



Universidade Federal de Mato Grosso  
Instituto de Ciências Exatas e da Terra  
Departamento de Matemática



---

## Divisão: os desafios e as dificuldades ao longo do Processo Educacional

**Helziana Arruda do Nascimento**

Mestrado Profissional em Matemática: Profmat/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Pedro Manuel Sanchez Aguilar**

Cuiabá/MT  
29 de junho de 2024

# Divisão: os desafios e as dificuldades ao longo do Processo Educacional

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Helziana Arruda do Nascimento e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 29 de junho de 2024.

Prof. Dr. Pedro Manuel Sanchez Aguilar  
Orientador

## **Banca examinadora:**

Prof. Dr. Pedro Manuel Sánchez Aguilar  
Prof. Dr. Hector Flores Callisaya  
Prof. Dr. Jorge Mauricio Jaramillo Monsalve

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – Profmat, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**

### Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

A779d Arruda do Nascimento, Helziana.  
Divisão: os desafios e as dificuldades ao longo do Processo Educacional [recurso eletrônico] / Helziana Arruda do Nascimento. -- Dados eletrônicos (1 arquivo : 81 f., il. color., pdf). -- 2024.

Orientador: Pedro Manuel Sanchez Aguilar.  
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Cuiabá, 2024.

Modo de acesso: World Wide Web: <https://ri.ufmt.br>.  
Inclui bibliografia.

1. Divisão. 2. Educação básica. 3. Materiais lúdicos. I. Sanchez Aguilar, Pedro Manuel, *orientador*. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.



## MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

### UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

### PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO

### PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

AV. FERNANDO CORRÊA DA COSTA, 2367 - BOA ESPERANÇA - 78.060-900 -  
CUIABÁ/MT

FONE: (65) 3615-8576 – E-MAIL: PROFMAT.ICET@UFMT.BR

### FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Divisão: O desafio e as dificuldades ao longo do processo educacional

AUTOR: mestranda Helziana Arruda do Nascimento

Dissertação e produto educacional defendidos e aprovados em 07 de junho de 2024.

### COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. Doutor Pedro Manuel Sánchez Aguilar (Presidente Banca /orientador)

Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

2. Doutor Hector Flores Callisaya (Membro Interno)

Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

3. Doutor Jorge Mauricio Jaramillo Monsalve (Membro Externo)

Instituição: Instituto Federal de Mato Grosso

Cuiabá, 07/06/2024.



Documento assinado eletronicamente por **HECTOR FLORES CALLISAYA, Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 10/06/2024, às 16:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **PEDRO MANUEL SANCHEZ AGUILAR, Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 10/06/2024, às 16:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **JORGE MAURICIO JARAMILLO MONSALVE**,  
**Usuário Externo**, em 10/06/2024, às 16:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no §  
3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site  
[http://sei.ufmt.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufmt.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0),  
informando o código verificador **6899948** e o código CRC **8A72C816**.

---

**Referência:** Processo nº 23108.040389/2024-17

SEI nº 6899948

*Ao meu doce e querido Jesus Cristo.*

# Agradecimentos

---

Agradeço a Deus em primeiro lugar, ao meu companheiro, Carlos Marques que sempre me apoiou e incentivou-me e aconselhou-me e acreditou em mim, a minha mãe Ana Benta que nunca me abandonou e sempre me inspirou, a minha psicóloga Hanna que me fez repensar e me acalmar diante das dificuldades apresentadas, a minha irmã Josiane e seus filhos Luiz Gustavo e José Pedro por me darem momentos infinitos de prazer e alegria e sentido para alcançar meus objetivos e em especial ao meu orientador, Pedro Sánchez que acreditou em mim e se esforçou muito para que eu fosse uma vitoriosa!

Muito obrigado a todos.

*Não se pode alcançar um novo objetivo  
pela aplicação do mesmo nível de  
pensamento que o levou ao ponto em  
que se encontra hoje..*

Albert Einstein.

# Resumo

---

Neste trabalho, apresentamos um panorama da história da divisão de números, destacando sua evolução ao longo do tempo e as diversas transformações pelas quais passou até chegarmos ao método atual. Além disso, exploramos o uso de materiais lúdicos, que desempenham um papel fundamental em manter o interesse das crianças e em reforçar o conceito de divisão. Por serem interativos e divertidos, esses materiais promovem um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e eficiente, tornando o processo educacional não apenas mais acessível, mas também mais envolvente e estimulante para os alunos. Por fim, elaboramos uma proposta didática envolvendo o ensino da divisão, com a finalidade de engajar os estudantes da educação básica no aprendizado desse conceito.

**Palavras chave:** Divisão, educação básica, materiais lúdicos.

# Abstract

---

In this work, we present an overview of the history of number division, highlighting its evolution over time and the various transformations it has undergone until reaching the current method. Additionally, we explore the use of educational materials, which play a fundamental role in maintaining children's interest and reinforcing the concept of division. Being interactive and fun, these materials promote a more dynamic and efficient learning environment, making the educational process not only more accessible but also more engaging and stimulating for students. Finally, we developed a didactic proposal for teaching division, with the aim of engaging elementary school students in learning this concept.

**Keywords:** Division, elementary education, educational materials.

# Lista de Figuras

---

1.1	Papiro Rhind ou Ahmes. Fonte: Museu Britânico . . . . .	5
1.2	Plimpton 322. Fonte: Universidade de Colúmbia . . . . .	6
1.3	Euclides. . . . .	8
1.4	Divisão em galeão. Fonte: Opus Arithmetica . . . . .	9
1.5	Divisão de 44977 por 382 usando galeão. . . . .	9
1.6	Robert Recorde. Fonte: Astronomy and Astronomers . . . . .	10
1.7	Fonte: Teoria dos números para professores do ensino fundamental . . . . .	10
3.1	Alunos participando do pré-teste . . . . .	20
3.2	Erros cometidos pelos alunos na divisão . . . . .	21
3.3	Material dourado . . . . .	23
3.4	Divisão de 520 por 4 usando material dourado . . . . .	24
3.5	Notas e moedas do Brasil . . . . .	25
3.6	Divisão de 60 laranjas entre 5 pessoas . . . . .	26
3.7	Ábaco . . . . .	27
3.8	Ábaco de 4 colunas com 10 bolinhas em cada coluna . . . . .	28
3.9	Somas sucessivas . . . . .	35
3.10	Divisão longa de 60 por 5 usando somas sucessivas feita por um aluno . . . . .	42
5.1	Termo de consentimento . . . . .	60
5.2	Pré-teste . . . . .	61
5.3	Projeto de aplicação da dissertação na escola . . . . .	62
5.4	Autorização da escola . . . . .	63
5.5	Prova 1 . . . . .	64
5.6	Prova 2 . . . . .	65

# Lista de Tabelas

---

1.1	Tabela de inversos no sistema sexagesimal . . . . .	7
3.1	Tabuada da multiplicação por somas sucessivas . . . . .	34

# Sumário

---

Agradecimentos	vi
Resumo	viii
Abstract	ix
Lista de figuras	x
Lista de tabelas	xi
Introdução	1
<b>1 Divisão de números</b>	<b>4</b>
1.1 Um breve relato histórico da divisão de números . . . . .	4
1.1.1 A divisão no Egito . . . . .	4
1.1.2 A divisão na Babilônia. . . . .	6
1.1.3 A divisão na Grécia . . . . .	7
1.1.4 A divisão na Índia . . . . .	8
1.1.5 A divisão na atualidade . . . . .	9
1.2 Teorema da Divisão Euclidiana . . . . .	10
<b>2 Descrição do problema</b>	<b>14</b>
<b>3 Metodologia</b>	<b>18</b>
3.1 Participantes . . . . .	18
3.2 Pré-teste . . . . .	19
3.3 Ensino da divisão de números usando materiais lúdicos . . . . .	22
3.3.1 Material dourado . . . . .	23
3.3.2 Dinheiro de Mentira . . . . .	24

3.3.3	Divisão alimentar . . . . .	26
3.3.4	Ábaco . . . . .	27
3.4	Ensino formal da divisão de números . . . . .	29
3.4.1	Método Tradicional (divisão longa) . . . . .	29
3.5	Métodos usados nesta dissertação . . . . .	33
3.5.1	Método da Multiplicação com Somas Sucessivas . . . . .	33
3.5.2	Método - Euclides - Subtrações sucessivas . . . . .	35
3.5.3	Método - Helziana - Somas Sucessivas . . . . .	37
3.5.4	Método - Helziana - Divisão longa usando somas sucessivas . . . . .	40
3.5.5	Por quê o método de Divisão longa por meio Somas Sucessivas funciona? . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Resultado e considerações finais</b>	<b>46</b>
4.1	Resultado . . . . .	46
4.2	Considerações finais . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Sugestões de atividades a serem utilizadas no ensino da divisão</b>	<b>48</b>
5.1	Multiplicação . . . . .	48
5.2	Divisão usando subtrações sucessivas . . . . .	52
5.3	Divisão usando somas sucessivas . . . . .	55
5.4	Divisão longa . . . . .	57

# Introdução

---

Seguindo a orientação do Profimat esta dissertação versa sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática da Educação Básica com impacto na sala de aula.

Sabe-se que o Estado de Mato Grosso aderiu ao ciclo educacional de ensino em que o ano letivo ocorre de 3 em 3 anos de modo que o quarto, o quinto e o sexto ano é um ciclo e o sétimo, o oitavo e o nono é um outro ciclo. De acordo com a Resolução nº 262/2002 - CEE/MT, art. 7º, “para efeito de composição das turmas de cada ciclo, tomar-se-á por referência, de maneira articulada e cumulativamente, os seguintes fatores:

- I) A faixa etária;
- II) A pluralidade de saberes e a diversidade cultural, a maturidade intelectual e afetiva e a multiplicidade de experiências cognitivas dos grupos de alunos(as);
- III) Consideração da vivência e do aproveitamento escolar anterior.

Uma das vantagens desta resolução, é que o aluno é observado, em termos de frequência durante todo o ciclo - isso nos permite detectar casos como, por exemplo: um Adolescente é acolhido pelo Conselho Tutelar após mãe sair para trabalhar e dizer que só voltaria para casa na outra semana (publicado pelo G1 Rio Preto e Araçatuba 05/05/2024) - um segundo exemplo onde a CBN CAMPINAS publicou, no dia 07/05/2024, Menino morto com sinais de tortura não frequentava escola há dois meses - há muitos casos relacionados na questão social como estes apresentados.

Uma desvantagem é que, na prática, os educandos são classificados conforme a sua idade e não pelo conhecimento adquirido, isto ocasiona que muitos alunos chegam para o professor de matemática, seja em qual ciclo for, sem saber somar, subtrair, multiplicar ou dividir operações matemáticas de fundamental importância para o desenvolvimento intelectual do aluno, pois permitem que o aluno possa lidar com situações da vida cotidiana

como, por exemplo, comprar produtos em uma loja, determinar a distância da sua casa até a escola, administrar seu dinheiro de maneira responsável entre outros.

Neste trabalho focaremos em sanar as lacunas que os alunos apresenta na divisão conceito matemático que permite abrir novas portas, tanto para frações e porcentagens quanto para a área financeira que envolve compra, venda e comercio, etc.

Para poder elaborar esta dissertação entramos em contacto com as coordenadoras Silvana Yoko Tateira e Sibeli Lopoos da Benedito de Carvalho para a elaboração de um documento onde os pais dão o consentimento para trabalhar com alunos desta escola, o qual está na parte inferior deste trabalho e tem também o termo de consentimento da escola.

Tomamos como medida os alunos com intensas faltas, desinteresse pelo estudo, muita bagunça em sala de aula, conversas paralelas durante as aulas, indisciplinas, negação para executar atividades propostas, desânimo, sonolência, enfrentamento ao educador e a outros.

No dia 02 de abril de 2024 aplicamos um pré-teste nos alunos selecionados para saber em que condições se encontravam e para surpresa a maioria são semi-analfabetos, e, apresentaram dificuldade em escrever o próprio nome, mas a maior parte dos alunos consegue, não sabendo ler direito fazer continhas de adição e alguma de multiplicação com uma unidade, mas, dai em diante seu conhecimento era falho sem conseguir desenvolver o que se propunha. Com isso, meu trabalho precisou de um pouco mais de atenção pois além da proposta da divisão também será necessário um pequeno trabalho que envolva a subtração e um pouco de multiplicação para um bom desempenho.

Dos alunos selecionados, observou-se que a sala com mais reclamação de comportamento são alunos com mais falha no conhecimento. Além disso, estes alunos apresentam respostas orais rápidas misturadas com rispidez e timidez. Chamou-me a atenção é que o mesmo ocorria com alunos em outras escolas por onde eu trabalhei, e com muitos alunos selecionados para fazerem aula de reforço em sala de aula e horário diferenciado (quando ofertado pela escola). Estes se negam a realizar qualquer atividade educacional.

Após o pré-teste foi dado início ao trabalho em que, o próximo passo era trabalhar apenas com material lúdico por 2 aulas de 50 minutos. Sendo assim, no dia 09 e 10 de abril de 2024 foram aulas mais descontraídas com material lúdico como dinheiro de mentira, divisão alimentar, quebra-cabeças, filme motivador do Donald no país da Matemática, material dourado.

A primeira semana, por ser muito descontraída, observou-se que os alunos faltosos apresentaram um pouco mais de interesse em vir no dia proposto para a aula. Nesta

semana de trabalho lúdico houve bastante envolvimento dos alunos selecionados e observou-se que os mesmos se consideravam iguais, pois, todos ali tinham a mesma idade e a mesma dificuldade e ainda o conhecimento parecia simples e fácil e prático perante eles, pois, passou-se a impressão que aprender sem ter que trabalhar com a linguagem escrita matemática foi bem prazeroso para alunos com falhas no conhecimento. Neste momento, aproveitamos para colocar as regras de estudo com momentos motivacionais sobre a necessidade de minimizar suas dificuldades matemáticas e da importância de se nivelar em forma de conhecimento aos seus colegas de classe.

O problema começou na segunda semana nos dias 16 e 17 de abril de 2024 em que começamos o trabalho com a escrita matemática e os alunos estavam mais tensos que na semana anterior mas, devagarinho e com um pouco de paciência, fizemos a semana da subtração simples, subtração com empréstimo, subtrações sucessivas e iguais. O caminho do aprendizado é prazeroso mas, não é fácil.

Na terceira semana, nos dias 23 e 24 e também nos dias 29 e 30 de abril, foi então trabalhada a divisão primeiro através das infinitas subtrações sucessivas e a apresentação e importância do resto, tanto em forma de desenho quanto em forma da escrita numérica. Não foram dias fáceis, mas, dias de muita paciência e dedicação mútuo tanto da parte de docência como da discência. Ainda foi dado a eles alguns conceitos de Teoria dos Números, de uma forma bem simples, e ainda apresentado algumas regras de divisibilidade de alguns números grandes, que não sabem por onde começar a dividir, os alunos foram levados a pensar sobre dar uma divisão exata ou não, e quais destes produziriam restos e até quanto podem chegar os restos de um número.

A cada dia de novo aprendizado via-se naqueles lindos olhinhos o brilho mediante a aquisição de novo conhecimento, os quais eram obscuros e desconhecidos, pasmem!!!, até aquele momento.

No dia 02 de maio de 2024 foi aplicado o pós-teste e que felicidade que os nossos alunos subiram suas notas para 70 por cento de acerto, de um conteúdo obscuro para eles no sexto ano do ensino fundamental básico.

Concluiu-se com isso, que o meu trabalho contribuiu para a diminuição da ausência escolar, diminuição em 80 por cento da indisciplina, tanto na sala de aula como em casa, aumentou a confiança dos alunos em si, aumento da concentração, agora estes alunos estão tentando realizar atividades propostas. Acredito que se este trabalho continuasse sendo aplicado teríamos um resultado mais positivo.

---

# Divisão de números

---

A divisão de números é uma operação matemática fundamental que tem evoluído ao longo de milhares de anos. Neste capítulo, apresentamos uma breve história da evolução da divisão de números e a demonstração do Teorema da Divisão Euclidiana, um resultado essencial na teoria dos números que desempenha um papel crucial na resolução de problemas, simplificação de cálculos, análise de dados e desenvolvimento de modelos matemáticos em diversas áreas, desde as ciências exatas até as sociais e humanas.

## 1.1 Um breve relato histórico da divisão de números

A evolução da divisão de números é apresentado de forma bem didática e magnífica nos livros escritos por Boyer [4] e Eves [6]. De acordo com estes autores o desenvolvimento dos métodos da divisão de números começou no Egito, desde então, os métodos foram aprimorados até assumirem a forma que conhecemos nos dias atuais.

### 1.1.1 A divisão no Egito

Em 1858, o egiptólogo escocês Alexander Henry Rhind visitou o Egito e comprou em Luxor o papiro que atualmente é conhecido como papiro Rhind ou Ahmes. Segundo Eves [6], o papiro de Rhind foi escrito pelo escriba Ahmes por volta de 1650 a.C. e consiste em um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas e suas soluções, copiados em escrita hierática, proporcionando uma visão detalhada das práticas matemáticas egípcias da época.

