



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
Centro de Ciências da Natureza - CCN
Programa de Pós-Graduação - PROFMAT
Mestrado Profissional em Matemática



Valdério Oliveira Rodrigues

**Geometria Plana na OBMEP: Um Estudo das
Questões de Geometria na Segunda Fase da
OBMEP nos Níveis 1 e 2**

Teresina - PI

2024

Valdério Oliveira Rodrigues

Geometria Plana na OBMEP: Um Estudo das Questões de Geometria na Segunda Fase da OBMEP nos Níveis 1 e 2

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí.

Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal do Piauí

Orientador: Prof. Dr. Manoel Vieira de Matos Neto
Coorientador: Prof. Dr. João Carlos de Oliveira Souza

Teresina - PI

2024

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco
Divisão de Representação da Informação

R696g Rodrigues, Valdério Oliveira.
Geometria Plana na OBMEP : um estudo das questões de Geometria na segunda fase da OBMEP nos níveis 1 e 2 / Valdério Oliveira Rodrigues. – 2024.
170 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí,
Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2024.
“Orientador: Prof. Dr. Manoel Vieira de Matos Neto”.
“Coorientador: Prof. Dr. João Carlos de Oliveira Sousa”.

1. Ensino de Matemática. 2. OBMEP. 3. Resolução de Problemas. I. Matos Neto, Manoel Vieira de. II. Sousa, João Carlos de Oliveira. III. Título.

CDD 510.7

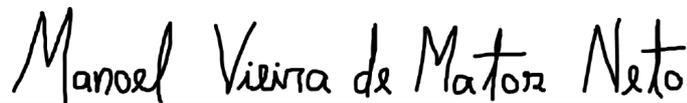
Bibliotecária: Francisca das Chagas Dias Leite – CRB3/1004

Valdério Oliveira Rodrigues

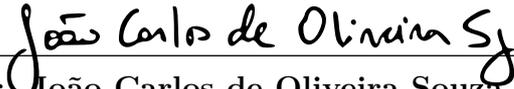
Geometria Plana na OBMEP: Um Estudo das Questões de Geometria na Segunda Fase da OBMEP nos Níveis 1 e 2

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí.

Trabalho Aprovado. Teresina - PI, 14 de Junho de 2024:



Prof. Dr. Manoel Vieira de Matos Neto - Orientador
Universidade Federal do Piauí - UFPI



Prof. Dr. João Carlos de Oliveira Souza - Coorientador
Universidade Federal do Piauí - UFPI

Prof. Dr. Vitaliano de Sousa Amaral - Examinador Interno
Universidade Federal do Piauí - UFPI



Documento assinado digitalmente

WALTER ARAUJO ROCHA JUNIOR

Data: 03/07/2024 11:31:16-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Walter Araújo Rocha Júnior - Examinador Externo
Instituto Federal do Maranhão - IFMA

Teresina - PI

2024

AGRADECIMENTOS

Neste momento de realização acadêmica e pessoal, é com profunda gratidão que expresso meus sinceros agradecimentos a todos que contribuíram para a concretização desta dissertação.

Em primeiro lugar, quero agradecer ao meu Orientador: Prof. Dr. Manoel Vieira de Matos Neto e ao meu Coorientador: Prof. Dr. João Carlos de Oliveira Souza, cuja orientação e apoio foram fundamentais ao longo de todo o processo de pesquisa. Suas orientações sábias, percepções valiosas e paciência infinita foram essenciais para a condução deste estudo. Seu comprometimento com a excelência acadêmica é uma inspiração constante.

Agradeço também aos membros da banca examinadora, composta pelos professores Prof. Dr. Vitaliano de Sousa Amaral e Prof. Dr. Walter Araújo Rocha Júnior, por dedicarem seu tempo e conhecimento na avaliação deste trabalho. Suas críticas construtivas e sugestões enriqueceram significativamente esta dissertação.

À minha família, que sempre me apoiou incondicionalmente em minha jornada acadêmica, dedico minha mais profunda gratidão. Suas palavras de encorajamento, amor e apoio foram o alicerce emocional que me permitiu perseverar nos momentos de desafio.

Aos colegas de mestrado e aos amigos que compartilharam comigo suas experiências e conhecimentos, quero expressar meu reconhecimento. Suas discussões enriquecedoras e amizades tornaram esta jornada ainda mais memorável.

À Universidade Federal do Piauí (UFPI) e todos os profissionais que contribuíram para a minha formação, agradeço pelo ambiente acadêmico enriquecedor que proporcionaram foi fundamental para o desenvolvimento do meu conhecimento.

Por fim, gostaria de estender meu agradecimento a todos aqueles cujas obras e pesquisas foram fontes de inspiração e referência para esta dissertação. Suas contribuições à área do conhecimento são inestimáveis.

Este trabalho representa o esforço coletivo e é com humildade que reconheço a influência positiva de todos os envolvidos. Espero que esta dissertação possa contribuir de alguma forma para o avanço do conhecimento em nossa área de estudo e para o benefício da sociedade como um todo.

Muito obrigado a todos.

"Aprendizagem nunca esgota a mente."

(Leonardo da Vinci)

Resumo

Esta dissertação se propõe a investigar as questões de geometria apresentadas na segunda fase da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) nos níveis 1 e 2. O estudo busca compreender a natureza dessas questões, analisando sua complexidade, estrutura e os tópicos geométricos abordados. Além disso, examina as competências matemáticas avaliadas por meio dessas questões e discute como elas podem contribuir para o ensino e a aprendizagem da geometria no contexto educacional brasileiro. A pesquisa emprega uma metodologia de análise qualitativa das questões e procura identificar padrões e tendências ao longo das edições da OBMEP. Os resultados desta dissertação fornecem informações valiosas para educadores, formuladores de políticas educacionais e estudantes interessados no aprimoramento do ensino de geometria e no estímulo ao pensamento matemático entre os jovens no Brasil.

Palavras-chave: OBMEP; Ensino de Matemática; Resolução de Problemas.

ABSTRACT

This dissertation aims to investigate the geometry questions presented in the second phase of the Brazilian Public School Mathematics Olympiad (OBMEP) at levels 1 and 2. The study seeks to understand the nature of these issues, analyzing their complexity, structure and geographic geometric details. Additionally, examine skills mathematics assessed through these questions and discuss how they can contribute to the teaching and learning of geometry in the Brazilian educational context. A research a methodology for qualitative analysis of issues and seeks to identify patterns and trends throughout OBMEP editions. The results of this dissertation provided useful information for educators, educational policy makers and students specifically in improving geometry teaching and stimulating thinking mathematics among young people in Brazil.

Keywords: OBMEP; Mathematics Education; Problem Solving.

Lista de ilustrações

1	Perímetro do quadrado	32
2	Perímetro do retângulo	32
3	Perímetro do triângulo	33
4	Perímetro da figura compostas por mais de um retângulo	34
5	Interpretação cálculo do perímetro	34
6	Cálculo do perímetro do quadrado recortado	35
7	Figura formada com encaixes de degraus	35
8	Área de um quadrado de lado n	39
9	Área de um quadrado de lado igual a $a + b$, disposta de maneira a calcularmos a área de um retângulo de lados a e b	40
10	Cálculo da área do paralelogramo $ABCD$	40
11	Construção auxiliar no cálculo da área do paralelogramo	41
12	Triângulo $\triangle ABC$, cuja base é o segmento AB e a altura é o segmento CH	42
13	Cálculo da área do triângulo $\triangle ABC$	42
14	Dois triângulos de mesma área produzidos por deslocamento do vértice ao longo de uma reta paralela à base	43

Lista de tabelas

1	NÚMERO DE ESCOLAS INSCRITAS NA OBMEP (2005-2023)	19
2	NÚMERO DE ALUNOS INSCRITOS NA OBMEP (2005-2023)	20
3	QUANTIDADE DE QUESTÕES DE GEOMETRIA NA SEGUNDA FASE DA OBMEP, NOS NIVEIS 1 E 2 (2005-2023)	25

Lista de Quadros

2.1	CONTEÚDO DE GEOMETRIA ABORDADO NA 2ª FASE DA OBMEP NÍVEL 1 (2005-2023)	26
2.2	CONTEÚDO DE GEOMETRIA ABORDADO NA 2ª FASE DA OBMEP NÍVEL 2 (2005-2023)	27
2.3	HABILIDADES DA BNCC QUE ENVOLVEM A GEOMETRIA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL(2017)	30

Lista de Siglas

BNCC Base Nacional Comum Curricular

IMPA Instituto de Matemática Pura e Aplicada

MCTI Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovações

MEC Ministério da Educação

OBMEP Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

PIC Programa de Iniciação Científica Jr.

PICME Programa de Iniciação Científica e Mestrado

POTI Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo

SBM Sociedade Brasileira de Matemática

PROFMAT Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Sumário

INTRODUÇÃO	14
1 A TRAJETÓRIA DA OBMEP	18
1.1 Histórico e Metas de Participação	18
1.2 Impacto e Reconhecimento	20
1.3 Alguns Programas da OBMEP	21
1.3.1 Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC)	21
1.3.2 Portal da OBMEP	21
1.3.3 Olimpíada Mirim - OBMEP	22
1.3.4 Portal Clubes de Matemática	22
1.3.5 Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI)	22
1.3.6 Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME)	22
1.3.7 Bolsa-Tech Fundação Behring – OBMEP	23
1.3.8 IMPA Tech: Bacharelado em Matemática da Tecnologia e Inovação	23
1.4 Importância das Olimpíadas de Conhecimento	23
2 ANÁLISE DAS QUESTÕES DE GEOMETRIA NA SEGUNDA FASE DA OBMEP	24
2.1 Levantamento de Dados	24
2.1.1 Conteúdos de Geometria nas Questões	24
2.2 Complexidade das Questões	28
2.3 Estratégias e Abordagens	28
2.4 Explorando Habilidades e Competências Preconizadas pela BNCC na Resolução de Questões de Geometria	29
2.5 A Geometria na BNCC	29
3 A GEOMETRIA DA SEGUNDA FASE DA OBMEP	31
3.1 Tópicos de Geometria na Segunda fase da OBMEP	31
3.2 Abordagem dos principais tópicos de geometria	32
3.2.1 Perímetro das Principais Figuras Planas Presente na OBMEP	32
3.2.2 Áreas de figuras planas	38
3.2.3 Semelhança e Congruência de triângulos	43
3.2.4 Razão de Semelhança	44
3.3 Problemas da OBMEP	44
3.4 Recursos e Estratégias de Estudo	46
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS	48
REFERÊNCIAS	49

A	APÊNDICE - BANCO DE QUESTÕES COM SOLUÇÕES OFICIAIS.	50
A.1	Questões de Geometria Plana na Segunda Fase da OBMEP - Nível 1 (2005-2023)	50
A.2	Questões de Geometria Plana na Segunda Fase da OBMEP - Nível 2 (2005-2023)	106
Índice		169

INTRODUÇÃO

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) [10] é uma competição nacional que destaca a importância da matemática e, em especial da geometria que desafia estudantes de todo o Brasil. Neste estudo, exploramos o papel da geometria na OBMEP e forneceremos estudos valiosos para o aprimoramento das habilidades geométricas. Ao identificar e entender os conteúdos que mais caem na OBMEP, esperamos fornecer um guia sólido para a preparação, com ênfase naquilo que é mais relevante e desafiador.

A preparação para a OBMEP é crucial para os estudantes que desejam se destacar na competição e aprimorar seus conhecimentos em matemática. Nesse contexto, diversos estudos têm sido conduzidos por alunos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, como os trabalhos de Sousa (2023), Ferreira (2023)[2] e Sousa (2020)[8], entre outros. Essa olimpíada é uma das maiores competições matemáticas do mundo e desfruta de um amplo reconhecimento e prestígio, tanto no contexto educacional do Brasil quanto internacionalmente.

Com isso, o objetivo geral dessa pesquisa é realizar uma investigação abrangente e aprofundada sobre as questões de geometria na segunda fase da OBMEP, nos Níveis 1 e 2. De forma mais detalhada, os objetivos específicos que serão desenvolvidos nessa pesquisa são:

- analisar a natureza e a complexidade das questões de geometria apresentadas na OBMEP ao longo das edições;
- explorar o papel da geometria nesta competição;
- identificar padrões recorrentes e tendências nas questões geométricas, destacando temas específicos que demandam atenção especial;
- compreender a evolução das questões geométricas ao longo do tempo, examinando possíveis mudanças na abordagem e na dificuldade;
- relacionar as questões de geometria na OBMEP com as prioridades educacionais brasileiras, destacando como essas questões refletem o ensino da geometria nas escolas;
- fornecer um guia para a preparação dos estudantes, com ênfase nos conteúdos mais relevantes e desafiadores na geometria da OBMEP;
- contribuir não apenas para o sucesso na OBMEP, mas também para a excelência contínua da educação matemática, capacitando uma nova geração com domínio sólido da geometria.

Desde o seu início em 2005, a OBMEP tem desempenhado um papel fundamental

na promoção da excelência em matemática no Brasil. O alcance nacional da OBMEP e a inclusão de estudantes diversos tornam-na uma iniciativa verdadeiramente abrangente e transformadora. Ao estimular o interesse pela matemática, identificar talentos em potencial e premiar o mérito acadêmico, ela não apenas reconhece a importância da matemática na educação, mas também atua como uma força catalisadora para o aprimoramento do ensino dessa disciplina em todo o país.

No entanto, é na segunda fase da OBMEP, particularmente nos níveis 1 e 2, que a geometria se destaca como um elemento central e desafiador. As questões de geometria apresentadas nessa etapa exigem dos estudantes uma compreensão profunda dos princípios geométricos e a capacidade de aplicá-los de forma criativa e precisa em situações problemáticas. Essas questões representam um teste real das habilidades matemáticas dos estudantes, indo além da mera memorização de fórmulas e teoremas.

A decisão de abordar a geometria na 2ª fase da OBMEP ocorre devido à carência de material disponível sobre esse nível específico de avaliação geométrica. Nota-se uma lacuna nesse contexto, especialmente em comparação com os estudos existentes, como os trabalhos de Modolo (2023)[7] e Sousa (2020)[8], que se concentram no Nível 1 da OBMEP. Ao direcionar o foco para o Nível 2, destinado aos alunos do 8º e 9º ano, busca-se enriquecer e aprofundar a compreensão desses estudos, contribuindo para uma análise mais abrangente e específica dessa fase da competição.

Assim, surge a necessidade de realizarmos uma análise aprofundada das questões de geometria na segunda fase da OBMEP nos níveis 1 e 2. Com isso surgem algumas perguntas: Quais são os tópicos geométricos mais frequentemente abordados? Como essas questões se alinham com os objetivos de ensino da geometria? Que competências matemáticas específicas elas buscam avaliar? Este estudo visa responder a essas questões, destacando mais uma contribuição para o ensino e a aprendizagem da geometria no Brasil.

No nosso ponto de vista, a Geometria é uma das áreas mais fascinantes e desafiadoras da matemática, e sua compreensão desempenha um papel fundamental no desenvolvimento das habilidades matemáticas dos estudantes em diferentes níveis de ensino. No contexto educacional brasileiro, a OBMEP tem se destacado como uma iniciativa fundamental para promover o interesse e a excelência em matemática entre os jovens. Neste contexto, a segunda fase da OBMEP nos níveis 1 e 2 se apresenta como um desafio importante, abordando questões de geometria que testam a capacidade dos estudantes em aplicar os conceitos geométricos em situações problemáticas.

Este trabalho é estruturado de forma a proporcionar uma análise abrangente das questões de geometria da OBMEP na segunda fase. A partir da contextualização e fundamentação teórica inicial, exploraremos a natureza das questões, identificando padrões e tendências ao longo das edições da competição. Em seguida, discutiremos a relevância

dessas questões para o ensino de geometria e, por fim, apresentaremos as conclusões e recomendações decorrentes desta pesquisa.

Estruturalmente, este trabalho está dividido em quatro capítulos: O “[Capítulo 1](#)” da dissertação é dedicado à apresentação da OBMEP e seus programas. Nesse contexto, exploraremos em detalhes a estrutura e os objetivos desta olimpíada, destacando como ela se tornou uma competição matemática de destaque no cenário educacional brasileiro. Além disso, abordaremos os diversos programas associados à OBMEP, discutindo como essas iniciativas contribuem para promover a excelência na matemática nas escolas públicas do Brasil.

No “[Capítulo 2](#)”, adentraremos no processo de levantamento de dados por meio de pesquisa documental, explorando as provas da 2ª fase da OBMEP abrangendo um período de 19 anos, de 2005 a 2023. Esta etapa é crucial para o nosso estudo, pois nos permitirá coletar informações valiosas sobre o conteúdo, a estrutura e a complexidade das questões geométricas presentes nas provas da competição. Ao examinar um período tão extenso, seremos capazes de identificar tendências e mudanças ao longo do tempo, oferecendo dados significativos sobre como a geometria é abordada na OBMEP e como essas questões têm evoluído ao longo dos anos. Além disso, essa análise abrangente nos possibilitará compreender melhor como as questões geométricas refletem a ênfase e os desafios da matemática no contexto educacional brasileiro durante esse período. Dessa forma, estaremos preparados para fornecer uma visão sólida e fundamentada das questões de geometria na OBMEP e de seu impacto no ensino e na aprendizagem da matemática no Brasil.

O “[Capítulo 3](#)” tem como foco apresentar os temas de geometria que são abordados na segunda fase da OBMEP. Isso significa que vamos mostrar quais tópicos de geometria os participantes da competição encontrarão nas questões. Vamos explicar não apenas quais são esses tópicos, mas também as dificuldades e particularidades das questões de geometria. Neste capítulo, buscamos capacitar os leitores para compreender de forma mais profunda os conceitos geométricos, proporcionando uma base sólida para encarar com confiança os desafios geométricos inerentes na OBMEP.

Aproveitando a análise dos dados coletados no capítulo 2, no capítulo 3 visamos a produção de um material didático, centrado nos conteúdos mais recorrentes na OBMEP. Este recurso representará uma contribuição substancial, proporcionando aos leitores um guia valioso para o aprimoramento de suas habilidades matemáticas e uma compreensão sólida da geometria dos tópicos de geometria relevantes na OBMEP e se sintam mais preparados para enfrentar as questões da competição. E por fim, no “[Apêndice A](#)”, abordamos as questões relacionadas a geometria e suas respectivas resoluções. Isso ajudará os leitores a aplicar os conhecimentos adquiridos no Capítulo 3 para resolver problemas específicos da competição. Certamente, o entendimento sólido dos tópicos de geometria

relevantes na OBMEP, adquirido no Capítulo 3, será uma base valiosa para enfrentar as questões desafiadoras da competição e encontrar soluções bem fundamentadas.

À medida que avançamos neste estudo, vale ressaltar que a Geometria, com sua Enigmática beleza e complexidade, abre portas para a exploração de padrões, simetrias e relações espaciais que transcendem o mero cálculo numérico. Nesse sentido, conforme citado por Lindquist (199, p.50)[4] “[...] devemos ensinar geometria como geometria, do mesmo modo como a álgebra e o cálculo são ensinados”. Essas idéias são reforçadas por Lorenzato (2006, p.59)[5] quando afirma que “por mais conhecimentos sobre outras partes da matemática que alguém possuir, eles não serão suficientes para resolver questões que demandem percepção e raciocínio geométrico”. Assim, a matemática apresenta questões que exigem uma maneira própria de raciocínio que é desenvolvido apenas pelo estudo da geometria.

A geometria não se restringe à simples compreensão de formas e figuras geométricas; vai além, desenvolvendo o raciocínio lógico, a criatividade e a habilidade de enfrentar desafios complexos com confiança. Para Lorenzato (1995)[6], o estudo da Geometria é essencial, pois desenvolve o pensamento geométrico e o raciocínio visual, permitindo resolver situações da vida cotidiana e compreender questões de outras áreas do conhecimento. Esse campo da matemática não só nos incentiva a explorar o mundo físico, mas também a aprimorar nossa capacidade de analisar e resolver problemas matemáticos, e, por conseguinte, desafios da vida real. Assim, a geometria não se confina à sala de aula; ela enriquece a percepção do mundo pelos estudantes, conectando-se à arquitetura, explorações espaciais, design inovador e diversas áreas da ciência e tecnologia, ressaltando a importância de compreender e aplicar esses conceitos como habilidades valiosas.

Desejamos que este estudo realce a importância da geometria na educação matemática e formação dos estudantes brasileiros. Ao explorar os aspectos geométricos da OBMEP, buscamos oferecer ferramentas que aprimorem o ensino, preparando os alunos para os desafios da competição e promovendo uma apreciação profunda e duradoura dos princípios geométricos.

Dessa forma, convidamos o leitor a embarcar conosco nesta jornada de investigação e descoberta, na qual a geometria se revela não apenas como uma disciplina acadêmica, mas como uma ferramenta essencial para o desenvolvimento do pensamento lógico e analítico dos jovens estudantes brasileiros. Através deste estudo, esperamos contribuir para o aprimoramento do ensino da geometria e para a promoção da excelência matemática em nosso país.

1 A TRAJETÓRIA DA OBMEP

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é uma iniciativa promovida pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) voltada para o Ensino Médio e Fundamental. Financiada pelo Ministério da Educação (MEC) e pelo Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovações (MCTI) e apoiada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), a OBMEP foi criada com o objetivo de estimular o estudo da matemática nas escolas públicas e revelar talentos.

Criada em 2005, a OBMEP e o seu crescimento colocaram a competição no centro da pauta nacional de educação.

1.1 Histórico e Metas de Participação

A OBMEP rapidamente se tornou uma iniciativa abrangente, envolvendo milhões de estudantes e escolas em todo o Brasil. Ao longo dos anos, a participação cresceu significativamente, refletindo o impacto positivo do projeto.

Em quase duas décadas, a OBMEP alcançou mais 18 milhões de alunos e mais de 55 mil escolas, tornando-se a maior olimpíada estudantil do mundo. Nesse período, tem promovido a descoberta de inúmeros jovens talentosos e a melhoria do ensino da Matemática no Brasil.

As ações promovidas pela OBMEP, como o envio de kits de divulgação, circulares eletrônicas e o convite à participação de escolas privadas em 2017, contribuíram para esse aumento. Em 2023, 99,87% dos municípios brasileiros participaram, inscrevendo um impressionante total de 18.369.125 alunos (dados retirados do site da OBMEP [10]).

Este crescimento reflete não apenas a magnitude do projeto, mas também seu impacto significativo na promoção da matemática nas instituições de ensino brasileiras.

Os objetivos da Olimpíada foram definidos como: estimular e promover o aprendizado da Matemática nas escolas públicas; colaborar no aperfeiçoamento dos professores de matemática das escolas públicas, contribuindo assim para a sua valorização profissional; contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática nas escolas da rede pública; identificar jovens talentos e fornecer oportunidades para seu ingresso em cursos superiores nas áreas científicas e tecnológicas; promover a integração entre as escolas públicas, as universidades federais, os institutos de pesquisa e as sociedades científicas; contribuir para a inclusão social por meio da difusão de conhecimentos.

Para atingir tais objetivos, a Coordenação Geral da OBMEP, e as escolas participantes,

trabalham em conjunto não só na realização das provas de primeira e segunda fase, mas também na divulgação da iniciativa e no desenvolvimento de atividades preparatórias para as etapas da Olimpíada.

Estas metas estabelecidas visam não somente fortalecer o ensino da Matemática, mas também promover a valorização do corpo docente, identificar e incentivar jovens talentos, além de promover a integração e inclusão social por meio do compartilhamento de conhecimentos. Esse alinhamento com os objetivos da Olimpíada reforça sua relevância na esfera educacional brasileira.

A tabela a seguir apresenta o número de escolas que participaram da OBMEP ao longo dos anos, destacando a adesão tanto de escolas públicas quanto privadas.

TABELA 1: NÚMERO DE ESCOLAS INSCRITAS NA OBMEP (2005-2023)

Ano	Escolas Públicas	Escolas Privadas	Total de Escolas
2005	31.031	-	31.031
2006	32.655	-	32.655
2007	38.450	-	38.450
2008	40.397	-	40.397
2009	43.854	-	43.854
2010	44.717	-	44.717
2012	46.728	-	46.728
2013	47.145	-	47.145
2015	47.580	-	47.580
2016	47.474	-	47.474
2017	48.837	4.394	53.231
2018	48.972	5.539	54.498
2019	49.072	5.759	54.831
2021	49.561	3.814	53.375
2022	49.452	5.036	54.488
2023	49.975	5.408	55.383

Fonte: Site da OBMEP¹

Além disso, a OBMEP tem impactado significativamente o número de alunos envolvidos na competição. A segunda tabela destaca o número de alunos inscritos,

¹ <<https://www.obmep.org.br/em-numeros.htm>>. acessado em 23 de Fevereiro de 2024.

separando as informações entre alunos de escolas públicas e privadas.

TABELA 2: NÚMERO DE ALUNOS INSCRITOS NA OBMEP (2005-2023)

Ano	Alunos Públicos	Alunos Privados	Total de Alunos
2005	10.520.831	-	10.520.831
2006	14.181.705	-	14.181.705
2007	17.341.732	-	17.341.732
2008	18.326.029	-	18.326.029
2009	19.198.710	-	19.198.710
2010	19.665.928	-	19.665.928
2011	18.720.068	-	18.720.068
2012	19.166.371	-	19.166.371
2013	18.762.859	-	18.762.859
2014	18.192.526	-	18.192.526
2015	17.972.333	-	17.972.333
2016	17.839.424	-	17.839.424
2017	17.899.672	340.825	18.240.497
2018	17.832.236	405.760	18.237.996
2019	17.693.660	465.115	18.158.775
2021	17.357.381	417.555	17.774.936
2022	17.621.489	538.147	18.159.636
2023	17.636.175	732.950	18.369.125

Fonte: Site da OBMEP³

Esses dados refletem não apenas a magnitude do programa, mas também o seu impacto positivo na promoção do aprendizado e interesse pela matemática em todo o país.

1.2 Impacto e Reconhecimento

A OBMEP exerce um impacto e reconhecimento significativos no Brasil, tornando-se uma referência nacional em estímulo ao estudo da Matemática. Seu impacto é evidenciado pela promoção da excelência acadêmica, desafiando estudantes a superarem

² <<https://www.obmep.org.br/em-numeros.htm>>. Acessado em 23 de Fevereiro de 2024.

seus limites intelectuais por meio de provas desafiadoras. Além disso, a OBMEP contribui expressivamente para a descoberta e valorização de talentos em Matemática, promovendo uma cultura de aprendizado dinâmica e participativa.

O reconhecimento da OBMEP no cenário educacional brasileiro é marcado pela sua trajetória de sucesso, consolidando-se como um programa de grande relevância na promoção do ensino de qualidade. O impacto social da OBMEP é visível na inclusão de estudantes de escolas públicas em atividades científicas e na formação de uma base sólida para futuras carreiras nas áreas de Exatas, Ciências e Tecnologia. Em 2019, o livro "Histórias Inspiradoras da OBMEP"³ foi publicado, destacando a trajetória do projeto e suas contribuições para a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

1.3 Alguns Programas da OBMEP

Além de premiar os alunos com medalhas e certificados de Menção Honrosa, a OBMEP também oferece treinamentos e capacitações para professores, disponibiliza materiais didáticos gratuitos e promove o intercâmbio de conhecimentos e experiências entre alunos, professores e instituições de ensino. A seguir, destacamos algumas das ações que são desenvolvidas.

1.3.1 Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC)

O **Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC)**⁴ é destinado a alunos medalhistas da OBMEP e objetiva despertar neles o interesse pela Matemática e pelas Ciências Exatas. No programa, os alunos são orientados por professores qualificados e treinam o rigor e a escrita de soluções e resultados, utilizando técnicas matemáticas.

1.3.2 Portal da OBMEP

No **Portal de Matemática da OBMEP**,⁵ é possível encontrar, gratuitamente, videoaulas, apostilas teóricas, cadernos de exercícios, problemas resolvidos, aplicativos e testes que cobrem todo o currículo de matemática do 6º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio, além de tópicos adicionais para complementar e aprofundar o aprendizado.

³ <<https://www.obmep.org.br/listarHistoriasInspiradoras.DO>>. Acessado em 25 de Fevereiro de 2024.

⁴ <<https://www.obmep.org.br/pic.htm>>. Acessado em 25 de Fevereiro de 2024.

⁵ <<https://portaldaoemep.impa.br/index.php>>. Acessado em 25 de Fevereiro de 2024.

1.3.3 Olimpíada Mirim - OBMEP

O **Olimpíada Mirim - OBMEP**⁶ competição de matemática voltada a alunos de escolas públicas do 2º ao 5º ano do Ensino Fundamental. Esta é a primeira competição nacional de matemática a incluir alunos tão jovens. Em 2018, o IMPA começou o processo de inclusão dos anos iniciais com a OBMEP - Nível A, voltada para alunos dos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental. Agora, com a Olimpíada Mirim - OBMEP, o projeto foi ampliado para atender também os estudantes do 2º e do 3º ano. O conteúdo das provas corresponde ao grau de escolaridade dos alunos, divididos nos níveis Mirim 1 (2º e 3º anos do Ensino Fundamental) e Mirim 2 (4º e 5º anos do Ensino Fundamental). Mais informações estão disponíveis no regulamento da competição.

1.3.4 Portal Clubes de Matemática

O **Portal Clubes de Matemática**⁷ é um blog que disponibiliza semanalmente desafios matemáticos. Nele, os estudantes podem organizar clubes com amigos, participar de gincanas e competições, e discutir com alunos de todo o país sobre os desafios.

Uma das características mais marcantes do Portal Clubes de Matemática é a realização de gincanas e competições periódicas entre os clubes cadastrados. Esses eventos promovem não apenas a competição saudável, mas também o trabalho em equipe, o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas e o estímulo ao pensamento crítico.

1.3.5 Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI)

Os **Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI)**⁸ são destinados a alunos do 8º ou 9º anos do Ensino Fundamental e todos os anos do Ensino Médio. Eles objetivam a preparação desses alunos para as provas da OBMEP e da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM).

1.3.6 Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME)

O **Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME)**⁹ oferece a oportunidade de realizar estudos em Matemática simultaneamente com a graduação aos alunos que já foram medalhistas nas Olimpíadas de Matemática, seja na OBMEP ou na OBM.

⁶ <<https://olimpiadamirim.obmep.org.br/>>. Acessado em 26 de Fevereiro de 2024.

⁷ <<https://clubes.obmep.org.br/blog/>>. Acessado em 26 de Fevereiro de 2024.

⁸ <<https://potiimpa.br/>>. Acessado em 26 de Fevereiro de 2024.

⁹ <<https://picme.obmep.org.br/>>. Acessado em 26 de Fevereiro de 2024.

1.3.7 Bolsa-Tech Fundação Behring – OBMEP

A **Bolsa-Tech Fundação Behring – OBMEP**¹⁰ é uma iniciativa da Fundação Behring, em parceria com a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). As bolsas ofertadas são direcionadas a alunos medalhistas (de qualquer edição da OBMEP) que estejam ingressando em Universidade pública (federal ou estadual) em cursos de áreas tecnológicas. É preciso estar no primeiro período para concorrer a bolsa.

1.3.8 IMPA Tech: Bacharelado em Matemática da Tecnologia e Inovação

O **IMPA Tech**¹¹ é um curso de bacharelado em Matemática da Tecnologia e Inovação, financiado pelo Governo Federal por meio do MCTI e do MEC. Com duração de quatro anos, o programa é projetado para capacitar os estudantes a ingressarem no mercado de tecnologia e inovação de forma efetiva.

O curso inicia com um ciclo básico de um ano e meio, seguido pela escolha de uma das quatro ênfases disponíveis: Matemática, Ciência da Computação, Ciência de Dados ou Física. O currículo transdisciplinar combina aulas teóricas e práticas em laboratórios equipados com tecnologia de ponta, abrangendo disciplinas como Álgebra Linear, Programação, Mecânica e Termodinâmica. Habilidades linguísticas, incluindo inglês, também são parte integrante da formação.

Localizado no Porto Maravilha, hub tecnológico na zona portuária do Rio de Janeiro, o IMPA Tech proporciona um ambiente único, próximo a empresas e startups do setor de tecnologia. O curso oferece alojamento para estudantes maiores de idade em parceria com a Prefeitura do Rio de Janeiro, além de auxílio financeiro para os alunos.

O processo seletivo inclui avaliação do desempenho em olimpíadas de conhecimento como OBMEP, OBM, OBF, OBQ e OBI, além da nota de Matemática do ENEM. A seleção final contempla atividades em grupo e entrevistas individuais online.

Para mais informações, consulte o site oficial do [IMPA Tech](https://impatechimpa.br/).

1.4 Importância das Olimpíadas de Conhecimento

As olimpíadas de conhecimento, assim como as olimpíadas de matemática, são uma atividade extracurricular que contribui para o desenvolvimento global dos estudantes. Por se tratar de uma competição, os estudantes têm a oportunidade de desenvolver uma série de habilidades acadêmicas e pessoais. Ao serem estimulados a participarem desses eventos, os alunos têm a oportunidade de aprimorar seus conhecimentos e habilidades acadêmicas, além de aprofundarem os estudos na disciplina.

¹⁰ <<https://www.obmep.org.br/bolsa-behring.htm>>. Acessado em 26 de Fevereiro de 2024.

¹¹ <<https://impatech.impa.br/>>. Acessado em 26 de Fevereiro de 2024.

2 ANÁLISE DAS QUESTÕES DE GEOMETRIA NA SEGUNDA FASE DA OBMEP

Ao longo de todas as edições da OBMEP, se produziu um extenso banco de questões separado por edições, que estão disponíveis gratuitamente no endereço eletrônico <http://www.obmep.org.br/provas.htm>, para qualquer pessoa interessada. Com esse banco de questões é possível identificar problemas relacionados a diversos conteúdos trabalhados em sala de aula na educação básica e os explorar das mais variadas formas e níveis de aprofundamento, conforme o ano com o qual se está lecionando.

Com o propósito de elaborar um material de apoio ao professor de Matemática específico sobre o estudo da geometria, aplicada na 2ª fase da OBMEP, que se encontra disponível no próximo capítulo dessa dissertação, foi realizada uma análise das provas da segunda fase dos níveis 1 e 2 da OBMEP, abrangendo os anos de 2005 a 2023. O material utilizado para esta pesquisa foi encontrado no site da OBMEP[9], na parte de Material Didático, na aba de Provas e Soluções. Todas as questões, juntamente com suas respectivas resoluções oficiais, acompanhadas do número da questão e do ano em que foram apresentadas na prova, podem ser encontradas nos apêndices deste trabalho.

2.1 Levantamento de Dados

Nesta seção, realizamos um levantamento minucioso de todas as questões de geometria da segunda fase da OBMEP, desde sua primeira edição em 2005 até a edição mais recente em 2023. A análise envolveu a categorização de cada questão relacionada à geometria plana.

2.1.1 Conteúdos de Geometria nas Questões

Nesta subseção, destacamos as questões da OBMEP que envolvem conteúdos de Geometria. Embora algumas dessas questões não exijam um conhecimento profundo sobre o assunto, muitas vezes requerem apenas a compreensão de algum termo ou processo específico, às vezes não tão significativo para a resolução geral. No entanto, optamos por incluir essas questões em apêndices neste estudo, uma vez que envolvem algum aspecto geométrico, por menor que seja.

Critérios de Seleção:

Para a seleção das questões, foram considerados os seguintes critérios como: Conteúdo (as questões devem conter elementos de Geometria, mesmo que não seja o

foco principal), nível das provas (Nível 1 : Alunos do 6º e 7º Ano; Nível 2: Alunos do 8º e 9º Ano) e as competências, pois além da Geometria, as questões podem envolver outras competências matemáticas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Foi possível fazer o levantamento de dados após análise documental, organizamos a seguinte tabela:

TABELA 3: QUANTIDADE DE QUESTÕES DE GEOMETRIA NA SEGUNDA FASE DA OBMEP, NOS NÍVEIS 1 E 2 (2005-2023)

Ano	Questões Nível 1	Questões Nível 2
2005	2	2
2006	2	2
2007	2	2
2008	1	2
2009	2	2
2010	2	2
2011	2	1
2012	3	2
2013	1	1
2014	2	2
2015	1	2
2016	2	1
2017	1	1
2018	1	2
2019	2	2
2020	-	-
2021	1	1
2022	1	1
2023	1	1

Fonte: Dados coletados do site da OBMEP ¹²

A Tabela 3 apresenta os resultados da coleta de dados. Esta análise detalhada permitiu uma compreensão mais ampla das questões de geometria na OBMEP ao longo do tempo. Todas essas questões você encontra nos apêndices ao final deste trabalho, bem como de forma editável através do link: <https://acesse.one/V1lt5>.

É importante notar que a maioria das questões também aborda outras competências matemáticas, as quais estão listadas nos quadros apropriados. A numeração das questões pode variar, pois entre elas podem existir problemas relacionados a outras áreas temáticas da matemática que não são foco deste estudo.

¹² <<https://www.obmep.org.br/provas.htm>>. Acessado em 30 de Março de 2024.

¹³ Ressaltamos que durante todo esse período, não houve a realização da prova da OBMEP apenas no ano de 2020. A 16ª edição que iria acontecer no ano de 2020 precisou ser adiada devido a pandemia da COVID-19 e foi realizada no ano de 2021.

