



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS (UFG)
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA (IME)
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)**



LYDIA SOARES DE BARROS NUNES

Viabilidade da Energia Solar Fotovoltaica: uma Análise utilizando
Modelagem Matemática na Educação Básica

GOIÂNIA

2024



**TERMO DE CIÊNCIA UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS INSTITUTO DE MATEMÁTICA E
ESTATÍSTICA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS
DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese Outro*: _____

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Lydia Soares de Barros Nunes

3. Título do trabalho

Viabilidade da Energia Solar Fotovoltaica: uma Análise utilizando Modelagem Matemática na Educação Básica

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação. O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Kelem Gomes Lourenco, Professora do Magistério Superior**, em 21/06/2024, às 14:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Lydia Soares De Barros Nunes, Discente**, em 24/06/2024, às 08:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4618425** e o código CRC **12965395**.

Referência: Processo nº 23070.023904/2024-61

SEI nº 4618425

LYDIA SOARES DE BARROS NUNES

**Viabilidade da Energia Solar Fotovoltaica: uma Análise utilizando
Modelagem Matemática na Educação Básica**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós – Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática e Estatística (IME), da Universidade Federal de Goiás (UFG), como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientadora: Prof. Dra. Kélem Gomes Lourenço

GOIÂNIA

2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Nunes, Lydia Soares de Barros

Viabilidade da Energia Solar Fotovoltaica [manuscrito] : uma Análise utilizando Modelagem Matemática na Educação Básica / Lydia Soares de Barros Nunes. - 2024.

108 f.: il.

Orientador: Profa. Dra. Kélem Gomes Lourenço.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2024.

Bibliografia. Anexos. Apêndice.

Inclui siglas, fotografias, símbolos, gráfico, tabelas.

1. Modelagem Matemática. 2. BNCC. 3. Ensino-aprendizagem. 4. Energia Solar Fotovoltaica. I. Lourenço, Kélem Gomes, orient. II. Título.

CDU 5



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 15 da sessão de Defesa de Dissertação de **Lydia Soares de Barros Nunes**, que confere o título de Mestre em **Matemática**, na área de concentração em Matemática do Ensino Básico.

Aos **onze dias do mês de junho de dois mil e vinte e quatro**, a partir das 14h00, pelo Google Meet <https://meet.google.com/dap-zwrx-bax>, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada “**Viabilidade da Energia Solar Fotovoltaica: uma Análise utilizando Modelagem Matemática na Educação Básica**”. Os trabalhos foram instalados pelo Professor Doutor Tiago Moreira Vargas (IME/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professora Doutora Kamila da Silva Andrade (IME/UFG) e o membro titular externo; Professora Doutora Anyelle Nogueira de Souza (IME/UFG). Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido a candidata **aprovada** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Tiago Moreira Vargas, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que segue assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos **onze dias do mês de junho de dois mil e vinte e quatro**.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por **Kamila Da Silva Andrade**, **Professor do Magistério Superior**, em 11/06/2024, às 15:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Tiago Moreira Vargas**, **Professor do Magistério Superior**, em 11/06/2024, às 15:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Anyelle Nogueira De Souza**, **Professor do Magistério Superior**, em 11/06/2024, às 15:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4552670** e o código CRC **196D832**

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente a Deus pela presença constante concedendo saúde, força e direcionamento ao longo desta jornada de mestrado. Creio que tudo em minha vida depende Dele e encontro inspiração em um versículo da Bíblia que diz: “Alguns confiam em carros e outros em cavalos, mas nós confiamos no nome do Senhor, o nosso Deus.” (Salmos 20:7)

Expresso profunda gratidão à minha família, especialmente a meus pais, que desde a infância me incentivaram a estudar e sempre acreditaram no meu potencial para atingir meus objetivos. Seu apoio foi fundamental para que eu prosseguisse em busca dos meus sonhos acadêmicos. Ao meu esposo por estar ao meu lado me encorajando e aos meus filhos, cuja presença mesmo sem compreenderem os desafios vivenciados por mim, são fontes de inspiração diária para me esforçar em ser melhor a cada dia.

Aos professores que participaram diretamente do meu percurso de formação, e particularmente à minha orientadora pela disponibilidade, dedicação e sugestões que foram cruciais não apenas para o desenvolvimento deste trabalho, mas também para meu crescimento profissional proporcionando-me um novo olhar sobre a prática de ensino.

Aos amigos que compuseram o grupo de estudo, do qual participei desde o início do curso, meus sinceros agradecimentos por contribuírem significativamente para minha aprendizagem e por estarem presentes para que eu pudesse compartilhar alegrias e dificuldades, tornando mais leve e prazerosa a jornada de estudos.

Aos demais amigos e familiares que sempre me incentivaram e apoiaram, direta ou indiretamente ao longo desta caminhada, expresso minha gratidão pelas palavras de encorajamento que me impulsionaram a alcançar o objetivo de concluir o mestrado.

RESUMO

A presente pesquisa realizada na área da Educação Básica fundamenta-se na concepção da modelagem matemática como uma ferramenta de ensino-aprendizagem, apresentada por Rodney Carlos Bassanezi e Maria Salett Biembengut como Modelação. Procura-se identificar as relações entre a Modelagem Matemática e os documentos curriculares vigentes, além de investigar o impacto da utilização desta metodologia de ensino em uma turma de 1º ano do Ensino Médio em Aparecida de Goiânia, Goiás, analisando as alterações no ambiente de ensino-aprendizagem em relação ao interesse dos estudantes pelas aulas de Matemática e à compreensão dos conteúdos abordados. A proposta pedagógica examina a viabilidade da instalação de sistemas de energia solar fotovoltaica em residências da região, enfatizando questões ambientais e financeiras. Esta pesquisa adota uma abordagem qualitativa, dividida em duas etapas. Inicialmente, realizou-se uma pesquisa bibliográfica sobre a Modelagem Matemática, os documentos da Base Nacional Comum Curricular e do Documento Curricular de Goiás para o Ensino Médio, além das formas de geração de energia, especialmente hidrelétrica e solar fotovoltaica. Com base nas informações coletadas, elaborou-se uma sequência didática, abordando os conteúdos de funções e matemática financeira. A segunda etapa da pesquisa envolve uma observação participante durante a implementação das aulas planejadas. O estudo visa destacar o potencial e os desafios do uso da Modelagem Matemática como metodologia de ensino na Educação Básica, relacionando teoria e prática.

Palavras chave: Modelagem Matemática; BNCC; Ensino-aprendizagem; Energia Solar Fotovoltaica.

ABSTRACT

This research carried out in the area of Basic Education is based on the conception of mathematical modeling as a teaching-learning tool, by Rodney Carlos Bassanezi and Maria Salett Biembengut as Modelling. It seeks to identify the relationship between Mathematical Modelling and current curriculum documents, in addition to investigating the impact of the use of this teaching methodology in a class of 1^o year of high school in Aparecida de Goiânia, Goiás, analyzing changes in the teaching-learning environment in relation to the interest of students in Mathematics classes of the contents addressed. The pedagogical proposal examines the feasibility of installing solar photovoltaic system in residences in the region, emphasizing environmental and financial issues. This research adopts a qualitative approach, divided into two stages. Initially, a bibliographical research was carried out on Mathematical Modelling, the documents os the National Base Comum Curricular, and the Curriculum Document of Goias for high School, in addition to forms of power generation, especially hydroelectric and solar photovoltaic. Based on the information collected, a didactic sequence was elaborated, addressing the contents of functions and financial mathematics. The second stage of the research involves participant observation during the implementation of the planned classes. The study aims to highlight the potential and challenges of the use of Mathematical Modelling as a teaching methodology in Basic Education, relating theory and practice.

Key words: Mathematical Modelling; BNCC; Teaching-learning; Photovoltaic Solar Energy.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	11
CAPÍTULO 1. MODELAGEM MATEMÁTICA E DOCUMENTOS CURRICULARES: EXPLORANDO INTEGRAÇÕES	14
1.1 Modelagem Matemática	14
1.1.1 Modelagem Matemática na Educação.....	15
1.1.1.1 Modelação: Etapas possibilidades e desafios.....	15
1.2 Documentos Curriculares	19
1.2.1 Base Nacional Comum Curricular	20
1.2.2 Documento Curricular de Goiás para o Ensino Médio	22
1.3 Integrações entre Modelação e Documentos Curriculares	23
CAPÍTULO 2. AJUSTE DE CURVAS NA MODELAGEM MATEMÁTICA	25
2.1 Ajuste de Curvas: Conceitos Fundamentais	25
2.2 Método dos Mínimos Quadrados	26
2.2.1 Ajuste Linear	27
2.2.1.2 Ajuste Linear do Modelo Exponencial	31
2.2.2 Ajuste Quadrático.....	32
2.3 Avaliação da Qualidade do Ajuste e Utilização de Softwares	32
2.3.1 Ajuste de Curvas no Excel	33
2.3.2 Ajuste de Curvas no Geogebra.....	34
CAPÍTULO 3. MATEMÁTICA FINANCEIRA	38
3.1 Conceitos Fundamentais.....	38
3.2 Tipos de Juros e Montante.....	40
3.2.1 Juros Simples.....	40
3.2.2 Montante.....	43
3.2.3 Juros Compostos.....	43
3.3 Equivalência de Capitais	46
3.4 Fluxos de Caixa	50

CAPÍTULO 4. DELINEAMENTO DA PESQUISA	55
4.1 Abordagem Metodológica	55
4.1.1 Pesquisa de Campo: Intervenção Pedagógica	56
4.1.1.1 Habilidades e Competências da BNCC e DCGO	57
4.1.1.2 Planejamento das aulas	58
4.2 Instrumentos de Coleta de Dados	68
4.3 Metodologia de Análise de dados.....	69
CAPÍTULO 5. EXECUÇÃO DA PESQUISA, DISCUSSÃO, ANÁLISE DOS DADOS E RESULTADOS	72
5.1 Contexto da Aplicação: Participantes e Período de Execução	72
5.2 Execução das Aulas: Diário de Bordo da Pesquisadora e Produções dos Participantes	72
5.3 Questionários	85
5.3.1 Interesse dos Participantes.....	85
5.3.2 Processo de Ensino-Aprendizagem	86
5.3.3 Avaliação da proposta desenvolvida	89
5.4 Discussão e Análise dos dados	91
CONSIDERAÇÕES FINAIS	92
REFERÊNCIAS	94
APÊNDICES	
Apêndice A— Questionário Diagnóstico	96
Apêndice B — Questionário 2.....	98
Apêndice C — Termo de Assentimento Livre e Esclarecido	100
Apêndice D — Termo de Consentimento Livre e Esclarecido	102
Apêndice E — Produto Educacional	104
ANEXOS	
Anexo A — Parecer do Comitê de Ética em Pesquisa	105

INTRODUÇÃO

As elaborações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e do Documento Curricular de Goiás para o Ensino Médio (DGO-EM) representam marcos importantes na definição das diretrizes educacionais voltadas para a Educação Básica, promovendo a busca por um ensino mais contextualizado e interdisciplinar. Esses documentos ressaltam a importância de desenvolver habilidades e competências nos estudantes, destacando a necessidade de explorar métodos de ensino que estimulem o raciocínio, a argumentação e a resolução de problemas (Brasil, 2018; Goiás, 2021).

No entanto, mesmo diante dessas diretrizes, ainda persistem desafios significativos no contexto do ensino de Matemática, especialmente no que diz respeito à prática pedagógica dos professores. É comum observar inquietações entre os educadores sobre como abordar determinados temas de forma prática e contextualizada, o que evidencia a necessidade de explorar metodologias capazes de alinhar o planejamento de ensino com as propostas curriculares.

Além disso, outro desafio enfrentado pelos professores de Matemática é o de despertar o interesse dos alunos e demonstrar a aplicabilidade dos conceitos matemáticos em suas vidas cotidianas. Perguntas como: 'Quando, onde ou como posso usar esse conteúdo na minha vida?' são frequentes entre os estudantes, e a abordagem tradicional nem sempre consegue oferecer respostas satisfatórias. Isso pode levar à percepção de que a Matemática é uma disciplina abstrata e distante da realidade, o que pode comprometer a motivação e o engajamento dos alunos no processo de aprendizagem.

Nesse contexto, a modelagem matemática emerge como uma abordagem promissora para enfrentar esses desafios. Ao traduzir e resolver situações-problema do mundo real por meio de modelos matemáticos, ela pode oferecer uma conexão mais significativa entre os conceitos matemáticos e o cotidiano dos alunos, tornando o aprendizado mais relevante e envolvente.

Esta pesquisa tem como objetivo investigar o impacto do uso da modelagem matemática como estratégia de ensino no processo de aprendizagem dos alunos. A investigação busca responder a seguinte questão: O trabalho docente utilizando a modelagem matemática como estratégia de ensino desperta o interesse dos estudantes e promove

impacto positivo no processo de ensino e aprendizagem?

Para responder à questão norteadora da pesquisa, inicialmente foi realizada uma pesquisa bibliográfica, com o objetivo de compreender como utilizar a modelagem matemática como estratégia pedagógica, seguindo as diretrizes dos documentos curriculares vigentes. Durante o estudo, identificou-se o potencial do ajuste de curvas e, portanto, buscou-se aprofundar esse tema para incorporá-lo à proposta de ensino. Bassanezi (2021, p. 54) define que “uma regressão ou ajuste de curvas é um recurso formal para expressar alguma tendência da variável dependente y quando relacionada com a variável independente x ”. Além disso, Bassanezi (2021, p.56) afirma que “o propósito da modelagem matemática é obter uma relação funcional que comporte em seus parâmetros qualidades ou significados inerentes ao fenômeno analisado [...]”. Assim, o ajuste de curvas pode ser usado como ferramenta para determinar essa relação funcional, que é fundamental no processo de modelagem matemática segundo Bassanezi.

Estudaram-se também conceitos diretamente ligados à proposta de ensino, que analisa a viabilidade financeira da instalação da energia solar fotovoltaica em residências. O estudo de conceitos de matemática financeira é essencial para que tal análise seja realizada, pois como descrita por Assaf Neto (2003), "a matemática financeira trata, em essência, do estudo do valor do dinheiro ao longo do tempo. O seu objetivo básico é o de efetuar análises e comparações dos vários fluxos de entrada e saída de dinheiro de caixa, verificados em diferentes momentos". Isso destaca a importância de entender as variações no valor do dinheiro para realizar comparações financeiras precisas.

A proposta de ensino elaborada foi submetida ao Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Goiás e, após obter parecer favorável, foi aplicada em uma turma de primeiro ano do Ensino Médio em um colégio estadual situado na cidade de Aparecida de Goiânia, Goiás. Os dados coletados durante a implementação das aulas foram analisados com o intuito de responder a pergunta de pesquisa.

A dissertação está organizada em cinco capítulos, nos quais são apresentados os resultados obtidos em todas as etapas do estudo. Os três primeiros capítulos compõem o referencial teórico, enquanto os capítulos restantes são dedicados à apresentação da metodologia de pesquisa, instrumentos de coleta, contexto da pesquisa, descrição e análise dos dados.

O primeiro capítulo traz a fundamentação sobre a modelagem matemática, destacando as potencialidades e desafios do seu uso como ferramenta de ensino, além da sua relação com

os documentos curriculares.

O segundo e o terceiro capítulos objetivam preparar professores para aplicar a sequência didática proposta, apresentando formalmente os conteúdos de ajuste de curvas e matemática financeira respectivamente.

No quarto capítulo apresenta-se o delineamento da pesquisa, detalhando a metodologia, o processo de elaboração da sequência didática aplicada, as habilidades e competências envolvidas, além do roteiro das aulas e explicita da metodologia utilizada para a coleta e análise dos dados.

O quinto capítulo relata a experiência prática vivenciada durante a aplicação proposta pedagógica, descreve o contexto, sintetiza e analisa os dados coletados durante a investigação além de expor os resultados e as reflexões decorrentes da pesquisa.

MODELAGEM MATEMÁTICA E DOCUMENTOS CURRICULARES: EXPLORANDO INTEGRAÇÕES

Este capítulo visa contribuir para compreensão da modelagem matemática como uma estratégia pedagógica, considerando as diretrizes curriculares nacionais e estaduais, apresentando algumas possibilidades e vantagens do uso desta metodologia, além de desafios que devem ser superados durante o processo de execução.

1.1 Modelagem Matemática

A modelagem matemática é um processo que utiliza a linguagem e conceitos matemáticos para criar e utilizar modelos que representam problemas do mundo real buscando compreender, analisar, fazer previsões e tomar decisões acerca deles.

Conforme Bassanezi (2021, p.24), “a modelagem matemática consiste, essencialmente na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem do mundo real”. Também afirma que “a modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender; enfim participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças”.

Há duas vertentes da modelagem matemática, sendo a primeira como método científico e a segunda como metodologia de ensino. A abordagem científica contribui para compreender, analisar e resolver problemas em diversas áreas, como Física, Biologia, Economia, Engenharia, entre outras. Biembengut (2016) conceitua a segunda abordagem nomeando-a de modelação e afirmando que consiste em utilizar a essência do processo de modelagem em ambientes educacionais.

Segundo Biembengut (2016, p. 261) há um ponto comum essencial nas duas abordagens para o uso da modelagem matemática. A autora explica que, “ao conceituar Modelagem, seja como método na pesquisa, seja como método na Educação, considero ‘expressar’ parte do método. Este expressar pode ser realizado de diferentes formas; dentre estas a escrita e a oral”.

Como a modelação é um tipo de modelagem matemática, a partir deste ponto, ambas as expressões serão utilizadas para referir-se ao uso em ambientes escolares.

1.1.1 Modelagem Matemática na Educação

As primeiras propostas de modelagem para a Educação Matemática no Brasil surgiram na década de 1970. Inicialmente foram aplicadas no Ensino Superior em disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. Os estudos sobre modelagem matemática voltada para o ensino já progrediram bastante. Existem propostas utilizando essa metodologia em diferentes níveis de escolaridade, mostrando que seu uso não se limita à Educação Superior.

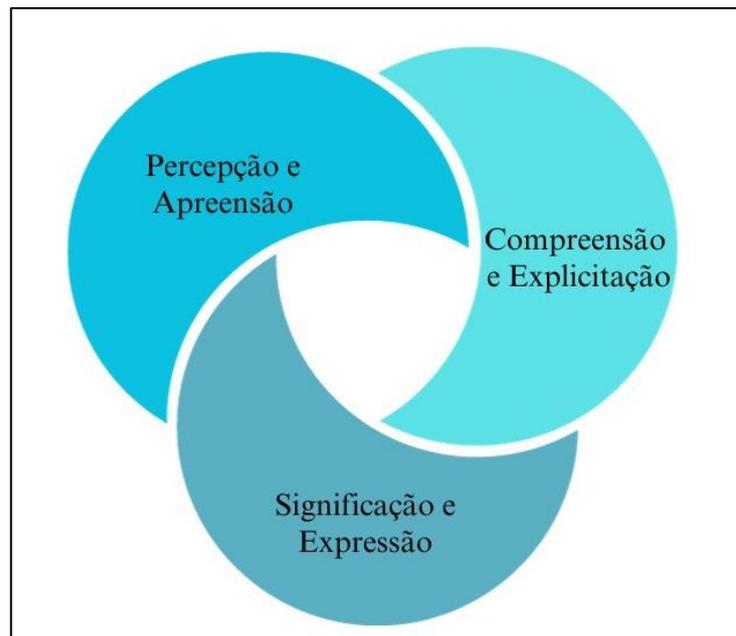
Nesse aspecto Biembengut expõe que:

A modelação matemática norteia-se por desenvolver o conteúdo programático a partir de um tema ou modelo matemático e orientar o aluno na realização do seu próprio modelo-modelagem. Pode valer como método de ensino-aprendizagem de Matemática em qualquer nível escolar, das séries iniciais a um curso de pós graduação. (Biembengut e Hein 2021, p.18)

Corroborando a ideia de que a modelagem pode ser utilizada em qualquer nível de escolaridade, Bassanezi (2015, p. 11-12) argumenta que: “[...] a estratégia de modelagem pode ser adotada em qualquer situação ou ambiente educacional, desde que se use, evidentemente, um conteúdo compatível com o estágio de desenvolvimento dos alunos”.

1.1.1.1 Modelação: Etapas, Possibilidades e Desafios

O processo de modelagem matemática é dividido em etapas durante sua execução. Nas obras sobre modelagem na Educação percebe-se que os autores diferenciam a nomenclatura das etapas, mas ao analisar tais etapas percebe-se que a essência é a mesma. Em geral, no primeiro momento ocorre o contato inicial com o tema. Em seguida, procede-se à simplificação do problema, à seleção das variáveis e à coleta de dados. Posteriormente, os conteúdos matemáticos devem ser utilizados para compreender o problema e buscar possíveis soluções. Por fim, ocorrem as discussões sobre as soluções obtidas verificando sua validade ou buscando adequá-las caso seja necessário. Biembengut (2016) divide o processo em três etapas, conforme apresentado na Figura 1.

Figura 1 — Fases da Modelação

Fonte: Elaborado pela autora (2024), adaptada de Biembengut (2016) p. 191.

Fase de Percepção e Apreensão

Durante a fase de percepção e apreensão, os estudantes têm a oportunidade de compartilhar suas percepções sobre o tema em discussão, promovendo a reflexão sobre como a situação se relaciona não apenas com a Matemática, mas também outras áreas do conhecimento. Biembengut (2016) salienta que este é o momento propício para que os alunos demonstrem o que já sabem sobre o assunto e percebam a necessidade de mobilizar outros conhecimentos para construir, ao final do processo, um modelo que possibilite uma análise completa sobre o tema. Também descreve que essa etapa pode ser dividida em pelo menos quatro subetapas:

- Explicação sobre o tema;
- Levantamento de sugestões;
- Seleção de questões que contribuem para o desenvolvimento do conteúdo curricular;
- Apresentação ou levantamento de dados relevantes sobre o assunto.

No decorrer desta fase as atividades podem utilizar diferentes recursos como, por exemplo, imagens, vídeos, documentários, esquemas, pesquisa bibliográfica, entrevistas,

dentre outros. A escolha de qual recurso utilizar depende da disponibilidade de tempo e das características do tema tratado.

Quanto à escolha do tema Biembengut (2016), apresenta três possibilidades:

1. Tema único para toda a turma, estabelecido por consenso entre os estudantes;
2. Temas distintos com cada grupo definindo o que pretende modelar;
3. Tema único escolhido pelo professor.

Biembengut (2016) ressalta que em turmas com mais de vinte estudantes a escolha de diversos temas pode complicar a dinâmica do processo, visto que o professor deve orientar os grupos, sendo assim, precisa se inteirar de todos os temas, o que pode demandar mais tempo. Também salienta que a definição de como o tema será escolhido depende da experiência em modelação dos professores e dos alunos, além do tempo disponível.

Fase de Compreensão e Explicitação

A fase de compreensão e explicitação busca entender a situação problema e o tema, estabelecendo conexões entre os conhecimentos prévios identificados e os novos elementos que emergiram durante as discussões e atividades realizadas na etapa anterior. De acordo com Biembengut (2016), essa fase é subdividida em quatro etapas distintas:

- Levantar hipóteses;
- Expressar os dados;
- Desenvolver o conteúdo;
- Formular um modelo.

A autora expõe que ao trabalhar os conteúdos o professor não deve se distanciar muito do problema inicial, preservando o interesse dos estudantes. Os conceitos de outras áreas do conhecimento podem ser abordados caso seja conveniente e haja tempo disponível.

Além disso, Biembengut (2016) destaca a utilidade de recursos tecnológicos, como calculadora e programas computacionais, pois podem facilitar o processo de construção de quadros, esquemas, gráficos e resolução de questões. Para formular o modelo é imprescindível organizar os dados e utilizar a linguagem matemática para representá-los.

Sobre o uso de programas computacionais, Bassanezi os descreve como aliados para simplificar o processo de modelagem na Educação Básica e sugere, inclusive, o uso de programas simples. Bassanezi (2015, p.13) afirma que, “a parte computacional adequada para

introdução à modelagem no ensino fundamental ou médio se restringe à confecção de gráficos e ao ajuste de curvas”.

O objetivo ao final desta etapa é que os estudantes adquiram a habilidade de aplicar os conteúdos envolvidos no processo em contextos além da situação-problema específica que foi analisada. Espera-se, assim, que estejam aptos a transferir seus aprendizados para outras situações e desafios.

Fase de Significação e Expressão

Por fim, na fase de significação e expressão ocorre a avaliação e validação do modelo. Biembengut (2016) orienta que os estudantes formem grupos com no máximo quatro membros para conduzir as atividades. O desenvolvimento desta etapa prevê a resolução de questões a partir do modelo, interpretação das soluções obtidas e análise sobre a validade das mesmas. Em relação ao modelo Bassanezi afirma que diferente do processo de modelagem como método de pesquisa, na modelação a validação do modelo nem sempre é essencial, dependendo do objetivo da proposta pedagógica.

Por exemplo, se a modelagem matemática vai ser utilizada em sala de aula com a finalidade de motivar os alunos e incorporar certos conteúdos matemáticos ou valorizar a própria matemática, muitas vezes, a validação dos modelos não é um critério fundamental para sua qualificação. Por outro lado, se o interesse recai nos resultados fornecidos pelo modelo, então sua validação é indispensável. (Bassanezi, 2015,pg. 13)

Além disso, Bassanezi destaca que “nenhum modelo deve ser considerado definitivo, podendo sempre ser melhorado, e agora poderíamos dizer que um bom modelo é aquele que propicia a formulação de novos modelos.” (Bassanezi 2021, pg. 31). Portanto, o trabalho com modelação pode abrir caminhos para outros projetos.

