



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas



Departamento de Matemática

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

**FRAÇÕES NA PERSPECTIVA DO ENSINO
EXPLORATÓRIO: EXPERIÊNCIA NO SEXTO ANO DO
ENSINO FUNDAMENTAL**

TAINÁ LUARA FERREIRA SALLES

Brasília – DF, março/2024

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

**FRAÇÕES NA PERSPECTIVA DO ENSINO EXPLORATÓRIO:
EXPERIÊNCIA NO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Tainá Luara Ferreira Salles

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Nacional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Regina da Silva Pina Neves

Brasília - DF: março/2024

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Frações na perspectiva do ensino exploratório: experiência no sexto ano do ensino
fundamental

Por

Tainá Luara Ferreira Salles

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do “Programa” de Mestrado Nacional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, março de 2024

Comissão Examinadora:

Profa. Dra. Regina da Silva Pina Neves (MAT/UnB)

(Orientadora)

Profa. Dra. Raquel Carneiro Dörr (MAT/UnB)

(Membro interno)

Profa. Dra. Aluska Dias Ramos de Macedo Silva (UFCG)

(Membro externo)

Prof. Dr. Rui Seimetz (MAT/UnB)

(Membro suplente)

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar meu profundo agradecimento às pessoas que estiveram ao meu lado durante este processo de estudo, pesquisa e escrita da dissertação.

Primeiramente, quero agradecer à minha família por seu apoio incondicional ao longo deste caminho. Agradeço a meu pai, minha mãe e meu irmão por seu amor, paciência e compreensão durante os momentos desafiadores e pelas palavras de incentivo que me motivaram a seguir em frente. Agradeço, também, a todos os meus amigos, colegas e professores que contribuíram de alguma forma para o meu crescimento pessoal e acadêmico.

Em especial, gostaria de expressar minha gratidão à minha orientadora, Regina Pina, sua orientação, atenção e apoio foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Sua dedicação, paciência e cuidado foram essenciais para minha jornada acadêmica e para a conclusão deste projeto.

O sucesso não é resultado apenas do trabalho duro e da dedicação pessoal, mas também do apoio e encorajamento daqueles que nos rodeiam. A cada amigo, familiar e mentor que cruzou meu caminho, minha gratidão é profunda e eterna. Seus conselhos, apoio e amor foram a luz que me guiou nos momentos mais desafiadores. Este trabalho é dedicado a vocês, cuja presença em minha vida torna cada conquista mais significativa.

*O verdadeiro poder da resiliência
se revela quando você se recusa a
desistir, apesar das
circunstâncias.*

(O Poder do Hábito, de Charles Duhigg)

RESUMO

A presente pesquisa aborda o estudo, a replicação e a análise de um conjunto de aulas com o objetivo geral de promover a compreensão do tópico curricular de frações no sexto ano do ensino fundamental, com o apoio das Barras de Cuisenaire. O conjunto de aulas foi desenvolvido junto a alunos do 6º ano do ensino fundamental de uma escola particular do Distrito Federal, na perspectiva do Ensino Exploratório (Canavarro, 2011). Observou-se que o material manipulável contribuiu para a ampliação da compreensão dos alunos sobre o significado dos números fracionários, bem como para a resolução de situações-problema que envolviam operações com frações. Além disso, ressalta-se o valor das ações lúdicas e exploratórias no processo de aprendizagem, pois proporcionam aos alunos diferentes formas de explorar e registrar suas produções matemáticas, facilitando, assim, a assimilação do conteúdo.

Palavras-chave: Frações. Barras de Cuisenaire. Ensino Exploratório.

ABSTRACT

This research addresses the study, replication, and analysis of a series of lessons designed to enhance the comprehension of the curriculum topic of fractions among sixth-grade elementary students. These lessons are supported by the use of Cuisenaire rods. They were conducted with sixth-grade students from a private school in the Federal District, following the principles of the Exploratory Teaching approach (Canavarro, 2011). It was observed that the manipulative material not only broadened the understanding of fractional numbers but also facilitated the resolution of problem scenarios involving fraction operations. Moreover, the significance of incorporating playful and exploratory activities in the learning process is underscored. Such activities provide students with diverse avenues to explore and document their mathematical insights, thereby aiding in the absorption of the subject matter.