QUADRO 2.1 – CONTEÚDO DE GEOMETRIA ABORDADO NA 2ª FASE DA OBMEP NÍVEL 1 (2005-2023)

Ano	Questões	Conteúdo	Outras unidades temáticas envolvidas	
2005	Questão 1	Perímetro e Área	Grandezas e Medidas, e Números	
	Questão 2			
2006	Questão 1			
	Questão 4			
2007	Questão 1			
	Questão 3			
2008	Questão 2			
2009	Questão 2			Área e proporção
	Questão 4			
2010	Questão 3			Perímetro e Área
	Questão 5			
2011	Questão 3	Planificação		
	Questão 5			
2012	Questão 1	Área: tabuleiro quadriculado		
	Questão 4	Área de superfícies cúbicas		
	Questão 6	Perímetro		
2013	Questão 4	Área de figuras planas		
2014	Questão 2	Perímetro e Área		
	Questão 5	Área de figuras planas		
2015	Questão 3	Perímetro e Área		
2016	Questão 2	Perímetro		
	Questão 4	Área regiões quadriculada		
2017	Questão 4	Visão espacial e projeção		
	Questão 5			
2018	Questão 4	Área de região quadriculada		
2019	Questão 4	Área de regiões triangulares		
	Questão 5	Planificação		
2021	Questão 3	Área de região quadriculada		
2022	Questão 4	Área de figuras planas		
2023	Questão 2	Perímetro		

Fonte: Dados coletados do site da OBMEP ¹⁴

A análise das questões e a organização do quadro 2.1 revelaram que a geometria é um componente consistente e significativo nas provas da OBMEP ao longo do tempo, com uma variedade de tópicos abordados, desde perímetro e área até planificação e visão espacial.

Além disso, foi observado que as questões de geometria muitas vezes se entrelaçam com outras competências matemáticas, refletindo uma abordagem unificada e coerente na OBMEP.

¹⁴ <<https://www.obmep.org.br/provas.htm>>. Acessado em 05 de Abril de 2024.

QUADRO 2.2 – CONTEÚDO DE GEOMETRIA ABORDADO NA 2ª FASE DA OBMEP NÍVEL 2 (2005-2023)

Ano	Questões	Conteúdo	Outras unidades temáticas envolvidas
2005	Questão 4	Área quadriculada	Grandezas e Medidas, e Números
	Questão 6	Área retângular	
2006	Questão 1	Área de figuras planas	
	Questão 4	Ângulo, seguimento e área	
2007	Questão 2	Área de figuras planas	
	Questão 4	Ângulos	
2008	Questão 1	Área de figuras planas	
	Questão 5	Área e ângulos	
2009	Questão 3	Medidas de ângulos	
	Questão 4		
2010	Questão 3	Área do triângulo equilátero	
2011	Questão 1	Área de figuras planas	
	Questão 6	Congruência de triângulos	
2012	Questão 2	Área de figuras planas	
	Questão 3	Área de superfícies cúbicas	
2013	Questão 3	Área de figuras planas	
2014	Questão 3	Área de figuras planas	
	Questão 4	Área de tabuleiro quadrado	
2015	Questão 1	Perímetro e Área	
	Questão 5	Áreas e congruência	
2016	Questão 1	Perímetro e Área	
	Questão 6	Área de triângulos	
2017	Questão 2	Área de figuras planas	
2018	Questão 3	Área de figuras planas	
	Questão 5		
2019	Questão 2	Ângulos	
	Questão 3	Planificação	
2021	Questão 5	Área de figuras planas	
2022	Questão 4	Área de figuras planas	
2023	Questão 3	Área de figuras planas	

Fonte: Dados coletados do site da OBMEP ¹⁵

O quadro 2.2, apresenta uma análise detalhada dos conteúdos de geometria abordados na 2ª fase da OBMEP, nível 2, ao longo das edições de 2005 a 2023. Observa-se que os temas variam amplamente, cobrindo desde cálculos de áreas simples até conceitos mais avançados como congruência de triângulos, ângulos e áreas de figuras planas compostas.

¹⁵ <<https://www.obmep.org.br/provas.htm>>. Acessado em 05 de Abril de 2024.

2.2 Complexidade das Questões

Inicialmente, abordamos a complexidade das questões ao longo do tempo, examinando a dificuldade das questões geométricas propostas em cada edição da OBMEP. Avaliamos critérios como a extensão das soluções necessárias e a aplicação de conceitos mais avançados de geometria para determinar se houve variações na complexidade ao longo dos anos.

Ao analisarmos os dados coletados, observamos que, em geral, não houve muita mudança na complexidade das questões de geometria ao longo das diferentes edições da OBMEP. Embora possam ter ocorrido flutuações individuais de um ano para outro, a tendência geral mostra uma estabilidade na abordagem e na dificuldade das questões geométricas. Isso sugere uma consistência no estilo da prova ao longo do tempo, proporcionando aos participantes uma experiência relativamente uniforme em relação aos desafios de geometria apresentados.

2.3 Estratégias e Abordagens

Proseguimos analisando as estratégias e abordagens comuns utilizadas para resolver as questões geométricas da OBMEP, como a utilização de áreas triangulares, ângulos e técnicas de resolução aplicadas em várias questões, além de observar possíveis mudanças ao longo dos anos.

Ao analisar as questões específicas da OBMEP que envolvem geometria, observamos uma variedade de tópicos abordados ao longo dos anos. Dentre esses tópicos, destacam-se:

- **perímetro e área de figuras planas;**
- **medidas de ângulos;**
- **semelhança e congruência de triângulos;**
- **área de superfícies cúbicas e paralelepípedo;**
- **área de tabuleiro quadrado;**
- **planificação.**

Essa diversidade de temas reflete a amplitude do conhecimento geométrico necessário para enfrentar os desafios da OBMEP. A compreensão profunda desses tópicos e a aplicação de técnicas específicas são fundamentais para obter sucesso na resolução das questões geométricas propostas pela competição ao longo dos anos.

2.4 Explorando Habilidades e Competências Preconizadas pela BNCC na Resolução de Questões de Geometria

Desde a sua elaboração até a sua implantação, a nova BNCC instiga docentes a repensar e planejar o ensino de matemática e os conteúdos necessários à formação de um educando ao longo da educação básica. Ao longo dos anos o ensino da Matemática tem recebido poucas alterações, e a BNCC serve como uma motivação para se repensar as formas de engajar os alunos nesta disciplina.

O ensino por meio de habilidades e competências proposto pela BNCC oferece às professoras e professores de Matemática a oportunidade de trabalhar seus planejamentos de forma mais personalizada. Segundo a BNCC, aritmética, álgebra, geometria, estatística e probabilidade seriam campos do conhecimentos matemáticos fundamentais para esses propósitos. “Utilizar processos e ferramentas matemáticas para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas do conhecimento, validando estratégias e resultados” é uma competência da BNCC para a matemática.

2.5 A Geometria na BNCC

A BNCC destaca a importância do ensino de geometria ao longo da escolaridade, desde a Educação Infantil até o Ensino Médio, por meio de diferentes conteúdos e abordagens. Destaca que estudo da geometria estimula o desenvolvimento de um pensamento que permite aos alunos descrever e representar, de forma organizada, as características do ambiente em que vivem (BRASIL, 2018)[3].

Em Matemática, a BNCC propõe cinco unidades temáticas, correlacionadas, que orientam a formulação de habilidades a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental. São elas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. Em relação à Geometria, a BNCC aponta que com seu estudo é possível desenvolver no aluno a percepção de figuras geométricas em objetos que fazem parte do seu cotidiano, como também aguçar sua observação do mundo real e suas relações com os objetos matemáticos.

A BNCC enfoca, de maneira detalhada nos anos finais do Ensino Fundamental, na unidade temática intitulada “Grandezas e Medidas”, os objetos de conhecimento ligados ao cálculo da área de figuras planas. Essa abordagem busca efetivar o desenvolvimento das competências nesse tópico entre os estudantes, reforçando, assim, a relevância de explorá-lo de maneira abrangente dentro da sala de aula. As habilidades correspondentes a esse conteúdo específico estão detalhadamente listadas no Quadro 2.3.

QUADRO 2.3 – HABILIDADES DA BNCC QUE ENVOLVEM A GEOMETRIA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL(2017)

Etapa	Unidade Temática	Objetos de Conhecimento	Habilidades
6º ano	Grandezas e Medidas	Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume	(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento
7º ano	Grandezas e Medidas	Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros	(EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros. (EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas
8º ano	Grandezas e Medidas	Área de figuras planas. Área do círculo e comprimento de sua circunferência	(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos
9º ano	Geometria	Semelhança de triângulos	(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

Fonte: (Brasil. Ministério da Educação, 2017) Site BNCC¹⁶.

¹⁶ <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#fundamental/matematica-no-ensino-fundamental-anos-finaisunidades-tematicas-objetos-de-conhecimento-e-habilidades>. Acesso em: 08 de Abril de 2024.

3 A GEOMETRIA DA SEGUNDA FASE DA OBMEP

Neste capítulo, será apresentada uma visão geral dos principais tópicos de geometria que os participantes encontrarão nas questões da segunda fase da OBMEP. Serão abordados conceitos fundamentais, como propriedades de figuras geométricas e fórmulas relevantes, além de discussões sobre as aplicações práticas desses tópicos. Será fornecida uma lista abrangente de temas para que os leitores tenham uma compreensão clara do que esperar ao enfrentar as questões de geometria da competição.

3.1 Tópicos de Geometria na Segunda fase da OBMEP

Após a análise das questões específicas de geometria na segunda fase da OBMEP (2005–2023), conforme abordado no “[Capítulo 2](#)”, observamos uma variedade de tópicos abordados ao longo dos anos nessas provas. Dentre esses tópicos, destacam-se:

- perímetro de figuras planas;
- área de figuras planas;
- planificação;
- área de tabuleiro quadrado;
- área de superfícies cúbicas e paralelepípedo;
- medidas de ângulos;
- semelhança e congruência de triângulos.

Essa análise revela uma abordagem diversificada e abrangente. Destacam-se temas como o cálculo do perímetro e da área de figuras planas, a aplicação dos princípios geométricos na planificação e na distribuição de áreas em tabuleiros quadrados, bem como o estudo da área de superfícies cúbicas e paralelepípedos. Além disso, a medição e a compreensão de ângulos e as relações de semelhança e congruência entre triângulos são tópicos cruciais abordados nessas questões. Essa variedade de tópicos reflete a importância da geometria como uma ferramenta fundamental para o desenvolvimento do pensamento matemático e espacial dos estudantes participantes da OBMEP.

3.2 Abordagem dos principais tópicos de geometria

Nesta seção, apresentaremos uma explicação dos conceitos geométricos essenciais. A partir de definições fundamentais até propriedades avançadas, exploraremos os principais tópicos com o intuito de fornecer uma melhor compreensão da geometria presente na 2ª fase da OBMEP. Além disso, demonstraremos a aplicação prática desses conceitos em questões da OBMEP, destacando a relevância e a utilidade da geometria no contexto da competição. Os conteúdos que seguem são baseados no Material Teórico do Portal da OBMEP, em questões anteriores da OBMEP, outras referências importantes são os livros: "Projeto Teláris" de Luiz Roberto Dante.[1] e "Geometria I" de José Luiz Rosas Pinho[11], que oferecem uma abordagem detalhada e prática dos conceitos geométrico.

3.2.1 Perímetro das Principais Figuras Planas Presente na OBMEP

Para calcular o perímetro de uma figura plana, basta somar os comprimentos de todos os seus lados. Por exemplo, o perímetro de um quadrado é dado pela fórmula $P = 4l$, onde l representa o comprimento de um dos lados do quadrado com forme a figura 1.

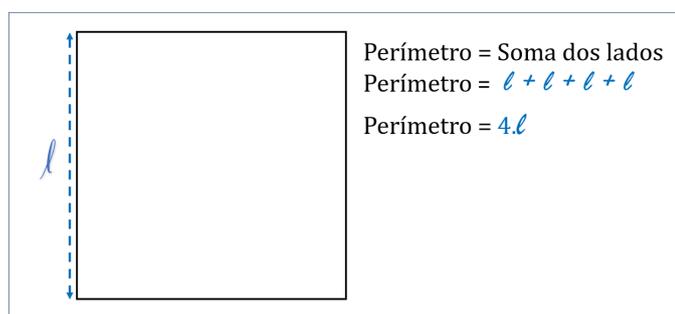


Figura 1 – Perímetro do quadrado

Já o perímetro de um retângulo é dado pela fórmula $P = 2(a + b)$, onde a e b representam os comprimentos dos lados adjacentes com forme a figura 2.

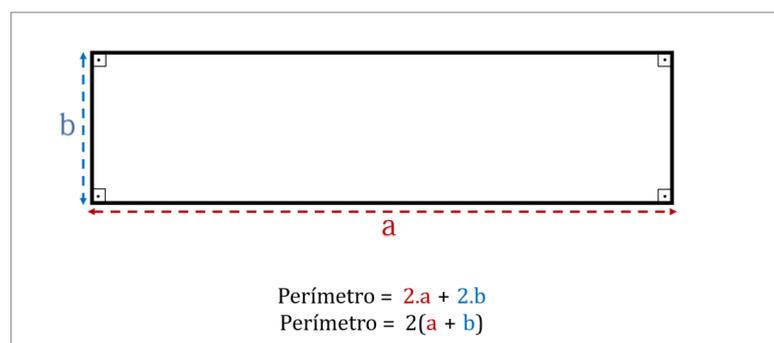


Figura 2 – Perímetro do retângulo

O perímetro de um triângulo é a soma dos comprimentos de seus três lados. A fórmula geral para o perímetro de um triângulo é $P = a + b + c$, onde a , b , e c são os comprimentos dos lados do triângulo, conforme mostrado na Figura 3.

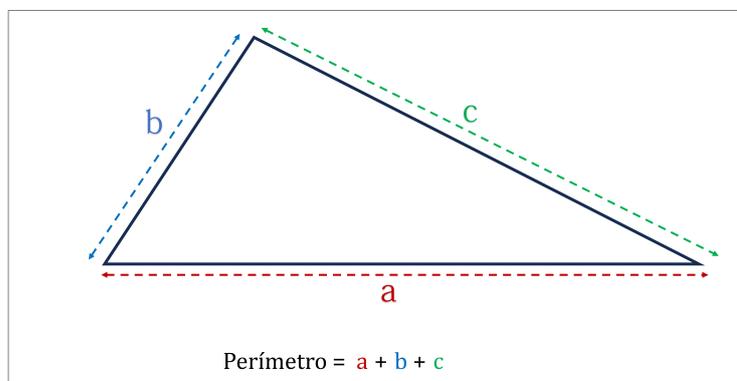


Figura 3 – Perímetro do triângulo

Para casos específicos, como o triângulo equilátero, onde todos os lados são iguais, a fórmula simplifica para $P = 3l$, onde l é o comprimento de cada lado. Estas fórmulas são fundamentais para resolver problemas de geometria envolvendo perímetros de figuras planas, seja em contextos educacionais como provas e olimpíadas de matemática, ou em aplicações práticas no dia a dia. A prática com diferentes tipos de figuras ajuda a reforçar a compreensão das propriedades geométricas e a habilidade de manipular expressões algébricas para encontrar soluções.

Perímetro de figuras geométricas compostas

Para resolver problemas de cálculo de perímetros de figuras geométricas compostas, é importante seguir três passos principais:

1. **Visualização:** Observar a figura composta e entender sua estrutura geral.
2. **Interpretação:** Analisar as características individuais das formas geométricas presentes na figura e compreender como estão interconectadas.
3. **Cálculo do Perímetro:** Calcular o perímetro da figura composta somando os comprimentos de todos os seus lados.

Estes passos são fundamentais para garantir a precisão na resolução de problemas geométricos que envolvem figuras compostas. A visualização inicial ajuda a identificar claramente as diferentes formas que compõem a figura. A interpretação permite uma análise detalhada de cada componente e a compreensão das suas interações. Finalmente, o cálculo do perímetro é realizado somando-se os comprimentos de todos os lados das formas geométricas, considerando as intersecções e sobreposições corretamente.

A prática com figuras compostas reforça a habilidade de desmembrar problemas complexos em partes mais simples, promovendo uma compreensão mais profunda das propriedades geométricas e desenvolvendo a capacidade de resolução de problemas de maneira eficiente e precisa.

Exemplo 1:

Observe a figura formada por quatro retângulos de mesmo comprimento e largura, com comprimento a e largura b , formando a figura abaixo.

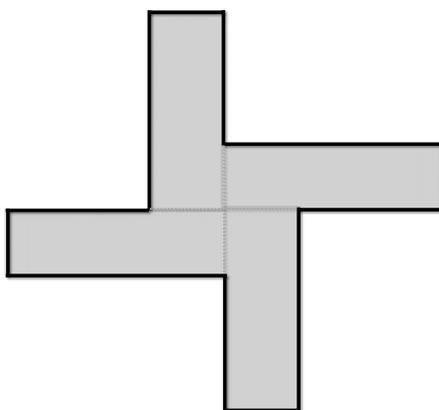


Figura 4 – Perímetro da figura compostas por mais de um retângulo

Qual é o perímetro da figura em termos de a e b ?

1ª Passo: Visualização

2ª Passo: Interpretação

3ª Passo: Cálculo do perímetro

Perímetro: $a + a + a + a + b + b + b + b + (a-b) + (a-b) + (a-b) + (a-b)$

Perímetro: $4a + 4b + 4a - 4b$

Perímetro: $8a$

Figura 5 – Interpretação cálculo do perímetro

Exemplo 2:

Um quadrado de lado a foi cortado em duas partes, como na figura 5. O corte foi feito em formato de escada, com segmentos de $\frac{a}{6}$ paralelos aos lados do quadrado.

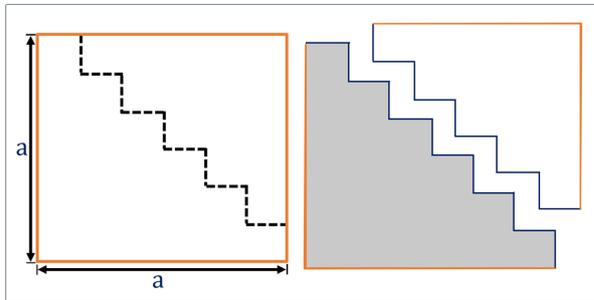


Figura 6 – Cálculo do perímetro do quadrado recortado

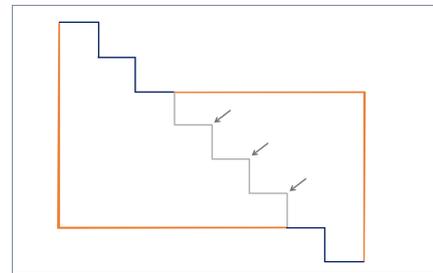


Figura 7 – Figura formada com encaixes de degraus

i) Calcule o perímetro da parte cinza na figura 6.

UMA POSSÍVEL SOLUÇÃO

Perímetro: $a + a + 12 \cdot \left(\frac{a}{6}\right)$

Perímetro: $2a + 2a$

Perímetro: $4a$

ii) A figura 7 foi montada encaixando completamente três degraus (indicados com flechas) de uma das partes na outra parte. Calcule o perímetro dessa figura.

UMA POSSÍVEL SOLUÇÃO

Perímetro: $a + a + 8 \cdot \left(\frac{a}{6}\right) + 2 \cdot \left(\frac{5a}{6}\right)$

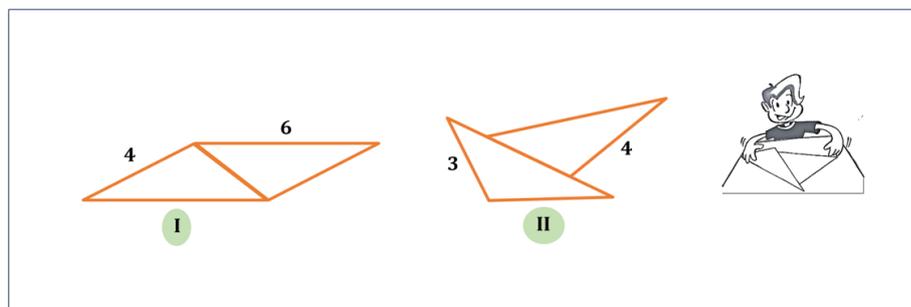
Perímetro: $2a + \frac{18a}{6}$

Perímetro: $2a + 3a$

Perímetro: $5a$

Exemplo 3:

Miguilim brinca com dois triângulos iguais cujos lados medem 3 cm, 4 cm e 6 cm. Ele forma figuras planas unindo um lado de um triângulo com um lado do outro, sem que um triângulo fique sobre o outro. Abaixo vemos duas das figuras que ele fez.



i) Quais os comprimentos dos lados que foram unidos nas figuras I e II?

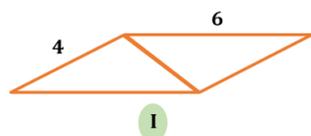
SOLUÇÃO

A solução desse item segue diretamente da observação das figuras. Na figura I, vemos que:

- As medidas de dois lados que foram unidos são 4 cm e 6 cm;
- Os dois lados que foram unidos são do mesmo tamanho, logo eles não podem medir nem 4 cm nem 6 cm. Portanto, os lados que foram unidos só podem medir 3 cm.

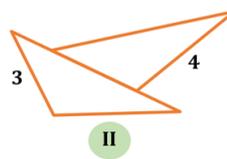
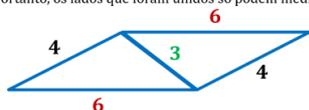
Na figura II, vemos que o maior lado de um dos triângulos (que mede 6 cm) foi unido ao menor lado do outro triângulo (que mede 3 cm). Portanto, os lados unidos medem 6 cm e 3 cm.

Observação: SEGUE A RESOLUÇÃO POR MEIO DAS FIGURAS



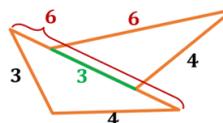
Na figura I, observamos que:

- As medidas dos dois lados que não foram unidos são 4 cm e 6 cm.
- Os dois lados que foram unidos são do mesmo tamanho, logo eles não podem medir nem 4 cm nem 6 cm.
- Portanto, os lados que foram unidos só podem medir 3 cm.



Na figura II, observamos que:

- O maior lado de um dos triângulos (que mede 6 cm) foi unido ao menor lado do outro triângulo (que mede 3 cm).
- Portanto, os lados unidos medem 6 cm e 3 cm.



ii) Calcule os perímetros das figuras I e II.

SOLUÇÃO

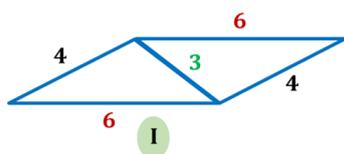
A solução segue do item (i), que fornece as medidas dos lados que não foram unidos.

Logo:

- O perímetro da figura I é $4 + 6 + 4 + 6 = 20$ cm;
- O perímetro da figura II é $6 + 4 + 3 + 4 + (6 - 3) = 20$ cm.

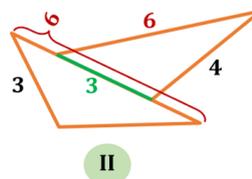
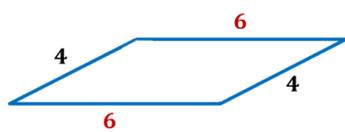
Foi subtraído 3 cm correspondente ao lado do triângulo que foi unido e não conta no perímetro da figura II.

Observação: SEGUE A RESOLUÇÃO POR MEIO DAS FIGURAS



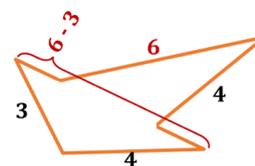
Perímetro da figura I:

$$\text{Perímetro} = 4 + 6 + 4 + 6 = 20$$

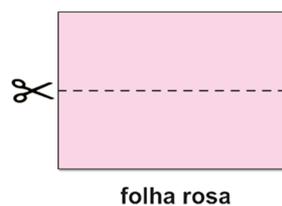
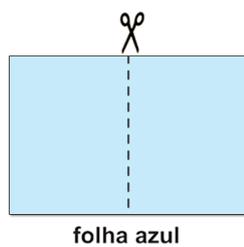


Perímetro da figura II:

$$\text{Perímetro} = 3 + 4 + 6 + 4 + (6 - 3) = 20$$

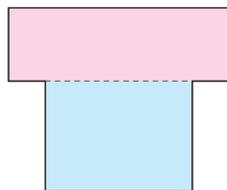


Exemplo₄: Lucinha tem duas folhas retangulares, uma azul e outra rosa, ambas com 8 cm de largura e 12 cm de comprimento. Ela cortou as duas folhas ao meio, conforme indicado na figura.



Lucinha pegou uma metade de cada folha e fez coincidir os lados maiores desses

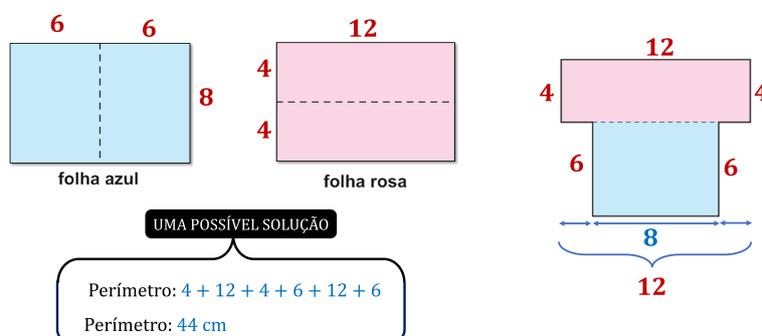
pedaços, formando a figura abaixo, parecida com a letra T. Qual é o perímetro dessa figura?



SOLUÇÃO

As dimensões das metades das folhas são, respectivamente, 6 cm x 8 cm e 12cm x4 cm. Para calcular o perímetro a figura “T”, observamos que a soma dos comprimentos dos segmentos horizontais do contorno é $12 + 12 = 24$ cm, independente do pedaço azul estar centralizado, e que a soma dos comprimentos verticais do contorno é $4 + 6 + 4 + 6 = 20$ cm. Portanto, o perímetro da figura será $20 + 24 = 44$ cm.

Observação: SEGUIE A RESOLUÇÃO POR MEIO DAS FIGURAS



3.2.2 Áreas de figuras planas

Você conseguiria, sozinho, dar uma definição de área? Essa é uma daquelas coisas da geometria que estamos acostumados a trabalhar, mas temos dificuldade para explicar. Em uma imagem, é sempre fácil mostrar o que nela é a área, mas pode ser um problema defini-la formalmente. Tentemos pensar a respeito. Sabemos que um ponto não tem área, pois pontos não têm parte alguma, não têm nada. Um segmento de reta, por sua vez, também não tem área, pois ele é só comprimento, isto é, ele é só um caminho de um ponto a outro, mas um caminho sem abertura, sem largura, uma passagem que ainda não foi pisada.

Definição 1. *Área pode ser definida como a superfície aberta por uma figura geométrica.*

A área de uma figura plana é medida em unidades quadradas e representa a quantidade de espaço ocupado pela figura. As fórmulas para calcular a área de figuras planas são específicas para cada tipo de figura. Por exemplo, a área de um quadrado é dada por $A = l^2$, onde l representa o comprimento de um dos lados. Já a área de um retângulo é dada por $A = a \times b$, onde a e b representam os comprimentos dos lados adjacentes.

Áreas de polígonos elementares

A partir da definição de área, vamos mostrar que é possível medir a área de qualquer figura plana. Nosso primeiro resultado, que será essencial para todo o resto da discussão, será a respeito da área de um quadrado.

Área do quadrado ₁: A área de um quadrado de lado n é igual a n^2 .

Solução: Vamos tomar, de início, um quadrado cujo valor do lado é um número inteiro n . De acordo com a figura 8, são necessários n^2 quadrados de área 1 para cobrir inteiramente o quadrado de lado n , logo, como todos os quadrados se intersectam apenas por pontos de fronteira, o fato de a área ser aditiva garante que o quadrado de lado n possui área n^2 .

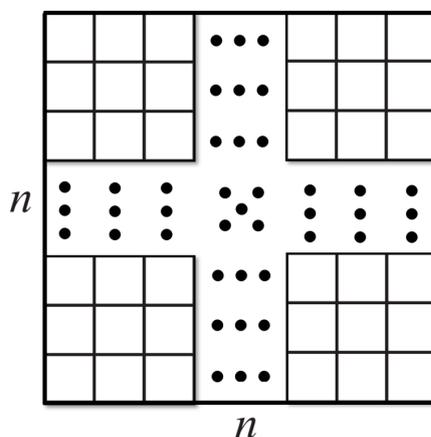


Figura 8 – Área de um quadrado de lado n

Agora que sabemos que a área de qualquer quadrado de lado n é igual n^2 , podemos calcular as áreas de figuras planas mais conhecidas que estão sendo cobradas na 2ª fase da OBMEP.

Área do retângulo ₂: A área de um retângulo de lados a e b é igual a $a \cdot b$.

Resultado: Seja o quadrado de lado igual a $a + b$, conforme nos ilustra a figura 9.

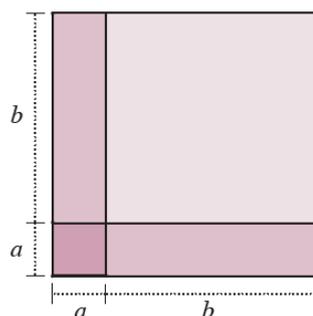


Figura 9 – Área de um quadrado de lado igual a $a + b$, disposta de maneira a calcularmos a área de um retângulo de lados a e b .

A área total do quadrado é igual à soma das áreas do quadrado de lado a , do quadrado de lado b , e duas vezes a área do retângulo de lados a e b , que denotaremos por $A(a, b)$. Assim, temos:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + A(a, b)$$

Por outro lado:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Comparando-se as expressões, temos que $A(a, b) = a \cdot b$.

Área do paralelogramo₃: A área de um paralelogramo é igual ao produto da base pela altura.

Resultado: Seja $b = AB$ a medida da base e h a medida da altura do paralelogramo $ABCD$. Sejam os segmentos $DH \perp AB$ e $BK \perp DC$, conforme nos ilustra a figura 10.

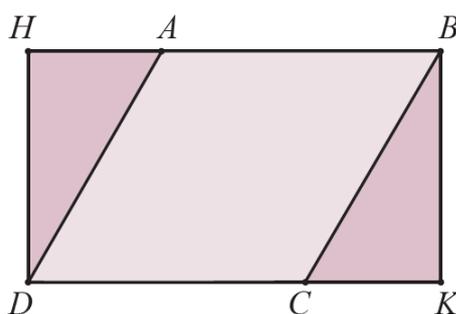


Figura 10 – Cálculo da área do paralelogramo $ABCD$

Como pode ser facilmente mostrado, temos a congruência de triângulos $\triangle DAH \equiv \triangle BCK$. Deixamos como exercício a verificação que, de fato, esses dois triângulos são congruentes. Logo esses triângulos têm a mesma área. Considere agora o segmento $EI \perp \overline{AB}$ com $E \in \overline{AB}$ e $I \in \overline{DC}$, e sejam os segmentos $EF \subseteq \overline{AB}$ e $IG \subseteq \overline{DC}$, com $EF \equiv HA$ e $IG \equiv CK$, conforme mostrado na figura 11.

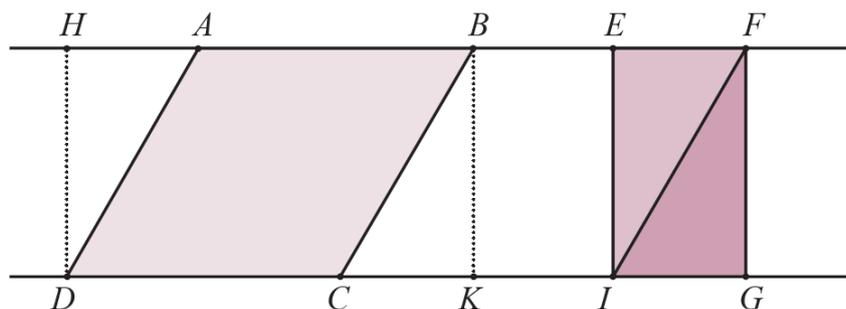


Figura 11 – Construção auxiliar no cálculo da área do paralelogramo

Portanto, temos a seguinte cadeia de congruências de triângulos que você poderá facilmente verificar:

$$\triangle DAH \equiv \triangle IFE \equiv \triangle FIG \equiv \triangle BCK. \quad (I)$$

Logo, todos esses triângulos possuem a mesma área. Temos também que os triângulos $\triangle IFE$ e $\triangle FIG$ formam o retângulo $EFGI$, isto porque $EF \parallel IG$ e os ângulos $\angle IEF$ e $\angle FGI$ são ângulos retos. Pelo resultado 2, a área do retângulo $EFGI$ é igual a $EF \cdot EI = EF \cdot h$.

Observando a figura 11, temos que

$$A(HBKD) = A(\triangle DAH) + A(ABCD) + A(\triangle BCK). \quad (II)$$

Por outro lado, considerando-se as congruências em (I), temos que a expressão (II) ainda pode ser escrita como:

$$A(HBKD) = A(\triangle IEF) + A(ABCD) + A(\triangle FIG) = A(ABCD) + A(EFGI). \quad (III)$$

Utilizando a expressão da área do retângulo $EFGI$ e sabendo que a área do retângulo $HBKD$ é igual a

$$HB \cdot BK = (HA + AB) \cdot h = (HA + b) \cdot h,$$

e sabendo que $HA = EF$, temos finalmente que

$$A(HBKD) = (EF + b) \cdot h = EF \cdot h + b \cdot h = A(ABCD) + EF \cdot h.$$

Portanto,

$$A(ABCD) = b \cdot h. \quad (IV)$$

Falta-nos ainda encontrar o valor da área de um triângulo. Tomando-se um dos lados do triângulo como base, o segmento perpendicular que liga o vértice oposto do triângulo à reta gerada pela base é denominado altura do triângulo, conforme mostra a figura 12.

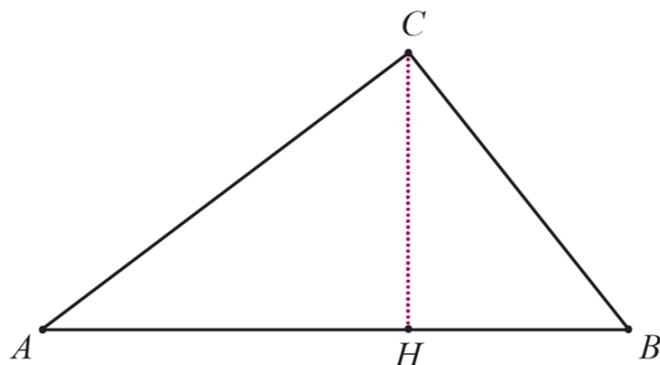


Figura 12 – Triângulo $\triangle ABC$, cuja base é o segmento AB e a altura é o segmento CH .

Área do triângulo 4: A área de um triângulo é igual à metade do produto da base pela altura.

Resultado: Seja o triângulo $\triangle ABC$ de base $b = AB$ e altura h . Seja agora o segmento $DC \parallel AB$, tal que $DC \equiv AB$, conforme indicado na figura 13.

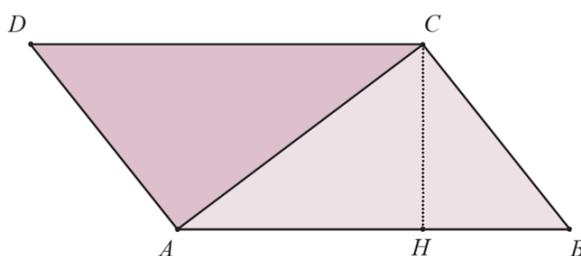


Figura 13 – Cálculo da área do triângulo $\triangle ABC$

Temos que $DC \equiv AB$, por construção, $CA \equiv AC$, por definição e $\angle DCA \equiv \angle BAC$, pois são alternos internos entre duas retas paralelas. Logo, pelo caso LAL, temos a congruência de triângulos $\triangle DCA \equiv \triangle BAC$ e, portanto, o quadrilátero $ABDC$ é um paralelogramo de base igual a b e altura igual a h . Novamente, você é convidado a mostrar facilmente que o quadrilátero $ABDC$ é realmente um paralelogramo. Portanto, teremos:

$$2S(\triangle ABC) = S(\triangle ABC) + S(\triangle DCA) = S(ABDC) = b \cdot h,$$

o que nos leva a concluir que

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2}b \cdot h.$$

De acordo com o resultado acima, quaisquer dois triângulos com mesma base e mesma altura possuem a mesma área ou seja, se tomarmos um dos lados como base e efetuarmos um deslocamento do vértice oposto ao longo de uma reta paralela à base, conforme indicado na figura 14, teremos triângulos com mesma área.

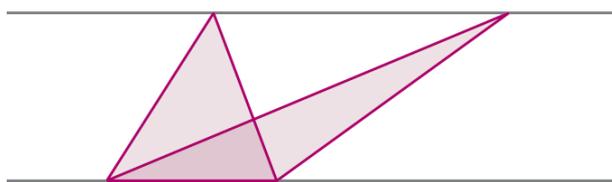


Figura 14 – Dois triângulos de mesma área produzidos por deslocamento do vértice ao longo de uma reta paralela à base

Também, o valor da área de um triângulo independe da escolha do lado que será sua base, resultado este que depende de semelhança entre triângulos.

A congruência das áreas de triângulos com a mesma base e altura é uma propriedade fundamental que ilustra a elegância e simplicidade da geometria. Ela não apenas facilita a resolução de problemas teóricos, mas também tem amplas aplicações práticas em diversas situações geométricas. Compreender e aplicar esta propriedade é essencial para qualquer estudo avançado em geometria.

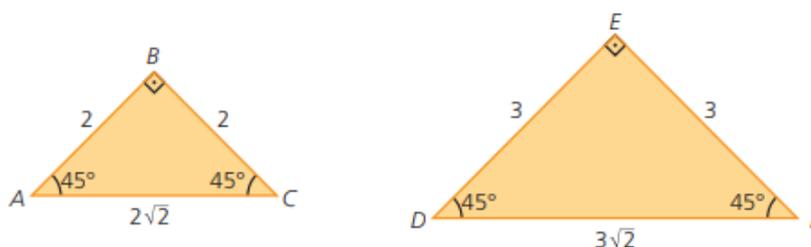
3.2.3 Semelhança e Congruência de triângulos

Dois triângulos são semelhantes quando têm ângulos internos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais.

Em dois triângulos semelhantes:

- Os ângulos congruentes são chamados **ângulos correspondentes**.
- Os lados opostos aos ângulos correspondentes são chamados **lados homólogos**.

Os triângulos ABC e DEF representados a seguir são triângulos semelhantes.