De acordo com Meyer (2021), ao incorporar modelação no processo de ensino e aprendizagem, a dinâmica do tradicional é modificada, conferindo destaque ao papel dos estudantes na investigação, apresentação de ideias e descoberta de resultados. Nesse contexto, o professor assume papel de mediador, enquanto os estudantes se tornam os protagonistas do processo. Meyer (2021) expõe que a Modelagem é compreendida por muitos autores como uma estratégia pedagógica que pode favorecer o interesse do aluno pela Matemática e possibilitar o trabalho interdisciplinar em sala de aula.

Segundo Biembengut (2016), a modelação é um método educacional que viabiliza a pesquisa em ambientes escolares. Ela destaca que a prática de pesquisa não é tão frequente nas aulas de Matemática e ressalta que até professores podem encontrar desafios ao conduzir o processo devido à falta de experiência nessa abordagem.

Apesar de reconhecer os benefícios que a modelação traz ao ambiente educacional, Bassanezi (2021) aponta dificuldades que podem surgir durante a aplicação em cursos regulares. São elas:

- Dificuldade de adequação do tempo;

Bassanezi (2021, p. 37) destaca que “os cursos regulares possuem um programa que deve ser desenvolvido completamente. A modelagem pode ser um processo muito demorado não dando tempo para cumprir o programa todo”.

- Dificuldade para os estudantes;

Segundo Bassanezi (2021), os alunos podem ter dificuldade em se tornarem os protagonistas do processo de ensino e aprendizagem, podendo assim se tornar apáticos durante as aulas. Além disso, talvez nem todos se interessem pelo tema escolhido, gerando uma desmotivação por parte de alguns.

- Dificuldades para os professores.

No que diz respeito aos professores, Bassanezi (2021) expressa que muitos não se sentem seguros para desenvolverem atividades de modelagem em suas turmas, seja por falta de conhecimento ou receio de encontrar situações de aplicações da matemática desconhecidas por eles. Na mesma obra, o autor afirma que os professores acreditam que o preparo de tais aulas é demorado e que o tempo para desenvolver a proposta prejudicará o cumprimento do programa.

1.2 Documentos Curriculares

A presente seção oferece análise dos documentos curriculares: a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Documento Curricular para Goiás, etapa Ensino Médio (DCGO-EM). Esta análise destaca o processo de elaboração e implementação desses documentos. Além disso, destaca sua finalidade, especialmente no que se refere ao ensino de Matemática na etapa do Ensino Médio.

1. 2.1 Base Nacional Comum Curricular

As diretrizes que delineiam as competências e habilidades a serem desenvolvidas ao longo da Educação Básica no Brasil são estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). O processo de elaboração da BNCC teve início em 2014 e foi conduzido de modo colaborativo e dialogado com a comunidade educacional e a sociedade. Ao longo desse percurso, foram elaboradas três versões da BNCC, a primeira apresentada em setembro de 2015, desencadeando debates e contribuições. Esse ciclo evoluiu para a segunda versão, divulgada em maio de 2016, e a partir dela, um processo colaborativo de redação originou a terceira versão. Em dezembro de 2017, a terceira versão parcial foi homologada, acompanhada de diretrizes para sua aplicação na Educação Infantil e no Ensino Fundamental. Paralelamente, os debates em torno da modalidade do Ensino Médio continuaram, culminando na homologação da terceira versão para essa modalidade de ensino em 14 de dezembro de 2018.

A BNCC para o Ensino Médio apresenta dez competências gerais conforme mostra a Figura 2. Na abordagem da Base Nacional Comum Curricular, o conceito de competência transcende a mera aquisição de conhecimentos isolados.

Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (Brasil, 2018, p.8).

Além das competências gerais, a BNCC propõe uma nova organização curricular por áreas do conhecimento, visando integrar componentes curriculares e favorecer o desenvolvimento das competências e habilidades de cada área. O Ensino Médio pela BNCC é dividido em quatro áreas do conhecimento: Linguagens e suas Tecnologias (Arte, Educação Física, Língua Inglesa e Língua Portuguesa), Matemática e suas Tecnologias (Matemática), Ciências da Natureza (Biologia, Física e Química) e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas (História, Geografia, Sociologia e Filosofia). Para cada área do conhecimento há a descrição das competências específicas e as habilidades a serem desenvolvidas na área. Também estão definidas habilidades específicas de Língua Portuguesa dentro da área de Linguagens e suas Tecnologias.

Figura 2 — Competências Gerais da BNCC para o Ensino Médio



Fonte: INEP.

Como a área de Matemática e suas tecnologias é composta exclusivamente pelo componente curricular Matemática, as competências específicas desta área do conhecimento correspondem às competências específicas de Matemática, que estão apresentadas a seguir:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de

padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (Brasil, 2018, p. 531).

Para cada competência específica há a descrição detalhada das habilidades que devem ser desenvolvidas. As mesmas habilidades também estão organizadas por eixo temático (números e álgebra, geometria e medidas, probabilidade e estatística). O documento destaca a importância da etapa do Ensino Médio para aprimorar e aprofundar as habilidades de Matemática abordadas na etapa do Ensino Fundamental. Além disso, são destacadas quais habilidades matemáticas foram abordadas no Ensino Fundamental em cada eixo temático.

Vale ressaltar que a BNCC não se limita aos componentes curriculares, mas prevê uma formação integral dos estudantes. Assim destaca a importância da aplicação prática da Matemática e quais habilidades devem ser desenvolvidas para atingir os objetivos, conforme aparece em trecho do documento: “em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos”.

Também aponta como a Matemática pode contribuir para a formação integral dos estudantes. Segundo a BNCC, “para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas”.

O uso de tecnologias que auxiliam nos cálculos matemáticos é incentivado pela BNC, conforme exposto no próprio documento: “[...] a BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental”.

1.2.2 Documento Curricular de Goiás para o Ensino Médio

Após a definição da versão final da BNCC coube aos estados e municípios o desafio de adaptar suas propostas curriculares alinhando-as à proposta nacional. Em Goiás, o processo de discussão sobre o novo ensino médio teve início em 2018 e ocorreu de forma colaborativa, envolvendo técnicos da Secretaria de Educação de Goiás, membros do Conselho Estadual de Educação, instituições públicas e privadas, gestores, professores e estudantes. A versão final deste documento foi aprovada pelo Conselho Estadual de Educação de Goiás em outubro de

2021.

O Documento Curricular de Goiás para o Ensino Médio segue a mesma estrutura das áreas do conhecimento da Base Nacional Comum Curricular apresenta as habilidades da BNCC distribuídas em cada ano do Ensino Médio e organizadas por bimestre. Para cada habilidade da BNCC, descreve objetivos de aprendizagem, especificando o que deve ser desenvolvido em cada objeto do conhecimento. Tais objetivos de aprendizagem são utilizados pelos professores da rede estadual de educação de Goiás como referência, auxiliando no planejamento e execução de suas aulas.

1.3 Integrações entre Modelação e os Documentos Curriculares

A elaboração da Base Nacional Comum Curricular e do Documento Curricular de Goiás Ensino Médio trouxeram desafios para que o ensino ocorra de forma contextualizada, explorando a interdisciplinaridade e a multidisciplinaridade, visando à formação integral dos estudantes. Tanto a BNCC quanto o DCGO-EM propõem que a educação seja abordada buscando desenvolver a criticidade e autonomia dos estudantes. Diante disso, cabe aos professores desenvolver estratégias adequando suas práticas metodológicas para que atendam as demandas propostas.

Nesse contexto, a modelagem matemática emerge como uma abordagem que pode atender a essas demandas curriculares, pois busca traduzir e resolver situações-problema do mundo real por meio de modelos matemáticos.

A partir da análise das competências específicas para a área de Matemática e suas Tecnologias destacam-se as relações entre modelação e cada uma delas.

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos.

A modelação, ao lidar com problemas do mundo real, oferece situações variadas que exigem a aplicação de estratégias e conceitos matemáticos para interpretar e resolver desafios em contextos cotidianos, sociais e econômicos diversos.

2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis.

Ao enfrentar problemas reais, os estudantes, por meio da modelação, são incentivados a

investigar desafios contemporâneos, promovendo a análise crítica e a tomada de decisões com base na aplicação de conceitos matemáticos.

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos.

A modelação auxilia no desenvolvimento desta competência, pois envolve a interpretação, construção de modelos e resolução de problemas em contextos diversos, proporcionando aos estudantes a prática integrada desses elementos.

4. Compreender e utilizar diferentes registros de representação matemáticos.

Durante o processo de modelação, os estudantes podem dispor de uma variedade de registros de representação, como gráficos, equações, representações geométricas, dados estatísticos e modelos computacionais, dependendo do tema abordado.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas.

A modelação promove a investigação e a formulação de conjecturas, pois os estudantes ao lidarem com problemas do mundo real exploram padrões, realizam experimentações e utilizam tecnologias para desenvolver hipóteses sobre diferentes conceitos matemáticos, possibilitando um entendimento mais profundo desses elementos.

Percebe-se, portanto, que a modelagem se alinha à BNCC, visto que durante a execução do processo são desenvolvidas habilidades previstas neste documento curricular. Foram analisadas apenas as competências gerais da área de Matemática e suas tecnologias, no entanto, outras conexões podem surgir a partir do tema escolhido para modelar, relacionando-se inclusive a competências e habilidades de outras áreas do conhecimento, promovendo um trabalho interdisciplinar, previsto tanto na BNCC quanto na proposta de modelação.

AJUSTE DE CURVAS NA MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo os fundamentos sobre o ajuste de curvas são abordados com base em Assis et al. (2019), Bassanezi (2021), Franco (2006), Ruggiero, Lopes (1996) e Matucheski (2021). O ajuste de curvas é uma técnica amplamente empregada na modelagem matemática. O objetivo principal do capítulo é fornecer uma compreensão sobre os métodos de ajuste, além de explorar as ferramentas de alguns programas computacionais que realizam tais procedimentos. Dessa forma, pretende-se capacitar os professores interessados em implementar a metodologia de ensino apresentada nesta pesquisa em suas aulas.

2.1 Ajustes de Curvas: Conceitos Fundamentais

Durante o processo de modelagem matemática os dados coletados são frequentemente organizados em tabelas. O ajuste de curvas é uma ferramenta usada para simplificar a análise desses dados, identificar tendências entre as variáveis e permitir a análise do comportamento das variáveis fora do intervalo de tabelamento com certa margem de segurança.

O ajuste de curvas pode ser realizado de duas formas principais: pelo caso discreto, no qual o objetivo é encontrar uma curva que se ajuste a um conjunto específico de pontos; ou pelo caso contínuo, no qual parte-se de uma função contínua em um intervalo definido e procura-se outra função que se aproxime dela. Neste trabalho apenas o caso discreto será explorado.

Definição 2.1. *Ajustar uma curva a partir de um conjunto de n pontos $\{(x_i, f(x_i))\}$, com $i = 1, 2, 3, \dots, n$, e $x_i \in [a, b]$, consiste em “escolher” funções g_j contínuas em $[a, b]$, com $j = 1, 2, \dots, m$, e determinar n constantes α de modo que $\alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \dots + \alpha_n g_n(x) = g(x)$ se aproxime ao máximo de $f(x)$ considerando $n \geq m$.*

Definição 2.2. *Diagrama de dispersão é o gráfico obtido a partir da marcação no plano cartesiano dos pontos que representam os dados coletados.*

Para determinar as funções $g(x)$ mencionadas na Definição 2.1, deve-se observar o

gráfico de dispersão, obtido conforme indicado na Definição 2.2. A partir do diagrama de dispersão é possível analisar de qual curva o gráfico se aproxima, facilitando a escolha das funções g_j .

Por mais preciso que seja o ajuste de curvas, é inevitável que ocorra um erro durante o processo, devido à variabilidade ou imprecisão dos dados reais. Portanto, é fundamental reconhecer a existência desse erro e considerar suas implicações ao realizar análises ou tomar decisões com base nos resultados do ajuste de curvas.

Definição 2.3. *O erro da curva $y = f(x)$ ajustada a partir de um conjunto de n pontos $\{(x_i, y_i)\}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, com $x_i \in [a, b]$, pode ser calculado individualmente para cada ponto usando a fórmula: $E_i = f(x_i) - y_i$. O erro total é obtido somando os erros de todos os pontos, o que é expresso pela fórmula:*

$$E = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i).$$

A diferença $f(x_i) - y_i$ indica o desvio entre o valor ajustado pela função f em x_i e o valor y_i coletado inicialmente. Observa-se na fórmula do erro total que, por se tratar da soma entre diferenças pode-se obter um erro pequeno ou nulo mesmo que os desvios sejam significativos. Isto ocorre, pois desvios com valores absolutos elevados e sinais opostos podem se anular ou reduzir o valor do erro. Portanto, é necessário utilizar outros métodos para analisar o erro cometido pelo modelo de forma mais precisa.

Um dos métodos mais utilizados para ajustar curvas é o método dos mínimos quadrados, amplamente reconhecido por sua eficácia e aplicabilidade em uma variedade de contextos de modelagem matemática.

2.2 Método dos Mínimos Quadrados

O método dos mínimos quadrados é uma técnica utilizada para ajustar um modelo matemático aos dados observados, minimizando a soma dos quadrados dos desvios entre os valores observados e os valores preditos pelo modelo ajustado.

No caso discreto, a partir de um conjunto de dados $\{(x_i, y_i)\}$, onde x_i é a variável independente e y_i é a variável dependente, com $i = 1, 2, \dots, n$, o método dos mínimos quadrados busca encontrar os parâmetros do modelo que minimizam a seguinte função de erro:

$$E_r = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2.$$

O método dos mínimos quadrados é uma técnica versátil que pode ser empregada para ajustar diversos tipos de modelos matemáticos aos dados observados. Dentre os principais tipos de modelos obtidos por esse método, destacam-se a regressão linear, regressão polinomial, regressão exponencial, regressão logarítmica, regressão não linear, entre outros. Neste estudo serão abordados os modelos linear, quadrático e exponencial.

2.2.1 Ajuste Linear

Definição 2.4. *Um ajuste é linear quando, ao ajustar uma curva, a função resultante é uma reta expressa por:*

$$y = f(x) = ax + b, \text{ onde } a, b \in \mathbb{R}.$$

O ajuste linear busca encontrar os valores dos parâmetros a e b na função $f(x_i) = ax_i + b$ que minimizam o valor da função que representa a soma dos quadrados dos erros dada por:

$$E_r = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2.$$

Para minimizar a função erro são usados os conhecimentos de Cálculo Diferencial, que estabelecem condições para que uma função admita mínimo. Neste caso é necessário que as derivadas parciais de E_r em relação aos parâmetros a e b sejam iguais a zero. Portanto é necessário satisfazer as seguintes condições:

$$i) \frac{\partial E_r}{\partial a} = 0 \Rightarrow 2 \sum_{i=1}^n x_i(ax_i + b - y_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i(ax_i + b - y_i) = 0.$$

$$ii) \frac{\partial E_r}{\partial b} = 0 \Rightarrow 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) = 0.$$

De i), segue que:

$$\sum_{i=1}^n ax_i^2 + \sum_{i=1}^n x_i b - \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0.$$

Colocando os parâmetros a e b em evidência obtém-se:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Desenvolvendo ii), obtém-se:

$$\sum_{i=1}^n ax_i + \sum_{i=1}^n b = \sum_{i=1}^n y_i \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a + nb = \sum_{i=1}^n y_i.$$

Logo, para determinar os valores dos parâmetros a e b que tornam o quadrado do erro mínimo, deve-se resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a + nb = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

O exemplo 2.1 ilustra a aplicabilidade do método apresentado.

Exemplo 2.1. *A Tabela 1 apresenta a quantidade da frota de veículos na cidade de Aparecida de Goiânia com base nos censos dos anos de 2018 a 2022.*

Tabela 1— Frota de veículos em Aparecida de Goiânia

Ano	2018	2019	2020	2021	2022
Quantidade de automóveis	138502	145351	150929	159093	161811

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

a) Determine o ajuste linear que relaciona o ano com a quantidade de automóveis na cidade de Aparecida de Goiânia.

b) Com base no ajuste linear realizado, calcule a estimativa da quantidade de automóveis na cidade de Aparecida de Goiânia para os anos de 2018 a 2022 e compare os valores reais e os resultados preditos pelo modelo no período analisado.

c) Estime a quantidade de automóveis em Aparecida de Goiânia no ano de 2025.

Solução: a) Para fazer o ajuste linear, deve-se solucionar o sistema a seguir para encontrar os valores de a e b .

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a + nb = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

Visando facilitar os cálculos, os valores dos anos serão numerados de 1 a 5. Portanto os valores a serem substituídos para solucionar o sistema são:

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15; \quad \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55;$$

$$\sum_{i=1}^5 y_i = 138502 + 145351 + 150929 + 159093 + 161811 = 755686;$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 1.138502 + 2.145351 + 3.150929 + 4.159093 + 5.161811 = 2327418.$$

$$\text{Assim, o sistema se reduz a } \begin{cases} 55a + 15b = 2327418, \\ 15a + 5b = 755686. \end{cases}$$

Da segunda equação do sistema tem-se que $5b = 755686 - 15a$. Substituindo esse valor na primeira equação do sistema obtém-se:

$$55a + 3(755686 - 15a) = 2327418 \Rightarrow 10a = 60360 \Rightarrow a = 6036.$$

Como $5b = 755686 - 15a$ e $a = 6036$, segue que:

$$5b = 665146 \Rightarrow b = 133029,2.$$

Então, o ajuste linear é dado pela função $f(x) = 6036x + 133029,2$.

Solução: b) Ao substituir os valores de x por 1, 2, 3, 4 e 5 na função $f(x) = 6036x + 133029,2$ são obtidas as estimativas da quantidade de automóveis para os anos de 2018 a 2022, respectivamente. Os resultados constam na Tabela 2 a seguir:

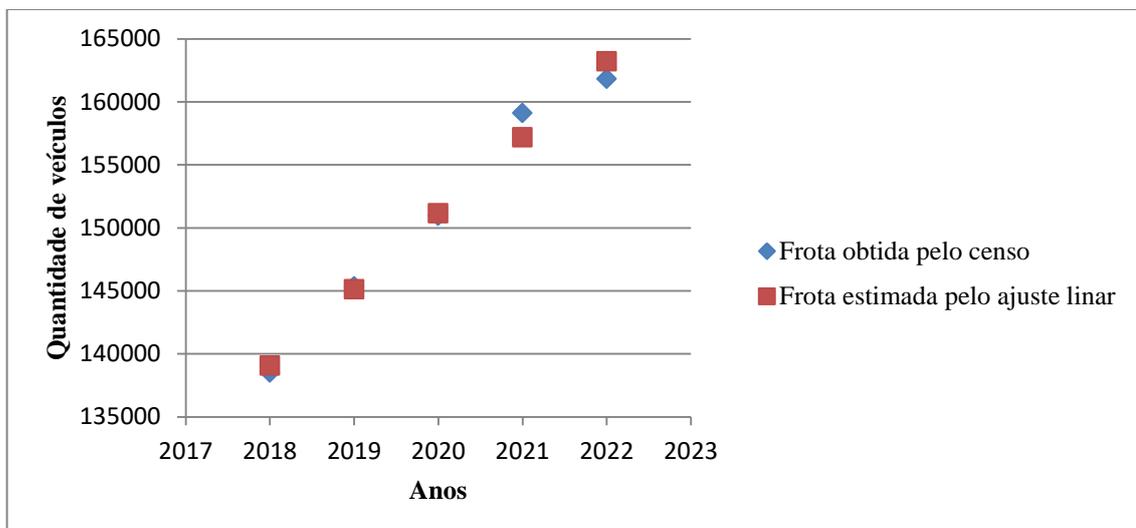
Tabela 2 — Frota de veículo em Aparecida de Goiânia estimada pelo ajuste linear

Ano	2018	2019	2020	2021	2022
Quantidade de automóveis	139065,2	145101,2	151137,2	157173,2	163209,2

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

O Gráfico 1 apresenta as quantidades de veículos em Aparecida de Goiânia entre os anos de 2018 e 2022, obtidas por meio dos censos e estimadas pelo ajuste linear. Observa-se uma proximidade entre os valores observados e os estimados pelo modelo para todos os pontos analisados, indicando pequenos desvios entre os valores reais e os preditos pelo modelo ajustado. Isso sugere que o modelo linear é adequado para representar os dados apresentados.

Gráfico 1 — Frota de veículos em Aparecida de Goiânia



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Solução: c) De acordo com a numeração adotada para representar os anos, o valor de x correspondente ao ano de 2025 é $x = 8$. Logo a quantidade de automóveis estimada em 2025 será dada por:

$$f(8) = 6036,8 + 133029,2 = 181317,2.$$

Ou seja, a estimativa de automóveis em Aparecida de Goiânia para o ano de 2025 é de 181317,2 automóveis.

2.2.1.2 Ajuste Linear do Modelo Exponencial

Definição 2.5. *Um ajuste é exponencial quando, ao ajustar uma curva, a função resultante for da forma:*

$$y = f(x) = Ae^{\lambda x}, \text{ onde } A, \lambda \in \mathbb{R}.$$

O objetivo do ajuste exponencial é determinar os valores dos parâmetros A e λ de modo que $f(x_i) \approx y_i$, onde x_i e y_i são os dados apresentados no problema em questão.

Para facilitar a análise, utiliza-se uma manipulação algébrica para linearizar o modelo exponencial. Aplicando a função logaritmo natural em ambos os lados da equação

$$y = Ae^{\lambda x} \text{ segue que:}$$

$\ln y = \ln(Ae^{\lambda x})$, pelas propriedades de logaritmo, tem-se que:

$$\ln y = \ln(Ae^{\lambda x}) = \ln(e^{\lambda x}) = \ln A + \lambda x.$$

Ao comparar a função obtida no ajuste exponencial $\ln y = \ln A + \lambda x$ com o modelo de ajuste linear $y = ax + b$, é possível adequar o modelo exponencial ao ajuste linear através de uma mudança de variável $z = \ln y$, com $y > 0$. Portanto, $z = \ln A + \lambda x$ e os parâmetros a e b do ajuste linear são respectivamente λ e $\ln A$.

Após adequar as variáveis nas equações usadas para realizar o ajuste linear, conclui-se que para linearizar o modelo exponencial deve-se resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b = \sum_{i=1}^n x_i (\ln y_i), \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a + nb = \sum_{i=1}^n (\ln y_i). \end{cases}$$

2.2.2 Ajuste Quadrático

Definição 2.6. Um ajuste é quadrático se tem a forma de uma função do segundo grau, isto é,

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ com } a, b \text{ e } c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0.$$

Pelo método dos mínimos quadrados, o ajuste quadrático determina os valores dos parâmetros a , b e c que tornam mínimo o valor da função $E_r = \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$.

Para que a função admita valor mínimo devem ser satisfeitas as seguintes condições:

$$\text{i) } \frac{\partial E_r}{\partial a} = 0 \Rightarrow 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 (ax_i^2 + bx_i + c - y_i) = 0.$$

$$\text{ii) } \frac{\partial E_r}{\partial b} = 0 \Rightarrow 2 \sum_{i=1}^n x_i (ax_i^2 + bx_i + c - y_i) = 0.$$

$$\text{iii) } \frac{\partial E_r}{\partial c} = 0 \Rightarrow 2 \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i) = 0.$$

As três condições apresentadas determinam o sistema de equações:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n x_i^4 \right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i^3 \right) b + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) c = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i^3 \right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) b + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) c = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b + nc = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{cases}$$

Para determinar o ajuste quadrático deve-se resolver o sistema para determinar os parâmetros a , b e c .

2.3 Avaliação da Qualidade do Ajuste e Utilização de Softwares

Ao empregar a técnica de ajuste de curvas para representar um conjunto de dados, é importante ressaltar que, independentemente da qualidade do ajuste, sempre haverá um erro

inerente ao processo. Para comparar os diferentes tipos de modelos ajustados e determinar qual melhor representa o conjunto de dados observados, uma medida útil é o R- quadrado, denotado por R^2 , apresentado por Montgomery e Runger (2003, p.428), dado por:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2}{\sum_{i=1}^n (\bar{y} - y_i)^2}.$$

Onde \bar{y} é a média dos valores y_i observados. Essa fórmula proporciona uma medida que relaciona o erro e a variância dos dados. Quanto mais próximo o valor de R^2 estiver de 1, melhor é o ajuste obtido indicando que o erro cometido pelo modelo é pequeno em relação à variância dos dados.

Embora o R-quadrado seja um coeficiente útil para avaliar a qualidade do modelo ajustado, é importante considerar o comportamento da curva de ajuste quando se deseja realizar previsões fora do intervalo dos dados tabelados.

Diversos softwares oferecem a funcionalidade de ajuste de curvas juntamente com a apresentação do coeficiente R^2 , permitindo aos usuários explorar de forma automatizada e prática os diferentes modelos ajustados. Neste estudo serão exploradas algumas ferramentas dos *softwares* Excel e Geogebra.

2.3.1 Ajuste de Curvas no Excel

O *software* Excel possui o método dos mínimos quadrados implementado para realizar ajustes de curvas. Os tipos de ajustes disponíveis incluem linear, exponencial, logarítmico, polinomial, potência e média móvel.

