda a importância das gerações anteriores para a formação das gerações atuais e, além disso, ressalta que o processo de transformação cultural é dado mediante ao acesso que cada pessoa tem à determinada cultura, de modo que essa pessoa irá apropriar-se dessas características para viver em sua época.

4.2 As situações de aprendizagem escolar na formação dos conceitos.

Ainda que a criança não tenha ingressado na escola, um conjunto de conhecimentos informais já se constituiu. Este processo é resultado das relações construídas com as suas experiências e seu sistema de crenças sobre o mundo, que influenciam diretamente na obtenção de conhecimentos formais e é dado pela aprendizagem escolar (NÉBIAS, 1999)

Pines West (1984) apud Nébias (1999, p. 138), afirma que são em quatro as situações de aprendizagem escolar que contribuem diretamente na apropriação dos conceitos. A primeira delas, apresenta a situação de conflitos, descrevendo como há o confronto entre os conceitos espontâneos e científicos

1. Situação de conflito, quando os conceitos espontâneos e científicos se confrontam; isso implica no abandono de ideias que prevaleceram por um período de tempo, o que pode ser difícil para o sujeito, mesmo quando isso se dá com adultos.

Nébias (1999, p.138) toma as observações de Duarte (1996), onde houve uma análise sobre estudantes na disciplina de Biologia. Nessa análise os estudantes indicavam uma persistência de ideias alternativas que eram diferentes do que era proposto pela escola, de modo que este conflito tornou-se um entrave na aprendizagem do conhecimento científico propriamente dito.

Na segunda situação, Nébias (1999, p.138) apresenta a descrição da integralidade entre conceitos, mostrando quando os conceitos espontâneos podem ser usados para a estruturação do conhecimento científico.

2. Situação congruente, quando os conceitos se integram e não há necessidade de abandonar os conhecimentos espontâneos, que se integram em um todo maior.

Para exemplificar tal condição, Nébias (1999, p.138) relembra um exemplo mencionado por Ausubel sobre a concepção da criança quanto ao corpo humano ser um saco cheio de sangue. Evidentemente, o corpo humano sangra quase sempre e em quase todo o lugar espetado, por conta da extensão de seus vasos capilares.

Ao apresentar a terceira situação, Nébias (1999, p.138) comenta sobre a formalização dos conteúdos, de modo que o discente não apresenta a informalidade para a construção do conceito.

3. Situação formal-simbólica/zero-espontânea, quando existe pouco conhecimento espontâneo para interagir com o conhecimento formal apresentado na escola. Por exemplo, algumas reações de química orgânica.

Finalizando a descrição das situações de aprendizagem, a quarta situação descrita por Nébias (1999, p.138) apresenta como a situação espontânea é relevante na construção de determinados conhecimentos onde o conhecimento formal escolar não é tangente.

4. Situação espontânea/não instruída, quando o conhecimento espontâneo é extenso, rico e suficiente e não há conhecimento escolar correspondente a ser apresentado. É o caso das crenças e das metáforas culturais que têm poderosa influência na aquisição conceitual.

O ambiente de sala de aula é rico e simultaneamente conflitante. Cada aluno carrega em si uma quantidade significativa de conhecimentos sobre o mundo e seu funcionamento. Tais conhecimentos podem colidir com o que se é ensinado em sala de aula e, nesse sentido, o professor deve se empenhar para que não haja dificuldade na aprendizagem.

O professor certamente precisará, a todo momento, planejar metodologias que propiciem uma melhor compreensão e apropriação dos conceitos científicos, afastando o aluno de apresentar respostas corretas para que apenas a atividade escolar (por muitas vezes considerada inútil e sem sentido) seja realizada (NÉBIAS, 1999, p. 138).

É inegável que o processo de escolarização certamente terá um importante papel na formação dos conceitos científicos. Vale pensar que transmissão direta do professor e

memorização de palavras não devem ser os principais alicerces deste processo formativo. Outras funções intelectuais importantes devem ser implicadas, como atenção deliberada, memória lógica, abstração, capacidade de comparação e diferenciação (VASCONCELOS; MARCO, 2018, p. 5), exigindo uma organização didática que permita o desenvolvimento destas funções.

Quando se trata de uma perspectiva histórico-cultural, Ribeiro (2008, p. 68) enuncia que o conceito científico é entendido como categoria simbólica que reflete o conjunto de propriedades necessárias e suficientes e, ao mesmo tempo, permite a generalização de uma classe de objetos. A partir dessa linha de pensamento, o conceito científico possui conteúdo e extensão.

O conceito e sua construção não podem ser tratados como uma atividade passiva ou até mesmo a sua formação ser dada de forma associativa (VIGOSTSKY (1993) *apud* SCHOROEDER (2007)). Não pode ser tratado como estrutura imutável, ou ainda, isolado, de modo que a relação entre conceito e realidade é fundamental e a função conceitual atuará no sentido de comunicar, assimilar, entender, ou ainda, resolver problemas. Desse modo, a linguagem tem papel de destaque nesse procedimento (SCHROEDER, 2007).

5 METODOLOGIA

A fim de se aprofundar no que se é desenvolvido nas salas de aula do Ensino Básico, a presente pesquisa se propõe a ter um caráter inicial investigativo, observando junto aos docentes qual o seu conhecimento acerca do conceito de variável e as dificuldades de se ensinar tal tema. Certamente, é de extrema relevância explorar tais fenômenos que cercam o ensino de variáveis e “aumentar a compreensão de um fenômeno ainda pouco conhecido, ou de um problema de pesquisa ainda não perfeitamente delineado” (APPOLINÁRIO, 2011, p. 75).

Ainda destacando esse caráter exploratório da pesquisa, Severino (2007, p. 123 - 124) *apud* Del-Masso (2018) realiza a seguinte apresentação da importância deste tipo de trabalho:

A pesquisa exploratória busca apenas levantar informações sobre um determinado objeto, delimitando assim um campo de trabalho, mapeando as condições de manifestação desse objeto. Na verdade ela é uma preparação para a pesquisa explicativa (DEL-MASSO; COTTA; SANTOS, 2018, p. 10).

Naturalmente, não é uma tarefa simples quantificar quais problemas tangem o ensino de variáveis nas escolas, e também esta não é a linha central deste trabalho. Como a busca principal da pesquisa é a de entender as dificuldades da comunidade escolar, a abordagem qualitativa dos elementos obtidos na investigação será um caminho mais interessante. Rodrigues e Limena (2006), apresentam o caráter da abordagem qualitativa de uma pesquisa (*apud* Del-Masso 2018, p. 10):

Quando não emprega procedimentos estatísticos ou não tem, como objetivo principal, abordar o problema a partir desses procedimentos. É utilizada para investigar problemas que os procedimentos estatísticos não podem alcançar ou representar, em virtude de sua complexidade. Entre esses problemas, poderemos destacar aspectos psicológicos, opiniões, comportamentos, atitudes de indivíduos ou de grupos. Por meio da abordagem qualitativa, o pesquisador tenta descrever a complexidade de uma determinada hipótese, analisar a interação entre as variáveis e ainda interpretar os dados, fatos e teorias[...] (DEL-MASSO; COTTA; SANTOS, 2018, p. 10).