Key-words: Fractions. Cuisenaire Bars. Exploratory Teaching.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação de fração	18
Figura 2 – Representação do conjunto dos racionais	19
Figura 3 – Capa do livro	31
Figura 4 – Sumário do livro	32
Figura 5 – Barras de Cuisenaire	33
Figura 6 – Associação entre as cores os números nas barras de Cuisenaire	34
Figura 7 – Simbologias utilizadas nas atividades escritas	37
Figura 8 – Alunos apresentando suas produções.	38
Figura 9 – Trabalhos escritos	38
Figura 10 – Alunos representando a fração $\frac{1}{2}$ com as barras	39
Figura 11 – Alunos representando a fração $\frac{13}{7}$ com as barras	39
Figura 12 – Alunos representando frações equivalentes com as barras	40
Figura 13 – Participação dos alunos no <i>flipchart</i>	41
Figura 14 – Comparações de frações conforme 1ª propriedade	42
Figura 15 – “Corrida das cores” para encontrar MMC entre 2 e 9	43
Figura 16 – Comparações de frações conforme 2ª propriedade	44
Figura 17 – Comparações de frações conforme 3ª propriedade	45
Figura 18 – Espaços físicos da escola	47
Figura 19 – Espaço da sala de aula organizado para início das sessões	48
Figura 20 – Material disponível para a realização das atividades	49
Figura 21 – Atividades com as barras de Cuisenaire	49
Figura 22 – Barras de Cuisenaire organizadas pelos alunos	50
Figura 23 – Abreviações das cores das barras	51
Figura 24 – Participação dos alunos no quadro	52
Figura 25 – Sentenças usando as abreviações	52
Figura 26 – Alunos representando a fração $\frac{1}{2}$ com as barras	53
Figura 27 – Alunos representando frações equivalentes com as barras	54
Figura 28 – Mediações da pesquisadora durante as aulas	55
Figura 29 – Alunos sendo questionados nos grupos	56
Figura 30 – <i>Feekback</i> do primeiro dia	57
Figura 31 – <i>Feedback</i> do segundo dia	58
Figura 32 – <i>Feedback</i> do terceiro dia	59

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Quadro adotado para a organização e sistematização dos dados	20
Quadro 2 – Pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de frações no ensino fundamental	21

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	11
1 CONHECENDO A AUTORA	13
2 NÚMEROS FRACIONÁRIOS, FRAÇÃO E NÚMEROS RACIONAIS	18
3 REVISÃO DE LITERATURA: ELEMENTOS CENTRAIS	20
3.2 Abordagem exploratória e o ensino de frações	27
4 FRAÇÕES NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO E PESQUISA	31
4.1 Barras Cusinaire: aspectos históricos	32
4.2 Uma experiência de ensino e pesquisa	34
<i>4.2.1 Aula 1</i>	<i>35</i>
<i>4.2.2 Aula 2</i>	<i>36</i>
<i>4.2.3 Aula 3</i>	<i>39</i>
<i>4.2.4 Aula 4</i>	<i>40</i>
<i>4.2.5 Aula 5</i>	<i>42</i>
5 METODOLOGIA	47
6 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	48
6.1 Elementos de síntese	59
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	62
65	

INTRODUÇÃO

Considerando a existência de desafios nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, a pesquisadora, ao longo de sua formação acadêmica e experiência profissional, passou a questionar as dificuldades dos alunos em sala de aula e a buscar estratégias didáticas de saná-las. A trajetória acadêmica permitiu-lhe compreender a singularidade de cada aluno, marcada por maneiras e tempos distintos de aprendizagem. A experiência profissional evidenciou que algumas dificuldades de aprendizagem em tópicos específicos da Matemática, bem como erros nas resoluções, são recorrentes ano após ano escolar.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), no que se refere à Matemática, destaca competências específicas a serem desenvolvidas pelos alunos e ressalta a importância de relacionar o ensino da Matemática ao cotidiano, de modo a proporcionar a compreensão dos conceitos de forma contextualizada. Isso pode ser alcançado por meio da interpretação, do questionamento, da investigação e da resolução de problemas, estimulando o pensamento matemático para favorecer a aprendizagem dos alunos.