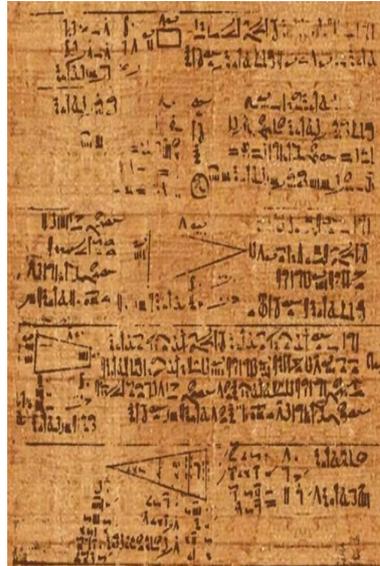


Figura 1.1: Papiro Rhind ou Ahmes. Fonte: Museu Britânico

Neste papiro encontramos um método para dividir dois números que elimina a necessidade de aprender uma tábua de multiplicação. Por exemplo, para dividir 1043 por 28, dobramos sucessivamente o divisor 28 até o ponto em que o próximo dobro exceda o dividendo 1043. O procedimento está exposto abaixo

*	1	28
	2	56
*	4	112
	8	224
	16	448
*	32	896

ora, como

$$\begin{aligned}
 1043 &= 896 + 147 \\
 &= 896 + 112 + 35 \\
 &= 896 + 112 + 28 + 7
 \end{aligned}$$

o quociente é dado pela soma dos números com asterisco, ou seja,  $32 + 4 + 1 = 37$  e o resto é 7.

### 1.1.2 A divisão na Babilônia.

Os babilônios, que viveram na região da Mesopotâmia (atual Iraque) por volta de 3000 a.C., desenvolveram um sistema de numeração sexagesimal (base 60), que facilitava os cálculos aritméticos, incluindo a divisão. Um dos registros mais importantes desse povo são as tábuas de argila babilônicas, datadas aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C. Entre elas, a mais conhecida é a Plimpton 322, uma tábua pertencente à coleção G.A. Plimpton da Universidade de Columbia, catalogada sob o número 322, veja Eves [6].

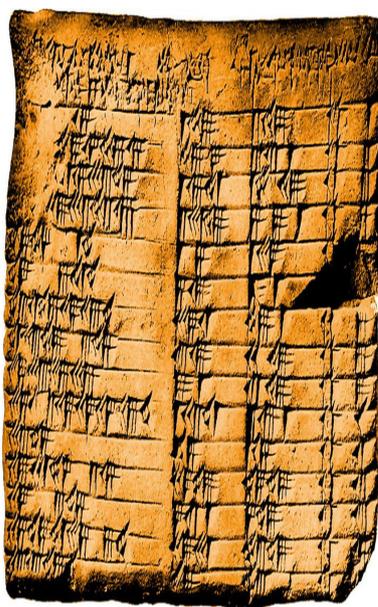


Figura 1.2: Plimpton 322. Fonte: Universidade de Colúmbia

A Plimpton 322 contém uma série de números organizados em colunas e linhas, na opinião de Boyer [4], a disposição dos números na Plimpton 322 poderia ser explicada como uma lista de triplas pitagóricas, onde os lados dos triângulos retângulos são inteiros, ou seja, são conjuntos de três números inteiros que satisfazem a equação  $a^2 + b^2 = c^2$ . Ele propôs que a tábua poderia ter sido usada pelos escribas babilônicos para resolver problemas geométricos, algébricos e aritméticos. Por exemplo, ela pode ser usada para resolver problemas relacionados à área e ao perímetro de triângulos retângulos.

Conforme Boyer [4] o povo babilônico não efetuava a divisão pelo incomodo processo de duplicação dos egípcios, mas por uma fácil multiplicação do dividendo pelo inverso do divisor, ou seja, com base na seguinte igualdade

$$\frac{a}{b} = a \frac{1}{b}.$$

Para determinar o inverso do divisor os babilônicos desenvolveram a seguinte tábua de recíprocos ou inversos no sistema sexagesimal

Coluna I	Coluna II
2	30
3	20
4	15
5	12
6	10
8	7,30
9	6,40
10	6
12	5

Tabela 1.1: Tabela de inversos no sistema sexagesimal

onde

$$7,30 = \frac{7}{60} + \frac{30}{60^2} \quad \text{e} \quad 6,40 = \frac{6}{60} + \frac{40}{60^2}.$$

Por exemplo, a divisão de 180 por 9 era calculada da seguinte forma

$$\frac{180}{9} = 180 \frac{1}{9} = 180(6,40) = 180\left(\frac{6}{60} + \frac{40}{60^2}\right) = 20.$$

Note que na tabela acima não aparecem os recíprocos de 7 e 11, pois os recíprocos desses números são sexagesimais infinitos como em nosso sistema decimal os de 3, 6 e 9.

### 1.1.3 A divisão na Grécia

Como relata Eves [6], a partir do 600 a.C., os gregos chamados helenos (antigos antepassados) começaram a dominar a região mediterrânea, isto facilito o intercâmbio cultural e comercial com os egípcios e os babilônicos, o que permitiu que ideias e conhecimentos matemáticos fossem transmitidos e assimilados pelos gregos.

Na Grécia Antiga, a divisão de números era uma operação matemática significativa, especialmente desenvolvida na escola de matemática fundada por Pitágoras e continuada por seus seguidores. Entre eles, destacou-se um matemático chamado Euclides, que estabeleceu fundamentos para compreender a divisão não apenas como uma operação prática, mas também como um conceito matemático abstrato.



Figura 1.3: Euclides.

Por volta de 300 a.C. Euclides descreve no livro VII do seu tratado "Os Elementos" um algoritmo para dividir dois números, o qual é chamado de método das subtrações sucessivas. Por exemplo, para dividir 34 por 6 subtraímos 6 de 34 repetidamente, ou seja,

$$34 - 6 = 28$$

$$28 - 6 = 22$$

$$22 - 6 = 16$$

$$16 - 6 = 10$$

$$10 - 6 = 4$$

o quociente é 5 e o resto 4, pois subtraímos 6 cinco vezes de 35 até chegar a 4 que é menor que 6.

#### 1.1.4 A divisão na Índia

Segundo Boyer [4], pouco se conhece sobre o desenvolvimento da matemática na antiga cultura hindu devido à escassez de registros históricos autênticos. A mais antiga fonte histórica preservada são as ruínas de uma cidade de 5000 anos em Mohenjo Daro. Os habitantes dessa cidade possuíam sistemas de escrita, contagem, pesos e medidas, além de cavarem canais para irrigação. Esses elementos são fundamentais para a matemática e a engenharia. Conforme Boyer [4], os hindus foram hábeis aritméticos e deram contribuições significativas à álgebra. Grande parte do conhecimento da aritmética hindu provém do texto "Lilavati" de Bhaskara. De acordo com Boyer [4], antes de 1600 d.C., aproximadamente, os hindus desenvolveram um algoritmo usado para dividir números





Figura 1.6: Robert Recorde. Fonte: Astronomy and Astronomers

A figura mostra o processo detalhado de como Recorde dividiu 7890 por 33.

$$\begin{array}{r} 33 \overline{) 7890} \quad (239 \frac{1}{3} \\ \underline{66} \\ 129 \\ \underline{99} \\ 300 \\ \underline{297} \\ 3 \end{array}$$

Figura 1.7: Fonte: Teoria dos números para professores do ensino fundamental

Embora Recorde não tenha inventado o algoritmo em si, seu trabalho ajudou a popularizá-lo e estabelecê-lo como uma técnica padrão em aritmética.

Em conclusão a divisão de números é um conceito que evoluiu ao longo de milênios, passando por várias civilizações e sendo influenciado por matemáticos de diferentes épocas. Cada avanço contribuiu para a compreensão e a praticidade da operação de divisão, culminando nos métodos rápidos e precisos que utilizamos hoje.

## 1.2 Teorema da Divisão Euclidiana

Nesta seção, utilizamos como referência o livro de Aritmética de Abramo Hefes [1]. Começamos definindo alguns conceitos básicos.

Um subconjunto  $S$  de  $\mathbb{Z}$  é **limitado inferiormente**, se existir  $c \in \mathbb{Z}$  tal que  $c \leq x$  para todo  $x \in S$ . Por exemplo,  $\mathbb{N}$  é limitado inferiormente, pois  $0 \leq n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Porém,  $-\mathbb{N}$  não é limitado inferiormente.

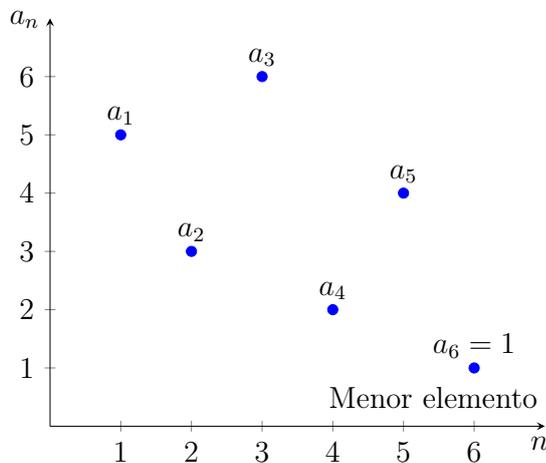
Para  $S \subset \mathbb{Z}$  diremos que  $a \in S$  é **um menor elemento** de  $S$  se  $a \leq x$  para todo  $x \in S$ . Por exemplo, 1 é um menor elemento de  $\mathbb{N}$ , pois  $1 \in \mathbb{N}$  e  $1 \leq n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Mas,  $-\mathbb{N}$  não possui menor elemento.

Uma das propriedades mais fundamentais dos números inteiros é o Princípio da Boa Ordenação, que serve de base para justificar o método de indução matemática. Vamos enunciá-lo, pois será utilizado na demonstração do Teorema da Divisão Euclidiana.

### Princípio da Boa Ordenação

Se  $S$  é um subconjunto não vazio de  $\mathbb{Z}$  e limitado inferiormente, então  $S$  possui um menor elemento.

Por exemplo, como todo subconjunto de  $\mathbb{N}$  é limitado inferiormente por 1, temos que todo subconjunto não vazio de  $\mathbb{N}$  possui um menor elemento. Em particular, o conjunto formado pelos números  $a_1 = 5$ ,  $a_2 = 3$ ,  $a_3 = 6$ ,  $a_4 = 2$ ,  $a_5 = 4$  e  $a_6 = 1$  tem como menor elemento  $a_6$ .



O seguinte resultado decorre do Princípio da Boa Ordenação, o qual será também empregado na demonstração do Teorema da Divisão Euclidiana.

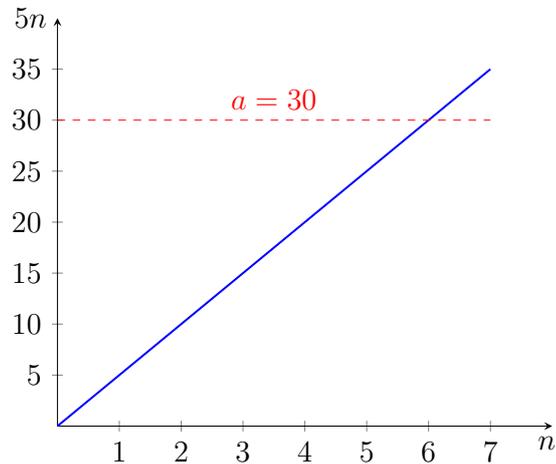
**Teorema 1.2.1** (Propriedade Arquimediana). *Sejam  $a, b \in \mathbb{Z}$ , com  $b \neq 0$ . Então existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $nb > a$ .*

*Demonstração.* Como  $|b| \neq 0$  temos que  $|b| \geq 1$ , pois pelo Princípio da Boa Ordenação não existe nenhum número inteiro entre 0 e 1, logo

$$(|a| + 1)|b| \geq |a| + 1 > |a| \geq a.$$

Assim, se  $b > 0$  basta tomar  $n = |a| + 1$  e se  $b < 0$  tome  $n = -|a| - 1$ . □

Por exemplo, para  $a = 30$  e  $b = 5$ ,



a propriedade arquimediana nos garante que existe um número inteiro  $n$  tal que  $5n > 30$ . Claramente,  $n$  pode ser qualquer número maior que 6, como 7.

Vamos agora a enunciar e demonstrar o Teorema da Divisão Euclidiana.

**Teorema 1.2.2** (Teorema da Divisão Euclidiana). *Sejam  $a$  e  $b$  dois números inteiros com  $b \neq 0$ . Existem dois únicos números inteiros  $q$  e  $r$  tais que*

$$a = bq + r, \quad \text{com } 0 \leq r < |b|.$$

*Demonstração.* Considere o conjunto

$$S = \{x = a - by; y \in \mathbb{Z}\} \cap (\mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Como  $-a$  e  $-b \in \mathbb{Z}$ , com  $-b \neq 0$ , do Teorema 1.2.1, existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $n(-b) > -a$ , logo  $a - nb > 0$ , o que mostra que  $S$  é não vazio. Além disso, o conjunto  $S$  é limitado inferiormente por 0, logo, pelo Princípio da Boa Ordenação, temos que  $S$  possui um menor elemento  $r$ . Portanto, existe  $q \in \mathbb{Z}$  tal que  $r = a - bq \geq 0$ . Daí que,

$$a = bq + r, \quad \text{com } 0 \leq r.$$

Para provar que  $r < |b|$ . Suponhamos por absurdo que  $r \geq |b|$ . Portanto, existe  $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  tal que  $r = |b| + s$ , logo  $0 \leq s < r$ , pois  $b \neq 0$ . Mais isso contradiz o fato de  $r$  ser o menor elemento de  $S$ , porque

$$s = r - |b| = a - bq - |b| = a - bq \mp b = a - (q \pm 1)b \in S,$$

com  $s < r$ .

Para mostrar que  $q$  e  $r$  são únicos. Suponha que existam  $q'$  e  $r' \in \mathbb{Z}$  tais que

$$a = bq' + r', \quad \text{com } 0 \leq r' < |b|.$$

Assim, como  $-|b| < -r \leq 0$ ,

$$-|b| < -r \leq r' - r \leq r' < |b|.$$

Logo,  $|r' - r| < |b|$ .

Por outro lado,

$$|r' - r| = |a - bq' - a + bq| = |b(q - q')| = |b||q - q'|.$$

Daí que,  $|b| > |b||q - q'|$  o que só é possível se  $|q - q'| = 0$ . Assim,  $q = q'$  e conseqüentemente,

$$r = a - bq = a - bq' = r'.$$

□

Os números  $a$ ,  $b$ ,  $q$  e  $r$  mencionados no Teorema 1.2.2 são chamados, respectivamente, de **dividendo**, **divisor**, **quociente e resto** da divisão de  $a$  por  $b$ .

O Teorema 1.2.2 nos garante, portanto, que no conjunto dos números inteiros é possível realizar a divisão com resto de um número  $a$  por outro número  $b$  diferente de zero. Por exemplo, para  $a = 100$  e  $b = 17$  existem  $q = 8$  e  $r = 15$  tais que

$$100 = (17)5 + 15.$$

Observe que, a partir da igualdade acima, não podemos concluir que o resto da divisão de 100 por 5 seja 15, pois 15 é maior que 5. Além disso, para  $a = -19$  e  $b = 5$  temos que  $q = -4$  e  $r = 1$ , pois

$$-19 = 5(-4) + 1.$$

Se no Teorema 1.2.2 temos  $r = 0$ , dizemos que  $b$  **divide**  $a$ . Também é comum dizer que  $a$  é **múltiplo** de  $b$ . Por exemplo, 5 divide 60 (ou 60 é múltiplo de 5), pois  $60 = (12)5$ .

---

## Descrição do problema

---

Entre todas as operações aritméticas fundamentais, há uma que se destaca especialmente pela sua complexidade, tanto no conceito quanto na execução do seu algoritmo: a divisão. A divisão é frequentemente considerada uma das operações básicas matemáticas mais difíceis para ensinar para crianças devido os pré-requisitos exigidos como a multiplicação e a subtração, e à execução de seu algoritmo. Diversos autores e pesquisadores em educação matemática discutem essas dificuldades.

Aqui estão alguns deles:

- De acordo com Aragão [3], entre 1400 e 1500 d. C. a operação aritmética mais complexa era a divisão.
- Kamii [9] argumenta que a divisão é uma operação complexa para crianças, pois exige um entendimento profundo da multiplicação, além da capacidade de dividir conjuntos de objetos mentalmente e fisicamente.
- Holt [8] observa que a divisão, especialmente a divisão longa, pode ser particularmente desafiadora devido à sua natureza algorítmica e à necessidade de manter várias etapas e cálculos intermediários na memória.
- Para Miguel e Miorim [11], entre as quatro operações elementares, a divisão é a que oferece maiores dificuldades, tanto para os que irão aprendê-la como para os professores que irão ensiná-la
- Piano, Loureiro e Langer [13] afirmam que a divisão é uma operação matemática comumente associada a dificuldades, tanto no ensino quanto na aprendizagem, para

amenizar tais situações podem ser utilizadas táticas que incluam os diferentes tipos de divisão, como: partilha, medida e comparação.