Como já citado no primeiro parágrafo desta seção, o objeto de estudos são os professores de Matemática do ensino básico, preferencialmente os que atuam na rede pública de ensino. O único critério de seleção dos docentes foi que atuasse a partir do 2º segmento do Ensino Fundamental, não havendo exclusão por conta da série trabalhada, visto que o conteúdo tratado como tema central transcende a todas as séries e segmentos de ensino e, como já percebido no Capítulo 3, variável já é tratada por livros de Matemática desde o 6º ano do Fundamental II.

O instrumento de coleta das informações para esta pesquisa foi um questionário qualitativo elaborado via *Google Forms*. Esta plataforma foi escolhida devido a sua facilidade de uso quanto a livre distribuição e acesso dos entrevistados.

Num olhar de Gil (1999, p.128) *apud* Chaer (2012, p. 260), o questionário é definido “como a técnica de investigação composta por um número mais ou menos elevado de questões apresentadas por escrito às pessoas, tendo por objetivo o conhecimento de opiniões, crenças, sentimentos, interesses, expectativas, situações vivenciadas etc [...]”.

Sendo assim, ao se buscar as informações de cunho empírico, o questionário será uma ferramenta que servirá para coletar as informações da realidade, tanto do empreendimento quanto do mercado que o cerca, e que serão basilares na construção do Trabalho de Conclusão de Curso (CHAER; DINIZ; RIBEIRO, 2012).

Dito isso, o questionário se desenrola a partir de quatro perguntas buscando identificar o professor, a região de atuação e o tempo de magistério. Outras foram acrescentadas. São perguntas discursivas e para os quais o professor tem total liberdade de resposta para descrever os temas tratados. Assim, apresentam-se as seguintes perguntas:

1. Nome.
2. Atua em qual rede de ensino (Permitido mais de uma resposta)?
 - Estadual.
 - Municipal.
 - Federal.
 - Particular.
3. Caso no item anterior tenha assinalado alguma Rede Pública de Ensino, descreva em qual.
4. Há quanto tempo atua no Ensino Básico?
 - Até 5 anos;
 - Entre 5 e 10 anos;
 - Entre 10 e 15 anos;
 - Mais de 15 anos.
5. O que você entende por variável?
6. Quais as maiores dificuldades encontradas por seus alunos em aprender variável?
7. Você analisa o conhecimento prévio de seu aluno ao introduzir ou verificar o conceito de variável? Se sim, de quê maneira?

8. O quê você julga faltar em seu aluno para que o conceito de variável seja melhor compreendido por ele?
9. Leciona Funções? Em caso positivo, descreva se você relaciona com o conceito de variável.
10. Caso tenha alguma experiência que julgue interessante, ou sugestão de metodologia de apresentação de conteúdos, sobre o ensino de variável e queira compartilhar, descreva abaixo.

A partir da coleta das respostas dadas pelos docentes, uma análise das mesmas será realizada e apreciada. Visto que as respostas apresentadas foram relativamente curtas, todo o processo de observação, interpretação e discussão dos dados foi elaborada pelo autor sem o auxílio de programas estatísticos (como IramuteQ, por exemplo) no processo.

Partindo dos pressupostos de Bardin (2011), a análise dos conteúdos possui seu destaque, apresentando a seguinte designação:

[...]um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando a obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (BARDIN, 2011, p. 47).

Vale destacar que a análise de conteúdo a ser aqui realizada, buscará ter um viés qualitativo, de modo a procurar entender as especificidades apresentadas pelo corpo docente estudado. Godoy (1995) apresenta a seguinte descrição para tal modalidade de análise:

[...] a pesquisa qualitativa não procura enumerar e/ou medir os eventos estudados, nem emprega instrumental estatístico na análise dos dados. Parte de questões ou focos de interesses amplos, que vão se definindo a medida que o estudo se desenvolve. Envolve a obtenção de dados descritivos sobre pessoas, lugares e processos interativos pelo contato direto do pesquisador com a situação estudada, procurando compreender os fenômenos segundo a perspectiva dos sujeitos, ou seja, dos participantes da situação em estudo (GODOY, 1995, p. 58).

Um ponto importante a ser destacado sobre esta pesquisa é que a mesma foi submetida junto ao Comitê de Ética na Plataforma Brasil com o Certificado de Apresentação de Apreciação Ética de número 68786223.4.0000.5282. A apreciação do projeto se deu em um período de, aproximadamente, dois meses iniciando-se a submissão em 28 de Fevereiro de 2023 e sendo aprovado em 10 de Maio de 2023. Ressalta-se que, neste período, o projeto precisou de uma correção documental devido a falta do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Este documento é fundamental visto que é a autorização do docente em participar da pesquisa.

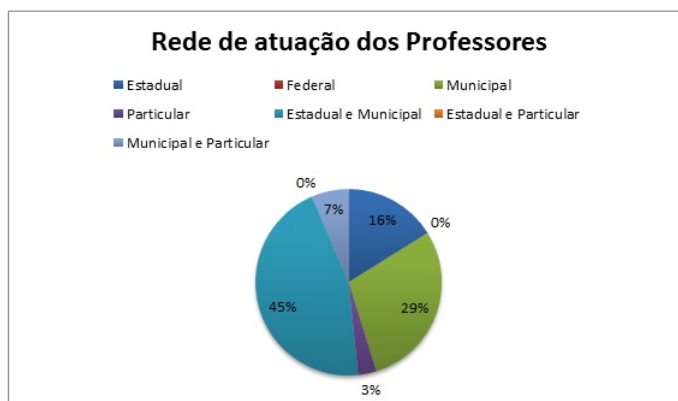
Conforme já mencionado em outros momentos do presente texto, o corpo docente aqui analisado é formado por 30 professores de Matemática atuantes na educação básica

de ensino. A inclusão desses professores na análise foi dada mediante a possibilidade dos mesmos trabalharem diretamente com o conteúdo abordado que, de acordo com as duas referências bibliográficas adotadas nas Redes Municipal e Estadual de Ensino, que contemplam boa parte dos docentes pesquisados, essas literaturas incluem o assunto tratado em todas as séries do ensino fundamental. Vale destacar que os professores foram identificados por números de 1 a 30 de modo a preservar a identidade dos mesmos.

A primeira pergunta abordada na pesquisa trata da identificação do professor e foi levada em consideração apenas para fins de controle de aplicação do Termo de Livre Consentimento exigido pelo Comitê de Ética pelo qual esta pesquisa se submeteu. Dito isto, não haverá nenhum tipo de discussão acerca dessa pergunta.