Observe que os ângulos correspondentes desses triângulos são congruentes: $\hat{A} \cong \hat{D}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\hat{C} \cong \hat{F}$. Além disso, as medidas de comprimento dos lados correspondentes são proporcionais, pois:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$$

Indicamos que os triângulos ABC e DEF são semelhantes assim: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

3.2.4 Razão de Semelhança

Se dois triângulos são semelhantes, a razão entre as medidas dos lados correspondentes é chamada **razão de semelhança**.

Nos triângulos semelhantes ABC e DEF , que estão logo acima, vamos chamar de k a razão de semelhança. Assim:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = k$$

Utilizando os critérios de semelhança, podemos provar que, se a razão de semelhança entre dois triângulos é k , então:

- a razão entre duas alturas homólogas é k ;
- a razão entre duas medianas homólogas é k ;
- a razão entre duas bissetrizes homólogas é k ;
- a razão entre os perímetros dos triângulos é k ;
- a razão entre as áreas é k^2 .

Os conteúdos e questões que foram abordados nesta seção baseiam-se no material teórico do portal da OBMEP e em questões de edições anteriores da OBMEP. Além disso, referências importantes incluem os livros "Projeto Teláris" de Luiz Roberto Dante [1] e "Geometria I" de José Luiz Rosas Pinho [11], que oferecem uma abordagem detalhada e prática dos conceitos geométricos.

3.3 Problemas da OBMEP

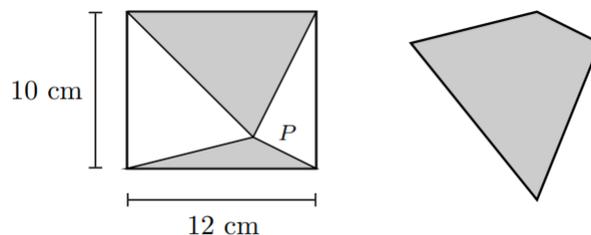
Nesta seção, apresentaremos alguns problemas que envolvem cálculos de áreas de figuras planas. Tais problemas fizeram parte de provas da primeira fase da OBMEP.

Problema 1 (OBMEP-2013)

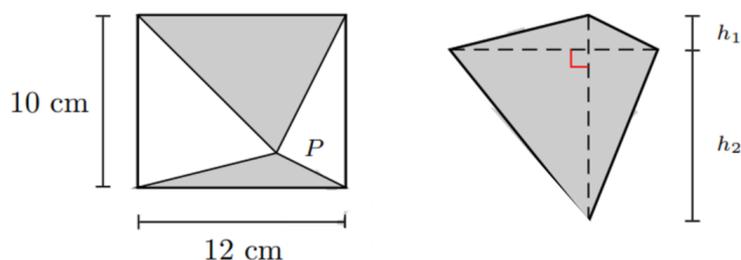
Juliana desenhou, em uma folha de papel, um retângulo de comprimento 12 cm e largura 10 cm. Ela escolheu um ponto P no interior do retângulo e recortou os triângulos

¹⁷ Dados coletados do site oficial da OBMEP: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acessado em 10 de março de 2024.

sombreados, como na figura. Com esses triângulos, ela montou o quadrilátero da direita. Qual é sua área?



Solução. Note que a área do quadrilátero é igual à soma das áreas de dois triângulos cujas bases medem 12 cm; além disso, a soma das medidas das alturas dos dois triângulos (relativas à base comum) é igual a 10 cm (veja a figura abaixo), pois essa soma coincide com a medida do menor lado do retângulo. Desse modo, se denotarmos essas alturas por h_1 e h_2 , teremos $h_1 + h_2 = 10$.

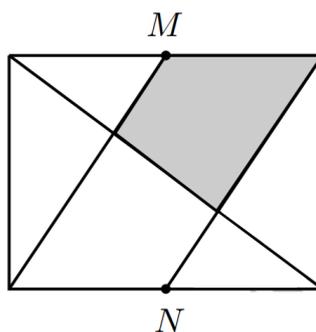


Portanto, a área do quadrilátero é igual a

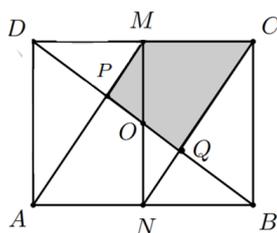
$$\frac{12h_1}{2} + \frac{12h_2}{2} = 6h_1 + 6h_2 = 6(h_1 + h_2) = 6 \times 10 = 60 \text{ centímetros quadrados.}$$

Problema 2 (OBMEP-2013)

A figura a seguir representa um retângulo de 120 m^2 de área. Os pontos M e N são os pontos médios dos lados do retângulo aos quais pertencem. Qual é a área da região sombreada?



Solução. Denotemos por A, B, C e D os vértices do retângulo e por P, O e Q as interseções da diagonal BD com os segmentos AM, MN e NC, respectivamente (veja a próxima figura).



Veja que os triângulos \widehat{DMO} e \widehat{BNO} são congruentes pelo caso LAA_o , uma vez que $\overline{DM} = \overline{BN}$, $\widehat{MDO} = \widehat{NBO}$ (ângulos alternos-internos) e $\widehat{DOM} = \widehat{BON}$ (ângulos opostos pelo vértice); portanto, $\overline{OM} = \overline{ON}$.

Por outro lado, o quadrilátero \widehat{ANCM} é um paralelogramo, pois os lados \overline{AN} e \overline{CM} são paralelos e congruentes. Assim, as retas suportes dos lados opostos \overline{AM} e \overline{CN} de tal paralelogramo são paralelas, de sorte que $\widehat{OMP} = \widehat{ONQ}$ e $\widehat{OPM} = \widehat{OQN}$ (pois são pares de ângulos alternos-internos). Como já observamos que $\overline{OM} = \overline{ON}$, concluímos que os triângulos OPM e OQN são congruentes (dessa vez pelo caso ALA). Desse modo, a área cinza (do quadrilátero $PQCM$) é igual à área do triângulo MNC que, por sua vez, é igual a:

$$\text{Área} = \frac{MC \cdot MN}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{CD \cdot CB}{2} = \frac{1}{4} \cdot CD \cdot CB = \frac{1}{4} \cdot 120 = 30 \text{ metros quadrados.}$$

3.4 Recursos e Estratégias de Estudo

Este segmento oferece uma compilação de recursos e métodos essenciais para aprimorar o entendimento em geometria, preparando-se assim para a segunda fase da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

A seguir, destacamos algumas estratégias eficazes para aprofundar o conhecimento em geometria e otimizar a preparação para a OBMEP, conforme resumido a seguir.

- **Engajamento em grupos de estudo:** A participação em grupos de estudo ou fóruns online proporciona um ambiente propício para a discussão de problemas, a troca de estratégias de resolução e o aprendizado coletivo.
- **Competições preparatórias:** A realização de competições preparatórias, como simulados da OBMEP ou outras competições matemáticas, permite testar habilidades em um contexto competitivo e familiarizar-se com o formato das provas.
- **Assessoria de professores ou mentores:** Busque orientação regularmente junto a professores, mentores ou colegas experientes. O feedback qualificado auxilia na identificação de pontos de melhoria e na recepção de direcionamentos personalizados para o avanço em geometria.
- **Exploração de recursos didáticos online e offline:** Utilize uma variedade de recursos, como vídeos explicativos, tutoriais online, materiais didáticos e livros especializados em geometria. A exploração ampla desses recursos enriquece o aprendizado e proporciona uma base sólida de conhecimento.
- **Prática consistente e revisão regular:** Dedicar-se a práticas regulares e à revisão sistemática dos conceitos e técnicas de geometria é essencial para a consolidação do aprendizado e o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas.

Por fim, fornecemos abaixo alguns links úteis de sites associados à OBMEP, que servem como fontes valiosas de materiais de estudo e questões práticas:

- **Portal da matemática:** <https://portaldaoimpa.br/>
- **Banco de questões da OBMEP:** <http://www.obmep.org.br/bancoquestoes.htm>
- **Material Poti:** <http://www.matematicapoti.com.br/>
- **Portal do professor:** <http://www.obmep.org.br/professor.htm>
- **Portal da OBMEP:** <http://www.obmep.org.br/>

Esses recursos fornecem uma variedade de materiais e questões práticas, contribuindo significativamente para uma preparação eficaz para a OBMEP.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo da pesquisa buscamos investigar e destacar o papel fundamental da geometria na OBMEP, especialmente em sua segunda fase, voltada aos níveis 1 e 2. A OBMEP não apenas promove o estudo da matemática, mas também se destaca como uma olimpíada que identifica talentos, incentiva o aprimoramento educacional e promove a inclusão social por meio da difusão do conhecimento matemático.

Neste trabalho são abordados os conceitos básicos necessários para a resolução dos problemas olímpicos de geometria. Considerando que um dos objetivos desta dissertação é disponibilizar de forma organizada e concisa uma fonte de busca das questões da OBMEP que versam sobre o tema geometria bem como suas resoluções e as técnicas empregadas, ressaltamos que não tratamos das demonstrações dos teoremas utilizados nas questões apresentadas, mas foram sugeridas algumas fontes bibliográficas disponíveis para consulta de algumas notações, conceitos, definições e teoremas que estiveram presentes neste trabalho, tendo em vista que muitos conteúdos apresentados não são de entendimento imediato.

Em conclusão, esta dissertação buscar ser um instrumento significativo em direção ao aprimoramento do ensino de geometria e das técnicas de resolução de problemas em sala de aula. Ao fornecer recursos valiosos para professores e alunos, esperamos fortalecer as habilidades matemáticas e preparar os estudantes para enfrentar desafios como a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e outras olimpíadas de matemática. Acreditamos que o treinamento colabora para prover alunos com as ferramentas necessárias para o prosseguimento dos estudos em matemática e para enfrentar os desafios complexos do mundo atual e capacita professores para a preparação de alunos para competições de conhecimento, inspira práticas pedagógicas inovadoras e contribui para a qualidade da educação matemática. Que esta dissertação inspire práticas pedagógicas inovadoras e promova uma cultura de excelência na educação matemática.

REFERÊNCIAS

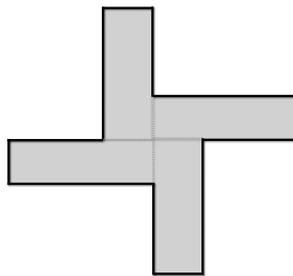
- [1] Dante, Luiz Roberto. *Projeto Teláris - Matemática*. 3ª edição. São Paulo: Editora Ática, 2018 (4V). Citado 2 vezes nas páginas 32 e 44.
- [2] Ferreira, Lenilson do Carmo. *O uso de resolução de problemas no auxílio do ensino da geometria plana*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora, 100 f. 2023. Citado na página 14.
- [3] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018. Citado na página 29.
- [4] Lindquist, Mary M.; Shulte, Alberto P., orgs. *Aprendendo e ensinando geometria*. São Paulo: Atual, 1994. Citado na página 17.
- [5] Lorenzato, Sérgio. *Para aprender Matemática*. Autores associados, 2006. Citado na página 17.
- [6] Lorenzato, Sérgio. *Por que não ensinar Geometria?*. In: *A educação matemática em revista*. N. 4. Campinas. 1995. Citado na página 17.
- [7] Modolo, Talita Moraes. *O ensino da matemática por meio da resolução de problemas: um estudo das questões da OBMEP sobre perímetro e área*. 2023. 47 f.: il. Citado na página 15.
- [8] Sousa, Levi Rodrigo Pinto de. *Sequência didática e OBMEP: uma proposta para o ensino de áreas e perímetros de polígonos por meio da Resolução de Problemas*. 2020. 132 f.: il. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.
- [9] OBMEP. *Material Didático: Provas e Soluções [edições 2005 até 2023]*. Disponível em: <<https://www.obmep.org.br/provas.htm>>. Acesso em: 20 de dez. de 2023. Citado na página 24.
- [10] OBMEP. *Quem somos: Apresentação*. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm>>. Acesso em: 27 de mar. de 2024. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 18.
- [11] Pinho, J. L. R., Batista, E., & Carvalho, N. T. B. (2010). *Geometria I*. Florianópolis: EAD/UFSC/CED/CFM. 330 p. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 44.

A APÊNDICE - BANCO DE QUESTÕES COM SOLUÇÕES OFICIAIS.

A.1 Questões de Geometria Plana na Segunda Fase da OBMEP - Nível 1 (2005-2023)

Com o propósito de elaborar um material de apoio ao professor de Matemática específico sobre o estudo de geometria plana, foi realizado um estudo minucioso das provas da segunda fase dos níveis 1 e 2 da OBMEP, abrangendo os anos de 2005 a 2023 . O material utilizado para esta pesquisa foi encontrado no site da OBMEP, na parte de Material Didática, na aba de Provas e Soluções. Segue todas essas questões acompanhadas de sua resolução oficial, indicando o número da questão e o ano em que ela apareceu na prova.

Questão 1 - (Nº 1 - 2005): Tia Anastácia uniu quatro retângulos de papel de 3 cm de comprimento por 1cm de largura, formando a figura abaixo.

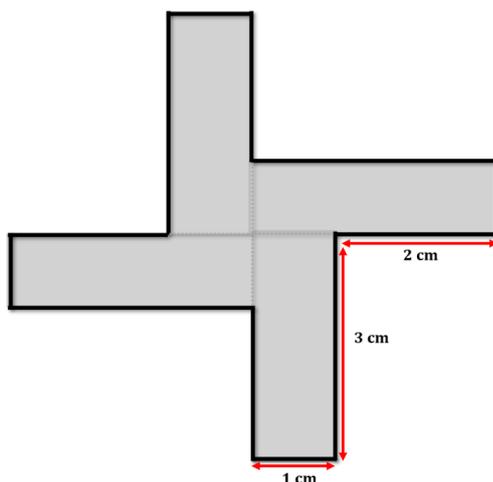


- A) Qual é o perímetro da figura?
- B) Qual é o menor número de retângulos de 3 cm de comprimento por 1 cm de largura que é necessário juntar a essa figura para se obter um quadrado? Faça um desenho ilustrando sua resposta.
- C) Qual é a área do quadrado obtido no item anterior?

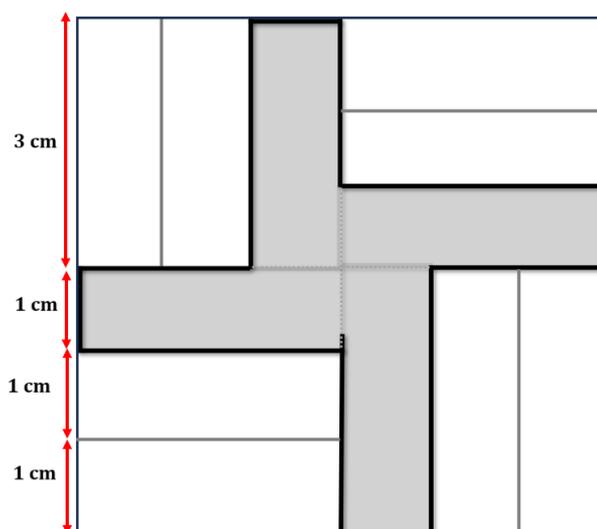
SOLUÇÃO QUESTÃO 1 - (Nº 1 - 2005):

A) O perímetro da figura é calculado somando-se os comprimentos de todos os lados. Como a figura tem 4 lados de 3 cm, 4 lados de 2 cm e 4 lados de 1 cm, temos:

$$\text{Perímetro} = 4 \times 3 + 4 \times 2 + 4 \times 1 = 24 \text{ cm}$$



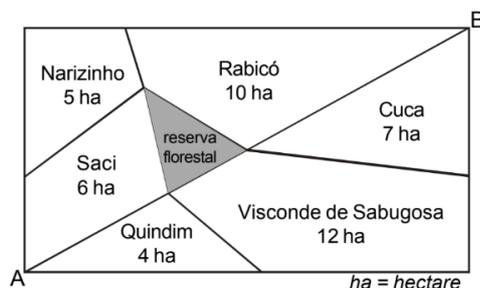
B) Na figura ao lado, podemos ver que basta juntar 8 retângulos à figura original para formar um quadrado.



C) Cada retângulo tem área igual a $3 \times 1 = 3 \text{ cm}^2$. Como o quadrado é composto de 12 retângulos, sua área é igual a $12 \times 3 = 36 \text{ cm}^2$.

Questão 2 - (Nº 5 - 2005):

Dona Benta dividiu o Sítio do Picapau Amarelo entre seis personagens, mantendo uma parte do Sítio como reserva florestal. A divisão está indicada na figura, onde a área de cada personagem é dada em hectares e a área sombreada é a reserva florestal. O Sítio tem formato retangular e AB é uma diagonal.



A) Qual é a área da reserva florestal?

B) Para preparar os terrenos para o plantio, cada um dos seis personagens gastou uma quantia proporcional à área de seu terreno. O Quindim e a Cuca gastaram, juntos, R\$ 2420,00. Quanto foi que o Saci gastou?

SOLUÇÃO QUESTÃO 2 - (Nº 5 - 2005):

A) Um retângulo fica dividido em duas regiões de mesma área por sua diagonal. Logo os terrenos de Quindim, Visconde de Sabugosa e Cuca, juntos, têm área igual à metade da área do Sítio. Esses terrenos somam $4 + 7 + 12 = 23$ hectares.

A outra metade do Sítio tem a mesma área e é igual à soma das áreas dos terrenos de Saci, Narizinho, Rabicó e da reserva florestal. Portanto,

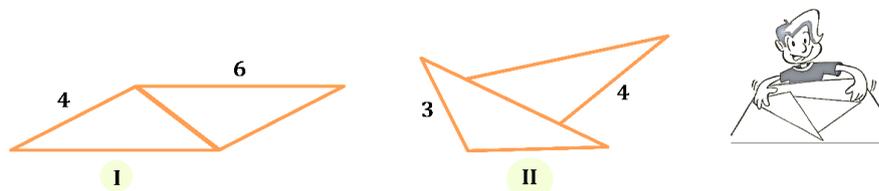
$$6 + 5 + 10 + (\text{área da reserva}) = 23 \text{ ha}$$

ou seja, a área da reserva é igual a $23 - 21 = 2$ hectares.

B) Quindim e Cuca, juntos, possuem $4 + 7 = 11$ ha. Assim, gastaram $\frac{2400}{11} = 220$ reais por hectare. Como o terreno de Saci tem 6 ha, ele gastou $6 \times 220 = 1320$ reais.

Questão 3 (Nº 1 - 2006)

Miguilim brinca com dois triângulos iguais cujos lados medem 3 cm, 4 cm e 6 cm. Ele forma figuras planas unindo um lado de um triângulo com um lado do outro, sem que um triângulo fique sobre o outro. Abaixo vemos duas das figuras que ele fez.



- A) Quais os comprimentos dos lados que foram unidos nas figuras I e II?
- B) Calcule os perímetros das figuras I e II.
- C) Qual o menor perímetro de uma figura que Miguilim pode formar? Desenhe duas figuras que ele pode formar com esse perímetro.

SOLUÇÃO QUESTÃO 3 - (Nº 1 - 2006):

A) A solução desse item segue diretamente da observação das figuras. Na figura I, vemos que

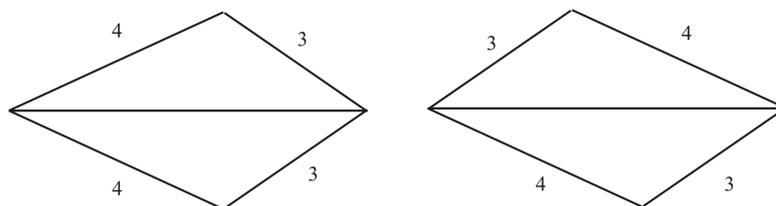
- As medidas de dois lados que não foram unidos são 4 cm e 6 cm;
- Os dois lados que foram unidos são do mesmo tamanho, logo eles não podem medir nem 4 cm nem 6 cm. Portanto, os lados que foram unidos só podem medir 3 cm.

Na figura II, vemos que o maior lado de um dos triângulos (que mede 6 cm) foi unido ao menor lado do outro triângulo (que mede 3 cm). Portanto, os lados unidos medem 6 cm e 3 cm.

B) A solução segue do item (a), que fornece as medidas dos lados que não foram unidos. Logo:

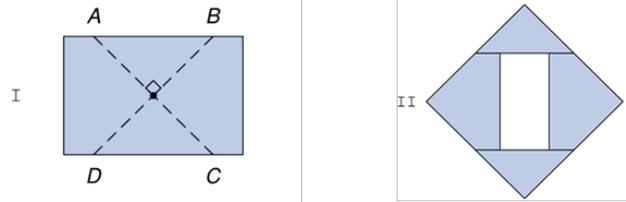
- O perímetro da figura I é $4 + 6 + 4 + 6 = 20$ cm;
- O perímetro da figura II é $6 + 4 + 3 + 4 + (6 - 3) = 20$ cm. Foi subtraído 3 cm correspondente ao lado do triângulo que foi unido e não conta no perímetro da figura II.

C) Da maneira como Miguilim forma as figuras, ele conseguirá a de menor perímetro quando unir os lados maiores, ou seja, os de 6 cm (já que eles não contarão no cálculo do perímetro). Veja abaixo as duas figuras que ele pode formar assim. O perímetro de cada uma é $2 \times 3 + 2 \times 4 = 14$ cm.



Questão 4 - (Nº 4 - 2006):

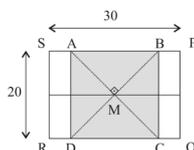
Uma folha retangular de 20 cm por 30 cm foi cortada ao longo das linhas tracejadas AC e BD em quatro pedaços: dois triângulos iguais e dois polígonos iguais de cinco lados cada um, como na figura I. Os segmentos AC e BD tem o mesmo comprimento e se encontram no centro do retângulo formando ângulos retos.



- A) Qual é o comprimento do segmento AB?
- B) Qual é a área de um pedaço triangular? E de um pedaço de cinco lados?
- C) Com os quatro pedaços podemos montar um quadrado com um buraco retangular, como na figura II. Qual é a área do buraco?

SOLUÇÃO QUESTÃO 4 - (Nº 4 - 2006):

A) Vamos representar a folha original pelo retângulo PQRS, e vamos considerar o quadrilátero ABCD como na figura abaixo.



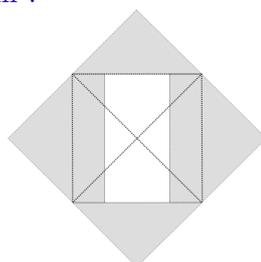
A ideia é verificar que ABCD é um quadrado, e podemos fazer isso de várias maneiras. Uma delas é a seguinte: ABCD é um quadrilátero cujas diagonais

- São iguais (porque $AC = BD$),
- Se cortam ao meio (porque se encontram no centro do retângulo) e
- São perpendiculares.

Um quadrilátero com essas propriedades é necessariamente um quadrado. Como ABCD é um quadrado, segue que $AB = BC = PQ = 20$ cm.

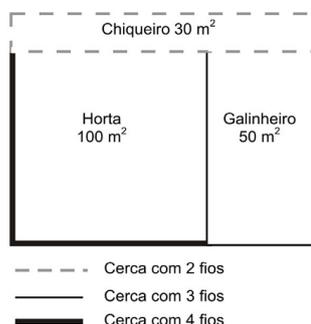
B) Seja M o centro do quadrado. A área de cada um dos triângulos AMB , BMC , CMD e DAM é igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado $ABCD$, que é $20 \times 20 = 400$ cm²; logo a área de um desses triângulos é $\frac{400}{4} = 100$ cm². A folha original tem área igual a $20 \times 30 = 600$ cm²; se subtrairmos dessa área as áreas dos dois pedaços triangulares ABM e DMC , restará a área dos dois pedaços de cinco lados. Como os dois pedaços de cinco lados são iguais, eles têm a mesma área e assim a área de cada um deles é igual a $\frac{600 - 2 \times 100}{2} = \frac{400}{2} = 200$ cm². Podemos também calcular a área de um pedaço de cinco lados de outro modo. Cada um deles é formado por um dos quatro triângulos acima e por um retângulo de altura 20 cm e largura igual a $\frac{30 - 10}{2} = \frac{10}{2} = 5$ cm. Como a área de cada triângulo é 100 cm² e a área do retângulo é $5 \times 20 = 100$ cm², concluímos que a área de cada pedaço de cinco lados é $100 + 100 = 200$ cm².

C) O quadrado formado pelos quatro pedaços e o buraco tem área igual a 8 vezes a área de cada pedaço triangular, conforme mostrado no desenho ao lado. Portanto, sua área é igual a $8 \times 100 = 800$ cm². Como a soma das áreas das quatro peças é igual à área da folha original, ou seja, 600 cm², concluímos que a área do buraco é igual a $800 - 600 = 200$ cm². Há outras maneiras de calcular a área do buraco. Ele é um retângulo cuja altura é igual à altura da folha original, ou seja, 20 cm. Seu comprimento é a diferença entre o comprimento da folha original e o segmento AB, ou seja, $30 - 20 = 10$ cm. Portanto, a área do buraco é $20 \times 10 = 200$ cm².



Questão 5 - (Nº 1 - 2007):

João Grilo tem um terreno retangular onde há um galinheiro e um chiqueiro retangulares e uma horta quadrada, cujas áreas estão indicadas na figura.



- A) Qual é a área do terreno do João Grilo?
- B) Quais são as medidas dos lados do galinheiro?
- C) João Grilo cercou a horta, o galinheiro e o chiqueiro com cercas feitas com diferentes números de fios de arame, como indicado na figura. Quantos metros de arame ele usou?

SOLUÇÃO QUESTÃO 5 - (Nº 1 - 2007):

A) A área do terreno do João Grilo é igual à soma das áreas da horta, do galinheiro e do chiqueiro, ou seja, é igual a $230 + 100 + 50 + 180 \text{ m}^2 = 560 \text{ m}^2$.

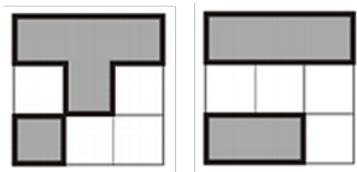
B) A área de um quadrado de lado a é a^2 e a área de um retângulo de lados a e b é ab . Como a horta é quadrada e tem 100 m^2 de área, concluímos que cada lado da horta mede $\sqrt{100} = 10 \text{ m}$, pois $10 \times 10 = 100$. Assim, o lado comum do galinheiro e da horta mede 10 m . Como a área do galinheiro é igual a 50 m^2 , a medida de outro lado é 5 m , pois $10 \times 5 = 50$. Logo as medidas dos lados do galinheiro são 10 m e 5 m .

C) O chiqueiro tem um lado formado por um lado da horta e um dos lados menores do galinheiro. Logo esse lado mede $10 + 5 = 15 \text{ m}$; como a área do chiqueiro é 30 m^2 , a medida de outro lado é 2 m , pois $15 \times 2 = 30 \text{ m}^2$. Observando a planta e a legenda indicando o número de fios de cada um dos lados cercados, concluímos que João Grilo usou

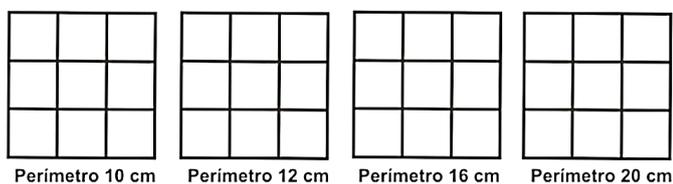
$$\underbrace{2 \times 4 \times 10}_{\text{lados em pontilhado}} + \underbrace{2 \times 3 \times 10}_{\text{lados em traço fino}} + \underbrace{1 \times 3 \times 5}_{\text{lados em traço grosso}} + \underbrace{2 \times 2 \times (2 + 15)}_{\text{lados em traço grosso}} = 80 + 60 + 15 + 68 = 223 \text{ m}$$

Questão 6 - (Nº 3 - 2007):

Em um tabuleiro quadrado, dividido em nove quadradinhos com lados de 1 cm, podemos fazer várias figuras pintando exatamente cinco desses quadradinhos de cinza. Dizemos que o perímetro de uma dessas figuras é o comprimento do seu contorno. Por exemplo, o perímetro das duas figuras abaixo é 14 cm.



A) Desenhe figuras formadas por cinco quadradinhos e com os perímetros indicados.

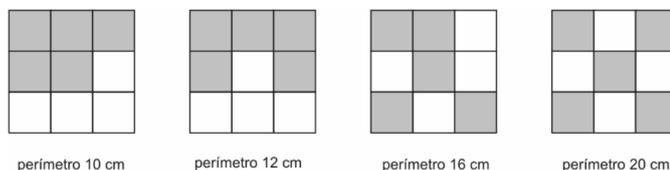


B) Explique por que o maior perímetro possível de uma figura formada por cinco quadradinhos é 20 cm.

C) Explique por que o perímetro de qualquer figura formada por cinco quadradinhos é um número par de centímetros.

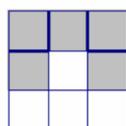
SOLUÇÃO QUESTÃO 6 - (Nº 3 - 2007):

A) Mostramos a seguir uma figura para cada perímetro. Há várias possibilidades para os três primeiros casos, mas a de perímetro 20 cm é a única.



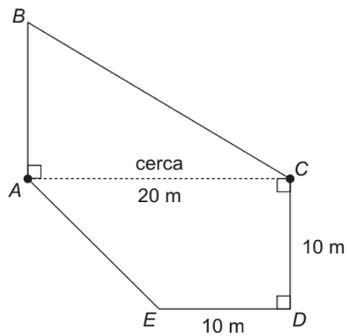
B) Cada quadradinho tem perímetro 4 cm. A soma dos perímetros de 5 quadradinhos é igual a $4 \times 5 = 20$ cm, logo o perímetro de uma figura não pode ser maior que 20 cm. Como o item anterior mostra que há uma figura de perímetro 20 cm, segue que o perímetro máximo de uma figura é 20 cm.

C) Cinco quadradinhos sem lados comuns têm um perímetro total de $5 \times 4 = 20$ cm. Cada lado comum entre dois quadradinhos subtrai 2 cm desse total, pois esses dois lados (um de cada quadradinho) não são mais contados no cálculo do perímetro. Por exemplo, na figura ao lado existem quatro lados comuns a dois quadrados (marcados em traço mais grosso), logo seu perímetro é $20 - 4 \times 2 = 12$ cm. Em geral, o perímetro de uma figura formada por 5 quadradinhos é $20 - 2 \times$ (número de lados comuns entre os quadradinhos) cm. Esse número é a diferença entre dois números pares, logo é par.



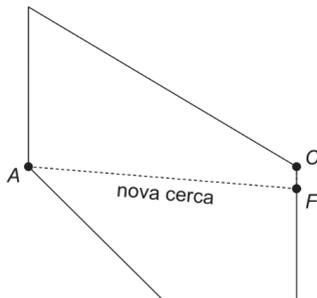
Questão 7 - (Nº 2 - 2008):

A figura ao lado representa o terreno de Dona Idalina. Esse terreno é dividido em duas partes por uma cerca, representada pelo segmento AC. A parte triangular ABC tem área igual a 120 m^2 .



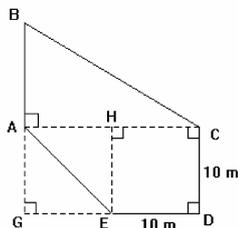
A) Qual é a área total do terreno?

B) Dona Idalina quer fazer uma nova cerca, representada pelo segmento AF na figura, de modo a dividir o terreno em duas partes de mesma área. Qual deve ser a distância CF?



SOLUÇÃO QUESTÃO 7 - (Nº 2 - 2008):

A) A figura ao lado mostra como decompor a região ACDE em um quadrado CDEH e um triângulo AGE.



Como $CD = DE = 10$ e $AC = 20$, segue que $AG = 10$. A área do triângulo AGE é metade da área de um quadrado de lado 10, ou seja, é $\frac{AG \times GE}{2} = \frac{10 \times 10}{2} = 50 \text{ m}^2$. Como a área do quadrado CDEH é $10^2 = 100 \text{ m}^2$, concluímos que a área da região ACDE é $100 + 50 = 150 \text{ m}^2$. Alternativamente, podemos calcular a área de ACDE como a diferença entre as áreas do retângulo ACDG e do triângulo AHE, ou seja, $20 \times 10 - \frac{10 \times 10}{2} = 150 \text{ m}^2$.

B) Como o terreno tem 270 m^2 , ao dividi-lo em duas partes iguais cada uma das partes terá área de $\frac{270}{2} = 135 \text{ m}^2$. Desse modo, devemos ter

$$\begin{aligned} 135 &= \text{área}(ABCF) = \text{área}(ABC) + \text{área}(ACF) \\ &= 120 + \text{área}(ACF), \end{aligned}$$

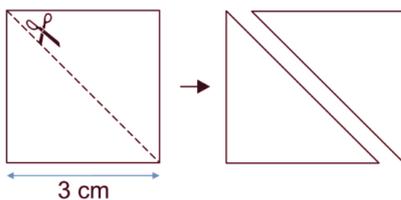
e vemos que $\text{área}(ACF) = 15 \text{ m}^2$. Por outro lado, a área do triângulo ACF é

$$\frac{AC \times CF}{2} = \frac{20 \times CF}{2} = 10 \times CF.$$

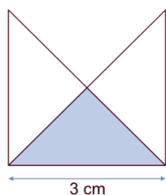
Portanto, $10 \times CF = 15$, e logo $CF = 1,5 \text{ m}$.

Questão 8 - (Nº 2 - 2009):

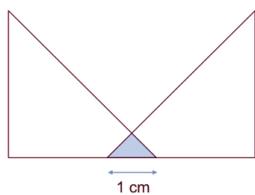
Um quadrado de lado 3 cm é cortado ao longo de uma diagonal em dois triângulos, como na figura. Com esses triângulos formamos as figuras dos itens (A), (B) e (C), nas quais destacamos, em cinza, a região em que um triângulo fica sobre o outro. Em cada item, calcule a área da região cinza.



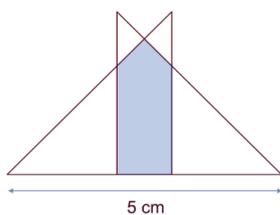
A)



B)

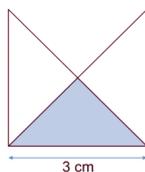


C)



SOLUÇÃO QUESTÃO 8 - (Nº 2 - 2009):

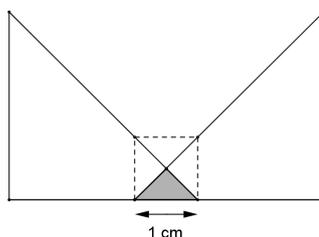
A)



Usando a fórmula de área triangular, temos que a altura relativa ao lado de 3 cm mede a metade do lado do quadrado, ou seja, $\frac{3}{2}$ cm. A área da região cinza é então:

$$A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{3 \times \frac{3}{2}}{2} = \frac{9}{4} = 2,25 \text{ cm}^2$$

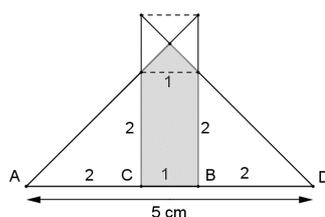
B)



Para encontrar a área da região cinza, podemos usar a fórmula para a área de um triângulo:

$$A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{1 \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ cm}^2$$

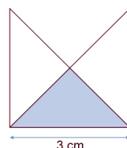
C)



Como $AB = CD = 3$ cm e $AD = 5$ cm, vemos que $BC = 1$ cm. A região cinza é a união de um retângulo de base 1 cm e altura 2 cm com um triângulo cuja área já foi calculada no item anterior. Logo, a área da região cinza é. $1 \times 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} = 2,25 \text{ cm}^2$.

Questão 9 - (Nº 4 - 2009):

Pedro gasta 1 mL de tinta cinza para pintar 100 cm² de superfície.



A) O sólido da figura foi feito colando uma face de um cubo de aresta 10 cm em uma face de um cubo de aresta 20 cm. Quantos mL de tinta Pedro precisa para pintar esse sólido?

B) Pedro gastou 54 mL de tinta para pintar um cubo e depois dividiu esse cubo pintado em dois blocos retangulares iguais, como na figura. Quantos mL a mais de tinta ele gastará para acabar de pintar esses dois blocos?

SOLUÇÃO QUESTÃO 9 - (Nº 4 - 2009):

A) A superfície do sólido é igual à soma das superfícies dos cubos menos a área “perdida” no contato entre eles, que é igual a duas vezes a área de uma face do cubo menor. Assim, a área do sólido obtido é $6 \times 20 \times 20 + 6 \times 10 \times 10 - 2 \times 10 \times 10 = 2400 + 600 - 200 = 2800 \text{ cm}^2$. Como Pedro gasta 1 mL de tinta para pintar 100 cm², então ele vai gastar $2800 \div 100 = 28$ mL de tinta para pintar a superfície do sólido.

B) Para pintar uma das faces do cubo, Pedro gastou $\frac{54}{6} = 9$ mL de tinta. O corte criou duas novas superfícies, cada uma com área igual à de uma das faces do cubo; para pintar estas duas superfícies Pedro deve gastar $2 \times 9 = 18$ mL de tinta.

C) Para dividir o cubo em cubinhos iguais, devem ser feitos cortes paralelos às faces e igualmente espaçados. Como vimos no item (b), cada um destes cortes cria 1800 cm² de superfície não pintada. Portanto, o número de cortes foi $\frac{21600}{1800} = 12$. Como os cubinhos são iguais, os cortes horizontais, verticais e longitudinais devem ser todos de mesmo número, ou seja, em número de $12 \div 4 = 3$. Esses cortes dão origem a 5 camadas horizontais, verticais e longitudinais de cubinhos, e segue que o cubo original foi dividido em $5 \times 5 \times 5 = 125$ cubinhos.

Questão 10 - (Nº 3 - 2010):

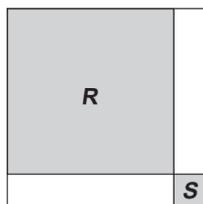
A Professora Clotilde desenhou três figuras no quadro-negro, todas com área igual a 108 cm^2 .

