

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL - PROFMAT

MARCOS ANDRÉ DOS SANTOS

**DOS NÚMEROS COMPLEXOS AOS QUATÉRNIONS:
DESENVOLVIMENTO ALGÉBRICO, INTERPRETAÇÃO
GEOMÉTRICA E APLICAÇÕES**

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2013

MARCOS ANDRÉ DOS SANTOS

**DOS NÚMEROS COMPLEXOS AOS QUATÉRNIONS:
DESENVOLVIMENTO ALGÉBRICO, INTERPRETAÇÃO
GEOMÉTRICA E APLICAÇÕES**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre em Matemática”.

Orientadora: Prof^a. Dra. Olga Harumi Saito

CURITIBA

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

S237 Santos, Marcos André dos

Dos números complexos aos quatérnios: desenvolvimento algébrico, interpretação geométrica e aplicações/ Marcos André dos Santos. — 2013.

100 f. : il. ; 30 cm

Orientadora: Olga Harumi Saito.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Curitiba, 2013.

Bibliografia: p. 99-100.

1. Números complexos. 2. Quatérnios. 3. Ensino médio. 4. Matemática – Dissertações. I. Saito, Olga Harumi, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD (22. ed.) 510

Título da Dissertação No. 009

**“Dos Números Complexos aos Quatérnions:
desenvolvimento algébrico, interpretação
geométrica e aplicações”**

por

Marcos André dos Santos

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 14h do dia 26 de novembro de 2013. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Profa. Olga Harumi Saito, Dra.
(Presidente - UTFPR/Curitiba)

Prof. Edson Ribeiro Álvares, Dr.
(UFPR)

Prof. Mateus Bernardes, Dr.
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

Prof. Ronie Peterson Dario, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR”

Esse trabalho é fruto de um grande esforço que perdurou por mais de dois anos. Nada seria possível se não fosse a existência de minha família. Dedico-o, com todo amor, à minha filha Maryah, um anjo que Deus colocou em minha vida durante essa caminhada e à minha esposa, Magali, que durante todo esse tempo dividiu comigo as alegrias, as angústias e foi o ombro onde pude me apoiar durante as dificuldades encontradas. Elas são mais do que tudo para mim.

AGRADECIMENTOS

- Agradeço à Deus por todas as coisas boas que conquistei até agora, por me sustentar nos momentos difíceis e indicar o caminho quando estava perdido.
- Aos meus pais, Jorge e Josélia, que me deram a vida ensinado-me a vivê-la com dignidade e estiveram ao meu lado em todos os momentos. Vocês se orgulham dos meus passos, mas o meu referencial é vocês.
- À minha orientadora, Prof^a. Dra. Olga Harumi Saito, que com muita paciência, dedicação e capacidade contribuiu de modo decisivo para a realização desse trabalho. Foi um privilégio ter trabalhado com você.
- Aos colegas da Turma PROFMAT-UTFPR 2011, em especial ao Alessandro e ao Adão, companheiros de estudos e que muito contribuíram por eu ter concluído essa etapa de minha formação.
- Aos professores do PROFMAT-UTFPR, que com dedicação e profissionalismo auxiliaram muito para o meu aperfeiçoamento como profissional da área da matemática.
- À CAPES pelo apoio financeiro.
- À SBM, que tornou possível a realização do PROFMAT.

RESUMO

SANTOS, Marcos André dos. DOS NÚMEROS COMPLEXOS AOS QUATÉRNIONS: DESENVOLVIMENTO ALGÉBRICO, INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA E APLICAÇÕES. 101 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2013.

Este trabalho foi desenvolvido a partir da constatação das dificuldades e falta de motivação dos alunos do ensino médio no aprendizado de números complexos. O desenvolvimento consistiu em realizar uma linha do tempo no estudo dos números complexos desde Cardano até Sir Hamilton, buscando contribuir para sua melhor compreensão, associando as propriedades algébricas com a interpretação geométrica visando melhorar o entendimento do uso dos números complexos na resolução de problemas. Ainda, a história da introdução da unidade imaginária i e a representação algébrica em duas dimensões ($2D$) $a + bi$, estendendo esta representação aos quatérnios ($4D$) $a + bi + cj + dk$ e suas outras formas menos usuais, como a forma matricial, com vetores, incluindo o procedimento utilizado na rotação, apresentando sua importância como motivação no ensino de geometria, na física e na computação gráfica.

Palavras-chave: números complexos, quatérnios, unidade imaginária, rotação, ensino médio.

ABSTRACT

SANTOS, Marcos André dos. FROM THE COMPLEX NUMBERS UNTIL THE QUATERNIONS: ALGEBRAIC DEVELOPING, GEOMETRIC INTERPRETATION AND APPLICATIONS. 101 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2013.

This work was developed after observing the difficulties and unmotivated of the high school students to learning complex numbers. The development consisted in create a timeline in the study of complex numbers since Cardano at Sir Hamilton, expecting to contribute to understanding of this subject, associating algebraic properties and geometric interpretation, seeing to improve the understanding of the use of complex numbers to solve problems. Also, the history of imaginary unit i introduction and representation two-dimensional (2D) complex numbers $a + bi$, extending this for four-dimensions (4D) quaternions numbers $a + bi + cj + dk$, and its less usual forms like matrix form, vector form, including the procedure used in the rotation, showing your importance as motivation in the teaching of geometry, in physics and graphic computation.

Keywords: complex numbers, quaternions, imaginary unit, rotation, high school.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Proposta para a interpretação geométrica da raiz quadrada de um número negativo. Ponto B marcado a direita de A e distâncias AB e BC positivas. .	22
FIGURA 2	– Proposta para a interpretação geométrica da raiz quadrada de um número negativo. Ponto B marcado a esquerda de A.	23
FIGURA 3	– Outra proposta de Wallis para mostrar a interpretação geométrica da raiz quadrada de um número negativo: caso $c < b$, problema com raízes reais. .	24
FIGURA 4	– Outra proposta de Wallis para a interpretação geométrica da raiz quadrada de um número negativo: caso $c > b$, o problema não possui raízes reais.	25
FIGURA 5	– Representação analítica de direção, segundo Wessel.	26
FIGURA 6	– Representação da multiplicação por -1 segundo Argand.	27
FIGURA 7	– Formas de representar quantidades imaginárias através da multiplicação por i	28
FIGURA 8	– Placa em homenagem a Hamilton na ponte Broughm e vista atual da ponte sobre o Canal Royal. Fonte:(JP, 2007), (MAPAS, 2013), (MONO42, 2012)	32
FIGURA 9	– Representação de um número complexo como par ordenado.	41
FIGURA 10	– Representação de um número complexo $z = a + bi$ através do vetor \overline{OP}	42
FIGURA 11	– Representação gráfica da soma de dois números complexos.	42
FIGURA 12	– Módulo de um número complexo (ρ).	43
FIGURA 13	– Representação do conjugado de um número complexo.	43
FIGURA 14	– Representação gráfica do argumento de um número complexo (θ).	52
FIGURA 15	– $Arg(z) = (\theta)$, argumento de $z = a + bi$ e representação dos múltiplos θ	52
FIGURA 16	– Gráfico representativo da forma trigonométrica de $z = a + bi$	53
FIGURA 17	– Representação gráfica da raiz enésima de um número complexo	58
FIGURA 18	– Representação gráfica de z e z_1 , números complexos de mesmo módulo ρ e argumento α e $\alpha + \theta$ respectivamente.	62
FIGURA 19	– Não comutatividade geométrica. Fonte: (VAZ, 2000)	67
FIGURA 20	– Diagrama das multiplicações das unidades $1, i, j$ e k	68
FIGURA 21	– Possibilidades para a construção de um quadrado sendo conhecidos dois vértices consecutivos, A e B.	72
FIGURA 22	– Exemplo de um fractal: Curva de Koch. Fonte: (WIKIPEDIA, 2013c) .	75
FIGURA 23	– Conjunto de Mandelbrot: um dos mais conhecidos fractais. Fonte: (WIKIPEDIA, 2013b)	76
FIGURA 24	– Exemplos de Conjuntos de Julia. Fonte: (WIKIPEDIA, 2013a)	76
FIGURA 25	– Exemplo do Conjunto de Julia gerado por uma função dos quatérnios. Fonte: (WIKIPEDIA, 2013a)	77
FIGURA 26	– Fluxo em torno do aerofólio de Joukowski. Fonte: (EF128, 2011)	78
FIGURA 27	– Elipse considerada por cotes, em que a e b são os comprimentos dos semi-eixos.	84
FIGURA 28	– Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^0 \frac{x^n}{n!}$ e $f(x) = e^x$	93

FIGURA 29	-	Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^1 \frac{x^n}{n!}$ e $f(x) = e^x$	94
FIGURA 30	-	Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^2 \frac{x^n}{n!}$ e $f(x) = e^x$	94
FIGURA 31	-	Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^3 \frac{x^n}{n!}$ e $f(x) = e^x$	94
FIGURA 32	-	Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^4 \frac{x^n}{n!}$ e $f(x) = e^x$	95
FIGURA 33	-	Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^5 \frac{x^n}{n!}$ e $f(x) = e^x$	95
FIGURA 34	-	Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^6 \frac{x^n}{n!}$ e $f(x) = e^x$	95
FIGURA 35	-	Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^0 (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ e $f(x) = \text{sen}(x)$	96
FIGURA 36	-	Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^1 (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ e $f(x) = \text{sen}(x)$	96
FIGURA 37	-	Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^2 (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ e $f(x) = \text{sen}(x)$	96
FIGURA 38	-	Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^3 (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ e $f(x) = \text{sen}(x)$	97
FIGURA 39	-	Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^4 (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ e $f(x) = \text{sen}(x)$	97
FIGURA 40	-	Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^5 (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ e $f(x) = \text{sen}(x)$	97
FIGURA 41	-	Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^0 (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ e $f(x) = \text{cos}(x)$.	98
FIGURA 42	-	Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^1 (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ e $f(x) = \text{cos}(x)$.	98
FIGURA 43	-	Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^2 (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ e $f(x) = \text{cos}(x)$.	98
FIGURA 44	-	Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^3 (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ e $f(x) = \text{cos}(x)$.	99
FIGURA 45	-	Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^4 (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ e $f(x) = \text{cos}(x)$.	99
FIGURA 46	-	Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^5 (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ e $f(x) = \text{cos}(x)$.	99

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	A HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS	15
2.1	ANTES DO COMPLEXOS	15
2.2	SURGEM OS NÚMEROS COMPLEXOS	16
2.2.1	DEDUÇÃO DA FÓRMULA DE CARDANO	16
2.3	O DESENVOLVIMENTO TRIGONOMÉTRICO	19
2.4	O DESENVOLVIMENTO GEOMÉTRICO	22
2.5	ALÉM DOS COMPLEXOS - A HISTÓRIA DOS QUATÉRNIONS	29
3	TEORIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS	33
3.1	A INSUFICIÊNCIA DOS REAIS	33
3.2	O CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS	35
3.2.1	Potências de i com expoentes inteiros	39
3.3	REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS	41
3.3.1	Módulo e conjugado de um número complexo	43
3.3.1.1	Propriedade do quociente de um número complexo	44
3.3.1.2	Relação entre o módulo e o conjugado de um número complexo	44
3.3.1.3	Propriedades do conjugado de um número complexo	45
3.3.1.4	Propriedades do módulo de um número complexo	48
3.3.2	Raíz quadrada de um número complexo	50
3.4	FORMA POLAR OU FORMA TRIGONOMÉTRICA	52
3.4.1	Operações com números complexos na forma trigonométrica	53
3.4.1.1	Multiplicação	53
3.4.1.2	Divisão	54
3.4.1.3	Potenciação	55
3.4.1.4	Radiciação	56
3.5	FORMA EXPONENCIAL DE UM NÚMERO COMPLEXO	58
3.5.1	Logaritmo	60
3.5.2	Potências complexas	61
3.6	FORMA MATRICIAL DE UM NÚMERO COMPLEXO	61
3.7	QUATÉRNIONS	65
3.7.1	Operações com quatérnios	69
3.7.1.1	Adição	69
3.7.1.2	Produto	69
3.7.1.3	Módulo	71
3.7.1.4	Conjugado	71
4	APLICAÇÕES	72
4.1	APLICAÇÕES NA MATEMÁTICA	72
4.1.1	Ferramenta de resolução de problemas nos diversos ramos da matemática	72
4.1.2	Geração de Fractais	74
4.2	ANÁLISE DE CIRCUITOS ELÉTRICOS	77
4.3	AERODINÂMICA	78

4.4 BIOMECÂNICA	78
4.5 COMPUTAÇÃO GRÁFICA E JOGOS DIGITAIS	78
4.6 OUTRAS APLICAÇÕES	79
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	80
Anexo A – OBTENÇÃO DA FÓRMULA DE EULER ATRAVÉS DO USO DE INTE-	
GRAIS	82
Anexo B – COTES E A FÓRMULA DE EULER	84
Anexo C – LINHA DO TEMPO	88
Anexo D – EXPANSÃO EM SÉRIE DE TAYLOR EM TORNO DA ORIGEM, DAS	
FUNÇÕES EXPONENCIAL, SENO E COSSENO	93
REFERÊNCIAS	100

1 INTRODUÇÃO

Segundo as normas de funcionamento do Profmat: *“O Trabalho de Conclusão de Curso deve versar sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenham impacto na prática didática em sala de aula.”*

Seguindo essa linha optou-se neste trabalho em fazer uma apresentação histórica dos números complexos, visto que o tratamento dado a esse conteúdo, no Ensino Médio, na maioria das vezes, restringe-se a cálculos que não têm sentido algum para os alunos, sem significados práticos e sem qualquer vínculo com a realidade. Além disso, por si só, o nome **complexo**, causa temor ao estudante, pois essa expressão está intimamente ligada à idéia de algo de difícil compreensão. Segundo o dicionário (GRAUS, 2013), complexo significa:

- que abarca e compreende vários elementos e/ou aspectos distintos cujas múltiplas formas possuem relações de interdependência; muitas vezes de difícil compreensão;
- característica do que é complicado ou difícil;
- que não há percepção, entendimento, clareza, confuso.

Segundo (CALDEIRA, 2012), *“uma visão histórica facilita o entendimento dos conceitos a serem desenvolvidos e possibilita que se estabeleçam as relações entre a área do domínio específico, no caso os Números Complexos, e suas relações transversais com os demais conteúdos a ele associados.”*

Desta forma, se a introdução ao estudo dos números complexos for feita pelo seu desenvolvimento histórico, possibilitará ao educando um entendimento mais motivante. Além do que, essa abordagem oferece uma oportunidade de mostrar como se deu o desenvolvimento desse ente matemático: desde os problemas iniciais que levaram a sua criação, passando pela sua aceitação, sua interpretação concreta e, finalmente, sua formalização, pois explicita as razões que motivaram os matemáticos a desenvolver essa teoria. Tudo isso oferece ao estudante uma maneira mais simples de identificar sua utilidade e mostrar que “de complexo” esses números só possuem o nome.

No prefácio de seu livro *Conceitos Fundamentais da Matemática*, (CARACA, 1951) diz “*A Ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente - descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições.*”

Assim, o leitor encontrará, no Capítulo 2, a história dos números complexos, as tentativas para resolver as equações de terceiro grau, as necessidades de legitimar os resultados encontrados e o desconforto, desconfiança e resistência que surgiram na busca de um significado geométrico para os resultados encontrados. Curiosidade foi a tônica deste período, à medida que se trabalhava com o novo número, a raiz quadrada de um número negativo, e não se encontravam contradições.

Ao longo do tempo, foi-se descobrindo novas formas de apresentação deste elemento (como a forma trigonométrica) e finalmente, com a contribuição de Wallis, obteve-se uma interpretação geométrica para estes valores. E, eis que surgem os números complexos, úteis para resolver problemas nas mais diversas áreas. Após sua formalização por Hamilton, emerge uma questão: como operá-los no espaço? A resposta está na ampliação deste conjunto com uma álgebra para os tripletos e, após muitos insucessos, Hamilton consegue o sucesso de operá-los sem a comutatividade na multiplicação destes entes, surgindo os quatérnions.

O Capítulo 3 traz a Teoria dos Números Complexos, com as propriedades envolvidas a partir de uma apresentação da necessidade de ampliação do conjunto dos números reais, as limitações de suas propriedades, definindo-se, então, os números complexos com suas propriedades, características, particularidades, simplificações, formas de representação e associação entre estas formas de representação. Seguindo nesta linha, é apresentado o conjunto dos quatérnions, a representação da idéia de rotação utilizada para explicar o princípio da não-comutatividade aplicada por Hamilton.

Após os estudos dos números complexos e dos quatérnions, o Capítulo 4 fornece algumas aplicações em áreas diferentes da matemática - geometria analítica e álgebra, mostrando com um exemplo, as simplificações que podem ser realizadas ao visualizar uma forma de solução utilizando números complexos, desde a geração de fractais em computação gráfica, análise de circuitos elétricos pela área de engenharia e física, chegando à sua utilização no estudo da aerodinâmica. Em simulações de braços mecânicos, com o uso dos quatérnions, há

uma simplificação do uso de variáveis e, em jogos digitais, como Tomb Raider, primeiro jogo a utilizar em sua programação este conhecimento. Há ainda várias aplicações para os quatérnions e complexos como nos estudos de escoamento de fluidos incompressíveis.

Nos anexos, constam a apresentação em detalhes do uso de integrais para a obtenção da Fórmula de Euler (Anexo A), os procedimentos utilizados por Roger Cotes para chegar em $\ln(\cos\theta + i\sin\theta) = i\theta$ (Anexo B), um quadro representando a linha do tempo com as principais personalidades que se envolveram na formalização da teoria dos números complexos e dos quatérnions (Anexo C) e, finalmente, uma proposta para justificar ao aluno do ensino médio a validade da expansão por série de Taylor das funções exponencial, seno e cosseno em torno da origem (Anexo D), o que facilita o entendimento do porque da Fórmula de Euler.

2 A HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Na escola básica, geralmente o estudo dos números complexos é introduzido sob o argumento de permitir resolver qualquer equação quadrática. Porém o seu surgimento, se deve aos matemáticos do século XVI, que tentavam encontrar um método para resolver equações do terceiro grau.

2.1 ANTES DO COMPLEXOS

Durante muito tempo uma equação era vista como a modelagem matemática de um problema real (ROSA, 1998). Assim, se no decorrer da resolução dessa equação era obtida a raiz quadrada de um número negativo, acreditava-se que o problema original não tinha solução.

Segundo (MILIES, 1993), a primeira aparição registrada da raiz quadrada de um número negativo é encontrado no livro Estereometria do matemático grego Heron, publicado em aproximadamente 75 D.C., em uma análise matemática de um problema físico. Nele, Heron tenta resolver uma equação quadrática para determinar altura do tronco de uma pirâmide e encontra $\sqrt{81 - 144}$. Naturalmente, a resposta correta é $\sqrt{-63}$, mas, por alguma razão Heron inverte os números e escreve $\sqrt{144 - 81}$, resultando em $\sqrt{63}$.

Ainda em (MILIES, 1993), outro registro sobre raiz quadrada de um número negativo se deve a Diofanto de Alexandria, em aproximadamente 250 D.C., em cujo livro VI, é apresentado o problema “*Dado um triângulo retângulo de área 7 e perímetro 12, encontre seus lados*” que o leva a uma equação quadrática cuja solução é um número complexo.

Fazendo a e b como os catetos desse triângulo tem-se:

$$\begin{cases} \frac{a \cdot b}{2} = 7 \\ a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 12 \end{cases} \Rightarrow 24a^2 - 172a + 336 = 0,$$

cujas raízes são: $a = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12}$.

No entanto, ele parou sem resolver a equação e concluiu que o problema era impossível, pois só poderia haver solução se $\left(\frac{172}{2}\right)^2 \geq 24 \cdot 336$.

2.2 SURGEM OS NÚMEROS COMPLEXOS

O primeiro a operar com raiz quadrada de números negativos foi o matemático, físico e médico italiano Gerônimo Cardano (1501-1576). Ele, em meados do século XVI, publica a obra *Ars Magna*, onde resolve o seguinte problema: “dividir o número 10 em duas partes cujo produto é 40”. Isso o conduziu à equação $x(10 - x) = -x^2 + 10x = 40$. Ao resolvê-la, obtém $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$ como soluções. Em vez de simplesmente rejeitar essas soluções, como era feito até então, porque as mesmas continham radicais de números negativos, Cardano resolve multiplicá-las e obtém $(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = (5)^2 - (\sqrt{-15})^2 = 25 - (-15) = 40$.

Contudo, para legitimar geometricamente essas operações, era forçado a usar essas raízes de números negativos, as quais ele chamava de “*sofistas*”, pois possibilitavam extrair um segmento de um quadrado (ROQUE, 2012). Isso é o indicativo de que Cardano teve dúvidas entre admitir as operações algébricas por si mesmas ou tentar dar uma justificativa geométrica para elas.

Nessa mesma obra, *Ars Magna*, Cardano mostra pela primeira vez uma fórmula para a resolução de equações do terceiro grau da forma $x^3 + px + q = 0$, conhecida até hoje como Fórmula de Cardano, por ter sido ele quem a divulgou, porém, não se deve a ele sua descoberta. Ele próprio admitiu, em seu livro, que a sugestão para resolução da equação cúbica lhe tinha sido dada por Niccolo Tartaglia (cerca de 1500-1557).

2.2.1 DEDUÇÃO DA FÓRMULA DE CARDANO

Pode-se representar a equação geral do terceiro grau na forma $y^3 + ay^2 + by + c = 0$. A substituição $y = x - \frac{a}{3}$ transforma essa equação cúbica completa em uma equação cúbica sem o termo de segundo grau: $x^3 + Px + Q = 0$. Agora considerando que a raiz dessa equação seja a soma de duas parcelas $x = u + v$, tem-se

$$\begin{aligned} (u + v)^3 + p(u + v) + q &= 0 \\ u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u + v) + q &= 0 \\ u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q &= 0 \\ u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Fazendo $3uv + p = 0$, a equação (1) será satisfeita se $u^3 + v^3 = -q$, ou seja

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = \frac{-p}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -q & \text{(soma)} \\ u^3 v^3 = \frac{-p^3}{27} & \text{(produto)}. \end{cases}$$

Assim, u^3 e v^3 são as soluções da equação do segundo grau $y^2 + qy + \frac{-p^3}{27} = 0$, que ao resolver, obtém-se:

$$y_1 = u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{e}$$

$$y_2 = v^3 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Logo,

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad \text{e} \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

e, como $x = u + v$ implica que

$$\boxed{x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (2)}$$

A equação (2) ficou conhecida como Fórmula de Cardano.

Cardano, ao aplicar (2) à equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, obteve :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} + \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} - \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Mesmo sabendo que 4 era raiz dessa equação pois $4^3 - 15 \cdot 4 - 4 = 0$, não soube como transformar a expressão $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ no número 4.

Em 1572, o algebrista italiano Rafael Bombelli (1526-1572) publicou a obra L'Algebra, na qual resolveu esse problema considerando $(\sqrt{-1})^2 = -1$ e utilizando as regras elementares da aritmética, mostrou que:

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121}$$

e

$$(2 - \sqrt{-1})^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot (-\sqrt{-1}) + 3 \cdot 2 \cdot (-\sqrt{-1})^2 + (-\sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1} = 2 - \sqrt{-121}.$$

Assim,

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-1})^3} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4, \text{ ou seja mostrou que a solução da equação } x^3 - 15x - 4 = 0 \text{ é } x = 4.$$

Embora considerando impossível a existência de $\sqrt{-121}$, Bombelli admitiu sua utilidade como ferramenta de cálculo e desenvolveu regras operatórias com essas raízes quadradas de números negativos.

A partir de seu trabalho, a maneira de manipular os números da forma $a + b\sqrt{-1}$ começa a ser utilizada em virtude de sua utilidade na resolução de equações do terceiro grau. Mas os matemáticos do século XVI eram muito ligados à tradição grega da geometria, e eles se sentiam desconfortáveis com conceitos que não conseguiam dar um significado geométrico. Assim as raízes quadradas dos números negativos eram vistas com muita desconfiança, gerando resistências em reconhecer a existência desses novos entes algébricos. Apesar disso, aos poucos a segurança em trabalhar com esses novos números cresce à medida que sua manipulação não conduz a contradições.

Em 1629, Albert Girard (1595-1632) foi o primeiro a utilizar o símbolo $\sqrt{-1}$, quando determinou a correspondência entre raízes e coeficientes de uma equação. Segundo (BAUN-GART, 1994) “Foi Albert Girard (1629) quem enfocou números negativos e números imaginários com grande ousadia. Ele usava números negativos para resolver problemas geométricos e sugeriu que, aceitando também números imaginários como raízes, seria possível afirmar que uma equação admite tantas raízes quanto é seu grau. Enunciou também as relações entre coeficientes e raízes de uma equação polinomial e sugeriu que as raízes imaginárias são úteis por tornar essas relações gerais. Por exemplo, para a equação $x^4 - 4x + 3 = 0$ ele deu as raízes 1, -1 e $-1 \pm \sqrt{-2}$.”

Mas a dúvida quanto à existência desse tipo de número continuava e fez com que, segundo (GARBI, 2010) uma frase descuidada de René Descartes (1596-1650), em 1637, batizasse as raízes quadradas de valores negativos, como números imaginários: “nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são imaginárias”.