Ao analisarmos a segunda pergunta, que trata da rede de ensino onde o professor atua, observamos uma predominância dos docentes no ensino público, principalmente atuando em mais de uma esfera. A Figura 24 ilustra os resultados obtidos com relação a tal questionamento:

Figura 24 - Atuação dos docentes.



Legenda: Acompanhamento da esfera de atuação dos docentes estudados

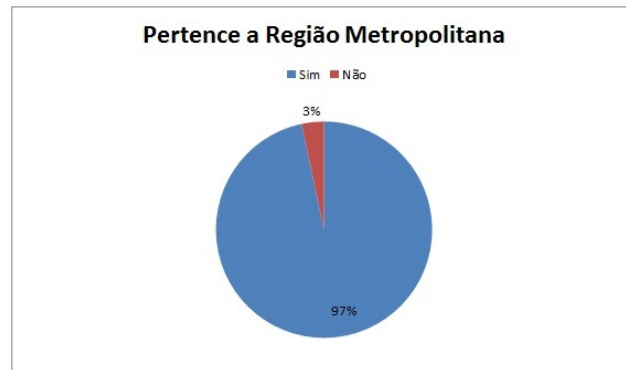
Fonte: O próprio autor

Cerca de 48% dos docentes analisados atuam em mais de uma rede de ensino, o que possibilita aos mesmos diferentes experiências em sala de aula que, talvez permita uma observação diferenciada nas perguntas de caráter qualitativo que aparecem no questionário.

A segunda pergunta trata de, em caso de atuação no ensino público, qual rede o professor pertence. A fim de regionalizar a resposta dos professores, houve uma separação entre o local de trabalho ser, ou não, dentro da região metropolitana do Rio de Janeiro, indicada pela Figura 25.

Ao tratarmos esses dados, observamos uma significativa permanência dos professores na Região Metropolitana do Rio de Janeiro, ainda que o docente atue na rede estadual. Desse modo, existe a possibilidade de que a pesquisa reflita uma realidade apenas dessa

Figura 25 - Região de atuação dos docentes.



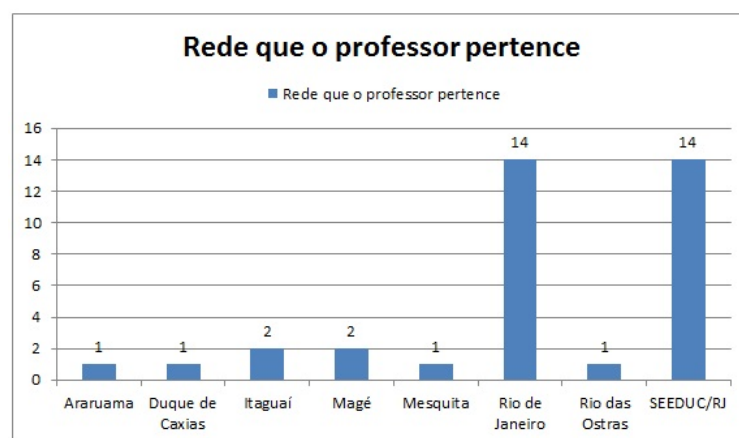
Legenda: Acompanhamento da região de atuação dos docentes observados

Fonte: O próprio autor

região. Não houve uma discussão mais profunda com relação a esse tópico, de modo que o objetivo principal desta pergunta ainda é identificar e regionalizar o docente.

Ainda com relação à questão anterior, também foi verificado às quais secretarias de educação os professores pertencem. A figura que se segue, Figura 26, ilustra as secretarias apresentadas e, cabe uma ressalva: conforme foi ilustrado na questão referente à rede de atuação, muitos professores têm suas designações em mais de uma rede de ensino. Por conta dessa ressalva, o número total de respostas apresentadas excede à quantidade de professores, mediante a interseção de docentes com estas redes. Novamente, há uma intenção de caráter meramente designativo, não buscando ligar estes dados obtidos com a futura análise qualitativa.

Figura 26 - Origem de matrícula dos professores

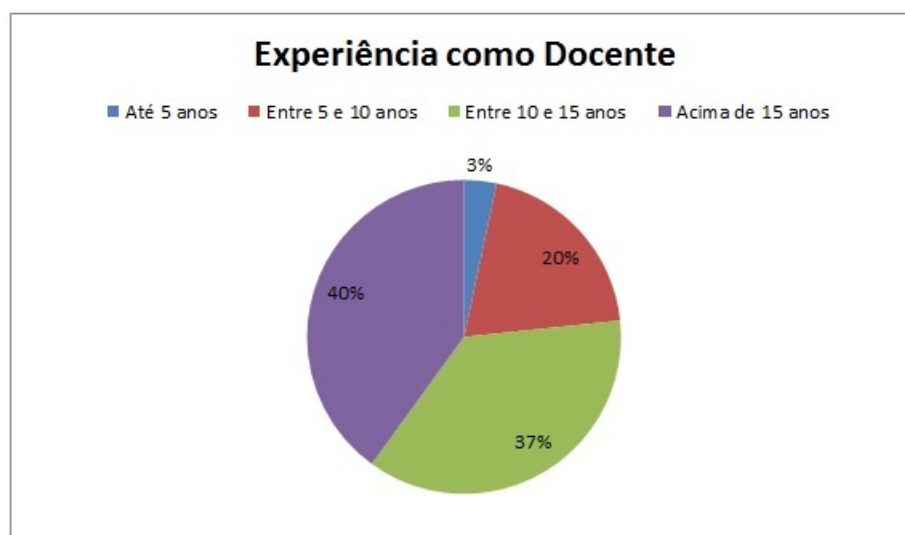


Legenda: Origem de atuação dos docentes estudados

Fonte: O próprio autor

A próxima análise, realizada a partir da Figura 27, diz respeito ao tempo de experiência do docente. Esse tempo de experiência de sala de aula permite que o professor tenha um contato maior com questões que permeiam um bom planejamento de aula, além do maior domínio da apresentação dos conteúdos ministrados.

Figura 27 - Tempo de experiência docente



Legenda: Tempo de atuação dos Professores

Fonte: O próprio autor

Observando ainda a Figura 27, é possível verificar que a maior parte dos professores questionados atua há mais de 10 anos, possibilitando assim uma grande propriedade para se realizar uma discussão acerca de todas as questões que tangem ao processo de ensino-aprendizagem.