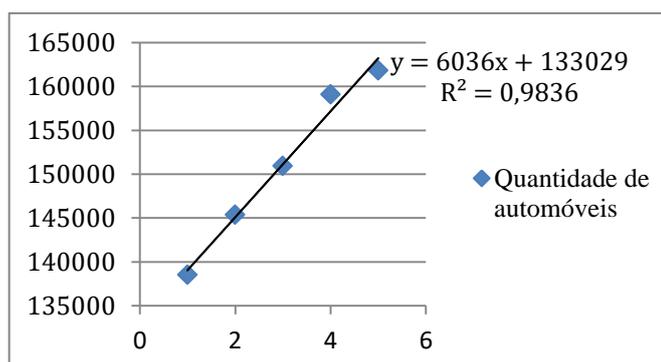
Para realizar o ajuste de curvas a partir de um conjunto de dados com o auxílio do Excel devem-se seguir as seguintes etapas:

- Construir uma tabela contendo os dados coletados;
- Selecionar a tabela e criar o gráfico de dispersão correspondente;
- Na opção “Layout do Gráfico” selecionar a opção “Linha de Tendência”;
- Escolher o tipo de ajuste desejado e habilitar as opções “Exibir equação no gráfico” e “Exibir o valor de R-quadrado no gráfico”.

Exemplo 2.2. Refaça o Exemplo 2.1 com o auxílio do Excel, expresse o valor de R-quadrado para verificar a qualidade do modelo.

Solução: Assim como na solução do Exemplo 2.1, os valores dos anos foram numerados de 1 a 5. Para realizar o ajuste linear foram seguidos os passos descritos anteriormente, resultando no Gráfico 2.

Gráfico 2 — Ajuste Linear da Frota de Veículos em Aparecida de Goiânia realizado no Excel



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

O Excel fez uma aproximação em relação ao parâmetro b . No Exemplo 2.1 obteve-se $b = 133029,2$. O software arredondou esse valor para $b = 133029$. Portanto o ajuste linear obtido com auxílio do Excel é $y = 6036x + 133029$.

O valor de R- quadrado é 0,9836, um valor próximo de 1, o que indica que o modelo linear representa bem a situação analisada.

2.3.2 Ajuste de Curvas no Geogebra

Para efetuar o ajuste de curvas utilizando o Geogebra a partir de um conjunto de dados, é necessário seguir os passos:

- No canto superior direito clicar em  ;
- Clicar em  e selecionar a opção “planilha”;
- Preencher a planilha com os dados coletados;
- Selecionar a tabela, clicar no ícone  no canto superior esquerdo da tela, e escolher a opção “Análise bivariada”;

- No canto inferior direito do gráfico traçado, escolher o tipo de regressão (ajuste) desejado.

Para exibir o valor de R-quadrado, deve-se clicar na opção , disponível à direita acima do gráfico.

Exemplo 2.3. A partir dos dados dos censos do IBGE têm-se os dados sobre o crescimento populacional na cidade de Goiânia entre os anos de 1980 e 2022 apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 — Frota de veículos em Aparecida de Goiânia

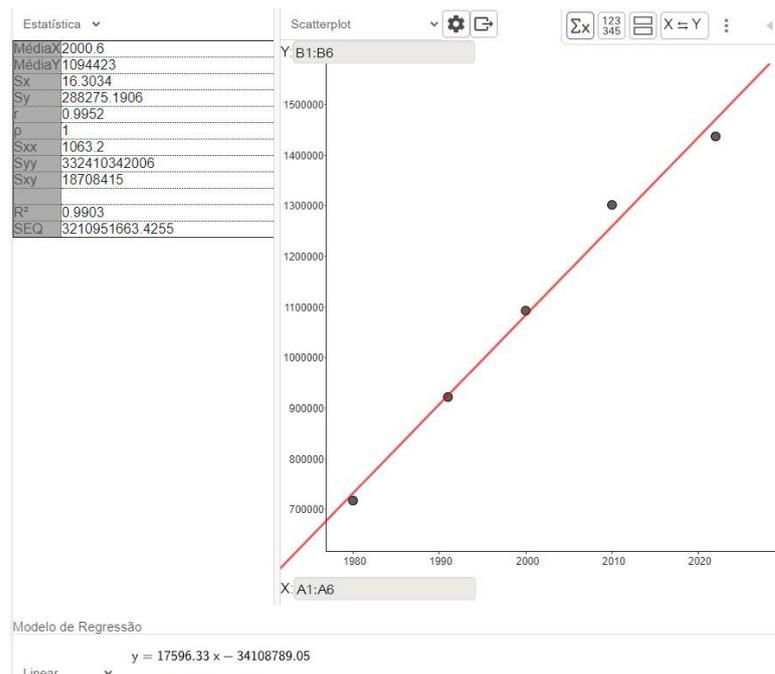
Ano	1980	1991	2000	2010	2022
População	717519	922222	1093007	1302001	1437366

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Utilizando o software Geogebra, faça os ajustes linear, quadrático e exponencial para os dados apresentados e compare os modelos utilizando o R-quadrado. Em seguida, utilize o melhor modelo criado para estimar a população em Goiânia no ano de 2025.

Solução: O ajuste linear obtido foi $y = 17596,33x - 34108789,05$. O R-quadrado desse modelo é 0,9903, conforme mostra a Figura 3.

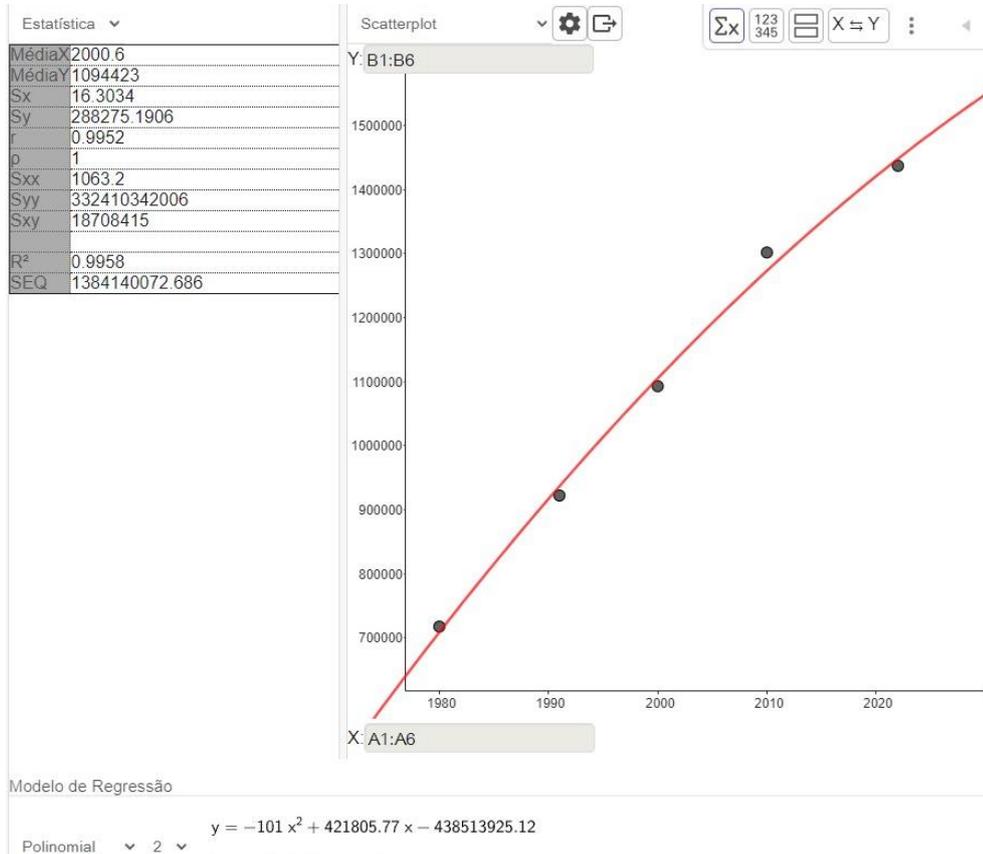
Figura 3 — Ajuste linear da população em Goiânia entre 1980 e 2022 realizado no Geogebra



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

O ajuste quadrático criado foi $y = -101x^2 + 421805,77x - 438513925,12$. O R-quadrado correspondente a esse modelo é 0,9958, apresentado na Figura 4.

Figura 4 — Ajuste quadrático da população em Goiânia entre 1980 e 2022 feito no Geogebra

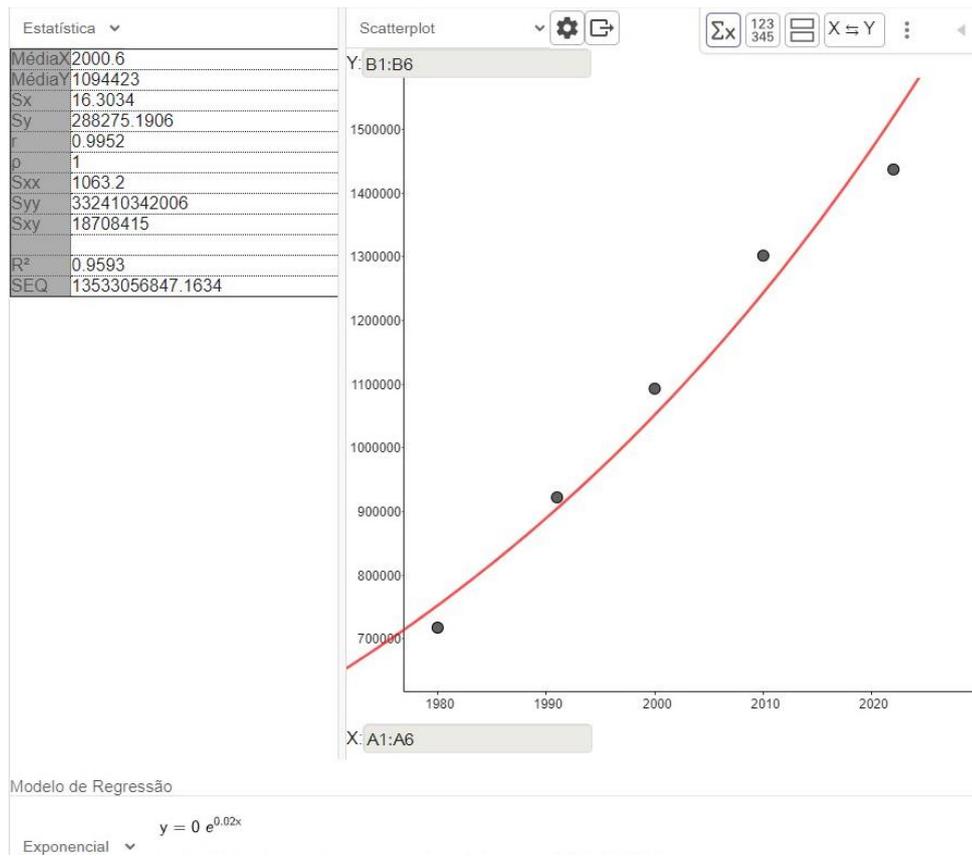


Fonte: Elaborado pela autora (2024).

O ajuste exponencial resultou em $y = e^{0,02x}$, com $R^2 = 0,9593$, como indicado na Figura 5.

Ao observar os valores de R-quadrado dos três modelos, nota-se que o ajuste quadrático apresentou o valor mais próximo de 1. No entanto, devido ao comportamento da função quadrática obtida, cuja parábola representativa tem concavidade voltada para baixo, após o crescimento ocorrerá um decréscimo o que não se adequa à questão do crescimento populacional analisado. Portanto, o modelo quadrático não será eficaz para realizar estimativas fora do intervalo dos dados tabelados.

Figura 5 — Ajuste exponencial da população em Goiânia entre 1980 e 2022 feito no Geogebra



Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

Analisando os valores de R-quadrado entre os ajustes linear e exponencial, o que mais se aproxima de 1 é referente ao modelo linear. Além disso, as características desse tipo de função representam bem a situação observada. Logo, para fazer a estimativa da população na cidade de Goiânia no ano de 2025 será utilizado o modelo linear, dado por:

$y = 17596,33x - 34108789,05$. Substituindo x por 2025, obtém-se:

$$\begin{aligned} y &= 17596,33 \cdot 2025 - 34108789,05 \\ &= 35632568,25 - 34108789,05 \\ &= 1523779,2. \end{aligned}$$

Então, conclui-se que de acordo com o modelo linear, a previsão é que a cidade de Goiânia tenha aproximadamente 1523779 habitantes no ano de 2025.

MATEMÁTICA FINANCEIRA

A matemática financeira fornece ferramentas para analisar o valor do dinheiro ao longo do tempo, auxiliando na tomada de decisões financeiras. Por exemplo, ajuda a verificar se é mais vantajoso realizar uma compra à vista ou parcelada, bem como avaliar opções de investimento. Para definir qual opção é mais vantajosa é necessário considerar todos os fatores envolvidos na operação e comparar os valores em uma mesma data, denominada data focal.

Este capítulo baseia-se nas obras de Neto (2009), Mathias (2010) e Morgado e Carvalho (2015). Visa aprimorar a compreensão dos conceitos matemáticos relacionados à proposta de ensino delineada nesta pesquisa. Destina-se a capacitar os professores interessados em aplicar essa abordagem, proporcionando-lhes um maior embasamento sobre o assunto.

3.1 Conceitos Fundamentais

Nesta seção, serão apresentados os conceitos fundamentais da matemática financeira, essenciais para a compreensão e aplicação em diversas situações financeiras práticas e teóricas.

Definição 3.1. *Denomina-se juro a remuneração paga pelo uso de um capital de outrem por determinado período de tempo.*

A cobrança de juros ocorre devido à indisponibilidade do dinheiro para o proprietário do capital, ao risco inerente à operação e com o propósito de compensar a perda do poder de compra causada pela desvalorização do dinheiro. Para estabelecer o valor do juro utiliza-se uma taxa de juro, multiplicando-a pelo capital.

Definição 3.2. *Taxa de juro, denotada por i , é o coeficiente que determina o valor de juro devido em uma operação financeira.*

As taxas de juros podem ser representadas de duas maneiras: em formato percentual, em que o valor dos juros é expresso para cada centésima parte do capital, ou na forma unitária, em que a unidade do capital é considerada. Ambas as representações são equivalentes.

A capitalização se realiza em um intervalo de tempo predefinido, como um mês, bimestre, semestre, ano, entre outros.

Para aprofundar a compreensão das taxas de juro, é importante distinguir entre taxas proporcionais e taxas equivalentes. A seguir, serão apresentadas definições e proposições relacionadas a esses conceitos.

Definição 3.3. *Duas taxas são proporcionais quando se verifica que a razão entre elas é igual a razão entre seus períodos.*

Proposição 3.1 *Sejam i a taxa de juro correspondente a um período e i_m a taxa proporcional correspondente à fração $\frac{1}{m}$ do período referente à taxa i . Então $i_m = \frac{i}{m}$.*

Demonstração: Como i e i_m são taxas proporcionais e estão relacionadas respectivamente aos períodos 1 e $\frac{1}{m}$, segue da Definição 3.3 que $\frac{i}{i_m} = \frac{1}{\frac{1}{m}}$.

Como se trata de uma proporção segue que $i_m = i \cdot \frac{1}{m} \Leftrightarrow i_m = \frac{i}{m}$.

Portanto, a proposição é verdadeira, concluindo assim a demonstração.

Definição 3.4. *Taxas de juros são equivalentes quando produzem o mesmo juro ao serem aplicadas sobre um mesmo capital, considerando o mesmo intervalo de tempo.*

A compreensão das diferenças entre taxas proporcionais e taxas equivalentes é crucial para a precisão nas operações financeiras. As taxas proporcionais, que mantêm uma relação direta com o período de aplicação, são úteis para calcular juros de forma simplificada quando o período de capitalização é fracionado. Por exemplo, ao calcular juros mensais a partir de uma taxa anual, o entendimento de taxas proporcionais permite converter diretamente a taxa anual para a mensal, garantindo uma análise coerente dos juros aplicáveis a cada período.

Por outro lado, as taxas equivalentes, que garantem o mesmo efeito financeiro independentemente do período de capitalização, são importantes para comparar diferentes opções de investimento ou financiamento. Compreender as taxas equivalentes permite avaliar

corretamente o custo ou rendimento real ao considerar diferentes períodos de capitalização, como comparar uma taxa anual com uma taxa semestral ou mensal. Esse conhecimento é vital para evitar erros na avaliação financeira e para garantir que as decisões sejam baseadas em comparações justas e precisas.

Portanto, a distinção e compreensão das taxas proporcionais e equivalentes não apenas facilitam a correta aplicação das taxas de juros em diversos contextos, mas também asseguram que as decisões financeiras sejam fundamentadas em análises rigorosas e precisas, refletindo a realidade econômica de maneira mais fiel.

3.2 Tipos de Juros e Montante

O conhecimento dos diferentes tipos de juros é fundamental para análise e aplicação em variadas situações financeiras. Entre os tipos mais comuns, destacam-se os juros simples e compostos, abordados nesta seção.

3.2.1 Juros Simples

Os juros simples são aplicados em situações financeiras mais diretas e de curto prazo. Neste sistema a aplicação é mais simples e os períodos de capitalização são definidos de forma clara e única.

Definição 3.5. *Juros simples é um sistema de capitalização no qual o valor do juro é calculado sobre o valor do capital e aplicado igualmente em todos os períodos.*

Proposição 3.2. *Sejam C o capital e i a taxa unitária aplicada a juros simples por n períodos. O juro acumulado ao final da aplicação será dado por $J = C \cdot i \cdot n$.*

Para demonstrar a proposição será utilizado o método de indução. Informações detalhadas sobre esse método podem ser encontradas em Morgado e Carvalho (2015).

Demonstração:

i) Base da indução

Para $n = 1$, correspondente ao primeiro período de incidência de juros sobre o capital, tem-se

$P(1) = J_1 = C \cdot i$, que é equivalente a $J_1 = C \cdot i \cdot 1$. Portanto, a fórmula é válida para a base de indução.

ii) Passo indutivo

Supondo válida $P(n)$ para algum n natural, pretende-se provar a validade de $P(n+1)$.

Hipótese:

$$J_n = C \cdot i \cdot n \text{ para algum } n \text{ natural.}$$

Tese:

$$J_{n+1} = C \cdot i \cdot (n+1).$$

O juro após $(n+1)$ períodos será obtido adicionando ao juro acumulado durante os n períodos anteriores, o juro referente a esse último período. Como no sistema de juros simples o valor do juro é igual em todos os períodos, tem-se:

$$J_{n+1} = J_n + C \cdot i$$

Aplicando a hipótese de indução:

$$J_{n+1} = C \cdot i \cdot n + C \cdot i, \text{ ou seja, } J_{n+1} = C \cdot i \cdot (n+1).$$

Portanto $P(n+1)$ é válida, concluindo assim a demonstração.

Para utilizar a fórmula dada na Proposição 3.2 é necessário que a taxa e o período estejam na mesma unidade de tempo. Caso não estejam deve-se primeiro converter o tempo ou a taxa antes de efetuar o cálculo do juro.

Exemplo 3.1. *Determine o valor do juro obtido por um capital de R\$30.000,00, aplicado por um ano, no sistema de capitalização simples, com taxa de:*

a) 2% ao mês.

b) 12% ao semestre.

Solução: a) Utilizando taxa de 2% ao mês (0,02 a.m) por um ano (12 meses):

$$J = 30000 \cdot 0,02 \cdot 12, \text{ logo } J = 7200.$$

O juro produzido será de R\$ 7.200,00.

Solução: b) Utilizando taxa de 12% ao semestre (0,12 a.s) por um ano (2 semestres):

$$J = 30000 \cdot 0,12 \cdot 2, \text{ ou seja } J = 7200.$$

As taxas apresentadas no Exemplo 3.1 são equivalentes, pois geraram o mesmo juro, quando aplicadas sobre o capital pelo mesmo período de tempo.

Proposição 3.3. *No sistema de juros simples, taxas proporcionais e taxas equivalentes são iguais.*

Demonstração: Sejam i_1 e i_2 taxas de juros referentes aos períodos 1 e $\frac{1}{m}$, respectivamente.

Admita-se, por hipótese, que i_1 e i_2 são equivalentes.

Sejam J_1 e J_2 os juros obtidos ao aplicar i_1 e i_2 , respectivamente, ao capital. Segue pela Proposição 3.2:

$$i) J_1 = C \cdot i_1 \cdot 1 \Rightarrow J_1 = C \cdot i_1;$$

ii) Por outro lado, como o período da taxa i_1 foi dividido em m partes, o capital (C) deverá ser aplicado por m períodos à taxa i_2 . Portanto, $J_2 = C \cdot i_2 \cdot m$

Como, por hipótese, as taxas i_1 e i_2 são equivalentes, tem-se pela Definição 3.4 que devem gerar o mesmo juro ao serem aplicadas sobre o capital. Então:

$$J_1 = J_2, \text{ ou seja:}$$

$$C \cdot i_1 = C \cdot i_2 \cdot m. \text{ Como o capital é o mesmo, segue que, } \frac{i_1}{i_2} = m.$$

A razão entre os períodos de i_1 e i_2 será $\frac{1}{\frac{1}{m}} = m$.

Como a razão entre as taxas i_1 e i_2 é igual à razão entre seus períodos 1 e $\frac{1}{m}$, segue pela Definição 3.3 que as i_1 e i_2 são taxas proporcionais, concluindo assim a demonstração.

Exemplo 3.2. *Determine a taxa mensal equivalente à taxa de juros de 9% ao ano com capitalização no sistema de juros simples.*

Solução: Pela proposição 3.3 tem-se que no sistema de juros simples taxas equivalentes e proporcionais são iguais. Segundo a proposição 3.1 a taxa proporcional é dada por $i_m = \frac{i}{m}$. Sendo assim, a taxa mensal pedida será dada pela razão entre a taxa anual e a quantidade de meses que será capitalizada durante o ano. Isto é:

$$i_{12} = \frac{9\%}{12} = 0,75 \% \text{ ao mês.}$$

Portanto, a taxa mensal equivalente a 9% ao ano com capitalização simples é 0,75% ao mês.

3.2.2 Montante

Definição 3.6. *O montante de uma aplicação financeira é o valor obtido ao final da operação, resultante da soma do capital inicial com os juros acumulados.*

Proposição 3.4. *Se um capital C é aplicado a uma taxa de juros i ao longo de n períodos, no sistema de capitalização simples, o montante M será dado por $M=C \cdot (1+i \cdot n)$.*

Demonstração: Sejam C o capital, J o juro e M o montante. Segue da Definição 3.6 que:

$$M = C + J.$$

Pela Proposição 3.2 os juros são dados por $J = C \cdot i \cdot n$.

Portanto, $M = C + C \cdot i \cdot n$.

Colocando C em evidência, obtém-se:

$$M = C \cdot (1 + i \cdot n).$$

Portanto verificou-se a validade da proposição, concluindo assim a demonstração.

Exemplo 3.3. *Considere um empréstimo de R\$ 25.000,00 com capitalização simples, à taxa de 12% a.a. Qual será o montante obtido após dois anos?*

Solução: Dados: $C = 25000$, $i = 0,12$ e $n = 2$. Pela Proposição 3.4, o montante será dado por:

$$\begin{aligned} M &= C \cdot (1 + i \cdot n) \\ &= 25000 (1 + 0,12 \cdot 2) \\ &= 25000 \cdot (1 + 0,24) \\ &= 25000 + 6000 \\ &= 31000. \end{aligned}$$

O montante obtido na operação após dois anos será de R\$ 31.000,00.

3.2.3 Juros Compostos

Definição 3.7. *No sistema de juros compostos, o juro é acrescentado não somente ao capital inicial, mas sim, ao montante obtido no período anterior, incidindo também sobre o juro já obtido nesse período.*

Exemplo 3.4. *Determine o juro e o montante mensais obtidos a partir de um capital de R\$18.000,00, aplicado a juros compostos com taxa de 2% a.m. durante quatro meses.*

Solução: Ao considerar cada mês separadamente para o cálculo do juro obtido pode-se usar a fórmula para cálculo de juros simples, que consta na Proposição 3.2. A partir do segundo mês deve-se calcular o juro sobre o montante obtido no mês anterior, conforme a Definição 3.7. A Tabela 4 mostra os cálculos realizados para determinar os valores dos juros e montante a cada mês.

Tabela 4 — Juro e montante ao longo dos meses

Mês	Capital	Cálculo do juro	Juro do período	Cálculo do montante	Montante
1	18000	$18000 \cdot 0,02 \cdot 1$	360	$18000 + 360$	18360
2	18360	$18360 \cdot 0,02 \cdot 1$	367,20	$18360 + 367,20$	18727,20
3	18727,20	$18727,20 \cdot 0,02 \cdot 1$	374,54	$18727,20 + 374,54$	19101,74
4	1910,74	$19101,74 \cdot 0,02 \cdot 1$	382,03	$1910,74 + 382,03$	19483,77

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Conforme os cálculos apresentados na Tabela 4 têm-se os seguintes valores de juro e montante mensais:

1º mês: Juro de R\$ 360,00 e montante igual a R\$ 18360.

2º mês: Juro de R\$ 367,20 e montante igual a R\$ 18727,20.

3º mês: Juro de R\$ 374,54 e montante igual a R\$ 19101,74.

4º mês: Juro de R\$ 382,03 e montante igual a R\$ 19483,77.

Proposição 3.5. *No regime de juros compostos de taxa i aplicada a um capital C , o montante após n períodos de tempo, será dado por $M = C \cdot (1 + i)^n$.*

Demonstração: Será utilizado o método de indução.

i) Base da indução

Para calcular o montante para o primeiro período pode-se usar a fórmula do montante para juros simples, pois o montante do período anterior é o próprio capital.