Diante dessas experiências, surgiram questionamentos que resultaram na formulação do problema de pesquisa: Quais são as aprendizagens dos alunos do 6º ano sobre o tópico matemático frações promovidas a partir de aproximações à abordagem exploratória?

Portanto, a pesquisa realizada buscou evidenciar e discutir as aprendizagens matemáticas de alunos do 6º ano sobre frações a partir dessa aproximação e vivência com o ensino exploratório. Para tanto, foram replicadas seis aulas planejadas e desenvolvidas no trabalho de Amaral (2021) no contexto e realidade da presente pesquisa. A escolha desse enfoque se justifica pela necessidade de proporcionar uma compreensão mais aprofundada e significativa dos conceitos matemáticos relacionados às frações. O material didático utilizado durante as aulas foram as barras de Cuisenaire, reconhecidas por sua capacidade de promover interação e questionamentos quanto à conceituação das frações, seus significados e sua representação em termos de linguagem matemática. A delimitação do tema concentrou-se, assim, na exploração conceitual das frações, destacando a relevância das estratégias de medição na construção ativa do conhecimento pelos alunos. A abordagem exploratória visa estimular a participação ativa dos estudantes no processo de ensino.

A problemática que norteou este estudo fundamenta-se na constatação de desafios recorrentes no ensino de frações, evidenciando a necessidade de métodos inovadores e eficazes para superar obstáculos na compreensão desse conteúdo. Campos *et al.* (2014) reforçam que, devido à complexidade das frações, o ensino e a aprendizagem desse conteúdo representam um

desafio significativo tanto para professores quanto para alunos no contexto brasileiro. Portanto, torna-se imprescindível encontrar estratégias que promovam a compreensão desse objeto matemático, uma vez que o estudo das frações é fundamental para o avanço do aluno na aprendizagem matemática. Nesse sentido, Novaes (2021) pontua que as formas simplificadas de ensinar frações e a falta de inovação na utilização de matérias vêm sendo amplamente problematizadas, se fazendo necessária a utilização de novos métodos para que o aprendizado aconteça.

Dessa forma, a presente dissertação está organizada de modo a permitir aos leitores a compreensão do estudo que norteou a replicação das aulas de Amaral (2021), bem como a experiência prática que foi desenvolvida junto a alunos de sexto ano do ensino fundamental. Por isso, iniciamos com a contextualização do percurso acadêmico da autora; em seguida, reunimos informações conceituais matemáticas sobre o tópico curricular. Nos capítulos posteriores, a abordagem e os elementos da revisão de literatura, que permitiram avançar no entendimento das necessidades atuais do ensino e da aprendizagem das frações, são discutidos. Por fim, o texto apresenta e discute os resultados alcançados no âmbito da replicação das aulas, reunindo elementos quanto às conquistas e às limitações encontradas. Igualmente, discutem-se os encaminhamentos relativos às práticas de docência e de pesquisa da pesquisadora a partir desta experiência.

1 CONHECENDO A AUTORA

Refletindo acerca de minha trajetória, percebo que sempre tive muita afinidade com a Matemática. Lembro-me de que na infância sempre tive facilidade na referida disciplina, mas, quando enfrentava dificuldade acerca de um assunto em Matemática, sempre pedia ajuda ao meu irmão, que, ao me ensinar, sempre me desafiava a ser melhor e a pensar em conformidade com a Matemática. Dessa forma, me tornei uma estudante que sempre que tinha oportunidade de ensinar, me disponibilizava a ajudar os meus amigos, o que, muitas vezes, era em Matemática; porém, sempre que podia e sabia, eu me dispunha a ensinar não importava qual fosse a disciplina. Com o tempo, as matemáticas foram se tornando não só uma disciplina, mas uma paixão, cujos desafios me encantavam. Porém, a Matemática por si só para mim era o suficiente, poderia atravessar horas num desafio sem perceber o tempo passar.