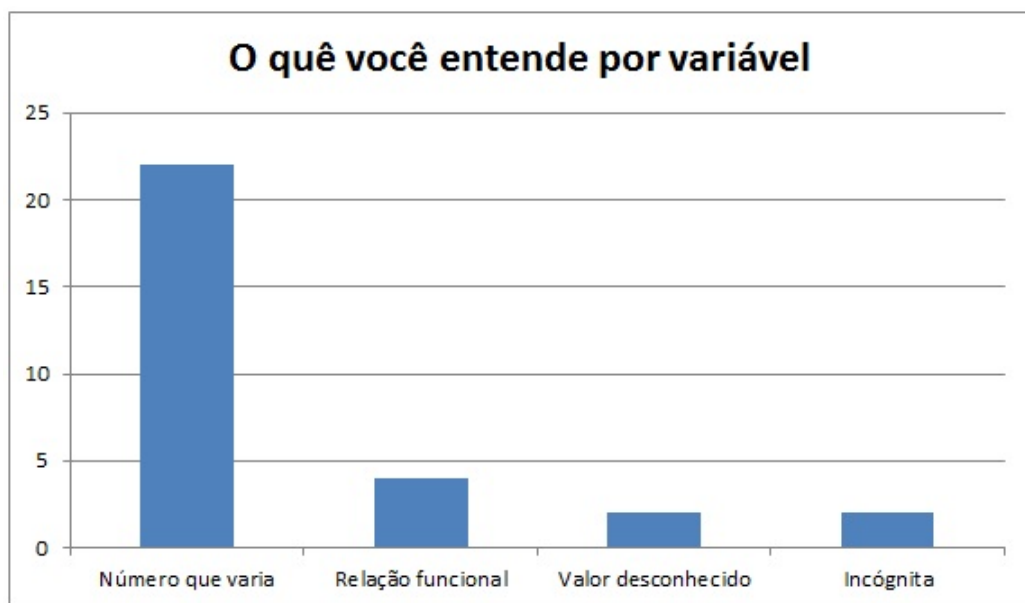
6 A ABORDAGEM DOS PROFESSORES

Terminado o segmento de perguntas que buscavam identificar os docentes, a partir do presente momento, as questões tratarão efetivamente da abordagem de variável. Como já mencionado na metodologia do trabalho, foram tomadas as classes de Bardin (2011) para buscar um melhor entendimento e interpretação das respostas e realizar a análise qualitativa.

A primeira questão do segmento qualitativo do questionário ponderava aos professores o que os mesmos entendiam por variável. Ao se analisar as respostas, foram identificadas quatro classes de respostas: número que varia, relação funcional, valor desconhecido e incógnita.

A figura a seguir, Figura 28, apresenta quantitativamente o entendimento dos docentes:

Figura 28 - Entendimento de variável



Legenda: Representação quantitativa do entendimento dos docentes acerca de variável

Fonte: O próprio autor

Ao observar os dados obtidos, é perceptível que uma parcela significativa dos docentes descreve variável como um número que varia. Outro fator interessante é a presença do modelo 3UV⁴, porém de maneira separada. Nenhum dos docentes descreveu as diversas

⁴ Apresentado no estado da questão na trabalho de Paula et al. (2019)

possibilidades do uso da variável, fugindo assim de seu conceito efetivo.

Dentre os professores abordados, apenas um deles sugeriu mais de um uso da variável, sugerindo que tal conceito abordaria o uso de letras em expressões algébricas, denominadas incógnitas e, no uso estatístico, tomaria uma variação de acordo com a população amostral. Veja na Figura 29 a resposta do professor 25:

Figura 29 - Resposta do professor 25 sobre o entendimento de variável

Letras das expressões algébricas (incógnitas). Valores que variam de acordo com a população amostral (na estatística).

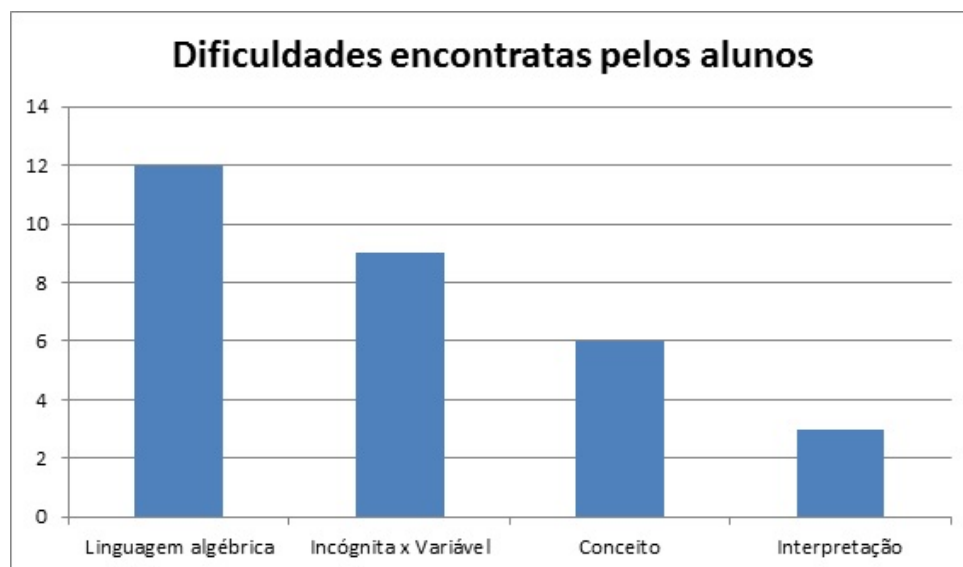
Legenda: Apresentação da resposta do professor 25 sobre seu entendimento de variável

Fonte: O próprio autor

Seguindo com a análise qualitativa, a segunda pergunta trata das dificuldades apresentadas pelos discentes em aprender variável. Tomando as classes das respostas descritas, temos as seguintes identificações: entendimento da linguagem algébrica, compreender incógnita x variável, o conceito de variável em si e interpretação.

A figura que segue, Figura 30, descreve graficamente as respostas tomadas nessa questão:

Figura 30 - Dificuldades apresentadas pelos discentes



Legenda: Representação quantitativa das maiores dificuldades apresentadas pelos discentes acerca de variável

Fonte: O próprio autor

De acordo com boa parte dos professores, algebrismo em si, principalmente a sua linguagem, é o maior empecilho para que os discentes possam compreender o conceito de variável. Quando há apresentação da letra nas relações, o aluno encara tal introdução como um obstáculo e, a partir disso, toma uma determinada aversão aos demais conteúdos que se desenrolam.

A resposta do Professor 30, apresentada na Figura 31 exemplifica o que esta parcela significativa dos docentes entende como outra grande dificuldade para o desenvolvimento deste conteúdo:

Figura 31 - Professor 30 - Dificuldades dos alunos

Acho que uma das maiores dificuldades é entender que variável atua de forma diferente de uma incógnita. Uma delas atua podendo receber uma infinidade de valores (a variável), enquanto que a outra tem um - ou mais - valor único que torna a sentença, ou seja, a afirmação feita, verdadeira (a incógnita). Essa confusão leva alguns estudantes a quererem "descobrir" o valor da variável.