A) A primeira figura é um retângulo que tem um lado de comprimento 12 cm . Qual é o perímetro desse triângulo?

B) A segunda figura é um retângulo dividido em um retângulo branco e um quadrado cinza de área igual a 36 cm^2 , como na figura. Qual é o perímetro do retângulo branco?

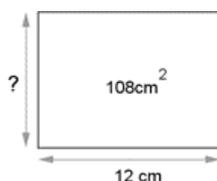


C) A terceira figura é um quadrado, ela dividiu em dois retângulos brancos e dois quadrados cinza R e S, como na figura. O perímetro de um dos retângulos é igual a três vezes o perímetro do quadrado S. Qual é a área do quadrado R?



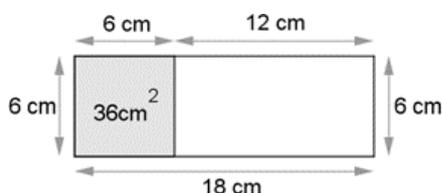
SOLUÇÃO QUESTÃO 10 - (Nº 3 - 2010):

A)



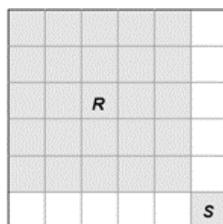
Como a área do retângulo é 108 cm^2 e um lado mede 12 cm , o comprimento do lado adjacente, indicado por x na figura ao lado, deve ser um número que multiplicado por 12 tenha como resultado 108 , ou seja, é $108 \div 12 = 9$. Assim, o perímetro do retângulo é $12 + 12 + 9 + 9 = 42 \text{ cm}$.

B)



Como o quadrado cinza tem área igual a 36 cm^2 , o comprimento de seu lado é um número cujo quadrado é 36 , ou seja, é igual a 6 cm . Logo, o retângulo maior tem um lado de comprimento 6 cm . Como sua área é 108 cm^2 , segue que seu outro lado mede $\frac{108}{6} = 18 \text{ cm}$. Logo, um lado do retângulo branco mede 6 cm e o outro mede $18 - 6 = 12 \text{ cm}$, e assim seu perímetro é $12 + 12 + 6 + 6 = 36 \text{ cm}$. Pode-se também argumentar que a área do retângulo branco é $108 - 36 = 72 \text{ cm}^2$; como um de seus lados mede 6 cm , o outro mede então $72 \div 6 = 12$, seguindo como acima.

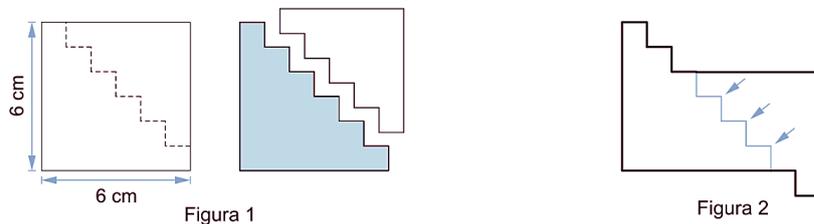
C)



Solução algébrica: Primeiro observamos que os retângulos brancos são iguais, pois têm os mesmos lados, e seu perímetro é igual a dois grossos mais dois pontilhados.. Seja agora x o lado do quadrado S (grosso) e y o lado do quadrado R (pontilhado). O perímetro de S é então $4x$ e o de um retângulo branco é $2x + 2y$; o enunciado nos diz que $2x + 2y = 3 \times 4x = 12x$, donde $2y = 10x$ e então $y = 5x$. Logo o lado do quadrado grande mede $x + 5x = 6x$; como sua área é 108 cm^2 temos $108 = 6x \times 6x = 36x^2$, donde $x^2 = 3$. A área de R é então $y^2 = (5x)^2 = 25x^2 = 25 \times 3 = 75 \text{ cm}^2$.

Questão 11 - (Nº 5 - 2010):

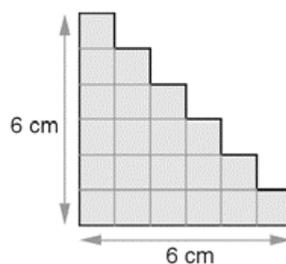
Marcelo cortou um quadrado de 6 cm de lado em duas partes, como na Figura 1. O corte foi feito em formato de escada, com segmentos de 1 cm paralelos aos lados do quadrado.



- A) Calcule o perímetro e a área da parte cinza na Figura 1.
- B) A Figura 2 foi montada por Marcelo encaixando completamente três degraus (indicados com flechas) de uma das partes na outra parte. Calcule o perímetro e a área dessa figura.
- C) Marcelo cortou da mesma maneira um quadrado de 87 cm de lado e montou uma figura encaixando 39 degraus de uma das partes na outra. Calcule o perímetro dessa nova figura.

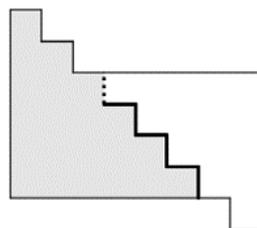
SOLUÇÃO QUESTÃO 11 - (Nº 5 - 2010):

A)



Ao lado vemos que a figura cinza tem como contorno um segmento horizontal de 6 cm, um segmento vertical de 6 cm, seis segmentos horizontais de 1 cm e seis segmentos verticais de 1 cm; logo seu perímetro é $6 + 6 + 6 \times 1 + 6 \times 1 = 4 \times 6 = 24$ cm. Vemos também que ela pode ser decomposta em $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ quadrados de área 1; logo sua área é 21 cm^2 .

B)



O perímetro da parte cinza é $4 \times 6 = 24$ cm e o da parte branca é $4 \times 5 = 20$ cm; separadamente, essas peças teriam um perímetro total de $20 + 24 = 44$ cm. Ao encaixar as peças como no enunciado, elas passam a ter em comum dois segmentos em cada degrau encaixado, que indicamos com traço mais grosso, e um segmento indicado em pontilhado; o número de segmentos comuns é então $2 \times 3 + 1 = 7$. Para cada segmento comum “perdemos” 2 cm do perímetro total, num total de $2 \times 7 = 14$ cm. Logo o perímetro da figura é $44 - 14 = 30$ cm.

C) Quando o comprimento do lado é 87 cm, a parte cinza tem perímetro igual a $4 \times 87 = 348$ cm e a parte branca tem perímetro $4 \times 86 = 344$ cm, num total de $348 + 344 = 692$ cm. O mesmo raciocínio da 1ª solução do item anterior mostra que o perímetro da figura obtida encaixando 39 degraus é então $692 - 2 \times (2 \times 39 + 1) = 534$ cm.

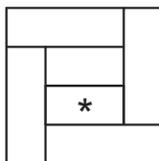
Questão 12 - (Nº 3 - 2011):

Sara recortou três tiras retangulares diferentes de papel.

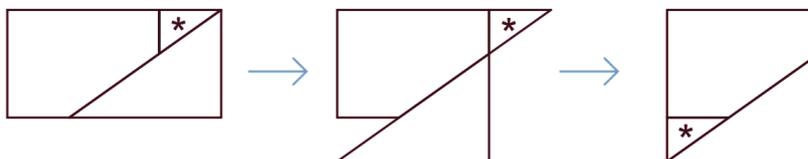
A) Ela recortou a primeira tira em três retângulos iguais, como na figura abaixo. Com esses retângulos, formou um quadrado de 36 cm^2 de área. Encontre as medidas dos lados dos retângulos que ela recortou..



B) Ela recortou a segunda tira em seis retângulos de mesma largura e com eles formou um quadrado de 36 cm^2 de área, como na figura. Encontre o perímetro e a área do retângulo indicado com *.

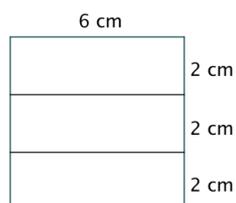


C) As medidas da terceira tira eram $4,5 \text{ cm}$ e 2 cm . Sara recortou essa tira em três pedaços e com eles formou um quadrado, como na figura. Qual é a área do triângulo indicado com *?.



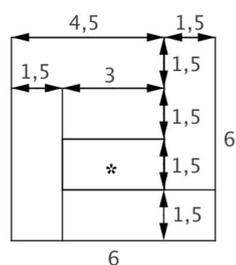
SOLUÇÃO QUESTÃO 12 - (Nº 3 - 2011):

A)



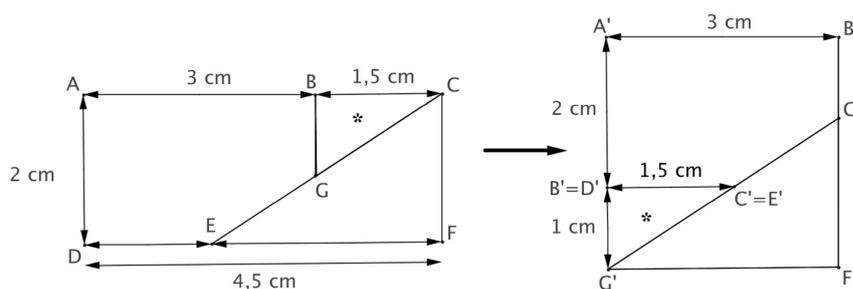
Como o quadrado formado com os três retângulos recortados da primeira tira tem área de 36 cm^2 , seu lado mede 6 cm. Logo, o comprimento dos retângulos é 6 cm e sua largura é um terço do comprimento, ou seja, 2 cm.

B)



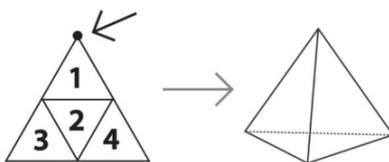
Como no item anterior, o lado do quadrado formado com os seis retângulos recortados da segunda tira mede 6 cm. Como todos os retângulos têm a mesma largura, a figura mostra que essa largura é um quarto da medida do lado, isto é, 1,5 cm. As medidas dos outros retângulos são então determinadas imediatamente, como indicado. Em particular, as dimensões do retângulo destacado são 3 cm e 1,5 cm; logo, seu perímetro é $1,5 + 1,5 + 3 + 3 = 9 \text{ cm}$ e sua área é $1,5 \times 3 = 4,5 \text{ cm}^2$.

C)



c) Na figura acima mostramos o retângulo e o quadrado, com pontos correspondentes indicados com a mesma letra; por exemplo, o segmento AB à esquerda corresponde ao segmento $A'B'$ à direita. A área do retângulo é $2 \times 4,5 = 9 \text{ cm}^2$, que é também a área do quadrado; logo o lado do quadrado mede 3 cm. Desse modo, os segmentos $A'B'$ e $B'F'$ medem 3 cm e assim AB mede 3 cm. Como o lado do retângulo mede 4,5 cm, segue que BC mede $4,5 - 3 = 1,5 \text{ cm}$, que é então a medida de $B'C'$. Finalmente, a medida de $A'B$ é a mesma que a de AD , que é 2 cm; logo a medida de $B'C'$ é $3 - 2 = 1 \text{ cm}$. Assim, obtemos as medidas $BG = 1 \text{ cm}$ e $BC = 1,5 \text{ cm}$ dos catetos do triângulo retângulo BCG , cuja área é então $\frac{1 \times 1,5}{2} = 0,75 \text{ cm}^2$.

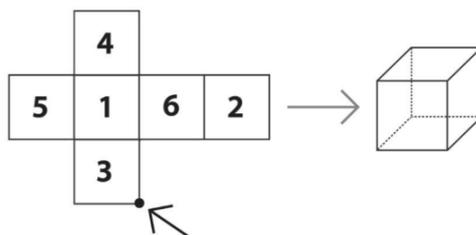
Questão 13 - (Nº 5 - 2011):



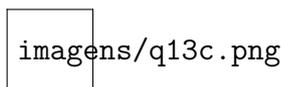
As figuras mostram planificações de sólidos com faces numeradas. Após montados esses sólidos, dizemos que o valor de um vértice é a soma dos números escritos nas faces que contêm esse vértice. Por exemplo, a figura ao lado mostra a planificação de uma pirâmide; quando essa pirâmide é montada, o valor do vértice correspondente ao ponto indicado na figura é $1+3+4=8$.

A) Qual é o maior valor de um vértice da pirâmide acima?

B) A figura mostra a planificação de um cubo. Qual é o valor do vértice correspondente ao ponto indicado?



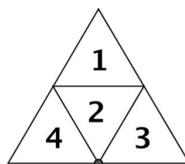
C) A figura mostra a planificação de um sólido chamado octaedro. Qual é o valor do vértice correspondente ao ponto A?



D) Qual é o valor do vértice correspondente ao ponto B na planificação do item anterior?

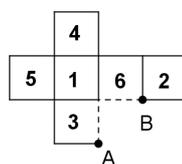
SOLUÇÃO QUESTÃO 13 - (Nº 5 - 2011):

A)



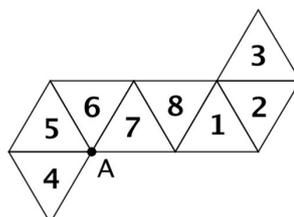
Na pirâmide, cada vértice pertence a três faces. O ponto assinalado se tornará o vértice das faces com os números 2, 3 e 4; como esses são os três maiores números que aparecem nas faces, esse vértice terá a maior soma, que é $2 + 3 + 4 = 9$.

B)



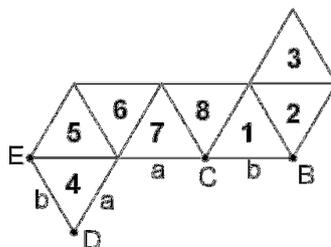
Em um cubo, cada vértice pertence a três faces. Ao montar o cubo, as arestas pontilhadas na figura ao lado coincidirão, o mesmo acontecendo com os pontos A e B. Vemos assim que as faces que se encontram no vértice correspondente ao ponto A são as faces com os números 3, 6 e 2; logo o valor desse vértice é $3 + 6 + 2 = 11$.

C)



Em um octaedro, cada vértice pertence a quatro faces. A figura mostra que, ao formar o octaedro, o ponto A será o vértice comum das faces com os números 4, 5, 6 e 7; logo seu valor será $4 + 5 + 6 + 7 = 22$.

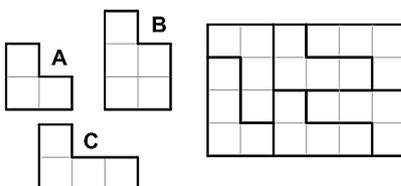
D)



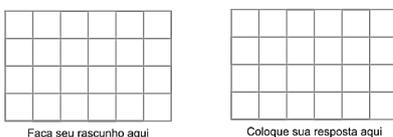
Ao montar o octaedro, os dois segmentos indicados pela letra *a* formarão uma aresta e os pontos *C* e *D* coincidirão. Logo os segmentos indicados por *b* também coincidirão e o ponto *B* será levado no ponto *E*. Desse modo, as faces que têm o vértice correspondente a *B* em comum são as faces com os números 1, 2, 4 e 5; o valor desse vértice é então $1 + 2 + 4 + 5 = 12$.

Questão 14 - (Nº 1 - 2012):

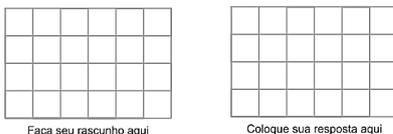
Pedro brinca com um tabuleiro quadriculado 4×6 e com peças dos tipos A, B e C. Ele tenta cobrir inteiramente o tabuleiro com as peças, encaixando-as sem que nenhuma fique sobre outra. Por exemplo, usando somente peças do tipo C, ele consegue cobrir o tabuleiro, como indicado na figura.



A) Mostre como Pedro pode cobrir o tabuleiro usando somente peças do tipo A.



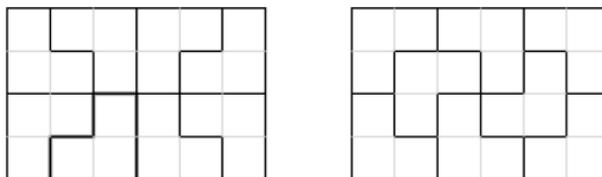
B) Mostre como Pedro pode cobrir o tabuleiro com peças dos tipos A e B, usando uma ou mais peças do tipo B.



C) Explique por que não é possível cobrir o tabuleiro usando somente peças do tipo B.

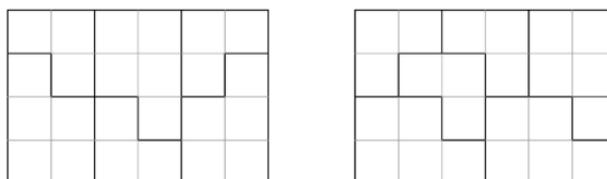
SOLUÇÃO QUESTÃO 14 - (Nº 1 - 2012):

A)



Há várias formas de se cobrir o tabuleiro usando somente peças do tipo A; a figura mostra duas delas.

B)

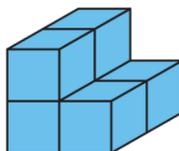


Há várias formas de se cobrir o tabuleiro com peças dos tipos A e B, com pelo menos uma do tipo B; a figura mostra duas delas.

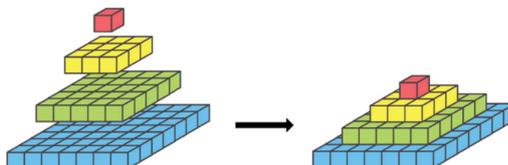
C) Há $4 \times 6 = 24$ casas no tabuleiro. Cada peça do tipo B cobre 5 casas; como as peças devem ser colocadas sem sobreposição, o número de casas cobertas por uma peça do tipo B é 5, por duas peças é 10, por três peças é 15, por 4 peças é 20, menos que 24, e por cinco peças é 25, que já passa de 24. Logo não é possível cobrir o tabuleiro com peças do tipo B. .

Questão 15 - (Nº 4 - 2012):

Cláudia gosta de montar sólidos colando cubinhos de aresta 1 cm. Ela sempre usa um pingo de cola entre duas faces de cubinhos que ficam em contato; por exemplo, para montar o sólido ao lado ela usou 7 pingos de cola.

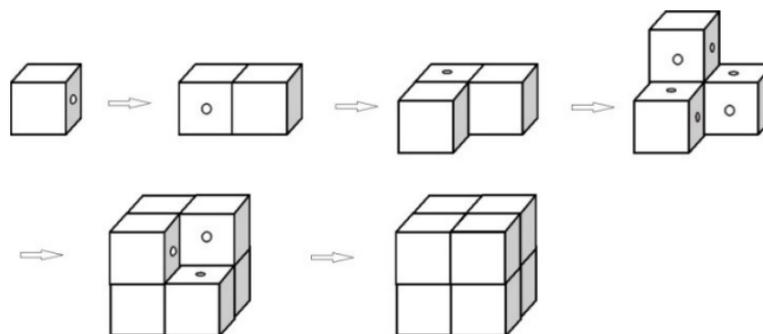


- A) Quantos pingos ela vai usar para montar um cubo de aresta 2 cm?
- B) Quantos pingos ela vai usar para montar um cubo de aresta 3 cm?
- C) Cláudia montou o sólido ao lado, com quatro camadas de cubinhos. Quantos pingos de cola ela usou?



SOLUÇÃO QUESTÃO 15 - (Nº 4 - 2012):

A)



Começando com um cubinho, Cláudia usa um pingo para juntar um cubinho na face ao lado, mais um para um cubinho em outra face vizinha ao lado e outro para a face vizinha de cima. Depois, 2 pingos para cada buraco (dois laterais e um em baixo) e, no final, mais 3 pingos para colar o último cubinho. No total, ela terá usado $1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 = 12$ pingos de cola.

B) Para montar um cubo de aresta 3 cm, ela irá colar 3 camadas 3×3 de cubinhos. Como vimos acima, para formar cada uma dessas camadas ela usa 12 pingos, logo para montar as 3, ela irá usar $3 \times 12 = 36$ pingos. Como cada camada tem 9 cubinhos, para colar duas camadas, ela precisará de 9 pingos e, para colar a terceira camada, mais 9 pingos. No total, irá usar $3 \times 2 \times 9 = 54$ pingos.

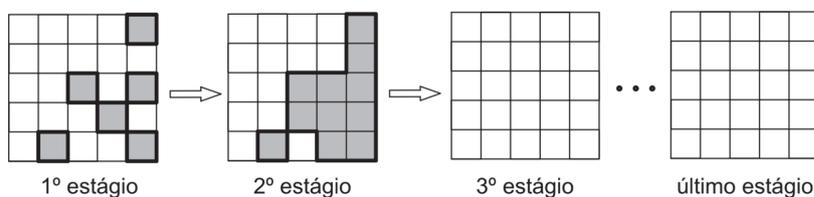
C) Para montar uma camada 3×3 , Cláudia usa 12 pingos de cola; para montar uma camada 5×5 , usa 40 pingos e para montar uma camada 7×7 , usa $2 \times 7 = 84$ pingos. Para colar um cubinho na camada 3×3 , ela usa 1 pingo; para colar a camada 3×3 na camada de baixo ela usa 9 pingos (pois a camada 3×3 tem 9 cubinhos) e para colar a camada 5×5 na camada de baixo, ela usa 25 pingos (esta camada tem 25 cubinhos). Portanto, o número total de pingos de cola para montar o sólido é $12 + 40 + 84 + 1 + 9 + 25 = 171$.

Questão 16 - (Nº 6 - 2012):

Uma contaminação em um tabuleiro 5×5 , formado por quadrados de 1 cm de lado, propaga-se em estágios de acordo com as seguintes regras:

- quadrados contaminados, indicados em cinza, permanecem contaminados no estágio seguinte;
- um quadrado não contaminado, indicado em branco, torna-se contaminado no estágio seguinte quando tem pelo menos dois lados comuns com quadrados contaminados; caso contrário, permanece não contaminado;
- a contaminação acaba quando não é possível contaminar novos quadrados.

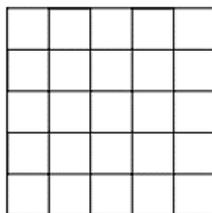
A) Complete a figura abaixo, desenhando o terceiro e o último estágios da contaminação nos respectivos tabuleiros.



O perímetro de contaminação de um estágio é a medida do contorno da área contaminada. Por exemplo, os perímetros de contaminação do primeiro e do segundo estágios da contaminação ilustrada são 24 cm e 20 cm, respectivamente, como mostram as linhas em destaque na figura do item a.

B) Escreva os perímetros de contaminação do terceiro e do último estágios da contaminação do item a.

C) Desenhe um estágio com apenas 5 quadrados contaminados tal que, ao final da contaminação, todo o tabuleiro fique contaminado.



D) Explique por que o perímetro de contaminação nunca aumenta de um estágio para o seguinte.

E) Explique por que não é possível contaminar todo o tabuleiro a partir de um estágio com menos de 5 quadrados contaminados.

SOLUÇÃO QUESTÃO 16 - (Nº 6 - 2012):

A)

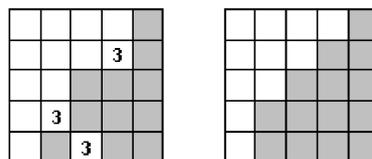


Figura I

A figura I indica, com o número 3, os quadrados contaminados no terceiro estágio e apresenta o resultado da contaminação ao final deste estágio.

B)

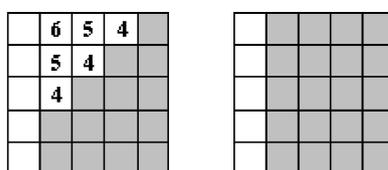


Figura II

A figura II indica os quadrados contaminados em cada estágio subsequente e mostra o resultado final da contaminação.

C)

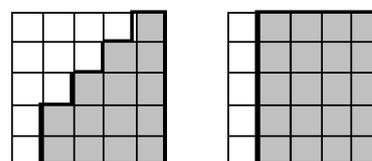


Figura III

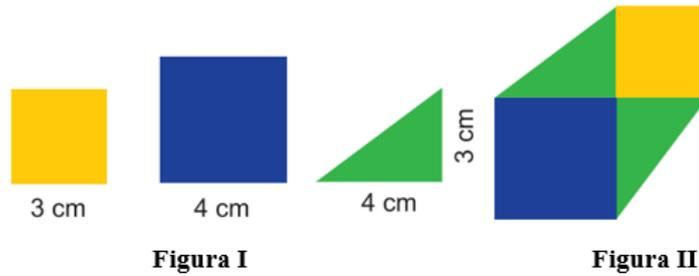
Os perímetros de contaminação no terceiro e no último estágios, destacados na figura III, são ambos iguais a 18 (correspondentes a 8 lados horizontais e 10 lados verticais de quadrados) .

D) Há várias configurações com 5 quadrados que levam à completa contaminação; a mais simples é a formada por 5 quadrados em uma diagonal

E) Quando todos os quadrados estão contaminados, o perímetro de contaminação é igual a $4 \times 5 = 20$. Por outro lado, o perímetro de uma contaminação com n quadrados é no máximo igual a $4n$, que ocorre quando os n quadrados não têm lados em comum. Como o perímetro de contaminação nunca aumenta, para que esta contaminação seja capaz de contaminar todo o tabuleiro, é necessário que $4n$ seja no mínimo igual a 20; ou seja, n deve ser no mínimo igual a 5.

Questão 17 - (Nº 4 - 2013):

Dafne tem muitas peças de plástico: quadrados amarelos de lado 3 cm, quadrados azuis de lado 4 cm e triângulos retângulos verdes cujos lados menores medem 3 cm e 4 cm, como mostrado a figura I. Com estas peças e sem sobreposição, ela forma figuras como, por exemplo, o hexágono na figura II.

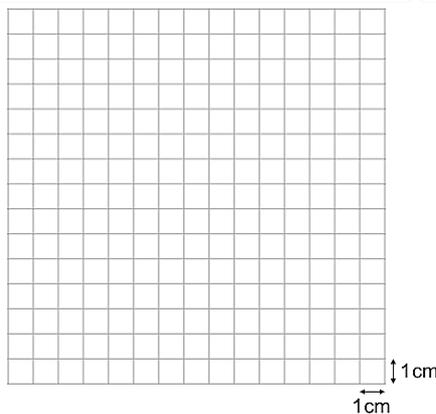


A) Qual é a área do hexágono que Dafne formou?

B) Usando somente peças quadradas, Dafne formou a figura ao lado, com um buraco em seu interior. Qual é a área do buraco?



C) Mostre como Dafne pode preencher, sem deixar buracos, um quadrado de lado 15 cm com suas peças, sendo apenas uma delas um quadrado de lado 3 cm.



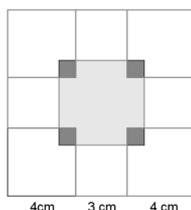
D) Explique por que Dafne não pode preencher um quadrado de lado 15 cm sem usar pelo menos um quadrado de lado 3 cm.

SOLUÇÃO QUESTÃO 17 - (Nº 4 - 2013):

Cada uma das peças amarelas tem área $3 \times 3 = 9 \text{ cm}^2$, as azuis têm $4 \times 4 = 16 \text{ cm}^2$ e as verdes têm $\frac{(3 \times 4)}{2} = 6 \text{ cm}^2$.

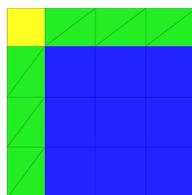
A) O hexágono montado por Dafne compõe-se de duas peças verdes, uma amarela e uma azul. Portanto, sua área é igual a $2 \times 19 + 6 + 9 = 37 \text{ cm}^2$.

B)



A figura construída forma um quadrado de lado $4\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$, cuja área é $11 \times 11 = 121 \text{ cm}^2$. Ele é composto por 4 peças amarelas e 4 peças azuis; a área total dessas peças é $4 \times 9 + 4 \times 16 = 80 \text{ cm}^2$. A área do buraco é a área do quadrado menos a soma das áreas dessas peças, ou seja, é igual a $121 - 80 = 41 \text{ cm}^2$.

C)



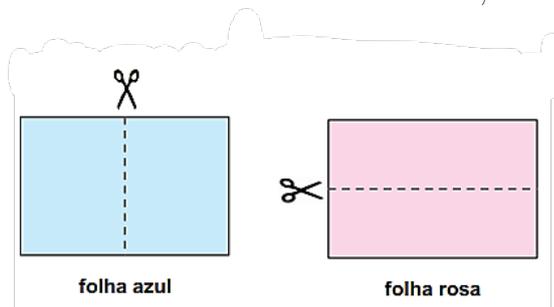
Uma possível maneira de preencher o quadrado 15×15 , como pedido, é mostrado na figura a cima.) .

D) Um quadrado de lado 15 cm tem área $15 \times 15 = 225 \text{ cm}^2$; observamos que 225 é um número ímpar. A peça azul tem área 16 cm^2 e a verde tem área 6 cm^2 , ambos números pares. Logo, não é possível preencher o quadrado de lado 15 cm apenas com peças desse tipo, pois a soma de números pares é par. Segue que para preencher o quadrado de lado 15 cm com as peças do enunciado é necessário usar pelo menos uma peça amarela.

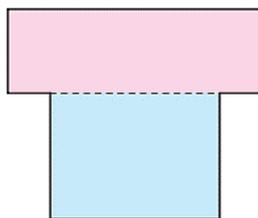
E) Quando todos os quadrados estão contaminados, o perímetro de contaminação é igual a $4 \times 5 = 20$. Por outro lado, o perímetro de uma contaminação com n quadrados é no máximo igual a $4n$, que ocorre quando os n quadrados não têm lados em comum. Como o perímetro de contaminação nunca aumenta, para que esta contaminação seja capaz de contaminar todo o tabuleiro, é necessário que $4n$ seja no mínimo igual a 20; ou seja, n deve ser no mínimo igual a 5.

Questão 18 - (Nº 2 - 2014):

Lucinha tem duas folhas retangulares, uma azul e outra rosa, ambas com 8 cm de largura e 12 cm de comprimento. Ela cortou as duas folhas ao meio, conforme indicado na figura.



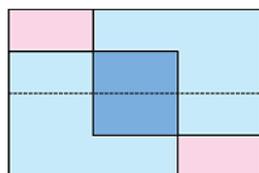
A) Lucinha pegou uma metade de cada folha e fez coincidir os lados maiores desses pedaços, formando a figura abaixo, parecida com a letra T. Qual é o perímetro dessa figura?



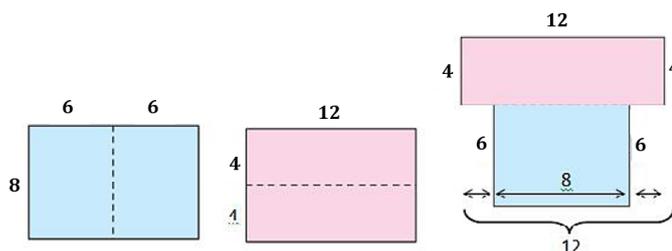
B) Em seguida, ela deslizou um pedaço sobre o outro, sem girar, formando a figura abaixo. Qual é a área do retângulo formado pela sobreposição das duas folhas?



C) Depois, Lucinha juntou as duas metades da folha rosa, formando um retângulo idêntico ao original antes de ser cortado, e colocou os dois pedaços da folha azul sobre eles, conforme indicado na figura. Qual é a área da folha rosa que não foi coberta pelos pedaços da folha azul?

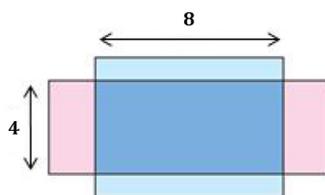


SOLUÇÃO QUESTÃO 18 - (Nº 2 - 2014):



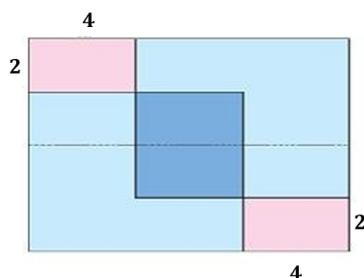
A) As dimensões das metades das folhas são, respectivamente, $6\text{ cm} \times 8\text{ cm}$ e $12\text{ cm} \times 4\text{ cm}$. Para calcular o perímetro da figura "T", observamos que a soma dos comprimentos dos segmentos horizontais do contorno é $12+12 = 24\text{ cm}$, independente do pedaço azul estar centralizado, e que a soma dos comprimentos verticais do contorno é $4+6+4+6 = 20\text{ cm}$. Portanto, o perímetro da figura será $20+24 = 44\text{ cm}$.

B)



O retângulo formado pela sobreposição dos dois pedaços terá dimensões $8\text{ cm} \times 4\text{ cm}$, logo, sua área será 32 cm^2 .

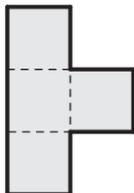
C)



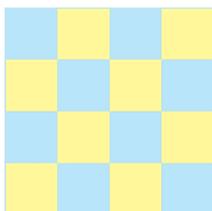
Como a folha rosa tem dimensões $8\text{ cm} \times 12\text{ cm}$ e cada metade da folha azul $8\text{ cm} \times 6\text{ cm}$, temos que cada um dos retângulos não cobertos tem dimensões $4\text{ cm} \times 2\text{ cm}$ e área 8 cm^2 . A área não coberta será, portanto, 16 cm^2 .

Questão 19 - (Nº 5 - 2014):

Maria possui muitas peças, todas iguais, formadas por quatro quadradinhos, como mostra a figura ao lado. Sem sobrepor peças, ela tenta cobrir todas as casas de vários tabuleiros quadrados, fazendo coincidir os quadradinhos das peças com os do tabuleiro.



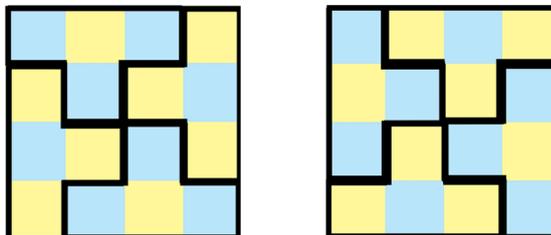
A) Desenhe na figura abaixo uma maneira de cobrir um tabuleiro 4x4 com essas peças.



- B) Explique por que nenhum tabuleiro quadrado pode ser coberto com exatamente vinte peças.
- C) Explique por que Maria nunca conseguirá cobrir um tabuleiro 10x10 com suas peças.

SOLUÇÃO QUESTÃO 19 - (Nº 5 - 2014):

A) As figuras abaixo apresentam as duas únicas maneiras possíveis, a menos de rotação, de cobrir o tabuleiro 4x4.



B) Cada peça cobre exatamente 4 quadradinhos, e portanto 20 peças cobrem uma área formada por 80 quadradinhos. Como 80 não é um número quadrado perfeito, não existe um tabuleiro quadrado com exatamente 80 quadradinhos.

C) Para cobrir um tabuleiro 10×10 , são necessárias 25 peças, uma vez que $100 = 4 \times 25$. Cada peça cobre 3 quadradinhos de uma cor e 1 da outra cor. Assim podemos dividir as peças que cobrem o tabuleiro em dois grupos:

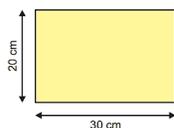
- **Grupo 1:** As que cobrem exatamente uma casa amarela (e, portanto, três azuis).
- **Grupo 2:** As que cobrem exatamente três casas amarelas (e, portanto, uma azul).

Suponha que fosse possível distribuir as 25 peças sobre o tabuleiro cobrindo todas as suas casas. Se o número de peças do Grupo 1 for par, o número de peças do Grupo 2 deve ser ímpar, pois a soma desses números deve ser igual à quantidade de peças usadas (25). Neste caso, o número de casas azuis cobertas deve ser ímpar, mas isto é impossível, já que há 50 casas azuis num tabuleiro 10×10 .

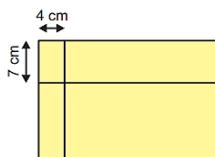
Se o número de peças do Grupo 1 for ímpar, o número de peças do Grupo 2 deve ser par, pois, pelo mesmo motivo, a soma do número de peças destes dois grupos deve ser 25. Neste caso, o número de casas amarelas cobertas deve ser ímpar, mas isto é impossível, já que também há 50 casas amarelas num tabuleiro 10×10 .

Questão 20 - (Nº 3 - 2015):

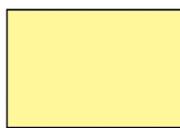
Lucinha tem três folhas retangulares iguais, cujos lados medem 20 cm e 30 cm.



A) Lucinha fez dois traços retos na primeira folha, um a 4 cm da margem esquerda e outro a 7 cm da margem superior, dividindo-a em quatro retângulos. Um desses retângulos tem a maior área. Qual é o valor dessa área?



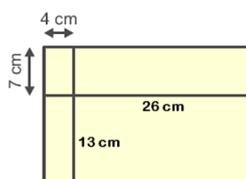
B) Ajude Lucinha a dividir a segunda folha em quadrados iguais, desenhando traços paralelos às margens, de modo que esses quadrados tenham a maior área possível.



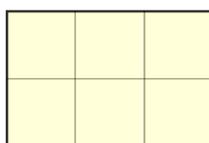
C) Lucinha pegou a terceira folha, amarela na frente e verde no verso, e fez duas dobras: a primeira a 8 cm da margem esquerda e, a segunda, a uma certa distância da margem inferior, de forma que o perímetro da região não coberta da folha (contorno da região amarela da última figura) fosse de 54 cm. Qual é a distância da segunda dobra à margem inferior?



SOLUÇÃO QUESTÃO 20 - (Nº 3 - 2015):

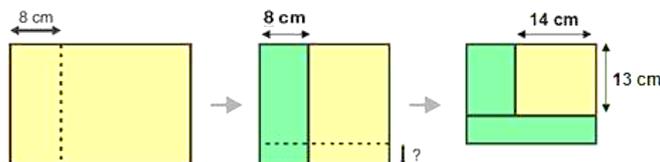


A) O maior dos quatro retângulos tem lados de medida $30 - 4 = 26$ cm e $20 - 7 = 13$ cm. Logo, sua área é $26 \times 13 = 338$ cm².