A abordagem do problema que dá origem a este trabalho emerge das minhas aulas de ensino de matemática, nas quais, a partir da apresentação de determinados problemas de divisão de números realizados em sala de aula, os alunos manifestam atitudes de confusão ou apatia. Por exemplo, algumas das respostas dos alunos à pergunta dividir 1024 por 8 foram

$$\begin{array}{r} 1024 \overline{) 8} \\ \underline{8} \phantom{00} \\ 22 \phantom{00} \\ \underline{17} \phantom{00} \\ 54 \phantom{00} \\ \underline{52} \phantom{00} \\ 2 \end{array}$$

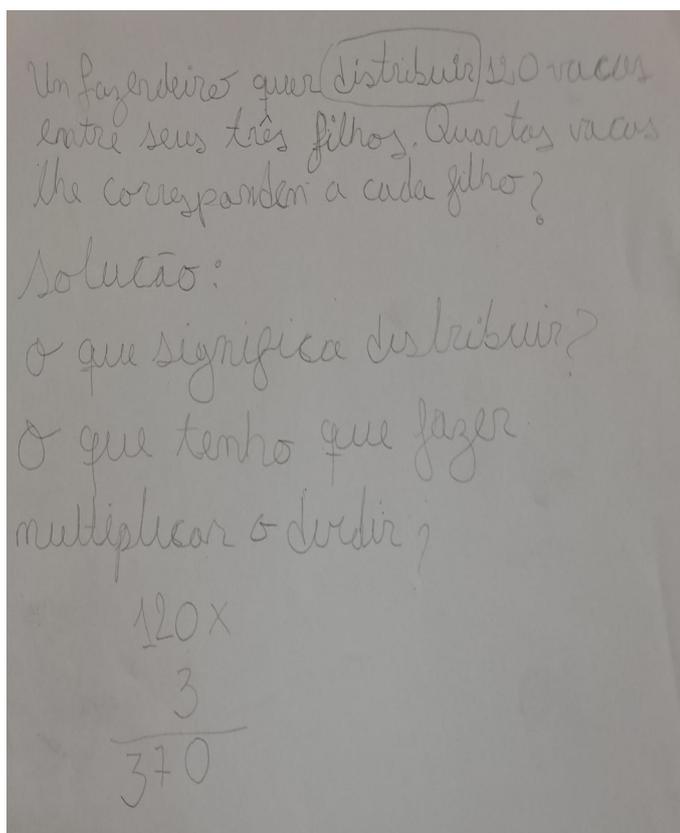
Aqui observamos que o aluno tem uma ideia de como funciona o algoritmo da divisão, porem não domina a tabuada do 8, pois para ele  $8 \times 2 = 17$  e  $8 \times 7 = 52$ , o que leva a que a resposta esteja errada.

$$\begin{array}{r} 1024 \overline{) 8} \\ \text{uso de} \end{array}$$

Aqui o aluno demonstra um total desconhecimento do algoritmo da divisão, ou seja, esse conteúdo é estranho para ele. Segundo os alunos em sala, eles desconhecem completamente como iniciar a resolução e onde buscar informações prévias que os ajudem a refletir sobre o processo educativo.

Os educandos também têm dificuldades na interpretação de problemas envolvendo a divisão, pois a terminologia empregada inclui sinônimos como distribuir, agrupar, diminuir, para cada um, entre outros. Isso se deve ao fato de que são semi-analfabetos e apresentam dificuldades em leitura e escrita. Por exemplo, no seguinte problema:

Um fazendeiro quer distribuir 120 vacas entre seus três filhos. Quantas vacas cada filho deverá receber?



As imagens acima mostram como problemas simples podem ser muito difíceis para uma criança que não consegue desenvolver o algoritmo da divisão se não tiver uma boa base em matemática. Questões como estas deixam os educadores, principalmente matemáticos, um pouco preocupados em ajudar seus discentes, não apenas pela dificuldade dos alunos em realizar o algoritmo da divisão, mas também em resolver problemas. Essas situações levam os docentes a refletirem sobre estratégias adequadas para que o aluno formule e compreenda o algoritmo da divisão. No entanto, é necessário que esse aprendizado seja positivo e motivador, envolvendo questões do cotidiano e a vivência do discente.

Há uma intensa preocupação em minimizar as falhas de conhecimento e, a partir daí, acelerar o processo de nivelamento, para que todos tenham acesso ao mesmo conhecimento. O objetivo é que toda a turma consiga acompanhar novos conteúdos e aprendizados de

maneira mais tranquila e igualitária. Um dos principais objetivos é evitar o bullying, garantindo que todos tenham acesso ao mesmo nível de conhecimento e nenhum aluno se sinta excluído por não saber algo que os outros sabem.

Nesse contexto, ao longo deste trabalho, será apresentada uma proposta didática para o ensino-aprendizagem da divisão. A abordagem começará com uma parte lúdica, após a realização de um pré-teste para identificar falhas no conhecimento. Em seguida, haverá a transcrição do conhecimento adquirido para a parte escrita e prática. Por último, será trabalhada a resolução de exercícios e problemas, oferecendo aos alunos oportunidades para vivenciar e experimentar. Isso permitirá que manipulem, observem, questionem, reflitam e, assim, desenvolvam seus conhecimentos e apliquem conceitos. O objetivo é torná-los competentes não só em matemática, mas também capazes de sobreviver em um mundo cada vez mais competitivo e desafiador.

Esperamos que esta proposta seja concluída com o ensino-aprendizagem do algoritmo específico da divisão e que o conhecimento adquirido contribua para o desenvolvimento futuro dos alunos, tanto no cotidiano quanto nas conquistas ao longo da vida. Isso abrange suas relações familiares, estudos, e escolhas profissionais e financeiras.

---

# Metodologia

---

O trabalho será realizado na escola estadual Professor Benedito de Carvalho, situado na rua A, 296, Bairro Morada do Ouro - setor norte, Cuiabá-MT. Este trabalho foi autorizado pela gestão da escola através de termo de autorização, veja Figura 5.4, e um projeto apresentado, ver Figura 5.3, à unidade escolar da aplicação da dissertação pra obtenção de título de Mestre. Em seguida, foi confeccionado uma autorização de termo de livre consentimento, veja Figura 5.1, para os pais de 10 alunos, todos com 11 ano de idade, da turma do sexto do ensino fundamental da educação básica, que apresentam a mesma dificuldade em realizar o algoritmo da divisão.

## 3.1 Participantes

Os alunos escolhidos para esta análise apresentam não apenas dificuldades e falhas significativas no conhecimento, especialmente no que tange à operação da divisão de números, mas também exibem comportamentos e atitudes que agravam ainda mais esses problemas de aprendizado. Esses comportamentos incluem faltas frequentes, desinteresse pelo estudo, bagunça em sala de aula, conversas paralelas, indisciplina, resistência em realizar as atividades propostas, desânimo, rispidez, sonolência e enfrentamento aos profissionais da educação e aos seus familiares e conhecidos (vizinhos, amigos e outros).

Contudo, devemos lembrar que o sistema adotado pelo estado de Mato Grosso é o Ciclo de Formação Humana, no qual o aluno é acompanhado por 3 anos, em cada ciclo, por meio da ficha FICAI e segundo Resolução NORMATIVA N. 009/2023/CEEMT, o qual é desenvolvido por Enturmação (os alunos são colocados em sala mediante as suas idades) e não pelo conhecimento. Aqui é maximizado a história e vivencia do aluno e minimizado

os conhecimentos adquiridos pelos livros ao longo dos séculos. Aparentemente o aluno necessita apenas daquilo que ele já vivenciou e neste atual contexto não há nenhuma preocupação com o mundo competitivo e real que este deverá enfrentar no seu futuro social e família, segundo ALMT.

Segundo Enríquez, Segura e Tovar [5] este mau desempenho escolar resulta de múltiplos fatores e causas, entre os quais se destacam: fatores de natureza individual relacionados ao estado de saúde do aluno, contexto familiar, situação socioeconômica e outros associados ao próprio sistema educativo. Porém, na opinião de Ballone citado em Mazer, Bello e Bazon [10], estas dificuldades no aprendizagem não devem ser tratadas como se fossem problemas insolúveis, mas como desafios que fazem parte do próprio processo da aprendizagem.

Mesmo assim, nenhum destes problemas apresentados acima são a garantia das falhas no conhecimento do educando, mas são bem sugestivos e são eles, pelo menos, usados como orientadores judiciais e sociais. O problema é que temos alunos semi-analfabetos que necessitam de atenção especial. Pensando nisso, acreditamos que, com paciência e estratégias adequadas, as crianças poderão superar suas dificuldades e desenvolver uma compreensão sólida da divisão de números.

Após a liberação da escola e dos responsáveis pelos alunos, estes foram convocados a realizar, no dia 2 de abril, um pré-teste para que seus conhecimentos em matemática, especialmente em divisão, fossem avaliados.

## 3.2 Pré-teste

Para identificar dificuldades específicas que os alunos possam ter com a divisão de números, aplicamos um pré-teste na primeira aula, consistindo em seis questões a respeito das operações básicas e três questões para indagar quando o aluno começa a ter dificuldades no estudo de matemática, veja Figura 5.2.

Antes de aplicar o pré-teste, foi explicado aos alunos que o objetivo não era avaliá-los em matemática, mas sim identificar os erros que cometem na resolução das questões para, depois, ajudá-los a corrigi-los. Esta abordagem permite detectar erros comuns e desafios individuais, facilitando a adaptação das estratégias de ensino às necessidades de cada aluno. A Figura 3.1 mostra alguns dos alunos participando do pré-teste.



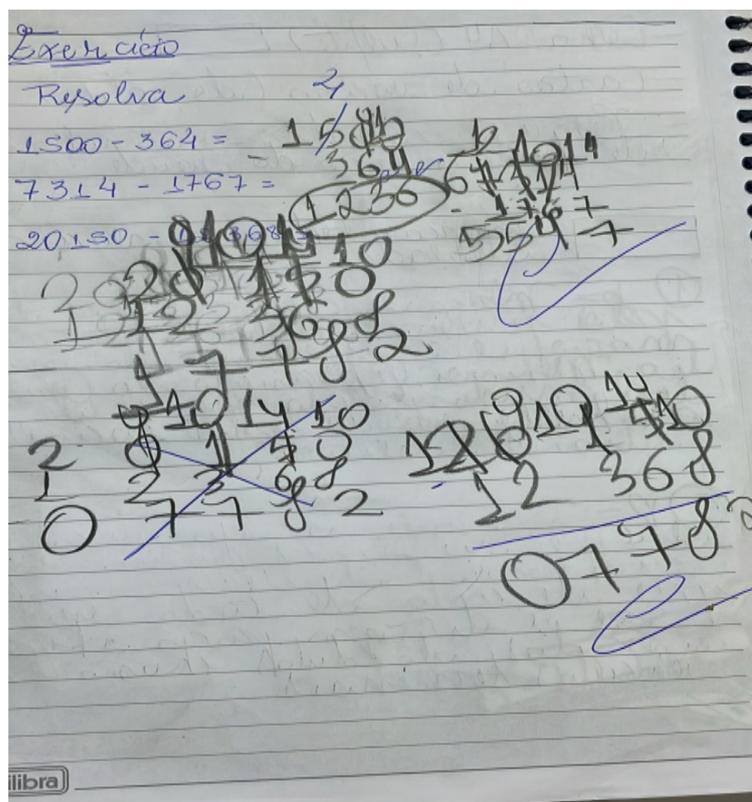
Figura 3.1: Alunos participando do pré-teste

Uma vez entregue o pré-teste, foi solicitado aos alunos que começassem a resolver as questões sem pressa, que analisassem os problemas tranquilamente e que registrassem tanto o procedimento realizado quanto a resposta, visando obter evidências para a análise dos resultados. Nas questões de divisão de números (1d, 1f e 1h), encontramos os seguintes erros cometidos pelos alunos:

- E1** Erro de inverter a posição do dividendo e do divisor.
- E2** Erro de fazer subtrações incorretas durante o processo de divisão.
- E3** Erro de multiplicar incorretamente o divisor pelo quociente.
- E4** Erro de não alinhar corretamente os dígitos após realizar a subtração durante o processo de divisão.
- E5** Erro de não saber lidar com zeros intermediários ou finais no dividendo, o que pode levar a erros no quociente.

**E6** Erro ao dividir parte do dividendo pelo divisor, resultando em restos incorretos e quocientes parciais errados.

A seguinte figura mostra alguns desses erros



A gráfica abaixo mostra os erros cometidos pelos alunos nas questões 1d, 1f, 1h e 1i do pré-teste.

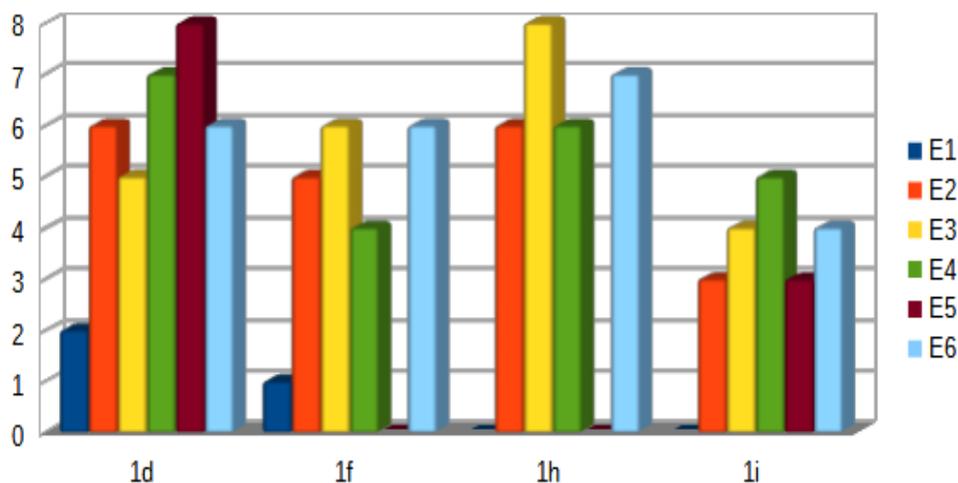
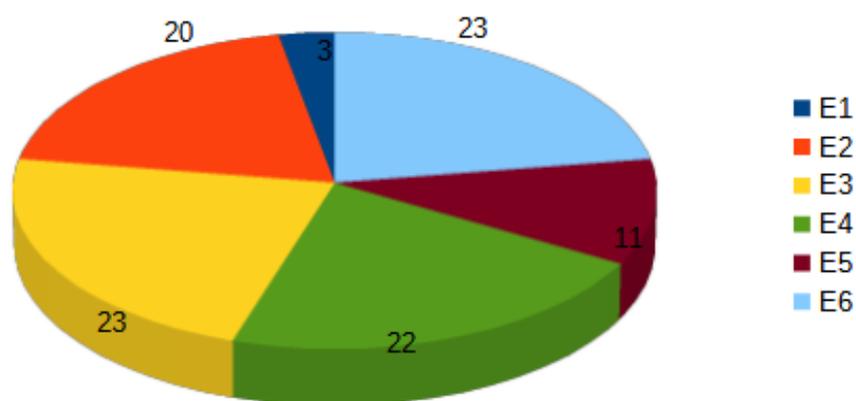


Figura 3.2: Erros cometidos pelos alunos na divisão

Da Figura 3.2, na questão 1d, o erro mais frequente foi o E5, indicando que os alunos têm uma grande dificuldade em lidar com zeros finais no dividendo. Além disso, a partir da Figura 3.2, podemos observar também que os alunos não dominam as operações de subtração e multiplicação (erros E2 e E3 aparecem nas quatro questões).

Observe também da Figura 3.2 que os alunos não entendem claramente cada passo do processo de divisão de números, pois não conseguem alinhar os dígitos de maneira adequada em cada etapa da divisão (erro E4), levando a erros não detectados no cálculo final do quociente e do resto (erro E6). Finalmente, alguns alunos não entendem que o dividendo é o número a ser dividido e o divisor é o número pelo qual se divide, o que os leva a inverter a posição desses números (Erro E1).

Reorganizando esses erros com base na frequência encontrada nas questões 1d, 1f, 1h e 1i, obtemos o seguinte gráfico:



### 3.3 Ensino da divisão de números usando materiais lúdicos

Antes de começar esta seção, lembremos da definição de material lúdico.

**Definição 3.3.1.** *Material lúdico é uma abordagem que utiliza jogos, brincadeiras e atividades recreativas como ferramentas de aprendizagem, desenvolvimento pessoal e terapia. Essa abordagem valoriza a ludicidade como forma de estimular a criatividade, a imaginação, a socialização e o prazer na aprendizagem.*

Utilizar materiais lúdicos para preencher lacunas na compreensão da divisão de números pode tornar o aprendizado mais envolvente e eficaz. Assim, na segunda e terceira aula, utilizamos esses materiais para aprimorar a compreensão da divisão pelos alunos participantes.

### 3.3.1 Material dourado

O material dourado é uma ferramenta matemática que consiste em cubos pequenos, barras, placas e cubos grandes que representam o seguinte:

- Cada cubo pequeno, com 1 cm de altura, 1 cm de comprimento e 1 cm de largura, representa uma unidade.
- Cada barra de 10 cm de comprimento, 1 cm de largura e 1 cm de espessura representa uma dezena.
- Cada placa, de 10 cm de comprimento por 10 cm de largura e 1 cm de espessura, representa uma centena.
- Cada cubo grande de 10 cm de altura por 10 cm de comprimento por 10 cm de largura representa a unidade de milhar.



Figura 3.3: Material dourado

O trabalho com o material dourado começou com a explicação aos alunos de que os cubinhos menores representavam uma unidade. A barra, contendo 10 unidades, era um agrupamento de 10 cubinhos, o mesmo princípio se aplicava à placa, que continha 100 unidades, e ao cubo maior, contendo 1000 unidades. Aproveitamos o momento para destacar que estávamos trabalhando no sistema de base 10.