Legenda: Representação do Professor 30 sobre as maiores dificuldades apresentadas pelos discentes acerca de variável

Fonte: O próprio autor

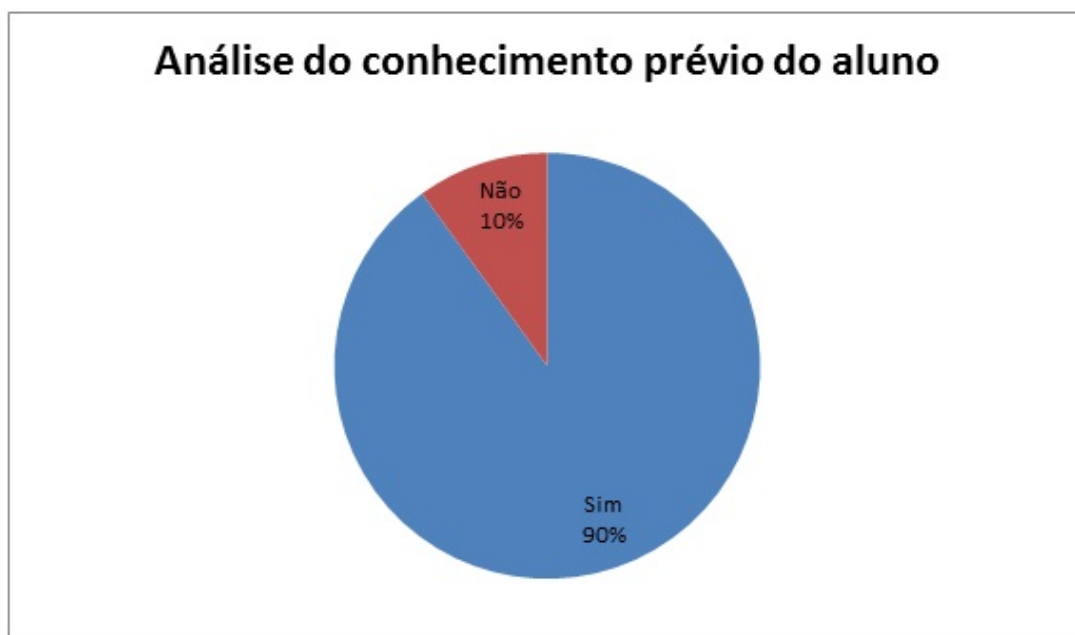
Quando se trata da introdução de qualquer conteúdo, a tomada do conhecimento prévio dos alunos por parte dos docentes ganha um papel fundamental. Silva e Pio (2019) apresentam, em seu trabalho, a importância dos conhecimentos prévios dos alunos do ensino fundamental sobre cadeia alimentar, uma interessante fundamentação sobre o uso deste tipo de abordagem

Segundo os estudos de Piaget (1896), os conhecimentos prévios assumem um importante papel no processo de construção do conhecimento, pois quando novos estímulos são incorporados à estrutura cognitiva do sujeito e este possui estruturas cognitivas prévias adequadas sobre determinado objeto de conhecimento, os esquemas mentais vão ampliando. Esse processo ocorre por meio de uma interação entre esquemas adequados presentes na estrutura cognitiva com as novas informações (SILVA; PIO, 2019, p.3-4).

Como já descrito na citação anterior, esse tipo de abordagem não é uma metodologia nova, visto que Piaget, precursor deste tipo de metodologia, já a descrevia ainda no século XIX. Naturalmente, esse tipo de abordagem também possui sua força no campo pedagógico brasileiro, inclusive com um significativo número de pesquisas onde o tema é abordado direta ou indiretamente. Em um levantamento primário sobre trabalhos que abordam o uso do conhecimento prévio, foram tomadas 2459 teses ou dissertações no

portal BDTD e 1793 periódicos no Portal Capes ⁵. Dessa forma, a próxima questão foi elaborada a fim de realizar um tratamento sobre a prática do professor em identificar no aluno o seu conhecimento prévio com relação a variável. Dessa forma, a figura a seguir, Figura 32, foi elaborada.

Figura 32 - Análise do conhecimento prévio do aluno



Legenda: Descrição percentual sobre a tomada do conhecimento prévio dos alunos

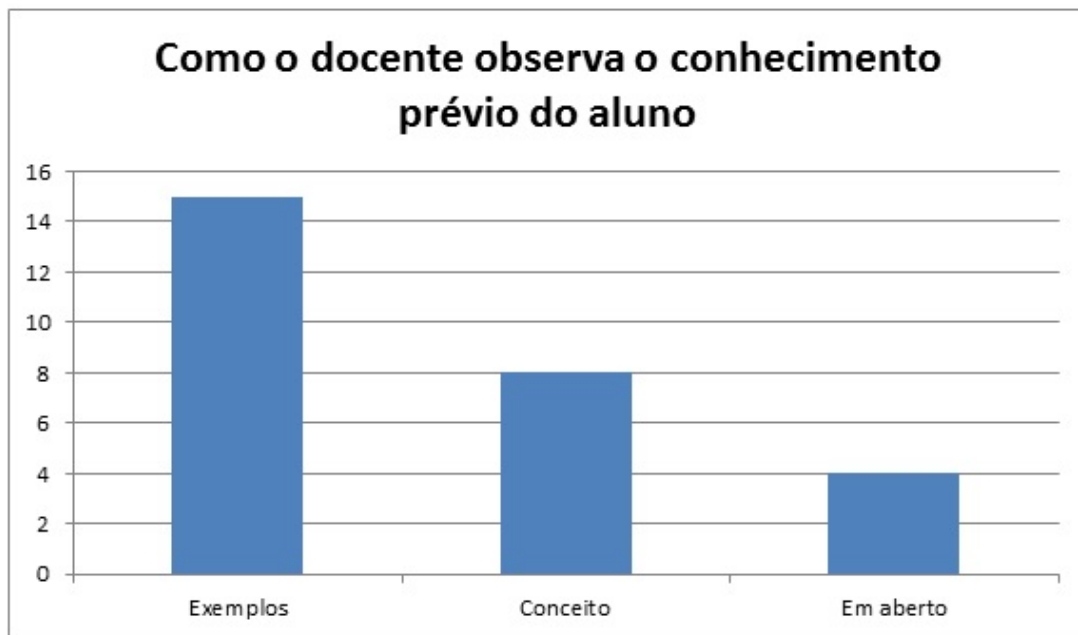
Fonte: O próprio autor

A Figura 32 traz uma importante constatação sobre a significativa parcela de professores que de fato utilizam esta metodologia, ainda que não seja unanimidade entre os docentes. Ao se aprofundar nas respostas “Sim”, também é possível separá-las em classes, visto que os professores explicitaram a forma na qual realiza essa abordagem. Dito isso, foram observadas as seguintes classes: exemplos, buscando observar se há algum conceito e em aberto.

Analisando quali-quantitativamente as descrições dos professores sobre a forma como os mesmos realizam a tomada dos conhecimentos prévios dos discentes, e possível perceber que os *exemplos* são os principais instrumentos usados para tal abordagem. Outra parcela de docentes citou que sua ferramenta é a utilização de *conceitos*, por fim, *em aberto*, representa os professores cujas respostas não possuem uma descrição detalhada de tal abordagem. Graficamente, temos a seguinte representação na Figura 33.