B)

Com um traço horizontal e dois verticais geramos os quadrados de maior área possível. Para formar apenas quadrados, o valor dos lados desses quadrados deve dividir 20 e 30. A maior área ocorre, então, quando o lado desses quadrados for o máximo divisor comum de 20 e 30, ou seja, 10 cm.

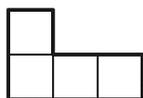


C) Vamos chamar a distância da segunda dobra até a margem inferior da folha de altura da dobra. Como a folha tem 30 cm de largura e a primeira dobra foi feita a 8 cm da margem direita da folha, a largura da região em amarelo da última figura é igual a 30 cm menos duas vezes 8 cm, ou seja, $30 - 16 = 14$ cm.

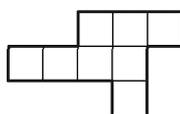
Após a segunda dobra, o dobro da altura do retângulo amarelo será a diferença entre seu perímetro e o dobro de sua largura, ou seja, $54 - 28 = 26$ cm. Portanto, a altura do retângulo amarelo na terceira figura é 13 cm. Assim, da altura da folha original sobraram $20 - 13 = 7$ cm para a realização da segunda dobra e, portanto, a altura da dobra é a metade, ou seja, $7 \div 2 = 3,5$ cm.

Questão 21 - (Nº 2 - 2016):

A peça ilustrada abaixo é formada por quatro quadrinhos de 1 cm de lado. Observe que o perímetro desta peça, ou seja, a medida de seu contorno, é 10 cm. Roberto forma figuras juntando duas dessas peças, sem sobreposição, e fazendo coincidir lados de quadrinhos.



A) Roberto formou a figura abaixo. Qual é o perímetro desta figura?



B) Ajude Roberto desenhando uma figura com perímetro igual a 12 cm no quadriculado da esquerda e outra com perímetro igual a 18 cm no quadriculado da direita.

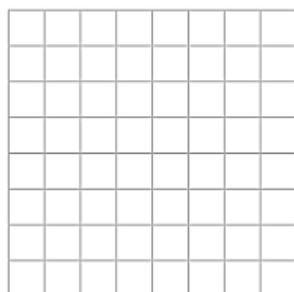


Figura com perímetro igual a 12 cm

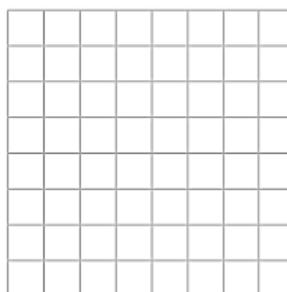


Figura com perímetro igual a 18 cm

C) Explique por que Roberto nunca conseguirá formar uma figura com perímetro igual a 15 cm. (Lembre-se de que Roberto sempre faz coincidir lados de quadrinhos).

SOLUÇÃO QUESTÃO 21 - (Nº 2 - 2016):

A) A figura em questão é formada pela junção de duas peças. Ela é formada por oito quadrinhos de 1 cm de lado, e seu contorno contém exatamente 16 lados desses quadrinhos. Logo, o perímetro dessa peça é 16×1 cm, ou seja, é igual a 16 cm.

B) Há muitas soluções, as quais podem diferir no formato ou na posição. Aqui estão dois exemplos:

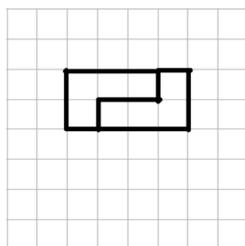


Figura com perímetro igual a 12 cm

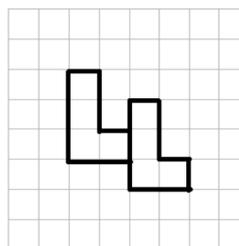
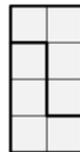
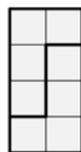
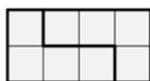
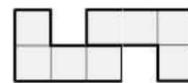
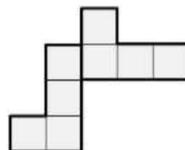
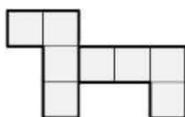
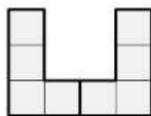


Figura com perímetro igual a 18 cm

Para formar uma figura com perímetro igual a 12 cm, Roberto deve juntar as duas peças de tal modo que o contorno da figura formada tenha somente 12 lados de quadrinhos. Como cada peça contém 10 lados de quadrinhos em seu contorno e como ele junta as peças coincidindo lados de quadrinhos, Roberto terá de fazer coincidir quatro pares de lados de quadrinhos para formar uma figura com perímetro igual a 12 cm. Isso apenas é possível se ele juntar as peças formando um retângulo. Veja algumas outras possibilidades:



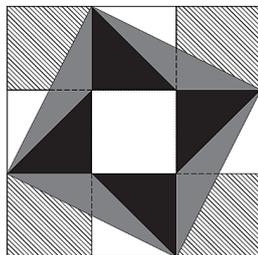
Agora, para formar uma figura com perímetro igual a 18 cm, Roberto tem de juntar as duas peças de tal modo que o contorno da figura formada tenha 18 lados de quadrinhos, ou seja, ele terá de fazer coincidir apenas um par de lados de quadrinhos. Como foi dito, existem várias maneiras de formar essas figuras; veja mais alguns exemplos:



C) Quando as duas peças não estão em contato, o perímetro total é 20 cm. Depois de juntar duas peças, o perímetro da figura formada pelas duas peças é diminuído de um número par, já que os lados em contato de quadrinhos não contribuem para o perímetro da figura formada, pois ficam internos a ela. Como duas peças soltas têm perímetro 20 cm, é impossível obter, juntando duas peças de acordo com as condições descritas no enunciado, uma figura com um perímetro ímpar. Mas 15 é ímpar e, assim, não há figuras (como as descritas no enunciado) que têm esse perímetro.

Questão 22 - (Nº 4 - 2016):

A figura ao lado foi desenhada sobre um quadriculado formado por nove quadrados, cada um com área igual a 4 cm^2 .



- A) Qual é a área total pintada de preto?
- B) Qual é a área total listrada?
- C) Qual é a área total pintada de cinza?

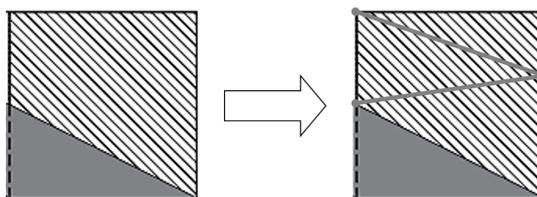
SOLUÇÃO QUESTÃO 22 - (Nº 4 - 2016):

A) A parte em preto é formada por quatro triângulos pretos menores, os quais são retângulos isósceles. Um desses triângulos aparece na figura abaixo:



A área de cada um dos triângulos pretos é a metade da área do quadrado do quadriculado, ou seja, é igual à metade de $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$, ou seja, é igual a 2 cm^2 . Portanto, a área da parte em preto é igual a $4 \times 2 = 8 \text{ cm}^2$.

B) A parte listrada de um quadradinho do quadriculado é um trapézio. Assim, a parte listrada de um quadradinho tem área igual a $\frac{3}{4}$ da área do mesmo. De fato, se considerarmos, por exemplo, a divisão na figura ilustrada abaixo,

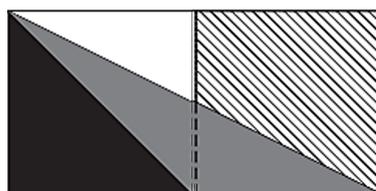


vemos que a área de cada trapézio é 3 cm^2 , e, portanto, a área total da parte listrada é igual a $4 \times 3 = 12 \text{ cm}^2$.

C) Para calcular a área de um pequeno triângulo cinza, podemos destacar da figura o retângulo abaixo, formado por dois quadradinhos do quadriculado.

A área desse retângulo é 8 cm^2 .

A diagonal o divide em dois triângulos retângulos de mesma área e um deles é formado por um triângulo preto e um triângulo cinza. A área do triângulo cinza será, portanto, igual à diferença entre a metade da área do retângulo e a área do triângulo preto, isto é, $4 - 2 = 2 \text{ cm}^2$.

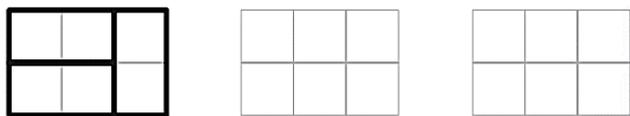


A área total da parte em cinza é $4 \times 2 = 8 \text{ cm}^2$.

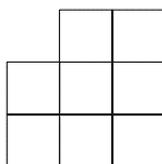
Questão 23 - (Nº 5 - 2017):

Marcela brinca de cobrir todas as casas de tabuleiros quadriculados com peças retangulares e cada uma dessas peças cobre exatamente duas casas do tabuleiro.

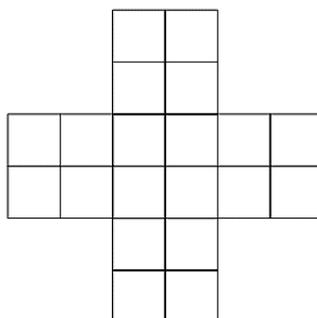
A) A figura abaixo mostra uma maneira de cobrir um tabuleiro 2×3 utilizando três peças. Desenhe as outras duas maneiras de cobrir com três peças o mesmo tabuleiro.



B) De quantas maneiras diferentes Marcela pode cobrir com quatro peças o tabuleiro abaixo?



C) De quantas maneiras diferentes Marcela pode cobrir com dez peças o tabuleiro abaixo?



SOLUÇÃO QUESTÃO 23 - (Nº 5 - 2017):

A)

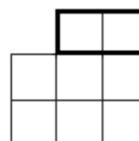


As possibilidades restantes são dadas a seguir:

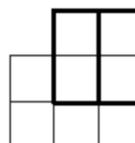
Note que não é possível ter as três peças retangulares na horizontal. Assim, ou temos duas na horizontal e uma na vertical (que pode estar à direita ou à esquerda) ou as três na vertical.

B)

- Começemos por cobrir os quadradinhos superiores. Temos duas possibilidades:



– Cobri-los com uma peça horizontal

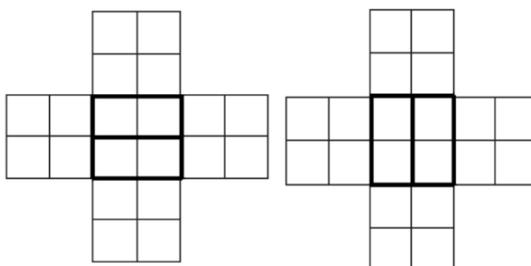


– Cobri-los com duas peças verticais

- No primeiro caso, resta um quadriculado igual ao do item a) para ser coberto; como vimos, ele pode ser coberto de 3 modos. No segundo caso, só há uma forma possível de terminar a cobertura. Logo, o número de possibilidades é $3 + 1 = 4$.

C) Começemos cobrindo o quadrado 2×2 central. Há 3 possibilidades:

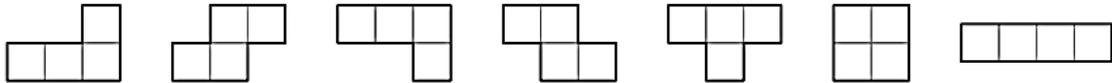
- O quadrado central é coberto de modo que as peças retangulares usadas não invadam as regiões vizinhas. Isto ocorre quando são usadas duas peças horizontais ou duas verticais para cobrir o quadrado central (como ilustrado nas figuras ao lado). Em ambos os casos, cada um dos outros quadrados pode ser coberto de dois modos (com peças horizontais ou verticais). Logo, o número de coberturas deste tipo é: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.



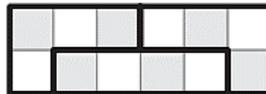
A área total da parte em cinza é $4 \times 2 = 8 \text{ cm}^2$.

Questão 24 - (Nº 4 - 2018):

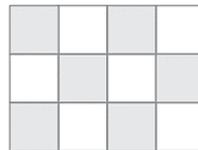
Marília tem sete peças de madeira, como ilustrado abaixo.



Ela brinca de cobrir todas as casas de tabuleiros retangulares com essas peças, sem colocar uma peça sobre outra. Cada peça deve cobrir exatamente 4 casas do tabuleiro. Veja como Marília cobriu um tabuleiro 2×6 :

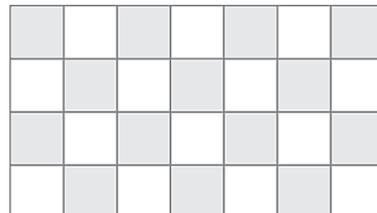


A) Cubra o tabuleiro abaixo usando três peças de Marília.



B) Qual peça não cobre o mesmo número de casas brancas e casas cinzas de um tabuleiro?

C) Explique por que Marília nunca irá conseguir cobrir o tabuleiro abaixo.



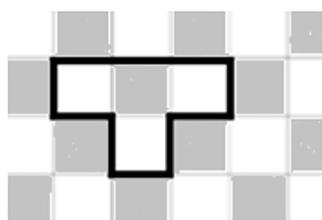
SOLUÇÃO QUESTÃO 24 - (Nº 4 - 2018):

A)

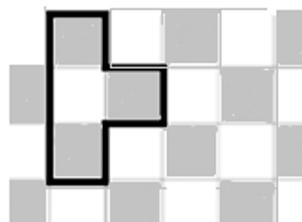
Há diversas maneiras de cobrir o tabuleiro usando três das sete peças. Aqui estão duas delas:



B) A única peça que não cobre o mesmo número de casas brancas e casas cinzas é a peça com o formato da letra T. As demais peças sempre cobrem duas casas brancas e duas casas cinzas.



Exemplo em que a peça em formato de "T" cobre 3 casas brancas e 1 casa cinza



Exemplo em que a peça em formato de "T" cobre 1 casa branca e 3 casas cinzas

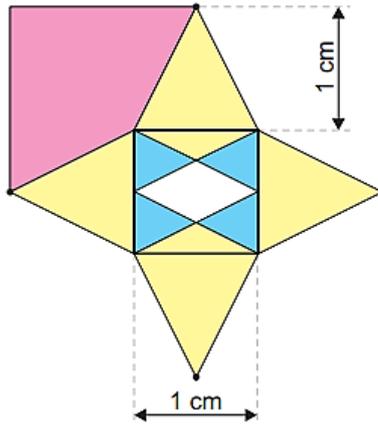
C) O tabuleiro tem 28 casas, 14 brancas e 14 cinzas; assim, todas as sete peças devem ser usadas para cobri-lo. Há somente uma peça que não cobre o mesmo número de casas brancas e casas cinzas (a peça T) e esta peça deve ser obrigatoriamente usada. Depois de colocada a peça em formato de T, independentemente de onde ela for colocada, restarão no tabuleiro 24 casas. Ocorre, então, duas possibilidades para as casas ainda não cobertas:

- 1) haverá 11 casas brancas e 13 cinzas ou
- 2) haverá 13 casas brancas e 11 cinzas.

Com as demais seis peças fica, portanto, impossível cobrir as 24 casas pois cada uma dessas peças cobre o mesmo número de casas brancas e cinzas.

Questão 25 - (Nº 4 - 2019):

Na figura, o quadrado tem lado 1 cm. Os quatro triângulos azuis são iguais, assim como os dois triângulos amarelos menores. Os quatro triângulos amarelos maiores têm, cada um deles, base igual ao lado do quadrado, altura com relação a essa base igual a 1 cm, e seus outros dois lados com mesma medida. Dois lados do quadrilátero rosa são paralelos aos lados do quadrado.

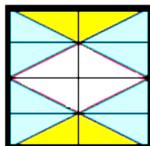


- A) Qual é a área da região formada pelos triângulos azuis?
- B) Qual é a área da região formada pelos triângulos amarelos?
- C) Qual é a área do quadrilátero rosa?

SOLUÇÃO QUESTÃO 25 - (Nº 4 - 2019):

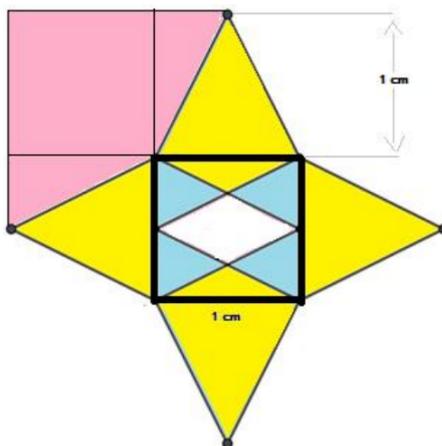
A) O quadrado central tem área igual a 1 cm^2 e ele pode ser decomposto em 16 triângulos pequenos, todos congruentes entre si, como mostra a figura:

Oito desses pequenos triângulos são azuis. Logo, a área da região azul é igual a $\frac{8}{16} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ cm}^2$.



B) Observemos, na figura do item A), que quatro dos triângulos pequenos são amarelos, logo, a região amarela interna ao quadrado tem área igual a $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$. A região amarela total é formada por 4 triângulos grandes amarelos (cada um deles com área igual à metade de um quadrado de lado 1), juntamente com esses quatro triângulos amarelos contidos dentro do quadrado, logo, sua área da região amarela é igual a $4 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2.25 \text{ cm}^2$.

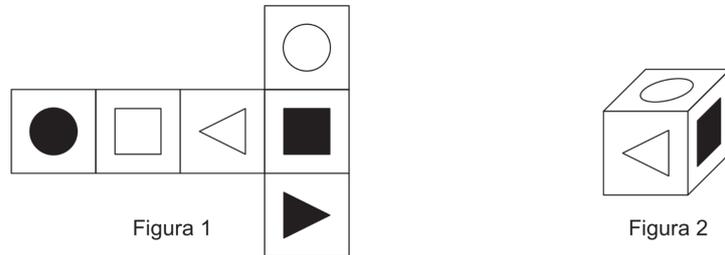
C) A região rosa pode ser decomposta em dois triângulos retângulos congruentes, cada um deles de área $\frac{1}{4} \text{ cm}^2$, e um quadrado de lado 1 cm, como mostra a figura ao lado. Assim, a área da região rosa é igual a $1 + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ cm}^2$.



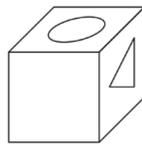
Há muitas outras decomposições da região rosa que permitem o cálculo de sua área de uma maneira simples.

Questão 26 - (Nº 5 - 2019):

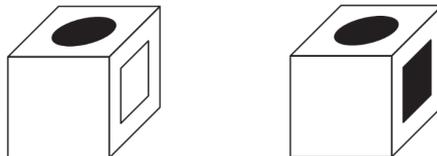
A Figura 1 é uma planificação de um cubo. Fazendo as dobras necessárias e colando as arestas soltas, obtemos o cubo da Figura 2.



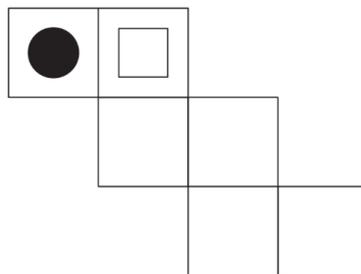
A) Em uma outra vista do mesmo cubo, mostrada abaixo, está faltando o desenho na face da frente. Faça esse desenho.



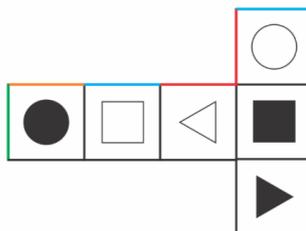
B) Abaixo temos outras duas vistas do mesmo cubo, cada uma com a face da frente sem desenho. Faça os desenhos que faltam nessas faces.



C) Abaixo temos uma outra planificação do mesmo cubo. Faça, nessa planificação, os desenhos que estão faltando.

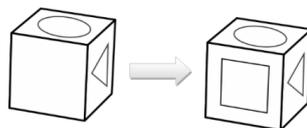


SOLUÇÃO QUESTÃO 26 - (Nº 5 - 2019):

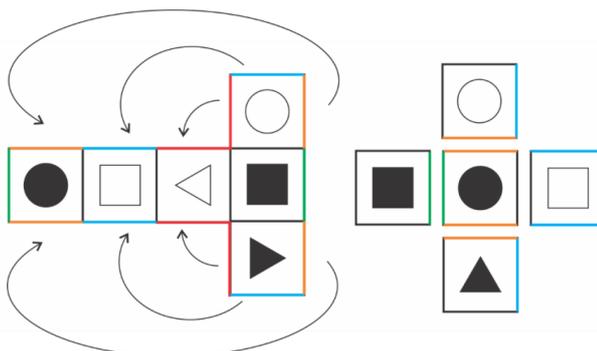


Dobrando a figura planificada para montar o cubo, vemos que o círculo preto terá uma aresta em comum com o quadrado preto e com o triângulo preto. Isso mostra que a face com o círculo branco é oposta à face com o triângulo preto, a face com triângulo branco é oposta à face com círculo preto e a face com quadrado branco é oposta à face com o quadrado preto.

A) Se o cubo for posicionado com o círculo branco na face de cima, então as faces laterais serão exatamente as quatro faces que aparecem na fila horizontal central da planificação. Logo, o triângulo branco está numa face lateral e é vizinho das faces laterais com desenhos de quadrados, um branco e um preto. O triângulo “aponta” para o quadrado branco, que então é a figura que aparece no quadrado da frente, na vista espacial do cubo. Logo, a solução é:



B) As faces com o círculo preto e o triângulo branco são opostas. Se a face com o círculo preto for a superior, nas faces laterais devem aparecer, além dos quadrados, o círculo branco e o triângulo preto. Como são opostas as faces com os quadrados, esses quadrados não podem aparecer numa mesma vista do cubo. Assim, nas vistas espaciais do cubo, abaixo, na face da frente só podem ser vistos o círculo branco e o triângulo preto. Vamos nos certificar agora da orientação do triângulo preto. Na figura acima, à direita, vemos como se posicionam as faces laterais em que o círculo preto aparece no topo. Fica claro que, se a face lateral com o quadrado branco é visível à direita, na frente aparece o triângulo preto “apontando” para o círculo preto. As vistas são, então.

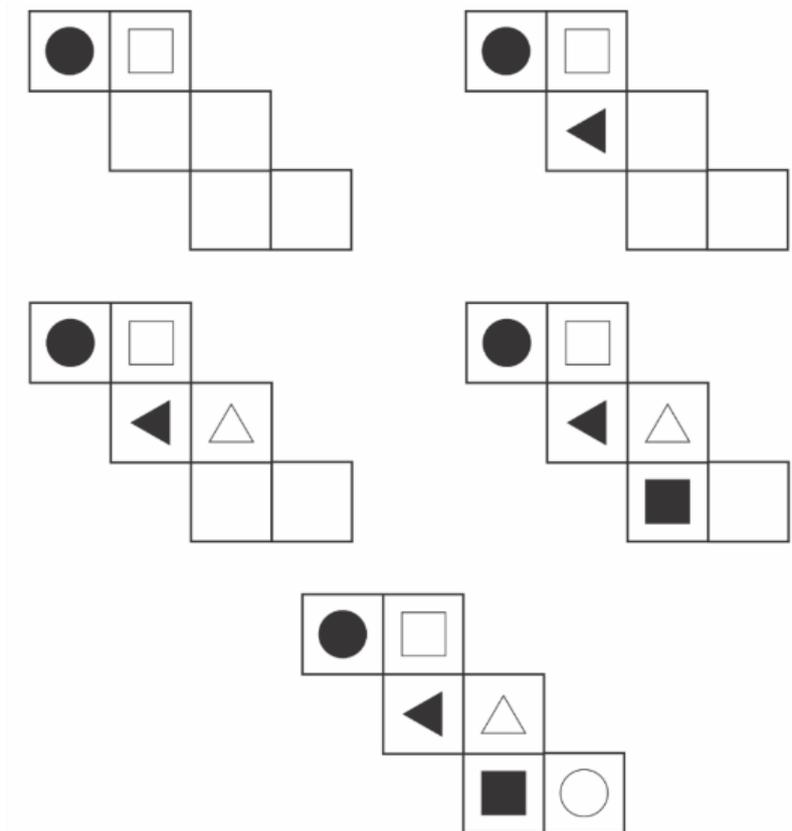


CONTINUAÇÃO DA SOLUÇÃO QUESTÃO 26 - (Nº 5 - 2019):

C) Na nova planificação, a face com o círculo preto fica à esquerda da face com o quadrado branco (veja a ilustração a seguir).

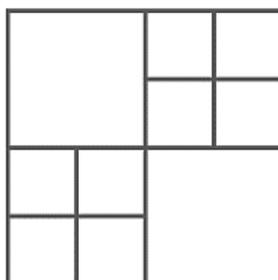


A face abaixo da face com o quadrado branco então é a face com o triângulo preto, conforme visto no item anterior (observe que o triângulo preto deve apontar para o círculo preto no cubo montado). Então a face à direita da face com o triângulo preto é a face oposta à face do círculo preto, logo é a face com o triângulo branco. O triângulo branco deve apontar para o quadrado branco no cubo montado. A face abaixo do triângulo branco é oposta à face com o quadrado branco, logo só pode ser a face com o quadrado preto. A face que falta é a do círculo branco.

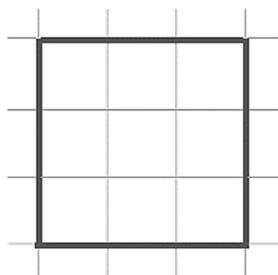


Questão 27 - (Nº 3 - 2021):

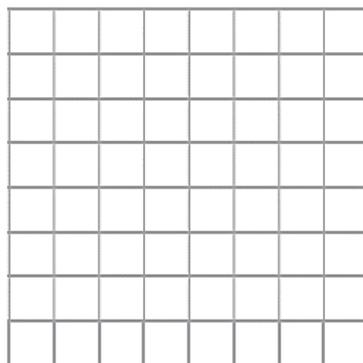
Janaína desenha quadrados formados por quadrados menores, cujos lados têm medidas inteiras. Por exemplo, a figura mostra como Janaína desenhou um quadrado de lado 4 formado por dez quadrados, sendo dois de lado 2 e oito de lado 1.



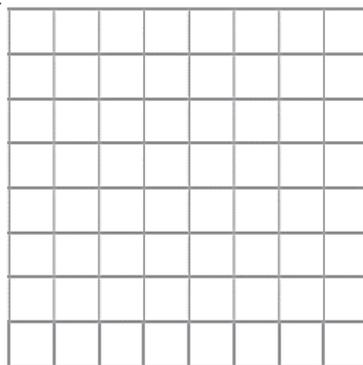
A) Mostre como Janaína pode desenhar um quadrado de lado 3 formado com a menor quantidade possível de quadrados menores com lados de medidas inteiras.



B) Janaína quer desenhar um quadrado grande formado por um quadrado de lado 3, alguns quadrados de lado 2 e a menor quantidade possível de quadrados de lado 1. Mostre, no quadriculado abaixo, como Janaína pode fazer esse desenho.

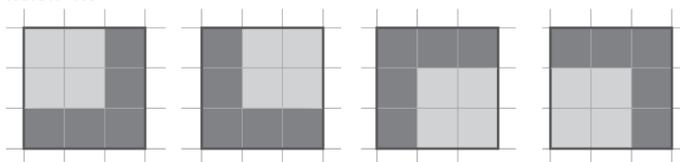


C) Janaína quer desenhar um quadrado de menor lado possível formado por 13 quadrados de lado 1 e por outros quadrados maiores com lados de medidas inteiras. Mostre, no quadriculado abaixo, como Janaína pode fazer esse desenho.

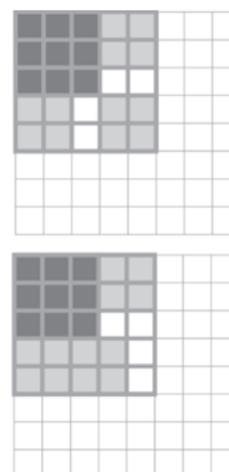


SOLUÇÃO QUESTÃO 27 - (Nº 3 - 2021):

A) Para minimizar a quantidade de quadrados usados para formar o quadrado de lado 3, Janaína deve usar os maiores quadrados possíveis. No caso, ela pode usar somente um quadrado de lado 2, porque, se usar mais um, o quadrado terá que ter lado 4, pelo menos. Ao usar um quadrado de lado 2, o restante deverá ser completado por $9 - 4 = 5$ quadrados unitários, conforme a primeira figura abaixo. Há mais outras três posições possíveis para essa figura, basta girar a primeira figura abaixo ou, equivalentemente, deslocar o quadrado de lado 2 para os outros cantos do quadrado de lado 3.

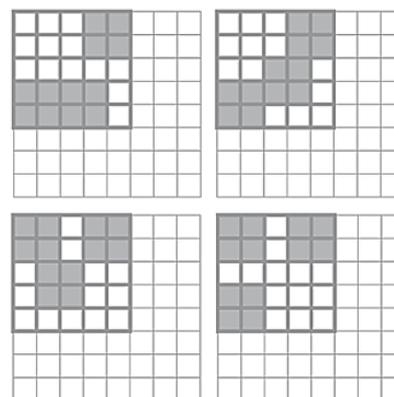


B) Se Janaína quer usar um quadrado de lado 3 e quadrados de lado 2 para formar o quadrado grande, então, este deverá ter lado de medida 5, pelo menos. Um quadrado de lado 5 corresponde a 25 quadrados unitários. Se, na sua composição, há um quadrado de lado 3, restam $25 - 9 = 16$ quadrados unitários. Cada quadrado de lado 2 corresponde a 4 quadrados unitários. Em princípio, ela poderia usar quatro quadrados de lado 2, mas essa configuração não é possível, como pode ser visto com o teste de todas as possibilidades de encaixe. Entretanto, é possível usar três quadrados de lado 2, restando completar com quatro quadrados unitários, que é o número mínimo procurado. Vemos abaixo dois tipos diferentes de figuras que Janaína pode desenhar. Ela pode, como no item anterior, girar essas figuras, fazendo outros desenhos.



CONTINUAÇÃO DA SOLUÇÃO QUESTÃO 27 - (Nº 3 - 2021):

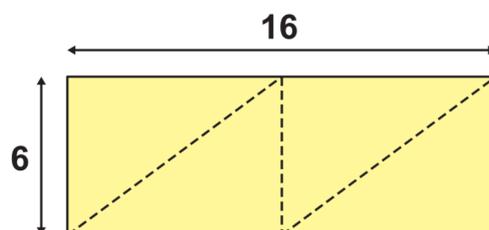
C) O menor quadrado contendo 13 quadrados unitários é o quadrado de lado 4. Mas, como $16 - 13 = 3$, esse quadrado não serve ao propósito de Janaína, porque, para preencher o espaço de 3 quadrados unitários, ela só pode usar 3 quadrados unitários, e, daí, o total deles seria 16, contrariando o enunciado. No quadrado de lado 5, temos $25 - 13 = 12$, o que corresponde a três quadrados de lado 2.



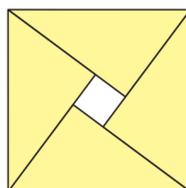
De fato, Janaína pode desenhar o quadrado de lado 5, o menor possível, com três quadrados de lado 2 e 13 quadrados unitários de várias maneiras diferentes, quatro das quais exemplificadas ao lado. Note que não é possível usar um quadrado de lado 3 para ocupar o espaço de 12 quadrados unitários, pois o espaço restante ($12 - 9 = 3$) só poderia ser ocupado com quadrados unitários, aumentando seu número de 13 para 16.

Questão 28 - (Nº 4 - 2022):

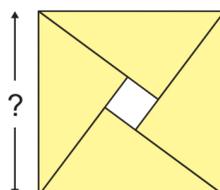
Janaína cortou uma cartolina retangular de 16 cm de comprimento e 6 cm de largura em quatro triângulos retângulos iguais, conforme mostra a figura.



- A) Qual é a área de cada um desses triângulos?
- B) Em seguida, Janaína usou os quatro triângulos para montar um quadrado com um buraco no seu interior, conforme mostrado na figura. Qual é a área do buraco?



- C) Quanto mede o lado do quadrado que Janaina montou?

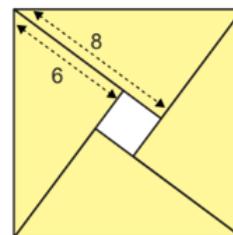


SOLUÇÃO QUESTÃO 28 - (Nº 4 - 2022):

A) Como os 4 triângulos são iguais, basta calcular a área da folha de cartolina e dividir por 4. Portanto, qualquer um desses triângulos tem área igual a: $\frac{6 \times 16}{4} = 24 \text{ cm}^2$.

Alternativamente, vemos que os quatro triângulos são triângulos retângulos iguais e seus lados menores (catetos) têm medidas 6 e 8.

Portanto, a área de cada um deles é igual a: $\frac{6 \times 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$.



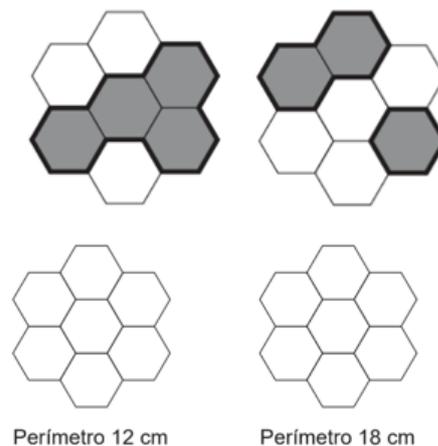
B) O buraco no centro do quadrado tem lado cuja medida é igual à diferença entre as medidas dos dois catetos dos triângulos, ou seja, $8 - 6 = 2 \text{ cm}$. Logo, a área do buraco é: $2^2 = 4 \text{ cm}^2$.

C) A área do quadrado que Janaína montou é igual à soma das áreas dos 4 triângulos, mais a área do buraco. Logo, a área desse quadrado é igual a: $4 \times 24 + 4 = 96 + 4 = 100 \text{ cm}^2$, e o lado do quadrado é: $\sqrt{100} = 10 \text{ cm}$.

Questão 29 - (Nº 2 - 2023):

Em um tabuleiro, formado por sete hexágonos de lado 1 cm, podemos fazer figuras diferentes pintando de cinza um ou mais desses hexágonos. Dizemos que o perímetro de uma dessas figuras é o comprimento total de seu contorno. Por exemplo, as duas figuras ao lado possuem perímetros iguais a 16 cm.

A) Em cada um dos tabuleiros abaixo, pinte três hexágonos formando figuras com os perímetros indicados.



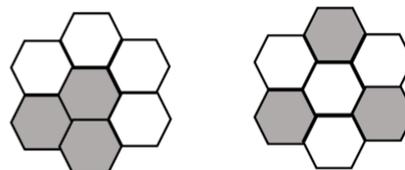
B) Pinte quatro hexágonos no tabuleiro abaixo formando uma figura que tenha o maior perímetro possível.

C) Explique por que qualquer figura formada por hexágonos pintados tem perímetro par.

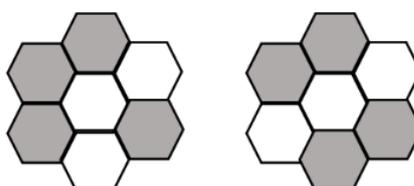


SOLUÇÃO QUESTÃO 29 - (Nº 2 - 2023):

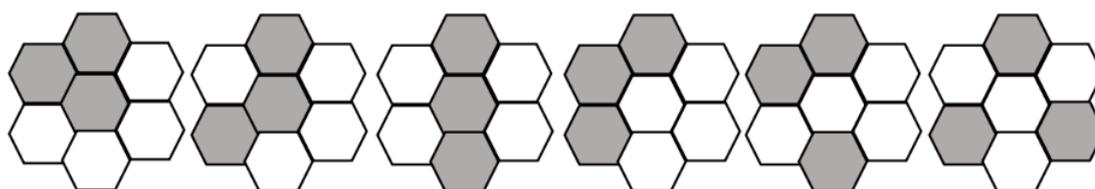
A) Há várias maneiras de pintar. Veja exemplos:



B) O maior perímetro possível com 4 hexágonos pintados é 20 cm. Veja dois exemplos:



Por que isso ocorre? Há apenas 6 padrões que podem ser obtidos quando pintamos 3 hexágonos (não levando em conta rotações e reflexões); são eles:



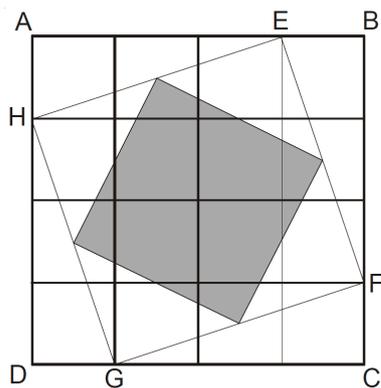
C) Toda vez que pintarmos de cinza dois hexágonos com um lado em comum, a figura formada perde duas unidades de perímetro correspondentes aos lados que se tocam; logo, ou dois hexágonos pintados não se tocam (e o perímetro total é um múltiplo de 6) ou, quando se tocam, a figura formada diminui seu perímetro em um múltiplo de 2.

Assim, não existem figuras pintadas com perímetro ímpar.

**A.2 Questões de Geometria Plana na Segunda Fase da OBMEP - Nível 2
(2005-2023)**

Questão 1 - (Nº 4 - 2005):

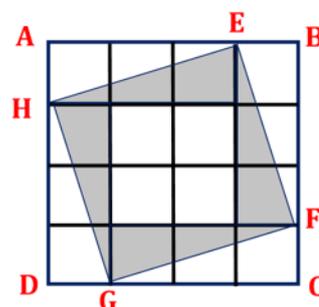
O quadrado ABCD da figura está dividido em 16 quadradinhos iguais. O quadrado sombreado tem os vértices sobre os pontos médios do quadrado EFGH.



- A) A área do quadrado EFGH corresponde a que fração da área do quadrado ABCD?
- B) Se o quadrado ABCD tem 80 cm^2 de área, qual é o lado do quadrado sombreado?