Durante essa fase, exploramos o método comparativo mencionado por Boyer [4], o que tornou o aprendizado divertido para os alunos, pois não precisavam contar diretamente. Por exemplo, colocamos 12 canetas Bic sobre uma mesa e os alunos precisavam distribuir quantidades correspondentes de cubinhos ou barras de maneira igualitária. Também utilizamos outros objetos e diferentes quantidades para esta atividade, com o objetivo de familiarizar os alunos com a manipulação do material dourado.

Para tornar o trabalho mais dinâmico, implementamos um método de competição e julgamento, onde o grupo A avaliava se a quantidade dividida pelo grupo B estava correta, e vice-versa.

Como exemplo vejamos como trabalhamos com os alunos a questão 1d do pré-teste.

**Exemplo 3.3.2.** *Dividir 520 por 4.*

*Solução.* Pedi aos alunos que escolhessem 5 placas e 2 barras e distribuíssem de forma equitativa em grupos de quatro. Ao iniciar com as placas, os alunos observaram que sobrou uma placa. Em seguida, solicitei que dividissem a placa restante em 10 barras e que continuassem a distribuir 12 barras.

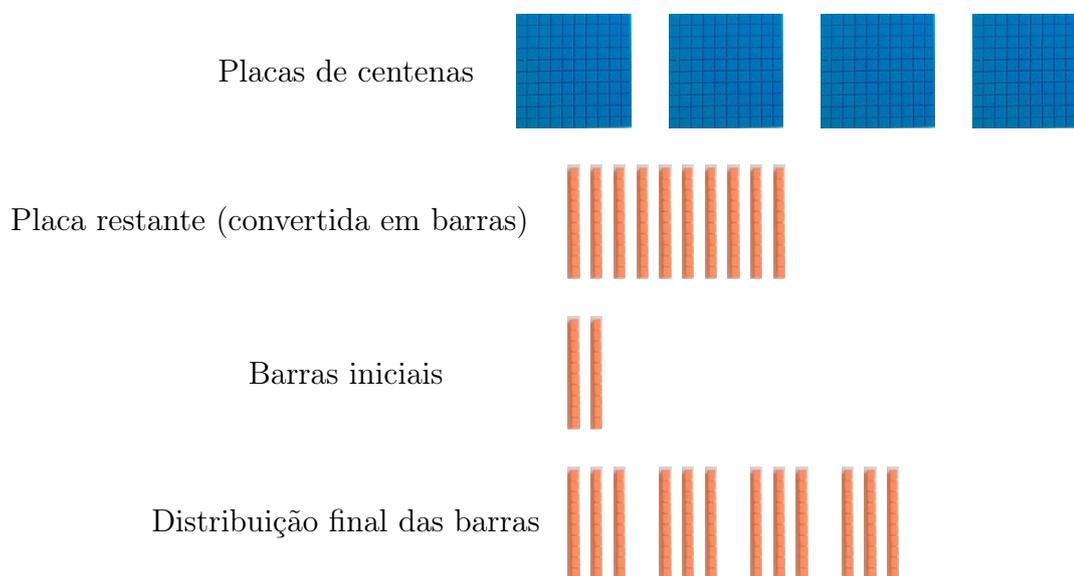


Figura 3.4: Divisão de 520 por 4 usando material dourado

Resultando que cada grupo tem 1 placa (100) e 3 barras (30). Como não sobrou nada, temos que o quociente da divisão é 130 e o resto é 0.  $\square$

### 3.3.2 Dinheiro de Mentira

O trabalho inicial foi minucioso, com a divisão realizada na base 10, e incluiu a explicação e explanação sobre o conhecimento do dinheiro em si. Observou-se que os alunos sabiam o que era dinheiro, mas não sabiam manuseá-lo. Com isso, apresentamos as moedas e demonstramos quantas moedas de 10 centavos correspondiam a 1 real. O mesmo procedimento foi realizado com moedas de 5 e 1 centavo. Em seguida, mostramos a moeda de 10 reais e suas divisões, e o mesmo trabalho foi feito com moedas de 100 reais.

O uso de dinheiro de mentira é uma maneira eficaz de ensinar divisão de números, especialmente para mostrar a divisão de quantias em partes iguais. Vejamos como usamos as notas e moedas da Figura 3.5 para responder a questão 1f do pré-teste.



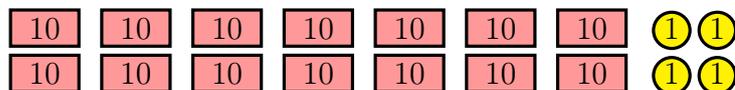
Figura 3.5: Notas e moedas do Brasil

**Exemplo 3.3.3.** *Dividir 144 por 12.*

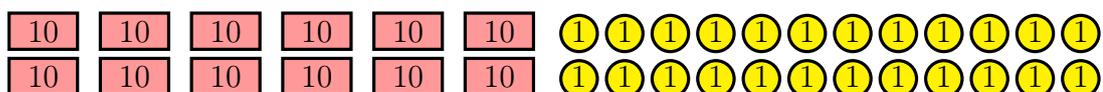
*Solução.* A sugestão de um aluno foi representar 144 como 1 nota de R\$ 100, 4 notas de R\$ 10 e 4 moedas de R\$ 1.



Em seguida, pedi aos alunos que distribuíssem o valor em 12 partes iguais. Para isso, um aluno observou que a nota de R\$ 100 não poderia ser dividida diretamente em 12 partes iguais, então ele trocou a nota de R\$ 100 por 10 notas de R\$ 10. Portanto, agora temos 20 notas de 10R\$ e quatro moedas de 1R\$.



Mais uma vez, foi solicitado aos alunos que dividissem o valor em 12 partes iguais. Então, um aluno percebeu que não era possível distribuir 14 notas de R\$ 10 igualmente em 12 partes. Para resolver o problema, ele trocou 2 notas de R\$ 10 por 20 moedas de R\$ 1. Assim, agora temos que distribuir 12 notas de R\$ 10 e 24 moedas de R\$ 1.



Portanto, ao distribuir esse valor em 12 partes iguais, cada grupo fica com 1 nota de R\$ 10 e 2 moedas de R\$ 1. Assim, o quociente é 12 e o resto é 0.  $\square$

Outro trabalho realizado com os alunos foi a montagem de um bazar, com objetos e brinquedos trazidos pelos próprios alunos para serem vendidos. Cada objeto recebeu um preço diferenciado e só poderia ser comprado se o vendedor recebesse o valor equivalente em notas de mentira. Este procedimento lembra muito o método comparativo mencionado por Boyer [4] e Eves [6].

Após a realização da transação financeira, a pessoa que havia comprado se tornava o vendedor e outro aluno era convocado para ser o cliente e fazer uma nova transação financeira. Durante esse momento de grande satisfação e descontração, os alunos brincavam e aprendiam sem medo de serem julgados ou de não saberem, e aqueles que tinham mais facilidade ajudavam os que tinham mais dificuldade a contar suas notas de mentira. Considero o trabalho realizado muito positivo.

### 3.3.3 Divisão alimentar

A divisão alimentar envolve dividir alimentos (como frutas, bolos, ou chocolates) em partes iguais, proporcionando uma experiência prática e tangível. Para resolver a questão 11 do pré-teste com os alunos, usamos um exemplo simples, como dividir 60 frutas (por exemplo, laranjas) entre 5 pessoas.

**Exemplo 3.3.4.** *Dividir 60 laranjas entre 5 pessoas.*

*Solução.* Para responder a esta questão, providenciamos 60 laranjas e escolhi 5 alunos entre os quais as laranjas serão divididas. Expliquei aos alunos que nosso objetivo é dividir as 60 laranjas igualmente entre os 5 alunos e pedi a outro aluno que começasse distribuindo uma laranja de cada vez para cada um dos 5 alunos até que todas as laranjas tivessem sido distribuídas.

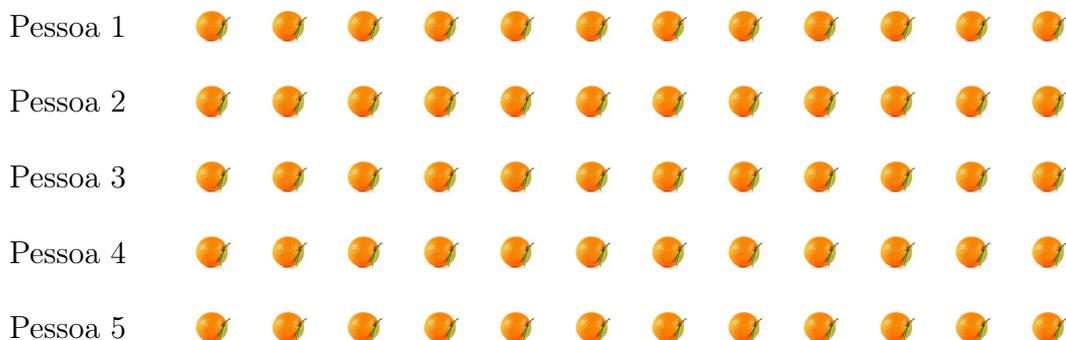


Figura 3.6: Divisão de 60 laranjas entre 5 pessoas

Após distribuir todas as laranjas, pedi ao aluno que contasse quantas laranjas cada

aluno tinha, e ele respondeu que cada aluno tinha 12 laranjas. Portanto, o aluno concluiu que 60 laranjas divididas por 5 pessoas resultam em 12 laranjas por pessoa.  $\square$

O trabalho mais divertido foi realizado com um saco de Sonho de Valsa (chocolate), repetindo a mesma atividade que fizemos anteriormente com as laranjas. Realizamos divisões em quantidades iguais entre diferentes números de alunos, permitindo que observassem não apenas a quantidade distribuída, mas também a variação do resto. No final, dividimos os bombons em partes iguais e comemos.

### 3.3.4 Ábaco

O ábaco é um instrumento antigo de cálculo que tem sido usado há milhares de anos. Seria impossível não utilizá-lo e aproveitá-lo em um trabalho como este. Este objeto está amplamente disponível na escola e oferece uma série de benefícios, especialmente para crianças em idade escolar que estão aprendendo matemática.



Figura 3.7: Ábaco

Aqui temos algumas informações sobre o Ábaco:

1. **Desenvolvimento Matemático:** O Ábaco é um instrumento lúdico que auxilia no ensino de matemática, desenvolvendo habilidades como raciocínio lógico e cálculo mental nas crianças. Com o Ábaco, as crianças aprendem a fazer operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de forma lúdica e intuitiva. Além disso, o método é eficiente em desenvolver diversas habilidades importantes, como raciocínio lógico, memória, atenção, concentração e coordenação motora.
2. **Benefícios do Ábaco:** Estimula o desenvolvimento do raciocínio lógico, melhora a concentração, facilita a visualização dos números e estimula a criatividade.

3. Uso em Sala de Aula: O Ábaco deveria ser utilizado em sala de aula para melhorar a interação entre os alunos e o aprendizado em grupo. Este objeto ajuda a consolidar conceitos de unidade, dezena, centena e milhar, contribuindo para o entendimento do sistema de numeração decimal.

Este instrumento foi trabalhado primeiramente de modo individual, em que cada aluno utilizou uma abordagem baseada no método de Euclides, conforme descrito em sua obra "Os Elementos". Nesse contexto, os alunos empregaram subtrações sucessivas para explorar e compreender o funcionamento do instrumento. A prática individual permitiu que cada estudante se aprofundasse nos conceitos matemáticos fundamentais, reforçando suas habilidades de cálculo e promovendo uma compreensão mais sólida da divisão.

**Exemplo 3.3.5.** *Divisão de 17 por 5 usando o ábaco.*

*Solução.* O trabalho foi realizado em sala de aula, onde os alunos foram divididos em dois grupos, A e B. O Grupo A tinha que dizer dois números, por exemplo: 17 e 5. Após essa informação, o Grupo B deveria fazer somas sucessivas, por meio de agrupamentos iguais de 5 em 5, até chegar a 17, observando que o quociente era 3 e o resto era 2, pois  $5(3) + 2 = 17$ , veja Figura 3.8.

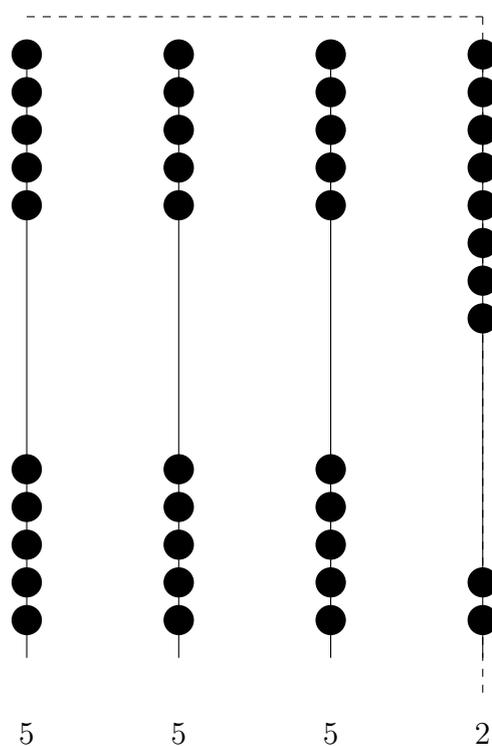


Figura 3.8: Ábaco de 4 colunas com 10 bolinhas em cada coluna

Em seguida, o Grupo A deveria colocar 17 bolinhas e subtrair em grupos de 5 em 5, conforme o método de Euclides de Alexandria (subtrações sucessivas), até resultar na divisão, com o quociente 3 e o resto 2, pois  $17 = 3(5) + 2$ . Era obrigatório fazer a ida com somas e a volta com subtrações. Se a aplicação fosse correta, o aluno obteria o mesmo quociente e o mesmo resto. Este processo era analisado e julgado pelo Grupo A para que o Grupo B pudesse ganhar pontos. Era ainda obrigatório encontrar o mesmo quociente e o resto.  $\square$

## 3.4 Ensino formal da divisão de números

Nesta seção, descrevemos o conteúdo abordado com os alunos a partir do dia 16 de abril, quando começaram os problemas reais e surgiram as grandes dificuldades, pois passamos do momento lúdico para a escrita matemática. Houve a necessidade de muita paciência, pois os alunos, por falta de conhecimento, eram ríspidos e se sentiam condenados por não saberem executar os algoritmos matemáticos. Havia um clima tenso no ar, mas juntos tentamos superar as barreiras.

Neste contexto, apresentaremos o trabalho realizado de um modo tradicional (divisão longa) e o trabalho desenvolvido nesta dissertação. A seguir, verificaremos se este método contribui para diminuir a evasão e o fracasso escolar.

### 3.4.1 Método Tradicional (divisão longa)

A divisão longa é um método usado para dividir números grandes, decompondo o problema em etapas menores e mais simples. Vejamos a descrição deste método

1. Coloque o divisor dentro da chave de divisão e o dividendo fora da chave, à esquerda.
2. Comece com o primeiro dígito do dividendo. Veja quantas vezes o divisor cabe nesse dígito. Se o divisor não couber no primeiro dígito, combine-o com o próximo dígito do dividendo.
3. Coloque o resultado (quociente parcial) abaixo do divisor.
4. Multiplique o divisor pelo quociente parcial e escreva o resultado abaixo do número que você está dividindo.
5. Subtraia este resultado do número acima dele, escrevendo o resto (resto parcial) abaixo da linha.
6. Traga o próximo dígito do dividendo para baixo, adicionando-o ao lado do resto.

7. Repita os passos de divisão, multiplicação e subtração com o novo número formado pelo resto e o dígito trazido para baixo.
8. Continue até que todos os dígitos do dividendo tenham sido trazidos para baixo.
9. O quociente completo é a sequência de números escritos abaixo do divisor.
10. O resto é o número que sobra após ter trazido todos os dígitos para baixo e realizado a última subtração.

Usemos este método para resolver a questão 1h do pré-teste.

**Exemplo 3.4.1.** *Dividir 1024 por 8.*

*Demonstração.*

$$\begin{array}{r|l}
 1024 & 8 \\
 22 & 128 \\
 64 & \\
 0 & 
 \end{array}$$

Colocamos 8 dentro da chave e 1024 fora da chave, à esquerda. Em seguida, verificamos quantas vezes 8 cabe no primeiro dígito de 1024. Como 8 não cabe em 1, consideramos os dois primeiros dígitos, ou seja, 10. Como 8 cabe em 10 uma vez, então colocamos 1 abaixo da chave. Subtraímos 8 de 10, resultando em 2. Em seguida, baixamos o próximo dígito, formando 22. Como 8 cabe em 22 duas vezes, então colocamos 2 abaixo da chave. Multiplicamos 8 por 2, obtendo 16, e subtraímos 16 de 22, resultando em 6.

Depois, baixamos o próximo dígito, formando 64. Como 8 cabe em 64 oito vezes, então colocamos 8 abaixo da chave. Multiplicamos 8 por 8, obtendo 64, e subtraímos 64 de 64, resultando em 0. Como não há mais dígitos para baixar, o resto é 0, concluímos a divisão. O resultado da divisão de 1024 por 8 é 128.  $\square$

No método tradicional, é claramente observado que, em primeiro lugar, o aluno devia ter na ponta da língua toda a tabuada de 1 a 10. Aqui, é evidente que o foco era apenas na "decoreba", onde o aluno precisava simplesmente memorizar as respostas sem necessariamente entender o processo.