Durante algum tempo, a álgebra dos números complexos pouco avançou até que, no

início do século XVIII, o matemático francês Abraham De Moivre (1667-1754) relacionou funções trigonométricas com números complexos.

Conforme (MILIES, 1993), em 1748 Euler “redescobriu o resultado de Cotes, demonstrou a fórmula de De Moivre e estendeu sua validade para todo expoente n real. Com isso, a existência de raízes no campo complexo ficou definitivamente estabelecida.”

2.3 O DESENVOLVIMENTO TRIGONOMÉTRICO

Segundo (ROQUE, 2012), “De Moivre foi um dos primeiros a observar que estes números podem ser úteis para problemas de divisão de arcos de círculos, mostrando que um número imaginário unitário pode ser representado por $\cos(\theta) \pm \sqrt{-1}\text{sen}(\theta)$.”

A representação $\cos(\theta) \pm \sqrt{-1}\text{sen}(\theta)$ pode ser desenvolvida a partir de $z = a \pm \sqrt{-1}b$.

Assim,

$$z = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}(a \pm \sqrt{-1}b)$$

$$z = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \pm \sqrt{-1} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Como $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ e $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ são números entre -1 e 1 e $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$, podem ser considerados o cosseno e o seno de um arco, logo $a \pm \sqrt{-1}b = \sqrt{a^2 + b^2}(\cos\theta \pm \sqrt{-1}\text{sen}\theta)$. E se $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$, tem-se que $a \pm \sqrt{-1}b = \cos\theta \pm \sqrt{-1}\text{sen}\theta$.

Em 1707 De Moivre publica a solução de equações de grau ímpar por um procedimento semelhante ao método de Cardano. Ele mostra, como um primeiro exemplo, que a solução da equação $5y + 20y^3 + 16y^5 = 4$ é aproximadamente $y = 0,4313$. Para isso utiliza uma tabela de logaritmos na realização dos cálculos. Em seguida determina a solução da equação $5y - 20y^3 + 16y^5 = \frac{61}{64}$, porém comenta que os cálculos são difíceis, mesmo utilizando uma tabela de logaritmos, mas pode-se utilizar uma tabela trigonométrica do seguinte modo:

- $\frac{61}{64} = 0,953125 = \text{sen } 72^\circ 23'$;
- a quinta parte de $72^\circ 23'$ é $14^\circ 28'$;
- $\text{sen } 14^\circ 28' = 0,24982$ que é aproximadamente $\frac{1}{4}$, a solução exata da equação.

O que De Moivre não faz é justificar o porquê da troca da tabela de logaritmos pela tabela trigonométrica, e nem o motivo pelo qual utilizou a quinta parte da medida do ângulo.

Segundo (ROSA, 1998), “Em 1722 De Moivre revela o artifício usado para descobrir a solução dessas equações de grau ímpar”. Baseado ainda em (ROSA, 1998), o procedimento utilizado por De Moivre foi o seguinte:

Fazendo $a = \cos\theta$ e $b = \cos(n\theta)$ então existe x que verifica simultaneamente as equações:

$$\begin{cases} x^2 - 2ax + 1 = 0 \\ (x^n)^2 - 2bx^n + 1 = 0 \end{cases}$$

Assim, resolvendo $x^2 - 2ax + 1 = 0$ obtém-se $x = a + \sqrt{a^2 - 1} = a + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{1 - a^2}$ e, como $a = \cos\theta$ segue que $\sqrt{1 - a^2} = \sin\theta$. Logo $x = \cos\theta + \sqrt{-1} \cdot \sin\theta$. Agora, resolvendo $(x^n)^2 - 2bx^n + 1 = 0$ obtém-se $x^n = b + \sqrt{b^2 - 1} = b + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{1 - b^2}$ e como $b = \cos(n\theta)$, logo $\sqrt{1 - b^2} = \sin(n\theta)$, assim $x^n = \cos(n\theta) + \sqrt{-1} \cdot \sin(n\theta)$. Isto mostra que

$$(\cos\theta + \sqrt{-1} \cdot \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \sqrt{-1} \cdot \sin(n\theta),$$

expressão esta que passou a ser conhecida como fórmula De Moivre.

Segundo (BOYER, 1981), Roger Cotes (1682-1716) apresentou num artigo em *Philosophical Transactions* de 1714, que foi reimpresso em *Harmonia mensurarum* publicado após sua morte em 1722, a fórmula $\ln(\cos\phi + i\sin\phi) = i\phi$. O Anexo B apresenta uma forma de reconstituir o que Cotes fez para chegar a esse resultado.

Em uma carta, datada de 10 de dezembro de 1728, Euler escreveu a John Bernoulli, citando um resultado devido a Bernoulli. O cálculo de $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$.

Para calcular $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ o que Bernoulli considerou o círculo de raio unitário centrado na origem, cuja equação é $x^2 + y^2 = 1$. Sabendo que a área do primeiro quadrante do círculo é $\frac{\pi}{4}$, ele usa a integral para calculá-la, ou seja:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx.$$

Ele usa uma idéia engenhosa, fazer a mudança de variável $u = \sqrt{-1}x$. Logo $x = -\sqrt{-1}u$, $dx = -\sqrt{-1}du$, quando $x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0$ e quando $x \rightarrow 1 \Rightarrow u \rightarrow \sqrt{-1}$, o que o leva a

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^{\sqrt{-1}} \left(\sqrt{1 - (-\sqrt{-1} \cdot u)^2} \right) (-\sqrt{-1}) du = -\sqrt{-1} \int_0^{\sqrt{-1}} \sqrt{1 + u^2} du$$

então,

$$\frac{\pi}{4} = -\sqrt{-1} \left[\frac{u\sqrt{1+u^2} + \ln(u + \sqrt{1+u^2})}{2} \right]_0^{\sqrt{-1}} = -\frac{\sqrt{-1}}{2} \cdot \ln(\sqrt{-1}).$$

Assim, $-\frac{\pi}{2} = \ln(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ e, por fim, $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Em outra carta de Euler a John Bernoulli datada de 18 de outubro de 1740, Euler afirmou que a solução para a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, y(0) = 2 \text{ e } y'(0) = 0 \quad (3)$$

pode ser escrita de duas maneiras, isto é, $y(x) = 2\cos(x)$ e $y(x) = e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$.

A veracidade dessa afirmação é evidente pela substituição direta na equação diferencial, assim se $y(x) = 2\cos(x)$ então, $\frac{dy}{dx} = -2\sin(x)$ e $\frac{d^2y}{dx^2} = -2\cos(x)$ que, ao substituir na equação (3) tem-se,

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + y = -2\cos(x) + 2\cos(x) = 0 \\ y(0) = 2 \cdot 1 = 2 \\ y'(0) = -2 \cdot 0 = 0 \end{cases} .$$

E se $y(x) = e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$ então, $\frac{dy}{dx} = \sqrt{-1} \cdot e^{x\sqrt{-1}} - \sqrt{-1} \cdot e^{-x\sqrt{-1}}$ e $\frac{d^2y}{dx^2} = -e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}$, que ao substituir na equação (3) resulta em:

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + y = (-e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}) + (e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}) = 0 \\ y(0) = e^0 + e^0 = 1 + 1 = 2 \\ y'(0) = \sqrt{-1} \cdot e^0 - \sqrt{-1} \cdot e^0 = \sqrt{-1} - \sqrt{-1} = 0. \end{cases}$$

Mas existe um teorema que garante que são únicas as soluções desse tipo de equação diferencial. Com isto Euler concluiu que essas duas expressões, cada uma aparentemente tão diferente da outra, são de fato iguais. Isto é, $2\cos(x) = e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$.

Fica evidente, na mesma carta, que Euler também sabia que $2\sqrt{-1}\sin(x) = e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}$. Tanto que em 1743, publicou $\cos(x) = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$ e $\sin(x) = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ e, conseqüentemente, $e^{-x\sqrt{-1}} = \cos(x) - \sqrt{-1}\sin(x)$ e $e^{x\sqrt{-1}} = \cos(x) + \sqrt{-1}\sin(x)$, que hoje é conhecida como Fórmula de Euler.

2.4 O DESENVOLVIMENTO GEOMÉTRICO

John Wallis (1616-1703) em 1685 foi o primeiro matemático a buscar uma interpretação geométrica para a raiz quadrada de números negativos.

Ele pondera que os números negativos, sempre vistos com desconfiança, porém tolerados pelos matemáticos, devido a sua utilidade prática na realização de cálculos, tinham uma perfeita e clara interpretação física. Nas próprias palavras de Wallis: *“no entanto, sobre a notação algébrica pura, ele (o número negativo) implica uma quantidade menor do que nada; no entanto, quando se trata de uma aplicação física, ele denota uma quantidade real, como se o sinal fosse +, porém interpretada para o sentido contrário.”*

Wallis então constrói uma reta, marca sobre ela um ponto que referência como ponto zero ou origem, e considera que um número positivo indica as distâncias medidas do ponto zero para a direita, e que um número negativo indica as distâncias medidas do ponto zero para a esquerda, ou seja, geometricamente os números negativos significam a medida de distância em sentido oposto ao positivo.

Para fazer uma interpretação geométrica da raiz quadrada de um número negativo, sua idéia consistiu em construir uma circunferência de diâmetro AC e sobre a reta que passa por AC marcar um ponto B à direita de A . Em B traça uma perpendicular a AC e na intersecção dessa a circunferência, obtém P , então considera a distância $AB = +b$ e a distância $BC = +c$, Figura 1. Porém, da geometria plana, tem-se que $\overline{PB}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$, logo $\overline{PB} = \sqrt{(+b) \cdot (+c)}$.

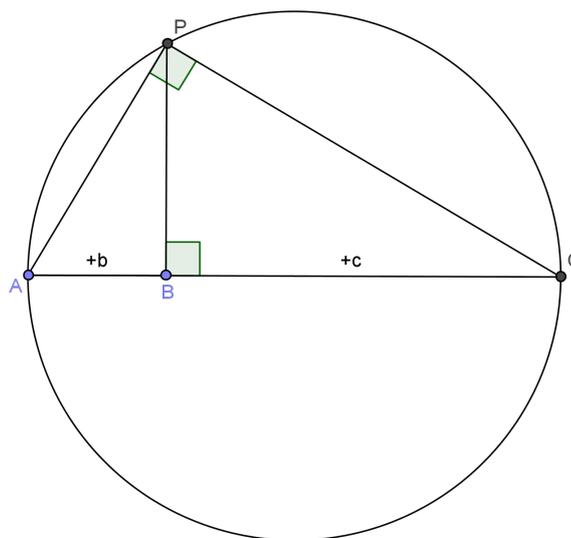


Figura 1: Proposta para a interpretação geométrica da raiz quadrada de um número negativo. Ponto B marcado a direita de A e distâncias AB e BC positivas.

Wallis então marca B à esquerda de A e considera BA como tendo a mesma distância de AB da situação anterior, só que com valor negativo, ou seja, $BA = -b$. Desse modo BC terá um valor positivo ($BC = +c$) se $|AC| > |BA|$, pois $BC = BA + AC$, Figura 2. Como da geometria plana $\overline{PB}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$, logo $\overline{PB} = \sqrt{(-b) \cdot (+c)}$, e assim \overline{PB} seria a representação geométrica da raiz de um número negativo.

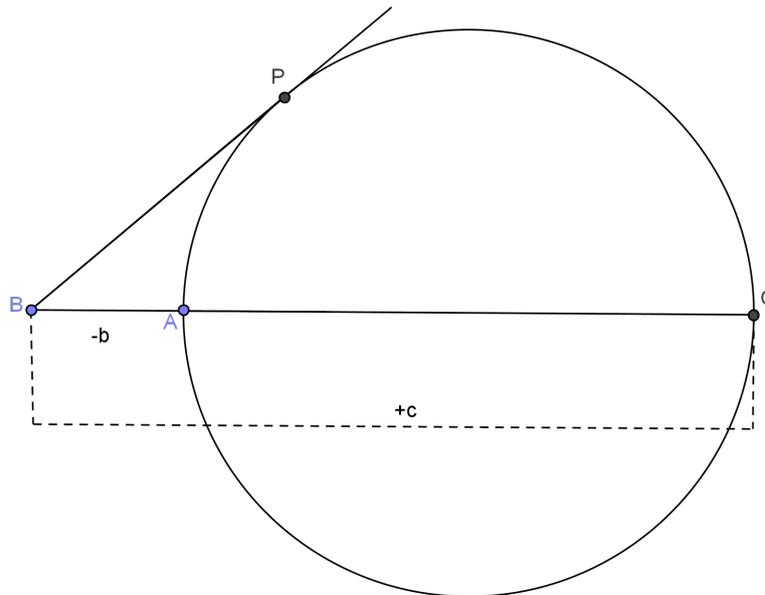


Figura 2: Proposta para a interpretação geométrica da raiz quadrada de um número negativo. Ponto B marcado a esquerda de A.

Outra proposta de Wallis, que o levou a interpretar geometricamente a raiz quadrado de números negativos, foi o seguinte problema: determinar um triângulo dados dois lados CA e CB e um ângulo α não compreendido por esses lados.

- primeiro Wallis desenhou um segmento CA e por A traçou uma reta que forma um ângulo α em relação a CA ;
- em seguida, com centro em C , traçou uma circunferência cuja medida do raio é igual ao comprimento do lado CB .

Assim, se a distância do ponto C a essa reta, que passa por A e que forma um ângulo α em relação a CA (o segmento CH), for menor que o raio da circunferência, então o problema tem duas soluções. Ou seja, ficam determinados dois triângulos, ACB_1 e ACB_2 , conforme mostra a Figura 3.

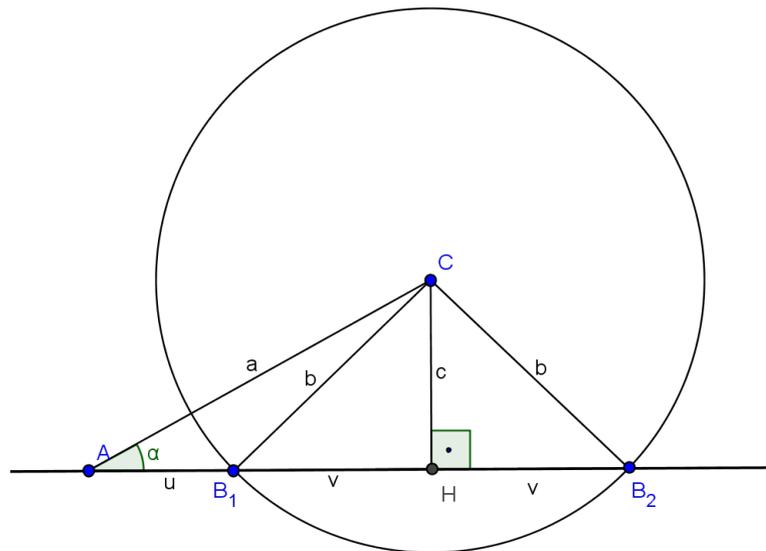


Figura 3: Outra proposta de Wallis para mostrar a interpretação geométrica da raiz quadrada de um número negativo: caso $c < b$, problema com raízes reais.

Essa construção nos leva a uma equação do segundo grau, cujas raízes u (segmento AB_1) e $u + 2v$ (segmento AB_2) são as soluções do problema.

Mas $ACB_1 + ACB_2 = u + u + 2v = 2(u + v)$ e $(ACB_1)(ACB_2) = u(u + 2v) = u^2 + 2uv$, então a base AB dos triângulos são as raízes da equação $x^2 - 2(u + v)x + (u^2 + 2uv) = 0$.

Dos triângulos retângulos formados tem-se que:

$$\begin{cases} a^2 = c^2 + (u + v)^2 \\ b^2 = c^2 + v^2 \end{cases} \Rightarrow u + v = \sqrt{a^2 - c^2} \quad \text{e} \quad u^2 + 2uv = a^2 - b^2.$$

Logo, AB será a solução da equação $x^2 - 2 \cdot \sqrt{a^2 - c^2} \cdot x + a^2 - b^2 = 0$.

Assim, $AB = \sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{b^2 - c^2}$ ou $AB = \sqrt{a^2 - c^2} - \sqrt{b^2 - c^2}$.

No entanto, se $c > b$ a equação não tem raízes reais e os pontos B_1 e B_2 associados a essas raízes não poderão pertencer à reta AH , então o problema original não terá solução real.

Wallis então especula que estejam no plano e, habilmente, determina uma maneira de interpretar esse problema, Figura 4:

- ele constrói um segmento CA e por A traça uma reta que forma um ângulo α em relação a CA , marcando sobre ela um ponto H , de maneira que o segmento CH seja perpendicular a essa reta;

- traça então uma circunferência de diâmetro CH ;
- e com centro em C , constrói uma circunferência, cuja medida do raio é igual ao comprimento do lado CB , obtendo os pontos B_1 e B_2 , na intersecção entre essas circunferências.

Assim, ficam determinados pelos lados CA , CB e pelo ângulo α não compreendido entre eles, os triângulos ACB_1 e ACB_2 como proposto inicialmente. Pode-se observar que o problema não impõe que o ângulo α deva ser interno ao triângulo.

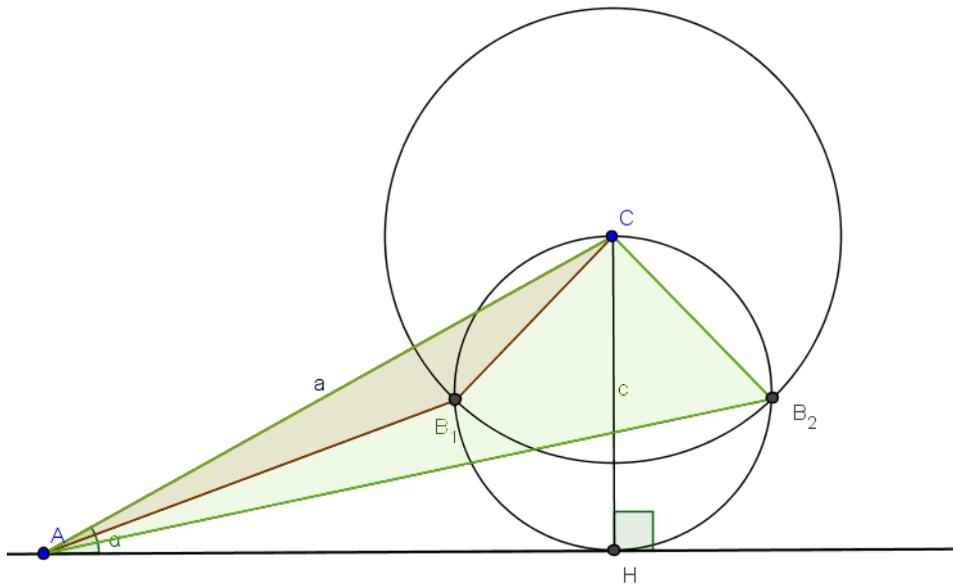


Figura 4: Outra proposta de Wallis para a interpretação geométrica da raiz quadrada de um número negativo: caso $c > b$, o problema não possui raízes reais.

Wallis, apesar de estar próximo de resolver o problema da representação geométrica dos números complexos, não obteve sucesso. Isso só ocorreria um século mais tarde, quando esses números imaginários ganham um significado, além da simples finalidade operatórias.

Os primeiros a notarem a relação entre os números complexos e os pontos reais do plano após Wallis foram Caspar Wessel (1745-1818), Jean Robert Argand (1768-1822) e Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), de forma independente um do outro.

Em 1797, um agrimensor norueguês, chamado Caspar Wessel (1745-1818), encaminha à Academia Real Dinamarquesa de Ciências, que o publica em 1799, um artigo intitulado *Om Directionens Analytiske Betregning* (sobre a representação analítica de direção), onde apresentava um método que propõe uma representação analítica para segmentos de retas no plano e para representar os números complexos como pontos do plano.

Wessel referencia um segmento de reta unitário por $+1$ e estabelece que sua inclinação é 0° , e define uma multiplicação geométrica de segmentos da seguinte forma: dados dois segmentos, o produto deles é um terceiro segmento que pertence ao mesmo plano desses segmentos e do segmento $+1$, com comprimento igual ao produto do comprimento desses segmentos e com inclinação igual à soma das inclinações desses segmentos, Figura 5.

Então define outros três segmentos unitários pertencente ao mesmo plano de $+1$ e tendo como referência sua inclinação, ou seja 0° , que são:

- $+\varepsilon$ com mesma origem que $+1$, porém perpendicular ao primeiro, ou seja, 90° ;
- -1 com mesma origem que $+1$, porém com direção igual a 180° ;
- $-\varepsilon$ com mesma origem que $+1$, porém com direção igual a de 270° .

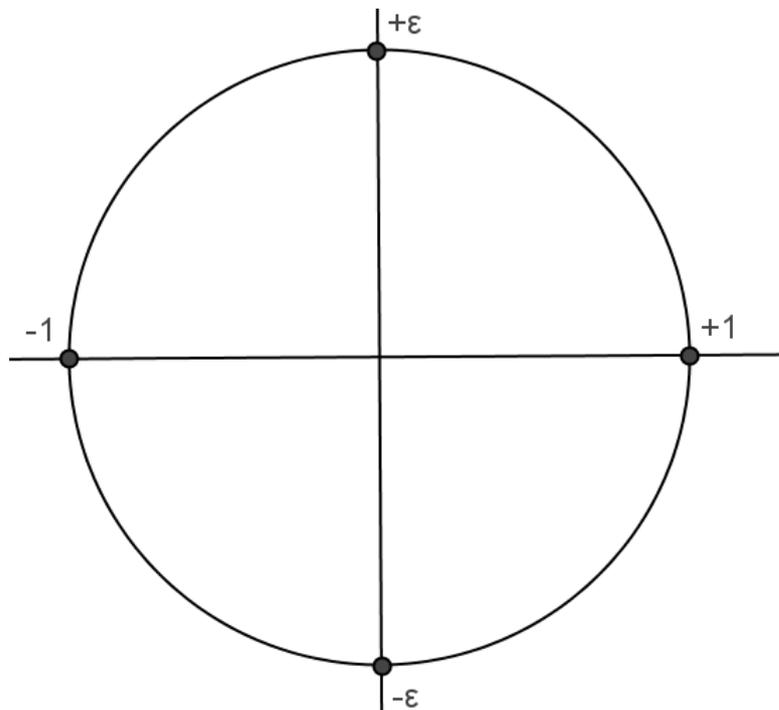


Figura 5: Representação analítica de direção, segundo Wessel.

Utilizando a definição estabelecida para multiplicação de segmentos obtém-se:

$$\begin{array}{ll}
 (+1) \cdot (+1) = (+1) & (+1) \cdot (+\varepsilon) = (+\varepsilon) \\
 (+1) \cdot (-1) = (-1) & (+1) \cdot (-\varepsilon) = (-\varepsilon) \\
 (-1) \cdot (-1) = (+1) & (-1) \cdot (+\varepsilon) = (-\varepsilon) \\
 (-1) \cdot (-\varepsilon) = (+\varepsilon) & (+\varepsilon) \cdot (+\varepsilon) = (-1) \\
 (+\varepsilon) \cdot (-\varepsilon) = (+1) & (-\varepsilon) \cdot (-\varepsilon) = (-1)
 \end{array}$$

Assim, pela igualdade $(+\varepsilon) \cdot (+\varepsilon) = (-1)$, Wessel conclui que $+\varepsilon$ é a representação geométrica $\sqrt{-1}$, pois pela multiplicação geométrica de segmentos $+\varepsilon^2 = (+\varepsilon) \cdot (+\varepsilon)$ que é igual ao produto de seus comprimentos, ou seja $1 \cdot 1 = 1$ e sua direção será igual à soma das suas direções, ou seja, $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, o segmento unitário na direção 180° (segmento de 0 a -1).

Segundo (MILIES, 1993) “O símbolo i foi usado pela primeira vez para representar $\sqrt{-1}$ por Leonhard Euler, em 1777. Apareceu impresso pela primeira vez em 1794 e se tornou amplamente aceito após seu uso por Gauss, em 1801.”

Em 1806, Jean Robert Argand (1768-1822) um bibliotecário suíço, publicou o livro *Ensaio sobre a Maneira de Representar as Quantidades Imaginárias*. Ele pondera que a multiplicação por -1 representa uma reflexão em relação à origem, por isso $(+1) \cdot (-1) = (-1)$ e $(-1) \cdot (-1) = (+1)$, ou seja, ao se multiplicar por (-1) tem-se uma rotação de 180° no sentido anti-horário, Figura 6.

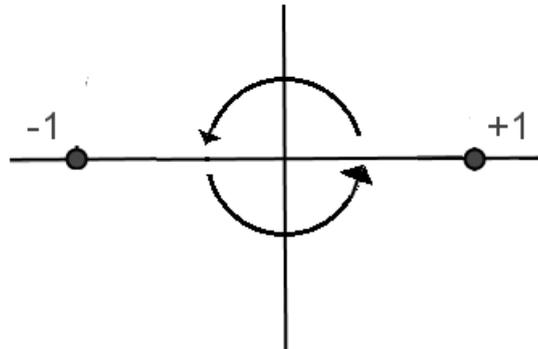


Figura 6: Representação da multiplicação por -1 segundo Argand.