Minha vida estudantil ocorreu praticamente em escolas particulares e, em 2007, iniciei na sexta série, hoje sétimo ano, do ensino fundamental no colégio Centro Educacional Sigma, onde, em 2012, me formei. Quando estava cursando o último ano do ensino médio, já sabia que prestaria o vestibular para Matemática e já sonhava em entrar em sala e ministrar excelentes aulas.

No ano de 2013, tive a confirmação, pelo Programa de Avaliação Seriada (PAS), que meu sonho havia iniciado: ingressei na Universidade de Brasília (UnB), cursando Licenciatura em Matemática. Em junho, eu retornei ao Sigma para agradecer aos meus professores de Matemática, dizendo-lhes que a minha vitória também era deles. Não só, mas também por isso, eu acabei conseguindo um estágio na escola e, desde então, minha trajetória profissional teve início. No final do primeiro semestre da UnB, voltei para a escola onde me formei, só que agora na condição de estagiária. Ao mesmo tempo, cursando o segundo semestre na UnB, eu entrei para o Programa de Educação Tutorial (PET), por meio do qual tive o meu primeiro contato com pesquisa em Matemática. No PET, sempre tive mais afinidade com a parte que envolvia ensino, todas as saídas de campo que envolvia escolas e ensino eu estava ansiosa para participar, já a parte de pesquisa em Matemática pura me encantava, mas logo percebi que o ensino e a aprendizagem de Matemática era o que tinha meu coração.

Em minha trajetória como estudante da UnB, tive o privilégio de ter excelentes professores que contribuíram para a minha formação, não só como estudante, mas também como professora, como Adail de Castro Cavalheiro, Aline G. da Silva Pinto, Celius Antônio Magalhães, João Paulo dos Santos, Lineu da C. Araújo Neto, Luciana Maria Dias de Ávila

Rodrigues, Luís Henrique de Miranda, Raquel Carneiro Dörr, Regina da Silva Pina Neves, Rui Seimetz, entre outros; eles me ensinaram muito mais do que a disciplina que lecionaram, haja vista que também me inspiraram na didática, organização, avaliação e dedicação. Houve matérias pelas quais passei que me recordo até hoje: Geometria 1 e Álgebra 1 foram as primeiras matérias que fiz uma demonstração e isso me marcou muito. Álgebra para ensino e Geometria para ensino também lembrarei como matérias que me trouxeram um grande crescimento. Em uma delas, tive que preparar um texto na modalidade Comunicação Científica e apresentá-lo no Encontro Nacional de Educação Matemática¹(ENEM), realizado na cidade de São Paulo. Essa foi uma experiência maravilhosa que, entre outras novas situações, me proporcionou conhecer professores de todos os estados e fazer trocas muito significativas, além de ter tido a primeira experiência de apresentar um trabalho para diversas pessoas.

Da mesma forma que eu passava por desafios e crescimentos na UnB como aluna, também enfrentava situações desafiadoras no estágio no Colégio Sigma como monitora. No estágio, eu trabalhava no contraturno, esclarecendo dúvidas dos alunos em Matemática; assim, desde o início da minha graduação, me mantive em constante contato com os conteúdos da educação básica. No estágio, eu ficava em uma sala juntamente com um professor regente tirando dúvidas, tanto de alunos do ensino fundamental quanto do ensino médio. Os professores que me acompanhavam assemelhavam-se a mentores para mim, sempre me orientando em como fazer o trabalho da melhor forma. O professor Paulo Luiz, em específico, era um professor que sempre estava me ensinando e me ajudando a ser melhor como professora, me ajudava com conteúdos da educação básica e com disciplinas da graduação. O professor Carlos Sergio também teve uma participação muito significativa em minha evolução profissional, ele era o responsável pela cadeira de Matemática e me ensinou a ter um olhar muito cuidadoso ao revisar provas, antes de liberá-las para impressão e aplicação nas turmas. No final de 2015, comecei a organizar a grade dos estagiários de Matemática e fazia o acompanhamento das entrevistas de contratação de novos estagiários, função na qual ele também me ensinou muito.