⁵ Levantamento bibliográfico quantitativo realizado neste trabalho.

Figura 33 - Como o professor analisa o conhecimento prévio



Legenda: Descrição quantitativa sobre metodologia usada para a tomada do conhecimento prévio dos alunos

Fonte: O próprio autor

A Figura 34 apresenta a resposta apresentada pelo Professor 16 sobre uma metodologia de tomada dos conhecimentos prévios dos alunos:

Figura 34 - Como o professor analisa o conhecimento prévio

Procuro verificar. Busco situações cotidianas para que, primeiro entendam o que seria se relacionar. Que uma reação depende de uma ação, então faço introdução a idéia do que seria uma Lei de Formação. E que os valores variam de acordo com essa relação e do valor do domínio.

Legenda: Descrição do Professor 16 sobre os instrumentos usados para a tomada do conhecimento prévio de seus discentes

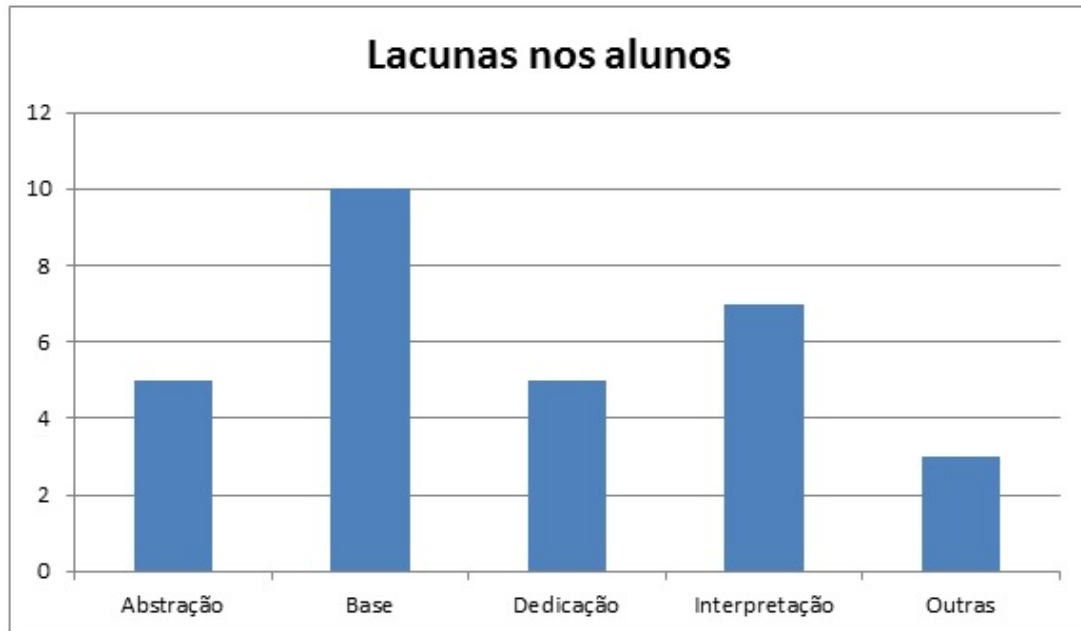
Fonte: O próprio autor

Discutindo ainda a Figura 34, fica clara a abordagem dos conhecimentos prévios dos discentes via uso de exemplos. A abordagem deste professor se torna interessante visto que, além de exemplificar, o docente ressalta a importância do exemplo ser cotidiano.

Quando se trata da análise das lacunas existentes nos alunos para que haja uma compreensão significativa do conceito de variável, a análise das respostas dos professores identificou a presença das seguintes classes de respostas: abstração, base, dedicação,

interpretação e outras. A Figura 35 apresenta as respostas dos docentes.

Figura 35 - Lacunas nos alunos



Legenda: Descrição das lacunas existentes nos alunos na compreensão do conceito de variável

Fonte: O próprio autor

Discutindo tais dados, é possível perceber a significativa preocupação dos docentes com questões referentes às ferramentas fundamentais que os alunos já deveriam possuir para que se fosse iniciado o aprendizado do conceito de variável. Outro ponto relevante foi a baixa capacidade de interpretação do alunado que, de certa forma, também seria uma ferramenta de base para o aprendizado. A falta de capacidade de abstração também possui uma considerável relevância junto aos professores, sendo seguida pela falta de dedicação dos alunos.

É perceptível que houve uma distribuição relativamente próxima das respostas dos docentes e, de uma certa forma, as mesmas talvez possuam uma certa correlação. Dessa forma, será que não caberia a pergunta: até que ponto o aluno que possui dificuldades com a falta de base, conseguirá interpretar, abstrair e também se dedicar?

Tratando das outras respostas, uma que possui um relevante destaque é a possível falta de instrumentos que permitam demonstrar a aplicabilidade cotidiana do uso da variável, conforme indica a Figura 36.

Figura 36 - Descrição do Professor 29 sobre as lacunas nos alunos

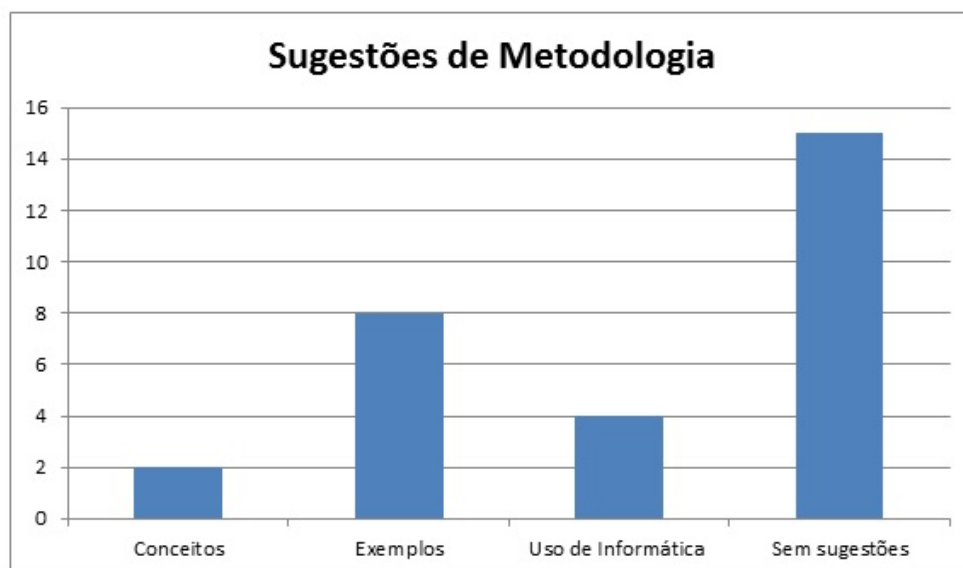
Instrumentos que possam demonstrar a utilização das variáveis no cotidiano.