SOLUÇÃO QUESTÃO 1 - (Nº 4 - 2005):

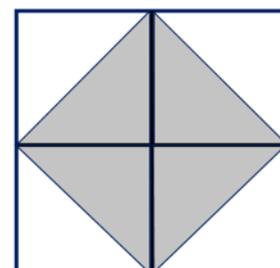
A) A figura ao lado mostra que o quadrado EFGH é formado por quatro triângulos iguais (AEH, EFB, FGC e GHD) e quatro quadradinhos. Cada um dos triângulos tem área igual à metade da área de três quadradinhos. Logo, a área do quadrado EFGH é igual à área de $4 + 4 \times \frac{3}{2} = 4 + 6 = 10$ quadradinhos. Como a área do quadrado ABCD é igual à área de 16 quadradinhos, a fração pedida é:



$$\frac{\text{área do quadrado } EFGH}{\text{área do quadrado } ABCD} = \frac{\text{área de 10 quadradinhos } EFGH}{\text{área de 16 quadradinhos } ABCD} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}.$$

A área (em quadradinhos) do quadrado EFGH também pode ser calculada subtraindo-se da área do quadrado ABCD a área dos quatro triângulos externos ao quadrado EFGH. Cada um destes triângulos tem área igual à área de 2 quadradinhos, donde a área do quadrado EFGH é igual à área de $16 - 4 \times \frac{3}{2} = 16 - 6 = 10$ quadradinhos.

B) Notamos primeiro que o quadrado sombreado tem metade da área do quadrado EFGH. Isto fica claro na figura ao lado, onde vemos que o quadrado EFGH pode ser decomposto em oito triângulos iguais, quatro dos quais formam o quadrado sombreado. Usando o resultado do item (A), vemos que a área do quadrado EFGH é $\frac{8}{5} \times 50 = 80 \text{ cm}^2$, e segue que a área do quadrado sombreado é igual a $\frac{1}{2} \times 80 = 40 \text{ cm}^2$. Como $40 = 5^2$, segue que o lado do quadrado sombreado mede 5 cm.



Questão 2 - (Nº 6 - 2005):

A Princesa Telassim cortou uma folha de papel retangular em 9 quadrados de lados 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 e 18 centímetros.

- A) Qual era a área da folha antes de ser cortada?
- B) Quais eram as medidas da folha antes de ser cortada?
- C) A Princesa Telassim precisa montar a folha de novo. Ajude-a mostrando, com um desenho, como fazer esta montagem.

SOLUÇÃO QUESTÃO 2 - (Nº 6 - 2005):

A) A área da folha era igual a soma das áreas dos nove quadrados, que é

$$1^2 + 4^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 14^2 + 15^2 + 18^2 = 1056\text{cm}^2$$

B) Sejam a e b as dimensões da folha, onde supomos que $a \leq b$. Como a área de um retângulo é o produto de suas dimensões, temos $ab = \text{área da folha}$. Além disso, como as medidas dos lados dos quadrados em que a folha foi cortada são números inteiros, segue que a e b devem ser números inteiros. Observamos, finalmente, que a e b devem ser maiores ou iguais a 18, pois um dos quadrados em que a folha foi cortada tem lado com esta medida.

Como a e b são divisores de 1056, a fatoração em fatores primos de $1056 = 2^5 \cdot 3 \cdot 11$, nos mostra que a e b são da forma $2^x \cdot 3^y \cdot 11^z$, onde x , y e z são inteiros tais que $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 1$, e $0 \leq z \leq 1$. Lembrando que a e b são maiores que 18, obtemos as seguintes possibilidades:

a	b
$2 \times 11 = 22$	$2^4 \times 3 = 48$
$2^3 \times 3 = 24$	$2^2 \times 11 = 44$
$2^5 = 32$	$3 \times 11 = 33$

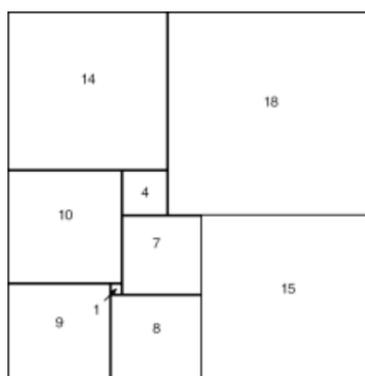
Agora temos que decidir quais destas possibilidades podem ocorrer como medidas da folha. Como o maior quadrado tem lado 18, que é menor que 22, 24 e 32, vemos que nenhum quadrado pode encostar nos dois lados de comprimento b da folha. Isso significa que b pode ser expresso de duas maneiras como uma soma na qual as parcelas são medidas dos lados dos quadrados, sendo que:

(i) não há parcelas repetidas em nenhuma das duas expressões, e

(ii) não há parcelas comuns às duas expressões.

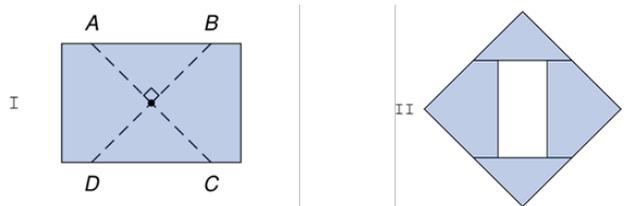
Este argumento mostra que $2b \leq 1 + 4 + 7 + 8 + 9 + 10 + 14 + 15 + 18$, ou seja, $2b \leq 86$. Logo $b \leq 43$ e a única possibilidade é $b = 33$. Segue que as dimensões da folha eram $a = 32$ e $b = 33$.

C) A única possibilidade (a menos de rotações e simetrias) é mostrada abaixo:



Questão 3 - (Nº 1 - 2006):

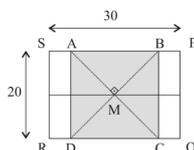
Uma folha retangular de 20 cm por 30 cm foi cortada ao longo das linhas tracejadas AC e BD em quatro pedaços: dois triângulos iguais e dois polígonos iguais de cinco lados cada um, como na figura I. Os segmentos AC e BD tem o mesmo comprimento e se encontram no centro do retângulo formando ângulos retos.



- A) Qual é o comprimento do segmento AB?
- B) Qual é a área de um pedaço triangular? E de um pedaço de cinco lados?
- C) Com os quatro pedaços podemos montar um quadrado com um buraco retangular, como na figura II. Qual é a área do buraco?

SOLUÇÃO QUESTÃO 3 - (Nº 1 - 2006):

A) Vamos representar a folha original pelo retângulo PQRS, e vamos considerar o quadrilátero ABCD como na figura abaixo.



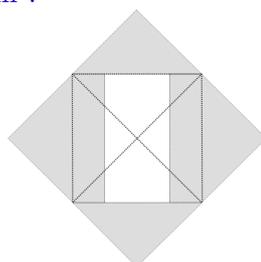
A ideia é verificar que ABCD é um quadrado, e podemos fazer isso de várias maneiras. Uma delas é a seguinte: ABCD é um quadrilátero cujas diagonais

- São iguais (porque $AC = BD$),
- Se cortam ao meio (porque se encontram no centro do retângulo) e
- São perpendiculares.

Um quadrilátero com essas propriedades é necessariamente um quadrado. Como ABCD é um quadrado, segue que $AB = BC = PQ = 20$ cm.

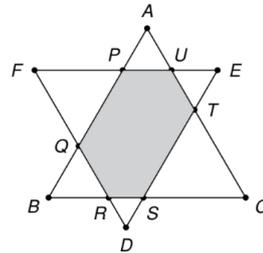
B) Seja M o centro do quadrado. A área de cada um dos triângulos AMB , BMC , CMD e DAM é igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado $ABCD$, que é $20 \times 20 = 400$ cm²; logo a área de um desses triângulos é $\frac{400}{4} = 100$ cm². A folha original tem área igual a $20 \times 30 = 600$ cm²; se subtrairmos dessa área as áreas dos dois pedaços triangulares ABM e DMC , restará a área dos dois pedaços de cinco lados. Como os dois pedaços de cinco lados são iguais, eles têm a mesma área e assim a área de cada um deles é igual a $\frac{600 - 2 \times 100}{2} = \frac{400}{2} = 200$ cm². Podemos também calcular a área de um pedaço de cinco lados de outro modo. Cada um deles é formado por um dos quatro triângulos acima e por um retângulo de altura 20 cm e largura igual a $\frac{30 - 10}{2} = \frac{10}{2} = 5$ cm. Como a área de cada triângulo é 100 cm² e a área do retângulo é $5 \times 20 = 100$ cm², concluímos que a área de cada pedaço de cinco lados é $100 + 100 = 200$ cm².

C) O quadrado formado pelos quatro pedaços e o buraco tem área igual a 8 vezes a área de cada pedaço triangular, conforme mostrado no desenho ao lado. Portanto, sua área é igual a $8 \times 100 = 800$ cm². Como a soma das áreas das quatro peças é igual à área da folha original, ou seja, 600 cm², concluímos que a área do buraco é igual a $800 - 600 = 200$ cm². Há outras maneiras de calcular a área do buraco. Ele é um retângulo cuja altura é igual à altura da folha original, ou seja, 20 cm. Seu comprimento é a diferença entre o comprimento da folha original e o segmento AB, ou seja, $30 - 20 = 10$ cm. Portanto, a área do buraco é $20 \times 10 = 200$ cm².



Questão 4 - (Nº 4 - 2006):

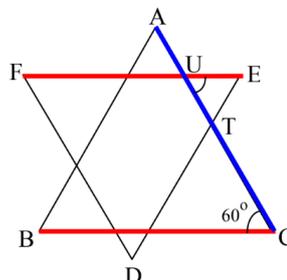
Na figura, os triângulos ABC e DEF são equiláteros de lados 14 cm e 13 cm, respectivamente, e os lados BC e EF são paralelos.



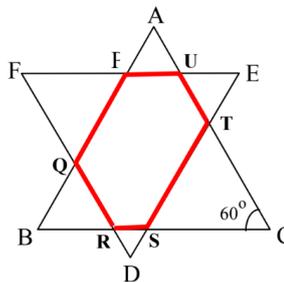
- A) Calcule a medida do ângulo $\widehat{E\hat{U}T}$.
- B) Calcule o perímetro do polígono PQRSTU.
- C) Se o segmento PQ mede 6 cm, qual é a medida do segmento ST?

SOLUÇÃO QUESTÃO 4 - (Nº 4 - 2006):

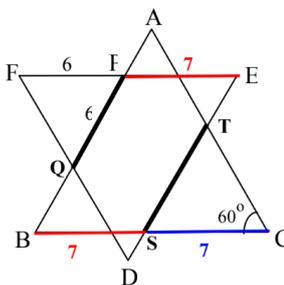
A) Como o triângulo ABC é equilátero, todos os seus ângulos internos medem 60° . Como BC e EF são paralelos e cortados pela transversal AC , os ângulos EUT e ACB são alternos internos, donde $EUT = ACB = 60^\circ$.



B) Como DEF é um triângulo equilátero, temos que $UET = 60^\circ$, e do item (a) sabemos que $EUT = 60^\circ$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , segue que $UTE = 180^\circ - 2 \times 60^\circ = 60^\circ$. Logo, o triângulo EUT é equilátero, porque todos os seus ângulos internos medem 60° . Da mesma forma, podemos concluir que todos os outros triângulos da figura são equiláteros. Desse modo, temos $QP = FP$, $UT = UE$, $TS = CS$ e $RQ = RB$. Segue que o perímetro de $PQRSTU$ é $QP + PU + UT + TS + SR + RQ = (EF + PU + UE) = (CS + SR + RB) = FE + CB = 13 + 14 = 27$ cm.



C)



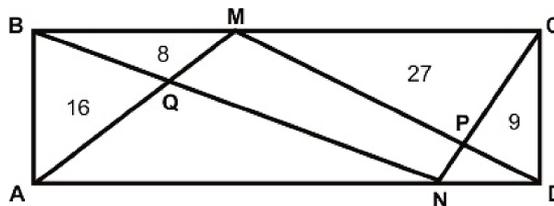
De $PQ = 6$ cm segue que $FP = 6$ cm, pois o triângulo QFP é equilátero, e concluímos que $13 - 6 = 7$ cm. Como BC é paralelo a EF e AB é paralelo a DE , o quadrilátero $PESB$ é um paralelogramo, donde $BS = PE = 7$ cm. Finalmente, temos $SC = BC - BS = 14 - 7 = 7$ cm; logo $ST = SC = 7$ cm, pois o triângulo TCS é equilátero.

Portanto, $PQ = 6$, cm $FP = 6$, cm , pois o triângulo QFP , é equilátero. Concluímos que $13 - 6 = 7$, cm . Como BC , é paralelo a EF , e AB , é paralelo a DE , o quadrilátero $PESB$, é um paralelogramo, donde $BS = PE = 7$, cm .

Finalmente, temos $SC = BC - BS = 14 - 7 = 7$, cm ; logo $ST = SC = 7$, cm , pois o triângulo TCS , é equilátero.

Questão 5 - (Nº 2 - 2007):

Na figura ABCD é um retângulo, M e N são pontos nos lados BC e AD, respectivamente, e os números representam as áreas dos triângulos ABQ, BQM, MPC e CPD em cm^2 .



- A) Qual é a área do triângulo AMD? Por quê?
- B) Calcule a soma das áreas dos triângulos AQN e NPD.
- C) Calcule a área do quadrilátero MPNQ.

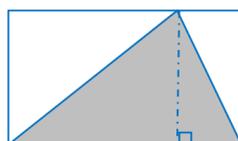
SOLUÇÃO QUESTÃO 5 - (Nº 2 - 2007):

Lembramos que a área de um triângulo é dada pela fórmula

$$\text{Área do triângulo} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

e a área do retângulo por $\text{Área do retângulo} = \text{base} \times \text{altura}$

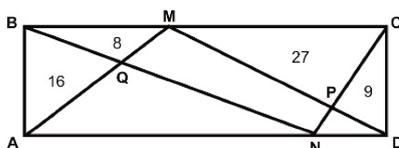
Na situação geral da figura abaixo, segue que a área do triângulo sombreado é metade da área do retângulo, pois ambos têm a mesma base e a mesma altura. Logo, a soma das áreas dos dois triângulos brancos também é metade da área do retângulo, ou seja, igual à área do triângulo sombreado.



A) Pelo visto acima, temos:

$$\text{Área}(AMD) + \text{Área}(ABM) + \text{Área}(MDC) = 16 \text{ cm}^2 + 8 \text{ cm}^2 + 27 \text{ cm}^2 + 9 \text{ cm}^2 = 60 \text{ cm}^2$$

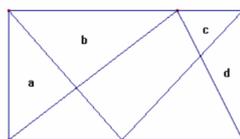
B)



Como $\text{Área}(AMD) = \text{Área}(BNC)$, temos:

$$\begin{aligned} \text{Área}(AQN) + \text{Área}(NDP) &= \text{Área}(AMD) - \text{Área}(MNPQ) = \\ &= \text{Área}(BNC) - \text{Área}(MNPQ) = \\ &= \text{Área}(BQM) + \text{Área}(MPC) = 8 + 27 = 35 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

C)



Temos:

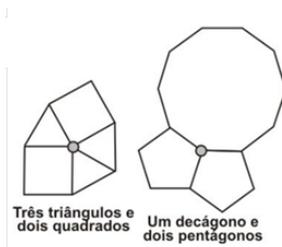
$$\begin{aligned} \text{Área}(MQNP) &= \text{Área}(BNC) - \text{Área}(BQM) - \text{Área}(MPC) \\ &= 60 \text{ cm}^2 - 8 \text{ cm}^2 - 27 \text{ cm}^2 = 25 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Observação: As áreas dos triângulos nesse problema não foram escolhidas ao acaso. Fica como exercício mostrar que é possível construir a figura ao lado, onde a , b , c e d representam as áreas dos triângulos correspondentes, se e somente se:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{d^2}{c} = b + c$$

Questão 6 - (Nº 4 - 2007):

Dizemos que três ou mais polígonos regulares se encaixam se é possível colocá-los em torno de um vértice comum, sem sobreposição, de modo que cada lado que parte desse vértice é comum a dois desses polígonos. Na figura vemos dois exemplos de polígonos que se encaixam.



A) Complete a tabela abaixo, lembrando que a soma de todos os ângulos internos é de um polígono regular de n lados é o $(n - 2) \times 180$.

n	Soma dos ângulos internos	Ângulo interno
3	180°	60°
4	360°	90°
5		
6		
8		

B) Um quadrado e dois octógonos (polígonos regulares de oito lados) se encaixam? Justifique sua resposta.

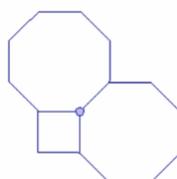
C) Um triângulo equilátero, um heptágono (polígono regular de sete lados) e um outro polígono se encaixam. Quantos lados tem esse polígono?

SOLUÇÃO QUESTÃO 6 - (Nº 4 - 2007):

A) Para completar a primeira coluna da tabela, basta substituir os valores $n = 5, 6, 8$ na fórmula $(n - 2) \times \frac{180}{n}$. Para completar a segunda coluna, basta dividir os valores da primeira coluna pelo valor correspondente de n , ou seja, calcular $\frac{(n-2) \times 180}{n}$. A justificativa para essa expressão é que um polígono de n lados tem n ângulos internos iguais, cuja soma é $(n - 2) \times 180$. A tabela completa é dada abaixo:

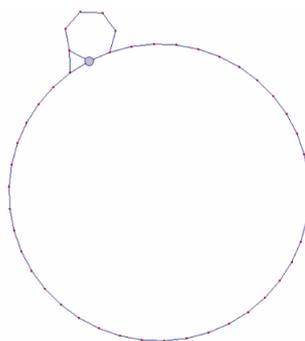
n	Soma dos ângulos internos	Ângulo interno
3	180°	60°
4	360°	90°
5	540°	108°
6	720°	120°
8	1080°	135°

B)



O ângulo interno de um quadrado é 90° e o de um octógono regular é 135°. Para que alguns polígonos regulares se encaixem, a soma de seus ângulos internos deve ser 360°. Como $90^\circ + 135^\circ + 135^\circ = 360^\circ$, segue que um quadrado e dois octógonos regulares se encaixam.

C)



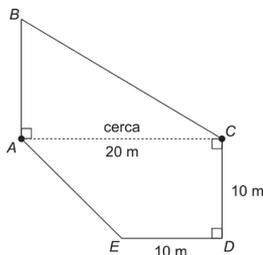
O ângulo interno de um triângulo equilátero é 60° e o de um heptágono regular é $\frac{7-2}{7} \times 180^\circ = \frac{5}{7} \times 180^\circ$. Seja n o número de lados do terceiro polígono; o ângulo interno desse polígono é então $\frac{n-2}{n} \times 180^\circ$. Como os três polígonos se encaixam, temos $60^\circ + \frac{5}{7} \times 180^\circ + \frac{n-2}{n} \times 180^\circ = 360^\circ$. Logo,

$$1 + \frac{5}{7} \times 3 + \frac{n-2}{n} \times 3 = 6$$

ou seja, $7n + 15n + 21(n - 2) = 42$ donde $n = 42$.

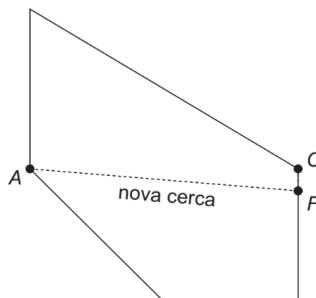
Questão 7 - (Nº 1 - 2008):

A figura ao lado representa o terreno de Dona Idalina. Esse terreno é dividido em duas partes por uma cerca, representada pelo segmento AC. A parte triangular ABC tem área igual a 120 m^2 .



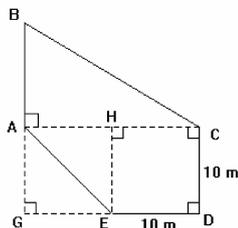
A) Qual é a área total do terreno?

B) Dona Idalina quer fazer uma nova cerca, representada pelo segmento AF na figura, de modo a dividir o terreno em duas partes de mesma área. Qual deve ser a distância CF?



SOLUÇÃO QUESTÃO 7 - (Nº 1 - 2008):

A) A figura ao lado mostra como decompor a região ACDE em um quadrado CDEH e um triângulo AGE.



Como $CD = DE = 10$ e $AC = 20$, segue que $AG = 10$. A área do triângulo AGE é metade da área de um quadrado de lado 10, ou seja, é $\frac{AG \times GE}{2} = \frac{10 \times 10}{2} = 50 \text{ m}^2$. Como a área do quadrado CDEH é $10^2 = 100 \text{ m}^2$, concluímos que a área da região ACDE é $100 + 50 = 150 \text{ m}^2$. Alternativamente, podemos calcular a área de ACDE como a diferença entre as áreas do retângulo ACDG e do triângulo AHE, ou seja, $20 \times 10 - \frac{10 \times 10}{2} = 150 \text{ m}^2$.

B) Como o terreno tem 270 m^2 , ao dividi-lo em duas partes iguais cada uma das partes terá área de $\frac{270}{2} = 135 \text{ m}^2$. Desse modo, devemos ter

$$\begin{aligned} 135 &= \text{área}(ABCF) = \text{área}(ABC) + \text{área}(ACF) \\ &= 120 + \text{área}(ACF), \end{aligned}$$

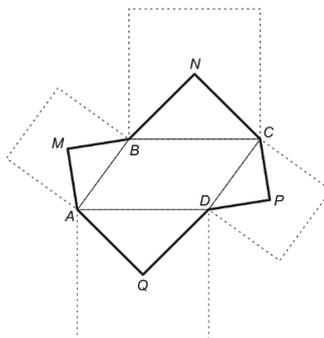
e vemos que $\text{área}(ACF) = 15 \text{ m}^2$. Por outro lado, a área do triângulo ACF é

$$\frac{AC \times CF}{2} = \frac{20 \times CF}{2} = 10 \times CF.$$

Portanto, $10 \times CF = 15$, e logo $CF = 1,5 \text{ m}$.

Questão 8 - (Nº 5 - 2008):

Na figura, ABCD é um paralelogramo de área 20 cm^2 e lados medindo 4 cm e 6 cm . Os pontos M, N, P e Q são os centros dos quadrados construídos sobre os lados do paralelogramo.



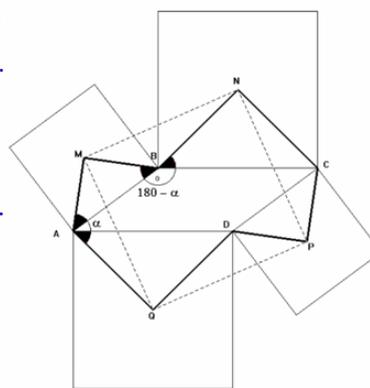
- A) Calcule a área do polígono AMBNCPDQ.
- B) Mostre que os ângulos $\widehat{M\hat{A}Q}$ e $\widehat{M\hat{B}N}$ têm a mesma medida.
- C) Mostre que MNPQ é um quadrado e calcule sua área.

SOLUÇÃO QUESTÃO 8 - (Nº 5 - 2008):

A) Para calcular a área do polígono $AMBNCPDQ$, basta observar que ele pode ser dividido no paralelogramo $ABCD$ e nos triângulos AMB , BNC , CPD e DQA . Como M , N , P e Q são centros de quadrados, a área de cada um desses triângulos é um quarto da área do quadrado correspondente. Como dois desses quadrados têm área $42 = 16$ e os outros dois têm área $62 = 36$, a área procurada é

$$\text{área}(ABCD) + \text{áreas dos triângulos} = 20 + 16 + 36 + 36 = 46 \text{ cm}^2.$$

B) Seja α a medida do ângulo $D\hat{A}B$. Como $ABCD$ é um paralelogramo, segue que $A\hat{B}C = -\alpha$. Por outro lado, como M , N e Q são centros dos quadrados correspondentes, os ângulos marcados em preto na figura ao lado são todos iguais a 45° .



Logo,

$$\begin{aligned} M\hat{A}Q &= Q\hat{A}D + D\hat{A}B + B\hat{A}M = \\ &= 45^\circ + \alpha + 45^\circ = \alpha + 90^\circ \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} M\hat{B}N &= 360^\circ - (A\hat{B}M + A\hat{B}C + N\hat{B}C) = \\ &= 360^\circ - (45^\circ + (180^\circ - \alpha) + 45^\circ) = \text{donde } M\hat{A}Q = M\hat{B}N = 90^\circ. \end{aligned}$$

C) Como os quadrados sobre AB e CD são iguais, bem como os quadrados sobre BC e AD , e como M , N , P e Q são centros desses quadrados, temos $AM = MB = CP = PD$ e $BN = NC = AQ = QD$. Por outro lado, segue do item anterior que $M\hat{A}Q = M\hat{B}N = N\hat{C}P = N\hat{C}P$, donde os triângulos QAM , MBN , NCP e PDQ são congruentes. Como $MNPQ$ é obtido de $AMBNCPDQ$, retirando-se os triângulos QAM e NCP e adicionando-se os triângulos MBN e PDQ , temos área $(MNPQ) = \text{área}(AMBNCPDQ) = 46 \text{ cm}^2$.

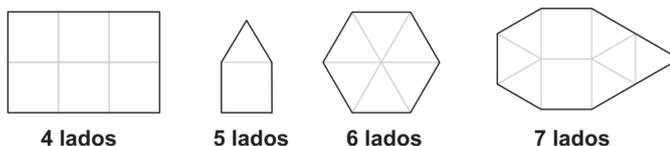
A congruência dos triângulos QAM , NBM , NCP e QDP mostra que $QM = MN = NP = PQ$, ou seja, $MNPQ$ é um losango. Para mostrar que $MNPQ$ é um quadrado, basta então mostrar que um de seus ângulos internos é igual a 90° ; vamos fazer isso para $Q\hat{M}N$. Como M é o centro do quadrado sobre AB , temos que $A\hat{M}B = 90^\circ$; por outro lado, da congruência dos triângulos AMQ e MBN tiramos $Q\hat{M}A = B\hat{M}N$. Logo,

$$Q\hat{M}N = B\hat{M}N + Q\hat{M}B = Q\hat{M}A + Q\hat{M}B = 90^\circ$$

e segue que $MNPQ$ é um quadrado.

Questão 9 - (Nº 3 - 2009):

Um polígono convexo é elegante quando ele pode ser decomposto em triângulos equiláteros, quadrados ou ambos, todos com lados de mesmo comprimento. Ao lado, mostramos alguns polígonos elegantes, indicando para cada um deles uma decomposição e o número de lados.



A) Desenhe um polígono elegante de 8 lados, indicando uma decomposição.

Em um polígono convexo todos os ângulos internos são menores que 180° .

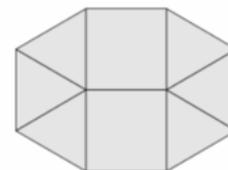
B) Quais são as possíveis medidas dos ângulos internos de um polígono elegante?

C) Mostre que um polígono elegante não pode ter mais que 12 lados. D) Desenhe um polígono elegante de 12 lados, indicando uma decomposição.

A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é $(n - 2) \times 180^\circ$.

SOLUÇÃO QUESTÃO 9 - (Nº 3 - 2009):

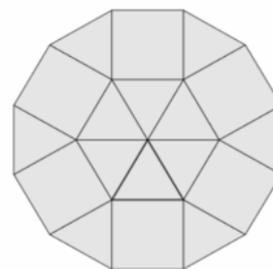
A) Um exemplo de polígono elegante com oito lados aparece à direita.



B) Como um polígono elegante é convexo e é formado colocando lado a lado quadrados e triângulos equiláteros, seus ângulos são somas de parcelas iguais a 60° ou 90° que não ultrapassem 180° . Os valores possíveis são então 60° , 90° , 120° ($60^\circ + 60^\circ$) e 150° ($60^\circ + 90^\circ$).

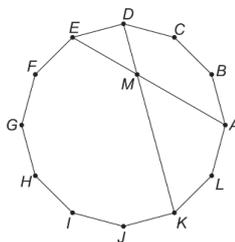
C) Sabemos que a soma dos ângulos internos de um polígono com n lados é $(n-2) \times 180^\circ$. Por outro lado, vimos no item (b) que o maior valor possível do ângulo interno de um polígono elegante é 150° ; logo, a soma dos ângulos internos de um polígono elegante de n lados é no máximo $n \times 150^\circ$. Temos então $180(n-2) \leq 150n$, e segue que $30n \leq 360$, ou seja, $n \leq 12$.

D) A figura à direita mostra um polígono elegante de 12 lados.



Questão 10 - (Nº 4 - 2009):

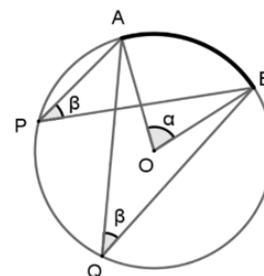
O polígono ABCDEFGHIJKL é regular e tem doze lados.



- A) Qual é a medida dos ângulos internos do polígono?
- B) O ponto M é a interseção dos segmentos AE e DK . Quais são as medidas dos ângulos $M\hat{D}E$ e $D\hat{M}E$?
- C) Qual é a medida do ângulo $C\hat{B}M$?
- D) Prove que os pontos B , M e F estão alinhados.

SOLUÇÃO QUESTÃO 10 - (Nº 4 - 2009):

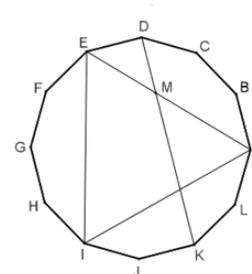
Antes de prosseguir, lembramos um resultado básico de geometria elementar. Dada uma circunferência de centro O e um arco AB nesta circunferência (marcado em traço mais forte na figura à esquerda), temos o ângulo central $\angle AOB$ associado a este arco. Seja P um ponto qualquer na circunferência que não pertence a AB . Então a medida do ângulo inscrito $\angle APB$ é a metade da medida do ângulo $\angle AOB$, independente da posição de P . A figura à esquerda ilustra esta situação; nela temos:



$$\beta = \angle APB = \angle AQB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \alpha$$

A) Como a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é $(n - 2) \times 180^\circ$, a soma dos ângulos internos do dodecágono é $(12 - 2) \times 180^\circ = 10 \times 180^\circ = 1800^\circ$. Logo, cada um de seus ângulos internos mede $\frac{1800^\circ}{12} = 150^\circ$.

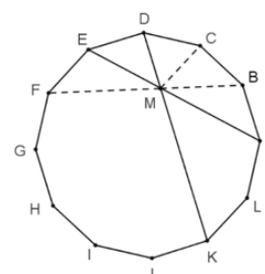
B) O triângulo $\triangle IAE$ é equilátero, pois seus vértices estão igualmente espaçados no polígono regular; em particular $\angle AEI = 60^\circ$. Além disso, os ângulos $\angle AED$ e $\angle FEI$ são iguais (pois correspondem aos arcos iguais ACD e FHI), donde $150^\circ = \angle FED = \angle FEI + \angle IEA + \angle AED = 60^\circ + 2\angle AED$ e obtemos $\angle AED = 45^\circ$. Agora basta argumentar como na primeira solução para obter $\angle EDM = 90^\circ$ e $\angle DME = 45^\circ$.



C) Como o triângulo $\triangle EDM$ tem dois ângulos de 45° , ele é isósceles; logo $MD = DE$, ou seja, MD tem a mesma medida que os lados do polígono. Como $\angle EDC = 150^\circ$ e $\angle EDM = 90^\circ$, temos $\angle MDC = 60^\circ$; e como $MD = DC$ segue que o triângulo $\triangle MDC$ é equilátero. Em particular, temos $\angle MCD = 60^\circ$ e segue que $\angle MCB = 90^\circ$. Finalmente, como $MC = CB$, o triângulo $\triangle MCB$ é isósceles e então

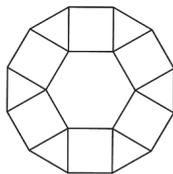
$$\angle MBC = \angle BMC = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

D) Temos $\angle FBC = \angle MBC = 45^\circ$. Logo, os segmentos FB e MB fazem o mesmo ângulo com o segmento BC , e segue que os pontos B , M e F estão alinhados.



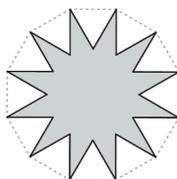
Questão 11 - (Nº 3 - 2010):

A figura mostra um dodecágono regular decomposto em seis triângulos equiláteros, seis quadrados e um hexágono regular, todos com lados de mesma medida.

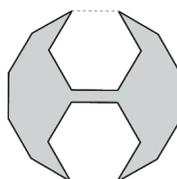


A) Se cada triângulo da figura tem área igual a 1 cm^2 , qual é a área do hexágono?

B) A figura abaixo foi obtida retirando doze triângulos equiláteros de um dodecágono regular cujo lado mede 1 cm . Qual é a área dessa figura?



C) A figura abaixo foi obtida retirando dois hexágonos regulares de um dodecágono regular cujo lado mede 1 cm . Qual é a área dessa figura?

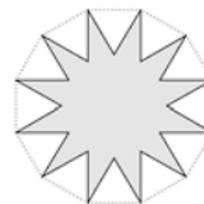


SOLUÇÃO QUESTÃO 11 - (Nº 3 - 2010):

A) A figura ao lado mostra que o hexágono pode ser decomposto em seis triângulos iguais aos triângulos que fazem parte do dodecágono. Como cada um desses triângulos tem área 1 cm^2 , segue que o hexágono tem área 6 cm^2 .



B) A figura do item anterior mostra que o dodecágono pode ser decomposto em doze triângulos equiláteros iguais e seis quadrados. Desse modo, ao retirar doze triângulos do dodecágono, a estrela que sobra tem área igual à área de seis quadrados. Como o lado do dodecágono mede 1 cm , cada quadrado tem área 1 cm^2 e assim a área da estrela é 6 cm^2 .



C) A figura ao lado mostra que os dois hexágonos retirados têm a mesma área que doze triângulos equiláteros; como no item b), a região cinza tem a mesma área que seis quadrados de lado 1 cm ; sua área é então 6 cm^2 .



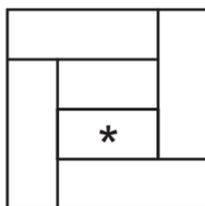
Questão 12 - (Nº 1 - 2011):

Sara recortou três tiras retangulares diferentes de papel.

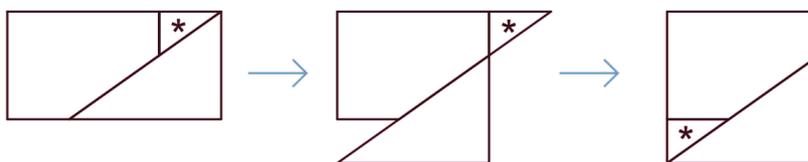
A) Ela recortou a primeira tira em três retângulos iguais, como na figura abaixo. Com esses retângulos, formou um quadrado de 36 cm^2 de área. Encontre as medidas dos lados dos retângulos que ela recortou.



B) Ela recortou a segunda tira em seis retângulos de mesma largura e com eles formou um quadrado de 36 cm^2 de área, como na figura. Encontre o perímetro e a área do retângulo indicado com *.

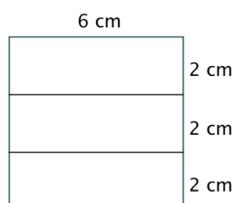


C) As medidas da terceira tira, eram $4,5 \text{ cm}$ e 2 cm . Sara recortou essa tira em três pedaços e com eles formou um quadrado, como na figura. Qual é a área do triângulo indicado com *?



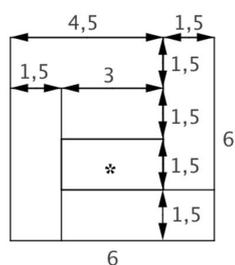
SOLUÇÃO QUESTÃO 12 - (Nº 1 - 2011):

A)



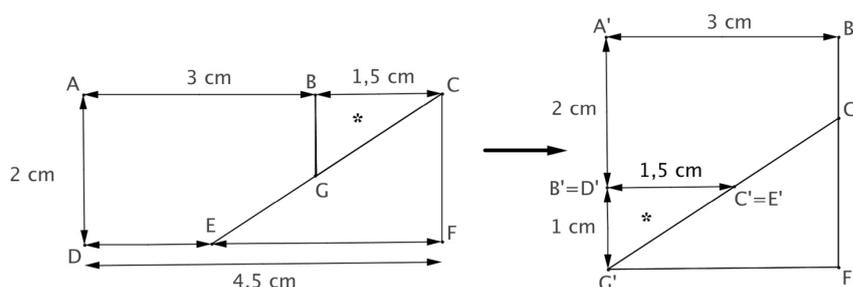
Como o quadrado formado com os três retângulos recortados da primeira tira tem área de 36 cm^2 , seu lado mede 6 cm. Logo, o comprimento dos retângulos é 6 cm e sua largura é um terço do comprimento, ou seja, 2 cm.

B)



Como no item anterior, o lado do quadrado formado com os seis retângulos recortados da segunda tira mede 6 cm. Como todos os retângulos têm a mesma largura, a figura mostra que essa largura é um quarto da medida do lado, isto é, 1,5 cm. As medidas dos outros retângulos são então determinadas imediatamente, como indicado. Em particular, as dimensões do retângulo destacado são 3 cm e 1,5 cm; logo, seu perímetro é $1,5 + 1,5 + 3 + 3 = 9 \text{ cm}$ e sua área é $1,5 \times 3 = 4,5 \text{ cm}^2$.