Logo:

$$P(1) = M_1 = C(1 + i \cdot 1) = C(1 + i)^1.$$

Portanto, a fórmula é válida para a base de indução.

ii) Passo indutivo

Agora, supondo válida $P(n)$ para algum n natural, deve-se mostrar que implicará na validade de $P(n + 1)$.

Hipótese:

$$P(n) = M_n = C \cdot (1 + i)^n.$$

Tese:

$$P(n + 1) = C \cdot (1 + i)^{n+1}.$$

Para determinar $P(n + 1)$ deve-se calcular o montante obtido ao aplicar a taxa de juro sobre o montante do período anterior. Portanto:

$$P(n + 1) = M_n \cdot (1 + i)$$

Utilizando a hipótese de indução segue que:

$$P(n + 1) = C \cdot (1 + i)^n \cdot (1 + i), \text{ ou seja, } P(n + 1) = C \cdot (1 + i)^{n+1}.$$

Então, segue pelo princípio da indução que a proposição é válida para todo n natural, concluindo assim a demonstração.

Exemplo 3.5. *Qual o montante obtido a partir de um capital de R\$ 6.200,00, a uma taxa de juros compostos de 2,5 % ao mês durante 5 meses?*

Solução: Dados: $C = 6200$, $i = 0,025$ e $n = 5$.

Conforme a Proposição 3.5, o montante da operação será dado por:

$M = C(1 + i)^n$. Substituindo os dados e efetuando os cálculos, obtêm-se:

$$M = 6200(1 + 0,025)^5 = 6200 \cdot (1,025)^5 = 7014,73.$$

Logo, montante será de R\$7.014,73.

Proposição 3.6. *Taxas equivalentes produzem o mesmo montante quando aplicadas por um mesmo período de tempo sobre um mesmo capital.*

Demonstração: A partir da Definição 3.4 tem-se que taxas equivalentes geram o mesmo juro ao serem aplicadas ao mesmo capital pelo mesmo tempo. Da Definição 3.6 segue que o montante é dado por $M = C + J$. Como o capital e o juro são iguais, a proposição é verdadeira,

concluindo assim a demonstração.

Proposição 3.7. *Se i é a taxa de juro composto referente a um determinado período de tempo, a taxa equivalente a n períodos de tempo, denotada por i_n , será dada pela expressão:*

$$i_n = \sqrt[n]{1+i} - 1.$$

Demonstração: Seja C o capital inicial. Após um intervalo de tempo t ao qual a taxa i se refere, o montante será:

$$M_t = C.(1+i)^t.$$

Como em cada período da taxa i tem-se n períodos da taxa i_n , o período de i_n pode ser representado por $n.t$.

Sendo assim, $M_n = C.(1+i)^{n.t}$. Como i e i_n são equivalentes, segue da Proposição 3.6 que:

$$M_t = M_n \Rightarrow C.(1+i)^t = C.(1+i)^{n.t}.$$

Então, $(1+i)^t = (1+i)^{n.t}$, ou seja, $(1+i) = (1+i)^n$, donde $i_n = \sqrt[n]{1+i} - 1$.

Portanto, a proposição é verdadeira, concluindo assim a demonstração.

Exemplo 3.6. *Determine a taxa de juros compostos mensal equivalente a 48% ao ano.*

Solução: Conforme a Proposição 3.7, a taxa mensal será dada por:

$$\begin{aligned} i_{12} &= \sqrt[12]{1+0,48} - 1 \\ &= \sqrt[12]{1,48} - 1 \\ &= 1,033 - 1 \\ &= 0,033. \end{aligned}$$

Portanto, a taxa equivalente a 48% ao ano é 3,3% ao mês.

3.3 Equivalência de Capitais

Em algumas situações, para tomada de decisões financeiras é necessário comparar valores referentes a diferentes datas, levando em consideração uma taxa de juros.

Para realizar essas comparações, os valores observados são ajustados para uma mesma data focal usando os conceitos de valor nominal, valor presente ou valor futuro, dependendo da análise realizada.

Como a maioria das operações financeiras utiliza o sistema de juros compostos, as comparações são feitas utilizando esse tipo de sistema de capitalização.

Definição 3.8. Valor nominal, denotado por N , é o valor do título na data do seu vencimento.

Definição 3.9. Valor presente, também denominado valor atual, é o valor da aplicação em uma data anterior ao vencimento.

Definição 3.10. Data focal é a data utilizada para comparar os valores que estão em datas diferentes. Os valores devem ser antecipados ou postecipados para a análise.

Definição 3.11. Dois ou mais capitais são equivalentes quando produzem o mesmo montante a certa taxa de juros quando comparados em uma mesma data focal.

Proposição 3.8. No regime de juros compostos o valor presente é dado por $VP = \frac{N}{(1+i)^n}$, onde N é o valor nominal na data n .

Demonstração: Conforme a Proposição 3.5 no sistema de juros compostos tem-se que

$$M = C \cdot (1 + i)^n.$$

Na situação descrita, o montante após n períodos representa o valor nominal da aplicação e o capital inicial é o valor presente da operação. Então:

$$N = VP \cdot (1 + i)^n.$$

Dividindo os dois membros por $(1 + i)^n$, obtêm-se:

$$\frac{N}{(1+i)^n} = \frac{VP \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n}, \text{ logo } VP = \frac{N}{(1+i)^n}.$$

Portanto, verificou-se que a proposição é válida, concluindo assim a demonstração.

Exemplo 3.7. Qual é o valor atual de uma dívida de R\$ 15.000, 00 com taxa de juros de 3% a. m., com vencimento daqui a cinco meses?

Solução: Dados, $N = 15000$, $n = 5$ e $i = 0,03$.

Utilizando a fórmula $VP = \frac{N}{(1+i)^n}$, demonstrada na Proposição 3.8, substituindo os valores dados:

$$VP = \frac{15000}{(1+0,03)^5} \Rightarrow VP = \frac{15000}{(1,03)^5} \Rightarrow VP = 12939,13.$$

O valor atual da dívida é de R\$12939,13.

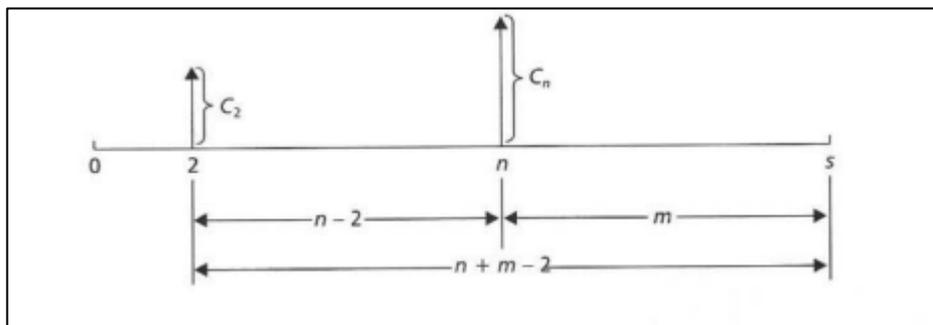
Proposição 3.9. *Dois ou mais valores nominais, equivalentes sob o critério de juros compostos em certa data focal, são equivalentes em qualquer data focal.*

Demonstração: Sejam C_2 e C_n , valores nominais com respectivos vencimentos nas datas 2 e n . Admitindo como hipótese que C_2 e C_n , são equivalentes na data zero à taxa i , tem-se:

$$\frac{C_2}{(1+i)^2} = \frac{C_n}{(1+i)^n}.$$

Seja s uma data focal arbitrária tal que $s = m + n$. Os intervalos estão expressos na Figura 6.

Figura 6 — Representação dos valores nominais e das datas focais



Fonte: Mathias (2010).

Para determinar os montantes na data focal s tem-se:

I) O valor nominal C_2 será capitalizado por um prazo igual a $(n+m-2)$, conforme mostra o gráfico. Então o montante será:

$$M_s = C_2 \cdot (1+i)^{(n+m-2)}.$$

II) O valor nominal C_n será capitalizado por m períodos. O montante é dado por:

$$M'_s = C_n \cdot (1+i)^m.$$

Por hipótese $\frac{C_2}{(1+i)^2} = \frac{C_n}{(1+i)^n}$, ou seja,

$$C_2 = C_n \cdot (1+i)^{(-n)} \cdot (1+i)^2 = C_n \cdot (1+i)^{(2-n)}$$

Substituindo-se esse valor de C_2 na expressão obtida em I, segue:

$$\begin{aligned} M_s &= [C_n \cdot (1+i)^{(2-n)}] \cdot (1+i)^{(n+m-2)} \\ &= C_n (1+i)^{(2-n+n+m-2)} \\ &= C_n (1+i)^m. \end{aligned}$$

Então, $M_s = M'_s$.

Como M_s é o montante quando se capitaliza C_2 e M'_s é o montante quando se capitaliza C_n considerando a mesma taxa de juro, verificou-se que os capitais C_2 e C_n são equivalentes na data s , concluindo assim a demonstração.

Proposição 3.10. *O valor presente, no sistema de juros compostos, de uma série de pagamentos de um mesmo capital, é dado por* $VP = \frac{N \cdot [1 - (1+i)^{-n}]}{i}$.

Demonstração: Conforme a Proposição 3.8 o valor presente é dado por $VP = \frac{N}{(1+i)^n}$.

O capital de cada pagamento representa o seu valor na data do vencimento. Então o capital é o valor nominal. Considerando n pagamentos de um mesmo capital C têm-se após n períodos que o valor presente, na data focal zero, será dado por:

$$VP = \frac{C}{(1+i)} + \frac{C}{(1+i)^2} + \dots + \frac{C}{(1+i)^n}.$$

Multiplicando a expressão por $(1+i)$, obtêm-se:

$$\begin{aligned} VP \cdot (1+i) &= \frac{C \cdot (1+i)}{(1+i)} + \frac{C \cdot (1+i)}{(1+i)^2} + \dots + \frac{C \cdot (1+i)}{(1+i)^n} \\ &= C + \frac{C}{(1+i)} + \frac{C}{(1+i)^2} \dots + \frac{C \cdot (1+i)}{(1+i)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Fazendo a diferença entre VP e $VP \cdot (1+i)$, segue que,

$$VP \cdot [(1+i) - 1] = C - \frac{C}{(1+i)^n}, \text{ donde } VP \cdot i = C \cdot [1 - (1+i)^{-n}] \text{ e, portanto,}$$

$$VP = \frac{C \cdot [1 - (1+i)^{-n}]}{i}.$$

Como o capital nesse caso representa o valor nominal pode-se substituir C por N obtendo:

$$VP = \frac{N \cdot [1 - (1+i)^{-n}]}{i}.$$

Portanto a proposição é válida, concluindo assim a demonstração.

Exemplo 3.8. *Determine o valor à vista e o valor do juro ao parcelar um produto em doze prestações iguais a R\$130,00, com a primeira paga um mês após a compra, sabendo que o juro cobrado pelo parcelamento foi de 2% ao mês.*

Solução: Como se trata de uma série de pagamentos iguais deve-se utilizar a fórmula

$$VP = \frac{N \cdot [1 - (1+i)^{-n}]}{i}, \text{ demonstrada na Proposição 3.10.}$$

Pelo enunciado tem-se $N = 130$, $n = 12$ e $i = 0,02$, logo:

$$VP = \frac{130 \cdot [1 - (1+0,02)^{-12}]}{0,02} \Rightarrow VP = 1374,79.$$

O valor à vista do produto é de R\$1374,79. O valor total pago parcelando o valor do produto é 12. 130 = 1560. O valor do juro será calculado fazendo a diferença entre o valor pago com o parcelamento e o valor a vista. Isto é:

$$J = 1560 - 1374,79 \Rightarrow J = 185,21.$$

Portanto, o valor de juro pago ao comprar o produto parcelado será de R\$185,21.

Exemplo 3.9. *Um bem cujo preço é R\$500,00 é vendido em seis prestações iguais, com a primeira vencendo um mês após a compra. Se os juros são de 7% ao mês, determine o valor das prestações.*

Solução: Dados: $VP = 500$, $n = 6$ e $i = 0,07$.

Como se trata de uma série de pagamentos iguais deve-se utilizar a fórmula

$VP = \frac{N \cdot [1 - (1+i)^{-n}]}{i}$, demonstrada na Proposição 3.10. Tem-se:

$$\begin{aligned} 500 &= \frac{N \cdot [1 - (1+0,07)^{-6}]}{0,07} \\ &= \frac{N \cdot 0,33366}{0,07} . \end{aligned}$$

Multiplicando a expressão por 0,07, segue que:

$$35 = N \cdot 0,33366.$$

Dividindo por 0,33366, obtêm-se:

$$N = 103,98.$$

O valor de cada parcela será R\$103,98.

3.4 Fluxos de Caixa

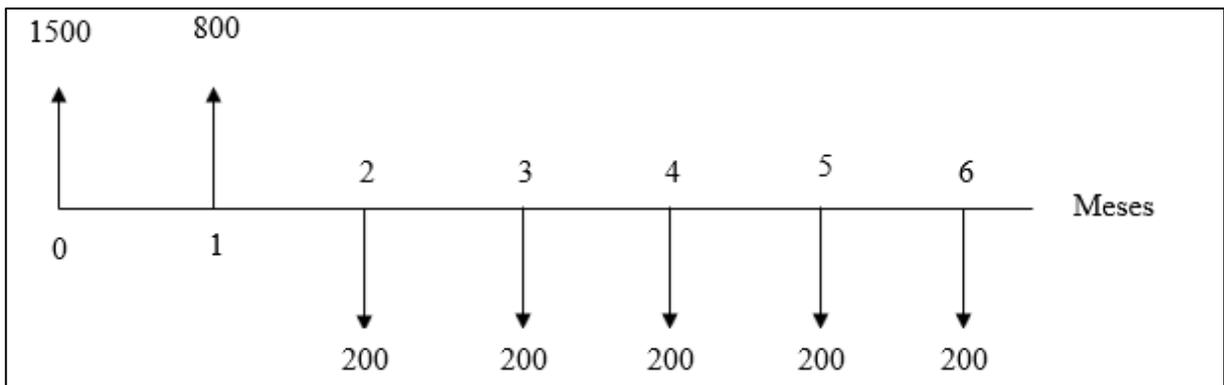
Definição 3.12. *Fluxo de caixa é uma representação de uma série de receitas e despesas financeiras durante um período de tempo.*

A representação de fluxos de caixa é feita utilizando uma reta horizontal como escala de tempo e setas que indicam as entradas e saídas. Para diferenciar as entradas e saídas, as setas têm sentidos opostos. As setas para cima indicam entradas e as setas para baixo representam saídas.

Exemplo 3.10. Represente o fluxo de caixa de uma pessoa que possui R\$1500,00, receberá R\$800,00 daqui a um mês. Ela tem uma dívida mensal de R\$200,00 durante cinco meses, com primeiro vencimento dois meses após o início do fluxo.

Solução: O fluxo pedido está representado na figura 7.

Figura 7 – Representação do fluxo de caixa referente ao Exemplo 3.10



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

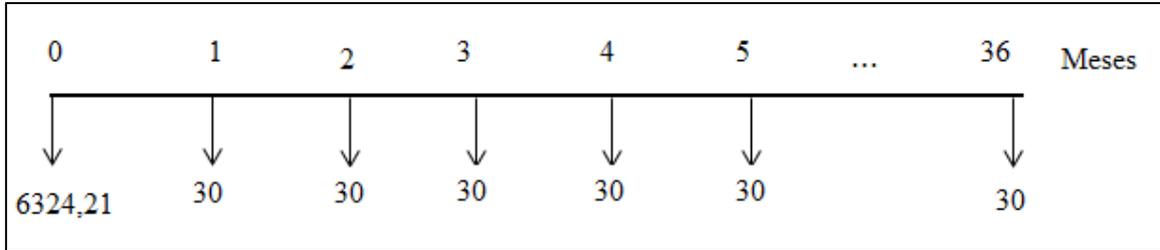
Exemplo 3.11. Para instalação do projeto de energia solar fotovoltaica com o sistema on grid em uma residência com consumo mensal de 210 kWh, o investimento é de R\$6324,21. A conta mensal de energia elétrica de tal residência é de aproximadamente R\$177,00. Após instalar o sistema de energia solar é cobrada uma taxa de disponibilidade mensal de aproximadamente R\$30,00. Determine se é mais vantajoso instalar o sistema de energia solar ou continuar pagando energia mensalmente sem instalar o sistema de energia solar, considerando a taxa de juros de 0,5% a.m e o prazo de:

- a) 3 anos
- b) 5 anos

Solução: a) Para comparar as duas opções deve-se utilizar uma mesma data. Será utilizada a data zero considerando os pagamentos mensais a partir do mês 1, conforme indicado nos fluxos de representados nas figuras 8 e 9.

Opção 1: Investir na instalação do sistema de energia solar fotovoltaica.

Figura 8 — Fluxo de caixa representando o investimento em energia solar fotovoltaica de uma residência com consumo médio mensal de 210 kwh



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Como o período e a taxa estão em unidades diferentes, deve-se primeiro igualar os períodos. Para facilitar os cálculos a taxa mensal será transformada para anual usando a fórmula $i_n = \sqrt[n]{1+i} - 1$ demonstrada na Proposição 3.7.

A taxa de 0,005 será capitalizada 12 vezes durante o ano, portanto:

$$0,005 = \sqrt[12]{1+i} - 1 \Rightarrow 0,005 + 1 = \sqrt[12]{1+i} \Rightarrow 1,005 = \sqrt[12]{1+i}.$$

Elevando a expressão à décima segunda potência, tem-se:

$$1,0061677811 = 1+i \Rightarrow 1,0061677811 - 1 = i \Rightarrow i = 0,0617.$$

Então, a taxa anual correspondente a 0,5% ao mês é de aproximadamente 6,17% ao ano.

Para calcular o valor presente na data focal zero têm-se $i = 0,0617$, $n = 36$ e $N = 30 \cdot 12 = 360$. Como se trata de uma série de pagamentos iguais, para determinar o valor presente das prestações mensais será usada a fórmula $VP = \frac{N \cdot [1 - (1+i)^{-n}]}{i}$, demonstrada na Proposição 3.10, isto é,

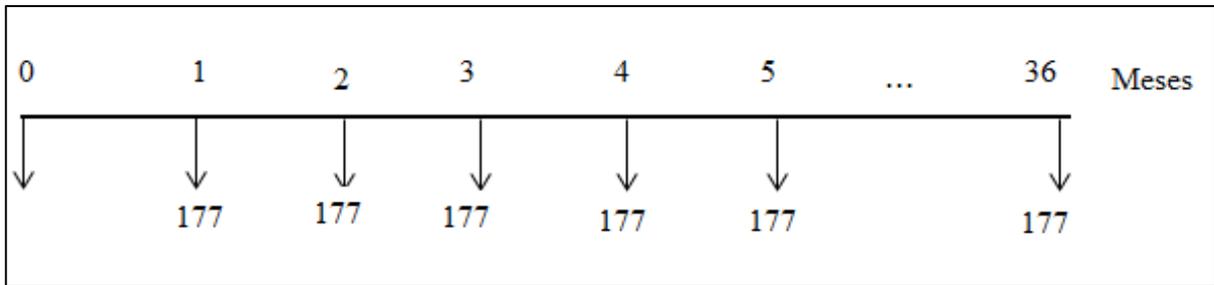
$$VP = \frac{360 \cdot [1 - (1+0,0617)^{-360}]}{0,0617} = 959,2.$$

O valor presente das parcelas de R\$30,00 é de R\$959,27. Como além das parcelas mensais há um pagamento na data zero de R\$6324,21, o valor presente da primeira opção será dado por:

$$VP_1 = 6324,21 + 959,27 = 7283,48.$$

Opção 2: Pagar energia mensalmente sem instalar o sistema.

Figura 9 — Fluxo de caixa representando o pagamento mensal da fatura de energia elétrica de uma residência com consumo médio mensal de 210 kwh



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Os cálculos serão feitos de modo análogo à opção 1. Dados: $i = 0,00617$, $n = 3$, $N = 177 \cdot 12 = 2124$.

$$VP_2 = \frac{2124 \cdot [1 - (1+0,00617)^{-3}]}{0,00617} = 5659,67.$$

Portanto, verificou-se que $VP_2 < VP_1$. Então, nestas condições é mais vantajoso continuar pagando energia mensalmente sem investir no sistema de energia solar fotovoltaica.

Solução: b) Como a solução deste item é similar ao item a, alguns passos serão omitidos como o gráfico do fluxo de caixa.

Opção 1: Investir na instalação do sistema de energia solar.

Dados: $i = 0,0617$, $n = 5$ e $N = 360$.

Cálculo do valor presente das parcelas de R\$ 360,00 anuais:

$$VP = \frac{360 \cdot [1 - (1+0,0617)^{-5}]}{0,0617} = 1509,46.$$

Cálculo do valor presente total da primeira opção:

$$VP_1 = 6324,21 + 1509,46 = 7833,67.$$

Opção 2: Pagar energia mensalmente sem instalar o sistema.

Dados: $i = 0,00617$, $n = 5$, $N = 2124$.

$$VP_2 = \frac{2124 \cdot [1 - (1+0,00617)^{-5}]}{0,00617} = 8905,83.$$

Como $VP_1 < VP_2$, nessas condições é mais vantajoso instalar o sistema de energia solar fotovoltaica.

Compreender os conceitos de matemática financeira pode contribuir para a análise e a tomada de decisões conscientes em questões financeiras, como ilustrado nos exemplos solucionados ao longo deste capítulo.

DELINEAMENTO DA PESQUISA

Este capítulo tem como objetivo proporcionar uma compreensão sobre o delineamento metodológico adotado na presente pesquisa. Serão apresentados a abordagem metodológica, os instrumentos utilizados na coleta de dados e os procedimentos de análise. A estrutura metodológica apresentada visa não apenas fornecer clareza sobre a condução da pesquisa, mas também assegurar a confiabilidade e validade dos resultados obtidos.

4.1 Abordagem Metodológica

A pesquisa adota abordagem qualitativa e foi dividida em duas etapas. A primeira trata-se de uma pesquisa bibliográfica e a segunda envolve uma pesquisa de campo exploratória com ênfase na observação participante durante aplicação de uma intervenção pedagógica em uma turma da Educação Básica.

O presente estudo se classifica como qualitativo, pois busca a partir das percepções pesquisadora e dos participantes sobre a proposta aplicada, analisar o impacto da mesma no processo de ensino e aprendizagem. Segundo Minayo (2009, p.21) pesquisas qualitativas “trabalham com o universo de significados, dos motivos, das aspirações, das crenças, dos valores e das atitudes”.

O intento da pesquisa bibliográfica é compreender sobre geração de energia elétrica, Modelagem Matemática e os documentos curriculares vigentes no Brasil e em Goiás.

A proposta metodológica prevê a interferência direta da pesquisadora no contexto pesquisado caracterizando-a assim como pesquisa de campo com observação participante conforme as definições a seguir.

Sobre a pesquisa de campo Gonçalves afirma que:

A pesquisa de campo é o tipo de pesquisa que pretende buscar a informação diretamente com a população pesquisada. Ela exige do pesquisador um encontro mais direto. Nesse caso, o pesquisador precisa ir ao espaço onde o fenômeno ocorre, ou ocorreu e reunir um conjunto de informações a serem documentadas [...].
(Gonçalves 2001, p. 67)

Em relação à observação participante:

Definimos observação participante como um processo pelo qual um pesquisador se coloca como observador de uma situação social, com a finalidade de realizar uma investigação científica. [...] O observador faz parte do contexto sob sua observação e, sem dúvida, modifica esse contexto, pois interfere nele, assim como é modificado pessoalmente. (Minayo 2007, p.70)

4.1.1 Pesquisa de Campo: Intervenção Pedagógica

A etapa da pesquisa de campo envolve a execução de uma sequência didática durante a qual se realizará a observação participante e a coleta de dados. O propósito central da sequência didática é discutir sobre as diferentes formas de geração de energia elétrica em Goiás e analisar a viabilidade financeira da instalação de um sistema de energia solar fotovoltaica nas residências dos participantes da pesquisa. A análise será feita a partir de dados obtidos por meio de contas de energia elétrica e de orçamentos de projetos de instalação do sistema fotovoltaico de energia.

A abordagem proposta, composta por quatorze aulas previstas, utiliza a Modelação Matemática para explorar os conceitos de funções e Matemática Financeira. A estratégia de ensino prevê a elaboração e análise de dois modelos matemáticos: o primeiro estabelece uma relação entre o consumo de energia residencial e o valor correspondente na fatura, enquanto o segundo vincula o consumo ao montante despendido no projeto de instalação do sistema de energia solar fotovoltaica. Dessa forma as fases da modelação “Compreensão e Explicitação” e “Significação e Expressão”, serão desenvolvidas em dois momentos distintos dedicados a cada um dos modelos estudados.

Em relação à escolha do tema Biembengut (2016) propõe três abordagens: adoção de um tema único para toda a turma estabelecido por consenso entre os estudantes, atribuição de temas diferentes com cada grupo definindo o que pretende modelar ou a escolha de tema pelo professor. Além disso, Biembengut (2016) sugere que a determinação da opção mais adequada deve levar em consideração a experiência tanto dos professores quanto dos alunos em relação à modelação além de considerar o tempo disponível.

Diante das possibilidades apresentadas por Biembengut (2016), nesta pesquisa optou-se por tema único escolhido pela professora autora da pesquisa.