O método tradicional lembra muito os anos anteriores ao ano 2000, quando a escola era um ambiente onde ou se decorava a tabuada ou o aluno sofria consequências negativas. Neste método, o aluno não precisava entender o processo do algoritmo matemático. Ou seja, se uma pessoa tinha facilidade para memorizar, ela se saía bem nos estudos. Por outro lado, havia os alunos medianos e, por fim, aqueles que seriam alvo de bullying até o final da vida, sendo considerados "burros" por não conseguirem decorar. Esse método era

considerado cruel, fechado e desumano. Segundo o link <https://www.capesesp.com.br/conheca-os-metodos-de-ensino-das-escolas>, publicado pela uol, temos os seguintes tipos de ensino:

1. **Tradicional:** É a abordagem predominante no país e por isso mesmo a mais conhecida dos pais. Nas escolas tradicionais, o foco está no professor, que detém conhecimentos e repassa ao aluno. O estudante tem metas a cumprir dentro de determinados prazos, que são verificadas por meio de avaliações periódicas. Quem não atinge a nota mínima necessária no conjunto de avaliações ao longo do ano que está cursando é reprovado e tem de refazê-lo. É comum que essas escolas usem apostilas e cartilhas, que estabelecem o quanto a criança deve aprender em cada ano. É uma filosofia que valoriza a quantidade de conteúdo ensinada. Não é um método ruim pois com ele temos os "pessoas bens sucedidas" e são elas que permitem que instituições sejam voltadas para o sucesso do aluno em provas como o Enem (Exame Nacional do Ensino Médio) e o vestibular. As vezes é necessário focar nos conteúdos e tirar proveito dos mesmo.
2. **Construtivista:** Nas instituições que seguem os princípios construtivistas, o conhecimento é ativamente construído pelo sujeito e não passivamente recebido do professor ou do ambiente. Cada estudante é visto como alguém com um tempo único de aprendizado e o trabalho em grupo é valorizado. Nas escolas construtivistas, são criadas situações em que o estudante é estimulado a pensar e a solucionar problemas propostos. Também há provas e reprovação nessas instituições. As ideias do biólogo suíço Jean Piaget (1896-1980) norteiam as escolas que se denominam construtivistas e por isso é comum que elas se apresentem também como escolas piagetianas. Uma variação do construtivismo é o sociointeracionista, do psicólogo bielorusso Lev Vygotsky (1896-1934). O originário do trabalho especialista atribuía um papel preponderante às relações sociais na aprendizagem, enquanto Piaget dava mais importância aos processos internos de cada aluno.
3. **Montessoriano:** Na escola montessoriana, baseada na filosofia da pesquisadora italiana Maria Montessori (1870-1952), a criança deve buscar sua autoformação e construção e os adultos têm de ajudá-la nesse processo, favorecendo o desenvolvimento de indivíduos criativos, independentes, confiantes e com iniciativa. Segundo o método montessori, é agindo que o aluno adquire conhecimentos. As crianças escolhem as atividades que querem fazer. Ao adulto cabe ordenar o trabalho com gradação de dificuldade crescente, respeitando o ritmo de cada aprendiz e sem intervenções indevidas. As classes têm crianças de idades diferentes. Incentiva-se o

trabalho em grupo e todos os estudantes são estimulados da mesma maneira. Para auxiliar na aprendizagem, Maria Montessori criou vários materiais. Um dos mais famosos é o Material Dourado, composto por cubos, placas, barras e cubinhos, que têm o objetivo de facilitar o entendimento das operações matemáticas.

4. **Waldorf:** Na metodologia de ensino waldorf - desenvolvida pelo filósofo austríaco Rudolf Steiner (1861-1925)-, procura-se equilibrar os aspectos cognitivos (capacidade de aquisição de conhecimento) com o desenvolvimento de habilidades artísticas, musicais, de movimentação e de dramatização. Considera-se cada aluno como um ser único, que é acompanhado de forma próxima. São aplicados testes e provas em algumas matérias, especialmente no ensino médio, , em alguns casos, nas últimas séries do ensino fundamental. Mas a avaliação do aluno também engloba a execução de trabalhos, o grau de dificuldade que o estudante tem com o assunto, o empenho em aprender e o comportamento. Os pais recebem avaliações trimestrais com a descrição da atitude de seus filhos diante das tarefas solicitadas no período. O professor permanece com a mesma turma por toda uma etapa (por exemplo, os nove anos do ensino fundamental). No ensino fundamental, o currículo inclui astronomia, meteorologia, jardinagem, artes e trabalhos manuais, como tricô e crochê, além das disciplinas exigidas pela Lei de Diretrizes e Bases (legislação que regulamenta o sistema educacional do Brasil). No ensino médio, há currículos integrados de humanidades (história, geografia, literatura), de ciências (física, biologia, química, geologia, matemática), de artes e ofícios (com modalidades como tecelagem e encadernação), artes dramáticas, educação física e línguas estrangeiras.
5. **Freinet:** Outro pensador que costuma nortear o trabalho de algumas escolas é o pedagogo francês Célestin Freinet (1896-1966), mas sem dar nome exatamente a uma linha pedagógica. Nas instituições que colocam em prática conceitos de Freinet, o aprendizado acontece por meio do trabalho e da cooperação. Nesse tipo de escola, a criança é incentivada a compartilhar suas produções com os colegas, sejam eles de sua classe, de outras ou de escolas diferentes. As avaliações levam em conta o progresso do aluno em comparação ao seu desempenho anterior e não em relação com os demais. Estudos de campo (aulas em que os estudantes são levados em algum lugar específico para aprender determinada matéria, como um parque, por exemplo), elaboração de jornais em grupo e debates são atividades comuns em escolas que se identificam com o pensamento de Freinet, que valoriza o desenvolvimento da capacidade de análise pelos estudantes.

Neste contexto evolutivo temos algumas opções e sugestões de um trabalho conjunto entre

a educação aberta e fechada (tradicional).

O Estado de Mato Grosso, possivelmente considerando isso, adotou em seu sistema educacional o Ciclo de Formação Humana. No entanto, segundo a ALMT - Assembleia Legislativa de Mato Grosso - a RESOLUÇÃO NORMATIVA N.º 009/2023/CEEMT, publicada no Diário Oficial IOMAT em 31 de março de 2023, menciona que talvez o ciclo tenha sido aberto demais, resultando em um desalinhamento e falta de objetivo no conhecimento dos alunos. Acredita-se que seja necessário encontrar um equilíbrio adequado.

## 3.5 Métodos usados nesta dissertação

Nesta seção, serão apresentados os métodos de formalização da escrita do algoritmo da divisão. Iniciamos com o método da multiplicação com somas sucessivas, o qual é a base para aprender o algoritmo da divisão.

### 3.5.1 Método da Multiplicação com Somas Sucessivas

A multiplicação é entendida como uma propriedade fundamental das quatro operações básicas da matemática. Autores como Wall [14] mencionam que conhecemos a multiplicação como "a soma sucessiva de um número por ele mesmo" e geralmente utilizamos um ponto ( $\cdot$ ) ou símbolo ( $\times$ ). Aqui, vemos o termo "Somas Sucessivas", mas não existem registros formais que definam esse termo explicitamente. Ele é subentendido como o ato de pegar um número e realizar a soma (uma operação matemática básica) repetidamente.

Sendo assim, segundo Eves [6], falar dessa maneira é tão intuitivo quanto achamos ser andar e falar. É como se, durante toda a nossa vida, fosse comum andar e falar sem que isso parecesse um processo evolutivo.

Mediante este contexto, eu, Helziana, mestranda em matemática, apropriei-me deste termo "Somas Sucessivas" para a execução desta dissertação. Este método de Multiplicação com Somas Sucessivas foi o primeiro trabalho realizado em forma de escrita matemática com os alunos. Com isso, os alunos entenderam a multiplicação através do processo de somar repetidamente o mesmo número.

Ao contrário do método tradicional escolar, aqui o aluno constrói cada linha da tabuada efetuando o algoritmo da soma. Sendo assim, este processo será feito do seguinte modo:

Multiplicação	Resultado por Somas Sucessivas
$1 \times 1$	$1 = 1$
$1 \times 2$	$1 + 1 = 2$
$1 \times 3$	$1 + 1 + 1 = 3$
$1 \times 4$	$1 + 1 + 1 + 1 = 4$
$1 \times 5$	$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$
$2 \times 1$	$2 = 2$
$2 \times 2$	$2 + 2 = 4$
$2 \times 3$	$2 + 2 + 2 = 6$
$2 \times 4$	$2 + 2 + 2 + 2 = 8$
$2 \times 5$	$2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$
$3 \times 1$	$3 = 3$
$3 \times 2$	$3 + 3 = 6$
$3 \times 3$	$3 + 3 + 3 = 9$
$3 \times 4$	$3 + 3 + 3 + 3 = 12$
$3 \times 5$	$3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$
$4 \times 1$	$4 = 4$
$4 \times 2$	$4 + 4 = 8$
$4 \times 3$	$4 + 4 + 4 = 12$
$4 \times 4$	$4 + 4 + 4 + 4 = 16$
$4 \times 5$	$4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$
$5 \times 1$	$5 = 5$
$5 \times 2$	$5 + 5 = 10$
$5 \times 3$	$5 + 5 + 5 = 15$
$5 \times 4$	$5 + 5 + 5 + 5 = 20$
$5 \times 5$	$5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25$

Tabela 3.1: Tabuada da multiplicação por somas sucessivas

E assim por diante, cada aluno deveria obrigatoriamente fazer a tabuada até o 15. Na

Figura 3.9, temos um aluno realizando a tabuada através de somas sucessivas.



Figura 3.9: Somas sucessivas

Cada tabuada realizada pelo aluno ficou na forma de um triângulo. Além disso, os alunos compreenderam que o segundo dígito da multiplicação indica quantas vezes o primeiro dígito será somado a si mesmo.

Durante a construção da tabuada por meio de somas sucessivas, observe a dedicação de um aluno que inicialmente relutava em participar das atividades propostas. Neste contexto, é evidente que o estudante está construindo conhecimento, não apenas memorizando a tabuada, necessária também para o algoritmo da divisão. Com esse novo aprendizado e ao realizar o trabalho proposto, o aluno começou a se sentir mais valorizado e confiante.

Normalmente, pede-se ao aluno que coloque esta tabuada nas últimas páginas de seu caderno para ter acesso rápido quando precisar usar o método de multiplicação pelo processo de somas sucessivas. Com o progresso no aprendizado, um aluno comentou: 'Poxa vida, professora! Achava que matemática era muito difícil, mas agora vejo que não é tão complicado assim'. Ele compartilhou com colegas e familiares que realmente aprendeu a fazer multiplicação. Os alunos foram encorajados a praticar contas de adição usando os dedos das mãos.

### 3.5.2 Método - Euclides - Subtrações sucessivas

Este trabalho de Euclides, embora muito antigo e pouco utilizado, continua promovendo bons progressos escolares até hoje. Euclides foi um grande e admirável

homem, cujo conhecimento transcendio sua época. Seu trabalho genial ainda produz conhecimento e entendimento sobre a divisão. É maravilhoso ver os alunos construírem seus conhecimentos através das contribuições de Euclides!

Os valores do quociente e do resto em uma divisão podem ser encontrados através do método das subtrações sucessivas. Esse método envolve subtrair o divisor do dividendo repetidamente até que o resultado seja menor que o divisor. O quociente é o número de vezes que o divisor foi subtraído do dividendo, e o resto é o valor resultante da última subtração.

Para ensinar esse método aos alunos, comecei apresentando o seguinte problema: "Será que podemos dividir 60 por 5 sem usar a tabuada da multiplicação?" Em seguida, falei que a resposta é sim e comentei que existe uma maneira fácil de resolver este problema usando subtrações sucessivas.

**Exemplo 3.5.1.** *Dividir 60 por 5.*

*Solução.* Escolhi um aluno e dei a ele 60 balas, pedindo para ele tirar 5 balas de cada vez e contar quantas vezes conseguia fazer isso.

$$\begin{aligned} 60 - 5 &= 55 \quad (1 \text{ vez}) \\ 55 - 5 &= 50 \quad (2 \text{ vezes}) \\ 50 - 5 &= 45 \quad (3 \text{ vezes}) \\ 45 - 5 &= 40 \quad (4 \text{ vezes}) \\ 40 - 5 &= 35 \quad (5 \text{ vezes}) \\ 35 - 5 &= 30 \quad (6 \text{ vezes}) \\ 30 - 5 &= 25 \quad (7 \text{ vezes}) \\ 25 - 5 &= 20 \quad (8 \text{ vezes}) \\ 20 - 5 &= 15 \quad (9 \text{ vezes}) \\ 15 - 5 &= 10 \quad (10 \text{ vezes}) \\ 10 - 5 &= 5 \quad (11 \text{ vezes}) \\ 5 - 5 &= 0 \quad (12 \text{ vezes}) \end{aligned}$$

Após 12 subtrações, o valor final é 0, que é menor que o divisor 5. Portanto, o quociente

da divisão é 12 e o resto é 0. □

Contudo, apesar de ser um método eficaz para números pequenos, ele seria muito trabalhoso caso os números fossem muito grandes, devido à quantidade de subtrações necessárias para realizá-lo manualmente. O momento foi propício para a inserção da divisão, a apresentação do conceito e os nomes dos elementos de cada parte da divisão (lembrando que a divisão também faz parte das quatro operações básicas da matemática).

## Elementos da divisão

$$\begin{array}{r} \text{Dividendo} \Rightarrow 60 \Big| 5 \Leftarrow \text{Divisor} \\ \underline{60} \quad 12 \Leftarrow \text{Quociente} \\ 0 \quad \Leftarrow \text{Resto} \end{array}$$

Foi a primeira vez que o aluno conseguiu realizar uma divisão de números naturais, mesmo com um número pequeno. Além disso, a divisão não gerou medo no educando; ela foi feita de modo consciente, compreendendo-se a obtenção de todos os elementos, e o desenvolvimento do algoritmo ocorreu de forma clara. Aqui, sem a necessidade de decorar a tabuada da multiplicação, mostramos a capacidade de resolução do algoritmo de uma forma simples, pelo método de Euclides.

### 3.5.3 Método - Helziana - Somas Sucessivas

Ao analisar os Elementos de Euclides sobre as subtrações sucessivas e os escritos no Papiro Rhind, e mesmo sem uma definição completa sobre somas sucessivas de um mesmo número, realizadas para a elaboração da tabuada do Método 3.5.1, foi desenvolvido o Método das Somas Sucessivas em conjunto com os alunos, com o objetivo principal de diminuir falhas no conhecimento do educando, permitindo assim a possibilidade de realizar o processo inverso do Método de Euclides.

Neste método, ao invés de usar o dividendo e subtrair o divisor até não ser mais possível diminuir, identificando o quociente e o resto, iremos a somar o divisor repetidamente até que o resultado seja igual ou maior que o dividendo. O quociente é o número de vezes que

o divisor foi somado, e o resto é a diferença entre a última soma e o dividendo. Observe o processo:

**Exemplo 3.5.2.** *Dividir 60 por 5.*

*Solução.* Escolhi um aluno e dei a ele 60 balas, pedindo para ele somar 5 balas de cada vez e contar quantas vezes conseguia fazer isso.

$$\begin{aligned}5 + 5 &= 10 \quad (2 \text{ números } 5) \\10 + 5 &= 15 \quad (3 \text{ números } 5) \\15 + 5 &= 20 \quad (4 \text{ números } 5) \\20 + 5 &= 25 \quad (5 \text{ números } 5) \\25 + 5 &= 30 \quad (6 \text{ números } 5) \\30 + 5 &= 35 \quad (7 \text{ números } 5) \\35 + 5 &= 40 \quad (8 \text{ números } 5) \\40 + 5 &= 45 \quad (9 \text{ números } 5) \\45 + 5 &= 50 \quad (10 \text{ números } 5) \\50 + 5 &= 55 \quad (11 \text{ números } 5) \\55 + 5 &= 60 \quad (12 \text{ números } 5)\end{aligned}$$

Após somar 12 vezes o número 5 (agrupados de 5 em 5 balas), o valor final é 60, que é o dividendo. Observe que fizemos 11 somas, mas não contamos as somas e sim a quantidade de vezes que somamos o número 5. Sendo assim, temos 12 números 5, o que implica que 12 é o quociente e, como chegamos exatamente ao número 60, o resto é zero.  $\square$

Vejamos outro exemplo usando este método

**Exemplo 3.5.3.** *Dividir 56 por 3.*

*Solução.* Escolhi um aluno e dei a ele 56 laranjas, pedindo para ele somar fazendo grupos

de 3 em 3 laranjas de cada vez e contar quantas vezes conseguia fazer isso.

$$3 + 3 = 6 \quad (2 \text{ números } 3)$$

$$6 + 3 = 9 \quad (3 \text{ números } 3)$$

$$9 + 3 = 12 \quad (4 \text{ números } 3)$$

$$12 + 3 = 15 \quad (5 \text{ números } 3)$$

$$15 + 3 = 18 \quad (6 \text{ números } 3)$$

$$18 + 3 = 21 \quad (7 \text{ números } 3)$$

$$21 + 3 = 24 \quad (8 \text{ números } 3)$$

$$24 + 3 = 27 \quad (9 \text{ números } 3)$$

$$27 + 3 = 30 \quad (10 \text{ números } 3)$$

$$30 + 3 = 33 \quad (11 \text{ números } 3)$$

$$33 + 3 = 36 \quad (12 \text{ números } 3)$$

$$36 + 3 = 39 \quad (13 \text{ números } 3)$$

$$39 + 3 = 42 \quad (14 \text{ números } 3)$$

$$42 + 3 = 45 \quad (15 \text{ números } 3)$$

$$45 + 3 = 48 \quad (16 \text{ números } 3)$$

$$48 + 3 = 51 \quad (17 \text{ números } 3)$$

$$51 + 3 = 54 \quad (18 \text{ números } 3)$$

$$54 + 3 = 57 \quad (19 \text{ números } 3)$$

Observe que na última soma, o resultado é 57, que é maior que 56. Portanto, paramos na penúltima soma, cujo resultado é 54. Assim, temos aqui 18 números 3 somados entre si, faltando 2 para chegarmos a 56. Portanto, o quociente da divisão é 18 e o resto é 2.  $\square$

Como os alunos sabem adição, o trabalho realizado nos Exemplos 3.5.2 e 3.5.3 foi mais fácil de ser realizado. Quando o resultado da soma ultrapassa o dividendo, basta pegar o número anterior e verificar o resto que falta para alcançar o dividendo.