Em 2016, além da função de monitoria, que incluía plantões de dúvidas, revisões de materiais e organização da grade de monitores, comecei a ser professora substituta, função essa que me permitiu, pela primeira vez, entrar em sala de aula na condição de professora. Já nessa época, tinha plena certeza de que seguiria na profissão. O trabalho de professora substituta me fez crescer muito, pois muitas vezes dispunha de 15 minutos apenas para planejar uma aula

¹ Para conhecer o evento acesse: <https://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>, <https://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/anais/enem>.

inteira e os assuntos variavam muito, podendo abordar qualquer conteúdo da educação básica. Dessa forma, ficava obrigada a me manter estudando sobre todos os conteúdos, o que me fez crescer bastante. Foi nessa mesma época que comecei a perceber que o conteúdo de fração era algo pouco entendido por todos os alunos dos anos do ensino fundamental II e do ensino médio.

Criei, nessa época, um interesse muito grande pelo ensino de frações. Como podia uma matéria, tão presente tanto no ensino quanto no cotidiano, causar tanta dificuldade nos alunos?! Na vontade de responder a essa indagação, comecei a estudar formas diferentes de ensinar aos alunos como usar fração de forma a facilitar seus cálculos algébricos e percebia o quanto toda vez que conseguia esclarecer essa área para um aluno, mais ele seguia nos demais conteúdos de forma mais fácil. Também, em 2016, fiz a disciplina de Estágio Supervisionado de Regência em Matemática, com a professora Raquel Carneiro Dörr, ocasião em que tive certeza de que a aprendizagem de frações apresentava uma lacuna enorme.

Cursando a referida disciplina, eu e outro colega tivemos a oportunidade de acompanhar, na condição de tutores, alunos que cursavam Cálculo 1 pela segunda ou mais vezes (ou seja, repetentes). Na tutoria, tive a oportunidade de ter contato com alunos de vários cursos, alguns prováveis formandos e outros com o curso dependendo da aprovação em Cálculo 1 para conseguir continuar no curso. Percebi, durante o tempo que passei na tutoria, que o interesse dos alunos era gigante, mas a lacuna também. Foi-nos pedido para que mapeássemos as maiores e as mais comuns dificuldades apresentadas, e assim fizemos. Após a coleta de dados ficou comprovado que trabalhar com frações era uma dificuldade comum a todos os alunos da amostra. Muitas vezes, os alunos entendiam os conceitos de limite e derivada, mas não conseguiam realizar os procedimentos algébricos, pois eles envolviam operações com frações. Essa experiência integrou parte da pesquisa empírica do doutoramento intitulado “Análises de aprendizagens em cálculo diferencial e integral: um estudo de caso de desenvolvimento de conceitos e procedimentos algébricos em uma universidade pública brasileira”. Para informações detalhadas sobre a pesquisa realizada, bem como os resultados alcançados, acesse o trabalho de Dörr (2017).

Em julho de 2017, me formei em licenciatura em Matemática pela Universidade de Brasília e fui contratada pelo Centro Educacional Sigma como Professora Substituta. Minha função era entrar em sala de aula em qualquer eventual falta de professor e ministrar aula de Matemática. Eu transitava do 6º ano do ensino fundamental à 3ª série do ensino médio. No final de 2018, um colega de trabalho me falou sobre o processo seletivo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) - ele já era mestre pelo programa - e

me incentivou a fazer a inscrição. Assim, eu fiz e comecei a pegar provas anteriores para estudar. Recebi a notícia de que havia passado e fiquei muito feliz. No mesmo ano, 2018, meu ciclo no colégio Centro Educacional Sigma se encerrou, dessa forma, eu usaria todo meu tempo para focar no mestrado.