Argand considera de modo semelhante a multiplicação por i . Ele analisa que ao se multiplicar $+1$ por i obtém-se i e, em seguida novamente multiplicar esse resultado por i obtém-se -1 , ou seja, ao multiplicar $+1$ duas vezes seguidas por i , obtém-se novamente uma rotação de 180° . Assim, ele considera a multiplicação de i como uma rotação de 90° no sentido anti-horário, Figura 7.

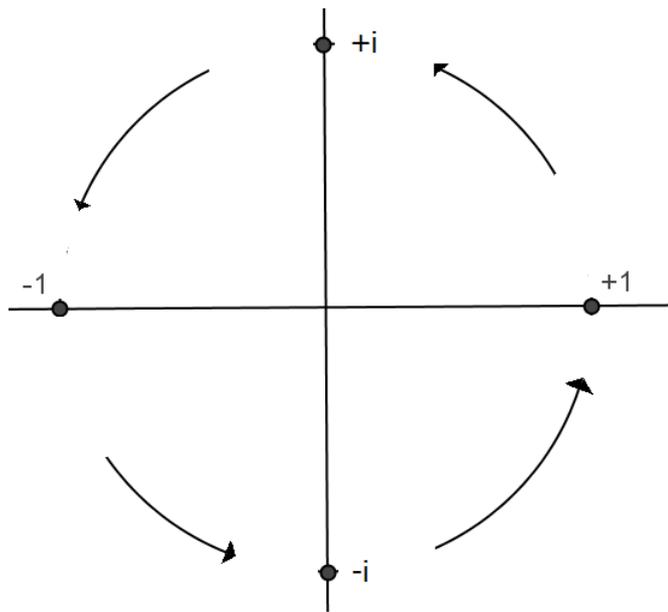


Figura 7: Formas de representar quantidades imaginárias através da multiplicação por i .

Em 1831, Carl Friedrich Gauss (1777-1855), matemático, astrônomo e físico alemão, escreveu um artigo no qual associava cada número complexo a um único ponto do plano cartesiano, ou seja, representava $a + bi$ como o par ordenado (a, b) . A interpretação geométrica dos números complexos, a partir dali, se tornou totalmente aceita.

Em 1833, William Rowan Hamilton (1805-1865), num artigo apresentado à Academia Irlandesa, quase três séculos depois do surgimento da fórmula de Cardano, formalizou a álgebra dos números complexos. Ele considerou os números complexos $a + bi$ como pares ordenados de números reais (a, b) , e definiu as operações de soma e multiplicação da seguinte maneira: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Assim, o par ordenado $(a, 0)$ representa o número real a , o par $(0, 1)$ o número i e $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$, ou seja, $i^2 = -1$, o que deu uma explicação coerente para $\sqrt{-1}$.

Segundo Stewart (STEWART, 2012) “Do ponto de vista algébrico, disse Hamilton, um ponto no plano pode ser identificado por dois números reais, suas coordenadas (x, y) . Se você observar o diagrama de Wallis (ou o de Wessel, ou o de Argand, ou o de Gauss), vai ver que x é a parte real do número, e que y é sua parte imaginária. Um número complexo $x + iy$ é realmente apenas um par de números reais, (x, y) . Podemos até estabelecer regras para somar e multiplicar esses pares; o principal passo é observar que, como i corresponde ao par $(0, 1)$, então $(0, 1) \cdot (0, 1)$ deve ser igual a $(-1, 0)$.”

2.5 ALÉM DOS COMPLEXOS - A HISTÓRIA DOS QUATÉRNIONS

Após a formalização da álgebra dos números complexos por Hamilton, os matemáticos constatam que a teoria sobre esses números era consistente, as desconfianças sobre a sua existência deixaram de existir e ficou evidente sua importância. Foi o início da Álgebra Moderna, com a idéia de construir novos sistemas numéricos a partir dos antigos.

Os números complexos passaram, a constituir um poderoso método para resolver problemas em diversas áreas. Porém havia um limitador, eles resolviam esses problemas apenas no plano, e não no espaço. Surgiu então a questão: é possível ampliar a teoria dos números complexos para operá-la no espaço?

A maneira como Hamilton abordou os números complexos como pares de números reais, remetia a uma forma de tentar conceber um sistema numérico baseado em tripletos (x, y, z) . Porém ninguém tinha criado uma álgebra para tripletos e Hamilton aceitou o desafio.

Hamilton buscou definir a soma e o produto desses números triplos obedecendo às mesmas regras da soma e da multiplicação dos pares numéricos e esperava que isso levasse a translações e a rotações no espaço, da mesma forma que acontecia com os pares numéricos no plano. Ele observou que $i = \sqrt{-1}$ é um segmento perpendicular a 1, então é normal que haja outra unidade imaginária perpendicular as duas anteriores, e definiu j assumindo que esta também fosse $\sqrt{-1}$, pois isso levaria, quando do produto de 1 por j^2 , a uma rotação de 180° obtendo -1 , porém essa rotação aconteceria no plano XZ, enquanto que o produto de 1 por i^2 numa rotação de 180° no plano XY e desse modo o tripleto tomou a forma $x + yi + zj$.

Estabelecida a forma algébrica do tripleto, Hamilton tenta definir suas operações de forma a manter as mesmas propriedades das operações com pares numéricos e suas interpretações geométricas. No caso da adição de tripletos bastou definir de modo análogo a adição de complexos, não apresentando problemas, ou seja $(x_1 + y_1i + z_1j) + (x_2 + y_2i + z_2j) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i + (z_1 + z_2)j$.

Porém, a multiplicação desses números não resultava, a princípio, num tripleto, pois aparecia um fator ij , ou seja:

$$(x_1 + y_1i + z_1j) \cdot (x_2 + y_2i + z_2j) = \\ (x_1x_2 - y_1y_2 - z_1 \cdot z_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i + (x_1z_2 + x_2z_1)j + (y_1z_2 + y_2z_1)ij.$$

Para tentar resolver esse problema, Hamilton tenta definir o produto ij de várias formas diferentes:

- $ij = \pm 1$

Visto que $i = j = \sqrt{-1}$, Hamilton supõe que o quadrado de ij deve ser igual a 1, pois se $i^2 = -1$ e $j^2 = -1$ tem-se que $(ij)^2 = i^2 \cdot j^2 = (-1)(-1) = 1$ e concluiu que se $(ij)^2 = 1$ então $ij = \pm 1$.

Para testar essa hipótese, Hamilton faz o produto de um tripleto por ele mesmo e obtém:
 $(x_1 + y_1i + z_1j)(x_1 + y_1i + z_1j) = (x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 \pm (2y_1z_1)) + 2x_1y_1i + 2x_1z_1j$.

No entanto esse resultado lhe mostra que escolhendo $ij = \pm 1$ o produto dos tripletos não obedece a lei dos módulos, ou seja, que o módulo do produto de dois fatores deve ser igual ao produto dos módulos desses fatores. Usando essa lei tem-se:

$|x_1 + y_1i + z_1j| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ então, $|(x_1 + y_1i + z_1j)(x_1 + y_1i + z_1j)| = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$
e $|(x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 \pm (2y_1z_1)) + 2x_1y_1i + 2x_1z_1j| = (x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 \pm (2y_1z_1))^2 + (2x_1y_1)^2 + (2x_1z_1)^2$, ou seja, $|(x_1 + y_1i + z_1j)(x_1 + y_1i + z_1j)| \neq |(x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 \pm (2y_1z_1)) + 2x_1y_1i + 2x_1z_1j|$. E essa primeira tentativa esta descartada.

- $ij = 0$

Ao considerar $ij = 0$, o produto $(x_1 + y_1i + z_1j)(x_2 + y_2i + z_2j)$, que é igual a
 $(x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i + (x_1z_2 + x_2z_1)j + (y_1z_2 + y_2z_1)ij$
se torna $(x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i + (x_1z_2 + x_2z_1)j$.

E o módulo da expressão é dado por $(x_1x_2)^2 + (y_1y_2)^2 + (z_1z_2)^2 + (x_1y_2)^2 + (x_2y_1)^2 + (x_1z_2)^2 + (x_2z_1)^2 + 2y_1y_2z_1z_2$. Porém $|(x_1 + y_1i + z_1j)(x_2 + y_2i + z_2j)| = (x_1x_2)^2 + (y_1y_2)^2 + (z_1z_2)^2 + (x_1y_2)^2 + (x_2y_1)^2 + (x_1z_2)^2 + (x_2z_1)^2 + (y_1z_2)^2 + (y_2z_1)^2$.

Assim, também não se obedece a lei dos módulos para esse caso.

E Hamilton continuou por vários anos, sem sucesso, sua pesquisa para resolver o problema do produto ij .

Segundo Stewart (STEWART, 2012) “Somar números triplos era fácil: era possível pegar uma dica a partir de números complexos e simplesmente somar as coordenadas correspondentes. Esse tipo de aritmética, hoje conhecida como adição de vetores, obedece a certas regras interessantes, e só existe uma maneira razoável de fazer isso. O problema era a multiplicação. Mesmo para os números complexos, a multiplicação não funciona como a adição. Você não multiplica dois pares de números reais multiplicando o primeiro e o segundo componentes separadamente. Se fizer isso, acontece um monte de coisas agradáveis, - porém acontecem também duas coisas fatais e desagradáveis. A primeira é que não existe mais uma raiz quadrada de -1 . A segunda é que você pode multiplicar dois números diferentes de 0 e

obter 0. Esses divisores de 0 infernizam todos os métodos algébricos usuais, como as formas de resolver equações. Com os números complexos, podemos superar esse obstáculo escolhendo uma regra menos óbvia para a multiplicação - e foi o que Hamilton fez. Mas ao tentar truque semelhante em triplas de números teve um choque terrível. Por mais que tentasse, ele não conseguia evitar um furo letal. Hamilton conseguiu extrair a raiz quadrada de -1 , mas só introduzindo divisores de 0. Parecia completamente impossível se livrar dos divisores de 0, por mais que ele se empenhasse.”

Procurando resolver esse problema, Hamilton considera um caso particular, aquele em que as coordenadas y_1 e z_1 são proporcionais a y_2 e z_2 , de maneira que os tripletos que serão multiplicados, estejam num mesmo plano que contenha o eixo x , o que significa uma tentativa de reduzi-los ao caso do plano complexo, permitindo compará-los a resultados já conhecidos da multiplicação no plano.

Ele então conclui que o termo $(y_1 \cdot z_2 + y_2 \cdot z_1)ij$, nessa situação, parece ser dispensável. O que o faz conjecturar que o produto ij fosse igual zero. Porém percebe que há outra possibilidade, $y_1 \cdot z_2 + y_2 \cdot z_1 = 0$ e isso implica $ij = -ji$.

Continuando com sua busca, passa a avaliar o caso mais geral do produto. Só que para esse caso, não há maneira em que $y_1 \cdot z_2 + y_2 \cdot z_1$ se anule. Assim, faz uso da **não-comutatividade** ($ij = -ji$) e atribui um nome ao produto ij , chegando à expressão: $(x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 - z_1 \cdot z_2) + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)i + (x_1 \cdot z_2 + x_2 \cdot z_1)j + (y_1 \cdot z_2 - y_2 \cdot z_1)k$. Surge esse quarto termo, que contraria a propriedade comutativa. Seria ele fundamental para a solução do problema? Empregando a lei dos módulos, Hamilton averigua e comprova que de fato é necessária a existência do quarto termo na expressão $(x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 - z_1 \cdot z_2) + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)i + (x_1 \cdot z_2 + x_2 \cdot z_1)j + (y_1 \cdot z_2 - y_2 \cdot z_1)k$. E qual seria então a característica deste novo coeficiente k ? Isso o levou a admitir os tripletos como formas incompletas de $x + yi + zj + wk$ ou (x, y, z, w) que ele chamou de quatérnios e o símbolo k , definindo da mesma maneira como definiu j , um novo tipo de $\sqrt{-1}$, que deveria ser perpendicular simultaneamente a i e j .

Assim, a invenção dos quatérnios propicia uma ruptura entre a álgebra e a aritmética, e estabelece que é possível a concepção de uma teoria algébrica que não leve em conta as propriedades aritméticas, neste caso, a propriedade comutativa da multiplicação. Além disso, para operar no espaço de dimensão três foi preciso empregar uma estrutura do espaço de dimensão quatro. É o surgimento da Álgebra Moderna.

Segundo (EVES, 2011), a grande idéia de Hamilton para a criação dos quatérnios se deu em 16 de outubro de 1843 ao longo do Canal Royal perto de Dublin. Ele próprio, com um canivete, grava numa das pedras da ponte Brougham, a chave para solucionar o problema:

$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Hoje no local há uma placa com os dizeres “Aqui, em 16 de outubro de 1843, enquanto caminhava Sir William Rowan Hamilton teve uma repentina idéia de gênio e descobriu a formula fundamental para a multiplicação de quatérnions $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ e escreveu-a em uma pedra dessa ponte.”, Figura 8.



Figura 8: Placa em homenagem a Hamilton na ponte Broughm e vista atual da ponte sobre o Canal Royal. Fonte:(JP, 2007), (MAPAS, 2013), (MONO42, 2012)

3 TEORIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

3.1 A INSUFICIÊNCIA DOS REAIS

O conjunto dos números complexos se caracteriza como uma ampliação do conjunto dos números reais, surge então a seguinte questão: O que é desejável para ampliar um conjunto numérico?

A resposta a essa pergunta se dá em três itens:

1. manter todas as propriedades do conjunto que foi ampliado;
2. conter todos os números do antigo conjunto, de forma que, as operações definidas nesse novo conjunto, quando feitas sobre os números antigos preserve os resultados das operações antigas;
3. conter os novos números.

Na ampliação do conjunto dos números reais, faz-se necessário uma revisão das propriedades fundamentais que as operações de soma e produto possuem nos reais. Estas propriedades são as seguintes:

- propriedade comutativa da adição e da multiplicação, isto é, seja $u, v \in \mathbb{R}$, então

$$u + v = v + u \quad \text{e} \quad u \cdot v = v \cdot u; \quad (4)$$

- propriedade associativa, isto é, seja u, v e $w \in \mathbb{R}$, então

$$(u + v) + w = u + (v + w) \quad \text{e} \quad (u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w); \quad (5)$$

- propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição, isto é, seja u, v e $w \in \mathbb{R}$, então

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w; \quad (6)$$

- existência de 0 e 1, elementos neutros, em relação a adição e a multiplicação, respectivamente, isto é, seja $u \in \mathbb{R}$, então

$$u + 0 = u \quad \text{e} \quad u \cdot 1 = u; \quad (7)$$

- existência do elemento oposto na adição e o inverso na multiplicação, isto é, $\forall u \in \mathbb{R}$ corresponde um único número real $(-u)$, e se $u \neq 0$ um único real $\frac{1}{u}$ tais que

$$u + (-u) = 0 \quad \text{e} \quad u \cdot \left(\frac{1}{u}\right) = 1. \quad (8)$$

Essas propriedades são fundamentais pois a partir delas pode-se deduzir todas as outras regras de operações aritméticas sobre os números reais.

Por exemplo, de (7) decorre que $(-1) \cdot 1 = -1$ e de (6) e (7) decorre que $a \cdot 0 = 0$, pois

$$\begin{aligned} a + a \cdot 0 &\stackrel{(6)}{=} a \cdot (1 + 0) \\ a + a \cdot 0 &\stackrel{(7)}{=} a \cdot 1 \\ a + a \cdot 0 &\stackrel{(7)}{=} a \\ a + a \cdot 0 &\stackrel{(7)}{=} a + 0 \\ a \cdot 0 &= 0 \end{aligned}$$

Com essas propriedades também é possível mostrar o porque de

$$(-1) \cdot (-1) = 1 \quad (9)$$

Veja primeiro que $(-1) \cdot a = -a$.

De fato $(-1) \cdot a + a \stackrel{(6)}{=} [(-1) + 1] \cdot a \stackrel{(8)}{=} 0 \cdot a = 0$.

Isso prova que $(-1) \cdot a$ é oposto de a . Mas o oposto de a é $-a$ e o oposto é único. Logo $(-1) \cdot a = -a$, usando isso temos que $(-1) \cdot (-1) = -(-1)$. Esse é o oposto de -1 que sabemos que é 1, logo $(-1) \cdot (-1) = 1$

Então, se $u \in \mathbb{R}$ e $u > 0$, tem-se $(-u) < 0$. Logo, pelas propriedades (4),(9) e (7) tem-se que

$(-u)^2 = (-u) \cdot (-u) > 0$, pois

$$\begin{aligned} (-u)^2 &= (-u) \cdot (-u) \\ (-u)^2 &= (-1) \cdot u \cdot (-1) \cdot u \\ (-u)^2 &\stackrel{(4)}{=} (-1) \cdot (-1) \cdot u \cdot u \\ (-u)^2 &\stackrel{(9)}{=} 1 \cdot u^2 \\ (-u)^2 &\stackrel{(7)}{=} u^2 \end{aligned}$$

e como $u^2 > 0 \Rightarrow (-u)^2 > 0$

Disso decorre que o quadrado de um número real u nunca é negativo, ou seja não é possível extrair raiz quadrada de número negativo no conjunto dos números reais.

Desta impossibilidade, faz surgir a necessidade de ampliar o conjunto dos números reais. Define-se então um novo conjunto, cujos elementos, os quais serão chamados de números complexos, possam ser somados e multiplicados e nos quais seja possível extrair a raiz quadrada de um número negativo. Além disso, as operações de adição e multiplicação, quando feitas sobre os reais, que também devem ser elementos desse conjunto, devem ter o mesmo resultado que as operações já conhecidas.

3.2 O CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Definição 3.1. *O conjunto dos números complexos é o conjunto*

$$\mathbb{C} = \{a + bi: a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i \text{ satisfaz } i^2 = -1\}$$

onde a é chamado de parte real, b parte imaginária e i unidade imaginária do complexo $a + bi$, munido das seguintes operações:

- *soma: Seja $z = a + bi$ e $w = c + di \in \mathbb{C}$, define-se sua soma por*

$$z + w = (a + bi) + (c + di)$$

$$z + w = (a + c) + (b + d)i \quad (10)$$

- *produto: Seja $z = a + bi$ e $w = c + di \in \mathbb{C}$, define-se seu produto por*

$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di)$$

$$z \cdot w = (ac - bd) + (bc + ad)i. \quad (11)$$

Isto é:

- a soma de dois números complexos é um complexo cuja parte real é a soma das partes reais das parcelas e cuja parte imaginária é a soma das partes imaginárias das parcelas;
- o produto de dois números complexos é o resultado do desenvolvimento de $(a + bi)(c + di)$, aplicando a propriedade distributiva e levando em conta que $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= a(c + di) + bi(c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$

Além disso, dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, são iguais se, e somente se, $a = c$ e $b = d$, ou seja todo número complexo pode ser escrito de maneira única. Assim, as operações definidas em (10) e (11) possuem das seguintes propriedades:

P.1 Propriedade comutativa em relação a adição:

$$\boxed{\text{Se } z_1 \text{ e } z_2 \in \mathbb{C} \text{ então } z_1 + z_2 = z_2 + z_1}.$$

Demonstração:

Seja $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ então

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di)$$

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

$$z_1 + z_2 = (c + a) + (d + b)i$$

$$z_1 + z_2 = (c + di) + (a + bi)$$

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1.$$

P.2 Propriedade comutativa em relação a multiplicação:

$$\boxed{\text{Se } z_1 \text{ e } z_2 \in \mathbb{C} \text{ então } z_1 z_2 = z_2 z_1}.$$

Demonstração:

Seja $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ então

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di)$$

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

$$z_1 z_2 = (ca - db) + (cb + da)i$$

$$z_1 z_2 = (c + di)(a + bi)$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1.$$

P.3 Propriedade associativa em relação a adição:

$$\boxed{\text{Se } z_1, z_2 \text{ e } z_3 \in \mathbb{C} \text{ então } (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \text{ e } (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)} .$$

*Demonstração:*Seja $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ e $z_3 = e + fi$, com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ então

$$(z_1 + z_2) + z_3 = [(a + bi) + (c + di)] + (e + fi)$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = [(a + c) + (b + d)i] + (e + fi)$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = ((a + c) + e) + ((b + d) + f)i$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = (a + (c + e)) + (b + (d + f))i$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = (a + bi) + [(c + e) + (d + f)i]$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = (a + bi) + [(c + di) + (e + fi)]$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$$

P.4 Propriedade associativa em relação a multiplicação:

$$\boxed{\text{Se } z_1, z_2 \text{ e } z_3 \in \mathbb{C} \text{ então } (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)} .$$

*Demonstração:*Seja $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ e $z_3 = e + fi$, com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ então

$$(z_1 z_2) z_3 = [(a + bi)(c + di)](e + fi)$$

$$(z_1 z_2) z_3 = [(ac - bd) + (bc + ad)i](e + fi)$$

$$(z_1 z_2) z_3 = [(ac - bd)e - (bc + ad)f] + [(bc + ad)e + (ac - bd)f]i$$

$$(z_1 z_2) z_3 = [(ace - bde) - (bcf + adf)] +$$

$$+ [(bce + ade) + (acf - bdf)]i$$

$$(z_1 z_2) z_3 = (ace - bde - bcf - adf) + (bce + ade + acf - bdf)i$$

$$(z_1 z_2) z_3 = (ace - adf) - (bde + bcf) + (bce - bdf)i +$$

$$+ (ade + acf)i$$

$$(z_1 z_2) z_3 = a(ce - df) - b(de + cf) + [b(ce - df) + a(de + cf)]i$$

$$(z_1 z_2) z_3 = (a + bi)[(ce - df) + (de + cf)]$$

$$(z_1 z_2) z_3 = (a + bi)[(c + di)(e + fi)]$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3).$$

P.5 Propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição

$$\boxed{\text{Se } z_1, z_2 \text{ e } z_3 \in \mathbb{C} \text{ então } z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3} .$$

*Demonstração:*Seja $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ e $z_3 = e + fi$, com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ então

$$\begin{aligned}
z_1(z_2 + z_3) &= (a + bi)[(c + di) + (e + fi)] \\
z_1(z_2 + z_3) &= (a + bi)[(c + e) + (d + f)i] \\
z_1(z_2 + z_3) &= [a(c + e) - b(d + f)] + [a(d + f) + b(c + e)]i \\
z_1(z_2 + z_3) &= [ac + ae - bd - bf] + [ad + af + bc + be]i \\
z_1(z_2 + z_3) &= (ac - bd) + (ae - bf) + (ad + bc)i + (af + be)i \\
z_1(z_2 + z_3) &= [(ac - bd) + (ad + bc)i] + [(ae - bf) + (af + be)i] \\
z_1(z_2 + z_3) &= [(a + bi)(c + di)] + [(a + bi)(e + fi)] \\
z_1(z_2 + z_3) &= z_1z_2 + z_1z_3.
\end{aligned}$$

P.6 Existência de 0, elemento neutro para a adição

$$\boxed{\text{Existe } n_a, n_a \in \mathbb{C}, \text{ tal que } z + n_a = z, \forall z \in \mathbb{C}}.$$

Demonstração:

Seja $z = a + bi$, e $n_a = x + yi$ com a e $b \in \mathbb{R}$ então se $z + n_a = z$ tem-se

$$(a + bi) + (x + yi) = a + bi$$

$$(a + x) + (b + y)i = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} a + x = a \\ b + y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Portanto existe $n_a = 0 + 0i = 0$, chamado elemento neutro para a adição.

P.7 Existência do elemento oposto aditivo

$$\boxed{\text{Para qualquer } z \in \mathbb{C} \text{ existe } (-z) \in \mathbb{C} \text{ tal que } z + (-z) = n_a}.$$

Demonstração:

Seja $z = a + bi$ e $(-z) = x + yi$ com $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, então $z + (-z) = n_a$

$$(a + bi) + (x + yi) = 0 + 0i$$

$$(a + x) + (b + y)i = 0 + 0i \Leftrightarrow \begin{cases} a + x = 0 \\ b + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \\ y = -b \end{cases}.$$

Portanto se $z = a + bi$ existe $(-z) = -a - bi$, chamado oposto aditivo.

P.8 Existência de 1, elemento neutro para a multiplicação

$$\boxed{\text{Existe } n_m, n_m \in \mathbb{C}, \text{ tal que } zn_m = z, \forall z \in \mathbb{C}}.$$

Demonstração:

Seja $z = a + bi$, e $n_m = x + yi$ com a e $b \in \mathbb{R}$ então se $z.n_m = z$ tem-se

$$(a + bi)(x + yi) = a + bi$$

$$(ax - by) + (bx + ay)i = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} ax - by = a \\ bx + ay = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Portanto existe $n_m = 1 + 0i = 1$, chamado elemento neutro para a multiplicação.

P.9 Existência do inverso multiplicativo

Para qualquer $z \in \mathbb{C}$ e $z \neq 0$ existe $z^{-1} \in \mathbb{C}$ e $z^{-1} \neq 0 + 0i$ tal que $z \cdot z^{-1} = n_m = 1$.

Demonstração:

Seja $z = a + bi$ e $z^{-1} = x + yi$ com $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, então $zz^{-1} = n_m$

$$(a + bi) + (x + yi) = 1 + 0i$$

$$(ax - by) + (bx + ay)i = 1 + 0i \Leftrightarrow \begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{a^2 + b^2} \\ y = \frac{-b}{a^2 + b^2} \end{cases}.$$

Isso implica que $a^2 + b^2 \neq 0$, logo $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, e assim se $z = a + bi$ existe $z^{-1} \neq 0 + 0i$, chamado inverso multiplicativo, tal que

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i. \quad (13)$$

Definição 3.2. Sendo $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$, defini-se a subtração de dois números complexos como $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$, ou seja, $z_1 - z_2 = (a + bi) + (-c - di) = (a - c) + (b - d)i$.