No entanto, assim como o Método de Euclides de Subtrações Sucessivas, este método é eficaz apenas para divisão de números pequenos. Para números grandes, por ser um processo manual, ele se tornará muito trabalhoso e oneroso.

### **3.5.4 Método - Helziana - Divisão longa usando somas sucessivas**

Ao desenvolver com os alunos os métodos de Subtrações Sucessivas e Somas Sucessivas, que são eficazes para números pequenos e produzem resultados satisfatórios, temos a certeza de que o método longo é viável e rápido para o desenvolvimento profissional e financeiro do educando em um futuro bem próximo. No entanto, precisamos urgentemente apresentar um método rápido, eficaz e menos oneroso.

Com esse tipo de pensamento, e considerando a necessidade de diminuir as falhas no conhecimento do aluno diante do fracasso escolar, foi desenvolvido um método rápido, prático e eficaz, no qual o aluno não precisa decorar a tabuada, mas aprimora seu conhecimento por meio dos métodos já trabalhados nesta dissertação.

Sendo assim tenho a honra de apresentar a divisão pelo método de divisão longa (tradicional) por meio das somas sucessivas.

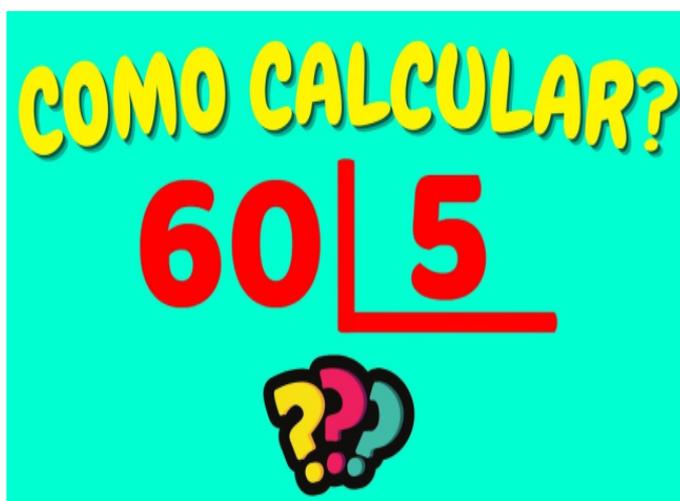
#### **Método de divisão longa por meio das somas sucessiva**

Este método é realizado da seguinte forma:

1. Primeiramente, assim como no método da Divisão Longa (Método Tradicional), coloque o divisor dentro da chave de divisão e o dividendo fora da chave, à esquerda. Apesar de parecer que vamos realizar a divisão longa, não vamos!
2. Em segundo lugar, ao lado direito da chave da divisão, construímos uma tabela somando repetidamente o divisor até que o resultado seja igual ou menor ao primeiro algarismo à esquerda do dividendo. Caso isso não seja possível, continuamos a tabela até que o resultado seja igual ou menor aos dois primeiros algarismos à esquerda do dividendo, e assim por diante. Todo esse processo é realizado pelos alunos somando com os dedos das mãos, obrigatoriamente!
3. Coloque o resultado abaixo do número que você está dividindo e o número de vezes que o divisor foi somado (quociente parcial) abaixo do divisor.
4. Subtraia este resultado do número acima dele, escrevendo o resto abaixo da linha.
5. Traga o próximo dígito do dividendo para baixo, adicionando-o ao lado do resto (parcial).

6. Repita os passos de divisão voltando na tabela do divisor e continue até que todos os dígitos do dividendo tenham sido trazidos para baixo.
7. O quociente completo é a sequência de números escritos abaixo do divisor e o resto é o número que sobra após ter trazido todos os dígitos para baixo e realizado a última subtração.

Usemos este método para calcular a divisão de 60 por 5.



**Exemplo 3.5.4.** *Dividir 60 por 5.*

*Solução.* Começamos pedindo aos alunos que coloquem o número 5 dentro da chave de divisão e o número 60 fora da chave. Em seguida, solicitamos que construam, ao lado direito da chave, uma tabela somando repetidamente 5 até que o resultado seja menor ou igual a 6. Um aluno percebeu que, nesse caso, o valor seria 5. Pedimos a esse aluno que colocasse o 5 abaixo do 6 e o número 1 (quantidade de vezes que 5 foi somado) abaixo do 5 (divisor).

A seguir, pedimos aos alunos que subtraíam 5 de 6, e um aluno prontamente respondeu que a resposta é 1. Pedimos a esse aluno que abaixasse a próxima cifra do dividendo, que, neste caso, é o 0. Ao fazer isso, o aluno percebeu que agora deveríamos dividir 10 por 5.

A partir daqui, pedimos aos alunos que retornassem à tabela e continuassem somando 5 repetidamente até que o resultado fosse menor ou igual a 10, que, neste caso, é 10. Em seguida, perguntei aos alunos qual seria o próximo passo, e eles responderam em coro que deveríamos colocar o 10 abaixo do 10 e o número 2 (quantidade de vezes que 5 foi somado até chegar a 10) abaixo do 5.

Finalmente, pedimos a um aluno que subtraísse 10 de 10, ao que ele respondeu 0. Perguntei novamente o que deveríamos fazer a seguir, e um aluno respondeu que, como

não há mais algarismos para abaixar, o quociente é 12 e o resto é 0. A Figura 3.10 mostra este procedimento.

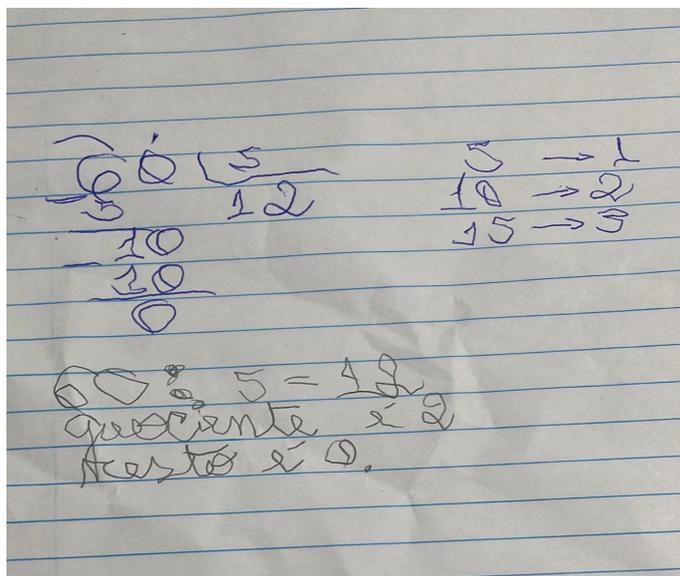


Figura 3.10: Divisão longa de 60 por 5 usando somas sucessivas feita por um aluno

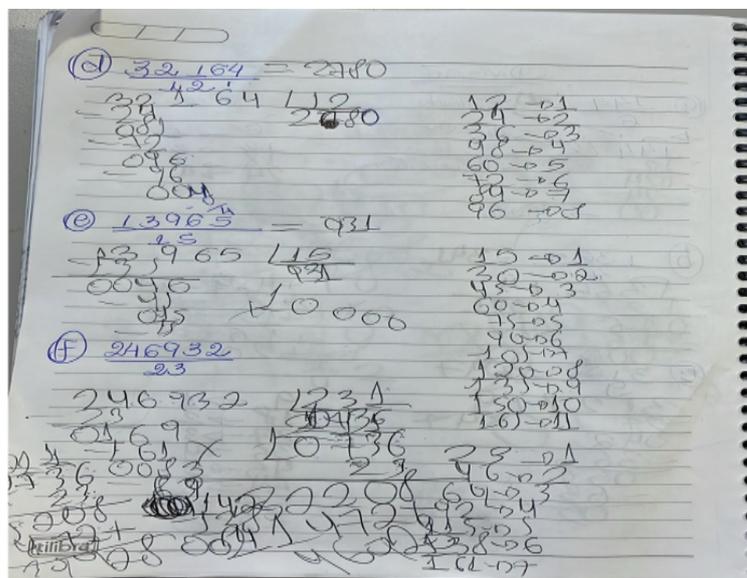
Na Figura 3.10, o aluno construiu a tabela da seguinte forma: iniciando com o número 5 (divisor) e, usando os dedos, começou a contar: 6, 7, 8, 9, 10. O 10 é o segundo elemento da tabela. Em seguida, continuou a contar: 11, 12, 13, 14, 15. O 15 é o terceiro elemento da tabela, e assim por diante. □

A Figura abaixo mostra a resolução da divisão pelo método tradicional

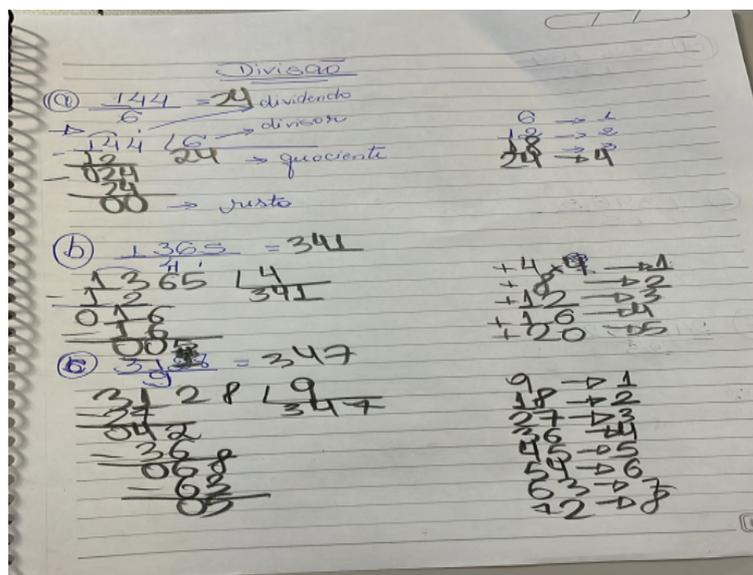
$$\begin{array}{r}
 60 \quad | \quad 5 \\
 \underline{5} \quad \quad 12 \\
 10 \\
 \underline{10} \\
 0
 \end{array}$$

Comparando com a Figura 3.10, vemos que o resultado é satisfatório e todas as contas estão corretas. O método da divisão longa com somas sucessivas é rápido e funciona.

Segundo os alunos, "agora sabemos fazer a divisão". As imagens a seguir são do pós-teste, onde os alunos estão resolvendo alguns exercícios usando este método.



No pós-teste, foi dada aos alunos a oportunidade de escolher um dos métodos apresentados e trabalhados. Todos os alunos escolheram o método da divisão longa com somas sucessivas, pois argumentaram que este método era o mais fácil para eles.



### 3.5.5 Por quê o método de Divisão longa por meio Somas Sucessivas funciona?

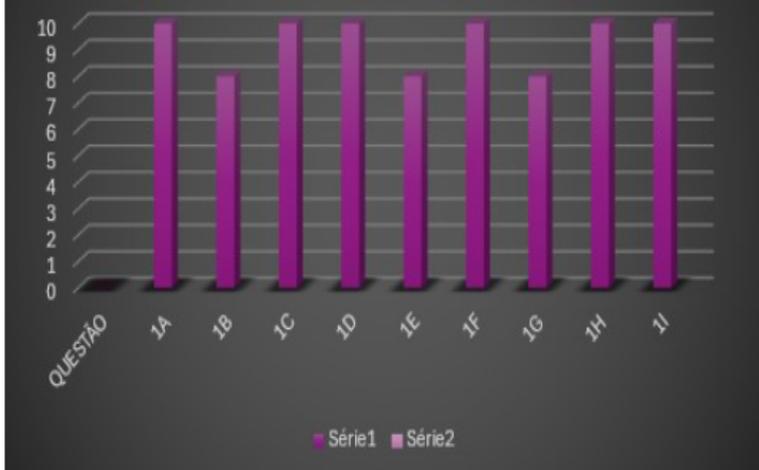
O método é eficaz porque:

1. Em primeiro lugar o aluno em nenhum momento precisa decorar a tabuada, pois em todo o momento ele é dono da construção do seu conhecimento.
2. Em segundo lugar ocorre que o método é claro, rápido e eficaz.
3. Em terceiro lugar o aluno realmente aprende a dividir e a tabuada passa a ser uma coisa fácil de resolver (segundo a fala dos próprios alunos).
4. O tempo de resolução foi medido, e, utilizando o método tradicional, o aluno, além de se confundir, gastava quase 5 minutos para fazer o algoritmo, acertando apenas 50% das questões de divisão. Já com o método da divisão longa por meio de somas sucessivas, ele gastava 1 minuto e 30 segundos, com um acerto de 100%.

Veja abaixo o comparativo estatístico entre o pré-teste e o pós-teste. As imagens mostram claramente a diferença no desempenho dos alunos antes e após a aplicação do método descrito nesta dissertação. O aluno que anteriormente não conseguia realizar o algoritmo da divisão agora consegue completar a atividade proposta e acertar o resultado de modo rápido e prático. Todos os alunos escolheram o método de divisão longa com somas sucessivas para resolver as questões. Podemos concluir que o método pode ser aplicado com sucesso e que ele realmente funciona.



### PÓS TESTE 02 DE MAIO 2024



## Resultado e considerações finais

---

### 4.1 Resultado

Apesar de ser um conteúdo aparentemente trabalhado desde o primeiro ano da educação infantil básica, não se pode afirmar com certeza se a falha no conhecimento destes alunos se deu devido à escolha educacional do ciclo de formação humana, em que uma das características é a enturmação do educando conforme a idade, não valorizando o conhecimento adquirido ao longo do processo educacional, ou se houve falha do profissional de educação básica por não ter muita afinidade com conteúdos matemáticos, ou ainda se é um problema familiar de abandono de incapaz previsto pelo ECA (Estatuto da Criança e do Adolescente). Este é um crime previsto no artigo 133 do Código Penal brasileiro, que ocorre quando alguém deixa de prestar assistência a uma pessoa incapaz de se defender dos riscos resultantes do abandono.

O que ocorre é que os alunos chegaram ao sexto ano com falhas no conhecimento. Esta falha no conhecimento afeta o educando na parte física e emocional, pois envolve desinteresse pelo estudo, timidez, indisciplina e até mesmo infração. O aluno tenta esconder suas falhas no conhecimento com atitudes apáticas ou agressivas. 95% deles sentem vergonha e se sentem inferiorizados em relação aos colegas de sala, aos docentes e familiares, procurando não demonstrar que não têm conhecimento.

Mediante este estudo, estas falhas no conhecimento foram apresentadas no pré-teste e foi realizado um trabalho lúdico e escrito em seguida, conforme descrito na introdução. Observou-se que o trabalho com a divisão preencheu um pouco as lacunas que eram falhas no aprendizado. Após o trabalho, os alunos estavam mais confiantes, a indisciplina diminuiu e, com isso, observou-se uma redução nas faltas à escola.

Temos, portanto, um resultado positivo no trabalho com números naturais, na aplicação da divisão e dos seus restos, e em algumas particularidades sobre identificar a divisão pelos números 2, 3, 5, 7 e 11.

## 4.2 Considerações finais

Considerando o resultado satisfatório de alunos que saíram da nota zero para 9, e a minimização das faltas escolares e da indisciplina, acredita-se que algumas falhas no conhecimento podem ser resolvidas ou minimizadas.

Mediante a realização do trabalho, venho humildemente agradecer à unidade escolar Benedito de Carvalho e aos seus gestores por cederem o espaço físico e 10 alunos com falhas no conhecimento do sexto ano, ao professor e orientador Pedro Manuel pelo seu empenho e dedicação, ao meu companheiro Carlos Marques, pelo incentivo, e a esta banca de professores do PROFMAT.

Observação: Sugiro que, se possível, seja aplicado por um professor de matemática, em sala separada da sala regente, um trabalho para minimizar falhas no conhecimento em assuntos relacionados ao conhecimento matemático.

---

## Sugestões de atividades a serem utilizadas no ensino da divisão

---

Segundo Ugalde e Roweder [16], uma sequência didática constitui-se como um recurso que necessita ser elaborado com base na abordagem do ensino de conteúdos através de atividades organizadas e sequenciadas, as quais devem apresentar objetivos claramente delineados e explicados. Assim, criar uma sequência didática para ensinar a divisão de números envolve planejar atividades e recursos que ajudem os alunos a compreender e praticar este conceito matemático.

Neste contexto, apresentamos um conjunto de atividades que auxiliarão na elaboração de uma sequência didática para o ensino da divisão de números. Estas atividades foram retiradas da bibliografia utilizada na escola.