4.1.1.1 Habilidades e Competências da BNCC e DCGO

A sequência didática abrange habilidades e competências estabelecidas nos documentos curriculares vigentes sendo destacadas da BNCC duas como principais, sendo uma do componente curricular de Matemática e outra do componente curricular de Ciências da Natureza.

Do componente curricular Matemática

(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Do componente curricular Ciências da Natureza

(EM13CNT309) Analisar questões socioambientais, políticas e econômicas relativas à dependência do mundo atual em relação aos recursos não renováveis e discutir a necessidade de introdução de alternativas e novas tecnologias energéticas e de materiais, comparando diferentes tipos de motores e processos de produção de novos materiais.

Em relação às competências do DCGO englobam-se oito no total, sendo cinco do componente curricular de Matemática indicadas para o primeiro ano do Ensino Médio, além de duas provenientes do nono ano do Ensino Fundamental também do componente de Matemática, e por fim uma competência relacionada a Ciências da Natureza do primeiro ano do Ensino Médio.

Do componente curricular Matemática para o Ensino Médio

(GO-EMMAT501B) Identificar possíveis leis de formação que se estabelecem da relação entre duas grandezas, analisando conjecturas apresentadas em quadros e/ou tabelas para expressar algebricamente as generalizações que se definem da relação entre duas grandezas.

(GO-EMMAT404C) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), utilizando estratégias, conceitos e

procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos.

(GOEMMAT510A) Pesquisar situações relacionadas às leis de formação ou funções em temas voltados a natureza socioeconômica, técnica científica etc. registrando os dados relativos ao comportamento das variáveis investigadas para construir gráficos que possibilitem tomadas de decisões posteriores.

(GO-EMMAT501C) Modelar situações relacionadas às leis de formação definidas no campo das funções polinomiais do 1º grau, representando no plano cartesiano os dados apresentados em quadros e/ou tabelas para analisar situações que possibilitem a tomada de decisões.

(GO-EMMAT510C) Investigar (com ou sem o apoio de tecnologias) dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, analisando as relações e variações estabelecidas entre as mesmas para descrever (oralmente ou por meio de textos - verbais, gráficos, esquemáticos entre outros) a relação observada.

Do componente curricular Matemática para o Ensino Fundamental

(EF09MA05-A) Ler, interpretar, resolver e elaborar problemas que envolvam juros simples e juros compostos, no contexto da educação financeira.

(EF09MA05-B) Ler, interpretar, resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente, com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.

Do componente curricular Ciências da Natureza

(GO-EMCNT309A) Aplicar conhecimentos químicos, físicos e biológicos referentes aos recursos renováveis e não renováveis de energia, demonstrando por meio de diagramas e relatórios as vantagens e desvantagens desses recursos para resolver situações envolvendo as matrizes energéticas.

4.1.1.2 Planejamento das aulas

FASE DA MODELAÇÃO: Percepção e Apreensão

Essa fase será realizada ao longo de três aulas, abrangendo o diagnóstico dos conhecimentos prévios da turma sobre o tema abordado e as investigações iniciais que serão

aprofundadas nas etapas subsequentes.

AULA 1

Objetivo: Discutir sobre as formas de geração de energia elétrica.

Metodologia: Aula dialogada.

Roteiro: A pessoa responsável por conduzir a aula será mediadora do diálogo. Pode iniciar indagando os alunos para diagnosticar os conhecimentos prévios sobre geração de energia, fazendo questionamentos sobre o assunto, como por exemplo:

- Como é gerada a energia elétrica?
- Há somente uma forma de geração de energia elétrica?
- Já viram perto de sua residência ou perto do padrão de energia de algum local, uma placa com a mensagem: “Cuidado, risco de choque elétrico, geração própria”? Sabe por que tem essa placa?
- Já ouviram falar em energia solar?
- Será que compensa instalar energia solar em residências ou somente comércios?

Essas e outras perguntas podem nortear o diálogo. Sugere-se registrar no quadro as contribuições dos estudantes.

Ao final da aula propor que, para melhor entendimento sobre o assunto, os estudantes realizem em casa uma pesquisa sobre o tema geração de energia hidrelétrica e solar, tarifa de energia e instalação de energia solar para participarem de uma roda de conversa na próxima aula.

Além disso, solicitar que os estudantes separem os talões de energia de sua residência para serem utilizados em aulas posteriores.

Recursos: Quadro branco e pincel atômico ou quadro e giz.

AULA 2

Objetivo: Discutir sobre geração de energia hidrelétrica e solar, impactos ambientais e custos para o consumidor final

Metodologia: Roda de conversa.

Roteiro: Os estudantes devem se organizar em círculo e quem estiver conduzindo a aula explica as regras da roda de conversa, possibilitando que todos participem de modo organizado.

Antes de iniciar o diálogo é importante eleger alguém para ir anotando no quadro as participações dos estudantes.

Por fim, solicitar que tragam os talões de energia na próxima aula.

Recursos: Quadro branco e pincel atômico ou quadro e giz.

AULA 3

Objetivo: Perceber a relação existente entre o consumo e o valor pago.

Metodologia: Aula dialogada e proposta de atividade envolvendo a análise dos dados dos talões de energia de meses diferentes observando a bandeira tarifária, o consumo e o valor pago enfatizando a importância da economia de energia.

Roteiro: O condutor da aula pode iniciar um diálogo questionando os estudantes sobre como é feito o cálculo do valor da conta de energia. Após as discussões, solicitar que analisem os talões tragos por eles para verificar se ainda há algo a acrescentar em relação ao item anterior.

É bom promover uma reflexão sobre as bandeiras tarifárias. Caso não citem esse tópico, orientá-los para observá-lo e perguntar se sabem o que significa, para que servem e como são aplicadas na fatura.

Também é importante solicitar que os estudantes anotem os dados dos vários talões observados. Esse registro pode ser feito utilizando tabelas ou outro método, desde que organizem as informações para utilizar em aulas posteriores.

Recursos: Talões de energia das residências dos alunos, quadro branco e pincel atômico ou quadro e giz.

FASE DA MODELAÇÃO: Compreensão e Explicitação (MODELO 1)

Essa fase será conduzida em uma aula na qual os estudantes desenvolverão o Modelo 1, que relaciona o consumo de energia elétrica residencial com o valor pago na fatura.

AULA 4

Objetivo: Utilizar o conhecimento de funções para determinar uma função que relaciona o consumo com o valor pago na conta.

Metodologia: Discussão em pequenos grupos sobre a relação entre consumo de energia e valor pago.

Roteiro: Iniciar a aula orientando os estudantes a se organizarem em grupos de no máximo quatro pessoas, preferencialmente dois ou três integrantes. Explicar que esse grupo deverá ser mantido nas demais atividades em grupo propostas até o final da sequência didática.

Em seguida solicitar que discutam utilizando os dados coletados dos talões na aula anterior como podem identificar uma função que permita o cálculo do valor a ser pago na conta de energia, dependendo do consumo em Quilowatt-hora (kWh).

Recursos: Dados coletados dos talões de energia na aula anterior.

FASE DA MODELAÇÃO: Significação e Expressão (MODELO 1)

Essa fase destina-se à análise e validação do Modelo 1, desenvolvido na Aula 4. Duas aulas serão dedicadas a esse processo.

AULA 5

Objetivo: Testar a validade das funções obtidas em cada grupo, observando o intervalo de validade da função e o erro do modelo utilizado.

Metodologia: Proposta de atividade em grupo.

Roteiro: Propor inicialmente que os alunos realizem uma troca dos dados obtidos a partir dos talões de energia e verifiquem se a função deduzida pelo seu grupo também é válida também para os dados de outros dois grupos. Durante essa etapa é indicado o uso de calculadoras para agilizar os cálculos e otimizar o tempo durante a aula.

À medida que os grupos forem concluindo o que foi pedido, orientá-los para que discutam entre os integrantes do grupo sobre o que observaram buscando determinar se a função representa bem a relação entre o consumo e o valor pago no intervalo observado.

Quando todos os grupos tiverem concluído os testes deverão apresentar oralmente as conclusões à turma.

Recursos: Dados dos talões de energia coletados pelos grupos em aulas anteriores e calculadoras.

AULA 6

Objetivo: Compreender o conceito de ajuste de curvas, os principais métodos utilizados e a importância da análise e interpretação dos dados obtidos.

Metodologia: Aula expositiva dialogada.

Roteiro: O condutor da aula apresentará o conceito de ajuste de curvas explicando sua importância e ilustrando com exemplos de situações práticas a utilização deste método.

Durante a aula, deve-se explicar o método dos mínimos quadrados e a regressão linear, além de introduzir outros métodos existentes. Também é importante falar sobre o erro de projeção e como determina-lo a partir de um modelo de curva ajustado.

Após a exposição teórica sobre o assunto poderá fazer uma demonstração de ajuste utilizando algum software (Excel, Geogebra, etc.) e por fim disponibilizar um momento para que os alunos esclareçam dúvidas sobre o assunto.

Recursos: Data show e notebook com slides preparados.

FASE DA MODELAÇÃO: Compreensão e Explicitação (MODELO 2)

Essa fase será desenvolvida no decorrer de seis aulas, compreendendo o aprofundamento de estudos sobre matemática financeira e ajuste de curvas, culminando na elaboração do Modelo 2, que relaciona o consumo residencial de energia elétrica e o valor do projeto de instalação da energia solar fotovoltaica.

AULA 7

Objetivo: Ajustar curvas utilizando softwares e analisar os dados fornecidos pelo modelo criado.

Metodologia: Aula prática utilizando o laboratório de informática.

Roteiro: Solicitar que os alunos se organizem em grupo. Cada grupo deverá inserir os dados coletados dos talões de energia no software e criará ajustes de curva, seguindo orientação do mediador da aula, caso não conheçam bem as ferramentas do programa.

Propor uma comparação entre a função determinada pelo programa e as deduzidas pelos grupos na Aula 4. Neste momento poderão ser revisados vários tópicos sobre funções, como por exemplo, tipo da função, formato do gráfico, raízes e outros.

Recursos: Computadores, tablets ou chromebooks, internet, dados dos talões de energia coletados pelos estudantes na Aula 3 e funções determinadas pelos grupos na Aula 4, que relacionam o consumo e o valor pago na fatura de energia.

AULA 8

Objetivo: Ajustar uma curva que relacione o consumo de energia e o valor do projeto de instalação de energia fotovoltaica.

Metodologia: Aula prática com proposta de atividade em grupo.

Roteiro: No início da aula solicitar que os estudantes se organizem nos grupos já definidos em aulas anteriores. Cada grupo receberá um equipamento com acesso à internet para realizar

a atividade de forma colaborativa.

Em seguida distribuir o orçamento do custo de instalação do sistema de energia solar fotovoltaica e instruí-los a inserir os dados no programa escolhido para realizar o ajuste de curva relacionando o consumo de energia em Quilowatt-hora (kWh) e o custo da instalação da energia solar.

O mediador da aula deve estar atento aos grupos para auxiliar caso identifique dificuldades durante a execução da atividade.

Quando todos os grupos concluírem essa etapa haverá uma exposição dos resultados à turma a fim de que todos os grupos analisem os resultados apresentados e juntos determinem qual função obtida melhor representa a situação proposta.

Recursos: Computadores, tablets ou chromebooks, internet e orçamento do custo da instalação de energia solar.

AULA 9

Objetivo: Relembrar os conceitos básicos de matemática financeira.

Metodologia: Aula expositiva dialogada revisão de conceitos de matemática financeira abordados no nono ano do Ensino Fundamental.

Roteiro: Utilizando slides previamente elaborados com o tema juros simples e compostos, o condutor da aula deve explicar o que são juros, mostrar aplicações cotidianas, apresentar o conceito de taxa de juros e suas diferentes representações (com símbolo de porcentagem, fracionária e decimal).

Também é importante diferenciar juros simples e compostos, apresentar as fórmulas e resolver problemas com cada uma delas.

Por fim, dedicar um momento para esclarecer as dúvidas dos estudantes.

Recursos: Data show e notebook com slides para projeção.

AULA 10

Objetivo: Compreender os conceitos de equivalência de capitais, analisando valores presente e futuro de um capital aplicado por determinado tempo com determinada taxa de juros.

Metodologia: Aula expositiva dialogada

Roteiro: Começar a aula indagando os estudantes se determinado valor em reais, como por exemplo, R\$100,00 tem o mesmo valor do que há dois anos.

Se possível utilizar as respostas dadas para explicar os fatores que fazem o capital alterar seu valor no decorrer do tempo e como a análise de equivalência de capitais é útil na tomada de decisões financeiras.

Ainda possibilitando a participação dos estudantes, definir valor presente e futuro, deduzir as fórmulas usadas para efetuar os cálculos e resolver exemplos e situações problema que se aproximem da realidade deles.

Propiciar momentos durante a aula de esclarecimento das dúvidas dos estudantes.

Recursos: Data show e notebook com slides para projeção.

AULA 11

Objetivo: Entender o conceito de fluxo de caixa e como utilizar equivalência de capitais para comparar fluxos.

Metodologia: Aula expositiva dialogada.

Roteiro: A partir de exemplos práticos, apresentar o conceito de fluxo de caixa. Em seguida mostrar que a data focal utilizada não altera a análise.

Antes do término da aula, dedicar um momento para esclarecer as dúvidas dos estudantes caso existam.

Recursos: Data show e notebook com slides para projeção.

AULA 12

Objetivo: Montar os fluxos de caixa do pagamento mensal de energia elétrica e do investimento usado na instalação do sistema fotovoltaico.

Metodologia: Aula expositiva dialogada.

Roteiro: Iniciar o diálogo indagando os estudantes sobre como pode ser montado um fluxo de caixa do pagamento mensal de energia elétrica de uma residência com determinada média de consumo.

A partir das ideias apresentadas, auxiliar a turma a organizá-las corrigindo eventuais erros para montar coletivamente de forma correta o fluxo procurado.

Após concluírem a elaboração do fluxo de pagamentos mensais da conta de energia elétrica, deduzir também de modo colaborativo com os participantes da aula uma fórmula para o cálculo do valor presente desses pagamentos após certo período de tempo.

Em seguida utilizar o orçamento de instalação de energia solar para montar o fluxo de caixa dessa instalação, deduzindo a fórmula para o cálculo do valor presente, considerando um tempo determinado.

Recursos: Quadro branco e pincel atômico ou quadro negro e giz.

FASE DA MODELAÇÃO: Significação e Expressão (MODELO 2)

Essa fase, composta por duas aulas, visa analisar e validar o Modelo 2 que relaciona o consumo residencial de energia elétrica ao custo de instalação do sistema de energia solar fotovoltaica.

AULA 13

Objetivo: Analisar a viabilidade econômica da instalação do sistema de energia fotovoltaica.

Metodologia: Aula prática em sala de aula, utilizando o laboratório de informática.

Roteiro: Instruir os estudantes, divididos em grupo, a criar uma planilha com auxílio de um software (Excel, Geogebra ou outro), utilizando os modelos obtidos em aulas anteriores para cálculo do valor da fatura de energia e para o custo do projeto de instalação de energia solar. As fórmulas dos modelos criados devem ser inseridas na planilha, permitindo que a partir de um consumo específico digitado na planilha, os valores da fatura de energia e do custo para instalação da energia solar sejam estimados.

Além disso, os dados obtidos na Aula 12, referentes aos valores presentes correspondentes ao pagamento mensal de energia e do investimento na instalação da energia solar, podem ser incluídos na planilha para analisar a viabilidade financeira do investimento em energia solar residencial.

Durante o processo de criação das planilhas pelos grupos, o mediador deve-se manter atento às dificuldades apresentadas e auxiliar os grupos para inserirem as fórmulas corretamente na planilha.

É de suma importância que as planilhas construídas pelos grupos sejam salvas corretamente para que possam ser usadas na aula seguinte.

Recursos: Computadores, tablets ou chromebooks para a criação das planilhas, além de acesso à internet, caso o software escolhido para a elaboração das planilhas exija conexão online.

AULA 14

Objetivo: Analisar a viabilidade econômica da instalação do sistema de energia fotovoltaica.

Metodologia: Aula prática utilizando o laboratório de informática.

Roteiro: Iniciar a aula solicitando que os estudantes se reúnam nos grupos e acessem a planilha que elaboraram na aula anterior.

Para facilitar a análise da planilha e torná-la mais completa, sugere-se que os estudantes acrescentem uma coluna referente à conclusão utilizando a função “SE” do software utilizado, de modo que se o valor presente do pagamento mensal de energia elétrica for menor que o valor presente do custo da energia solar em determinado período de tempo, a conclusão seja que não compensa investir nesse tipo de energia nas condições descritas. Caso

contrário, a conclusão indicará que é viável o investimento.

Com as planilhas completas, instruir os estudantes a alterarem os valores na tabela (consumo, preço, taxa de juros, tempo) para verificar se haverá mudança na conclusão.

Concluir a aula propondo uma discussão sobre o que observaram na etapa anterior e formulem a resposta à questão: “É financeiramente viável investir na instalação da energia solar fotovoltaica residencial?”.

Espera-se que consigam perceber que a viabilidade depende dos fatores considerados na análise e que para uma resposta precisa é necessário fixar os valores do consumo, tempo observado, taxa de juros considerada para desvalorização do dinheiro no decorrer do tempo.

Recursos: Computadores, tablets ou chromebooks para a criação das planilhas, além de acesso à internet, caso o software escolhido para a elaboração das planilhas exija conexão online.

4.2 Instrumentos de Coleta de Dados

No que tange à coleta de dados em pesquisas de campo, Andrade (2010, p.138) afirma que: “A coleta de dados constitui uma etapa importantíssima da pesquisa de campo, mas não deve ser confundida com a pesquisa propriamente dita. Os dados coletados serão posteriormente elaborados, analisados, interpretados e representados graficamente”.

Lakatos e Marconi (2003) expõem que em pesquisas de campo exploratórias pode-se utilizar uma variedade de instrumentos para coleta de dados. Neste estudo os instrumentos de coleta incluem questionários, diário de bordo da professora pesquisadora, produções dos participantes e registros fotográficos.

Neste trabalho, optou-se por elaborar dois questionários. O primeiro consiste em um diagnóstico sobre o interesse nas aulas de Matemática, metodologias de ensino que os estudantes mais se identificam, conhecimentos sobre planilhas, funções e matemática financeira. O segundo questionário versa sobre a sequência didática aplicada, o interesse dos estudantes, as dificuldades e a compreensão a partir da proposta. Os questionários utilizados encontram-se nos apêndices A e B.

Cada um dos questionários é composto por nove perguntas. No diagnóstico oito são de múltipla escolha, com duas delas oferecendo opção para o participante complementar a resposta, e uma questão aberta que indaga qual a utilidade da Matemática na percepção do

participante. O segundo questionário é composto por seis questões de múltipla escolha, sendo que três delas solicitam justificativa para a resposta marcada, e três questões abertas dentre elas uma idêntica à questão do questionário diagnóstico visando verificar possíveis alterações na percepção dos estudantes sobre a importância da Matemática após participarem da estratégia de ensino.

As questões abertas e fechadas foram mescladas nos questionários seguindo a sugestão de Andrade (2010), pois ele afirma que a combinação de perguntas de múltipla escolha e perguntas abertas oferece maior número de informações e não dificulta a tabulação das respostas.

O diário de bordo da pesquisadora será mantido com anotações sobre o interesse, a participação dos estudantes, dúvidas e dificuldades apresentadas em cada aula realizada.

As produções dos participantes também servirão para coletar dados em relação à compreensão dos conteúdos abordados.

Os registros fotográficos durante a realização das atividades propostas serão usados com o intento de registrar a participação dos estudantes e a interação entre os integrantes do grupo durante a realização das atividades. As imagens divulgadas serão descaracterizadas, ofuscando a face e demais características que possam identificar os indivíduos, conforme previsto no Termo de assentimento livre e esclarecido (TALE) e no Termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE) a serem assinados pelos participantes e seus responsáveis, respectivamente. Os modelos utilizados constam nos apêndices C e D deste trabalho.

4.3 Metodologia de Análise de dados

Segundo Lüdke e André (1986):

Analisar os dados qualitativos significa “trabalhar” todo o material obtido durante a pesquisa, ou seja, os relatos de observação, as transcrições de entrevista, as análises de documentos e as demais informações disponíveis. A tarefa de análise implica, num primeiro momento, a organização de todo o material, dividindo-o em partes, relacionando essas partes e procurando identificar nele tendências e padrões relevantes. (Lüdke; André, 1986, p.45)

Os dados provenientes dos dois questionários e as observações registradas no diário de bordo serão minuciosamente analisados e comparados, a fim de avaliar a influência da

proposta em relação ao interesse dos estudantes e o impacto no processo de ensino e aprendizagem. Além disso, as produções dos participantes ao longo da pesquisa serão empregadas para verificar se de fato conseguiram compreender os conceitos abordados durante a proposta de ensino. O Quadro 1 descreve o método que será utilizado para organizar e interpretar os dados dos questionários e as informações do diário de bordo.

A análise das produções dos estudantes e das respostas obtidas nas questões subjetivas dos questionários será realizada utilizando técnica de análise de conteúdo. Minayo (2009) define esta técnica como:

Conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitem a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens. (Bardin, 1979, P. 42 apud Minayo, 2009, p.83)

Quadro 1— Organização dos instrumentos de coleta para análise

OBJETIVO	INSTRUMENTO	PROCEDIMENTO
Investigar o impacto da proposta no interesse dos estudantes.	Questionário diagnóstico (questões 2 e 3) e questionário 2 (questão 1).	Comparar por meio de dados estatísticos as respostas obtidas nas questões dos questionários diagnóstico e questionário 2.
	Diário de bordo	Verificar as anotações feitas em relação à participação dos estudantes em cada aula ministrada, identificando também se houveram oscilações de interesse no decorrer do processo.
Analisar aspectos específicos do processo de ensino e aprendizagem durante a	Questionário diagnóstico (questões 4, 6 e 8) e Questionário 2 (questões 3, 4 e 5).	Comparar utilizando dados estatísticos as respostas obtidas nas questões dos questionários diagnóstico e questionário 2.

aplicação da sequência didática.	Diário de bordo	Interpretar as anotações referentes às contribuições dos estudantes durante as discussões e realização das atividades, os questionamentos feitos por eles, resultados apresentados e dificuldades observadas.
Avaliar a proposta aplicada e propor adequações, caso seja necessário.	Questionário diagnóstico (questão 5) e Questionário 2 (questões 2, 6,7 e 8).	Avaliar a percepção dos estudantes sobre o nível de dificuldade das atividades propostas e coletar opinião sobre pontos positivos e sugestões para aprimoramento.
	Diário de bordo	Examinar os comentários dos estudantes durante a realização das atividades, destacando percepções e observações relevantes.

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Os dados provenientes das respostas dadas às questões objetivas dos questionários serão analisados de modo quantitativo com auxílio de gráficos estatísticos.

Após interpretar as informações advindas de cada instrumento, elas serão comparadas buscando compreender os resultados obtidos e responder a pergunta da pesquisa: O trabalho docente utilizando a modelagem matemática como estratégia de ensino desperta o interesse dos estudantes e promove impacto positivo no processo de ensino e aprendizagem?

CAPÍTULO 5

EXECUÇÃO DA PESQUISA, DISCUSSÃO, ANÁLISE DOS DADOS E RESULTADOS

Neste capítulo são fornecidas informações gerais sobre a execução das aulas e relatos de algumas situações específicas descritas no diário de bordo da pesquisadora durante a implementação das aulas planejadas, além da descrição dos dados coletados por meio dos questionários, análise e discussão dos resultados obtidos.

5.1 Contexto da Aplicação: Participantes e Período de Execução

A etapa da pesquisa que envolve observação participante durante condução da proposta de intervenção pedagógica foi realizada em uma instituição pública de ensino pertencente à Rede Estadual de Educação de Goiás, situada em uma região periférica da cidade de Aparecida de Goiânia. Os participantes deste estudo são estudantes matriculados em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio, onde os mesmos e seus responsáveis consentiram com a participação na pesquisa. A identificação da escola e dos participantes da pesquisa será preservada, conforme previsto no protocolo aprovado em julho de 2023 pelo comitê de ética em pesquisa da Universidade Federal de Goiás disponível no Anexo A.

O período de observação, segundo planejado no cronograma da pesquisa, teve a duração de dois meses, abrangendo os meses de Agosto e Setembro do ano de 2023. Essa fase foi executada utilizando duas aulas semanais ministradas às segundas-feiras, referentes aos componentes curriculares de Matemática e Tópicos de Ciências, de acordo com o que previamente definido juntamente com a coordenadora pedagógica responsável pela turma em questão. As aulas planejadas foram conduzidas pela autora da pesquisa.

5.2 Execução das Aulas: Diário de Bordo da Pesquisadora e Produções dos Participantes

No primeiro encontro com a turma a pesquisadora se apresentou, elucidou os objetivos da pesquisa e ressaltou a importância da participação dos estudantes. Além disso, entregou os documentos TALE (Termo de Assentimento Livre Esclarecido) e TCLE (Termo de

Consentimento Livre e Esclarecido) e esclareceu dúvidas sobre os mesmos. Os alunos foram orientados a levar os documentos para casa e preenchê-los após dialogar com seus responsáveis, expressando o consentimento ou recusa em participar. A professora regente da turma assumiu a responsabilidade de recolher os documentos preenchidos à medida que os alunos trouxessem de volta. O início das aulas da sequência didática foi agendado para a semana seguinte, na segunda-feira.