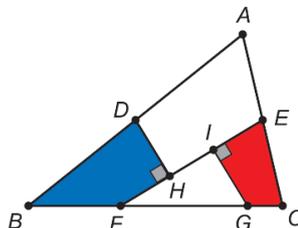
C)



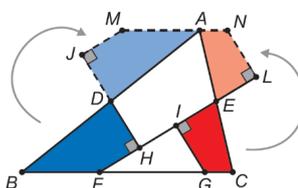
c) Na figura acima mostramos o retângulo e o quadrado, com pontos correspondentes indicados com a mesma letra; por exemplo, o segmento AB à esquerda corresponde ao segmento $A'B'$ à direita. A área do retângulo é $2 \times 4,5 = 9 \text{ cm}^2$, que é também a área do quadrado; logo o lado do quadrado mede 3 cm. Desse modo, os segmentos $A'B'$ e $B'F'$ medem 3 cm e assim AB mede 3 cm. Como o lado do retângulo mede 4,5 cm, segue que BC mede $4,5 - 3 = 1,5 \text{ cm}$, que é então a medida de $B'C'$. Finalmente, a medida de $A'B$ é a mesma que a de AD , que é 2 cm; logo a medida de $B'C'$ é $3 - 2 = 1 \text{ cm}$. Assim, obtemos as medidas $BG = 1 \text{ cm}$ e $BC = 1,5 \text{ cm}$ dos catetos do triângulo retângulo BCG , cuja área é então $\frac{1 \times 1,5}{2} = 0,75 \text{ cm}^2$.

Questão 13 - (Nº 6 - 2011):

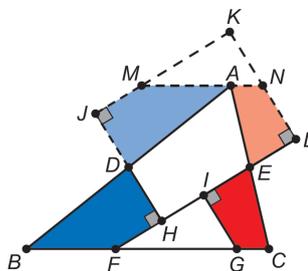
Em todas as figuras desta questão, vemos um triângulo ABC dividido em quatro partes; nesses triângulos, D é ponto médio de AB , E é ponto médio de AC e FG mede $\frac{1}{2}$ de BC .



A) Os quadriláteros $DJMA$ e $ELNA$ são obtidos girando de 180° os quadriláteros $DHFB$ e $EIGC$ em torno de D e E , respectivamente. Explique por que os pontos M , A e N estão alinhados, ou seja, por que a medida do ângulo MAN é igual a 180° .



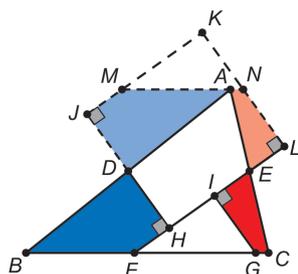
B) Na figura, o ponto K é a interseção das retas JM e LN . Explique por que os triângulos FGI e MNK são congruentes.



Os itens acima mostram que $HJKL$ é um retângulo formado com as quatro partes em que o triângulo ABC foi dividido.

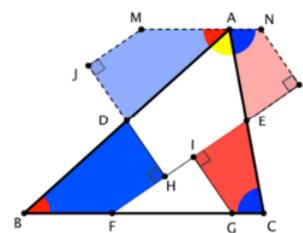
C) Mostre que $LH = EF$

D) Na figura o triângulo ABC tem área 9 e $HJKL$ é um quadrado. Calcule o comprimento de EF .

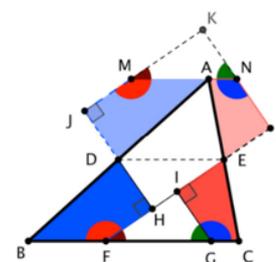


SOLUÇÃO QUESTÃO 13 - (Nº 6 - 2011):

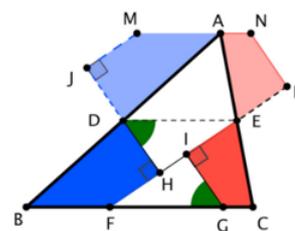
A) Na figura ao lado marcamos, em vermelho, o ângulo em B do triângulo ABC e o ângulo correspondente no polígono $AMJD$; em azul, marcamos o ângulo em C do triângulo ABC e o ângulo correspondente do polígono $AELN$. Podemos observar na parte superior da figura que o ângulo MAN é a soma desses dois ângulos com o ângulo em A do triângulo ABC ; como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , segue que $MAN = 180^\circ$. Logo M , A e N estão alinhados.



B) Na figura, os ângulos marcados em vermelho são congruentes, assim como os ângulos marcados em azul. Segue que os ângulos marcados em marrom também são congruentes, pois são ambos suplementos do ângulo vermelho; do mesmo modo, os ângulos verdes são também congruentes. Notamos agora que $MN = MA + AN = BF + CG = BC - FG = 2FG = FG = FG$. Segue pelo critério ALA que os triângulos FGI e MNK são congruentes.



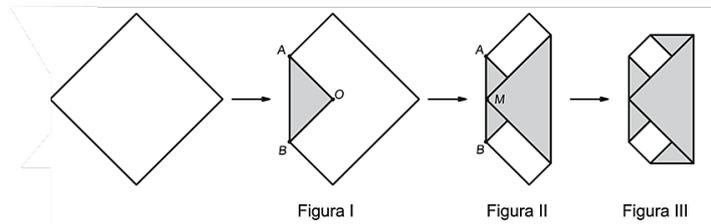
C) Na figura ao lado, traçamos a base média DE do triângulo ABC . O teorema da base média nos diz que DE é paralelo a BC e que $DE = \frac{1}{2}BC = FG$. Segue que os triângulos FGI e EHD são congruentes, pois são retângulos, têm os ângulos verdes congruentes (pois são agudos de lados paralelos) e hipotenusas congruentes. Em particular, temos $FI = EH$, donde $FH = FI - HI = EH - HI = EI$. Logo, $LH = LE + EI + IH = FH + HI + IE = EF$.



D) A área do quadrado $HJKL$ é igual à área do triângulo ABC , que é 9; logo o lado do quadrado mede 3. Em particular, $LH = 3$ e segue do item anterior que $EF = 3$.

Questão 14 - (Nº 2 - 2012):

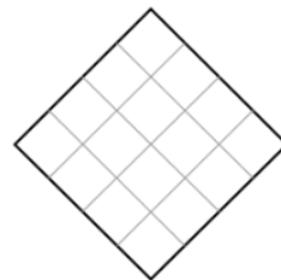
Uma folha de papel quadrada de área 16 cm^2 branca de um lado e cinza de outro, foi dobrada como indicado ao lado. O ponto O é o centro do quadrado e M é o ponto médio do segmento AB .



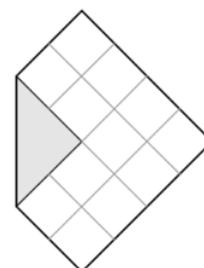
- A) Qual é a área da região branca na Figura I?
- B) Qual é a área da região branca na Figura II?
- C) Qual é a área da região branca na Figura III?

SOLUÇÃO QUESTÃO 14 - (Nº 2 - 2012):

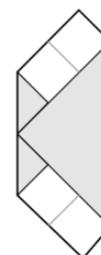
O quadrado original tem área de 16 cm^2 ; vamos dividi-lo em 16 quadradinhos de área 1 para proceder à solução.



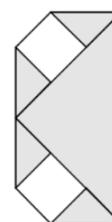
A) A primeira dobra deixa como parte não pintada uma região equivalente a 12 quadradinhos unitários. Portanto, a área da região não pintada da figura I é 12 cm^2 .



B) A segunda dobra deixa como partes não pintadas dois retângulos iguais, cada um deles composto por dois quadradinhos unitários. Portanto, a área da região não pintada na figura II é $2 \times 2 + 4 = \text{cm}^2$.

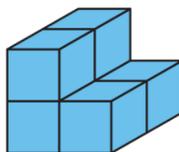


C) As duas últimas dobras horizontais deixam em branco apenas dois quadradinhos unitários. Portanto, a área da região não pintada na figura III é igual a $1 + 1 = 2 \text{ cm}^2$.

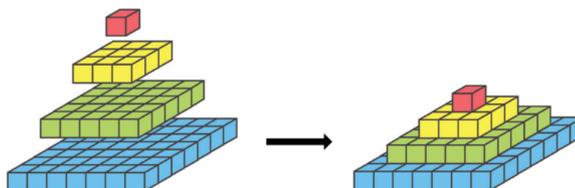


Questão 15 - (Nº 3 - 2012):

Cláudia gosta de montar sólidos colando cubinhos de aresta 1 cm. Ela sempre usa um pingo de cola entre duas faces de cubinhos que ficam em contato; por exemplo, para montar o sólido ao lado ela usou 7 pingos de cola.

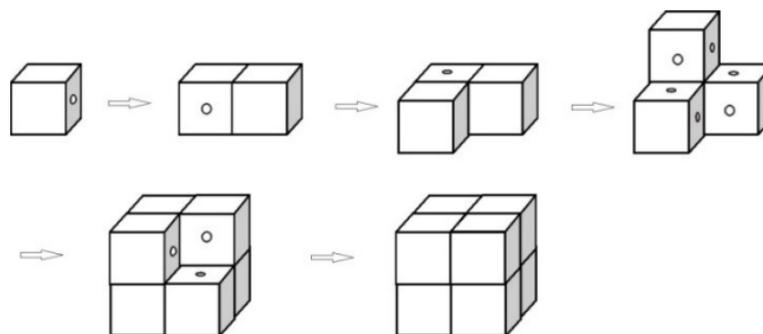


- A) Quantos pingos ela vai usar para montar um cubo de aresta 2 cm?
- B) Quantos pingos ela vai usar para montar um cubo de aresta 3 cm?
- C) Cláudia montou o sólido ao lado, com quatro camadas de cubinhos. Quantos pingos de cola ela usou?



SOLUÇÃO QUESTÃO 15 - (Nº 3 - 2012):

A)



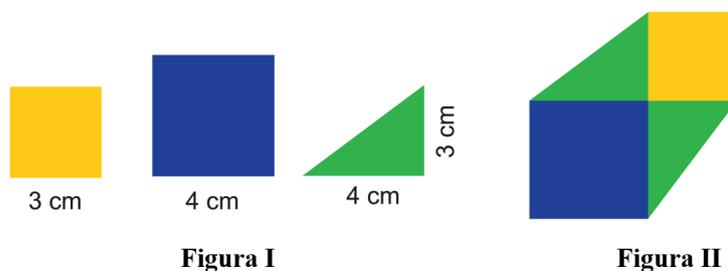
Começando com um cubinho, Cláudia usa um pingo para juntar um cubinho na face ao lado, mais um para um cubinho em outra face vizinha ao lado e outro para a face vizinha de cima. Depois, 2 pingos para cada buraco (dois laterais e um em baixo) e, no final, mais 3 pingos para colar o último cubinho. No total, ela terá usado $1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 = 12$ pingos de cola.

B) Para montar um cubo de aresta 3 cm, ela irá colar 3 camadas 3×3 de cubinhos. Como vimos acima, para formar cada uma dessas camadas ela usa 12 pingos, logo para montar as 3, ela irá usar $3 \times 12 = 36$ pingos. Como cada camada tem 9 cubinhos, para colar duas camadas, ela precisará de 9 pingos e, para colar a terceira camada, mais 9 pingos. No total, irá usar $3 \times 2 \times 9 = 54$ pingos.

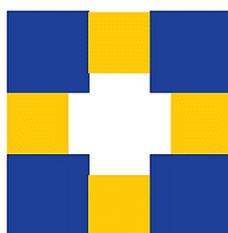
C) Para montar uma camada 3×3 , Cláudia usa 12 pingos de cola; para montar uma camada 5×5 , usa 40 pingos e para montar uma camada 7×7 , usa $2 \times 7 = 14$ pingos. Para colar um cubinho na camada 3×3 , ela usa 1 pingo; para colar a camada 3×3 na camada de baixo ela usa 9 pingos (pois a camada 3×3 tem 9 cubinhos) e para colar a camada 5×5 na camada de baixo, ela usa 25 pingos (esta camada tem 25 cubinhos). Portanto, o número total de pingos de cola para montar o sólido é $12 + 40 + 14 + 1 + 9 + 25 = 101$.

Questão 16 - (Nº 3 - 2013):

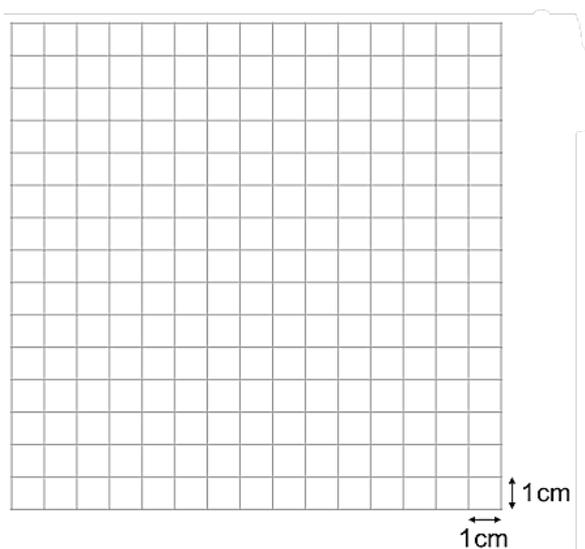
Dafne tem muitas peças de plástico: quadrados amarelos de lado 3 cm, quadrados azuis de lado 4 cm e triângulos retângulos verdes cujos lados menores medem 3 cm e 4 cm, como mostrado a figura I. Com estas peças e sem sobreposição, ela forma figuras como, por exemplo, o hexágono na figura II.



A) Qual é a área do hexágono que Dafne formou? B) Usando somente peças quadradas, Dafne formou a figura ao lado, com um buraco em seu interior. Qual é a área do buraco?



C) Mostre como Dafne pode preencher, sem deixar buracos, um quadrado de lado 15 cm com suas peças, sendo apenas uma delas um quadrado de lado 3 cm.



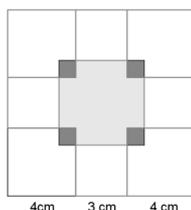
D) Explique por que Dafne não pode preencher um quadrado de lado 15 cm sem usar pelo menos um quadrado de lado 3 cm.

SOLUÇÃO QUESTÃO 16 - (Nº 3 - 2013):

Cada uma das peças amarelas tem área $3 \times 3 = 9 \text{ cm}^2$, as azuis têm $4 \times 4 = 16 \text{ cm}^2$ e as verdes têm $\frac{(3 \times 4)}{2} = 6 \text{ cm}^2$.

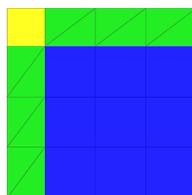
A) O hexágono montado por Dafne compõe-se de duas peças verdes, uma amarela e uma azul. Portanto, sua área é igual a $2 \times 19 + 6 + 9 = 37 \text{ cm}^2$.

B)



A figura construída forma um quadrado de lado $4\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$, cuja área é $11 \times 11 = 121 \text{ cm}^2$. Ele é composto por 4 peças amarelas e 4 peças azuis; a área total dessas peças é $4 \times 9 + 4 \times 16 = 80 \text{ cm}^2$. A área do buraco é a área do quadrado menos a soma das áreas dessas peças, ou seja, é igual a $121 - 80 = 41 \text{ cm}^2$.

C)



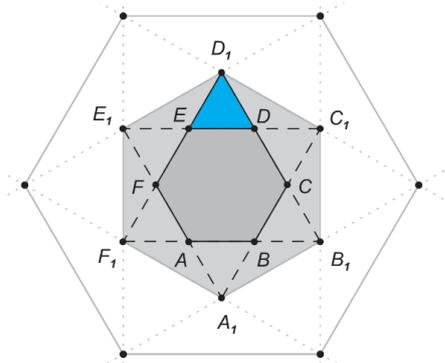
Uma possível maneira de preencher o quadrado 15×15 , como pedido, é mostrado na figura a cima.) .

D) Um quadrado de lado 15 cm tem área $15 \times 15 = 225 \text{ cm}^2$; observamos que 225 é um número ímpar. A peça azul tem área 16 cm^2 e a verde tem área 6 cm^2 , ambos números pares. Logo, não é possível preencher o quadrado de lado 15 cm apenas com peças desse tipo, pois a soma de números pares é par. Segue que para preencher o quadrado de lado 15 cm com as peças do enunciado é necessário usar pelo menos uma peça amarela.

E) Quando todos os quadrados estão contaminados, o perímetro de contaminação é igual a $4 \times 5 = 20$. Por outro lado, o perímetro de uma contaminação com n quadrados é no máximo igual a $4n$, que ocorre quando os n quadrados não têm lados em comum. Como o perímetro de contaminação nunca aumenta, para que esta contaminação seja capaz de contaminar todo o tabuleiro, é necessário que $4n$ seja no mínimo igual a 20; ou seja, n deve ser no mínimo igual a 5.

Questão 17 - (Nº 3 - 2014):

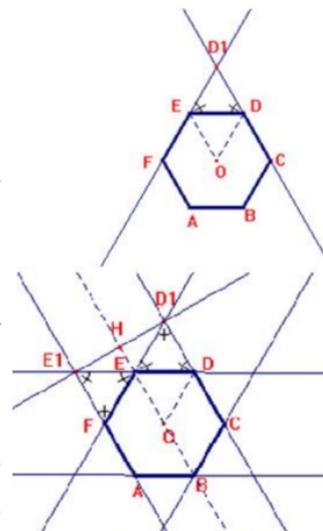
Os prolongamentos dos lados de um hexágono regular $ABCDEF$, de 1 cm^2 de área, determinam seis pontos de interseção, que são vértices de um novo hexágono regular $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, conforme mostra a figura. Repetindo esse processo de prolongamento de lados em cada novo hexágono obtido, determinamos novos hexágonos, $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$, $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$, e assim por diante.



- A) Qual é a área do triângulo EDD_1 destacado em azul?
- B) Qual é a área do hexágono $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$?
- C) Qual é a área do hexágono $A_5B_5C_5D_5E_5F_5$?

SOLUÇÃO QUESTÃO 17 - (Nº 3 - 2013):

A) O triângulo EDD_1 tem, pela sua construção, dois ângulos medindo 60° , logo é equilátero e congruente aos seis triângulos equiláteros também congruentes entre si obtidos quando unimos os vértices do hexágono ao seu centro O . A área do triângulo EDD_1 , é, portanto, igual a $\frac{1}{6}$ da área do hexágono.



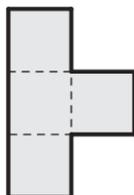
B) O triângulo E_1ED_1 é isósceles e tem a mesma área que o triângulo EDD_1 , pois $E_1E = ED$ e a altura relativa a essas bases é a mesma para cada triângulo. Assim, a área do triângulo E_1ED_1 é $\frac{1}{6}$ da área do hexágono.

O hexágono $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ é a reunião do hexágono inicial, cuja área é um, com seis triângulos equiláteros cuja soma das áreas é um, com seis triângulos isósceles cuja soma das áreas também é um, logo, sua área é 3 cm^2 . Este resultado segue também observando-se que E_1D_1DF é um retângulo e, portanto, E_1ED_1 tem a mesma área que ED_1D .

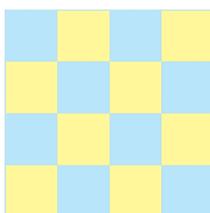
C) A cada etapa, a área do hexágono anterior será triplicada: a área do hexágono $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ será o triplo da área do hexágono $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, ou seja, 3^2 cm^2 , a do hexágono seguinte, 3^3 cm^2 , e a do hexágono $A_5B_5C_5D_5E_5F_5$, $3^5 = 243 \text{ cm}^2$.

Questão 18 - (Nº 4 - 2014):

Maria possui muitas peças, todas iguais, formadas por quatro quadradinhos, como mostra a figura ao lado. Sem sobrepor peças, ela tenta cobrir todas as casas de vários tabuleiros quadrados, fazendo coincidir os quadradinhos das peças com os do tabuleiro.



A) Desenhe na figura abaixo uma maneira de cobrir um tabuleiro 4x4 com essas peças.

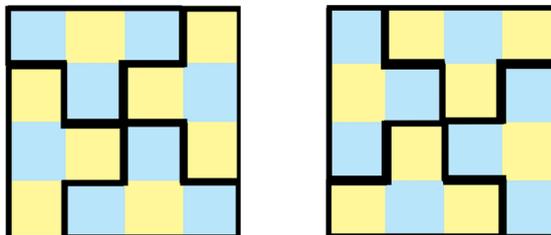


B) Explique por que nenhum tabuleiro quadrado pode ser coberto com exatamente vinte peças.

C) Explique por que Maria nunca conseguirá cobrir um tabuleiro 10x10 com suas peças.

SOLUÇÃO QUESTÃO 18 - (Nº 4 - 2014):

A) As figuras abaixo apresentam as duas únicas maneiras possíveis, a menos de rotação, de cobrir o tabuleiro 4×4 .



B) Cada peça cobre exatamente 4 quadradinhos, e portanto 20 peças cobrem uma área formada por 80 quadradinhos. Como 80 não é um número quadrado perfeito, não existe um tabuleiro quadrado com exatamente 80 quadradinhos.

C) Para cobrir um tabuleiro 10×10 , são necessárias 25 peças, uma vez que $100 = 4 \times 25$. Cada peça cobre 3 quadradinhos de uma cor e 1 da outra cor. Assim podemos dividir as peças que cobrem o tabuleiro em dois grupos:

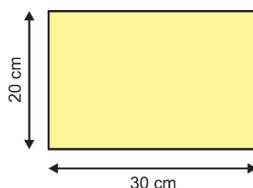
- **Grupo 1:** As que cobrem exatamente uma casa amarela (e, portanto, três azuis).
- **Grupo 2:** As que cobrem exatamente três casas amarelas (e, portanto, uma azul).

Suponha que fosse possível distribuir as 25 peças sobre o tabuleiro cobrindo todas as suas casas. Se o número de peças do Grupo 1 for par, o número de peças do Grupo 2 deve ser ímpar, pois a soma desses números deve ser igual à quantidade de peças usadas (25). Neste caso, o número de casas azuis cobertas deve ser ímpar, mas isto é impossível, já que há 50 casas azuis num tabuleiro 10×10 .

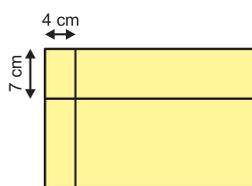
Se o número de peças do Grupo 1 for ímpar, o número de peças do Grupo 2 deve ser par, pois, pelo mesmo motivo, a soma do número de peças destes dois grupos deve ser 25. Neste caso, o número de casas amarelas cobertas deve ser ímpar, mas isto é impossível, já que também há 50 casas amarelas num tabuleiro 10×10 .

Questão 19 - (Nº 1 - 2015):

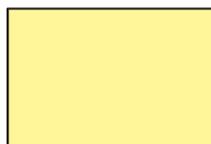
Lucinha tem três folhas retangulares iguais, cujos lados medem 20 cm e 30 cm.



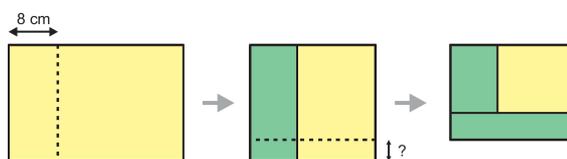
A) Lucinha fez dois traços retos na primeira folha, um a 4 cm da margem esquerda e outro a 7 cm da margem superior, dividindo-a em quatro retângulos. Um desses retângulos tem a maior área. Qual é o valor dessa área?



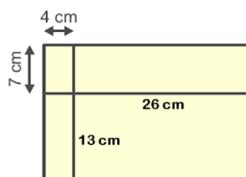
B) Ajude Lucinha a dividir a segunda folha em quadrados iguais, desenhando traços paralelos às margens, de modo que esses quadrados tenham a maior área possível.



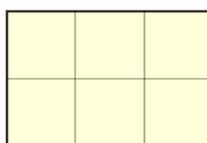
C) Lucinha pegou a terceira folha, amarela na frente e verde no verso, e fez duas dobras: a primeira a 8 cm da margem esquerda e, a segunda, a uma certa distância da margem inferior, de forma que o perímetro da região não coberta da folha (contorno da região amarela da última figura) fosse de 54 cm. Qual é a distância da segunda dobra à margem inferior?



SOLUÇÃO QUESTÃO 19 - (Nº 1 - 2015):

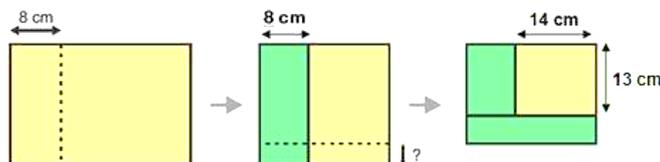


A) O maior dos quatro retângulos tem lados de medida $30 - 4 = 26$ cm e $20 - 7 = 13$ cm. Logo, sua área é $26 \times 13 = 338$ cm².



B)

Com um traço horizontal e dois verticais geramos os quadrados de maior área possível. Para formar apenas quadrados, o valor dos lados desses quadrados deve dividir 20 e 30. A maior área ocorre, então, quando o lado desses quadrados for o máximo divisor comum de 20 e 30, ou seja, 10 cm.

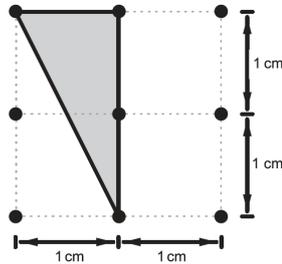


C) Vamos chamar a distância da segunda dobra até a margem inferior da folha de altura da dobra. Como a folha tem 30 cm de largura e a primeira dobra foi feita a 8 cm da margem direita da folha, a largura da região em amarelo da última figura é igual a 30 cm menos duas vezes 8 cm, ou seja, $30 - 16 = 14$ cm.

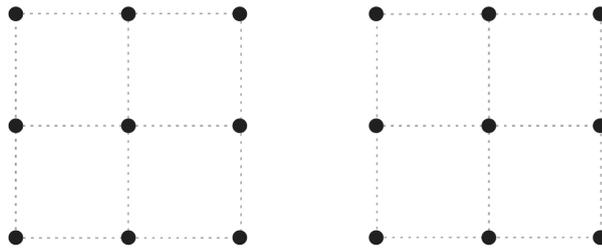
Após a segunda dobra, o dobro da altura do retângulo amarelo será a diferença entre seu perímetro e o dobro de sua largura, ou seja, $54 - 28 = 26$ cm. Portanto, a altura do retângulo amarelo na terceira figura é 13 cm. Assim, da altura da folha original sobraram $20 - 13 = 7$ cm para a realização da segunda dobra e, portanto, a altura da dobra é a metade, ou seja, $7 \div 2 = 3,5$ cm.

Questão 20 - (Nº 5 - 2015):

Em um quadrado de lado 2 cm foram marcados nove pontos, conforme a figura. Triângulos podem ser desenhados com seus vértices nesses pontos. A figura mostra um deles, com área igual a 1 cm^2 .



- A) Quantos triângulos congruentes ao da figura possuem seus vértices nos pontos marcados?
- B) Desenhe outros dois triângulos com seus vértices nos pontos marcados, ambos com área igual a 1 cm^2 , que não sejam congruentes entre si, nem congruentes ao triângulo da figura.

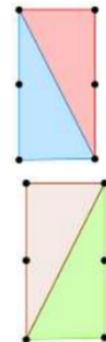


- C) Quantos triângulos com área igual a 1 cm^2 possuem seus vértices nos pontos marcados?

SOLUÇÃO QUESTÃO 20 - (Nº 5 - 2015):

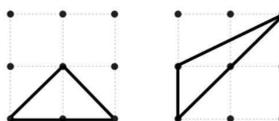
A) Dentro de cada retângulo como o indicado ao lado, há 4 triângulos congruentes ao da figura do enunciado:

- dois quando traçamos uma diagonal
- outros dois quando traçamos a outra.

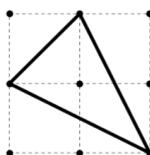


Como há quatro retângulos congruentes ao descrito acima, poderemos fazer um total de $4 \times 4 = 16$ triângulos congruentes ao que está no enunciado da questão.

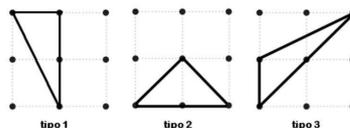
B) Há vários triângulos possíveis. Abaixo estão duas possibilidades.



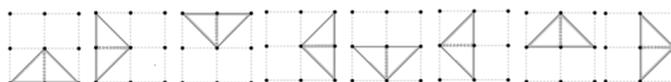
C) Os triângulos com vértices na malha não possuem lados inteiros ou possuem pelo menos um lado inteiro. Os que não possuem lados inteiros são aqueles que possuem vértices não alinhados, nem na horizontal nem na vertical. Esses triângulos são congruentes ao triângulo abaixo e possuem área $1,5 \text{ cm}^2$



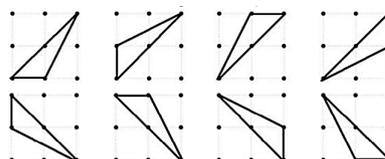
Logo os triângulos que têm área 1 necessariamente possuem pelo menos um lado inteiro. Assim, considerando esse lado como sendo a base para o cálculo da área, teremos triângulos de base 1 cm e altura 2 cm ou triângulos de base 2 cm e altura 1 cm, e esses triângulos são todos congruentes a um dos três tipos abaixo.



Vimos, no item a), que existem 16 triângulos do tipo 1. É fácil ver que existem 8 triângulos do tipo 2, quatro deles com um vértice no ponto central da malha e outros quatro com um lado contendo o ponto central da malha.



Resta contar o número de triângulos do tipo 3. Há também apenas 8 triângulos deste tipo, quatro para cada uma das duas diagonais do quadrado maior.



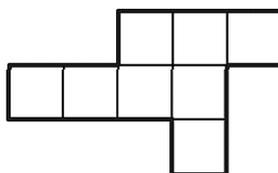
Logo, no total teremos $16 + 8 + 8 = 32$ triângulos com área de 1 cm^2 e com vértices nos pontos marcados.

Questão 21 - (Nº 1 - 2016):

A peça ilustrada abaixo é formada por quatro quadrinhos de 1 cm de lado. Observe que o perímetro desta peça, ou seja, a medida de seu contorno, é 10 cm. Roberto forma figuras juntando duas dessas peças, sem sobreposição, e fazendo coincidir lados de quadrinhos.



A) Roberto formou a figura abaixo. Qual é o perímetro desta figura?



B) Ajude Roberto desenhando uma figura com perímetro igual a 12 cm no quadriculado da esquerda e outra com perímetro igual a 18 cm no quadriculado da direita.

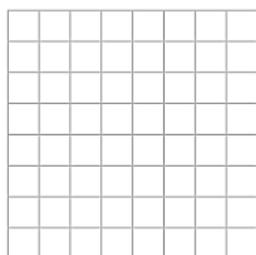


Figura com perímetro igual a 12 cm

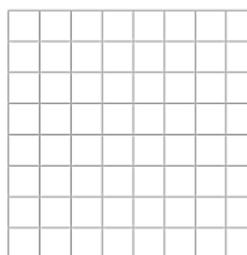


Figura com perímetro igual a 18 cm

C) Explique por que Roberto nunca conseguirá formar uma figura com perímetro igual a 15 cm. (Lembre-se de que Roberto sempre faz coincidir lados de quadrinhos).

SOLUÇÃO QUESTÃO 21 - (Nº 1 - 2016):

A) A figura em questão é formada pela junção de duas peças. Ela é formada por oito quadrinhos de 1 cm de lado, e seu contorno contém exatamente 16 lados desses quadrinhos. Logo, o perímetro dessa peça é 16×1 cm, ou seja, é igual a 16 cm.

B) Há muitas soluções, as quais podem diferir no formato ou na posição. Aqui estão dois exemplos:

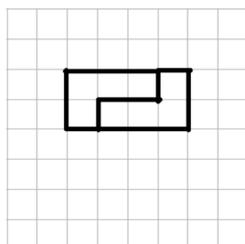


Figura com perímetro igual a 12 cm

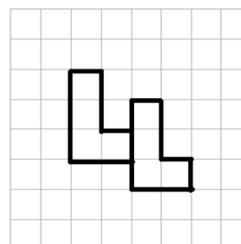
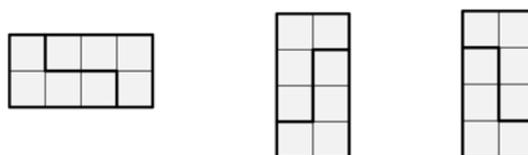
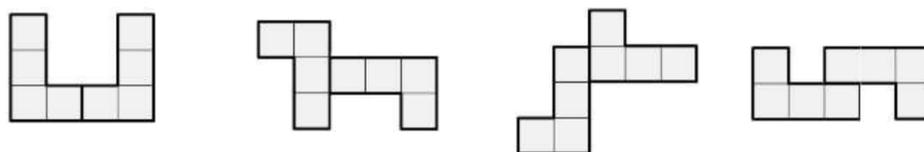


Figura com perímetro igual a 18 cm

Para formar uma figura com perímetro igual a 12 cm, Roberto deve juntar as duas peças de tal modo que o contorno da figura formada tenha somente 12 lados de quadrinhos. Como cada peça contém 10 lados de quadrinhos em seu contorno e como ele junta as peças coincidindo lados de quadrinhos, Roberto terá de fazer coincidir quatro pares de lados de quadrinhos para formar uma figura com perímetro igual a 12 cm. Isso apenas é possível se ele juntar as peças formando um retângulo. Veja algumas outras possibilidades:



Agora, para formar uma figura com perímetro igual a 18 cm, Roberto tem de juntar as duas peças de tal modo que o contorno da figura formada tenha 18 lados de quadrinhos, ou seja, ele terá de fazer coincidir apenas um par de lados de quadrinhos. Como foi dito, existem várias maneiras de formar essas figuras; veja mais alguns exemplos:

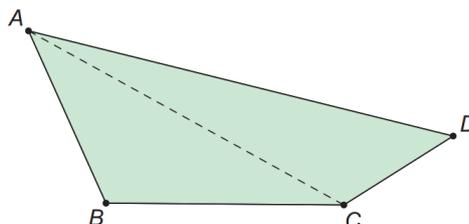


C) Quando as duas peças não estão em contato, o perímetro total é 20 cm. Depois de juntar duas peças, o perímetro da figura formada pelas duas peças é diminuído de um número par, já que os lados em contato de quadrinhos não contribuem para o perímetro da figura formada, pois ficam internos a ela. Como duas peças soltas têm perímetro 20 cm, é impossível obter, juntando duas peças de acordo com as condições descritas no enunciado, uma figura com um perímetro ímpar. Mas 15 é ímpar e, assim, não há figuras (como as descritas no enunciado) que têm esse perímetro.

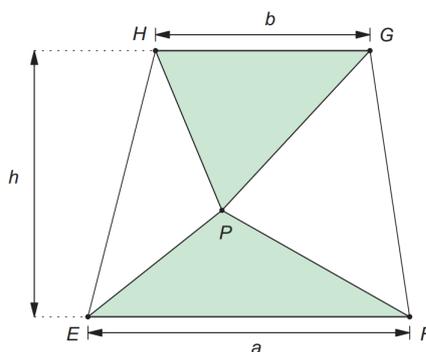
Questão 22 - (Nº 6 - 2016):

Ana quer dividir quadriláteros em quatro triângulos de mesma área.

A) A diagonal AC divide o quadrilátero ABCD da figura em dois triângulos de mesma área. Ana sabe que existe um ponto P nessa diagonal tal que os triângulos PAB, PBC, PCD e PDA têm a mesma área. Localize o ponto P na diagonal AC. Justifique sua resposta.



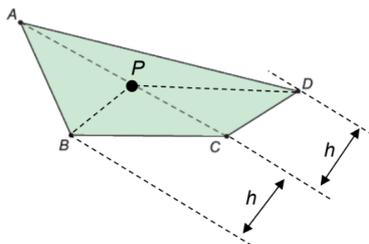
B) Ana desenhou um trapézio EFGH, de bases $EF = a$ e $GH = b$, com $a > b$ e altura h , como na figura. Em seguida, ela escolheu um ponto P tal que os triângulos PEF e PGH tivessem a mesma área. Expresse a área desses triângulos em termos de a , b e h .



C) Explique por que Ana nunca conseguirá escolher um ponto P no interior do trapézio EFGH do item anterior tal que os quatro triângulos PEF, PFG, PGH e PHE tenham todos a mesma área.

SOLUÇÃO QUESTÃO 22 - (Nº 6 - 2016):

A) Os triângulos ABC e ACD têm a mesma área e a base comum AC. Logo, ambos têm a mesma altura h . Se P é um ponto da diagonal AC, então todos os quatro triângulos PAB, PBC, PCD e PDA têm a mesma altura h relativa à reta AC. Para que suas áreas sejam iguais, as medidas de suas bases AP ou PC devem ser iguais, isto é, $AP = PC$. Portanto, P é o ponto médio da diagonal AC.

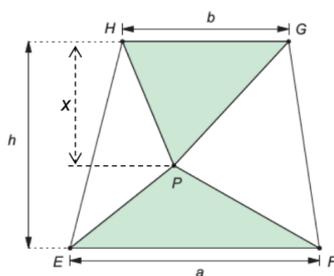


B) Se a altura do triângulo PGH é x , então sua área é $\frac{HG \cdot x}{2} = \frac{b \cdot x}{2}$ e a área do triângulo PEF é $\frac{EF \cdot (h-x)}{2} = \frac{a \cdot (h-x)}{2}$. Como essas áreas são iguais, temos

$$\frac{b \cdot x}{2} = \frac{a \cdot (h-x)}{2} \iff bx = ah - ax \iff (a+b) \cdot x = a \cdot h \iff x = \frac{a \cdot h}{a+b}.$$

Logo, as áreas dos triângulos PEF e PGH são ambas iguais a

$$\frac{b \cdot x}{2} = \frac{b}{2} \cdot \frac{ah}{a+b} = \frac{abh}{2(a+b)}.$$



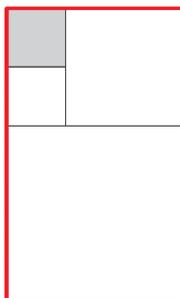
C) Se P está no interior do trapézio do item anterior, então a soma das áreas dos quatro triângulos PEF , PFH , PGH e PHE é igual à área do trapézio. A área do trapézio $EFGH$ é igual a $\frac{(a+b)h}{2}$ e se as áreas daqueles quatro triângulos são iguais, então cada um deles tem área igual a $\frac{1}{4} \cdot \frac{(a+b)h}{2} = \frac{(a+b)h}{8}$. Entretanto, pelo item anterior, se os triângulos PEF e PGH têm a mesma área, esta é igual a $\frac{abh}{2(a+b)}$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)h}{8} &= \frac{abh}{2(a+b)} \iff (a+b)^2 = 4ab \iff a^2 + 2ab + b^2 = 4ab \iff \\ a^2 - 2ab + b^2 &= 0 \iff (a-b)^2 = 0 \iff a-b = 0 \iff a = b \end{aligned}$$

Mas a não pode ser igual a b , pois sabemos do enunciado que $a > b$. Logo, não existe um ponto P no interior do trapézio $EFGH$ tal que os quatro triângulos PEF , PFH , PGH e PHE têm a mesma área.