### 5.1 Multiplicação

#### 1. Objetivos:

- (a) Ajudar os alunos a entenderem que multiplicação é uma forma de adição repetida e agrupada.
- (b) Capacitar os alunos a desenvolver estratégias eficazes para multiplicar números maiores através da repetição de adições.
- (c) Aplicar o conceito de multiplicação em situações práticas, como a contagem de grupos de objetos.

#### 2. Tempo estimado: 2 horas/aulas

3. **Recursos didáticos:** quadro, giz, caneta para quadro branco, Cópia impressa e livros de referência

4. **Técnicas didáticas:** Aulas expositivas e dialogadas

## O que é multiplicação?

Multiplicar é somar repetidamente o mesmo número.



$$5 + 5 = 10$$

$$5 \text{ laranças} \times 2 \text{ vezes} = 10 \text{ laranças}$$

**Exercício 5.1.1.** *Calcular*

1.  $2 + 2 + 2 + 2 + 2$

2.  $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$

3.  $7 + 7 + 7$

4.  $9 + 9 + 9 + 9 + 9$

5.  $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$

6.  $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$

**Exercício 5.1.2.** *Observando que*

$$2 \times 5 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10,$$

*ou seja, o número 5 indica a quantidade de vezes que o 2 vai ser somado consigo mesmo.*

*Calcular*

1.  $3 \times 3$

2.  $2 \times 7$

3.  $9 \times 10$

4.  $5 \times 12$

5.  $6 \times 8$

6.  $4 \times 11$

**Exercício 5.1.3.** *observando que*

**Tabuada do 3**

$$3 \times 0 = 0$$

$$3 \times 1 = 3$$

$$3 \times 2 = 3 + 3 = 6$$

$$3 \times 3 = 3 + 3 + 3 = 9$$

$$3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$$

$$3 \times 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$$

$$3 \times 6 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18$$

$$3 \times 7 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 21$$

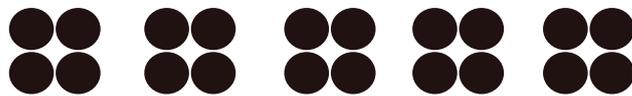
$$3 \times 8 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 24$$

$$3 \times 9 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 27$$

$$3 \times 10 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 30$$

Faça as tabuadas do 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10.

**Exercício 5.1.4.** Observando que



$$\boxed{4} + \boxed{4} + \boxed{4} + \boxed{4} + \boxed{4} = \boxed{20}$$

$$\boxed{4} \times \boxed{5} = \boxed{20}$$

Escreva as seguintes multiplicações

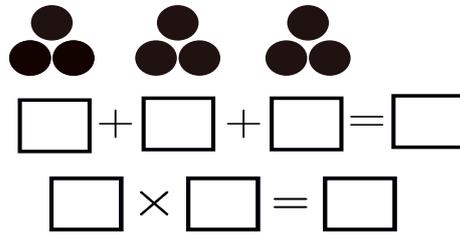
1.



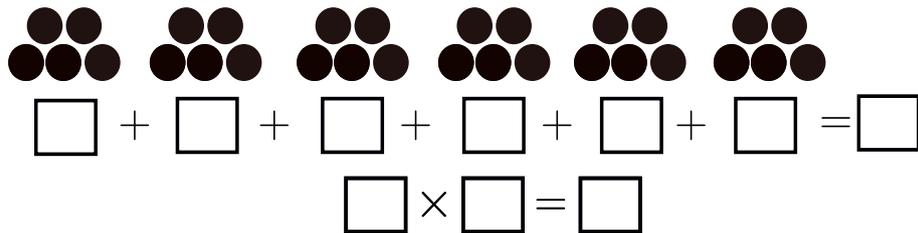
$$\boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}} = \boxed{\phantom{0}}$$

$$\boxed{\phantom{0}} \times \boxed{\phantom{0}} = \boxed{\phantom{0}}$$

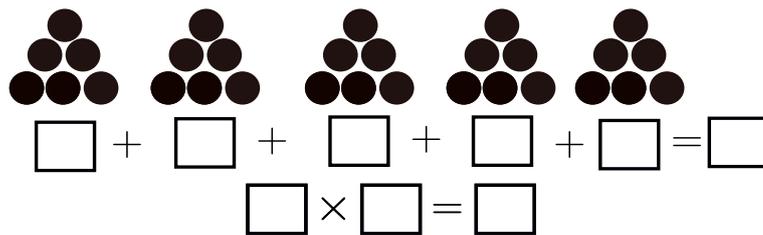
2.



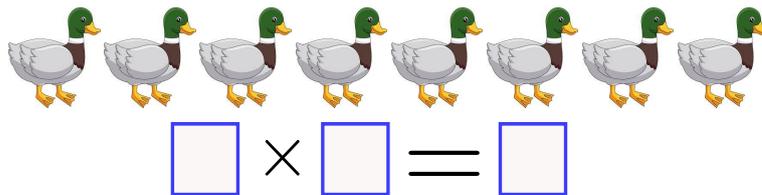
3.



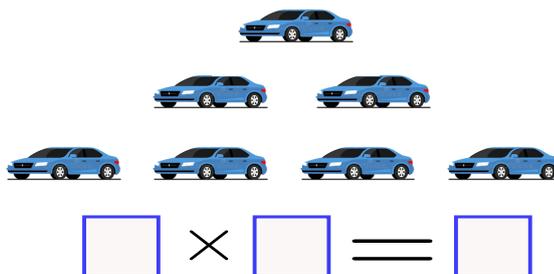
4.



Exercício 5.1.5. *Quantas patas têm 8 patos?*



Exercício 5.1.6. *Quantas rodas têm 7 carros?*



## 5.2 Divisão usando subtrações sucessivas

### 1. Objetivos:

- Ajudar a entender o conceito de divisão como o processo de distribuir ou repartir uma quantidade em partes iguais.
- Facilitar a construção de uma intuição numérica sólida, mostrando como a divisão é relacionada à repetição de subtrações.
- Permitir a resolução de problemas de divisão simples sem a necessidade de algoritmos mais complexos.
- Servir como uma etapa preliminar para a compreensão de algoritmos de divisão mais avançados usados na matemática.

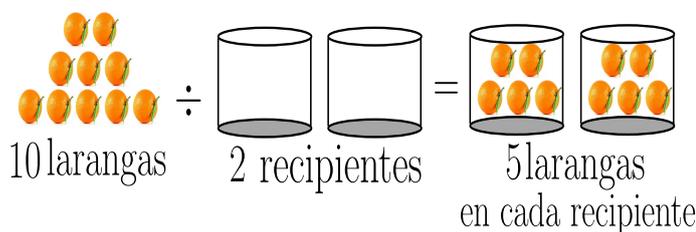
### 2. Tempo estimado: 2 horas/aulas

### 3. Recursos didáticos: quadro, giz, caneta para quadro branco, cópia impressa e livros de referência

### 4. Técnicas didáticas: Aulas expositivas e dialogadas

## O que é a divisão?

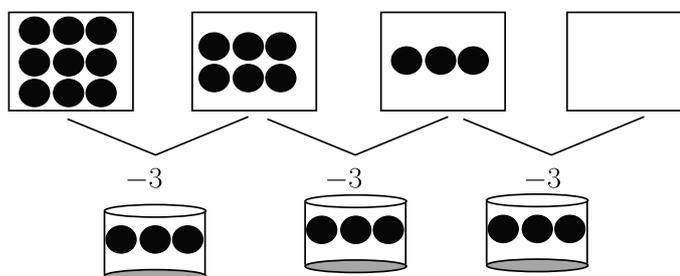
Dividir é repartir uma quantidade em partes iguais.



**Exemplo 5.2.1.** *Suponha que temos 9 bolas para guardar em recipientes, e cada recipiente deve conter 3 bolas. Quantos recipientes serão utilizados?*

*Solução.* Para resolver este problema, utilizaremos subtrações sucessivas. Vamos retirar 3 bolas de cada vez e colocá-las em um recipiente, repetindo o processo até que todas as

bolas estejam nos recipientes e não reste nenhuma, ou seja, até que o total de bolinhas restantes chegue a 0.



Portanto, a subtração sucessiva que foi realizada até chegar a 0 foi a seguinte:

$$9 - 3 - 3 - 3 = 0$$

Subtraiu-se 3 de 9 três vezes, o que indica que usamos 3 recipientes, cada um com três bolinhas. □

**Exercício 5.2.2.** *Suponha que temos 30 bolinhas para guardar em recipientes.*

1. *Se cada recipiente deve conter 2 bolinhas. Quantos recipientes serão utilizados?*
2. *Se cada recipiente deve conter 3 bolinhas. Quantos recipientes serão utilizados?*
3. *Se cada recipiente deve conter 5 bolinhas. Quantos recipientes serão utilizados?*
4. *Se cada recipiente deve conter 6 bolinhas. Quantos recipientes serão utilizados?*
5. *Se cada recipiente deve conter 10 bolinhas. Quantos recipientes serão utilizados?*

**Exemplo 5.2.3.** *Dividir 25 por 4.*

*Solução.* Para dividir 25 por 4 subtraímos 4 de 25 repetidamente, ou seja,

$$25 - 4 = 21$$

$$21 - 4 = 17$$

$$17 - 4 = 13$$

$$13 - 4 = 9$$

$$9 - 4 = 5$$

$$5 - 4 = 1.$$

o quociente é 6 e o resto 1, pois subtraímos 4 seis vezes de 25 até chegar a 1 que é menor que 4. Ou seja,

$$\begin{array}{r|l} 25 & 4 \\ \hline 1 & 6 \end{array}$$

□

**Exercício 5.2.4.** *Resolva cada divisão usando subtração sucessiva.*

1.  $26 \div 6$

2.  $72 \div 3$

3.  $18 \div 3$

4.  $40 \div 5$

5.  $26 \div 6$

6.  $71 \div 4$

**Exercício 5.2.5.** *Complete as sentenças abaixo.*

1. De 32, subtrai-se 4 **oito vezes** e sobrou **zero**.

2. De 71, subtrai-se 5 ..... e sobrou .....

3. De 46, subtrai-se 7 ..... e sobrou .....

4. De 85, subtrai-se 9 ..... e sobrou .....

5. De 60, subtrai-se 5 ..... e sobrou .....

**Exercício 5.2.6.** *Complete a tabela abaixo com as informações solicitadas.*

<i>Divisão</i>	<i>Subtração sucessiva</i>	<i>Quociente</i>	<i>Resto</i>
$21 \div 4$	$21-4-4-4-4=1$	5	1
$64 \div 8$			
$100 \div 15$			
$144 \div 17$			
$200 \div 20$			
$250 \div 100$			

## 5.3 Divisão usando somas sucessivas

### 1. Objetivos:

- (a) Ajudar na compreensão do conceito de divisão como uma operação repetitiva de adição.
- (b) Fornecer uma abordagem passo a passo para resolver problemas de divisão.
- (c) Servir como uma etapa preliminar para a compreensão de algoritmos de divisão mais avançados usados na matemática.

### 2. Tempo estimado: 2 horas/aulas

### 3. Recursos didáticos: quadro, giz, caneta para quadro branco, cópia impressa e livros de referência

### 4. Técnicas didáticas: Aulas expositivas e dialogadas

## Qual é a relação entre adição e divisão?

$12 \div 3 ?$

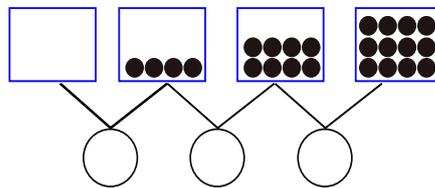
$12 \div 3 = 4$ , pois somamos 3 quatro vezes até chegar a 12

**Exercício 5.3.1.** Complete as sentenças abaixo.

1.

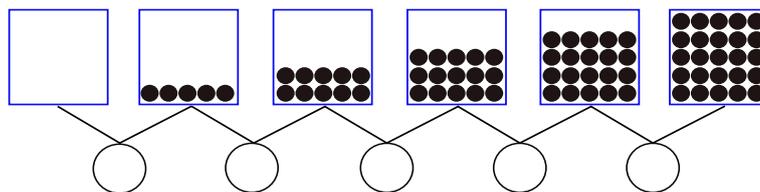
$10 \div 2 = \square$ , pois somamos  $\square$  cinco vezes até chegar a  $\square$

2.



$12 \div 4 = \square$ , pois somamos  $\square$  três vezes até chegar a  $\square$

3.



$25 \div 5 = \square$ , pois somamos  $\square$  cinco vezes até chegar a  $\square$

**Exemplo 5.3.2.** *Dividir 36 por 5.*

*Solução.* Para dividir 36 por 5 somamos 5 repetidamente, ou seja,

$$\begin{aligned} \textcircled{5} + \textcircled{5} &= 10 \\ 10 + \textcircled{5} &= 15 \\ 15 + \textcircled{5} &= 20 \\ 20 + \textcircled{5} &= 25 \\ 25 + \textcircled{5} &= 30 \\ 30 + \textcircled{5} &= 35 \end{aligned}$$

Paramos aqui, pois a seguinte soma excede 36. Portanto, o quociente é 7 e o resto é 1, pois somamos 5 sete vezes até chegar a 35, faltando 1 (menor que 5) para chegar a 36. Ou seja,

$$\begin{array}{r} 35 \quad | \quad 5 \\ \hline 1 \quad | \quad 7 \end{array}$$

□

**Exercício 5.3.3.** *Resolva cada divisão usando somas sucessivas.*

1.  $26 \div 6$

2.  $72 \div 3$

3.  $18 \div 3$

4.  $40 \div 5$

5.  $26 \div 6$

6.  $71 \div 4$

**Exercício 5.3.4.** Complete a tabela abaixo com as informações solicitadas.

<i>Divisão</i>	<i>Subtração sucessiva</i>	<i>Quociente</i>	<i>Resto</i>
$21 \div 4$	$4+4+4+4+4=20$	5	1
$64 \div 8$			
$100 \div 15$			
$144 \div 17$			
$200 \div 20$			
$250 \div 100$			

## 5.4 Divisão longa

### 1. Objetivos:

- Encontrar o quociente (resultado da divisão) e o resto (o que sobra após a divisão) de dois números.
- Facilitar a divisão de números usando uma tabela de somas sucessivas do divisor para construir os múltiplos dele, o que seria difícil de fazer mentalmente decorando a tabuada de multiplicação.
- Ajudar aos estudantes a entender melhor o processo de divisão, aprimorando suas habilidades em aritmética.
- Garantir que a divisão seja feita com precisão, minimizando erros que podem ocorrer em cálculos mentais ou estimativas.

2. **Tempo estimado:** 2 horas/aulas

3. **Recursos didáticos:** quadro, giz, caneta para quadro branco, cópia impressa e livros de referência

4. **Técnicas didáticas:** Aulas expositivas e dialogadas

**Exemplo 5.4.1.** Dividir 36 por 5.

*Solução.* Colocamos o número 5 dentro da chave de divisão e o número 36 fora da chave.

$$36 \left| 5 \right.$$

Em seguida, construímos uma tabela de múltiplos de 5 (divisor) somando o 5 sucessivamente.

$$\begin{array}{r|l}
 36 & 5 \\
 \hline
 & 
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 5 \longrightarrow 1 \\
 10 \longrightarrow 2 \\
 15 \longrightarrow 3 \\
 20 \longrightarrow 4 \\
 25 \longrightarrow 5 \\
 30 \longrightarrow 6 \\
 \boxed{35 \longrightarrow 7}
 \end{array}$$

Coloca-se o 7 abaixo do 5 e o número 35 abaixo do 36. A seguir, subtrai-se 35 de 36. Como não há mais algarismos para abaixar no dividendo, o quociente é 7 e o resto é 1.

$$\begin{array}{r|l}
 36 & 5 \\
 35 & 7 \\
 \hline
 1 & 
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 5 \longrightarrow 1 \\
 10 \longrightarrow 2 \\
 15 \longrightarrow 3 \\
 20 \longrightarrow 4 \\
 25 \longrightarrow 5 \\
 30 \longrightarrow 6 \\
 \boxed{35 \longrightarrow 7}
 \end{array}$$

□

**Exercício 5.4.2.** *Resolva*

1.  $25 \div 5$

2.  $81 \div 9$

3.  $18 \div 3$

4.  $40 \div 5$

5.  $26 \div 6$

6.  $61 \div 7$

7.  $57 \div 8$

8.  $37 \div 4$

**Exemplo 5.4.3.** *Dividir 102 por 4.*

*Solução.* Colocamos o número 4 dentro da chave de divisão e o número 102 fora da chave. Em seguida, construímos uma tabela de múltiplos de 4 (divisor) somando o 4 sucessivamente.

$$\begin{array}{r|l}
 102 & 4 \\
 \hline
 & 
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 4 \longrightarrow 1 \\
 \boxed{8 \longrightarrow 2}
 \end{array}$$

Coloca-se o 2 abaixo do 4 e o número 8 abaixo do 10. A seguir, subtrai-se 8 de 10.

$$\begin{array}{r} 102 \overline{) 4} \\ \underline{8} \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4 \longrightarrow 1 \\ \boxed{8 \longrightarrow 2} \end{array}$$

Abaixamos o seguinte algarismo do dividendo, que neste caso é 2. Agora, temos que dividir 22 por 4. Para isso, continuamos construindo a tabela de múltiplos de 4.

$$\begin{array}{r} 102 \overline{) 4} \\ \underline{8} \\ 22 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4 \longrightarrow 1 \\ \boxed{8 \longrightarrow 2} \\ 12 \longrightarrow 3 \\ 16 \longrightarrow 4 \\ \boxed{20 \longrightarrow 5} \end{array}$$