Na primeira aula, dia 07/08/2023, foi entregue o Questionário diagnóstico aos vinte e quatro alunos presentes que consentiram em participar da pesquisa. Após a conclusão do preenchimento dos questionários, iniciou-se a fase de **Percepção e Apreensão** por meio de uma aula dialogada com o objetivo identificar os conhecimentos prévios da turma sobre o assunto. Os estudantes demonstraram interesse e apresentaram curiosidade sobre os diferentes tipos de geração de energia, especialmente a eólica e a nuclear. Uma das participantes mencionou que seu avô possui placas solares na chácara onde mora. Essa participação levantou discussões sobre o custo de instalação desse tipo de sistema. Ao final da aula os alunos foram orientados a pesquisar sobre os temas abordados e a trazer talões de energia de suas residências na próxima semana.

O planejamento das aulas seguintes incluía uma roda de conversa, porém devido à grande quantidade de cadeiras vazias na sala de aula, decidiu-se manter os alunos em suas fileiras, convidando-os a ocupar os lugares mais à frente. Durante as discussões, com auxílio da exposição de slides, que contemplavam as respostas aos questionamentos dos estudantes feitos na semana anterior sobre os vários tipos de geração de energia, os estudantes mantiveram-se interessados e participativos.

Durante a fase de **Compreensão e Explicitação** referente ao primeiro modelo, que relaciona o consumo de energia e o valor da fatura, foi necessário ajustar o planejamento de algumas aulas para adequá-las à realidade da turma observada. Uma das alterações essenciais envolveu os talões utilizados, pois apenas três estudantes atenderam ao pedido de trazer os talões de suas residências. Isso demandou que a pesquisadora disponibilizasse talões para análise.

Além disso, ao longo das atividades foram percebidas dificuldades em relação à marcação de pontos no plano cartesiano e à análise dos dados dos talões de energia para o desenvolvimento do primeiro modelo proposto. Sendo assim, tornou-se necessário dedicar mais aulas do que inicialmente previsto para o estudo do modelo que relaciona o consumo de energia e o valor da fatura.

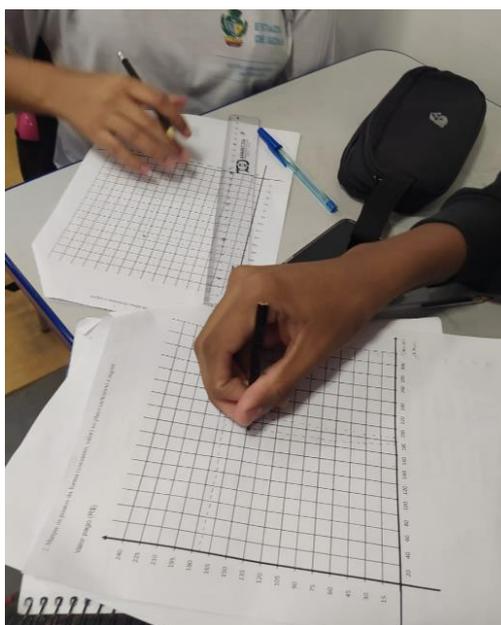
Na aula realizada no dia 21/08/2023 propôs-se que a partir da tabela com o histórico de faturas de doze meses da fatura de energia elétrica de uma residência (Tabela 5), os estudantes marcassem os pontos no plano cartesiano para observar o comportamento dos dados, conforme ilustra a Figura 10.

Tabela 5 — Histórico de faturas de energia elétrica de uma residência

Referência	Consumo(kWh)	Vencimento	Tipo	Valor
8/2023	194.0000	24/08/2023	FATURA	169.52
7/2023	183.0000	24/07/2023	FATURA	148.72
6/2023	178.0000	24/06/2023	FATURA	152.43
5/2023	212.0000	24/05/2023	FATURA	191.97
4/2023	226.0000	24/04/2023	FATURA	203.30
3/2023	248.0000	24/03/2023	FATURA	223.53
2/2023	222.0000	24/02/2023	FATURA	193.54
1/2023	227.0000	24/01/2023	FATURA	197.86
12/2022	268.0000	24/12/2022	FATURA	239.31
11/2022	234.0000	24/11/2022	FATURA	205.14
10/2022	277.0000	24/10/2022	FATURA	229.30
9/2022	181.0000	24/09/2022	FATURA	151.74

Fonte: Equatorial energia, 2023.

Figura 10 — Participantes realizando atividade no dia 21/08/2023

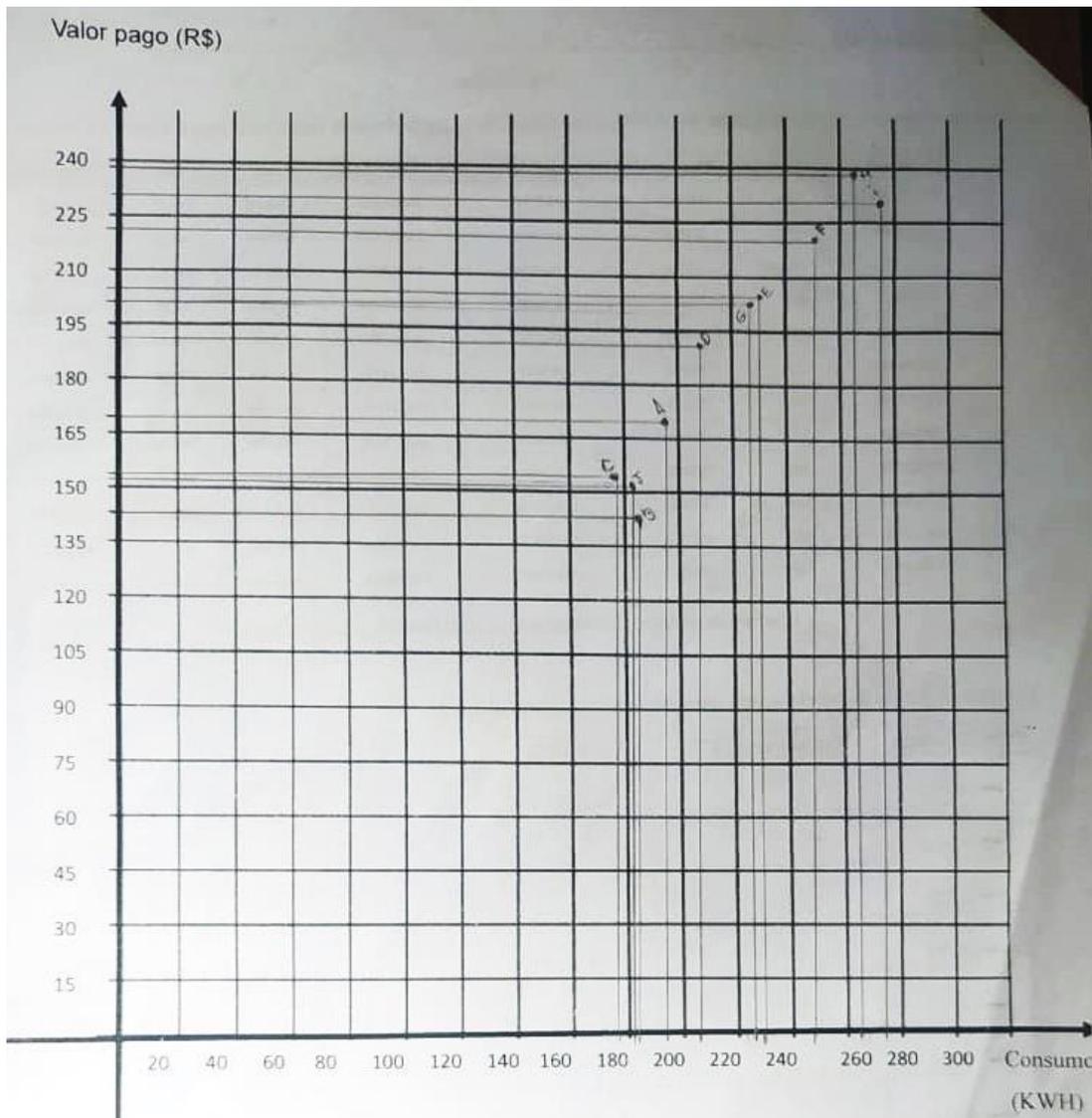


Fonte: Acervo da pesquisa

Durante a realização da atividade vários alunos apresentaram dúvidas. Inicialmente a professora pesquisadora esclareceu as dúvidas individualmente. No entanto, devido ao grande número de estudantes com a mesma dúvida, optou-se por lembrar toda a turma com uma breve explicação no quadro sobre a marcação de pontos no plano cartesiano.

Foram entregues pelos participantes vinte e seis atividades, das quais oito não continham a marcação dos pontos, em nove a marcação foi feita forma incorreta e doze apresentaram a marcação correta de todos ou da maioria dos pontos. Um erro comum cometido foi marcar todos ou alguns pontos invertendo as informações referentes aos eixos consumo e valor pago. Os estudantes que executaram corretamente a marcação dos pontos perceberam que o gráfico se aproxima de uma reta, como ilustrado na Figura 11.

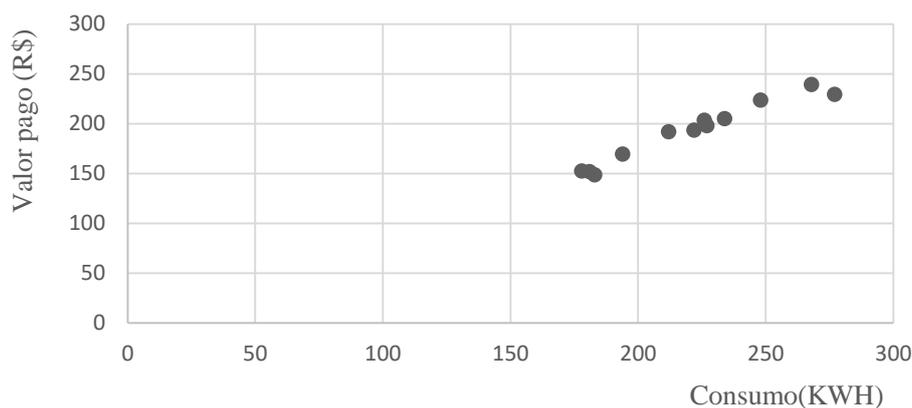
Figura 11— Atividade realizada dia 21/08/2023



Fonte: Acervo da pesquisa.

Na aula seguinte procedeu-se com a correção comentada das atividades usando slides, enfatizando os tópicos nos quais os estudantes tiveram mais dificuldades, buscando esclarecer as dúvidas. Ao observar o gráfico correto (Gráfico 3) apresentado durante a correção, discutiu-se sobre de qual formato o gráfico se aproxima ao fazer a ligação dos pontos.

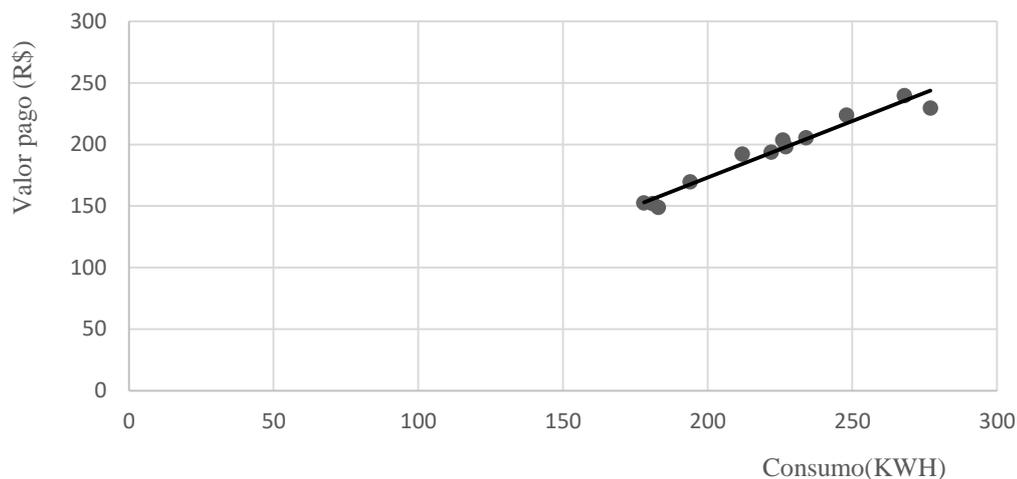
Gráfico 3 — Gráfico de dispersão que relaciona o consumo e o valor pago na conta de energia elétrica



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

A maioria dos estudantes respondeu que se aproxima de uma reta. Nesse contexto, a professora comentou sobre o conceito de ajuste de curvas e apresentou a linha de tendência traçada pelo software Excel (Gráfico 4), confirmando a resposta dada por eles.

Gráfico 4 — Linha de tendência que relaciona o consumo e o valor pago na conta de energia elétrica



Fonte: Elaborado pela autora(2024).

Devido à dificuldade na marcação de pontos no plano cartesiano identificada na turma, optou-se em vez de utilizar o histórico para modelar a função que relaciona o consumo e o valor pago na conta de energia elétrica, analisar apenas uma conta e verificar o que é

cobrado. Assim propôs-se que em grupos de até três integrantes, os alunos observassem a conta, identificassem e anotassem todas as cobranças para responder as questões compostas pelos itens a seguir:

- ✓ Observe o que é cobrado na conta. Há algum valor fixo?
- ✓ Identifique as variáveis envolvidas na situação;
- ✓ Lembre-se da forma geral da função afim ($y = a.x + b$). Você pode mudar as letras se quiser;
- ✓ Depois de escrever a forma geral da função, teste-a com os dados do talão pra verificar se está correta.

A Figura 12 mostra dois grupos durante a realização da atividade descrita.

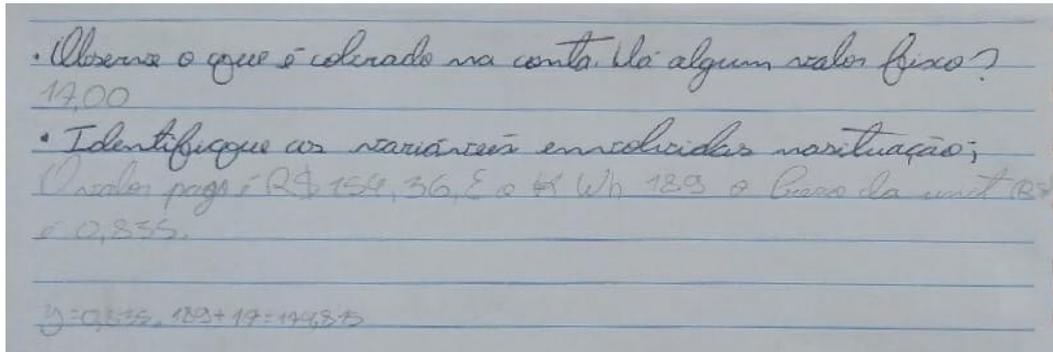
Figura 12 — Participantes realizando atividade no dia 28/08/2023



Fonte: Acervo da pesquisa.

Ao analisar as atividades entregues pelos grupos, constataram-se dificuldades na interpretação dos dados dos talões. Um erro cometido por vários grupos foi identificar as porcentagens como se fossem valores a serem pagos, conforme evidenciado pela Figura 13. O participante indicou 17 como valor a ser pago, mas ele se refere à porcentagem de ICMS (Imposto sobre circulação de mercadorias e serviços).

Figura 13 — Atividade de um grupo participante da pesquisa entregue em 28/08/2023



Fonte: Acervo da pesquisa.

Após o esclarecimento das dúvidas sugeriu-se que os estudantes se reunissem novamente com o grupo para refazer a atividade com o intuito corrigir os erros cometidos.

Os resultados obtidos após os grupos refazerem as atividades foram compartilhados pelos grupos no quadro (Figura 14).

Figura 14 — Exposição das respostas obtidas na atividade dia 28/08/2023



Fonte: Acervo da pesquisa.

Esperava-se discutir os resultados na mesma aula, porém o tempo foi insuficiente. Então, a pesquisadora organizou os dados como mostra a Figura 15 e o apresentou nos slides para facilitar a discussão na aula seguinte.

Figura 15 — Dados coletados pelos grupos nos talões de energia elétrica

Referência	Tarifa unitária (R\$)	Impostos (R\$)	Preço unitário com tributos (R\$)	Iluminação pública (R\$)	Consumo (kwh)	Valor da conta (R\$)	Função do grupo
08/22	0,63689	35,63	0,80661	8,80	210	178,18	$0,806 \cdot 178,18 + 8,80$
11/22	0,65713	40,24	0,83685	8,80	224	196,25	Não terminou
01/23	0,67099	33,66	0,83287	8,80	208	182,03	$0,82 \cdot 208 + 8,80$
02/23	0,67099	33,20	0,83219	8,80	206	180,23	$0,83219 \cdot 206 + 8,80$
03/23	0,67099	40,91	0,86587	8,80	210	190,63	$0,86587 \cdot 210 + 8,80$
05/23	0,67099	34,35	0,86402	5,65	178	159,44	$159,44 \cdot 0,864 + 17$
06/23	0,670990	30,25	0,824586	5,65	197	168,09	$0,824586 \cdot 197 + 5,65$
07/23	0,670990	31,02	0,835099	5,65	189	154,36	$0,835 \cdot 189 + 17$

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

No dia 04/09/2023 utilizou-se a projeção dos slides para continuar a discussão sobre o cálculo do valor da conta de energia elétrica a partir do consumo da residência. Após as contribuições dos estudantes mediadas pela pesquisadora, chegou-se ao modelo da função que relaciona o consumo de energia de uma residência e o valor pago na conta mensalmente (Figura16).

Figura 16 — Modelo que relaciona o valor da conta e consumo de energia elétrica

$$V = 0,80 \cdot C + 8,80$$

Onde C é o consumo em KWH e V o valor da conta em reais

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

A partir do modelo criado, deu-se início à fase de **Significação e Expressão**. Os grupos o testaram utilizando os dados dos talões que já haviam analisado e julgaram que o modelo representa bem a situação, pois consideram o erro pequeno. O Exemplo 5. 1 apresenta o processo que eles utilizaram para avaliar a eficácia do modelo.

Exemplo 5.1. A partir do modelo $V = 0,80 \cdot C + 8,80$ que relaciona consumo em KWH de uma residência com o valor V, em reais da conta de energia elétrica, determine:

- a) O valor a ser pago em uma residência com consumo mensal de 197 kwh.
- b) O erro do modelo a partir da conta de referência 6/2023, cujo consumo foi de 197 KWH e o valor da fatura foi R\$168,09.

Solução: a) Dado: $C = 197$ KWH

Substituindo o consumo no modelo $V = 0,80 \cdot C + 8,80$ segue que:

$$V = 0,80 \cdot 197 + 8,80 = 157,60 + 8,80 = 166,40$$

Portanto, o valor da conta de energia elétrica, obtido a partir do modelo dado é R\$166,40.

Solução: b) O valor da fatura a partir do modelo foi calculado no item a. Para determinar o erro (E) deve-se calcular a diferença entre o valor obtido pelo modelo e o valor real da fatura.

Portanto:

$$E = 168,09 - 166,40 = 1,69$$

Conclui-se que o erro obtido ao usar o modelo para calcular o valor da conta de referência 6/2023 foi de R\$1,69.

Durante a análise do erro do modelo os participantes examinaram os dados de cada um dos oito talões de energia previamente analisados pelos grupos em aulas anteriores (tabela 3). Na aula seguinte os participantes aplicaram o modelo para determinar o valor a ser pago na fatura considerando diferentes níveis de consumo não abrangidos nas contas anteriormente observadas por eles.

No dia 11/09/2023 iniciou-se a fase de **Compreensão e Explicitação** referente ao segundo modelo, que relaciona o consumo de energia mensal ao valor do projeto de instalação de energia solar fotovoltaica. Inicialmente os participantes receberam o orçamento impresso fornecido por uma empresa especializada no setor (Figura 17) para análise e coleta de dados.

A permissão da empresa para divulgação do nome e dos dados fornecidos, para a utilização em sala de aula durante as aulas propostas e na divulgação dos resultados da pesquisa foi devidamente submetida e aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Goiás (CEP- UFG).

Figura 17 — Orçamento da instalação do sistema de energia solar fotovoltaica

					Nome da Empresa: Resoluti Energia			
					Cotações feitas no dia 28/08/2023			
					Todos os kits foram orçados na Adias Solar			
Tecnologia	Potência do sistema	Consumo médio mensal	Inversor	Módulo	Quantidade de módulos	Espaço ocupado	Valor do Kit	Valor do total do Projeto
INVERSOR TRADICIONAL	1,68 kWp	210 kWh	GROWATT	RENESOLA 560W	3	10 m ²	R\$ 4.106,14	R\$ 6.181,98
MICRO INVERSOR	1,68 kWp	210 kWh	HOYMILES	RENESOLA 560W	3	10 m ²	R\$ 4.212,98	R\$ 6.324,21
INVERSOR TRADICIONAL	2,80 kWp	350 kWh	GROWATT	RENESOLA 560W	5	16 m ²	R\$ 5.870,01	R\$ 9.007,25
MICRO INVERSOR	2,80 kWp	350 kWh	HOYMILES	RENESOLA 560W	5	16 m ²	R\$ 7.599,50	R\$ 11.309,63
INVERSOR TRADICIONAL	3,36 kWp	420 kWh	GROWATT	RENESOLA 560W	6	19 m ²	R\$ 6.590,66	R\$ 10.205,18
MICRO INVERSOR	3,36 kWp	420 kWh	HOYMILES	RENESOLA 560W	6	19 m ²	R\$ 8.215,66	R\$ 12.368,46
INVERSOR TRADICIONAL	4,48 kWp	560 kWh	GROWATT	RENESOLA 560W	8	26 m ²	R\$ 8.653,57	R\$ 13.428,55
MICRO INVERSOR	4,48 kWp	560 kWh	HOYMILES	RENESOLA 560W	8	26 m ²	R\$ 9.466,54	R\$ 14.510,81
INVERSOR TRADICIONAL	5,04 kWp	622 kWh	GROWATT	RENESOLA 560W	9	29 m ²	R\$ 10.605,25	R\$ 16.265,28
MICRO INVERSOR	5,04 kWp	622 kWh	HOYMILES	RENESOLA 560W	9	29 m ²	R\$ 12.269,34	R\$ 18.480,60
INVERSOR TRADICIONAL	5,60 kWp	691 kWh	GROWATT	RENESOLA 560W	10	32 m ²	R\$ 10.916,08	R\$ 16.917,63
MICRO INVERSOR	5,60 kWp	691 kWh	HOYMILES	RENESOLA 560W	10	32 m ²	R\$ 12.916,63	R\$ 19.580,86
INVERSOR TRADICIONAL	6,16 kWp	760 kWh	GROWATT	RENESOLA 560W	11	36 m ²	R\$ 11.559,70	R\$ 18.013,01
MICRO INVERSOR	6,16 kWp	760 kWh	HOYMILES	RENESOLA 560W	11	36 m ²	R\$ 13.520,22	R\$ 20.622,95
INVERSOR TRADICIONAL	8,40 kWp	1.037 kWh	GROWATT	RENESOLA 560W	15	49 m ²	R\$ 14.592,61	R\$ 23.004,81
MICRO INVERSOR	8,40 kWp	1.037 kWh	HOYMILES	RENESOLA 560W	15	49 m ²	R\$ 18.604,20	R\$ 28.345,24

Fonte: Resoluti Energia.

Os alunos foram orientados a analisar o orçamento e identificar quais variáveis necessárias para criar o modelo proposto. A maioria rapidamente concluiu que as variáveis são o consumo médio mensal e o valor do projeto. Com base em informações fornecidas pela empresa à pesquisadora, o sistema com micro inversor é mais vantajoso por não apresentar necessidade de manutenção constante, sendo assim o valor utilizado para análise foi com este tipo de inversor. Os participantes foram instruídos a construir uma tabela em seus cadernos com as colunas referentes ao consumo médio mensal e ao custo do projeto com micro inversor.

No mesmo dia houve uma breve discussão sobre a taxa de disponibilidade paga à fornecedora de energia elétrica pela conexão do sistema à rede, tema este já abordado na primeira fase da sequência didática. Os alunos também foram questionados sobre o modelo criado em aulas anteriores para calcular o valor da fatura de energia a partir de um consumo fixo.

Por fim cada grupo de estudantes foi encarregado de analisar um consumo médio mensal a partir das seguintes questões:

- Qual é o valor pago mensalmente por este consumo com base no modelo desenvolvido que relaciona o consumo e o valor da fatura?
- Qual seria a economia mensal ao instalar o sistema de energia solar fotovoltaica?
- Considerando a economia mensal, em quanto tempo o investimento na instalação do sistema de energia solar fotovoltaica seria recuperado?

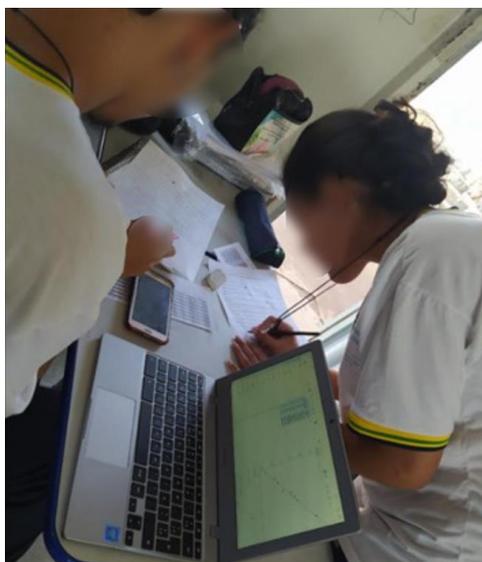
Ao observar os grupos realizando a atividade notou-se que vários deles calcularam o tempo de investimento por tentativa. Após a conclusão da atividade, a professora

pesquisadora comentou com a turma que poderiam ter obtido o resultado dividindo o valor do investimento pela economia mensal. No entanto, essa sugestão não foi bem recebida pelos estudantes, eles afirmaram que o método que utilizaram é mais fácil.