Observações:

- A expressão $z = a + b \cdot i$, $\{a, b\} \in \mathbb{R}$ é denominada forma algébrica do número complexo, além disso a é chamada de parte real e b parte imaginária do número complexo, sendo que são representadas por $a = \text{Re}\{z\}$ e $b = \text{Im}\{z\}$.
- O número $z = a + b \cdot i$, $\{a, b\} \in \mathbb{R}$, é real se, e somente se, $b = 0$.
- O número $z = a + b \cdot i$, $\{a, b\} \in \mathbb{R}$, é imaginário puro se, e somente se, $a = 0$.

3.2.1 POTÊNCIAS DE I COM EXPOENTES INTEIROS

Teorema 3.3. Existem quatro e somente quatro valores de potências de i com expoentes inteiros. São eles $1, i, -1, -i$.

Demonstração:

De um modo geral, para $n \in \mathbb{Z}$ tem-se que $n = 2q + r$, com $q \in \mathbb{N}$ e $r \in \{0, 1\}$. Agora pela definição de número complexo, i satisfaz $i^2 = -1$, assim:

- quando $r = 0$, $i^n = i^{2q} = (i^2)^q = (-1)^q$.
 - (a) se q é par, $i^n = 1$;
 - (b) se q é ímpar, $i^n = -1$;
- quando $r = 1$, $i^n = i^{2q+1} = (i^2)^q \cdot i^1 = (-1)^q \cdot i$.
 - (a) se q é par, $i^n = 1 \cdot i = i$;
 - (b) se q é ímpar, $i^n = -1 \cdot i = -i$.

Exemplo 3.4. : Calculando valores de i^n tem-se:

$$i^0 = 1,$$

$$i^1 = i,$$

$$i^2 = -1,$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i,$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1.$$

Porém qualquer $n \in \mathbb{Z}$ pode ser escrito como $n = 4 \cdot q + r$, com $q \in \mathbb{Z}$ e $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, logo $i^n = i^{4 \cdot q + r} = i^{4 \cdot q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r$.

Como consequência, para calcular as potências i^n com $n \in \mathbb{Z}$, divide-se n por 4, e obter como resto um número $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Tem-se então $i^n = i^r$.

Exemplo 3.5. :

a) n positivo:

$$\text{como } 38 = 4 \cdot 9 + 2, \text{ então } i^{38} = i^2 = -1;$$

b) n negativo:

como $-45 = 4 \cdot (-12) + 3$, então $i^{-45} = i^3 = -i$. Esse cálculo pode ser feito seguinte forma.

$$\text{Como } 45 = 4 \cdot 11 + 1 \text{ então } i^{-45} = \frac{1}{i^{45}} = \frac{1}{i^1} = \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i.$$

Agora, qualquer número inteiro, também pode ser escrito como $100k + s$, com $0 \leq |s| \leq 99$ e $s, k \in \mathbb{Z}$, sendo assim $i^n = i^{100k+s} = i^{4 \cdot 25 \cdot k} \cdot i^s = (i^4)^{25 \cdot k} \cdot i^s = 1^{25 \cdot k} \cdot i^s = 1^k \cdot i^s = i^s$.

Como consequência, para calcular as potências i^n com $n \in \mathbb{Z}$, onde $|n| \geq 100$ basta dividir o número formado pelos dois últimos algarismos, e de mesmo sinal que n , por 4, e obter como resto um número $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Tem-se então $i^n = i^s = i^r$.

Exemplo 3.6. :

a) Para $n > 0$, $n = 46798$.

Como $46798 = 100 \cdot 467 + 98$, então $i^{46798} = i^{98}$, mas $98 = 4 \cdot 24 + 2$ logo $i^{98} = i^2 = -1$.

b) Para $n < 0$, $n = -2345$.

Como $-2345 = -23 \cdot 100 + (-45)$, então $i^{-2345} = i^{-45}$, mas $-45 = 4 \cdot (-12) + 3$, logo $i^{-45} = i^3 = -i$. Esse cálculo pode ser feito seguinte forma: como $45 = 4 \cdot 11 + 1$ então $i^{-45} = \frac{1}{i^{45}} = \frac{1}{i^1} = \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = -i$.

3.3 REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Freqüentemente é apropriado representar geometricamente o número complexo $z = a + bi$ como sendo ponto de um plano cujas coordenadas são a e b , ou seja (a, b) , pois cada número complexo corresponde a um único ponto, e reciprocamente, cada ponto corresponde a um único número complexo.

Demonstração:

Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $f(x + yi) = (x, y)$. Então tem-se que:

- (I) se $x_1 + y_1i \neq x_2 + y_2i \Rightarrow x_1 \neq x_2$ ou $y_1 \neq y_2$
 se $x_1 + y_1i \neq x_2 + y_2i \Rightarrow (x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ e f é injetora;
- (II) para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ existe o número complexo $x + yi$ tal que $f(x + yi) = (x, y)$ logo f é sobrejetora

Então de (I) e (II) f é bijetora, isto é, cada número complexo está associado a um único ponto do plano \mathbb{R}^2 e cada ponto do plano \mathbb{R}^2 está associado a um único número complexo, Figura 9.

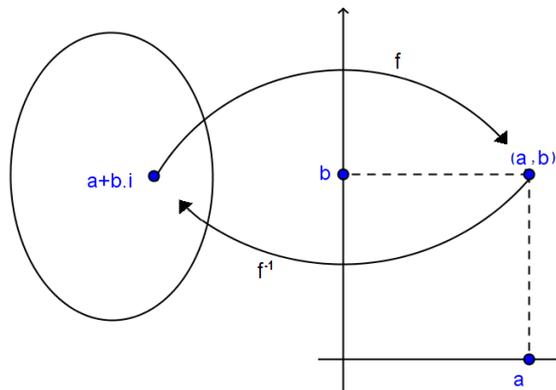


Figura 9: Representação de um número complexo como par ordenado.

Sendo assim, o conjunto dos números complexos é representado geometricamente no plano \mathbb{R}^2 e cada ponto desse plano está associado a um único número complexo, então neste contexto chama-se o plano cartesiano de plano complexo ou plano de Argand-Gauss, o eixo x de eixo real e o eixo y de eixo imaginário.

Por outro lado, $z = a + bi$ pode ser representado como um vetor de origem O do sistema de coordenadas e extremidade em (a, b) , Figura 10.

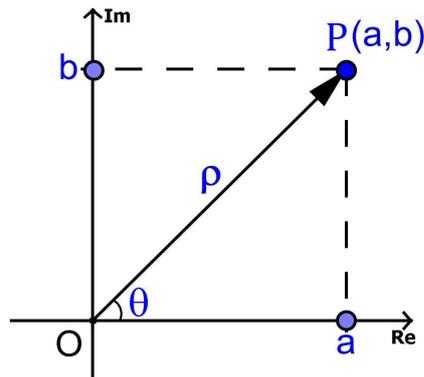


Figura 10: Representação de um número complexo $z = a + bi$ através do vetor \overline{OP} .

Então, conforme (10), a soma de dois números complexos $z_1 = (a_1, b_1)$ e $z_2 = (a_2, b_2)$ é dada por $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$, e isso por sua vez corresponde a um vetor cujas componentes é igual a soma das componentes dos vetores dados, Figura 11.

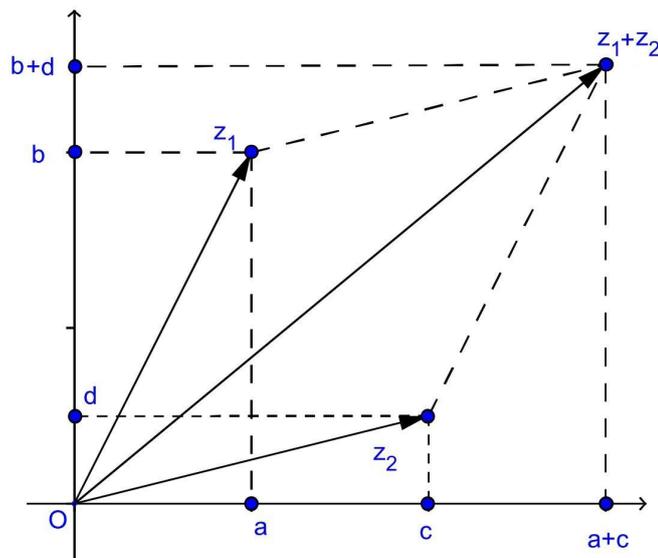


Figura 11: Representação gráfica da soma de dois números complexos.

3.3.1 MÓDULO E CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Definição 3.7. O módulo de um número complexo $z = a + bi$ é definido como

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Geometricamente, o número real ρ nos dá o comprimento do vetor definido por z no plano complexo, ou seja a distância da origem desse plano ao ponto (a,b) , Figura 12.

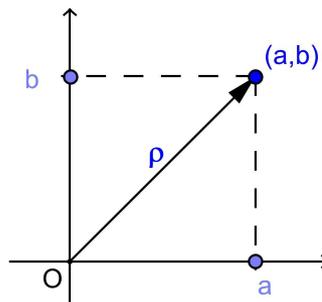


Figura 12: Módulo de um número complexo (ρ).

Definição 3.8. O conjugado de um número complexo $z = a + bi$ é definido como

$$\bar{z} = a - bi.$$

Geometricamente, o conjugado de um número complexo é representado através da reflexão desse número em relação ao eixo real do plano complexo, Figura 13.

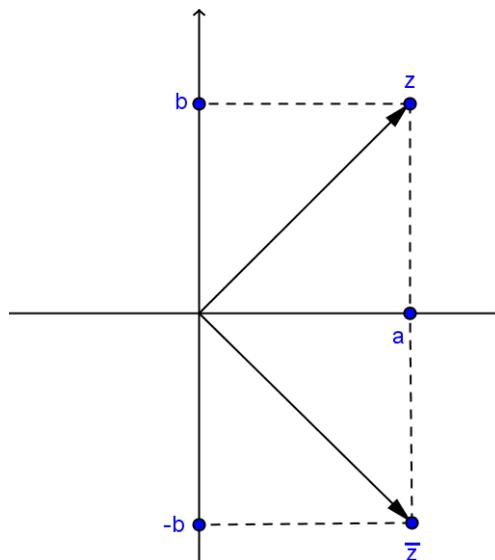


Figura 13: Representação do conjugado de um número complexo.

Definição 3.9. O quociente de um número complexo z_1 por um número complexo não nulo z_2 é o número complexo z_3 se e somente se, $z_2 z_3 = z_1$ assim, tem-se que $z_3 = \frac{z_1}{z_2} \Leftrightarrow z_2 z_3 = z_1$.

Como da propriedade **P.9** tem-se que para todo $z \in \mathbb{C}$, $z z^{-1} = 1$, logo uma consequência da definição (3.9) é que

$$z^{-1} = \frac{1}{z}. \quad (14)$$

3.3.1.1 PROPRIEDADE DO QUOCIENTE DE UM NÚMERO COMPLEXO

Seja z_1, z_2 e $z_3 \in \mathbb{C}$, tais que $z_2 \neq 0$ e $z_3 \neq 0$, tem-se que $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_3}$

Demonstração:

Seja k o quociente de z_1 por z_2 , então:

$$\frac{z_1}{z_2} = k \Leftrightarrow z_1 = k \cdot z_2 \Leftrightarrow z_1 z_3 = k \cdot z_2 \cdot z_3 \Leftrightarrow \frac{z_1 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_3} = k.$$

Assim

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_3}. \quad (15)$$

Como consequência dessa propriedade, a divisão de um complexo z_1 por outro complexo $z_2 \neq 0$ pode ser realizada por:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}}.$$

3.3.1.2 RELAÇÃO ENTRE O MÓDULO E O CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Seja $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então pela definição (3.8) tem-se $\bar{z} = a - bi$, assim:

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi)$$

$$z\bar{z} = a^2 - (bi)^2$$

$$z\bar{z} = a^2 + b^2$$

$$z\bar{z} = |z|^2. \quad (16)$$

Agora de (14) tem-se que

$$z^{-1} = \frac{1}{z}, \quad \text{por (15) segue que}$$

$$z^{-1} = \frac{1 \cdot \bar{z}}{z\bar{z}}, \quad \text{e por (16) segue que}$$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$z^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i,$$

análogo ao mostrado em (13).

3.3.1.3 PROPRIEDADES DO CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO

P.Conj-1 $\overline{\bar{z}} = z$.

Demonstração:

$$\bar{z} = \overline{(a + bi)}$$

$$\bar{z} = \overline{a - bi}$$

$$\bar{z} = a + bi$$

$$\bar{z} = z$$

P.Conj-2 $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$.

Demonstração:

Seja $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, então

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{(a + bi) \pm (c + di)}$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{(a \pm c) + (b \pm d)i}$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = (a \pm c) - (b \pm d)i$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = (a - bi) \pm (c - di)$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$$

P.Conj-3 $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

Demonstração:

Seja $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, então

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(a + bi)(c + di)}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i}$$

$$\overline{z_1 z_2} = (ac - bd) - (ad + bc)i$$

$$\overline{z_1 z_2} = (ac - bd) + (-ad - bc)i$$

$$\overline{z_1 z_2} = (a - bi)(c - di)$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(a + bi)(c + di)}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1 z_2}$$

P.Conj-4 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$

Demonstração:

Seja $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, então

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{a + bi}{c + di}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)}\right)}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}\right)}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)i}{c^2 + d^2}\right)}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} - \frac{(bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{(ac + bd) - (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{(ac + bd) + (-bc + ad)i}{(c + di)(c - di)}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{(a-bi)(c+di)}{(c-di)(c+di)}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{(a-bi)}{(c-di)}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

P.Conj-5 $z + \bar{z} = 2\text{Re}\{z\}$.

Demonstração:

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi)$$

$$z + \bar{z} = 2a$$

$$z + \bar{z} = 2\text{Re}\{z\}$$

P.Conj-6 $z - \bar{z} = 2\text{Im}\{z\}$.

Demonstração:

$$z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi)$$

$$z - \bar{z} = 2bi$$

$$z - \bar{z} = 2\text{Im}\{z\}$$

P.Conj-7 Um número complexo z é real se e somente se $\bar{z} = z$

Demonstração:

(a) Seja z um número complexo real, logo $z = a + 0i = a$, assim o complexo conjugado de z é $\bar{z} = a - 0i = a$ ou seja se z é real, então $\bar{z} = z$.

(b) Por outro lado se \bar{z} um número complexo real, logo $\bar{z} = a + 0i = a$, agora por (**P.Conj-1**) $z = \bar{\bar{z}} = a - 0i = a$ ou seja se \bar{z} é real, então $z = \bar{z}$.

De (a) e (b) conclui-se que $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$.

P.Conj-8 z é um número imaginário puro se e somente se $\bar{z} = -z$.

Demonstração:

(a) Seja z um número imaginário puro, logo $z = 0 + bi = bi$, assim o complexo conjugado de z é $\bar{z} = 0 - bi = -bi$ ou seja se z é imaginário puro, então $\bar{z} = -z$.

(b) por outro lado se \bar{z} um número imaginário puro, logo $\bar{z} = 0 + bi = bi$, agora por (P.Conj-1) $z = \overline{\bar{z}} = 0 - bi = -bi = -\bar{z}$ o que implica em $-z = \bar{z}$ ou seja se \bar{z} é imaginário puro, então $-z = \bar{z}$.

De (a) e (b) conclui-se que z é um número imaginário puro se e somente se $\bar{z} = -z$.

3.3.1.4 PROPRIEDADES DO MÓDULO DE UM NÚMERO COMPLEXO

P.Mod-1 $|\bar{z}| = |z|$.

Demonstração:

Seja $z = a + bi$, então

$$|\bar{z}| = |(a + bi)|$$

$$|\bar{z}| = |a - bi|$$

$$|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2}$$

$$|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|\bar{z}| = |a + bi|$$

$$|\bar{z}| = |z|.$$

P.Mod-2 $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

Demonstração:

Seja $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, então

$$|z_1 z_2| = |(a + bi)(c + di)|$$

$$|z_1 z_2| = |(ac - bd) + (bc + ad)i|$$

$$|z_1 z_2| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2}$$

$$|z_1 z_2| = \sqrt{a^2 c^2 - 2acbd + b^2 d^2 + b^2 c^2 + 2abcd + a^2 d^2}$$

$$|z_1 z_2| = \sqrt{a^2 c^2 + a^2 d^2 + b^2 d^2 + b^2 c^2}$$

$$|z_1 z_2| = \sqrt{a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)}$$

$$|z_1 z_2| = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$$

$$|z_1 z_2| = \sqrt{(a^2 + b^2)} \sqrt{(c^2 + d^2)}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|.$$

P.Mod-3 $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ se $z_2 \neq 0$.

Demonstração:

Seja $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com $c \neq 0$ ou $d \neq 0$, então $z_2 \neq 0$ e $|z_2| \neq 0$ segue que:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{a + bi}{c + di} \right|$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{a + bi}{c + di} \frac{c - di}{c - di} \right|$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \right|$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}i \right|$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \sqrt{\left(\frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} \right)^2 + \left(\frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2} \right)^2}$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \sqrt{\frac{a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2}{(c^2 + d^2)^2}}$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \sqrt{\frac{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 + b^2c^2}{(c^2 + d^2)^2}}$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \sqrt{\frac{a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)}{(c^2 + d^2)^2}}$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}{(c^2 + d^2)^2}}$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)}{(c^2 + d^2)}}$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{\sqrt{(c^2 + d^2)}}$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \text{ com } z_2 \neq 0.$$

P.Mod-4 $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Demonstração:

Como a soma e a diferença de dois complexos podem ser obtidos somando ou subtraindo

os vetores que os representam, Figura 11, então se os vetores que correspondem a z_1 e z_2 não tem a mesma direção, logo sua soma forma um triângulo com lados $|z_1|$, $|z_2|$ e $|z_1 + z_2|$. Mas em um triângulo cada lado é menor que a soma dos outros dois e maior que a diferença dos outros dois. Assim tem-se: $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

P.Mod-5 $\operatorname{Re}\{z\} \leq |\operatorname{Re}\{z\}| \leq |z|$.

Demonstração:

Seja $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $\operatorname{Re}\{z\} = a$. Segue que:

$$(i) \begin{cases} a \geq 0 \Rightarrow a = |a| \\ a \leq 0 \Rightarrow a < |a| \end{cases} \Rightarrow a \leq |a|.$$

$$(ii) a^2 \leq a^2 + b^2 \Rightarrow \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow |a| \leq |z|.$$

De (i) e (ii) vem que $\operatorname{Re}\{z\} \leq |\operatorname{Re}\{z\}| \leq |z|$.

P.Mod-6 $\operatorname{Im}\{z\} \leq |\operatorname{Im}\{z\}| \leq |z|$.

Demonstração:

Seja $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $\operatorname{Im}\{z\} = b$. Segue que:

$$(i) \begin{cases} b \geq 0 \Rightarrow b = |b| \\ b \leq 0 \Rightarrow b < |b| \end{cases} \Rightarrow b \leq |b|.$$

$$(ii) b^2 \leq a^2 + b^2 \Rightarrow \sqrt{b^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow |b| \leq |z|.$$

De (i) e (ii) vem que $\operatorname{Im}\{z\} \leq |\operatorname{Im}\{z\}| \leq |z|$.

3.3.2 RAÍZ QUADRADA DE UM NÚMERO COMPLEXO

Antes de propriamente mostrar como extrair a raiz quadrada de um número complexo, será mostrado como transformar um número escrito na forma $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$, que é chamado de radical duplo, na soma (ou diferença) de dois radicais simples, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$.

- $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$;
- $A \pm \sqrt{B} = (\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2$;
- $A \pm \sqrt{B} = a \pm 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \Rightarrow \begin{cases} A = a + b \\ \sqrt{B} = 2\sqrt{ab} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = A \\ ab = \frac{B}{4} \end{cases}$.

Assim os valores de a e b são as raízes da equação $x^2 - Ax + \frac{B}{4} = 0$ que são $x = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2}$, então:

$$\boxed{\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.} \quad (17)$$

Agora extrair a raiz quadrada de um número complexo implica em ter um número $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^2 = z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Conseqüentemente $w = \pm \sqrt{z}$, ou seja, haverá duas raízes quadradas de um número complexo, então $\sqrt{z} = \sqrt{a \pm bi} = \sqrt{a \pm b\sqrt{-1}} = \sqrt{a \pm \sqrt{-b^2}}$. Assim utilizando (17) tem-se que

$$\begin{aligned} \sqrt{z} = \sqrt{a \pm b\sqrt{-1}} &= \sqrt{a \pm \sqrt{-b^2}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - (-b^2)}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - (-b^2)}}{2}} \\ \sqrt{z} = \sqrt{a \pm b\sqrt{-1}} &= \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \\ \sqrt{z} = \sqrt{a \pm b\sqrt{-1}} &= \sqrt{\frac{a + |z|}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - |z|}{2}} \\ \sqrt{z} = \sqrt{a \pm b\sqrt{-1}} &= \sqrt{\frac{|z| + a}{2}} \pm \sqrt{\frac{-1 \cdot (|z| - a)}{2}} \\ \sqrt{z} = \sqrt{a \pm b\sqrt{-1}} &= \sqrt{\frac{|z| + a}{2}} \pm \sqrt{\frac{|z| - a}{2}}i. \end{aligned}$$

Por fim,

$$\boxed{w = \pm \left(\sqrt{\frac{|z| + a}{2}} \pm \sqrt{\frac{|z| - a}{2}}i \right).} \quad (18)$$

Exemplo 3.10. $\sqrt{5 + 12i} = \pm \left(\sqrt{\frac{13+5}{2}} + \sqrt{\frac{13-5}{2}}i \right) = \pm \left(\sqrt{9} + \sqrt{4}i \right) = \pm(3 + 2i).$

Exemplo 3.11. $\sqrt{3 - 4i} = \pm \left(\sqrt{\frac{5+3}{2}} - \sqrt{\frac{5-3}{2}}i \right) = \pm \left(\sqrt{4} - \sqrt{1}i \right) = \pm(2 - i).$

Exemplo 3.12. Resolver a equação $x^2 - (4 - 2i)x + (11 - 10i) = 0$.

Cálculo do discriminante Δ

$$\begin{aligned} \Delta &= [-(4 - 2i)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (11 - 10i) & \sqrt{\Delta} &= \pm \left(\sqrt{-32 + 24i} \right) \\ \Delta &= 12 - 16i - 44 + 40i & \sqrt{\Delta} &= \pm \left(\sqrt{\frac{40-32}{2}} + \sqrt{\frac{40+32}{2}}i \right) \\ \Delta &= -32 + 24i & \sqrt{\Delta} &= \pm \left(\sqrt{4} + \sqrt{36}i \right) \\ & & \sqrt{\Delta} &= \pm \left(2 + 6i \right) \end{aligned}$$

$$x = \frac{4 - 2i \pm (2 + 6i)}{2} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{6 + 4i}{2} = 3 + 2i \\ x_2 &= \frac{2 - 8i}{2} = 1 - 4i \end{aligned}$$

3.4 FORMA POLAR OU FORMA TRIGONOMÉTRICA

Definição 3.13. Seja $z = a + bi$, com a e $b \in \mathbb{R}$ um número complexo não nulo. Como z pode ser representado como um vetor de origem O do plano complexo e extremidade em $P(a,b)$, defini-se o argumento de um número complexo, Figura 14, como qualquer ângulo θ que o vetor \overrightarrow{OP} forma com o semi-eixo positivo do eixo real.

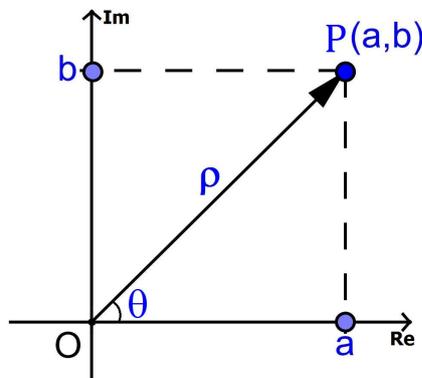


Figura 14: Representação gráfica do argumento de um número complexo (θ).

Se a medida em radianos do ângulo θ estiver no intervalo de $[0, 2\pi)$, então θ é chamado de argumento principal e é denotado por $\arg(z)$. Todo número complexo tem um infinidade de argumentos, Figura 15, que diferem-se entre si por um múltiplo de 2π .

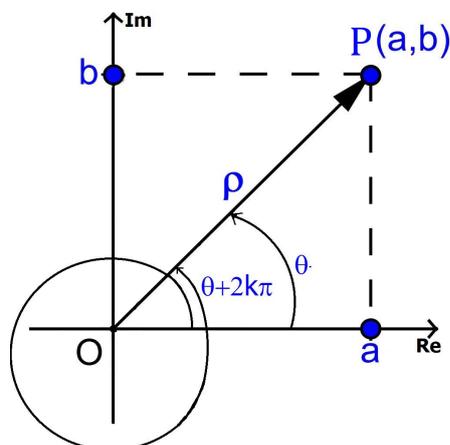


Figura 15: $\text{Arg}(z) = (\theta)$, argumento de $z = a + bi$ e representação dos múltiplos θ .