Legenda: Apresentação da resposta do Professor 29 sobre as lacunas existentes nos alunos na compreensão do conceito de variável

Fonte: O próprio autor

A pergunta que encerra o questionário, cujas respostas são apresentadas na Figura 37, deixa em aberto um espaço para que os professores sintam-se à vontade em sugerir uma metodologia que eles julguem funcional, de acordo com sua realidade naturalmente, para um ensino significativo de variável.

Figura 37 - Sugestões de Metodologia



Legenda: Classes de metodologias sugeridas pelos professores

Fonte: O próprio autor

Um número significativo de docentes se reservou a não sugerir nenhum tipo de metodologia ou alegou que não aborda nada além do habitual. Dentre as sugestões apontadas pelos professores, houve uma evidencição da abordagem mediante o uso dos exemplos práticos, sugerindo que a variável seja tratada como uma relação funcional. Um destaque interessante é a citação de quatro professores sobre o uso da informática via programas como *Excel* e *GeoGebra* como instrumentos de facilitação do processo de ensino-aprendizagem. Por fim, a sugestão da massificação dos conceitos encerra as classes de respostas dos professores, resposta que vai de encontro ao denominado Ensino

Tradicional.

A Figura 38 apresenta como o Professor 7 descreve uma metodologia que ele julga funcionar dentro da realidade de sua comunidade escolar.

Figura 38 - Exemplo de Metodologia

Acho sempre útil trazer a sala de aula para a realidade deles. Então sempre há aquele aluno que já trabalha e entende, mesmo superficialmente, a importância de lucro. E quando é mostrado que a forma de ganhar dinheiro pode estar vinculada a uma equação com dados precificados e variáveis, o interesse aumenta consideravelmente.

Legenda: Metodologia via exemplos apresentada pelo Professor 7

Fonte: O próprio autor

Observe o cuidado do Professor 7 em trazer o conteúdo programático para uma realidade mais compreensível para o aluno, fugindo do tradicionalismo e buscando facilitar a compreensão. Visto que muitas escolas podem apresentar uma realidade que impede a utilização de tecnologias como computador, televisão, dentre outras, a aplicação cotidiana do conteúdo torna-se um instrumento acessível para ilustrar o conteúdo abordado.

De maneira geral os professores participantes responderam ao questionário com certa celeridade porém, foram demasiadamente sucintos ao descrever suas respostas. Posso destacar aqui que muitos docentes não quiseram participar desta pesquisa, reduzindo a amostragem da mesma.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A fim de iluminar o caminho do encerramento dessa pesquisa, é importante lembrar que a mesma possui como objetivo central entender como os docentes do ensino básico compreendem e, naturalmente, transmitem o conceito de variável, buscando identificar as possíveis lacunas na construção deste conceito que, obviamente, irão interferir no processo de ensino-aprendizagem.

Nesse sentido, avaliei que o questionário usando a plataforma *Google Forms* seria um instrumento que poderia facilitar a logística e divulgação entre os docentes e os mesmos poderiam ficar mais confortáveis para apresentarem suas respostas, tendo em vista que a impessoalidade desta plataforma poderia aliviar a pressão sobre o docente no que diz respeito a dúvida do professor em estar, ou não, respondendo corretamente.

Em contrapartida, um aspecto negativo que identifiquei no questionário “*online*” e não-presencial foi o fato de as respostas apresentadas serem demasiadamente sucintas, faltando aquela discussão mais elaborada dos temas propostos. Não foi permitido identificar se, de fato, houve uma falta de conhecimento dos professores a respeito do assunto, ou as respostas foram colocadas na pressa devido à correria diária dos entrevistados. Acredito que esta questão poderia ser resolvida com uma entrevista *in loco*, principalmente se houvesse uma condução da mesma de uma forma mais informal pelo pesquisador.

Analisando as respostas dos professores é perceptível que, na discussão do primeiro objetivo específico, que trata da análise do conceito de variável dentro das escolas, foi sensível o fato de que o mesmo não está bem consolidado dentre os mesmos. Muitos dos professores limitaram suas respostas a apenas um dos usos da variável, não indicando que tal conceito é muito mais abrangente que a sua definição apresentada. Nesse sentido, fica exposta aqui uma lacuna identificada no processo de ensino-aprendizagem desse conteúdo.

O segundo objetivo específico está diretamente interligado ao primeiro. A partir do momento em que os docentes apresentam dificuldades em determinar o conceito de variável mediante seus diversos usos, naturalmente a construção desse conteúdo foge totalmente a descrição da construção do conceito segundo a ótica de Vigotsky. Tal fato se verifica na descrição dos docentes sobre seus entendimentos do conceito de variável onde há uma desconexão entre as respostas dos participantes de modo que as mesmas sugeriram apenas um dos usos da variável. Apenas um dos professores indicou em sua descrição mais de um uso da variável (ver Figura 29).

Logo em sequência, ao se tentar discutir sobre a diferença entre conceito e definição, visto que esses já se mostraram não estar bem definidos pelas análises anteriores, sugere-se que os professores apresentem apenas definições ao tratar variável em salas de aula. Um fator que poderia contribuir para uma melhor definição deste tópico é a pergunta sobre *sugestões de metodologia* mas, infelizmente, muitos docentes não apresentaram suas pro-

posições. A pergunta sobre o entendimento de variável por parte dos professores também acabou apresentando definições diretas, sem a realização desta discussão conceitual, sendo mais um indicativo desta lacuna (ver Figura 39). A realidade levantada insinua que ocorre um ensino por meio da apresentação de definições. Dito isto, acredita-se que não há uma compreensão por parte dos docentes sobre a diferença sobre conceito e definição, ainda mais se for levada em consideração a ótica de Vygotsky sobre o tema.

Figura 39 - Entendimento de variável

É um número arbitrário, não específico. Que varia.
Algo que pode assumir qualquer valor num certo domínio
Algo que pode mudar , que não é fixo , que é variável.
Um símbolo, geralmente uma letra do alfabeto, que representa valores diferentes
Um número desconhecido que pode assumir qualquer valor.
Valores que se adequam de acordo com informações estabelecidas numa conjuntura .
Um caracter, geralmente uma letra, que, dentro de uma expressão algébrica, pode assumir vários valores que pertençam a um determinado conjunto.
Algo que pode assumir mais de um valor.

Legenda: Algumas respostas dos docentes sobre o conceito de variável

Fonte: O próprio autor

Um dos primeiros capítulos pensados para a realização desta pesquisa foi o que trata da descrição histórica sobre o conceito de função e variável. Recapitulando minha trajetória docente, sempre percebi, junto aos meus alunos, um interesse dos mesmos com relação a este aspecto quando se trata da apresentação dos conteúdos. Vejo que há uma motivação extra dos alunos quando eles ouvem quando, como e o porquê do desenvolvimento de um dado conhecimento. Nesse sentido, de fato acredito que realizar a discussão histórica na apresentação do conceito de função possa ser um instrumento metodológico visando proporcionar um processo de ensino-aprendizagem significativo.