Na aula seguinte, em 18/09/2023, a atividade proposta foi conduzida utilizando os Cromebooks do laboratório móvel de informática disponível na escola. Devido a problemas de conexão com a internet, foi necessário relocar os estudantes para outra sala a fim de melhorar a qualidade da conexão. Essa mudança já estava planejada, pois a pesquisadora havia realizado testes de conexão antes de iniciar a execução da sequência didática com a turma. A transferência dos participantes para outra sala ocorreu de forma organizada e rápida, antes do início da aula.

Os participantes receberam instruções para inserir no software Geogebra a tabela construída na aula anterior, que relaciona o consumo de energia elétrica e o valor de instalação do projeto de energia solar fotovoltaica. A atividade foi realizada em duplas, cada uma delas recebeu impresso um roteiro indicando como fazer a análise bivariada e ajustar as curvas que relacionam as duas variáveis em questão. A Figura 18 mostra uma dupla de realizando a atividade proposta.

Figura 18 — Participantes durante a atividade realizada dia 18/09/2023



Fonte: Acervo da pesquisa.

Em seguida, os estudantes foram orientados a observar qual curva se ajustava melhor ao conjunto de pontos correspondentes à situação. Em seguida, cada grupo selecionou a curva que melhor representa a relação entre o consumo e o valor do projeto. Todos os grupos

concordaram que o melhor ajuste foi o linear. A regressão linear realizada pelo Geogebra resultou na equação descrita na figura 19.

Figura 19 — Relação entre o consumo mensal e o custo do projeto de instalação de energia solar fotovoltaica

$$Y = 25,9822 \cdot x + 1340,6635$$

Onde **Y** é o valor do projeto em reais e **x** é o consumo em KWH.

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Após obter a relação entre o consumo mensal e o custo do projeto de instalação de energia solar fotovoltaica, prosseguiu-se com a validação do modelo criado, iniciando assim a fase **Significação e Expressão**. A verificação da validade da equação foi realizada substituindo os valores de consumo presentes no orçamento e analisando se os valores obtidos por meio dela se aproximavam dos valores reais. Os estudantes constataram que o erro do modelo foi pequeno e, portanto, o considerou aceitável para representar a situação em questão.

Posteriormente, os alunos utilizaram esse modelo para determinar o valor do projeto para o consumo médio de suas residências, bem o tempo necessário para recuperar o investimento inicial. Os participantes que não possuíam os talões de suas residências e não tinham o conhecimento do consumo médio utilizaram valores aleatórios para efetuar os cálculos.

Durante a execução das atividades desse dia, vários grupos enfrentaram dificuldades ao selecionar a tabela inserida para gerar as curvas correspondentes. Devido à falta de um mouse, alguns participantes não conseguiram completar essa etapa por conta própria, tornando necessário o auxílio da pesquisadora em diversos grupos. Como muitos grupos apresentavam essa dificuldade, o atendimento estava demorando. Então, ao finalizar essa etapa proposta, um estudante com mais facilidade se ofereceu para auxiliar no esclarecimento das dúvidas, o que acelerou significativamente o processo, possibilitando que a maioria dos grupos conseguisse concluir o que foi planejado para essas duas aulas.

No último momento com a turma, em 25/09/2023, a aula começou com a seguinte indagação: Será que compensa colocar energia solar em casa? As participações foram mediadas pela pesquisadora, que aproveitou a oportunidade pra relembrar os resultados obtidos em aulas anteriores.

Após as discussões iniciais sobre essa questão, procedeu-se com uma aula expositiva dialogada, utilizando slides que incluíam a correção da atividade realizada na semana anterior feita com auxílio do Geogebra. Durante a correção foram considerados consumos de 210 kwh e 300kwh para determinar o tempo de retorno do investimento com a instalação do sistema de energia solar fotovoltaica para esses consumos específicos. Os resultados obtidos foram 43,08 meses e 41,75 meses, respectivamente.

Em seguida, foi feita uma breve revisão sobre os conceitos e fórmulas de juros compostos. Também foi analisado se seria financeiramente vantajoso instalar o sistema de energia solar, considerando a taxa da poupança de 0,5% a.m, o consumo de 210 kwh e os tempos de três e cinco anos. A conclusão foi que considerando o tempo de três anos não é vantajoso, mas analisando o tempo de cinco anos constatou-se que compensa instalar o sistema.

Um dos estudantes pontuou que a poupança não é um bom tipo de investimento e sugeriu aplicar o dinheiro no CDB. A professora pesquisadora explicou que optou por utilizar a poupança por ser um tipo mais conhecido pela maioria das pessoas, mas destacou que as análises sobre a viabilidade financeira da instalação do sistema de energia solar pode ser feita utilizando a taxa de juro do CDB mencionado por ele ou de qualquer outro tipo de investimento ao qual a pessoa interessada tenha acesso. A pesquisadora também enfatizou que o resultado da viabilidade será alterado conforme a mudança dos valores escolhidos para as variáveis de consumo mensal de energia, tempo e taxa de juros.

Ao final da aula foi distribuído aos participantes o Questionário 2, e dadas orientações para respondê-lo e entregá-lo à professora titular da turma, que ficou encarregada de coletá-los e devolvê-los à pesquisadora posteriormente.

Quanto à participação e ao interesse dos estudantes durante as aulas desenvolvidas, dos trinta e três matriculados, vinte e sete consentiram em participar da pesquisa. Foi perceptível o interesse da turma pelos questionamentos e curiosidades levantados por eles no decorrer do processo. Demonstraram entusiasmo especial na fase de **Percepção e Apreensão** e na fase de **Significação e Expressão** referente ao Modelo 2, quando utilizaram os crome books.

No início da fase de **Compreensão e Explicitação**, durante o estudo do primeiro modelo, devido às dificuldades com o conteúdo matemático necessário para o desenvolvimento das primeiras atividades propostas, alguns participantes se desmotivaram. No entanto, a maioria persistiu buscando compreender e realizar o que se propunha.

5.3 Questionários

Esta seção aborda a apresentação dos resultados obtidos por meio dos dois questionários aplicados durante o estudo. O primeiro questionário, denominado diagnóstico, foi respondido antes da execução das aulas, com o intuito de avaliar o interesse dos participantes pelas aulas de Matemática, bem como suas percepções em relação ao conhecimento prévio sobre planilhas, funções e Matemática financeira. Já o segundo questionário, aplicado após a conclusão das aulas da sequência didática, teve como objetivo identificar a opinião dos estudantes em relação ao interesse despertado pela proposta aplicada, as dificuldades enfrentadas e a compreensão dos conteúdos abordados.

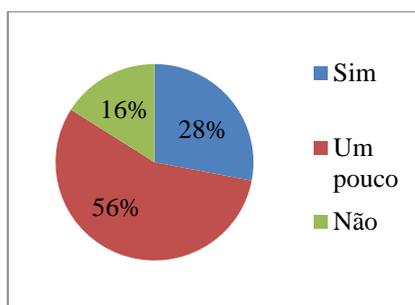
No total, vinte e cinco participantes responderam ao questionário diagnóstico com idades predominantemente entre 15 e 16 anos. Havia sete participantes fora dessa faixa etária: um com 14 anos e seis com idades entre 17 e 19 anos. O questionário 2 foi respondido por vinte e três participantes.

As respostas do Questionário diagnóstico e do Questionário 2 foram comparadas utilizando o protocolo descrito no Quadro 1, apresentado no Capítulo 4. A descrição dos resultados obtidos será dividida em três categorias: interesse dos participantes, processo de ensino- aprendizagem e avaliação da proposta desenvolvida.

5.3.1 Interesse dos Participantes

No questionário diagnóstico constatou-se que 28% dos participantes afirmaram gostar de Matemática, 56% responderam que gostam um pouco e 16% afirmaram não gostar, conforme apresentado no Gráfico 5.

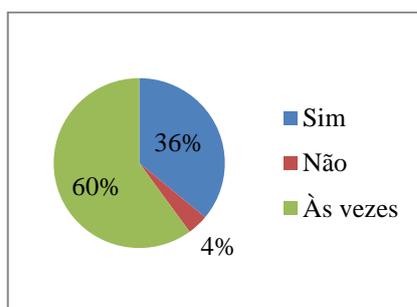
Gráfico 5 — Distribuição das respostas dos participantes no Questionário diagnóstico em relação ao seu gosto pela Matemática (questão 2)



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Em relação à questão: “Você se interessa pelas aulas de Matemática?”, 36% afirmaram que sim, 60% responderam que se interessam às vezes e 4% responderam negativamente, como explicitado pelo Gráfico 6.

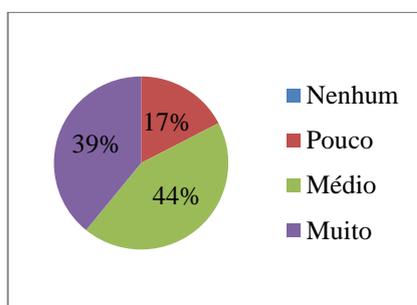
Gráfico 6 — Distribuição das respostas dos participantes em relação ao interesse pelas aulas de Matemática (questão 3 do Questionário diagnóstico)



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

No Questionário 2, quanto ao nível de interesse pela proposta aplicada, 17% indicaram pouco interesse, 44% interesse médio e 39% muito interesse, como mostra o Gráfico 7.

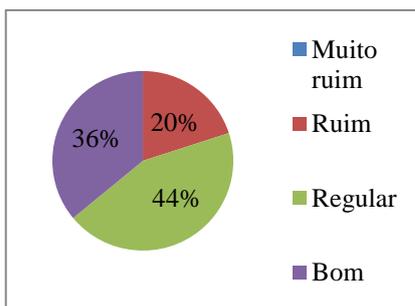
Gráfico 7 — Interesse pela proposta aplicada (questão 1 do Questionário 2)



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

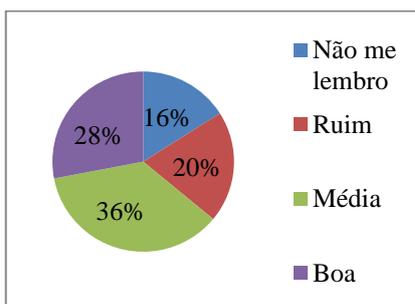
5.3.2 Processo de Ensino-Aprendizagem

Sobre seu próprio desempenho em Matemática durante o ano de 2023 até o momento que responderam o questionário diagnóstico, 20% dos participantes classificaram como ruim, 44% afirmaram ser regular e 36% consideraram bom, conforme ilustrado pelo Gráfico 8.

Gráfico 8 — Classificação do desempenho em a Matemática (questão 4 do questionário diagnóstico)

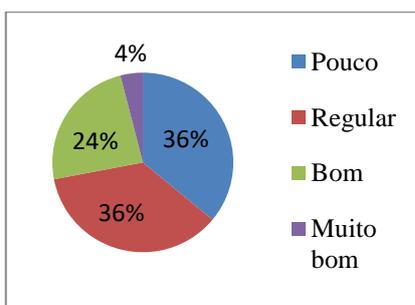
Fonte: Elaborado pela autora(2024).

Em relação à compreensão do conteúdo de funções afins, 16% afirmaram não lembrar, 20% identificaram como ruim, 36% como média e 28% como boa. O Gráfico 9 apresenta a distribuição dos dados.

Gráfico 9 — Compreensão do conteúdo de funções afins (questão 6 do Questionário diagnóstico)

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

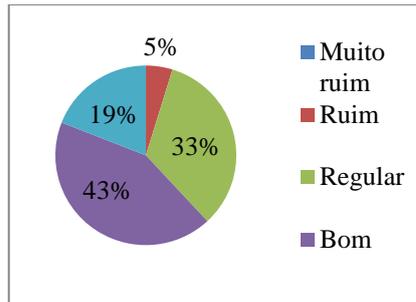
Quanto ao grau de compreensão sobre Matemática Financeira, 36% classificaram como pouco, 36% como regular, 24% como bom e 4% como muito bom, como indicado no Gráfico 10.

Gráfico 10 — Grau de conhecimento sobre matemática financeira (questão 8 do Questionário diagnóstico)

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

No que diz respeito ao desempenho nas atividades propostas durante a sequência didática, 5% dos participantes classificaram como ruim, 33% como regular, 43% como bom e 19% afirmaram que foi muito bom, conforme expresso pelo gráfico de setores que representa essa distribuição (Gráfico 11).

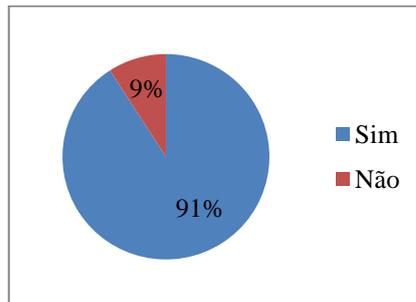
Gráfico 11 — Distribuição das respostas dos participantes no Questionário 2 em relação ao grau ao desempenho nas atividades propostas (questão 3)



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Além disso, 91% dos estudantes afirmaram que as atividades desenvolvidas auxiliaram em sua compreensão sobre funções (Gráfico 12) e 86% identificaram que contribuíram para complementar o conhecimento de Matemática Financeira (Gráfico 13).

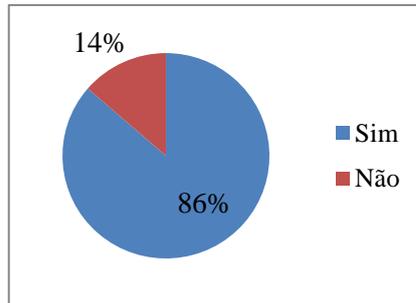
Gráfico 12 — Distribuição das respostas dos participantes no Questionário 2 em relação à contribuição da proposta para a compreensão sobre funções (questão 4)



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Gráfico 13 — Contribuição da proposta para compreensão de matemática financeira (questão 5 do Questionário

2

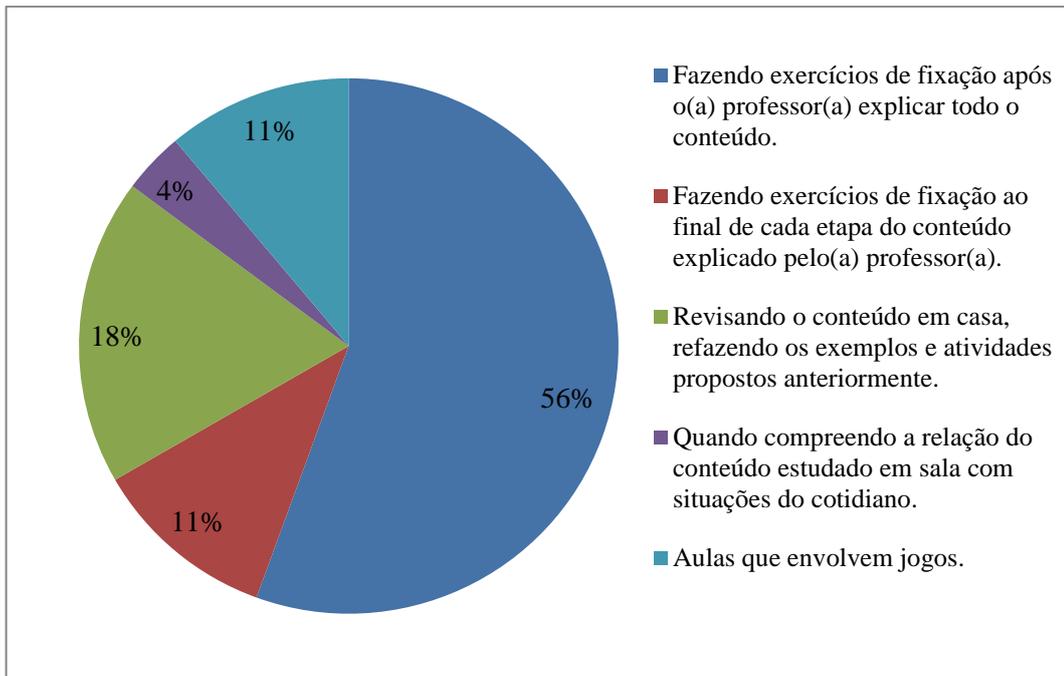


Fonte: Elaborado pela autora (2024).

5.3.3 Avaliação da proposta desenvolvida

Diante do questionamento sobre qual método consideram mais eficiente para seu aprendizado em Matemática, 85% dos participantes optaram por opções relacionadas ao ensino tradicional, 11% afirmaram preferir o uso de jogos e apenas 4% marcaram a opção “quando compreendo a relação dos conteúdos estudados com o cotidiano”. O Gráfico 14 apresenta a distribuição das respostas dadas.

Gráfico 14 — Preferência por metodologias de ensino da Matemática (questão 5 do Questionário diagnóstico)

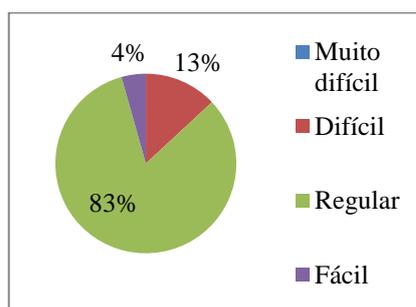


Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Sobre o caráter interdisciplinar da proposta, observou-se que dezesseis estudantes afirmaram ter percebido a relação da Matemática com outras áreas do conhecimento, mas apenas nove deles as identificaram explicitamente. As áreas mencionadas foram Ciências, Matemática Financeira, Física, Geografia e Tecnologia.

Quanto ao grau de dificuldade das atividades 13% classificaram como difícil, enquanto 83% avaliaram como regular e 4% consideraram fácil, como mostra o Gráfico 15.

Gráfico 15 — Grau de dificuldade das atividades propostas (segunda questão do Questionário 2)



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Destacaram-se como principais obstáculos durante a realização das atividades: dificuldades relacionadas ao conteúdo de funções, apontadas por três participantes, e dificuldades na execução dos cálculos mencionados por oito. Quatro participantes afirmaram não terem enfrentado dificuldades e as demais repostas não descreveram dificuldades pontuais.

Em relação aos pontos positivos da sequência didática, observou-se uma variedade de percepções. Um participante afirmou não ter identificado pontos positivos, três destacaram o conhecimento adquirido sobre energia. Um participante enfatizou a relação da Matemática com o cotidiano, oito destacaram a aprendizagem como ponto positivo e dois citaram a metodologia utilizada durante as aulas.

As respostas para a questão sobre a utilidade da Matemática revelam similaridades entre os dois questionários. No Questionário diagnóstico os participantes identificaram utilidade da Matemática para o cotidiano, aprendizagem e trabalho. No Questionário 2 reiteraram sua utilidade para o cotidiano mas deram ênfase em aplicações relacionadas à finanças, além de mencionar sua importância para a aprendizagem. Em ambos os questionários, dois participantes afirmaram não encontrar utilidade para essa disciplina.

5.4 Discussão e Análise dos dados

Os dados obtidos durante a fase de observação participante levantaram reflexões sobre o impacto da metodologia empregada no interesse dos estudantes e no processo de ensino e aprendizagem. A análise das aulas ministradas e dos resultados dos dois questionários aplicados revela uma variedade de percepções e avaliações dos participantes em relação à proposta desenvolvida.

Tanto no diário de bordo da pesquisadora quanto nos dados coletados pelos questionários ficou evidenciado que os participantes demonstraram níveis de interesse variáveis ao longo da implementação da proposta.

A desmotivação por parte de alguns estudantes ao utilizar a Modelação Matemática como ferramenta pedagógica é prevista por Bassanezi (2021), que apresenta duas possíveis causas do desinteresse: a dificuldade em se tornarem protagonistas do processo de ensino e aprendizagem e o fato de que talvez nem todos se interessem pelo tema escolhido. Entretanto, na proposta em questão o tema foi bem aceito pela turma. As principais dificuldades surgiram nas etapas destinadas à elaboração e análise dos modelos matemáticos. Em alguns momentos os estudantes não conseguiram realizar sozinhos o que lhes foi proposto, tornando necessário o auxílio da professora pesquisadora.

A mudança na dinâmica tradicional das aulas, o papel ativo dos estudantes na investigação, apresentação de ideias, descoberta de resultados e a possibilidade do trabalho interdisciplinar, como destacado por Meyer (2021) para o uso da Modelagem Matemática, foram contemplados na proposta aplicada.

Os desafios previstos por Bassanezi (2001) em relação à adequação do tempo e à necessidade de dedicação de mais tempo ao planejamento das atividades foram enfrentados pela pesquisadora durante o estudo. Em alguns momentos percebeu-se a necessidade de replanejamento para adequar a proposta à realidade observada.

Em relação ao processo de ensino e aprendizagem, constatou-se um impacto positivo. Embora alguns participantes tenham expressado preferência por métodos de ensino mais tradicionais, a maioria reconheceu os benefícios das atividades desenvolvidas, especialmente no que diz respeito à compreensão dos conteúdos matemáticos abordados e à aplicação prática desses conhecimentos no cotidiano e em outras áreas do conhecimento.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As propostas curriculares da BNCC e do DCGOEM têm como objetivo o desenvolvimento de competências em educação matemática que habilitem os alunos a interpretar e resolver problemas em diversos contextos sejam eles cotidianos ou interdisciplinares. Esta formação é fundamental para a compreensão e enfrentamento dos desafios do mundo contemporâneo, incentivando os alunos a tomar decisões éticas e socialmente responsáveis.

Neste cenário, é importante que os alunos construam modelos e argumentações consistentes, avaliando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas. Para isso, devem ser capazes de utilizar diferentes registros de representação matemática de forma flexível e precisa, empregando formas algébricas, geométricas, estatísticas e computacionais.

A pesquisa demonstrou que a Modelagem Matemática como metodologia de ensino está alinhada com as competências propostas pelos documentos curriculares. Ela oferece uma abordagem que favorece o interesse dos estudantes e promove uma aprendizagem mais contextualizada e significativa. A investigação em torno da questão norteadora permitiu uma conexão entre a teoria estudada e a prática vivenciada em sala de aula.

Os resultados indicaram que, embora a implementação da Modelagem Matemática possa apresentar desafios, como o interesse dos estudantes e a autonomia na aprendizagem, ela pode proporcionar uma experiência de ensino mais envolvente e interdisciplinar. Além disso, os participantes destacaram o impacto positivo no interesse e compreensão dos conteúdos matemáticos.

O estudo ressaltou a importância de uma reflexão contínua sobre o processo de Modelagem Matemática em sala de aula, visando realizar as adaptações necessárias para alcançar os objetivos propostos. Resultados parciais da pesquisa foram apresentados em dois eventos acadêmicos: em uma seção técnica no VII Seminário Pesquisa e Pós Graduação do IME/ UFG durante a XXX semana do IME e no formato de pôster no 20º Congresso de Pesquisa, Ensino e Extensão - CONPEEX.

Como produto educacional foi elaborado um manual pedagógico, publicado na plataforma Educapes, destinado aos professores interessados em implementar a proposta em suas aulas. O manual contém um roteiro revisado das aulas e os slides sugeridos como

recursos pedagógicos. O link de acesso ao material consta no Apêndice E. Também pretende-se submeter um artigo sobre a experiência prática de ensino vivenciada pela autora à uma revista especializada.

A pesquisa desenvolvida e os materiais produzidos podem inspirar pesquisadores, professores e demais interessados pelos temas abordados e suscitar novos estudos e aprofundamentos em relação ao que foi realizado.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Maria Margarida de. **Introdução à metodologia do trabalho científico: elaboração de trabalhos na graduação**. 10. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

ASSIS, Luciana Mafalda Elias de; MALAVAZI, Mazílio Coronel; PETRY, Polyanna Possani da Costa; ASSIS, Raul Abreu de; PAZIM, Rubens. **Projetos e Modelagem Matemática no Ensino Superior**. 1. Ed. Belém: Rfb, 2020.
Disponível em DOI: [10.46898/rfb.9786599175213](https://doi.org/10.46898/rfb.9786599175213)

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 4 ed., 2ª reimpressão. São Paulo: Contexto, 2021.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Modelagem matemática: teoria e prática**. São Paulo: Contexto, 2015.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no ensino**. 5 ed., 5ª reimpressão. São Paulo: Contexto, 2021.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais**. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.2, n.2, p.7-32. Florianópolis, jul. 2009. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/37939/28967>. Acesso em 16/10/2023.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem na educação matemática e na ciência**. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

BRASIL. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/go/goiania/panorama> e <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/go/aparecida-de-goiania/pesquisa/22/28120> Acesso em: 15/01/2024.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). **Inep 80 anos**. Disponível em: <http://inep80anos.inep.gov.br/inep80anos/futuro/novas-competencias-da-base-nacional-comum-curricular-bncc/79>. Acesso em: 06/11/2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf Acesso em 09/05/2022.

GOIÁS. Secretaria de Estado da Educação. **Documento Curricular para GOIÁS – Ampliado**. Goiás: SEDUC, 2019. Disponível em: <https://site.educacao.go.gov.br/files/documentos/PEDAGOGICO/Vol%20III%20Anos%20Finais.pdf>. Acesso em: 17/04/2022.

GOIÁS. Secretaria de Estado da Educação. **Documento Curricular para Goiás: etapa Ensino Médio.** Goiás: SEDUC, 2021. Disponível em: <https://site.educacao.go.gov.br/files/documentos/PEDAGOGICO/DCGOEM%202021.pdf> Acesso em: 12/05/2022.