Seendo θ um argumento de $z = a + bi$ tem-se o triângulo retângulo de vértices $(0,0)$, $(0,a)$ e (a,b) então $a = \rho \cos \theta$ e $b = \rho \sin \theta$, Figura 16, e z passa a ser escrito na sua forma polar ou trigonométrica: $z = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$. Porém, qualquer $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ também satisfaz essa expressão, logo um número complexo tem infinitas representações na forma polar dadas por:

$$z = \rho [\cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi)], \text{ com } k \in \mathbb{Z} \quad (19)$$

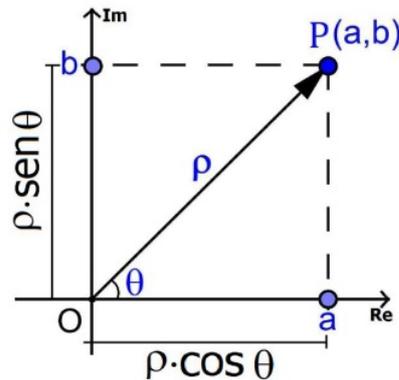


Figura 16: Gráfico representativo da forma trigonométrica de $z = a + bi$.

3.4.1 OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

3.4.1.1 MULTIPLICAÇÃO

Teorema 3.14. Se $z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ dois números complexos representados na sua forma trigonométrica, então: $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$.

Demonstração:

Seja z_1 e $z_2 \in \mathbb{C}$, com $z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, então:

$$z_1 z_2 = [\rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)][\rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)]$$

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)][(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)]$$

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 \{[(\cos \theta_1 \cos \theta_2) - (\sin \theta_1 \sin \theta_2)] + [(\sin \theta_1 \cos \theta_2) + (\sin \theta_2 \cos \theta_1)]i\}.$$

Usando as identidades trigonométricas

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad (20)$$

e

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a) \quad (21)$$

obtem-se

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)].$$

3.4.1.2 DIVISÃO

Teorema 3.15. Se $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$ dois números complexos representados na sua forma trigonométrica, então: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$.

Demonstração:

Seja z_1 e $z_2 \in \mathbb{C}$, com $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$, então:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{[\rho_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)][\rho_2(\cos\theta_2 - i\operatorname{sen}\theta_2)]}{(\rho_2)^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_2)^2} [(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)][(\cos\theta_2 - i\operatorname{sen}\theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \left([(\cos\theta_1 \cos\theta_2) + (\operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2)] + [(\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2) - (\operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_1)]i \right).$$

Usando as identidades trigonométricas

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$$

e

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(b)\cos(a)$$

tem-se

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)].$$

3.4.1.3 POTENCIAÇÃO

Teorema 3.16 (Primeira fórmula de De Moivre). *Se $z = \rho(\cos\theta + isen\theta)$ um número complexo representado na sua forma trigonométrica e n é um inteiro, então:*

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + isen(n\theta)] \quad (22)$$

Demonstração:

Primeira parte (Demonstração por indução):

Para $n \geq 1$ tem-se que:

- *para $n = 1$, a igualdade se verifica, pois*
 $z^1 = z = \rho(\cos\theta + isen\theta) = \rho^1[\cos(1 \cdot \theta) + isen(1 \cdot \theta)];$
- *supondo que é válida para n , $z^n = \rho^n \cdot [\cos(n\theta) + isen(n\theta)].$*

Sabe-se que $z^{n+1} = z^n z$ e usando a hipótese de indução tem-se:

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= (\rho^n[\cos(n\theta) + isen(n\theta)])(\rho[\cos\theta + isen\theta]) \\ z^{n+1} &= \rho^n \rho [\cos(n\theta) + isen(n\theta)][(\cos\theta + isen\theta)] \\ z^{n+1} &= \rho^{n+1} [\cos(n\theta)\cos(\theta) - sen(n\theta)sen(\theta)] + \\ &\quad + i[\cos(n\theta)sen(\theta) + sen(n\theta)\cos(\theta)]. \end{aligned}$$

Usando (20) e (21) tem-se

$$z^{n+1} = \rho^{n+1} [\cos[(n+1)\theta] + isen[(n+1)\theta]].$$

Concluindo a demonstração

Segunda parte:

Para $n < 0$ tem-se que:

$$z^n = \frac{1}{z^{-n}}.$$

Como $-n > 0$, e pelo que foi provado na primeira parte, segue que:

$$\begin{aligned} z^n &= \frac{1}{\rho^{-n}[\cos(-n\theta) + isen(-n\theta)]} \\ z^n &= \frac{1[\cos(0) + isen(0)]}{\rho^{-n}[\cos(-n\theta) + isen(-n\theta)]} \\ z^n &= \frac{1}{\rho^{-n}}[\cos(0 - (-n\theta)) + isen(0 - (-n\theta))] \\ z^n &= \rho^n[\cos(n\theta) + isen(n\theta)]. \end{aligned}$$

Concluindo a demonstração.

Terceira parte: Para $n = 0$ a fórmula é válida, pois: $z^0 = 1 = \rho^0[\cos(0) + isen(0)]$.

Assim, conclui-se a demonstração.

3.4.1.4 RADICIAÇÃO

Definição 3.17. Seja z um número complexo, chama-se raiz enésima de z , e denota-se $\sqrt[n]{z}$, a um número complexo w , tal que $w^n = z$, ou seja

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = w \Leftrightarrow w^n = z}$$

Teorema 3.18 (Segunda fórmula de De Moivre). Se $z = \rho(\cos\theta + isen\theta)$ um número complexo representado na sua forma trigonométrica e n é um inteiro tal que $n \geq 2$, então existem n raízes enésimas de z dadas por:

$$\boxed{w_{k+1} = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right], \text{ com } k \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \leq k < n.} \quad (23)$$

Demonstração:

Seja $z = \rho(\cos\theta + isen\theta)$ e $w_{k+1} = r[\cos(\phi) + isen(\phi)]$ dois números complexos na forma trigonométrica, tal que $w_{k+1} = \sqrt[n]{z}$, assim pela definição 3.17 tem-se que:

$$\begin{aligned} (r[\cos(\phi) + isen(\phi)])^n &= \rho(\cos\theta + isen\theta) \\ r^n[\cos(n\phi) + isen(n\phi)] &= \rho(\cos(\theta + 2k\pi) + isen(\theta + 2k\pi)), \text{ com } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} r^n = \rho \\ n\phi = \theta + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Logo,

$$w_{k+1} = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right], \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Atribuindo valores a k , obtém-se:

- para $k = 0$: $w_1 = \sqrt[n]{\rho} [\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)]$
- para $k = 1$: $w_2 = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi}{n}\right) \right]$
- para $k = 2$: $w_3 = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos\left(\frac{\theta + 4\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 4\pi}{n}\right) \right]$
- para $k = 3$: $w_4 = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos\left(\frac{\theta + 6\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 6\pi}{n}\right) \right]$
- \vdots
- para $k = n - 1$: $w_n = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}\right) \right]$.

Tem-se que $w_1 \neq w_2 \neq w_3 \neq \dots \neq w_n$, ou seja n valores diferentes para a $\sqrt[n]{z}$. Agora a partir de $k = n$ conclui-se que:

$$\frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta + 2(k+n)\pi}{n},$$

logo $w_{n+1} = w_1$, $w_{n+2} = w_2$, $w_{n+3} = w_3, \dots$ ou seja w_{k+1} assume n , e somente n valores diferentes entre si, os quais são obtidos fazendo k variar de 0 a $n - 1$. Então

$$w_{k+1} = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right], \text{ com } k \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \leq k < n.$$

Pode ser observado que todas as raízes estão localizadas sobre uma circunferência (e a dividem em n partes iguais) de centro na origem e raio $\sqrt[n]{\rho}$, Figura 17, ou seja todas as raízes tem mesmo módulo, só variando os argumentos, que formam uma progressão aritmética, cujo primeiro termo é $\frac{\theta}{n}$ e a razão $\frac{2\pi}{n}$.

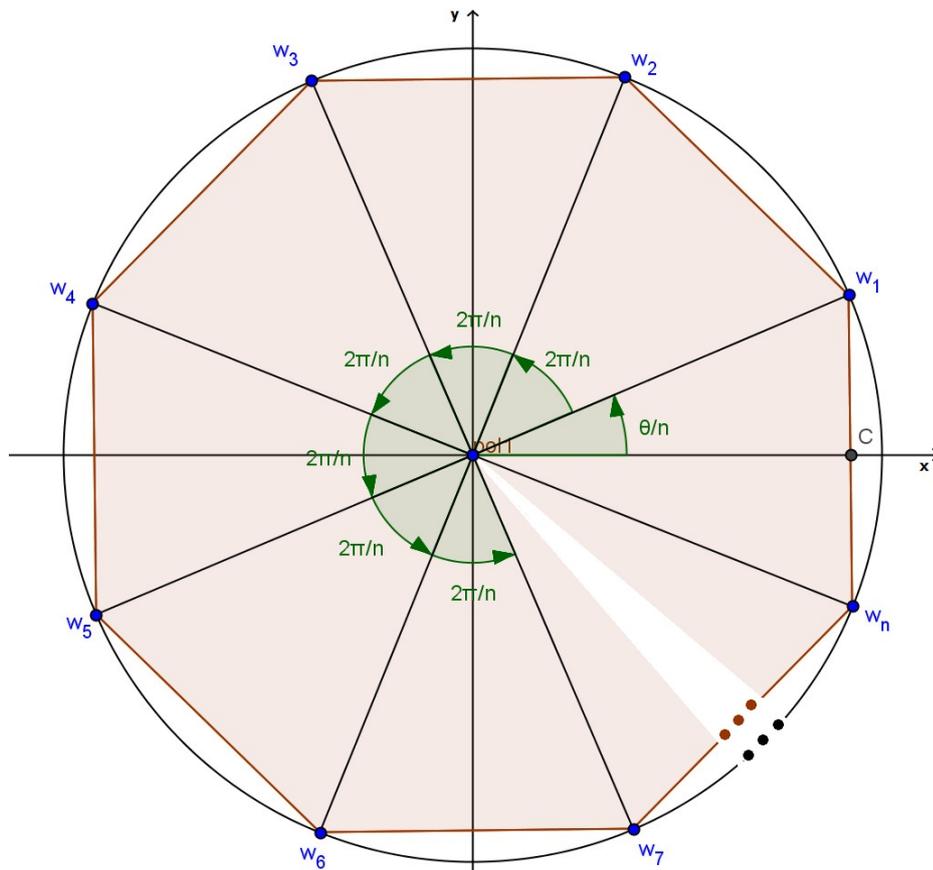


Figura 17: Representação gráfica da raiz enésima de um número complexo

3.5 FORMA EXPONENCIAL DE UM NÚMERO COMPLEXO

O produto de dois números complexos de módulo unitário $[\cos(\theta_1) + i\text{sen}(\theta_1)][\cos(\theta_2) + i\text{sen}(\theta_2)] = [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$ passa a idéia de haver um vínculo entre os números complexos e as exponenciais, pois o produto de duas potência de mesma base está vinculada a soma de seus expoentes bem como produto de dois números complexo vinculados a soma de seus argumentos.

Considerando, então $A = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow A$, sendo $f(x) = \cos(x) + i\text{sen}(x)$,

$$f(x+y) = \cos(x+y) + i\text{sen}(x+y)$$

$$f(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \text{sen}(x)\text{sen}(y) + i\text{sen}(x)\cos(y) + i\text{sen}(y)\cos(x)$$

$$f(x+y) = \cos(x)\cos(y) + i^2\text{sen}(x)\text{sen}(y) + i\text{sen}(x)\cos(y) + i\text{sen}(y)\cos(x)$$

$$f(x+y) = \cos(x)\cos(y) + \text{sen}(x)\text{sen}(y) + i\text{sen}(x)\cos(y) + i\text{sen}(y)\cos(x)$$

$$f(x+y) = \cos(x)[\cos(y) + i\text{sen}(y)] + i\text{sen}(x)[\cos(y) + i\text{sen}(y)]$$

$$f(x+y) = [\cos(x) + i\text{sen}(x)][\cos(y) + i\text{sen}(y)]$$

$$f(x+y) = f(x)f(y),$$

que é justamente como se caracteriza uma função exponencial.

Esse vínculo entre exponencial e números complexos levou Euler, baseado na expansão em série de Taylor, em torno da origem, das funções e^x , $\text{sen}(x)$ e $\cos(x)$ (MAOR, 2012), a propor que

$$e^{ix} = \cos(x) + i\text{sen}(x).$$

Observa-se que as expansão em série de Taylor, em torno da origem dessas funções são:

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \dots \quad (24)$$

$$\text{sen}(y) = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \frac{y^9}{9!} - \dots \quad (25)$$

$$\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} - \dots \quad (26)$$

Substituindo y por xi na expansão de e^y tem-se

$$e^{xi} = 1 + (xi) + \frac{(xi)^2}{2!} + \frac{(xi)^3}{3!} + \frac{(xi)^4}{4!} + \frac{(xi)^5}{5!} + \frac{(xi)^6}{6!} + \frac{(xi)^7}{7!} + \frac{(xi)^8}{8!} + \frac{(xi)^9}{9!} + \dots$$

$$e^{xi} = 1 + xi - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3i}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5i}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7i}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9i}{9!} + \dots$$

$$e^{xi} = \underbrace{\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots\right]}_{\text{expansão de Taylor de } \cos(x)} + i \underbrace{\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots\right]}_{\text{expansão de Taylor de } \text{sen}(x)}$$

Assim,

$$\boxed{e^{xi} = \cos(x) + i\text{sen}(x)} \quad (27)$$

chamada de Fórmula de Euler

Agora, considerando o complexo $z = a + bi$ escrito na forma polar $z = |z|[\cos(\theta) +$

$isen(\theta)]$, tem-se de (27) que

$$z = |z|e^{\theta i} \quad (28)$$

a qual é chamada de forma exponencial de um número complexo. Como na forma polar um número complexo tem infinitas representações dadas por (19), na forma exponencial essa característica se mantém

$$z = |z|e^{(\theta+2k\pi)i}, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \quad (29)$$

Observações:

- Nem sempre a demonstração de uma fórmula matemática é adequada ao nível etário ou a falta de pré requisitos de um aluno. Esse é o caso da série de Taylor para alunos do ensino médio. Assim é interessante que uma abordagem menos formal possa, nesse contexto, servir de subsídio para o desenvolvimento da teoria. Sendo assim no ANEXO D, é proposto uma forma de justificar ao aluno, que se encontra nesse nível de ensino, a validade da expansão por série de Taylor das funções exponencial, seno e cosseno, através de algum software que gere gráficos de funções.
- No ANEXO A tem-se uma forma alternativa de demonstrar a fórmula de Euler fazendo a integração da função $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

3.5.1 LOGARITMO

Um número complexo w é um logaritmo de um número complexo z não nulo, se $e^w = z$. Assim, escrevendo z em sua forma exponencial tem-se que $z = |z|e^{\theta i} = |z|e^{(\theta+2k\pi)i}$ e segue que

$$w = \ln(z) = \ln[|z|e^{(\theta+2k\pi)i}], \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

$$w = \ln(z) = \ln|z| + \ln[e^{(\theta+2k\pi)i}], \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

$$\ln(z) = \ln|z| + (\theta + 2k\pi)i, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \quad (30)$$

Assim, conclui-se que o logaritmo w de um número complexo z é número complexo com $Re\{w\} = \ln|z|$ e $Im\{w\} = (\theta + 2k\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$. Sendo assim, um dado número complexo z tem um número infinito de logaritmos, diferindo entre si por múltiplos de $2\pi i$.

Ao considerar em (30) $k = 0$ obtém-se o logaritmo principal de z , que é denotado por $Log(z)$, assim $Log(z) = \ln|z| + iArg(z)$.

Exemplo 3.19. :

$$(a) \operatorname{Log}(i) = \ln|i| + i\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}i$$

$$(b) \operatorname{Log}(-1) = \ln|-1| + i\pi = \pi i$$

$$(c) \operatorname{Log}(1 + \sqrt{3}i) = \ln(4) + \frac{\pi}{3}i$$

3.5.2 POTÊNCIAS COMPLEXAS

Seja z e $w \in \mathbb{C}$ e $w \neq 0$, define-se potência como $z^w = e^{\ln(z^w)} = e^{w \cdot \ln(z)}$. Mas de (30) segue que

$$z^w = e^{w[\ln|z| + (\theta + 2k\pi)i]}, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \quad (31)$$

Como o logaritmo de um complexo tem infinitos valores diferindo entre si por múltiplos de $2\pi i$. Logo a potência $z^w = e^{w \cdot \ln(z)}$ tem infinitos valores.

Exemplo 3.20. *Calculo de i^i*

$$i^i = e^{i[\ln|i| + (\theta + 2k\pi)i]}$$

$$i^i = e^{i\left[0 + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i\right]}$$

$$i^i = e^{\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i^2}$$

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

3.6 FORMA MATRICIAL DE UM NÚMERO COMPLEXO

Sejam dois números complexos de mesmo módulo e diferentes argumentos $z = x + yi = \rho(\cos\alpha + isen\alpha)$ $z_1 = x_1 + y_1i = \rho[\cos(\alpha + \theta) + isen(\alpha + \theta)]$, Figura 18.

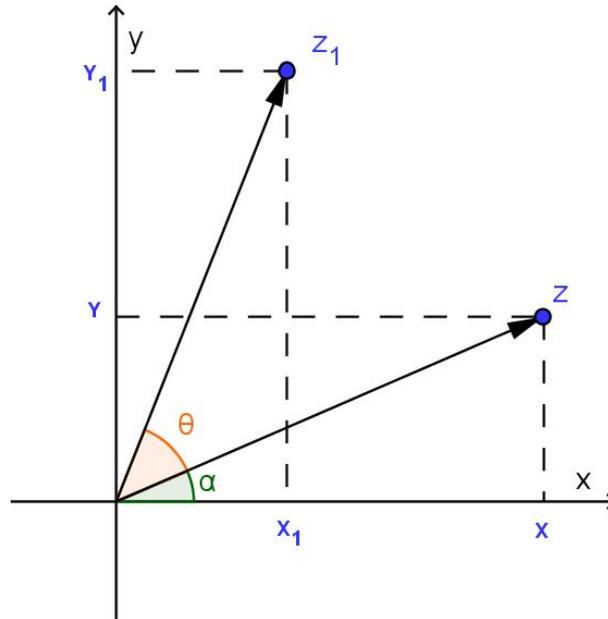


Figura 18: Representação gráfica de z e z_1 , números complexos de mesmo módulo ρ e argumento α e $\alpha + \theta$ respectivamente.

Tem-se que:

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos(\alpha + \theta) = \rho \cos(\alpha) \cos(\theta) - \rho \sin(\alpha) \sin(\theta) \\ y_1 = \rho \sin(\alpha + \theta) = \rho \sin(\alpha) \cos(\theta) + \rho \cos(\alpha) \sin(\theta) \end{cases},$$

mas $\rho \cos(\alpha) = x$ e $\rho \sin(\alpha) = y$ então:

$$\begin{cases} x_1 = x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \\ y_1 = x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \end{cases}.$$

Escrevendo esse sistema na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Particularmente quando um complexo faz uma rotação $\theta = \frac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

e quando um complexo faz uma rotação $\theta = 0$, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I. \quad (34)$$

Surge agora a questão: Como representar números complexos através de matrizes, que quando operados através da álgebra matricial, mantenha as propriedades inerentes dos números complexos?

Conjecturando que o número 1 dos complexos esta associado a matriz I , visto que ambos são elementos neutros relativo a multiplicação dentro de suas álgebras, tem-se que o número real a esta associado a matriz $aI = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$.

Pode-se observar que à soma $a+b = b+a$ fica associada a matriz $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+a & 0 \\ 0 & b+a \end{bmatrix}$ e o produto $ab = ba$ associado a matriz $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ba & 0 \\ 0 & ba \end{bmatrix}$ ou seja, as matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ se comportam da mesma forma que os reais em relação a soma e ao produto.

Agora, partindo da idéia mais elementar sobre números complexos, a solução da equação $x^2 = -1$, que em \mathbb{R} não tem solução, considerando o número i que satisfaz $i^2 = -1$. Então pode-se olhar para a equação $x^2 = -1$ e associa-la a equação matricial

$$X^2 = XX = -I \quad (35)$$

e, assim busca-se definir uma matriz X associada ao complexo i .

Observa-se que geometricamente, ao multiplicar um complexo por i significa rotacioná-lo $\left(\frac{\pi}{2} \text{rad}\right)$ no sentido anti-horário que como apresentado em (32) é multiplicar pela matriz $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, assim associa-se o complexo i a essa matriz, foi associado 1 a matriz I .

Nota-se que ao substituir $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ em (35), essa equação se torna verdadeira, ou seja $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$. Tem-se então, que um número imaginário

bi , pode ser associado a matriz $b \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$.

Por fim defini-se a forma matricial de um número complexo $a + bi$ como:

$$a + bi = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{a + bi = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}} \quad (36)$$

Uma observação importante é que as propriedades dos números complexos são mantidas quando escrito na forma de matriz e operados através da álgebra matricial:

1. Adição:

$$(a + bi) + (c + di) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$(a + bi) + (c + di) = \begin{bmatrix} a + c & -(b + d) \\ b + d & a + c \end{bmatrix}$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

2. Produto:

$$(a + bi)(c + di) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$(a + bi)(c + di) = \begin{bmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ (ad + bc) & ac - bd \end{bmatrix}$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

3. Conjugado:

A matriz do conjugado do número complexo z é a transposta da respectiva matriz repre-

$$\text{representativa de } z. \overline{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}} = \overline{(a+bi)} = (a-bi) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^T.$$

4. Módulo:

O módulo do número complexo z é a raiz quadrada do determinante da respectiva matriz representativa de z . $z = a + bi = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, $\det(z) = a^2 + b^2$. Logo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

5. O número complexo $z = 0$ é representado pela matriz nula.

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. O número complexo $1 = 1 + 0i$ é representado pela matriz identidade.

$$1 + 0i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. O inverso de um número complexo $z \neq 0$, é a inversa da respectiva matriz.

Da álgebra matricial tem-se que se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é inversível, o que ocorre se, e somente se, o seu determinante não é nulo, e $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Então o inverso de um complexo $z = a + bi = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ é:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2 + b^2} & \frac{b}{a^2 + b^2} \\ \frac{-b}{a^2 + b^2} & \frac{a}{a^2 + b^2} \end{bmatrix} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i = z^{-1}.$$

3.7 QUATÉRNIOS

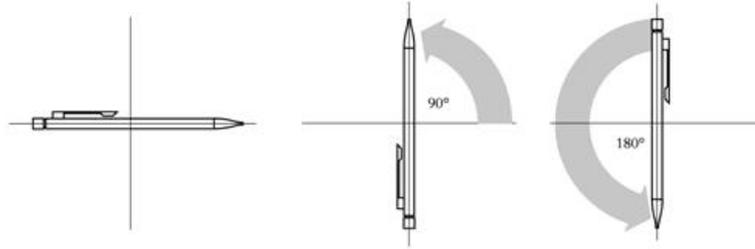
Os Quatérnios foram introduzidos por William Rowan Hamilton em 1843, depois de anos de fracassos em tentativas de obter uma generalização, para o espaço tridimensional, de

uma multiplicação que desempenhasse o que a multiplicação dos números complexos desempenham no plano.

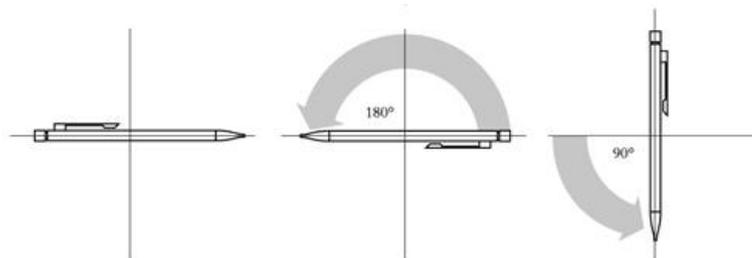
Quando multiplica-se dois números complexos, obtém-se um terceiro complexo cujo módulo é o produto dos módulos dos complexos que estão sendo multiplicados e o argumento é a soma dos argumentos de cada um desses complexos. Essa propriedade de soma dos argumentos significa que pode-se pensar na multiplicação entre dois complexos como uma operação de rotação. Com esta solução para o problema de rotação no plano, parece inerente construir um sistema semelhante para as rotações no espaço.

Hamilton tentou considerar o espaço, como uma ampliação do plano definido pelos números complexos, e durante anos busca o que seria a versão tridimensional desses números. Com esse objetivo, parece natural, a passagem da álgebra com duplas para uma álgebra com tripletos e conceber que deva existir um outro tipo de raiz de -1 , perpendicular ao plano. Foram muitas as tentativas de generalizar esse comportamento dos complexos para três dimensões, porém isso não foi possível, pois a maioria das propriedades relevantes dos complexos não são mantidas. Ele então percebe que teria que abandonar a lei comutativa para a multiplicação e admitir, que os objetos cuja álgebra descrevem o espaço devem ser quádruplas em vez de tripletos (Seção 2.5). Isso se justifica pois, no plano existe apenas um grau de liberdade de rotação (rotação no plano XY) que é associada a uma unidade imaginária e quando aumenta-se uma dimensão, aumenta-se dois graus de liberdade de rotação (rotação no plano XZ e no plano YZ), que precisam ser associadas de forma semelhante à dos complexos, por uma unidade imaginária cada uma. Além disso a rotação no espaço não é comutativa, como mostra (VAZ, 2000) na Figura 19.