Quando se trata da BNCC, a mesma apresenta as habilidades e competências necessárias para o trabalho ensino de variáveis e, tais proposições descrevem os diversos usos de variável, tomando todos os pontos trabalhados em seu conceito. Tomando os livros didáticos observados, percebe-se que os mesmos estão de acordo com a BNCC logo, também apresentam o conceito de variável em todas as suas possibilidades. Observei

que os livros tratados diferem essencialmente nas séries onde determinados temas são abordados, como já discutido no Capítulo 3 deste trabalho e, julgo que a obra Projeto Teláris possui uma apresentação dos conteúdos de maneira mais morosa, de modo que alguns conceitos e definições que Bianchini destaca em uma determinada série, o Projeto Teláris o introduz em uma série posterior. Para turmas que apresentam mais dificuldades, acredito que o Projeto Teláris tende a atender melhor e, em contrapartida, em turmas que conseguem apreender os conceitos de maneira mais rápida, a obra de Bianchini seria uma ferramenta mais proveitosa. Ressalta-se que não foi o objetivo deste trabalho discutir a apresentação dos conteúdos pelas obras, mas identificar se as mesmas apresentavam estes conteúdos.

Deste modo, há uma pergunta ainda a ser respondida: se há uma exigência da BNCC e se uma das ferramentas usadas pelos docentes sugere uma completa discussão sobre variável, o quê ocorre para que não haja esta efetiva discussão pelos docentes? Esta é uma boa discussão que fica como sugestão para trabalhos futuros. Como esta pesquisa não teve como objetivo o diálogo com outras pesquisas de temas semelhantes, visto o baixo número de trabalhos sobre o assunto, não analisei as possíveis implicações que este diálogo possa ter no processo de ensino-aprendizagem e na relação entre docentes e alunos. Deixo também esta abordagem como uma sugestão de possíveis trabalhos futuros à quem esta pesquisa possa interessar.

REFERÊNCIAS

- APPOLINÁRIO, F. *Dicionário de Metodologia Científica Um Guia para a produção do Conhecimento Científico*. [S.l.]: São Paulo: ATLAS SA, 2011.
- BARDIN, L. *Análise de conteúdo*. São Paulo: Ed. Revista e Ampliada, 2011.
- BARROS, J.; SILVA, A. O.; SILVA, G. L. da. Uma releitura histórico-epistemológica para o ensino do conceito de função. *Boletim GEPEM*, n. 79, p. 50–69, 2021.
- BIANCHINI, E. *Matemática Bianchini 6º ano*. 9ª. ed. [S.l.]: Editora Moderna, 2018. v. 1.
- BIANCHINI, E. *Matemática Bianchini 7º ano*. 9ª. ed. [S.l.]: Editora Moderna, 2018. v. 2.
- BIANCHINI, E. *Matemática Bianchini 8º ano*. 9ª. ed. [S.l.]: Editora Moderna, 2018. v. 3.
- BIANCHINI, E. *Matemática Bianchini 9º ano*. 9ª. ed. [S.l.]: Editora Moderna, 2018. v. 4.
- BOTELHO, L.; REZENDE, W. Um breve histórico do conceito de função. *Caderno Dá-Licença, Niterói*, v. 6, p. 64–75, 2007.
- CHAER, G.; DINIZ, R. R. P.; RIBEIRO, E. A. A técnica do questionário na pesquisa educacional. *Revista Evidência*, v. 7, n. 7, 2012.
- DANTE, L. R. *Projeto Teláris: Matemática*. [S.l.]: Editora Ática, 2020. v. 1.
- DANTE, L. R. *Projeto Teláris: Matemática*. [S.l.]: Editora Ática, 2020. v. 2.
- DANTE, L. R. *Projeto Teláris: Matemática*. [S.l.]: Editora Ática, 2020. v. 3.
- DANTE, L. R. *Projeto Teláris: Matemática*. [S.l.]: Editora Ática, 2020. v. 4.
- DEL-MASSO, M. C. S.; COTTA, M. A. d. C.; SANTOS, M. A. P. Ética em pesquisa científica: conceitos e finalidades, 2013. Disponível: <https://acervodigital.unesp.br/handle/unesp/155306>. Acesso em, 2018.
- FERREIRA, T. C. de S.; SCHLICKMANN, M. S. P. A teoria histórico-cultural e a educação escolar numa perspectiva humanizadora. *Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação*, p. 0643–0660, 2022.
- FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra, São Paulo: Cortez, 1997, 2001.
- GODOY, A. S. Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. *Revista de Administração de empresas*, SciELO Brasil, v. 35, p. 20–29, 1995.
- GÓMEZ, O. Um modelo teórico da matemática para o ensino do conceito de variável. Instituto de Física, 2017.

MEC, M. d. E. Base Nacional Comum Curricular: educação é a base. *MEC Brasília, DF. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>*, 2017.

MELLO, S. A. A escola de Vygotsky. *Introdução à psicologia da educação: seis abordagens. São Paulo: Avercamp*, p. 135–155, 2004.

NÉBIAS, C. Formação dos conceitos científicos e práticas pedagógicas. *Interface-Comunicação, Saúde, Educação, SciELO Public Health*, v. 3, p. 133–140, 1999.

PAULA, J. P. d. S. d. et al. O conceito de variável: o Modelo 3uv nos exercícios de uma coleção de livros didáticos para os anos finais do Ensino Fundamental. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2019.

RIBEIRO, R. P. O processo de aprendizagem de professores do ensino fundamental: apropriação da habilidade de planejar situações de ensino de conceitos. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2008.

SCHROEDER, E. Conceitos espontâneos e conceitos científicos: o processo da construção conceitual em vygotsky. *Atos de pesquisa em educação*, v. 2, n. 2, p. 293–318, 2007.

SILVA, M. M. da; PIO, J. L. de S. A importância dos conhecimentos prévios de alunos do ensino fundamental sobre cadeia alimentar. *Disponível em: www.editorarealize.com.br*, Editora Realize, 2019.

SOARES, M. B. *Alfabetização no Brasil: o estado do conhecimento*. [S.l.]: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais, Reduc, 1989.

VASCONCELOS, M. E.; MARCO, C. A formação de conceitos científicos em sala de aula: Um breve ensaio sobre a aprendizagem The formation of scientific concepts in a classroom: A brief test on learning. *Revista Pandora Brasil-Artigos-ISSN*, v. 2175, p. 3318, 2018.

YOUSCHEVITCH, A. P. O conceito de função: O conceito de função até meados do século 19. In: . Moscou: Instituto de História da Ciência e Tecnologia, 1976. p. 37/80.