Questão 23 - (Nº 2 - 2017):

Pedrinho juntou quatro quadrados, sem sobreposição, e obteve o retângulo de contorno destacado em vermelho na figura. A área do quadrado sombreado é 4 cm^2 .



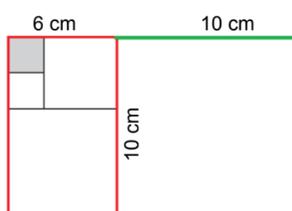
- A) Qual é a área do retângulo de contorno destacado em vermelho?
- B) Pedrinho juntou mais um quadrado à figura, também sem sobreposição, e obteve um novo retângulo de maior área possível. Qual é a área desse novo retângulo?
- C) Pedrinho quer obter outro retângulo igual ao retângulo do enunciado (destacado em vermelho e reproduzido abaixo), mas agora juntando nove quadrados em vez de quatro. Desenhe, na figura, como ele pode fazer isso.



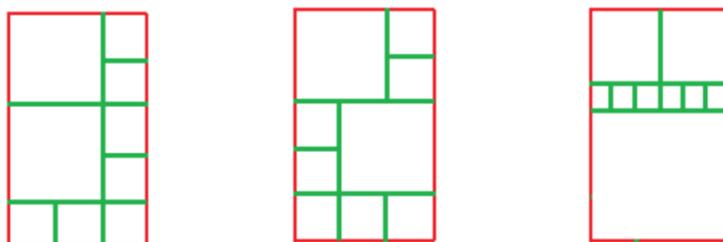
SOLUÇÃO QUESTÃO 23 - (Nº 2 - 2017):

A) Observamos inicialmente que o comprimento do lado do quadrado sombreado é 2 cm, uma vez que sua área é 4 cm^2 . A partir dessa informação e da disposição dos quadrados na figura, teremos a decomposição do retângulo em dois quadrados iguais de lado 2 cm (portanto, ambos de área 4 cm^2), um quadrado de lado 4 cm (portanto, de área 16 cm^2) e um quadrado de lado 6 cm (portanto, de área 36 cm^2). Assim, a área do retângulo contornado em vermelho é: $2 \times 4 + 16 + 36 = 60 \text{ cm}^2$.

B) É possível que o quadrado cujo lado mede 10 cm. Observe a figura ao lado: A área do novo retângulo será $60 + 100 = 16 \times 10 = 160 \text{ cm}^2$.

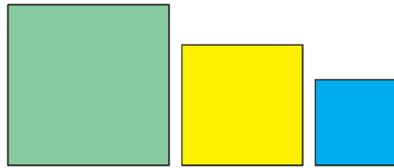


C) Há várias soluções para a decomposição do retângulo em nove quadrados; três delas estão exibidas nas figuras a seguir.

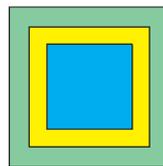


Questão 24 - (Nº 3 - 2018):

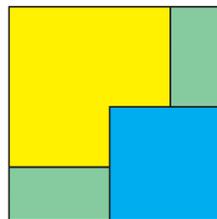
Janaína tem três folhas de papel quadradas: uma verde de área 64 cm^2 , uma amarela de área 36 cm^2 e uma azul de área 18 cm^2 .



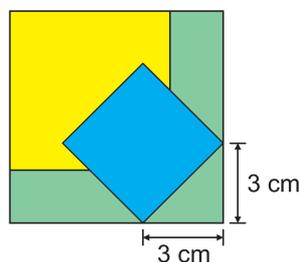
A) Janaína colocou a folha amarela sobre a folha verde, e a folha azul sobre a folha amarela, como na figura abaixo. Dentre as regiões verde, amarela ou azul da figura, qual tem a maior área? Explique sua resposta.



B) Em seguida, Janaína colocou as folhas azul e amarela sobre a verde como na figura abaixo, determinando novas regiões coloridas. Qual é a soma das áreas das regiões verdes e amarela?

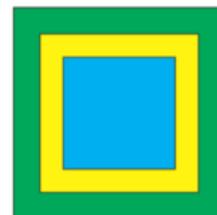


C) Finalmente Janaína colocou as folhas como na figura abaixo. Qual é a área da nova região amarela?

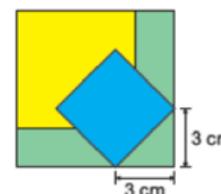
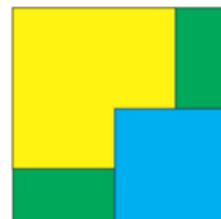


SOLUÇÃO QUESTÃO 24 (Nº 3 - 2018)

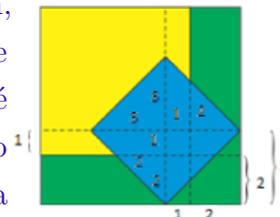
A) A folha azul tem 18 cm^2 de área. A folha amarela tem 36 cm^2 e, ao ser coberta pela folha azul, deixa visível uma região amarela, cuja área é $36 - 18 = 18 \text{ cm}^2$. A folha verde tem 64 cm^2 e, ao ser coberta pela folha amarela, deixa visível uma região verde, cuja área é $64 - 36 = 28 \text{ cm}^2$.
Portanto, a região de maior área é a verde.



B) Ao ser colocada sobre a folha verde, a folha amarela esconde uma área verde igual à sua própria área. Portanto, a soma das áreas das regiões verde e amarela, sem a folha azul, é igual à área da folha verde. Quando a folha azul é colocada sobre essas duas folhas, ela esconde uma área formada pelas regiões verde e amarela igual à sua própria área. Portanto, a soma das áreas verde e amarela, não escondidas pela folha azul, é igual a $64 - 18 = 46 \text{ cm}^2$.



C) Como a folha verde tem área igual a 64 cm^2 , seus lados medem 8 cm , pois $8 \times 8 = 64$. A folha amarela tem 36 cm^2 , logo seus lados medem 6 cm , já que $6 \times 6 = 36$. Assim, na figura, vemos que a distância entre os lados inferiores (e também entre as laterais do lado direito) dessas duas folhas é $8 - 6 = 2 \text{ cm}$. Como a distância do vértice da folha azul ao vértice inferior esquerdo da folha verde é de 3 cm , a distância entre a diagonal vertical da folha azul e o lado direito da folha amarela é $3 - 2 = 1 \text{ cm}$, conforme a figura ao lado.



O mesmo ocorre com a diagonal horizontal da folha azul e o lado inferior da folha amarela. Assim, a parte da folha azul que cobre a folha amarela é um pentágono que pode ser decomposto em quatro pedaços: um quadrado 1×1 , dois trapézios iguais e um triângulo retângulo. A área do triângulo retângulo com dois lados de 3 cm é igual a $4,5 \text{ cm}^2$. Os dois trapézios azuis têm áreas iguais à área do triângulo retângulo menos a área de um triângulo retângulo com lados menores de 2 cm , ou seja,

$$\frac{3 \times 3}{2} - \frac{2 \times 2}{2} = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = 2,5 \text{ cm}^2.$$

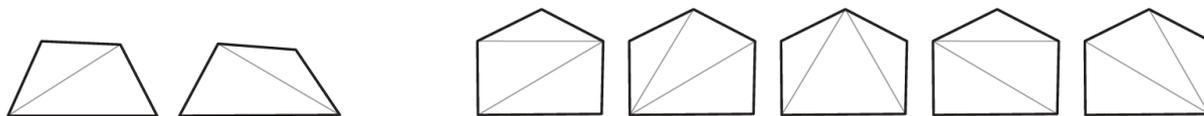
A área do quadrado é $1 \times 1 = 1 \text{ cm}^2$.

Portanto, a área da parte da folha azul que cobre a folha amarela é igual a $4,5 + 2 \times 2,5 + 1 = 10,5 \text{ cm}^2$.

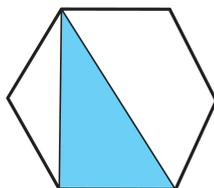
Consequentemente, a área da região amarela é igual a $36 - 10,5 = 25,5 \text{ cm}^2$.

Questão 25 - (Nº 5 - 2018):

A nova mania de Fábio é triangular polígonos, ou seja, decompor polígonos em triângulos desenhando diagonais que não se cruzam no interior do polígono. Fábio notou que há apenas duas maneiras de triangular um quadrilátero e cinco maneiras de triangular um pentágono, como nas figuras.



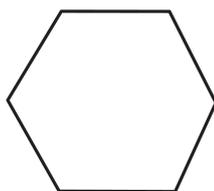
A) Fábio começou a triangular o hexágono abaixo com o triângulo azul. De quantas maneiras ele pode terminar de triangular esse hexágono?



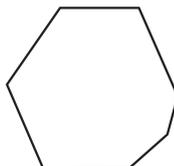
B) Qual peça não cobre o mesmo número de casas brancas e casas cinzas de um tabuleiro?



C) De quantas maneiras Fábio pode triangular um hexágono?

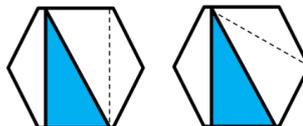


D) De quantas maneiras Fábio pode triangular um heptágono?



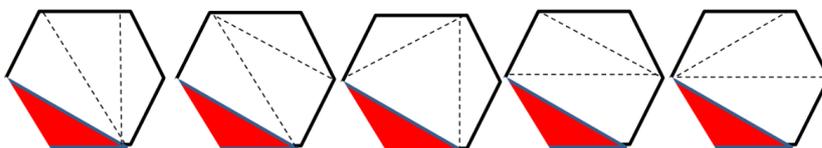
SOLUÇÃO QUESTÃO 25 - (Nº 5 - 2018):

A) Há apenas duas triangulações do hexágono que contêm o triângulo azul; elas correspondem às duas triangulações do quadrilátero à direita desse triângulo:



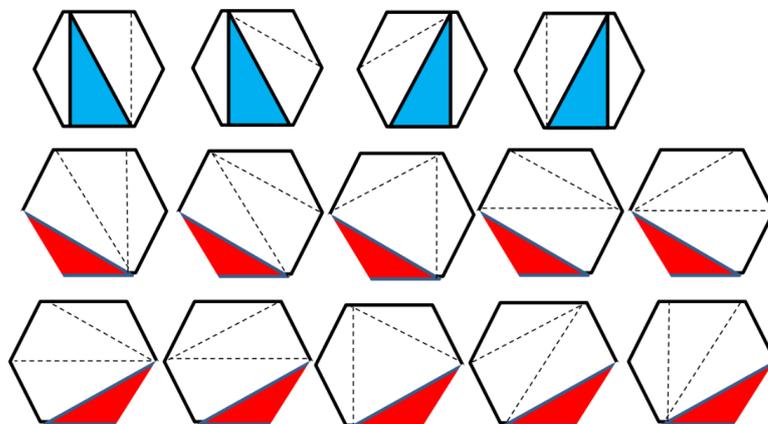
(Observe as duas triangulações de um quadrilátero presentes no enunciado)

B) Há cinco triangulações do hexágono que contêm o triângulo vermelho; elas correspondem às cinco triangulações do pentágono não pintado dentro do hexágono:



(Observe as cinco triangulações do pentágono presentes no enunciado)

C) O número total de triangulações do hexágono é 14. São as seguintes:



Essas triangulações correspondem, em cada caso, a triangular polígonos com um número menor de lados que o polígono original.

COTINUAÇÃO DA SOLUÇÃO QUESTÃO 25 - (Nº 5 - 2018):

D) Raciocinando como foi feito acima, e usando um lado como base (nas figuras abaixo escolhemos o lado inferior horizontal), podemos fazer a contagem das triangulações do heptágono destacando triângulos que tenham um lado sobre esta base escolhida e vértice oposto a esta base coincidente com um dos cinco vértices superiores do heptágono. Isto permite organizar a contagem da seguinte maneira:

1. Contamos inicialmente as triangulações que contêm o triângulo destacado em vermelho: Elas correspondem às triangulações do hexágono, que, como vimos acima, são em número de 14.
2. Contamos, a seguir, as triangulações que contêm o triângulo destacado em azul: Elas correspondem às triangulações do pentágono e são em número de 5.
3. Contamos agora as triangulações que contêm o triângulo verde. Neste caso as partes não pintadas do heptágono são dois quadriláteros e, portanto, existem $2 \times 2 = 4$ triangulações que contêm o triângulo verde.
4. Contamos agora as triangulações que contêm o triângulo amarelo. Este caso é análogo ao caso 2. O número de triangulações que contêm esse triângulo é igual ao número de triangulações do pentágono, ou seja, 5.
5. Finalmente, consideramos o triângulo rosa. Este caso é análogo ao caso 1 e corresponde ao número de triangulações do hexágono, que é 14.

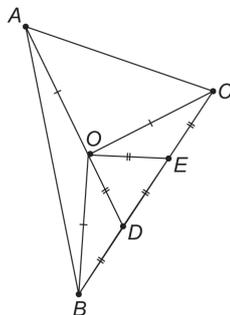
Assim, no total temos $14 + 5 + 4 + 5 + 14 = 42$ triangulações diferentes para o heptágono. O procedimento acima pode ser generalizado para contar as triangulações de qualquer polígono convexo com n lados. Ao selecionarmos um triângulo específico com vértices nos vértices do polígono, a figura original fica dividida em polígonos com um número menor de lados, o que garante que o número de triangulações pode ser obtido recursivamente. A título de curiosidade, se T_n denota o número de triangulações de um polígono com n lados, então:

$$T_n = T_2 T_{n-1} + T_3 T_{n-2} + \dots + T_{n-1} T_2, \quad n \geq 4, \quad T_2 = T_3 = 1.$$



Questão 26 - (Nº 2 - 2019):

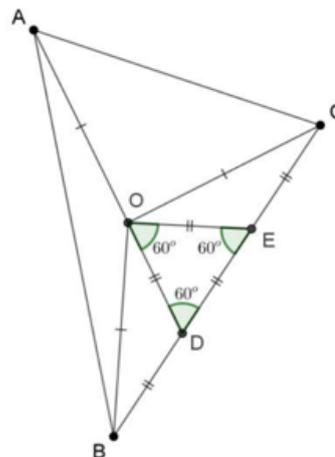
Na figura, $OA = OB = OC$. Os pontos A , O e D estão alinhados, e os pontos D e E no segmento BC são tais que $BD = DE = EC = OD = OE$.



- A) Calcule a medida do ângulo ODE .
- B) Calcule a medida do ângulo $B\hat{O}E$.
- C) Calcule a medida do ângulo $B\hat{A}C$.

SOLUÇÃO QUESTÃO 26 - (Nº 2 - 2019):

A) Como $OE = OD = DE$, segue que o triângulo ODE é equilátero. Logo, $m(\angle ODE) = m(\angle OED) = m(\angle DOE) = 60^\circ$.

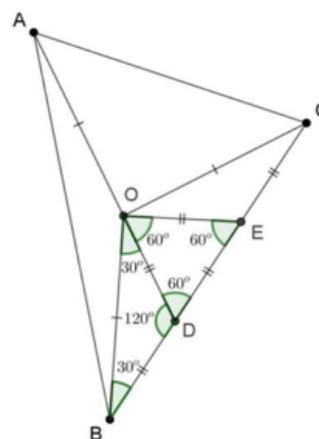


B) Observe que $m(\angle B\hat{O}E) = m(\angle B\hat{O}D) + m(\angle D\hat{O}E) = m(\angle B\hat{O}D) + 60^\circ$. Por outro lado, o ângulo $B\hat{O}D$ é um dos ângulos da base do triângulo isósceles OBD , já que $OD = BD$; além disso, o ângulo oposto à base OB desse triângulo mede 120° , já que é suplementar do ângulo $\angle ODE$ que, como vimos no item anterior, mede 60° . Assim,

$$m(\angle B\hat{O}D) = \frac{180^\circ - m(\angle BDO)}{2} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Concluimos então que

$$m(\angle B\hat{O}E) = m(\angle B\hat{O}D) + 60^\circ = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ.$$



C) Observe que $m(\angle B\hat{A}C) = m(\angle B\hat{A}O) + m(\angle O\hat{A}C) = \alpha + \beta$, como na figura ao lado. Como os triângulos OAB e OAC são isósceles, segue que $m(\angle ABO) = \alpha$ e $m(\angle ACO) = \beta$. Além disso, os triângulos ODB e OEC são congruentes pelo caso Lado-Ângulo-Lado, e, portanto, $m(\angle O\hat{E}C) = 120^\circ$, $m(\angle O\hat{c}E) = 30^\circ$ e $m(\angle C\hat{O}E) = 30^\circ$.

Somando os ângulos internos do triângulo ABC , temos

$$(\alpha + 30^\circ) + (\beta + 30^\circ) + (\alpha + \beta) = 180^\circ.$$

Logo,

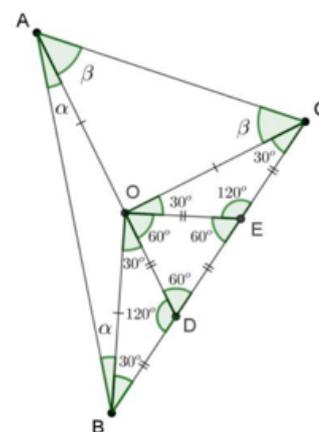
$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ,$$

e, portanto,

$$m(\angle B\hat{A}C) = \alpha + \beta = 60^\circ.$$

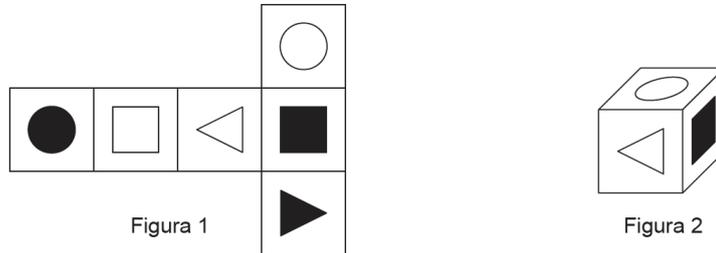
É fácil observar também que $\alpha = 15^\circ$ e $\beta = 45^\circ$, pois A , O e D estão alinhados.

Essas triangulações correspondem, em cada caso, a triangular polígonos com um número menor de lados que o polígono original.

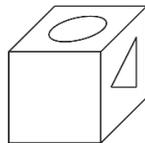


Questão 27 - (Nº 3 - 2019):

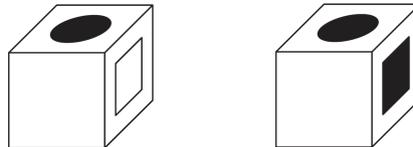
A Figura 1 é uma planificação de um cubo. Fazendo as dobras necessárias e colando as arestas soltas, obtemos o cubo da Figura 2.



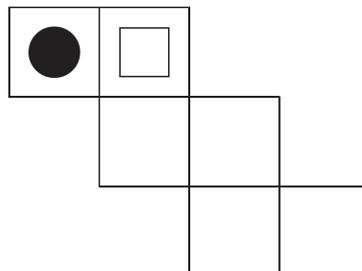
A) Em uma outra vista do mesmo cubo, mostrada abaixo, está faltando o desenho na face da frente. Faça esse desenho.



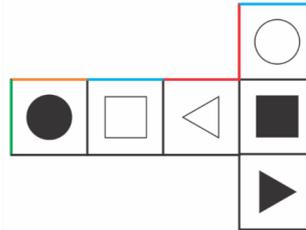
B) Abaixo temos outras duas vistas do mesmo cubo, cada uma com a face da frente sem desenho. Faça os desenhos que faltam nessas faces.



C) Abaixo temos uma outra planificação do mesmo cubo. Faça, nessa planificação, os desenhos que estão faltando.

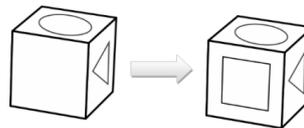


SOLUÇÃO QUESTÃO 23 - (Nº 3 - 2019):

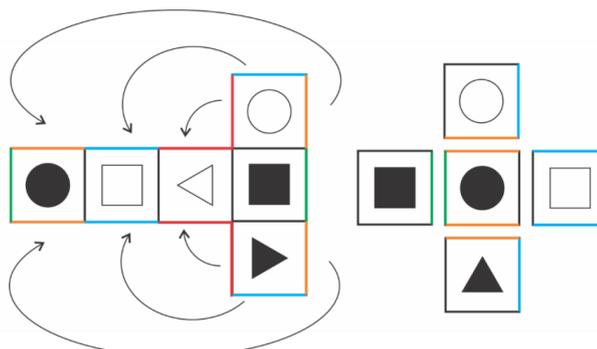


Dobrando a figura planificada para montar o cubo, vemos que o círculo preto terá uma aresta em comum com o quadrado preto e com o triângulo preto. Isso mostra que a face com o círculo branco é oposta à face com o triângulo preto, a face com triângulo branco é oposta à face com círculo preto e a face com quadrado branco é oposta à face com o quadrado preto.

A) Se o cubo for posicionado com o círculo branco na face de cima, então as faces laterais serão exatamente as quatro faces que aparecem na fila horizontal central da planificação. Logo, o triângulo branco está numa face lateral e é vizinho das faces laterais com desenhos de quadrados, um branco e um preto. O triângulo “aponta” para o quadrado branco, que então é a figura que aparece no quadrado da frente, na vista espacial do cubo. Logo, a solução é:

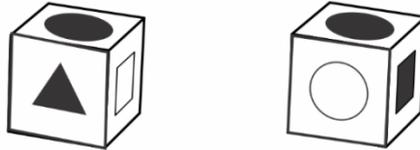


B) As faces com o círculo preto e o triângulo branco são opostas. Se a face com o círculo preto for a superior, nas faces laterais devem aparecer, além dos quadrados, o círculo branco e o triângulo preto. Como são opostas as faces com os quadrados, esses quadrados não podem aparecer numa mesma vista do cubo. Assim, nas vistas espaciais do cubo, abaixo, na face da frente só podem ser vistos o círculo branco e o triângulo preto. Vamos nos certificar agora da orientação do triângulo preto. Na figura acima, à direita, vemos como se posicionam as faces laterais em que o círculo preto aparece no topo. Fica claro que, se a face lateral com o quadrado branco é visível à direita, na frente aparece o triângulo preto “apontando” para o círculo preto. As vistas são, então.

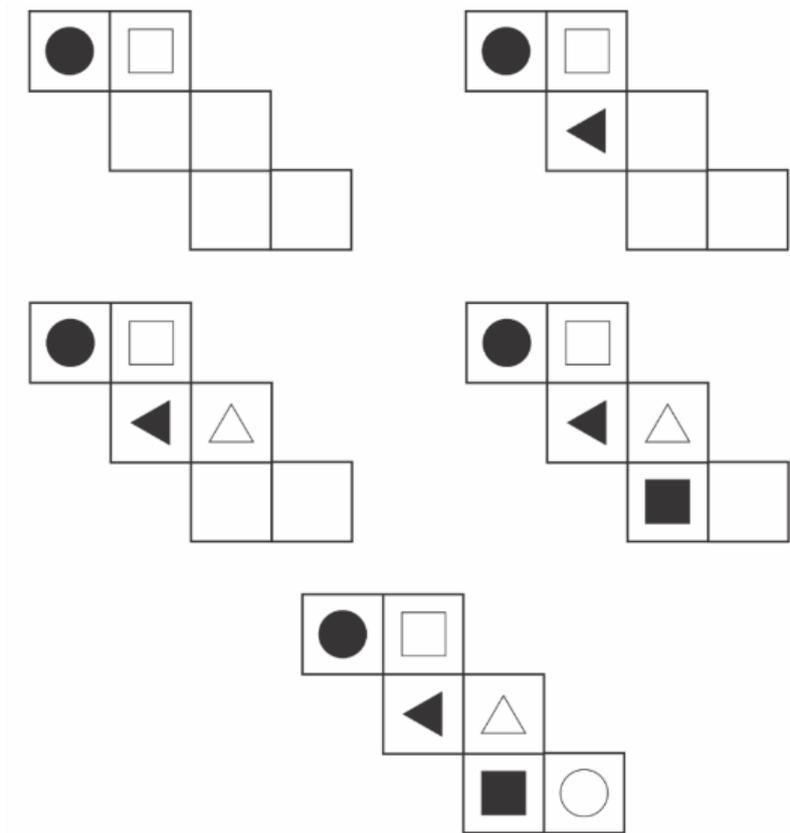


CONTINUAÇÃO DA SOLUÇÃO QUESTÃO 27 - (Nº 3 - 2019):

C) Na nova planificação, a face com o círculo preto fica à esquerda da face com o quadrado branco (veja a ilustração a seguir).

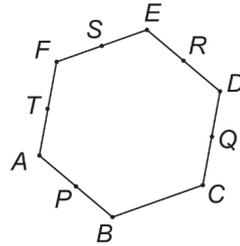


A face abaixo da face com o quadrado branco então é a face com o triângulo preto, conforme visto no item anterior (observe que o triângulo preto deve apontar para o círculo preto no cubo montado). Então a face à direita da face com o triângulo preto é a face oposta à face do círculo preto, logo é a face com o triângulo branco. O triângulo branco deve apontar para o quadrado branco no cubo montado. A face abaixo do triângulo branco é oposta à face com o quadrado branco, logo só pode ser a face com o quadrado preto. A face que falta é a do círculo branco.

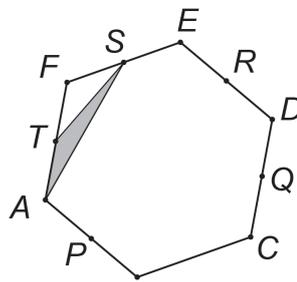


Questão 28 - (Nº 4 - 2021):

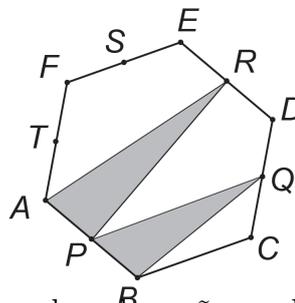
A figura ao lado mostra um hexágono regular $ABCDEF$ e os pontos médios P, Q, R, S e T dos lados AB, CD, DE, EF e FA , respectivamente.



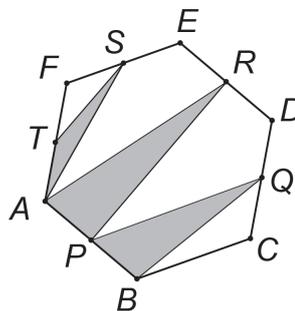
A) Se a área do triângulo AST for igual a 1 cm^2 , qual será a área do triângulo FTS ?



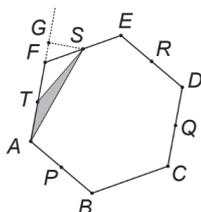
B) Qual é a razão entre as áreas dos triângulos APR e PBQ ?



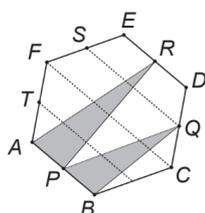
C) Qual é a razão entre as áreas sombreada e não sombreada na figura abaixo?



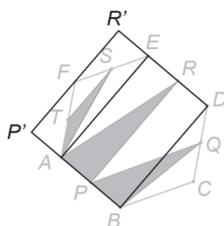
SOLUÇÃO QUESTÃO 28 - (Nº 4 - 2021):



A) Os triângulos AST e FST têm a mesma área e, portanto, a área de FST é igual a 1 cm^2 . De fato, o segmento GS , na figura, é perpendicular à reta que contém os lados AT e TF dos triângulos AST e FST e é a altura comum desses triângulos relativa a esses lados. Como T é ponto médio de AT , os triângulos AST e FST têm a mesma área.

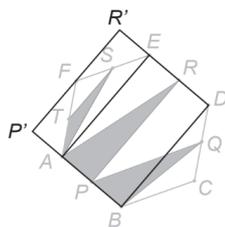


B) A razão entre as áreas dos triângulos APR e PBQ é $\frac{4}{3}$. De fato, os lados AP e PB dos triângulos APR e PBQ , respectivamente, são colineares e têm a mesma medida. Os segmentos paralelos a eles, pelos pontos médios T , S e pelo vértice F do hexágono, como indicado na figura ao lado, dividem as alturas dos triângulos APR e PBQ na razão $\frac{4}{3}$, pois esses segmentos paralelos a AB e ED , recém-traçados, são equidistantes. Como as bases têm a mesma medida, a razão entre as áreas coincide com a razão entre as alturas e é igual a $\frac{4}{3}$.



C) A razão entre as áreas dos triângulos APR e PBQ é $\frac{4}{3}$. De fato, os lados AP e PB dos triângulos APR e PBQ , respectivamente, são colineares e têm a mesma medida. Os segmentos paralelos a eles, pelos pontos médios T , S e pelo vértice F do hexágono, como indicado na figura ao lado, dividem as alturas dos triângulos APR e PBQ na razão $\frac{4}{3}$, pois esses segmentos paralelos a AB e ED , recém-traçados, são equidistantes.

CONTINUAÇÃO DA SOLUÇÃO QUESTÃO 28 - (Nº 4 - 2021):



Continuação do item C) Como as bases têm a mesma medida, a razão entre as áreas coincide com a razão entre as alturas e é igual a $\frac{4}{3}$.

Para calcular a razão entre as áreas sombreada e não sombreada, façamos o seguinte: tracemos os segmentos AE e $P'R'$, paralelos à diagonal BD do hexágono $ABCDEF$, sendo P' e R' determinados pela intersecção da reta paralela a BD passando pelo vértice F com os prolongamentos dos lados BA e DE , respectivamente, conforme a figura à esquerda. Esses segmentos determinam um paralelogramo $BDR'P'$, que é um retângulo (os ângulos $\angle ABD$ e $\angle BDE$ são retos). Além disso, como o triângulo BCD tem a mesma área que a reunião dos triângulos AFP' e $ER'F$, por congruência, o retângulo $BDR'P'$ tem a mesma área que o hexágono original, que denotaremos por H . Podemos comparar a área de cada um dos triângulos sombreados com a área H do hexágono.

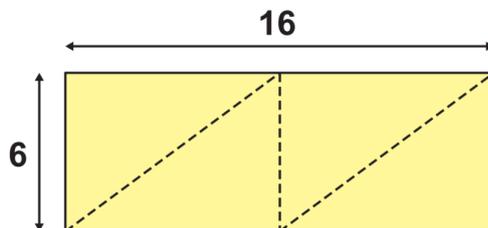
- A área do triângulo APR é a metade da área do retângulo $APRE$, que, por sua vez, é igual a $\frac{1}{3}H$. Daí, a área desse triângulo é igual a $\frac{1}{6}H$.
- A área do triângulo PBQ é da área do triângulo APR , conforme visto no item b) e, portanto, sua área será $\frac{1}{8}H$.
- A área do triângulo AST é metade da área do triângulo ASF — vide item a) —, que, por sua vez, é igual a $\frac{1}{4}H$ da área do retângulo $P'AER'$, portanto, sua área será $\frac{1}{24}H$.

Temos, portanto, que a área sombreada é $\frac{1}{6}H + \frac{1}{8}H + \frac{1}{24}H = \frac{1}{3}H$, e, conseqüentemente, a área não sombreada é igual a $\frac{2}{3}H$.

Conclusão: a razão entre as áreas sombreada e não sombreada é igual a $\frac{1}{2}$.

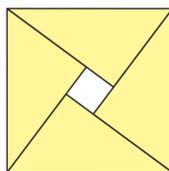
Questão 29 - (Nº 3 - 2022):

Janaína cortou uma cartolina retangular de 16 cm de comprimento e 6 cm de largura em quatro triângulos retângulos iguais, conforme mostra a figura.

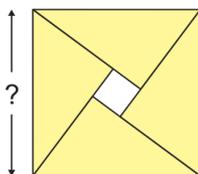


A) Qual é a área de cada um desses triângulos?

B) Em seguida, Janaína usou os quatro triângulos para montar um quadrado com um buraco no seu interior, conforme mostrado na figura. Qual é a área do buraco?



C) Quanto mede o lado do quadrado que Janaina montou?

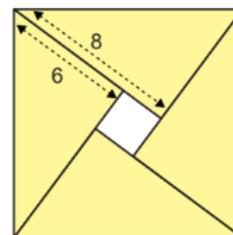


SOLUÇÃO QUESTÃO 29 - (Nº 3 - 2022):

A) Como os 4 triângulos são iguais, basta calcular a área da folha de cartolina e dividir por 4. Portanto, qualquer um desses triângulos tem área igual a: $\frac{6 \times 16}{4} = 24 \text{ cm}^2$.

Alternativamente, vemos que os quatro triângulos são triângulos retângulos iguais e seus lados menores (catetos) têm medidas 6 e 8.

Portanto, a área de cada um deles é igual a: $\frac{6 \times 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$.

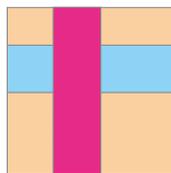


B) O buraco no centro do quadrado tem lado cuja medida é igual à diferença entre as medidas dos dois catetos dos triângulos, ou seja, $8 - 6 = 2 \text{ cm}$. Logo, a área do buraco é: $2^2 = 4 \text{ cm}^2$.

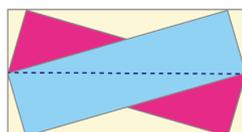
C) A área do quadrado que Janaína montou é igual à soma das áreas dos 4 triângulos, mais a área do buraco. Logo, a área desse quadrado é igual a: $4 \times 24 + 4 = 96 + 4 = 100 \text{ cm}^2$, e o lado do quadrado é: $\sqrt{100} = 10 \text{ cm}$.

Questão 30 - (Nº 3 - 2023):

Marco ganhou dois tapetes retangulares medindo 2 metros de largura por 7 metros de comprimento cada um. Inicialmente, Marco colocou os dois tapetes de modo a encaixá-los exatamente sobre o piso de uma sala quadrada, conforme mostrado na figura.



A) Qual é a área do piso da sala não coberta pelos tapetes? Depois, Marco resolveu tirar os tapetes dessa sala e colocá-los em um quarto retangular, conforme indicado na figura. A linha tracejada é uma diagonal comum a ambos os tapetes. Todos os vértices dos tapetes estão sobre o contorno do piso.



B) Qual é a área do piso do quarto?

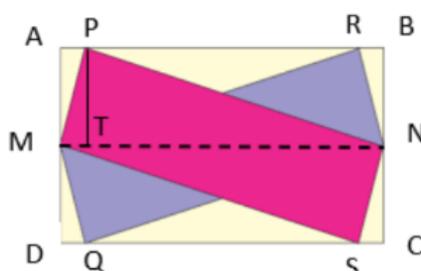
C) Explique por que a área do piso do quarto não coberta pelos tapetes é igual à área da sobreposição dos tapetes.

SOLUÇÃO QUESTÃO 30 - (Nº 3 - 2023):

A) O comprimento e a largura do piso da sala são iguais ao comprimento dos tapetes, ou seja, 7 m. Logo, o piso da sala é um quadrado cuja área é igual a $7 \times 7 = 49 \text{ m}^2$. A área coberta pelos tapetes é igual à soma das áreas dos tapetes menos a área do quadrado 2×2 que é a sobreposição dos mesmos. Logo, a área não coberta pelos tapetes é igual a $49 - (2 \times 14) + 4 = 25 \text{ m}^2$.

Alternativamente, vemos que os quatro triângulos são triângulos retângulos iguais e seus lados menores (catetos) têm medidas 6 e 8.

Portanto, a área de cada um deles é igual a: $\frac{6 \times 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$. _____



B) Na figura, o retângulo $ABCD$ representa o piso do quarto e o segmento MN é a diagonal comum aos dois retângulos que representam os tapetes. Como os dois tapetes têm as mesmas medidas, os quatro triângulos PMN , MSN , MQN e MNR são congruentes, portanto, eles têm as mesmas alturas; assim, os pontos P e R equidistam de MN e estão, desta maneira, sobre uma reta paralela a MN . Analogamente Q e S estão sobre outra reta paralela a MN pois equidistam dela. Além disso, como as alturas dos mencionados quatro triângulos são iguais, M é ponto médio de AD e N é ponto médio de BC . Se P é o vértice do tapete indicado na figura e o segmento PT é a altura do triângulo PNM relativa ao lado MN , então a área desse triângulo é metade do produto $MN \times PT$, que, por sua vez, é igual à área do retângulo $ABNM$. Vemos também que o triângulo PNM é metade do tapete. Como a área do tapete é $\frac{1}{2}$, concluímos que a área do retângulo $ABNM$ é igual a 14 m^2 . Da mesma maneira, por simetria, concluímos que a área do retângulo $MNCD$ é igual a 14 m^2 . Portanto, a área do piso do quarto é igual a $14 + 14 = 28 \text{ m}^2$. Note que essa área é igual à soma das áreas dos dois tapetes.

C) A área da parte do piso que não está coberta pelos tapetes é igual à área total do piso menos a área coberta pelos tapetes. Esta, como já vimos, é igual a duas vezes a área de cada tapete, menos a área de sobreposição dos dois tapetes. Temos, assim,

Área (piso não coberta) = Área (piso) - $[2 \times$ Área (tapete) - Área (sobreposição)]
Vimos acima que Área (piso) = $2 \times$ Área (tapete); logo, Área (piso não coberta) = Área (sobreposição).

ÍNDICE

BNCC, 29

competições, 22

crescimento, 18

desafios, 16

ensino, 29

estudantes, 17

Exatas, 21

Geometria, 15

IMPA, 18

Matemática, 21

MEC, 18

OBM, 22

OBMEP, 15

Olimpíada, 19

olimpíada, 16

perímetro, 31

Seleção, 24

Semelhança, 31

Área, 31