As rotações ilustram bem o que significa "não-comutatividade". Primeiro, vamos considerar as rotações em um plano. Tome um objeto, por exemplo uma caneta. Faça primeiro uma rotação desse objeto por um ângulo de 90° e depois outra por um ângulo de 180° , como ilustra a figura abaixo.

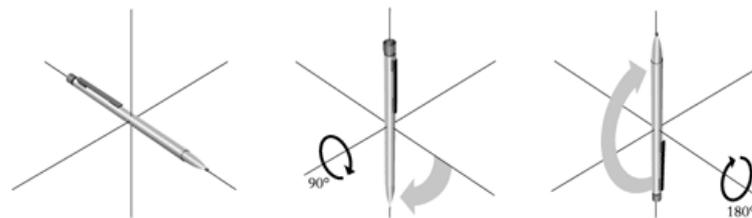


Agora troque a ordem das operações, ou seja, faça primeiro uma rotação por um ângulo de 180° e depois outra por um ângulo de 90° .

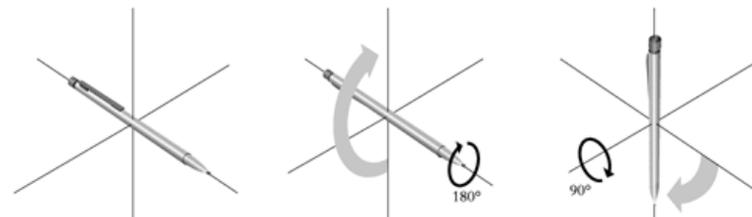


Como podemos ver pelas figuras acima, o resultado final é o mesmo. Dizemos nesse caso que as operações acima descritas *comutam*.

Já com as *rotações espaciais* as coisas são bem diferentes! Pegue aquela mesma caneta, escolha uma direção espacial e faça uma rotação de 90° no plano ortogonal a essa direção escolhida. Depois escolha uma direção espacial ortogonal àquela escolhida anteriormente e faça uma rotação de 180° no plano ortogonal a ela. Essas operações estão ilustradas abaixo.



Agora troque a ordem das operações, como ilustrado na próxima figura.



Veja! O resultado final agora é diferente! Dizemos nesse caso que essas operações *não-comutam*.

Figura 19: Não comutatividade geométrica. Fonte: (VAZ, 2000)

Sendo assim, essa generalização dos complexos para o espaço não pode usar três parâmetros, mas sim quatro e a operação de multiplicação não é comutativa. Foi a esse tipo de número que Hamilton denominou Quatérnios.

Definição 3.21. O conjunto dos Quatérnios, que é denotado por \mathbb{H} , é formado por todos os números da forma $q = a + bi + cj + dk$ ou equivalentemente $q = (a, b, c, d)$, em que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e i, j, k satisfazem as relações $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$ e $ji = -k$.

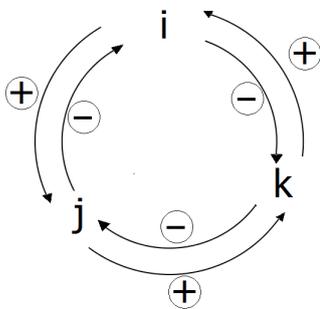
Da definição acima implica que:

- $(1, 0, 0, 0) = 1$;
- $(0, 1, 0, 0) = i$;
- $(0, 0, 1, 0) = j$;
- $(0, 0, 0, 1) = k$;
- $ijk = -1$, pois se $ij = k \Rightarrow ijk = (ij)k = kk = k^2 = -1$;
- $jk = i$, pois

$$\begin{cases} iijk = (ii)jk = -1jk = -jk \\ iijk = i(ijk) = i(-1) = -i \end{cases} \Rightarrow jk = i$$
- $ki = j$, pois como $jk = i$ então $jki = (jk)i = ii = i^2 = -1$

$$\begin{cases} jjki = j(jki) = j(-1) = -j \\ jjki = (jj)ki = -1ki = -ki \end{cases} \Rightarrow ki = j$$

O diagrama, Figura 20 representa os resultados apresentados



•	1	i	j	k
1	$i^2 = 1$	$1 \cdot i = i$	$1 \cdot j = j$	$1 \cdot k = k$
i	$i \cdot 1 = i$	$i^2 = -1$	$i \cdot j = k$	$i \cdot k = -j$
j	$j \cdot 1 = j$	$j \cdot i = -k$	$j^2 = -1$	$j \cdot k = i$
k	$k \cdot 1 = k$	$k \cdot i = j$	$k \cdot j = -i$	$k^2 = -1$

Figura 20: Diagrama das multiplicações das unidades $1, i, j$ e k .

Além disso, qualquer $q \in \mathbb{H}$ pode ser escrito como:

$$q = a + bi + cj + dk$$

$$q = a + (b, c, d)$$

$$q = a + \vec{v}$$

$$q = (a, \vec{v}).$$

3.7.1 OPERAÇÕES COM QUATÉRNIOS

3.7.1.1 ADIÇÃO

Sejam $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, onde $q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k = (a_1, b_1, c_1, d_1) = (a_1, \vec{v}_1)$ e $q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k = (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_2, \vec{v}_2)$ então:

$$q_1 + q_2 = (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)$$

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k \quad (37)$$

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2) \quad (38)$$

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_2), \quad (39)$$

ou seja, a soma de dois quatérnios se dá somando usualmente cada componente do primeiro quatérnio com sua correspondente no segundo.

3.7.1.2 PRODUTO

Sejam $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, onde $q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k = (a_1, b_1, c_1, d_1) = (a_1, \vec{v}_1)$ e $q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k = (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_2, \vec{v}_2)$ então:

$$q_1q_2 = (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)$$

$$q_1q_2 = a_1(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)$$

$$+ b_1i(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)$$

$$+ c_1j(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)$$

$$+ d_1k(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)$$

$$\begin{aligned}
q_1 q_2 &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_1 c_2 j + a_1 d_2 k \\
&+ b_1 i a_2 + b_1 i b_2 i + b_1 i c_2 j + b_1 i d_2 k \\
&+ c_1 j a_2 + c_1 j b_2 i + c_1 j c_2 j + c_1 j d_2 k \\
&+ d_1 k a_2 + d_1 k b_2 i + d_1 k c_2 j + d_1 k d_2 k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_1 q_2 &= a_1 a_2 + b_1 b_2 i^2 + c_1 c_2 j^2 + d_1 d_2 k^2 \\
&+ a_1 b_2 i + a_1 c_2 j + a_1 d_2 k \\
&+ b_1 a_2 i + b_1 c_2 i j + b_1 d_2 i k \\
&+ c_1 a_2 j + c_1 b_2 j i + c_1 d_2 j k \\
&+ d_1 a_2 k + d_1 b_2 k i + d_1 c_2 k j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_1 q_2 &= a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 \\
&+ a_1 b_2 i + a_1 c_2 j + a_1 d_2 k \\
&+ b_1 a_2 i + b_1 c_2 k - b_1 d_2 j \\
&+ c_1 a_2 j - c_1 b_2 k + c_1 d_2 i \\
&+ d_1 a_2 k + d_1 b_2 j - d_1 c_2 i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_1 q_2 &= a_1 a_2 - (b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) \\
&+ (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2 i \\
&+ (a_1 c_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2 - b_1 d_2) j \\
&+ (a_1 d_2 + d_1 a_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2) k
\end{aligned} \tag{41}$$

Expressando os resultados de (41) em termos de produtos escalares e vetoriais, pode-se escrever que:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 a_2 - (b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) = a_1 a_2 - \vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 \\ a_1 (b_2 i + c_2 j + d_2 k) + a_2 (b_1 i + c_1 j + d_1 k) = a_1 \vec{v}_2 + a_2 \vec{v}_1 \\ (c_1 d_2 - d_1 c_2) i + (d_1 b_2 - b_1 d_2) j + (b_1 c_2 - c_1 b_2) k = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \end{array} \right. , \tag{42}$$

onde, $\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2$ é o produto escalar entre v_1 e v_2 e $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ o produto vetorial entre v_1 e v_2 .

Então de(41) e (42) tem-se:

$$q_1 q_2 = (a_1, \vec{v}_1)(a_2, \vec{v}_2) = (a_1 a_2 - \vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2, a_1 \vec{v}_2 + a_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2). \quad (43)$$

3.7.1.3 MÓDULO

O módulo de um quatérnio $q = a + bi + cj + dk = (a, \vec{v})$ é dado por

$$|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \sqrt{a^2 + |\vec{v}|^2}.$$

3.7.1.4 CONJUGADO

O conjugado de um quatérnio $q = a + bi + cj + dk = (a, \vec{v})$ é definido como $\bar{q} = a - bi - cj - dk = (a, -\vec{v})$.

Assim a relação entre o conjugado e o módulo de um quatérnio é dada por $|q|^2 = q\bar{q}$, pois se $q \in \mathbb{H}$ tal que $q = a + bi + cj + dk$, então $q\bar{q} = (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk)$, mas de (41), segue que:

$$\begin{aligned} q\bar{q} &= aa - (b(-b) + c(-c) + d(-d)) \\ &\quad + (a(-b) + ba + c(-d) - d(-c))i \\ &\quad + (a(-c) + ca + d(-b) - b(-d))j \\ &\quad + (a(-d) + da + b(-c) - c(-b))k; \end{aligned}$$

$$q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2;$$

$$q\bar{q} = |q|^2.$$

4 APLICAÇÕES

Além de seu emprego na própria matemática simplificando a resolução de exercícios da geometria analítica e da álgebra por exemplo, os números complexos e os quatérnions podem ser empregados na geração de fractais, na análise de circuitos elétricos, na aerodinâmica, na biomecânica, na computação gráfica, nos jogos digitais e nas mais diversas áreas científicas e tecnológicas.

4.1 APLICAÇÕES NA MATEMÁTICA

4.1.1 FERRAMENTA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NOS DIVERSOS RAMOS DA MATEMÁTICA

Problema 1. ABCD é um quadrado. Se $A(5,2)$ e $B(9,5)$ determine as coordenadas dos outros dois vértices desse quadrado

Há duas soluções para a construção do quadrado conforme mostra a Figura 21.

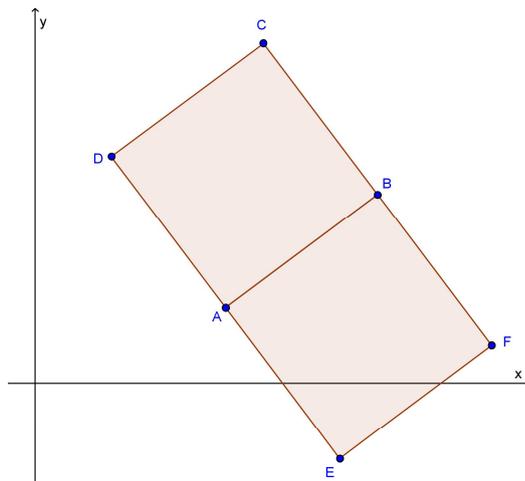


Figura 21: Possibilidades para a construção de um quadrado sendo conhecidos dois vértices consecutivos, A e B.

Para obter o ponto D, considera-se o vetor \overrightarrow{AD} como sendo uma rotação de $+90^\circ$ do vetor \overrightarrow{AB} . Portanto $\overrightarrow{AD} = i \cdot \overrightarrow{AB}$.

$$D - A = (0, 1) \cdot (B - A) \quad D - (5, 2) = (0, 1)(9 - 5, 5 - 2)$$

$$D = (x, y) = (5, 2) + (0, 1)(4, 3)$$

$$D = (x, y) = (5, 2) + (0 \cdot 4 - 1 \cdot 3, 1 \cdot 4 + 0 \cdot 3)$$

$$D = (x, y) = (5, 2) + (-3, 4)$$

$$\boxed{D = (2, 6)} .$$

Para obter o ponto C, considera-se o vetor \overrightarrow{BC} como sendo uma rotação de -90° do vetor \overrightarrow{BA} . Portanto $\overrightarrow{BC} = (-i) \cdot \overrightarrow{BA}$.

$$C - B = (0, -1) \cdot (A - B) \quad C - (9, 5) = (0, -1)(5 - 9, 2 - 5)$$

$$C = (x, y) = (9, 5) + (0, -1)(-4, -3)$$

$$C = (x, y) = (9, 5) + (0 \cdot (-4) - (-1) \cdot (-3), (-1) \cdot (-4) + 0 \cdot (-3))$$

$$C = (x, y) = (9, 5) + (-3, 4)$$

$$\boxed{C = (6, 9)} .$$

Agora para obter os pontos E e F, basta considerar que A é o ponto médio de DE e B o ponto médio de CF, logo $A = \frac{D+E}{2}$ e $B = \frac{C+F}{2}$, assim:

$$\begin{array}{l|l} E = 2A - D & F = 2B - C \\ E = 2(5, 2) - (2, 6) & F = 2(9, 5) - (6, 9) \\ \boxed{E = (8, -2)} . & \boxed{F = (12, 1)} . \end{array}$$

Problema 2 Calcular as somas $1 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \dots$ e $C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \dots$.

Do desenvolvimento do binômio de Newton temos:

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 \cdot x + C_n^2 \cdot x^2 + C_n^3 \cdot x^3 + \dots + C_n^n \cdot x^n. \quad (44)$$

Fazendo $x = 1$ em (44), tem-se que:

$$(1+1)^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = 2^n. \quad (45)$$

Fazendo $x = -1$ em (44), tem-se que:

$$(1-1)^n = 1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n \cdot C_n^n = 0. \quad (46)$$

Somando (45) e (46) tem-se que $2(1 + C_n^2 + C_n^4 + \dots) = 2^n$, logo $1 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \dots = 2^{n-1}$. Subtraindo (46) de (45) tem-se que $2(C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots) = 2^n$, logo $C_n^1 + C_n^3 + \dots = 2^{n-1}$.

$$C_n^5 + \dots = 2^{n-1}.$$

Assim segue que:

$$1 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \dots = 1 + C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 \dots = 2^{n-1} \quad (47)$$

Agora fazendo $x = i$ em (44) tem-se que:

$$(1+i)^n = 1 + C_n^1 \cdot i + C_n^2 \cdot i^2 + C_n^3 \cdot i^3 + \dots + C_n^n \cdot i^n$$

$$(1+i)^n = (1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots) + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots).$$

Mas, por (22) $(1+i)^n = [\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\text{sen}(\frac{\pi}{4}))]^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos(\frac{n\pi}{4}) + i\text{sen}(\frac{n\pi}{4}))$. Assim,

$$(1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots) + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots) = 2^{\frac{n}{2}}\cos(\frac{n\pi}{4}) + i \cdot 2^{\frac{n}{2}}\text{sen}(\frac{n\pi}{4}).$$

Então:

$$(1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots) = 2^{\frac{n}{2}}\cos(\frac{n\pi}{4}) \quad (48)$$

e

$$(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots) = 2^{\frac{n}{2}}\text{sen}(\frac{n\pi}{4}). \quad (49)$$

Somando (47) com (48) e (47) com (49) tem-se que:

$$2(1 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \dots) = 2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}}\cos(\frac{n\pi}{4}) \quad \text{e} \quad 2(C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \dots) = 2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}}\text{sen}(\frac{n\pi}{4}),$$

assim:

$$1 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \dots = 2^{n-2} + 2^{\frac{n-2}{2}}\cos(\frac{n\pi}{4})$$

e

$$C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \dots = 2^{n-2} + 2^{\frac{n-2}{2}}\text{sen}(\frac{n\pi}{4}).$$

4.1.2 GERAÇÃO DE FRACTAIS

A Geometria Fractal é o ramo da matemática que estuda o comportamento dos fractais. Ela pode ser usada para representar fenômenos naturais, onde não se pode utilizar a geometria clássica.

Os fractais são figuras gerada a partir de fórmulas matemáticas que retratam a geometria da natureza, quando um objeto é dividido, em um processo recursivo indefinido, em partes semelhantes ao próprio objeto, Figura 22.

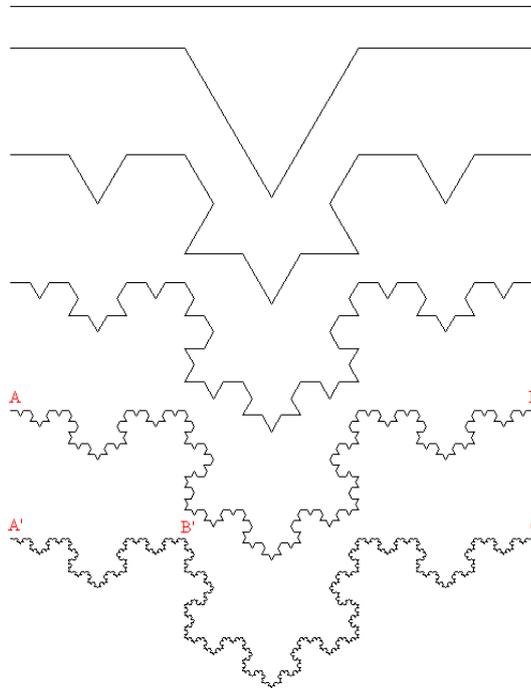


Figura 22: Exemplo de um fractal: Curva de Koch. Fonte: (WIKIPEDIA, 2013c)

Os fractais podem apresentar infinitas formas diferentes, não existindo uma aparência padrão. Entretanto, dois aspectos são comuns nesta geometria:

- nunca se pode retratá-los totalmente, pois existem infinitos detalhes, cada vez menores, gerados pelas infinitas iterações do seu processo de construção;
- um fractal apresenta reprodução aproximadas de si mesmo, quando observado em diferentes escalas de tamanho em seu interior. Cada parte do fractal poder ser vista como uma cópia do todo.

A Geometria Fractal, pode ser utilizada para descrever diversos fenômenos da natureza, onde não se pode utilizar outras geometrias, como na teoria do caos, considerada a essência de tudo que molda o universo (NICOLAU, 2006). Essa relação com a natureza é citada por Benoît Mandelbrot, matemático francês nascido na Polônia e criador do termo fractal, em seu livro *The Fractal Geometry of Nature*, - 1983: “Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, um latido não é contínuo e nem o raio viaja em linha reta”.

Um dos mais conhecidos fractais é o chamado Conjunto de Mandelbrot, Figura 23. Essa figura é formada a partir de uma fórmula de recorrência utilizando números complexos, escritos na forma $x + y \cdot i$ onde as coordenadas x e y representam pontos na tela do computador e i a unidade imaginária. A interação é feita com a fórmula:

$$z_{n+1} = (z_n)^2 + c, \text{ com } z, c \in \mathbb{C} \text{ e } n \in \mathbb{N}. \quad (50)$$

O processo se dá por recorrência, escolhendo um valor fixo para c , por exemplo $c = 1 + 2i$ e um valor inicial para z chamado de z_1 , por exemplo $z_1 = 0$ ($x = 0$ e $y = 0$) e calculando o valor seguinte de z representado por z_{n+1} utilizando a fórmula (50).

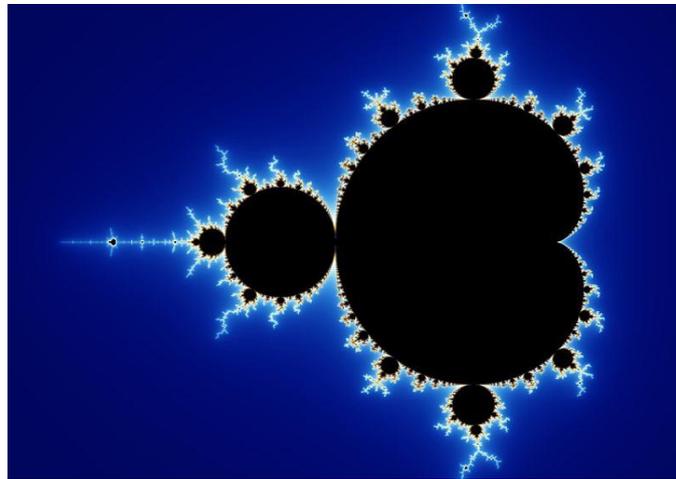


Figura 23: Conjunto de Mandelbrot: um dos mais conhecidos fractais. Fonte: (WIKIPEDIA, 2013b)

Outro fractal gerado a partir de um número complexo é conhecido por Conjunto de Julia, criado para determinar o que acontece com um número complexo z quando a este for aplicado iterativamente em uma função complexa, Figura 24.

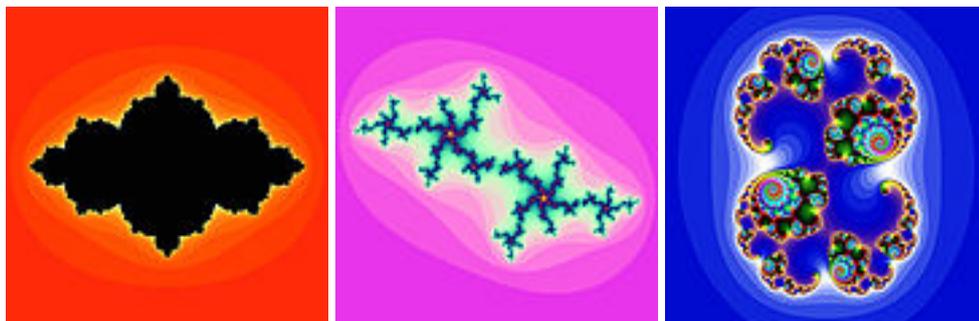


Figura 24: Exemplos de Conjuntos de Julia. Fonte: (WIKIPEDIA, 2013a)

O Conjunto de Julia também pode ser gerado por uma função dos quatérnios como mostra a Figura 25.

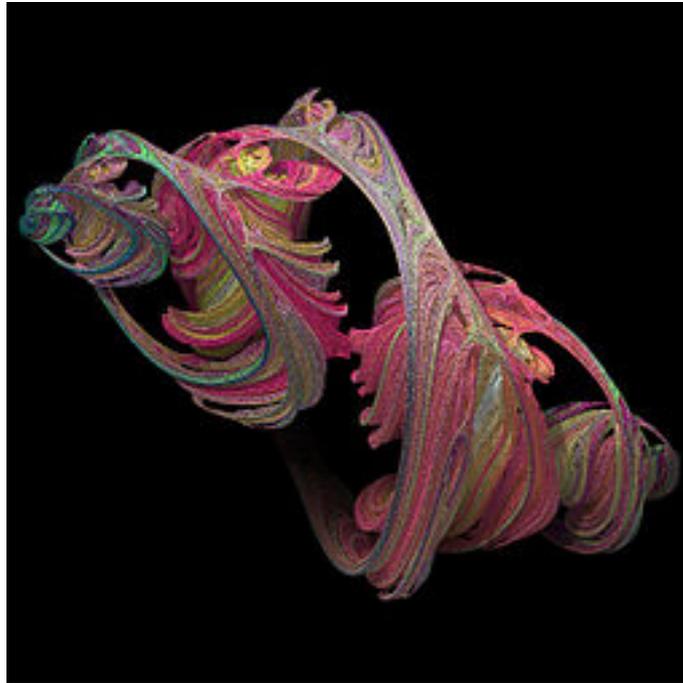


Figura 25: Exemplo do Conjunto de Julia gerado por uma função dos quatérnios. Fonte: (WIKIPEDIA, 2013a)

4.2 ANÁLISE DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

A corrente elétrica consiste no movimento ordenado de elétrons que se dá quando há uma diferença de potencial (ddp) em um fio condutor. E esse movimento no fio condutor fica sujeito a uma oposição que é conhecida como impedância elétrica. Quando essa impedância é feita por um resistor, ela é chamada de resistência elétrica. Já quando a oposição à passagem de corrente é devida a um indutor ou um capacitor ela é denominada reatância elétrica.

As correntes elétricas, tensões e reatâncias podem então ser representadas vetorialmente, sendo que no circuito indutivo o vetor tensão está defasado do vetor corrente, e no circuito capacitivo o vetor corrente está adiantado, em relação ao vetor tensão. Assim por serem grandezas vetoriais do plano, podem ser representadas por números complexos.

A relação entre impedância, resistência e reatância é dada por $Z = R + j \cdot X$, sendo que Z é a impedância em ohms; R é a resistência em ohms; X é a reatância em ohms.

Vale ressaltar que em análise de circuitos a unidade imaginária é representada por j pois i é utilizado para representar a corrente elétrica.