Colocamos o 5 abaixo do 4 e o 20 abaixo do 22. A seguir, subtraímos 20 de 22.

$$\begin{array}{r} 102 \overline{) 4} \\ \underline{8} \\ 22 \\ \underline{20} \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4 \longrightarrow 1 \\ \boxed{8 \longrightarrow 2} \\ 12 \longrightarrow 3 \\ 16 \longrightarrow 4 \\ \boxed{20 \longrightarrow 5} \end{array}$$

Como não há mais algarismos para abaixar no dividendo, o quociente é 25 e o resto é 2. □

**Exercício 5.4.4.** *Resolva*

1.  $585 \div 9$

2.  $844 \div 6$

3.  $751 \div 3$

4.  $948 \div 4$

5.  $254 \div 5$

6.  $819 \div 7$

7.  $210 \div 8$

8.  $585 \div 9$

# Apêndice



Ministério da Educação  
Universidade Federal de Mato Grosso  
Instituto de Ciências Exatas e da Terra



Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

## TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE ESCLARECIDO

Prezado(a)! Este termo de consentimento se direciona aos senhores pais ou senhores responsáveis pelo(a) aluno(a)

Daniel Vazquez Arruda no sentido de consentir a participação do(a) aluno(a) na pesquisa intitulada Divisibilidade: O Desafio, desenvolvida no Programa De Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT) – Campus Cuiabá- MT. A pesquisa é desenvolvida pela mestranda Helziana Arruda do Nascimento tendo por orientador o Prof. Dr. Pedro Manuel para fins de desenvolvimento de dissertação de mestrado. A pesquisa ocorrerá na EE Benedito de Carvalho, com os(as) alunos(as) de sexto e sétimo ano. Ressaltamos que, todos os custos envolvidos na pesquisa serão arcados pelo pesquisador. Os nomes dos pais e dos(as) alunos(as), assim como identificações pessoais e/ou profissionais não serão utilizadas ou identificadas nos textos iniciais e nem finais da pesquisa. Serão coletadas imagens dos(as) alunos(as) (as imagens que proporcionarem identificação serão borradas), registros escritos dos(as) alunos(as), anotações, respostas de questionários, áudios de gravações, não permitindo reconhecimento dos sujeitos envolvidos. A pesquisa é livre de quaisquer compensações financeiras e não gerará algum ganho ou gasto para os envolvidos. É assegurado o direito de se manter informado(a) sobre os resultados parciais e finais, os quais poderão ser publicados em eventos ou periódicos científicos, mantendo-se o anonimato dos(as) participantes. Assegura-se também a liberdade de retirada do consentimento e do assentimento em qualquer etapa da pesquisa, sem prejuízo à continuidade do atendimento pela instituição em que a pesquisa ocorre e que o(a) aluno(a) estuda. Para tanto, poderá solicitar a retirada da participação de seu (sua) pessoa menor de idade, entrando em contato com a equipe de pesquisa através dos dados informados abaixo. Você aceita a participação de

Daniel Vazquez Arruda nesta pesquisa? SIM (X) NÃO ( )  
Dados da pesquisa **Título:** Matemática Divisibilidade: O Desafio. **Objetivo:** ajudar alunos com dificuldade em resolver divisões na sala de aula, de modo a melhorar o conhecimento do aluno e sanar suas dúvidas. **Duração de participação dos alunos** sujeito da pesquisa. O primeiro momento envolverá a seleção de 10 alunos com dificuldade em matemática e aplicação do pré-teste, terá uma extensão de duas aulas, cada uma com uma duração de 50 minutos, 2 vezes na semana por um período máximo de 2 meses. No segundo momento, será realizado o trabalho com material lúdico que envolvam divisões numéricas de 50 minutos. No terceiro momento, será realizada uma avaliação final e escrita numérica, dedicaremos tempo duração de 50 minutos cada.

Declaro que eu, Helziana Arruda do Nascimento declaro que obtive de forma apropriada e voluntária o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido desta pesquisa para participação de meu filho(a) na pesquisa.

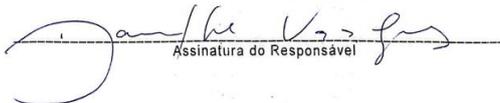
  
Assinatura do Responsável

Figura 5.1: Termo de consentimento



**Ministério da Educação**  
Universidade Federal de Mato Grosso  
Instituto de Ciências Exatas e da Terra  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT



### PRÉ- TESTE

**Escola Estadual Professor Benedito de Carvalho**

**Diretora: Roseli**

**Coordenadoras : Silvana Yoko Tateira**

**Sibeli Lopes**

**Professora: Helziana Arruda do Nascimento**

**Aluno(a):** \_\_\_\_\_ **6ºano** \_\_\_\_\_

1) Resolva:

a)  $432+196$

b)  $1500-769$

c)  $4 \times 25$

d)  $520:4$

e)  $120-79$

f)  $144:12$

g)  $13 \times 68$

h)  $1024: 8$

i)  $60:5$

2) Quais exercícios você não conseguiu fazer?

(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i)

3) Conte-me como foi seu estudo em matemática e quando você acha que começou a ter dificuldades ou achar as contas difíceis?

4) Você já teve vergonha de não saber fazer a conta? Porquê?

( ) sim ( ) não \_\_\_\_\_

**BOA PROVA!!**



Ministério da Educação  
Universidade Federal de Mato Grosso  
Instituto de Ciências Exatas e da Terra  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT



### Projeto

Professora: Helziana Arruda do Nascimento  
Disciplina: Matemática  
Escola Estadual: Professor Benedito de Carvalho  
Diretora: Roseli  
Coordenadoras: Sibebe Lopes e Silvana Yoko Tateira  
Secretário: Guilherme  
Ano: 2024  
Cidade: Cuiabá - MT (Mato Grosso) – Brasil.

- 1) **Introdução** Trabalho de defesa de mestrado para obtenção de título de mestre em Matemática pelo programa PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática) aplicado pela UFMT (Universidade Federal de Mato Grosso) no ano de 2024, tendo como título **Divisibilidade: 15 O Desafio e As dificuldades ao longo do Processo Educacional**. Será aplicada na EE Professor Benedito de Carvalho em Cuiabá-MT com uma seleção máxima de 10 alunos do sexto ao nono ano que apresentam dificuldade extrema em matemática no quesito divisão.
- 2) **Justificativa** Observa-se que muitos alunos apresentam dificuldade em matemática quando são apresentados ao professor de área em matemática e a maioria das dificuldades está em desenvolver conteúdos de subtração e divisão. Pensando nisso, acredita-se que seja possível melhorar esta condição do educando de modo a trabalhar a divisão e o resto de divisões de uma forma lúdica e escrita, melhorando o modo de pensar e o raciocínio lógico com materiais como dinheiro de mentira e material dourado. Apresentar o conhecimento do lúdico até a escrita numérica.
- 3) **Objetivos** - Identificar a dificuldade do educando através da aplicação de questionamento e uma prova inicial. - Realizar uma prova inicial e final de modo a comparar e avaliar o conhecimento do aluno. - Melhorar o conhecimento do aluno. - Nivelar o aluno com os colegas de sala no quesito divisão. - Apresentar o conhecimento do lúdico até a escrita numérica.
- 4) **Fundamentação teórica** Livro didático adotado pela unidade escola, além do uso de paradidáticos da biblioteca da unidade educacional e sites educacionais do MEC e com a ajuda da BNCC.
- 5) **Metodologia** O trabalho será realizado com a colaboração de professores regentes da unidade escolar EE Prof. Benedito de Carvalho para a seleção de no Máximo 10 alunos com dificuldade extrema em matemática, principalmente no quesito divisão. O trabalho será executado de 1 a 2 vezes por semana durante o horário de aula do aluno por 1 hora durante 2 meses (aproximadamente) na própria unidade educacional e em sala separada a ser designada pela gestão escolar. Iniciará com uma avaliação para identificar as dificuldades do aluno, mediante o grau de dificuldade de cada uma apresentada, será realizado um trabalho de alinhamento de conteúdo entre os participantes e o trabalho com material lúdico, de modo a trabalhar a divisão e o resto, e posterior a isso será trabalhada a escrita e a avaliação final e comparativa.
- 6) **Cronograma**  
Início 02 de Abril de 2024 – aplicação pré-teste. - avaliação e observação.  
1 semana – material lúdico – 2 aulas de 50 minutos cada.  
2 e 3 semanas – escrita matemática – resolução de exercícios e problemas.  
4 semanas – Avaliação (pós-teste) e comparação dos resultados Observados com Anotações e Relatório.
- 7) **Resultado** Para o resultado será apresentado um pequeno relatório sobre o trabalho realizado por este projeto
- 8) **Bibliografia** Livro didático adotado pela unidade escolar.

Figura 5.3: Projeto de aplicação da dissertação na escola



Ministério da Educação  
Universidade Federal de Mato Grosso  
Instituto de Ciências Exatas e da Terra



Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

### Termo de Autorização Instituição

Eu, Roseli Vicente da Silva, gestora escolar da EE Professor Benedito de Carvalho, localizada na Rua A, 296, Bairro Morada do Ouro – setor Norte – Em Cuiabá -MT, autorizo a realização do estudo, Divisibilidade: O Desafio um estudo realizado na educação básica. Fui informado pela pesquisadora e responsável pelo estudo, a mestranda Helziana Arruda do Nascimento, sobre as características e objetivos da pesquisa, bem como das atividades que serão realizadas na instituição a qual representamos. O objetivo principal da pesquisa é mediar alunos que apresentam falhas no desenvolvimento da divisão de modo a desenvolver habilidades com os números e que possam ser nivelados aos conteúdos desenvolvidos nas séries que estão inseridos na educação básica, visando proporcionar-lhes uma base sólida de conhecimentos e competências numéricas para enfrentar desafios de forma consciente e responsável. O estudo será desenvolvido da seguinte forma: 10 aulas de 50 minutos cada sendo divididos em quatro momentos: O primeiro momento envolverá a apresentação da proposta e aplicação do pré-teste, terá uma extensão de uma aula. No segundo momento, quatro aulas para ser trabalhado com material lúdico pelo período de duas vezes por semana. No terceiro momento, o conhecimento adquirido será aplicado sobre a escrita numérica e a resolução de problemas e desafios, abrangendo um total de quatro horas distribuídas em duas semanas. No quarto momento, procederemos a aplicação de um pós-teste em uma aula de 50 minutos. Declaro ainda que, a pesquisadora deve estar ciente e sujeita ao regulamento da instituição para acesso a ambientes profissionais e bancos de dados (considerando o que apregoa a Lei Geral de Proteção de Dados no tocante a dados pessoais e dados pessoais sensíveis), além da observância das 17 regras de biossegurança, até o término da pesquisa, sob pena da retirada da autorização, sem aviso prévio. Declaro ainda ter lido, conhecer e cumprir as Resoluções Éticas Brasileiras, em especial a Resolução CNS 466/12 e a CNS 510/16. Esta instituição está ciente de suas corresponsabilidades como instituição coparticipante do presente projeto de pesquisa e de seu compromisso no resguardo da segurança e bem-estar dos participantes de pesquisa nela recrutados, possibilitando condições mínimas necessárias para a garantia de tal segurança e bem-estar.

Cuiabá - MT, 29 de MARÇO de 2024.

*Assinatura*  
Mestranda Helziana Arruda do Nascimento  
Coordenadora do Projeto

Mestranda: Helziana Arruda do Nascimento Coordenador:

Prof. Dr. PEDRO MANUEL SANCHEZ AGUILAR.

Figura 5.4: Autorização da escola



PRÉ-TESTE

Escola Estadual Professor Benedito de Carvalho

Diretora: Roseli

Coordenadoras : Silvana Yoko Tateira

Sibeli Lopes

Professora: Helziana Arruda do Nascimento

Aluno(a): Isahama Callama de Jesus Souza 6º ano D

1) Resolva:

a)  $432 + 196 = 628$

$$\begin{array}{r} 432 \\ + 196 \\ \hline 628 \end{array}$$

b)  $1500 - 769$

$$\begin{array}{r} 1500 \\ - 769 \\ \hline 731 \end{array}$$

c)  $4 \times 25$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 25 \\ \hline 100 \end{array}$$

d)  $520 : 4$

NÃO  
SEI

e)  $120 : 79$

$$\begin{array}{r} 120 \\ - 79 \\ \hline 41 \end{array}$$

f)  $144 : 12$

NÃO  
SEI

g)  $13 \times 68$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 68 \\ \hline 104 \end{array}$$

h)  $1024 : 8$

NÃO  
SEI

i)  $60 : 5$

NÃO  
SEI

2) Quais exercícios você não conseguiu fazer?

(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i)

3) Conte-me como foi seu estudo em matemática e quando você acha que começou a ter dificuldades ou achar as contas difíceis? DES DE PEQUENA

4) Você já teve vergonha de não saber fazer a conta? Porquê?

sim

não

AS MINHAS AMIGAS SABEM FAZER UM CONTA  
DIFÍCIL É FÁCIL  
BOA PROVA!!

Figura 5.5: Prova 1



PRÉ-TESTE

Escola Estadual Professor Benedito de Carvalho

Diretora: Roseli

Coordenadoras : Silvana Yoko Tateira

Sibeli Lopes

Professora: Helziana Arruda do Nascimento

Aluno(a): Gamile Nazary Pascello 6º ano 22

1) Resolva:

a)  $432 + 196$   

$$\begin{array}{r} 432 \\ + 196 \\ \hline 628 \end{array}$$

b)  $1500 - 769$   

$$\begin{array}{r} 1500 \\ - 769 \\ \hline 731 \end{array}$$

c)  $4 \times 25$   

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 25 \\ \hline 100 \end{array}$$

d)  $520 : 4$   

$$\begin{array}{r} 130 \\ 4 \overline{) 520} \\ \underline{520} \\ 0 \end{array}$$

e)  $120 - 79$   

$$\begin{array}{r} 120 \\ - 79 \\ \hline 41 \end{array}$$

f)  $144 : 12$   

$$\begin{array}{r} 12 \\ 12 \overline{) 144} \\ \underline{144} \\ 0 \end{array}$$

g)  $13 \times 68$   

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 68 \\ \hline 104 \\ 780 \\ \hline 884 \end{array}$$

h)  $1024 : 8$   

$$\begin{array}{r} 128 \\ 8 \overline{) 1024} \\ \underline{1024} \\ 0 \end{array}$$

i)  $60 : 5$   

$$\begin{array}{r} 12 \\ 5 \overline{) 60} \\ \underline{60} \\ 0 \end{array}$$

2) Quais exercícios você não conseguiu fazer?

(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i)

3) Conte-me como foi seu estudo em matemática e quando você acha que começou a ter dificuldades ou achar as contas difíceis? QUANDO EU ENTREI PARA O 5º ANO.

4) Você já teve vergonha de não saber fazer a conta? Porquê?

sim ( ) não POIS EU SOU BOM

BOA PROVA!!

Figura 5.6: Prova 2

# Referências Bibliográficas

---

- [1] Abramo Hefez. *Aritmética*, Coleção PROFMAT, 1a edição. Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.
- [2] Aires, Francisco César. *Matemática Introdução à Teoria dos Números*. UAB/UECE filiada a ABEU ( Associação Brasileira das Editoras Universitárias). 1 (Fortaleza 2019), 79-107.
- [3] Aragão, Maria J. *História da Matemática*. Rio de Janeiro: Interciência, 2009.
- [4] Boyer, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 2010.
- [5] Enríquez, C.; Segura, A.; Tovar, J. *Factores de riesgo asociados a bajo rendimiento académico en escolares de Bogotá*. Investigaciones Andina, 15(26), 654-666. 2013.
- [6] Eves, Howard . *Introdução a historia da matemática*. tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.
- [7] Haddad Valéria R. *Materiais Manipuláveis: Uma Intervenção Em Sala De Aula Para a Divisão Euclidiana*. 2015.
- [8] Holt, J. *How children fail* (Rev ed.) Reading, MA: Perseus Books. 1995.
- [9] Kamii, C. *Young children reinvent arithmetic: Implications of Piaget's theory*. New York: Columbia University, Teachers College Press. 1985.
- [10] Mazer, S. M.; Bello, A. C.; Bazon, M. R. *Dificuldades de aprendizagem: revisão de literatura sobre os fatores de riscos associados*. Psicologia da Educação, 28,7-21. 2009.
- [11] Miguel, A.; Miorim, M. A. *O ensino de matemática no primeiro grau*. São Paulo: Atual, 1986.

- [12] Nogueira, Ricardo Reto. *Matemática uma abordagem histórica*. Vol II, 1ª edição. 2015.
- [13] Piano, D. L.; Loureiro, D. Z.; Langer, A. E. S. *História, técnicas e as problemáticas do ensino e aprendizagem da divisão*. Anais da XXV Semana de Matemática. Unioeste, 2013.
- [14] Wall, Edward S. *Teoria dos Números para Professores do Ensino Fundamental*. AMGH Editora Ltda. 1 (2014), 79-107.
- [15] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018. Conforme (EF06MA04).
- [16] Ugalde, M. C. P.; Roweder, C. *Sequência Didática: uma proposta metodológica de ensino-aprendizagem*. Educitec-Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico, v. 6, 2020.
- [17] Documento de Referência Curricular para Mato Grosso - Ensino Fundamental - Matemática dos Anos finais. <https://www.aprendizagemconectada.mt.gov.br>