GOIÁS. Secretaria de Estado da Educação. **Documento Curricular para Goiás: etapa Ensino Médio, formação geral básica, bimestralização.** SEDUC, 2021. Disponível em: <https://site.educacao.go.gov.br/files/documentos/PEDAGOGICO/Bimestralizacao%20Formacao%20Geral%20Basica%20DC%20GOEM.pdf> . Acesso em 11/05/2022.

GONÇALVES, Elisa Pereira. **Iniciação à pesquisa científica.** Campinas, SP: Alínea, 2001.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. **Fundamentos da metodologia científica.** 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marly E.D.A. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas.** São Paulo: EPU, 1986.

MATHIAS, Washington Franco; GOMES, José Maria. **Matemática Financeira.** 6. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

MATUCHESKI, Silvano. **Método dos Mínimos Quadrados.** 2021. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2021.

MEYER, João Frederico da Costa de Azevedo; CALDEIRA, Donizeti; MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. **Modelagem em Educação Matemática.** 4. ed.. Belo Horizonte: Autêntica, 2021.

MINAYO (org.). **Pesquisa Social: teoria, método e criatividade.** 28. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2009.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

NETO, Alexandre Assaf. **Matemática Financeira e suas aplicações.** 11. ed. São Paulo: Atlas, 2009.

RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais.** 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996.

APÊNDICE A — QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO



PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA



UFG

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Instrumento de Coleta de Dados :Questionário 1

Prezados(as) participantes, meu nome é **Lydia Soares de Barros Nunes**, sou discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional e a responsável pela pesquisa intitulada “**Viabilidade da energia solar fotovoltaica: uma análise utilizando modelagem matemática no ensino básico**”, a qual tem por objetivo aplicar uma proposta de ensino na disciplina de Matemática, envolvendo questões ambientais e financeiras relacionadas à instalação do sistema de energia solar em uma turma do ensino Médio da Educação básica na cidade de Aparecida de Goiânia.

Tal pesquisa ocorre sob orientação da professora doutora Kélem Gomes Lourenço. Para o desenvolvimento dessa pesquisa preciso de sua colaboração com o preenchimento do questionário a seguir. Esse instrumento de coleta de dados tem por objetivo fazer um levantamento de dados para posterior análise dentro da pesquisa.

Conto com sua colaboração e, desde já, expresso meu agradecimento. Em caso de dúvidas, entre em contato comigo pelo e-mail lydianunes@discente.ufg.br e/ou pelo telefone (62)984456747.

Identificação (Crie um código, símbolo ou codinome para identificar você de modo anônimo. Crie um que se lembre depois ou anote-o, para utilizar o mesmo, quando solicitado): _____

1. Qual a sua idade? _____

() Outra forma. Qual?

2. Você gosta da disciplina de Matemática?

() Sim () Um pouco () Não

3. Você se interessa pelas aulas de Matemática?

() Sim () Não () Às vezes

4. Como classifica seu desempenho na disciplina até o momento neste ano?

() Muito ruim () Ruim

() Regular () Bom

5. Com qual tipo de método você considera que aprende melhor o conteúdo de matemática?

() Fazendo exercícios de fixação após o(a) professor(a) explicar todo o conteúdo.

() Fazendo exercícios de fixação ao final de cada etapa do conteúdo explicado pelo(a) professor(a).

() Revisando o conteúdo em casa, refazendo os exemplos e atividades propostos anteriormente.

() Quando compreendo a relação do conteúdo estudado em sala com situações do cotidiano.

() Aulas que envolvem jogos.

6. Como você considera que foi sua compreensão do conteúdo de funções afins?

() Não me lembro () Ruim

() Média () Boa

7. Em relação à utilização de softwares de planilhas (Excel, LibreOffice Calc ou outros).

a. Possui computador em casa com algum programa deste tipo instalado?

() Sim. Qual? _____ () Não

b. Conhece o programa e sabe utilizá-lo?

() Não conheço .

() Conheço mas não sei utilizar.

() Conheço e sei utilizar algumas ferramentas.

() Conheço e sei utilizar bastante.

8. Qual alternativa descreve melhor seu grau de conhecimento sobre matemática financeira?

() Pouco () Regular

() Bom () Muito bom

9. Na sua opinião para que serve a Matemática?

APÊNDICE B — QUESTIONÁRIO 2



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA



MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Instrumento de Coleta de Dados: (Questionário 2)

Prezados(as) participantes, meu nome é **Lydia Soares de Barros Nunes**, sou discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional e a responsável pela pesquisa intitulada “**Viabilidade da energia solar fotovoltaica: uma análise utilizando modelagem matemática no ensino básico**”, a qual teve o objetivo aplicar uma proposta de ensino na disciplina de Matemática, envolvendo questões ambientais e financeiras relacionadas à instalação do sistema de energia solar em uma turma do ensino Médio da Educação básica na cidade de Aparecida de Goiânia.

Tal pesquisa ocorre sob orientação da professora doutora Kélem Gomes Lourenço. Após a aplicação das atividades em sua turma, preciso de sua colaboração com o preenchimento do questionário a seguir. Esse instrumento de coleta de dados tem por objetivo fazer um levantamento de dados para posterior análise dentro da pesquisa.

Conto com sua colaboração e, desde já, expresso meu agradecimento. Em caso de dúvidas, entre em contato comigo pelo e-mail lydianunes@discente.ufg.br e/ou pelo telefone (62)984456747.

Identificação (Utilize o mesmo código, símbolo ou codinome que criou ao responder o questionário diagnóstico): _____.

1. Qual foi seu nível de interesse em relação à proposta apresentada?

() Nenhum () Pouco
() Médio () Muito

2. Na sua opinião, qual o grau de dificuldade das atividades propostas?

() Muito difícil () Difícil
() Regular () Fácil

3. Como classifica seu desempenho nas atividades propostas?

() Muito ruim () Ruim
() Regular () Bom
() Muito bom

4. Você considera que as atividades te ajudaram a entender melhor o conteúdo de funções afins?

() Sim () Não

Justifique.

5. As atividades contribuíram para melhor compreensão dos conceitos relacionados à matemática financeira?

() Sim () Não

Justifique.

6. Foi possível perceber relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento?

() Sim. Quais?

() Não

7. Cite pontos que considera positivos na aplicação da sequência didática?

8. Aponte suas principais dificuldades durante a sequência didática.

9. Na sua opinião para que serve a Matemática?

APÊNDICE C — TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO



PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



UFG

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - TALE

Você está sendo convidado(a) a participar, como voluntário(a), da pesquisa associada à dissertação intitulada “*Viabilidade da energia solar fotovoltaica: uma análise utilizando modelagem matemática no ensino básico*”. Meu nome é Lydia Soares de Barros Nunes. Sou a pesquisadora responsável e minha área de atuação é educação. Após receber os esclarecimentos e as informações a seguir, se você aceitar fazer parte do estudo, assine ao final deste documento, que está impresso em duas vias, sendo que uma delas é sua e a outra ficará comigo. Esclareço que em caso de recusa na participação, em qualquer etapa da pesquisa, você não será penalizado (a) de forma alguma. Mas se aceitar participar, as dúvidas *sobre a pesquisa* poderão ser esclarecidas pelo(a) pesquisador(a) responsável, via e-mail lydiaprofmat@gmail.com e, inclusive, sob forma de ligação a cobrar, através do telefone (62) 984456747. Ao persistirem as dúvidas sobre os seus direitos como participante desta pesquisa, você também poderá fazer contato com o Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Goiás, pelo telefone (62)3521-1215, que é a instância responsável por dirimir as dúvidas relacionadas ao caráter ético da pesquisa. O Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Goiás (CEP-UFG) é independente, com função pública, de caráter consultivo, educativo e deliberativo, criado para proteger o bem-estar dos/das participantes da pesquisa, em sua integridade e dignidade, visando contribuir no desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos vigentes.

O objetivo da pesquisa é aplicar uma proposta de ensino na disciplina de Matemática, envolvendo questões ambientais e financeiras relacionadas à instalação do sistema de energia solar em uma turma do ensino Médio da Educação básica na cidade de Aparecida de Goiânia. Sua participação é voluntária e livre de qualquer remuneração ou benefício. Você é livre para recusar-se a participar, retirar seu consentimento ou interromper sua participação a qualquer momento. A recusa em participar não acarretará qualquer penalidade. Caso sinta algum desconforto emocional, constrangimento, intimidação, angústia, mal-estar, irritação entre outros, você poderá desistir de sua participação na pesquisa. Em contrapartida, sua participação poderá trazer benefícios, tais como, habilidade de resolver problemas, aperfeiçoar a capacidade de trabalhar em grupo, aprender a criar conjecturas e verificá-las, além de melhorar a compreensão de alguns conhecimentos matemáticos.

Durante todo o período da pesquisa e na divulgação dos resultados, sua privacidade será respeitada, ou seja, seu nome ou qualquer outro dado ou elemento que possa, de alguma forma, identificar-lhe, será mantido em sigilo. As informações desta pesquisa são confidenciais e os dados coletados serão divulgados apenas em eventos, relatórios e/ou publicações acadêmicas e científicas. Todo material ficará sob minha guarda por um período mínimo de cinco anos.

Haverá necessidade de utilizarmos os históricos de gastos com energia elétrica de residências de indivíduos envolvidos na pesquisa. Faça uma rubrica entre os parênteses da opção que valida sua decisão:

() Permito a análise e divulgação dos dados coletados em talões da energia de minha residência fornecidos pelo meu responsável, durante o desenvolvimento da pesquisa e nos resultados publicados posteriormente.

() Não permito a análise e divulgação dos dados coletados em talões de energia da minha residência fornecidos pelo meu responsável, durante o desenvolvimento da pesquisa e nos resultados publicados posteriormente.

Pode haver também a necessidade de utilizarmos sua opinião em publicações, faça uma rubrica entre os parênteses da opção que valida sua decisão:

() Permito a divulgação da minha opinião nos resultados publicados da pesquisa.

() Não permito a divulgação da minha opinião nos resultados publicados da pesquisa.

Pode haver também a necessidade de utilizarmos sua imagem em publicações, faça uma rubrica entre os parênteses da opção que valida sua decisão:

() Permito a divulgação da minha imagem nos resultados publicados da pesquisa.

() Não Permito a divulgação da minha imagem nos resultados publicados da pesquisa.

Pode haver necessidade de dados coletados em pesquisas futuras, desde que seja feita nova avaliação pelo CEP/UFG . Assim, solicito a sua autorização, validando a sua decisão com uma rubrica entre os parênteses abaixo:

() Permito a utilização desses dados para pesquisas futuras.

() Não permito a utilização desses dados para pesquisas futuras.

Declaro que os resultados da pesquisa serão tornados públicos, sejam eles favoráveis ou não.

Consentimento da Participação na Pesquisa:

Eu, _____, abaixo assinado, concordo em participar do estudo desenvolvido pelo projeto intitulado “*Viabilidade da energia solar fotovoltaica: uma análise utilizando modelagem matemática no ensino básico*”. Informo ter ____ anos de idade e destaco que minha participação nesta pesquisa é de caráter voluntário. Fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) pelo(a) pesquisador(a) responsável *Lydia Soares de Barros Nunes*, sobre a pesquisa, os procedimentos e métodos nela envolvidos, os possíveis riscos e benefícios decorrentes de minha participação no estudo, bem como sobre as garantias de assistência, confidencialidade e esclarecimentos permanentes. Também estou ciente que minha participação é isenta de despesas e poderei retirar meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade, prejuízos ou perdas. Estou ciente de que os resultados desta pesquisa, favoráveis ou não, serão tornados públicos. Declaro, portanto, que concordo com a minha participação no projeto de pesquisa acima descrito.

Aparecida de Goiânia, ____ de _____ de 2023.

Assinatura por extenso do(a) participante

Assinatura por extenso do(a) pesquisador(a) responsável

APÊNDICE D — TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA



MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

**TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - TCLE -
PAIS/RESPONSÁVEIS**

Você (senhor/ senhora) , na qualidade de responsável por _____, está sendo convidado(a) a consentir que o(a) menor participe, como voluntário(a), da pesquisa intitulada “*Viabilidade da energia solar fotovoltaica: uma análise utilizando modelagem matemática no ensino básico*”. Meu nome é Lydia Soares de Barros Nunes, sou a pesquisadora responsável e minha área de atuação é educação matemática. Após receber os esclarecimentos e as informações a seguir, se você consentir na participação do(a) menor sob sua responsabilidade nesse estudo, rubricue todas as páginas e assine ao final deste documento, que está impresso em duas vias, sendo que uma delas é sua e a outra pertence à pesquisadora responsável. Esclareço que em caso de recusa de participação, não haverá penalização para nenhuma das partes. Mas se consentir, as dúvidas *sobre a pesquisa* poderão ser esclarecidas pela pesquisadora responsável, via e-mail lydiaprofmat@gmail.com e, inclusive, sob forma de ligação a cobrar, através do telefone (62)984456747. Ao persistirem as dúvidas sobre os seus direitos como participante desta pesquisa, você também poderá fazer contato com o Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Goiás, pelo telefone (62)3521-1215, que é a instância responsável por dirimir as dúvidas relacionadas ao caráter ético da pesquisa. O Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Goiás (CEP-UFG) é independente, com função pública, de caráter consultivo, educativo e deliberativo, criado para proteger o bem-estar dos/das participantes da pesquisa, em sua integridade e dignidade, visando contribuir no desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos vigentes.

A presente pesquisa tem como objetivo aplicar uma proposta de ensino na disciplina de Matemática, envolvendo questões ambientais e financeiras relacionadas à instalação do sistema de energia solar em uma turma do ensino Médio da Educação básica na cidade de Aparecida de Goiânia. A participação do(a) menor sob sua responsabilidade é importante para a realização desta pesquisa que tem o título “*Viabilidade da energia solar fotovoltaica: uma análise utilizando modelagem matemática no ensino básico*”. Embora este projeto não apresente riscos diretos à saúde ou bem-estar do participante, é possível que o(a) menor se sinta desconfortável ao compartilhar suas opiniões e experiências. Caso isso ocorra, é garantida a total liberdade para retirar seu consentimento a qualquer momento, sem penalidade alguma. Em contrapartida, a participação trará benefícios, tais como, habilidade de formular e solucionar problemas, em realizar uma pesquisa, melhorar a capacidade de trabalhar em grupo, em expor suas ideias e desenvolver a criatividade, além de melhorar a compreensão dos conteúdos matemáticos.

A participação na pesquisa será voluntária, portanto, não haverá despesas pessoais ou gratificação financeira decorrente da participação, caso haja despesas, elas serão ressarcidas. Caso ocorra algum dano, o direito a pleitear indenização para reparação imediata ou futura, decorrentes da cooperação com a pesquisa está garantido em Lei.

O sigilo e anonimato da sua autorização e da participação da criança (ou adolescente) na pesquisa serão preservados. A divulgação do nome dele(a) somente acontecerá se for permitida por você, solicito que rubrique no parêntese abaixo a opção de sua preferência:

() Permito a identificação do(a) menor sob minha responsabilidade nos resultados publicados da pesquisa.

() Não permito a identificação do(a) menor sob minha responsabilidade nos resultados publicados da pesquisa.

Haverá necessidade de utilizarmos os históricos de gastos com energia elétrica de residências de indivíduos envolvidos na pesquisa. Faça uma rubrica entre os parênteses da opção que valida sua decisão:

() Permito a análise e divulgação dos dados coletados em talões da energia de minha residência, durante o desenvolvimento da pesquisa e nos resultados publicados posteriormente.

() Não permito a análise e divulgação dos dados coletados em talões de energia da minha residência, durante o desenvolvimento da pesquisa e nos resultados publicados posteriormente.

Pode haver também a necessidade de utilizarmos a opinião do(a) menor sobre sua responsabilidade em publicações, faça uma rubrica entre os parênteses da opção que valida sua decisão:

() Permito a divulgação da opinião do(a) menor sob minha responsabilidade nos resultados publicados da pesquisa.

() Não permito a divulgação da opinião do(a) menor sob minha responsabilidade nos resultados publicados da pesquisa.

Pode haver também a necessidade de utilizarmos imagem do(a) menor sob minha responsabilidade em publicações, faça uma rubrica entre os parênteses da opção que valida sua decisão:

() Permito a divulgação da imagem do(a) menor sob minha responsabilidade nos resultados publicados da pesquisa.

() Não Permito a divulgação da imagem do(a) menor sob minha responsabilidade nos resultados publicados da pesquisa.

Pode haver necessidade de dados coletados em pesquisas futuras, desde que seja feita nova avaliação pelo CEP/UFG . Assim, solicito a sua autorização, validando a sua decisão com uma rubrica entre os parênteses abaixo:

() Permito a utilização desses dados para pesquisas futuras.

() Não permito a utilização desses dados para pesquisas futuras.

Declaro que os resultados da pesquisa serão tornados públicos, sejam eles favoráveis ou não.

Eu, _____, abaixo assinado, concordo que meu(minha) filho(a) participe do estudo intitulado “***Viabilidade da energia solar fotovoltaica: uma análise utilizando modelagem matemática no ensino básico***”. Informo ter mais de 18 anos de idade e destaco que a participação dele(a) nesta pesquisa é de caráter voluntário. Fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) pela pesquisadora responsável Lydia Soares de Barros Nunes, sobre a pesquisa, os procedimentos e métodos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes da participação dele(a) no estudo, bem como sobre as garantias de assistência, confidencialidade e esclarecimentos permanentes. Ficou claro também que a participação dele(a) é isenta de despesas e que posso retirar meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade, prejuízos ou perdas e ainda estou ciente de que os resultados desta pesquisa sejam favoráveis ou não, serão tornados públicos. Declaro, portanto, que concordo com a participação dele(a) no projeto de pesquisa acima descrito.

Goiânia, ____ de _____ de 2023.

Assinatura por extenso do(a) responsável

Assinatura por extenso do(a) pesquisador(a) responsável

APÊNDICE E — PRODUTO EDUCACIONAL



Disponível em: <http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/748445>.

ANEXO A — PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA



UNIVERSIDADE FEDERAL DE
GOIÁS - UFG

**PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP****DADOS DO PROJETO DE PESQUISA**

Título da Pesquisa: VIABILIDADE DA ENERGIA SOLAR FOTOVOLTAICA: UMA ANÁLISE UTILIZANDO MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO BÁSICO

Pesquisador: LYDIA SOARES DE BARROS NUNES

Área Temática:

Versão: 2

CAAE: 69745223.1.0000.5083

Instituição Proponente: Instituto de Matemática e Estatística

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 6.203.759

Apresentação do Projeto:

Trata-se de uma pesquisa de pós-graduação do MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL. A pesquisadora desenvolverá uma sequência didática com turma de 1º ano de Ensino Médio de escola estadual em Aparecida de Goiânia, além de aplicar dois questionários e anotações em diário de bordo durante o acompanhamento nas aulas de matemática. Será usada a modelagem matemática para abordar a geração de energia elétrica em Goiás e a viabilidade da instalação da energia solar fotovoltaica em residências na região metropolitana de Goiânia.

Objetivo da Pesquisa:

Utilizar a modelagem matemática como ferramenta para trabalhar interdisciplinarmente questões ambientais e financeiras em uma turma da Educação básica na cidade de Aparecida de Goiânia.

 Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Como riscos a pesquisadora sinaliza que os participantes podem em alguns momentos sentir timidez, desconforto ou constrangimento ao compartilhar suas ideias e manifestar sua opinião durante a realização das atividades propostas. Como benefícios citam-se: possibilidade de melhoria da capacidade dos participantes de trabalhar em grupo, expor suas ideias, desenvolver a criatividade; melhoria da percepção de como a Matemática se relaciona com outras ciências; melhoria da compreensão sobre alguns conteúdos matemáticos.

Endereço: Alameda Flamboyant, Qd. K, Edifício K2, sala 110

Bairro: Campus Samambaia, UFG

CEP: 74.690-970

UF: GO

Município: GOIANIA

Telefone: (62)3521-1215

E-mail: cep.prpi@ufg.br



UNIVERSIDADE FEDERAL DE
GOIÁS - UFG



Continuação do Parecer: 6.203.759

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

A pesquisadora aplicará questionários em um turma de primeiro ano. Um questionário diagnóstico sobre o interesse em aulas de matemática, metodologias usadas, conhecimento sobre planilhas, educação financeira. O outro questionário versa sobre a sequência didática aplicada, se despertou o interesse dos estudantes, as dificuldades, a compreensão a partir da proposta que prevê discutir a geração de energia elétrica em Goiás e a viabilidade da instalação da energia solar fotovoltaica em residências da grande Goiânia a partir de dados relacionados às contas de energia das residências e de propostas de instalação de sistema fotovoltaico de energia. Sobre a sequência didática, esta foi apresentada e tem como foco a discussão citada anteriormente. O financiamento é próprio e a coleta de dados está prevista para acontecer em a partir de agosto de 2023.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Foram apresentados os seguintes termos: projeto de pesquisa, Termo de compromisso assinado pela equipe de pesquisa, Termo de Anuência da direção da escola em que será desenvolvida a pesquisa, os instrumentos de coleta de dados, Consentimento da empresa RESOLUTI ENERGIA para disponibilização de orçamentos da empresa sobre instalação do sistema fotovoltaico de energia para uso na pesquisa, Folha de Rosto assinada pelo diretor do IME, Termo de Anuência da Coordenação Regional de Educação de Aparecida de Goiânia, TCLE para os pais e TALE para estudantes. Os TCLE e TALE estão escritos em linguagem clara, garantem o sigilo, apresentam riscos e benefícios, a forma de participação, a possibilidade de indenização, guarda e descarte do material resultante da pesquisa.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

As pendências anteriores foram sanadas (envio da anuência do órgão responsável pela escola, inclusão da possibilidade de indenização e das atividades a serem desenvolvidas no TALE e no TCLE, explicação sobre o destino do material de pesquisa e explicação aos participantes sobre o registro de imagem das atividades, bem como a autorização para uso dessas imagens). Dessa forma, o projeto encontra-se adequado às normas éticas da pesquisa com seres humanos.

Considerações Finais a critério do CEP:

Informamos que o Comitê de Ética em Pesquisa/CEP-UFG considera o presente protocolo APROVADO. O mesmo foi considerado em acordo com os princípios éticos vigentes. Reiteramos a importância deste Parecer Consubstanciado, e lembramos que o(a) pesquisador(a) responsável deverá encaminhar ao CEP-UFG os relatórios parciais e o Relatório Final baseado na conclusão do estudo e na incidência de publicações decorrentes deste, de acordo com o disposto na Resolução

Endereço: Alameda Flamboyant, Qd. K, Edifício K2, sala 110

Bairro: Campus Samambaia, UFG

CEP: 74.690-970

UF: GO

Município: GOIANIA

Telefone: (62)3521-1215

E-mail: cep.prpi@ufg.br



UNIVERSIDADE FEDERAL DE
GOIÁS - UFG



Continuação do Parecer: 6.203.759

CNS n. 466/12 e Resolução CNS n. 510/16. O prazo para entrega do Relatório é de até 30 dias após o encerramento da pesquisa, previsto para abril de 2024.

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_2139927.pdf	06/07/2023 12:40:06		Aceito
Outros	carta_atendimento_de_pendencias.pdf	06/07/2023 11:34:54	LYDIA SOARES DE BARROS NUNES	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	projeto_detalhado.pdf	06/07/2023 11:10:26	LYDIA SOARES DE BARROS NUNES	Aceito
Outros	Instrumento_de_Coleta_de_Dados.docx	06/07/2023 10:48:32	LYDIA SOARES DE BARROS NUNES	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	Modelo_TCLEPais_Responsaveis_UFG.docx	06/07/2023 10:46:56	LYDIA SOARES DE BARROS NUNES	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	Modelo_TALE_UFG.docx	06/07/2023 10:46:38	LYDIA SOARES DE BARROS NUNES	Aceito
Parecer Anterior	PB_PARECER_CONSUBSTANCIADO_CEP_6164846.pdf	06/07/2023 07:32:08	LYDIA SOARES DE BARROS NUNES	Aceito
Outros	Anuencia_subsecretaria.pdf	05/07/2023 20:36:49	LYDIA SOARES DE BARROS NUNES	Aceito
Outros	Anuencia_escola.pdf	17/05/2023 22:39:23	LYDIA SOARES DE BARROS NUNES	Aceito
Outros	consentimento_empresa_de_energia_solar.pdf	17/05/2023 22:31:44	LYDIA SOARES DE BARROS NUNES	Aceito
Folha de Rosto	folha_de_rosto.pdf	12/05/2023 18:35:51	LYDIA SOARES DE BARROS NUNES	Aceito
Declaração de Pesquisadores	termo_de_compromisso.pdf	11/05/2023 23:14:43	LYDIA SOARES DE BARROS NUNES	Aceito

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

Endereço: Alameda Flamboyant, Qd. K, Edifício K2, sala 110

Bairro: Campus Samambaia, UFG

CEP: 74.690-970

UF: GO

Município: GOIANIA

Telefone: (62)3521-1215

E-mail: cep.prpi@ufg.br



UNIVERSIDADE FEDERAL DE
GOIÁS - UFG



Continuação do Parecer: 6.203.759

GOIANIA, 27 de Julho de 2023

Assinado por:
Rosana de Moraes Borges Marques
(Coordenador(a))

Endereço: Alameda Flamboyant, Qd. K, Edifício K2, sala 110

Bairro: Campus Samambaia, UFG

CEP: 74.690-970

UF: GO

Município: GOIANIA

Telefone: (62)3521-1215

E-mail: cep.prpi@ufg.br