4.3 AERODINÂMICA

Em 1906, Nikolai Yegorovitch Jukovsky, cientista russo considerado fundador da aerodinâmica e hidrodinâmicas modernas, foi o primeiro a explicar matematicamente a origem da força de sustentação aerodinâmica. Ele usou um caso particular de transformação conforme, a Transformação de Joukowski, um método que emprega variáveis complexas para transformar figuras geométricas de um plano complexo em figuras totalmente diferente em outro plano. No caso do aerofólio de Joukowski transforma um círculo em um aerofólio, Figura 26. Esta técnica ainda é válida em áreas avançadas de pesquisa, como a solução de problemas de otimização de formas aerodinâmicas

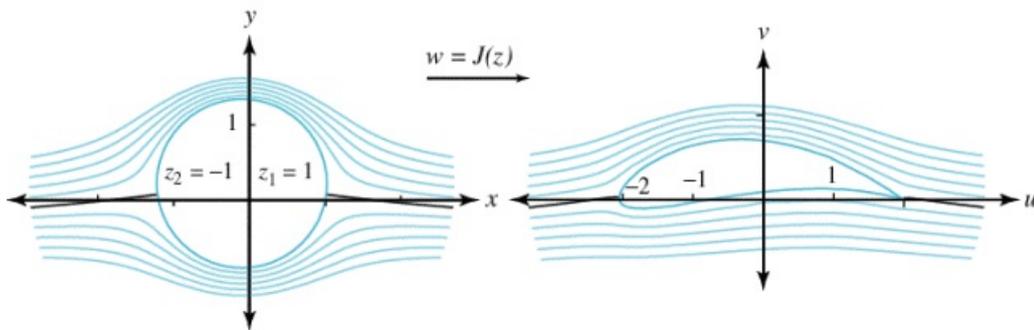


Figura 26: Fluxo em torno do aerofólio de Joukowski. Fonte: (EF128, 2011)

4.4 BIOMECÂNICA

Uma aplicação dos quatérnios em Biomecânica é mostrada por (SANTIAGO, 2009). Em sua tese de doutorado “Algumas abordagens matemáticas são utilizadas para descrever o componente rotacional das articulações durante o movimento humano, como por exemplo, as matrizes de rotação do tipo 3x3, ângulos de Euler e Cardan, os eixos helicais e os quatérnios, sendo este último o menos difundido na biomecânica, sendo usada como ferramenta a análise de rotação em movimentos esportivos”.

4.5 COMPUTAÇÃO GRÁFICA E JOGOS DIGITAIS

Recentemente, os programadores de jogos de computador têm usado quatérnios em animações para girar objetos. Tomb Raider foi o primeiro desses jogos que utilizam esta tecnologia. Os quaternions têm várias vantagens sobre os outros métodos utilizados, uma vez que um quaternion é especificado por 4 números reais enquanto que uma matriz de 3 x 3 requer nove números. O método de matriz é mais caro computacionalmente além da dificuldade de calcular

a posição dos ângulos envolvidos na rotação enquanto que com quatérnios, basta usar as regras da aritmética para se multiplicar.

4.6 OUTRAS APLICAÇÕES

- Na resenha do livro *Buracos Negros, Universos-Bebês e outros ensaios*, de Stephen Hawking publicado no jornal *Zero Hora, Caderno Cultura*, 29/07/95 (SANTOS, 1995) escreve “O ensaio seguinte, a origem do universo, é soberbo, uma obra-prima de síntese e clareza para quem tem um mínimo de conhecimento de física, ou uma boa formação em outras áreas do conhecimento. É verdade que Hawking não é capaz de tudo tornar inteligível para o leigo, menos pela sua capacidade intelectual do que pela característica do tema que aborda. Por exemplo, inevitavelmente ele introduz o conceito de tempo imaginário, algo incompreensível para quem nunca estudou números complexos. A propósito, no ensaio *Meu ponto de vista*, Hawking menciona um ataque que sofreu de um filósofo da ciência por falar em tempo imaginário, mas ele acha que ‘*esse filósofo estava confundindo números reais e imaginários, que são termos técnicos da matemática, com os termos real e imaginário tal como usados na linguagem comum*’.”
- O estudo do cálculo diferencial com números complexos se tornou muito útil para desenvolver a teoria sobre o escoamento de fluidos incompressíveis (fluido cuja densidade sempre permanece constante com o tempo, e tem a capacidade de opor-se à compressão do mesmo sob qualquer condição).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta principal desse trabalho foi promover um resgate histórico dos números complexos, descrever suas diversas formas de representação bem como mostrar sua operacionalização dentro dessas diversas formas e estabelecer conexões com outros conteúdos da matemática e de outros ramos das ciências, além de, mostrar que existe uma ampliação natural desse ente matemático, chamados quatérnions.

Dentre os mais diversos conteúdos de matemática, os números complexos apresentam, nos livros didáticos, uma abordagem tradicional que enfatiza uma exposição do conteúdo, seguida de exercícios que, muitas das vezes, tem por objetivo apenas “treinar” o que foi aprendido: aspecto esse que se apresenta como um fator desestimulante à maioria dos alunos, pois não vem associado a uma contextualização ou aplicação prática que o torne mais atrativo.

A partir das pesquisas realizadas, essa dissertação pautou-se na preocupação em equilibrar o formalismo matemático com uma didática mais atraente que promova o aprendizado deste conteúdo. Assim, foi realizado um trabalho que envolvesse a história dos números complexos, visando subsidiar professores e estudantes a fim de minimizar as dificuldades próprias da assimilação deste tópico, além de sugerir uma nova perspectiva ao estudo desse conteúdo por meio do desenvolvimento da capacidade de pensar matematicamente.

Empregou-se a história da matemática com o intuito de desmistificar a idéia que os alunos tem do desenvolvimento de um conceito matemático como algo mágico e romper com o mito de que tais conceitos surgem do nada sem um longo processo de elaboração e que não houve dificuldades durante esse caminho até sua formalização. Outro ponto é levar o leitor a perceber que as operações com números complexos constituem uma alternativa, muitas vezes mais conveniente, de chegar a soluções de diversos outros problemas.

Inserir o conteúdo de História da Matemática no dia-a-dia do aluno minimiza a tendência de “algoritmizar” tudo no ensino da matemática, pois resgata o ambiente sociohistórico das descobertas nos vários ramos desta ciência. Aplicado ao tema desta dissertação, tal abordagem valoriza a aquisição e compreensão do conceito de números em geral - mais especificamente

dos Números Complexos - além de estabelecer uma conexão entre as componentes algébricas e geométricas, contribuindo assim para a mudança de paradigma dos alunos, qual seja, o estudo “mecanizado” de um conteúdo, e criando condições para que eles respondam por seus próprios meios a muitas das questões que lhe forem apresentadas ao longo do processo de aprendizagem.

ANEXO A – OBTENÇÃO DA FÓRMULA DE EULER ATRAVÉS DO USO DE INTEGRAIS

Neste anexo é apresentado o uso de integrais na obtenção da conhecida Fórmula de Euler: $e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$. O que será feito para a obtenção desse resultado, é calcular $\int \frac{dx}{x^2+1}$ de duas formas diferentes:

(a) fazendo $x = tg(u)$ tem-se $dx = sec^2(u)du$ e $u = arctg(x)$ tem-se

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \int \frac{sec^2(u)du}{tg^2(u)+1}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \int \frac{sec^2(u)du}{sec^2(u)}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \int du = u + c_1$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = arctg(x) + c_1;$$

(b) fazendo $\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right]$, então

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2i} \int \left[\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right] dx$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2i} \left[\int \frac{1}{x-i} dx - \int \frac{1}{x+i} dx \right]$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2i} \left[\ln(x-i) - \ln(x+i) \right] + c_2$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2i} \left[\ln \left(\frac{x-i}{x+i} \right) \right] + c_2.$$

Assim por (a) e (b) tem-se $arctg(x) + c_1 = \frac{1}{2i} \left[\ln \left(\frac{x-i}{x+i} \right) \right] + c_2$.

Fazendo a substituição $\arctg(x) = \frac{y}{2}$ tem-se que $x = tg\left(\frac{y}{2}\right)$, logo

$$\frac{y}{2} + c_1 = \frac{1}{2i} \left[\ln \frac{tg\left(\frac{y}{2}\right) - i}{tg\left(\frac{y}{2}\right) + i} \right] + c_2$$

$$y \cdot i + (c_1 - c_2) = \ln \left[\frac{tg\left(\frac{y}{2}\right) - i}{tg\left(\frac{y}{2}\right) + i} \cdot \frac{tg\left(\frac{y}{2}\right) - i}{tg\left(\frac{y}{2}\right) - i} \right]$$

$$yi + c_3 = \ln \left[\frac{tg^2\left(\frac{y}{2}\right) - 2i \cdot tg\left(\frac{y}{2}\right) + i^2}{tg^2\left(\frac{y}{2}\right) - i^2} \right]$$

$$e^{yi+C_3} = \frac{tg^2\left(\frac{y}{2}\right) - 2i \cdot tg\left(\frac{y}{2}\right) + i^2}{tg^2\left(\frac{y}{2}\right) - i^2}$$

$$e^{yi} e^{C_3} = \frac{tg^2\left(\frac{y}{2}\right) - 2i \cdot tg\left(\frac{y}{2}\right) + i^2}{tg^2\left(\frac{y}{2}\right) - i^2}$$

$$e^{yi} C_4 = \frac{\frac{sen^2\left(\frac{y}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{y}{2}\right)} - 2i \cdot \frac{sen\left(\frac{y}{2}\right)}{cos\left(\frac{y}{2}\right)} - 1}{tg^2\left(\frac{y}{2}\right) + 1}$$

$$C_4 e^{yi} = \frac{\frac{sen^2\left(\frac{y}{2}\right) - 2i \cdot sen\left(\frac{y}{2}\right)cos\left(\frac{y}{2}\right) - cos^2\left(\frac{y}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{y}{2}\right)}}{sec^2\left(\frac{y}{2}\right)}$$

$$C_4 e^{yi} = \frac{\frac{\left[-cos^2\left(\frac{y}{2}\right) + sen^2\left(\frac{y}{2}\right) \right] - 2i \cdot sen\left(\frac{y}{2}\right)cos\left(\frac{y}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{y}{2}\right)}}{\frac{1}{cos^2\left(\frac{y}{2}\right)}}$$

$$C_4 e^{yi} = -cos\left(2\frac{y}{2}\right) - isen\left(2\frac{y}{2}\right)$$

$$C_4 e^{yi} = -[cos(y) + isen(y)] \quad \times (-1)$$

$$C e^{yi} = cos(y) + isen(y).$$

Fazendo $y = 0 \Rightarrow C e^{0i} = cos(0) + isen(0) \Rightarrow C = 1$. Assim,

$$e^{yi} = cos(y) + isen(y) .$$

ANEXO B – COTES E A FÓRMULA DE EULER

O jovem professor Roger Cotes, em 1714, obteve um importante resultado, $\ln(\cos\phi + i\sin\phi) = i\phi$, que é equivalente a fórmula de Euler. Para isto Cotes considerou uma elipse definida por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, Figura 27, em que a e b são os comprimentos dos semi-eixos. Tomando apenas a parte da elipse no primeiro quadrante e rotacionando-a em torno do eixo y , gera uma superfície que é a metade superior de um elipsóide. Assim, ele obteve a fórmula para a área dessa superfície de revolução de duas maneiras diferentes, levando a um resultado impensado.

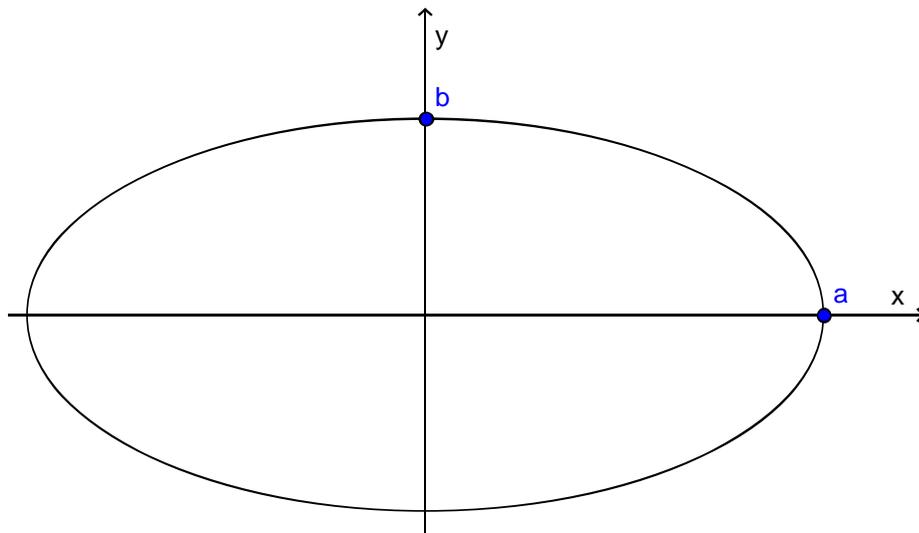


Figura 27: Elipse considerada por cotes, em que a e b são os comprimentos dos semi-eixos.

Para o cálculo da área da superfície gerada por uma curva girando a redor do eixo y se utiliza:

$$A = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^b x \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{dx}{dy} \right]^2} dy, \quad (51)$$

como $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ implica que $x = \sqrt{a^2 - \frac{a^2 y^2}{b^2}} = a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$.

Fazendo $y = b \cdot u$ tem-se $x = a \sqrt{1 - u^2}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{-ay}{b\sqrt{b^2 - y^2}} = \frac{-au}{b\sqrt{1 - u^2}}$ e $dy = b \cdot du$.

Substituindo em (51) tem-se:

$$A = 2\pi \int_0^1 a\sqrt{1-u^2} \sqrt{1 + \left[\frac{-au}{b\sqrt{1-u^2}} \right]^2} b du$$

$$A = 2\pi \int_0^1 a\sqrt{1-u^2} \sqrt{b^2 + \frac{a^2u^2}{1-u^2}} du$$

$$A = 2\pi a \int_0^1 \sqrt{b^2 - b^2u^2 + a^2u^2} du$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 2\pi a \int_0^1 \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)u^2} \cdot du \\ ou \\ A = 2\pi a \int_0^1 \sqrt{b^2 - (b^2 - a^2)u^2} \cdot du \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 2\pi a \int_0^1 \sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{\frac{b^2}{(a^2 - b^2)} + u^2} \cdot du \\ ou \\ A = 2\pi a \int_0^1 \sqrt{b^2 - a^2} \sqrt{\frac{b^2}{(b^2 - a^2)} - u^2} \cdot du \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 2\pi a \sqrt{a^2 - b^2} \int_0^1 \sqrt{\frac{b^2}{(a^2 - b^2)} + u^2} \cdot du \\ ou \\ A = 2\pi a \sqrt{b^2 - a^2} \int_0^1 \sqrt{\frac{b^2}{(b^2 - a^2)} - u^2} \cdot du \end{array} \right. . \quad (52)$$

Das tabelas de integrais verifica-se que:

$$\int \sqrt{u^2 + k^2} du = \frac{u\sqrt{u^2 + k^2}}{2} + \frac{k^2}{2} \ln(u + \sqrt{u^2 + k^2}) \quad (53)$$

$$\int \sqrt{k^2 - u^2} du = \frac{u\sqrt{k^2 - u^2}}{2} + \frac{k^2}{2} \arcsen \frac{u}{k}. \quad (54)$$

Assim, usando (53) e (54) para resolver (52) tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 2\pi a \sqrt{a^2 - b^2} \left[\frac{u\sqrt{u^2 + \frac{b^2}{(a^2 - b^2)}}}{2} + \frac{b^2}{2(a^2 - b^2)} \ln\left(u + \sqrt{u^2 + \frac{b^2}{(a^2 - b^2)}}\right) \right] \Big|_0^1 \\ \text{ou} \\ A = 2\pi a \sqrt{b^2 - a^2} \left[\frac{u\sqrt{\frac{b^2}{(b^2 - a^2)} - u^2}}{2} + \frac{b^2}{2(b^2 - a^2)} \arcsen \frac{u\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \right] \Big|_0^1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \pi a \left[a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right) - \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right) \right] \\ \text{ou} \\ A = \pi a \left[a + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \arcsen \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \right] \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \pi a \left[a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln\left(\frac{a}{b} + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right) \right] \\ \text{ou} \\ A = \pi a \left[a + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \arcsen \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \right] \end{array} \right. \quad (55)$$

Fazendo $\arcsen \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = \phi$ implica $\sen \phi = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = \frac{i\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$ e $\cos \phi = \frac{a}{b}$.

Substituindo em (55), obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \pi a \left[a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \left(\frac{a}{b} + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right) \right] = \pi a \left[a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi) \right] \\ \text{ou} \\ A = \pi a \left[a + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \right] = \pi a \left[a + \frac{b^2}{i\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} \phi) \right] \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \pi a \left[a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi) \right] \\ \text{ou} \\ A = \pi a \left[a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} i \phi \right] \end{array} \right. .$$

Logo, $\pi a \left[a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi) \right] = \pi a \left[a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} i \phi \right]$ e, conseqüente-
mente:

$$\boxed{\ln(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi) = i \phi.}$$

ANEXO C – LINHA DO TEMPO

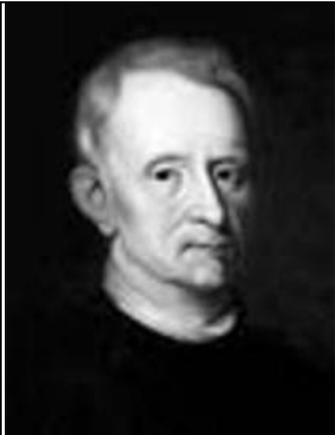
O quadro deste anexo apresenta a linha do tempo com as principais personalidades que contribuíram no desenvolvimento e na construção da teoria dos Números Complexos e dos Quatérnions, destacando as suas contribuições.

LINHA DO TEMPO

NOME	PERSONAGEM	ANO E CONTRIBUIÇÃO
Nicolo Fontana - Tartágia (1499-1557)		1539: Tartaglia mostra a Cardano a técnica de resolução de equações do tipo $x^3 + ax = b$, com a e b positivos
Gerônimo Cardano (1501-1576)		1545: Cardano publica Ars Magna, a primeira obra a conter métodos de resolução de equações de terceiro e quarto grau e onde aparece pela primeira vez manipulações com raízes quadradas de números negativos

<p>Rafael Bombelli (1526-1572)</p>	 A black and white profile portrait of Rafael Bombelli, showing him with a mustache and a high-collared garment.	<p>1572: publica o livro intitulado L'Algebra na qual forneceu a correta solução das equações cúbicas empregando a fórmula de Cardano que envolviam raízes quadradas de números negativos além de descrever a maneira de manipular esse tipo de números</p>
<p>Albert Girard. (1595-1632)</p>	 A black and white illustration of Albert Girard, depicted from the chest up, holding a globe and pointing at it with his right hand. A map is visible on the wall behind him.	<p>1629: Foi o primeiro a utilizar o símbolo $\sqrt{-1}$</p>
<p>René Descartes (1596-1650)</p>	 A black and white portrait of René Descartes, showing him with long, wavy hair and a mustache, wearing a dark coat with a white collar.	<p>1637: Designa as raízes quadrada de valores negativos, como números imaginários</p>
<p>John Wallis (1616-1703)</p>	 A black and white portrait of John Wallis, showing him with long hair, wearing a dark academic or clerical robe with a white collar.	<p>1685: O primeiro matemático a procurar uma interpretação geométrica a raiz de números negativos.</p>

<p>Roger Cotes (1682-1716)</p>		<p>1714: Apresenta fórmula $\ln(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) = i\phi$</p>
<p>Abraham de Moivre (1667-1754)</p>		<p>1722: Revela o artifício usado para obter o resultado que implicou na fórmula que leva seu nome,</p>
<p>Leonhard Euler (1707-1783)</p>		<p>1748: Apresenta a identidade $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$</p>
<p>Caspar Wessel (1745-1818)</p>		<p>1797: Apresenta um método onde propõe uma representação analítica para segmentos de retas no plano e no espaço e na qual aparece pela primeira vez a representação geométrica dos números complexos</p>

<p>Jean Robert Argand (1768 - 1822)</p>		<p>1806: Deu uma representação geométrica semelhante a que foi dada por Wessel, porém totalmente independente desse. Argand observa que pode-se representar a multiplicação i por uma rotação de 90°.</p>
<p>Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)</p>		<p>1831: Escreveu um artigo no qual associava cada número complexo a um único ponto do plano cartesiano. A partir dali a interpretação geométrica, se tornou totalmente aceita.</p>
<p>William Rowan Hamilton (1805 – 1865)</p>		<p>1833: Apresenta quase tres séculos depois do surgimento da fórmula de Cardano, um artigo no qual formaliza a álgebra dos números complexos.</p>

1. Imagem de Nicolo Fontana - Tartágia. http://en.wikipedia.org/wiki/File:Niccol_Tartaglia.jpg. Acesso em 17 de Agosto de 2013.
2. Imagem de Gerônimo Cardano. <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euler/images/Cardano.jpg>. Acesso em 17 de Agosto de 2013.
3. Imagem de Rafael Bombelli. <http://www.apprendre-math.info/history/photos/Bombelli.jpeg>. Acesso em 17 de Agosto de 2013.

4. Imagem de Albert Girard. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/BigPictures/Girard_Albert.jpeg. Acesso em 17 de Agosto de 2013.
5. Imagem de René Descartes. <http://www.ghc.usp.br/server/Sites-HF/Fabio-Ardito/imagens/descartes1.jpg>. Acesso em 17 de Agosto de 2013.
6. Imagem de John Wallis. <http://www.nndb.com/people/599/000087338/john-wallis-4-sized.jpg>. Acesso em 17 de Agosto de 2013.
7. Imagem de Roger Cotes. <http://www.ecured.cu/images/a/af/Cotes.jpeg>. Acesso em 26 de Outubro de 2013.
8. Imagem de Abraham de Moivre. <http://www.brasilescola.com/imagens/biografia/AbraMoiv7.jpg>. Acesso em 26 de Outubro de 2013.
9. Imagem de Leonhard Euler. <http://www.usna.edu/Users/math/meh/euler.gif>. Acesso em 17 de Agosto de 2013.
10. Imagem da página de rosto do artigo de Caspar Wessel. (EVES, 2011)
11. Imagem de Jean Robert Argand. http://www.s9.com/images/portraits/1156_Argand-Jean-Robert.jpg. Acesso em 17 de Agosto de 2013.
12. Imagem de Johann Carl Friedrich Gauss. http://www.rare-earth-magnets.com/images2/johann_carl_friedrich_gauss.jpg. Acesso em 17 de Agosto de 2013.
13. Imagem de William Rowan Hamilton. <http://www.profcardy.com/matematicos/bHamilton.jpg>. Acesso em 17 de Agosto de 2013.

ANEXO D – EXPANSÃO EM SÉRIE DE TAYLOR EM TORNO DA ORIGEM, DAS FUNÇÕES EXPONENCIAL, SENO E COSSENO

Os gráficos deste anexo são uma sugestão de abordagem para a expansão em série de Taylor de funções em torno da origem, que pode ser realizada através de algum software que gere gráficos de funções. O objetivo é a partir do gráfico da função $f(x)$ que se deseja fazer a expansão em série de Taylor, variar o número de termos da série com o intuito de mostrar que o gráfico dessa, $g(x)$, vai se moldando ao gráfico da função.

Expansão da função $f(x) = e^x$ por série de Taylor

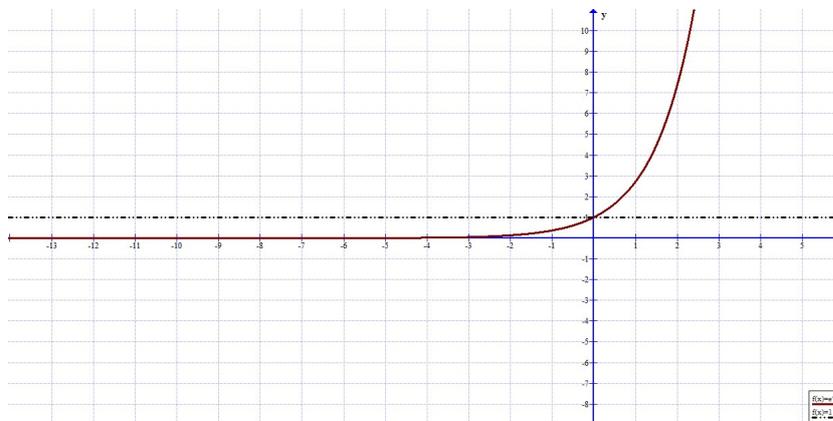


Figura 28: Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^0 \frac{x^n}{n!}$ e $f(x) = e^x$

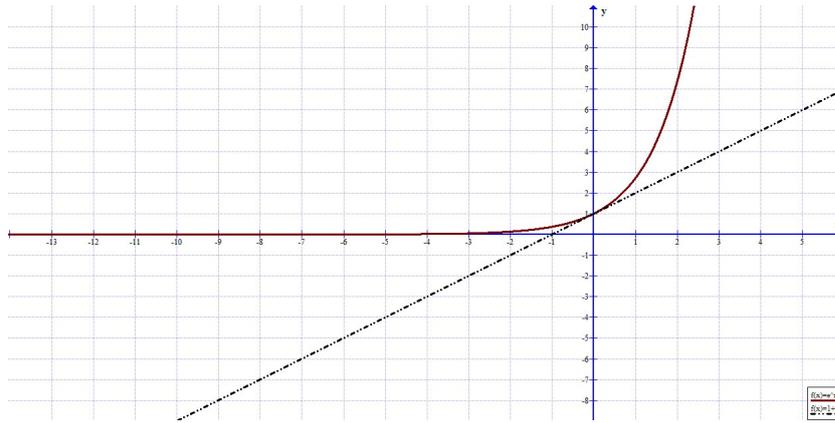


Figura 29: Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^1 \frac{x^n}{n!}$ e $f(x) = e^x$

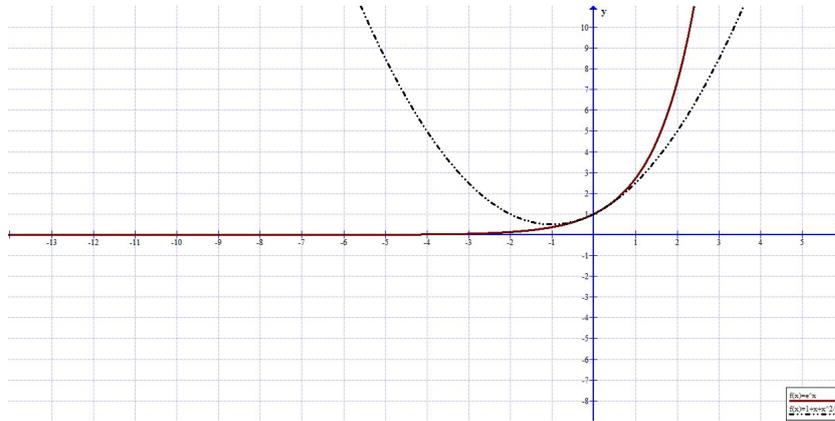


Figura 30: Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^2 \frac{x^n}{n!}$ e $f(x) = e^x$

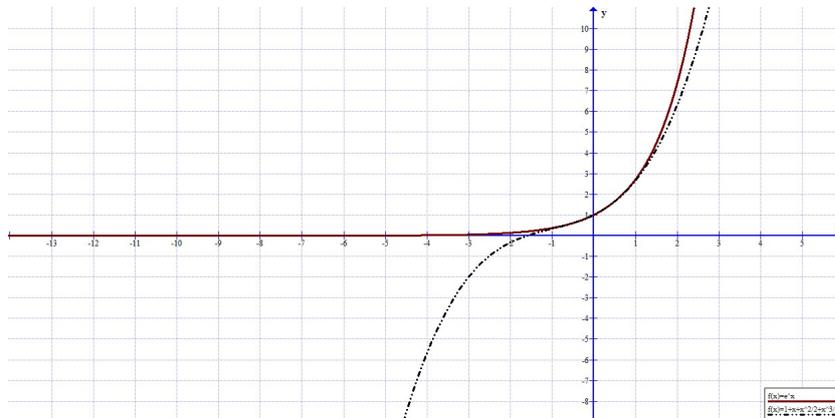


Figura 31: Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^3 \frac{x^n}{n!}$ e $f(x) = e^x$

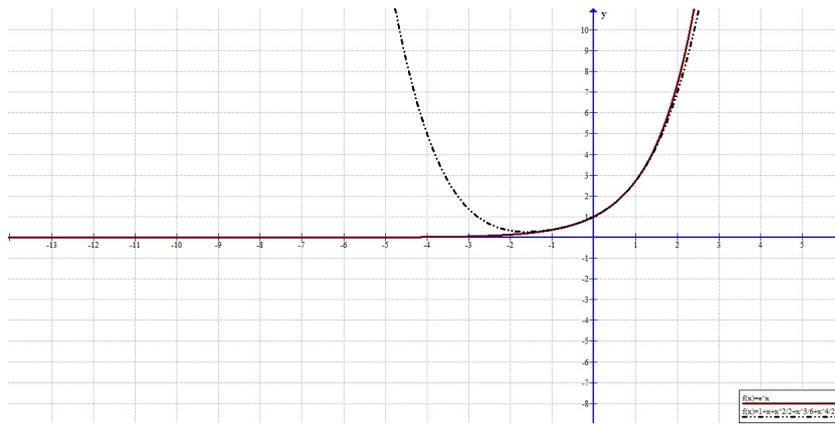


Figura 32: Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^4 \frac{x^n}{n!}$ e $f(x) = e^x$

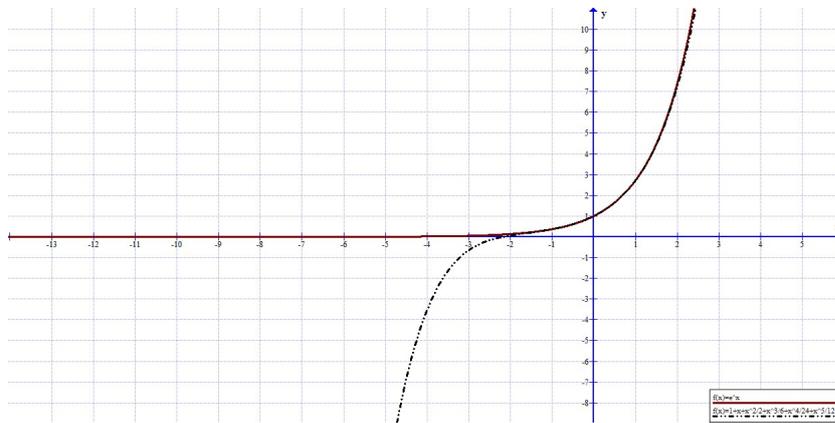


Figura 33: Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^5 \frac{x^n}{n!}$ e $f(x) = e^x$

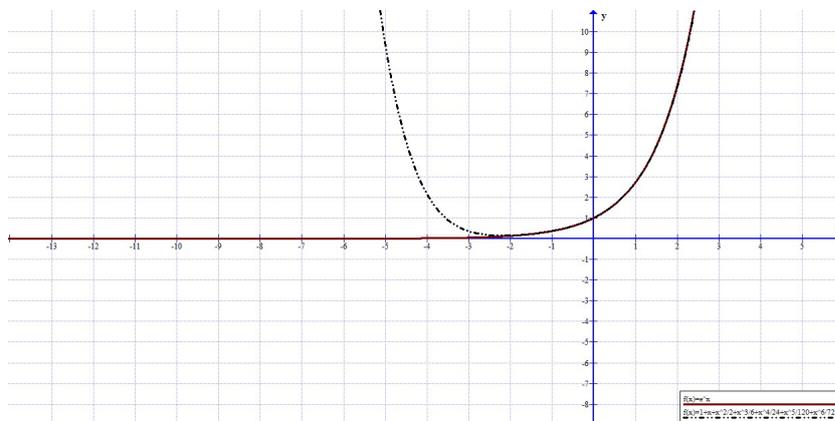


Figura 34: Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^6 \frac{x^n}{n!}$ e $f(x) = e^x$

Expansão da função $f(x)=\text{sen}(x)$ por série de Taylor

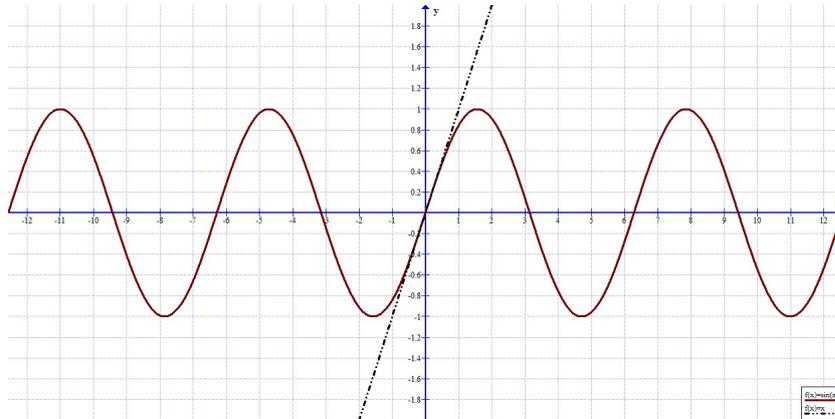


Figura 35: Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^0 (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ e $f(x) = \text{sen}(x)$

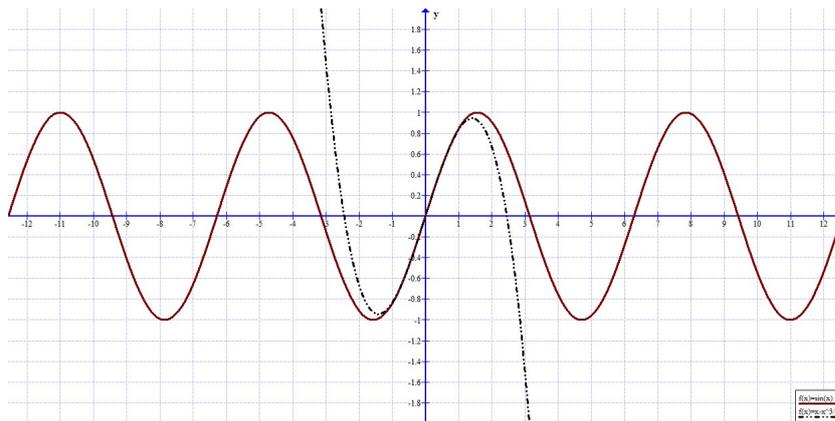


Figura 36: Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^1 (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ e $f(x) = \text{sen}(x)$

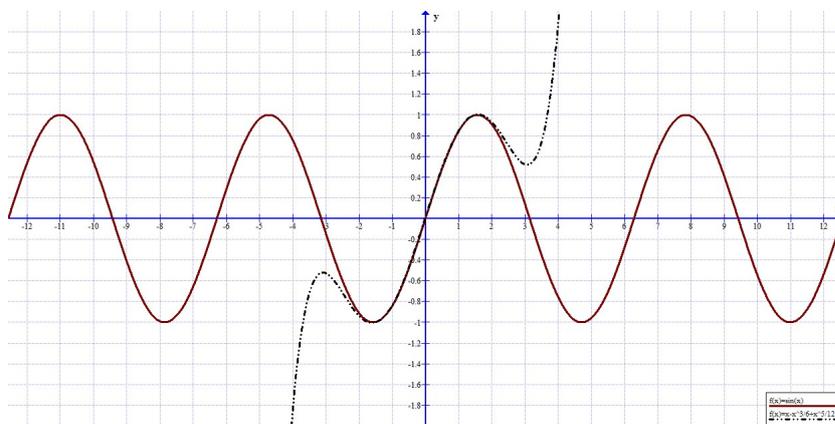


Figura 37: Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^2 (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ e $f(x) = \text{sen}(x)$

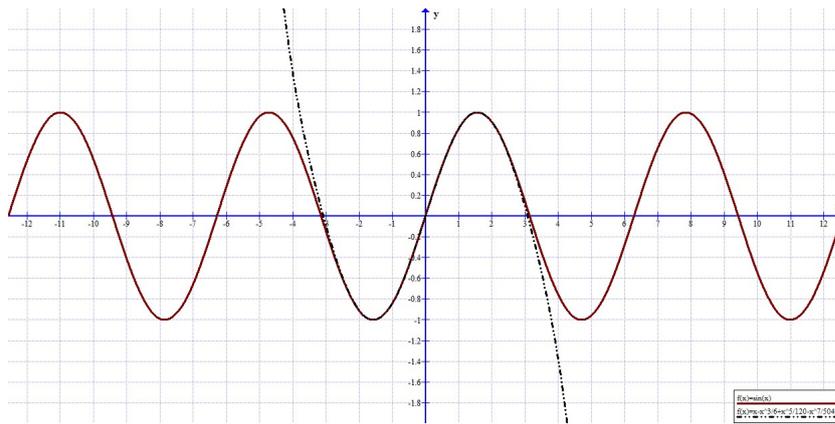


Figura 38: Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^3 (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ e $f(x) = \text{sen}(x)$

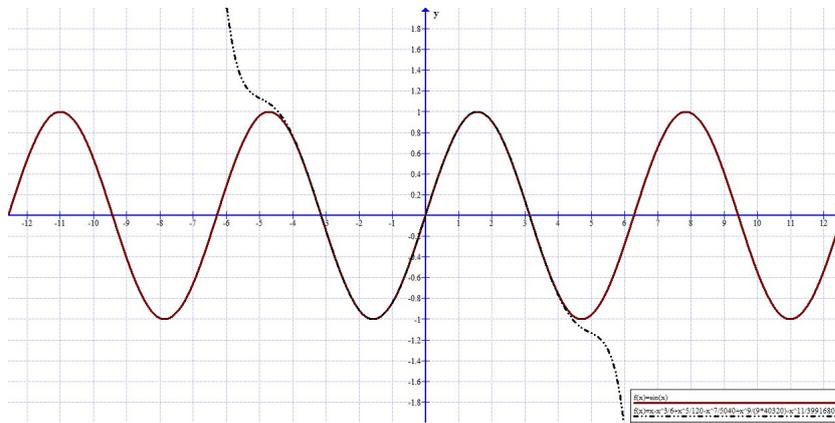


Figura 39: Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^4 (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ e $f(x) = \text{sen}(x)$

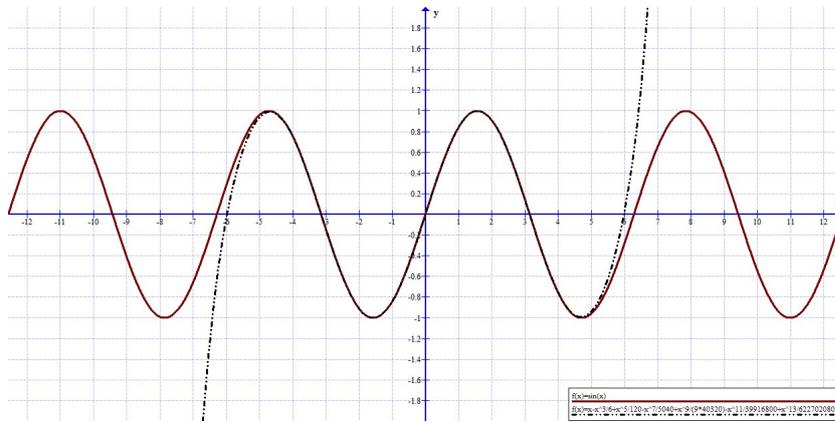


Figura 40: Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^5 (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ e $f(x) = \text{sen}(x)$

Expansão da função $f(x)=\cos(x)$ por série de Taylor

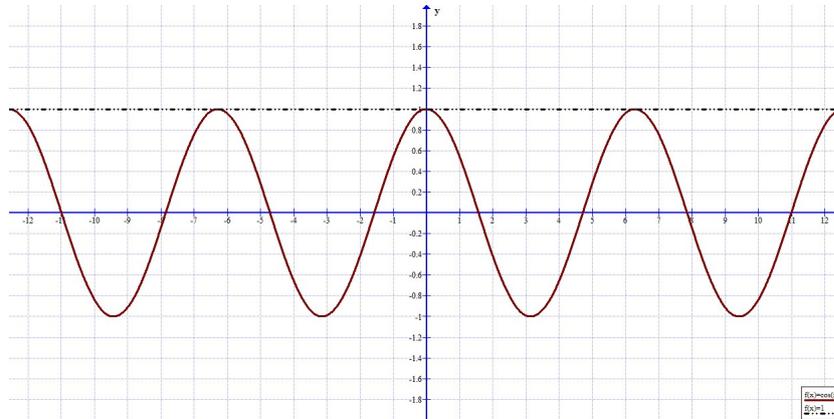


Figura 41: Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^0 (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ e $f(x) = \cos(x)$

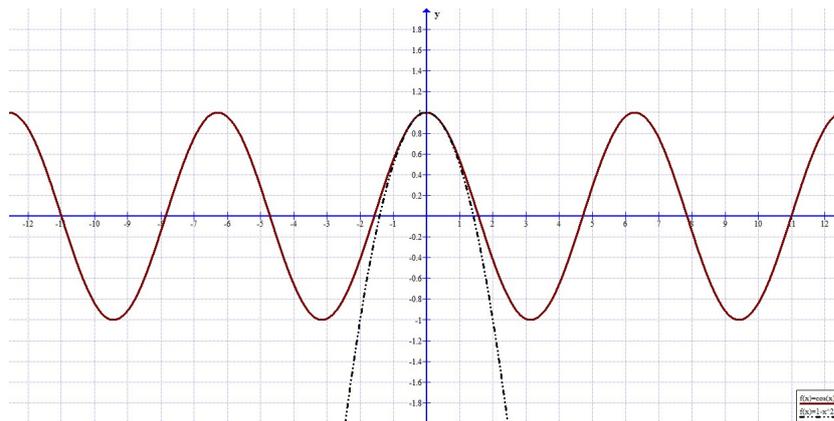


Figura 42: Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^1 (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ e $f(x) = \cos(x)$

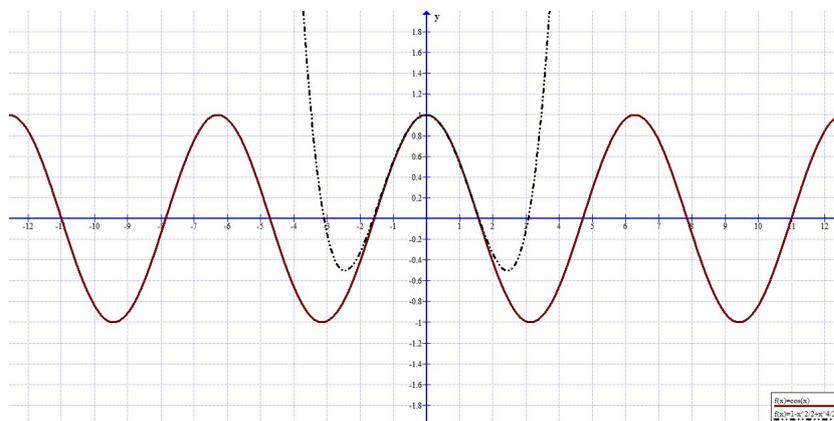


Figura 43: Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^2 (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ e $f(x) = \cos(x)$

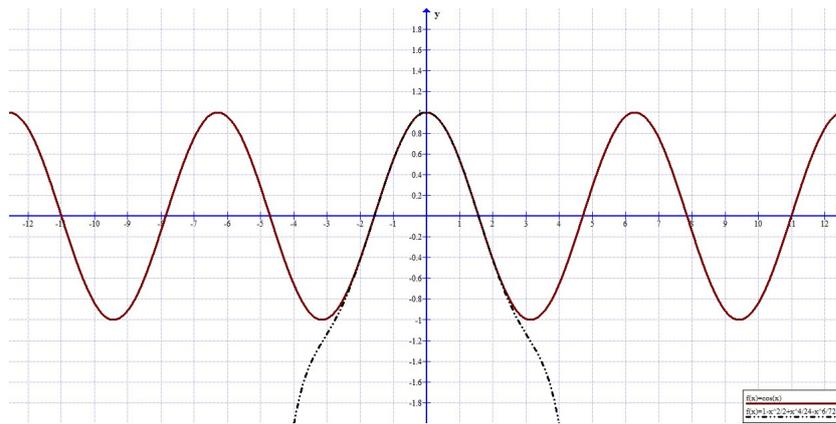


Figura 44: Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^3 (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ e $f(x) = \cos(x)$

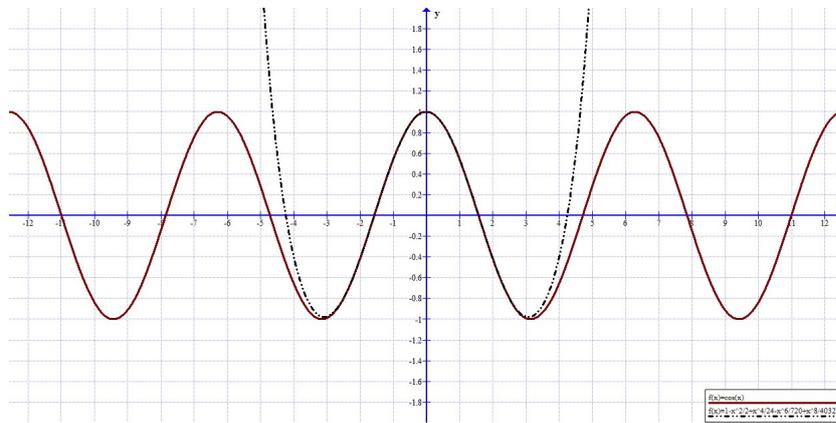


Figura 45: Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^4 (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ e $f(x) = \cos(x)$

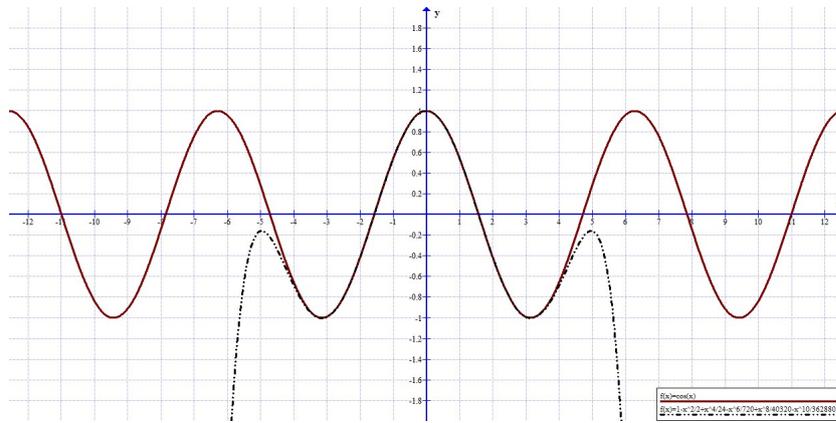


Figura 46: Comparação entre as funções $g(x) = \sum_{n=0}^5 (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ e $f(x) = \cos(x)$

REFERÊNCIAS

BAUNGART, J. K. **Algebra**. São Paulo: Atual, 1994. (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula, v. 4).

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1981.

CALDEIRA, C. R. da C. O ensino dos números complexos numa perspectiva histórica - de tartaglia ao uso das tics. In: ULBRA. **Anais do XVI EBRAPEM Encontro Brasileiro de Estudantes de Pósgraduação em Educação Matemática**. Canoas, 2012. ISSN 2237-8448. Disponível em: <<http://matematica.ulbra.br/ocs/index.php/ebrapem2012/xviebrapem/paper/viewFile/459/377>>. Acesso em: 15 de julho de 2013.

CARACA, B. de J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Editora livraria da física, 1951.

EF128. **Imagem do fluxo de um fluido sob $w = J(z) = z + \frac{1}{z}$** . 2011. Disponível em: <<http://biztechbrz.wordpress.com/2011/02/06/deducoes-sobre-o-aerofolio-de-joukowsky/>>. Acesso em: 20 de Outubro de 2013.

EVES, H. **Introdução a História da Matemática**. 5. ed. São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.

GARBI, G. G. **Romance das equações algébricas**. 4. ed. São Paulo: Editora livraria da física, 2010.

GRAUS, S. **Dicionário Online de Português**. 2013. Disponível em: <<http://www.dicio.com.br/complexo>>. Acesso em: 10 de Agosto de 2013.

Júnior, U. P. **Números Complexos - Um Estudo dos Registros de Representação e de Aspectos Gráficos**. Dissertação (Mestrado) — UFRJ, Rio de Janeiro, 2009.

JP. **William Rowan Hamilton Plaque**. 2007. Disponível em: <<http://www.geograph.org.uk/photo/347941>>. Acesso em: 24 de Outubro de 2013.

MAOR, E. *e*: **A História de Um Número**. 7. ed. Rio de Janeiro: Record, 2012.

MAPAS, G. 2013. Disponível em: <<https://maps.google.com/maps?ll=53.372965,-6.299997&spn=15.915295,0.254059&z=18>>. Acesso em: 15 de Outubro de 2013.

MILIES, C. P. A emergência dos números complexos. **Revista do Professor de Matemática**, v. 24, n. 2, p. 5–15, 1993.

MONO42. **Cabra West, Dublin, Ireland**. 2012. Disponível em: <<https://ssl.panoramio.com/photo/66093842>>. Acesso em: 20 de Outubro de 2013.

NAHIN, P. J. **An Imaginary Tale-The story of $\sqrt{-1}$** . Princeton: Princeton University Press, 2007.

NICOLAU, M. As metáforas quânticas aplicadas às organizações modernas. teorias do caos, fractais e suas influências sobre nossa visão do mundo. In: **Revista Temática**. [S.l.: s.n.], 2006.

OLIVEIRA, C. N. C. de. **Números Complexos - Um Estudo dos Registros de Representação e de Aspectos Gráficos**. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

ROQUE, T. **História da Matemática**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor Ltda, 2012.

ROSA, M. S. **Números Complexos - Uma Abordagem Histórica para Aquisição do Conceito**. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1998.

SANTIAGO, P. R. P. **Rotações tridimensionais em biomecânica via quatérnions: aplicação na análise dos movimentos esportivos**. Tese (Doutorado) — Unesp, Rio Claro, 2009.

SANTOS, C. A. dos. **Hawking busca a teoria total, Resenha do livro Buracos Negros, Universos-Bebês e outros ensaios, de Stephen Hawking**. 1995. Disponível em: <<http://www.if.ufrgs.br/cas/buraconegro/buraconegro.html>>. Acesso em: 21 de Setembro de 2013.

STEWART, I. **Uma história da simetria na Matemática**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor Ltda, 2012.

VAZ, J. **O que é geometria não comutativa**. 2000. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/vaz/nc.htm>>. Acesso em: 14 de Setembro de 2013.

WIKIPEDIA. **Conjunto de Julia**. 2013. Disponível em: <<http://pt.wikipedia.org/wiki/ConjuntodeJulia>>. Acesso em: 15 de Outubro de 2013.

WIKIPEDIA. **Conjunto de mandelbrot**. 2013. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set>. Acesso em: 15 de Outubro de 2013.

WIKIPEDIA. **Curva de Koch**. 2013. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Curvade_Koch>. Acesso em: 15 de Outubro de 2013.