Ingressar no mestrado no ano em que eu saí do Sigma fez com que, pela primeira vez, eu fosse apenas estudante e me deu muito ânimo para dedicar-me apenas aos estudos. No meio do ano em que comecei a fazer o mestrado, consegui um emprego no Colégio Marista. Comecei a trabalhar como professora de apoio e continuei tendo contato com toda a educação básica. O segundo ano de mestrado foi intenso e cheio de mudanças, o mundo foi surpreendido com a chegada da pandemia do coronavírus, e descobri minha primeira gravidez. A pandemia mudou radicalmente o estilo de ensino, substituindo o que se fazia presencialmente pelo ensino remoto. Participei de algumas disciplinas no mestrado no ensino remoto e me deparei com grandes diferenças em vários sentidos. Percebi também que, para os alunos da educação básica, tal mudança poderia causar dificuldade ainda maior para se alcançar um aprendizado consistente.

Em 2021, descobri a minha segunda gravidez, o que mudou muito minha rotina de estudo e de vida. Por conta das minhas duas gestações, eu acabei tendo um ano de licença maternidade, o que acarretou atrasos no mestrado, especialmente, no desenvolvimento da pesquisa empírica. Ao final de 2022, eu cursei a última disciplina do mestrado, Polinômios e Equações Algébricas, lecionada pelo professor André Lopes que acrescentou muito à minha formação. Em muitas de suas aulas, os alunos iam ao quadro para resolver questões, método que, além de cativar todos os alunos, fazia com que a atenção fosse constante. Pude perceber, em muitos momentos, quando os alunos faziam questões sobre limites em que precisavam realizar manipulações algébricas envolvendo frações, eles não conseguiam, não conseguiam muitas vezes somar, por não equalizarem os denominadores, tinham dificuldades em multiplicar, querendo fazer distributiva do denominador. Toda vez que tinham questões que envolviam fração já percebia que muitos alunos assumiam não saber o que dificultava o entendimento do conteúdo. Desse modo, percebi que a dificuldade com frações não era restrita aos alunos da educação básica ou aos alunos da graduação, era também de muitos professores que cursavam o Profmat, que lecionavam no ensino fundamental e no ensino médio.

Também, em 2021, na escolha de orientação, procurei a professora Regina Pina para me orientar já sabendo que a área de orientação dela é a Educação Matemática, que é a área que escolhi seguir. Em minha trajetória acadêmica, as frações sempre foram algo bem presente e assunto pelo qual eu sempre me interessei. Dessa forma e pelos motivos acima citados, decidi

que o tema por mim estudado no mestrado seria frações. Além disso, decidimos, já nas reuniões de orientação, que seria necessário avançar na abordagem didática adotada para o ensino de frações, visto que era preciso alterar o modo como os alunos se relacionam com o conceito de fração e suas operações. Logo, cientes das observações que havia realizado ao longo da minha trajetória como professora e certa de que a literatura em Educação Matemática poderia nos auxiliar, iniciei os estudos em busca de aportes para uma experiência empírica realizada no meu espaço de atuação profissional.

2 NÚMEROS FRACIONÁRIOS, FRAÇÃO E NÚMEROS RACIONAIS

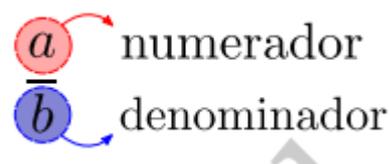
Neste capítulo, tratamos de aspectos conceituais importantes relativos ao tópico conceitual foco da dissertação. Reunimos tais conceitos com o intuito de situá-los ante os marcos da história da matemática e da própria organização curricular da educação básica, especialmente, do ensino fundamental II.

De acordo com o livro *A Concise History of Mathematics*, escrito por Dirk J. Struik em 1967, os povos egípcios foram os primeiros a trabalhar com frações, tendo como aspecto mais notável da aritmética essa utilização de frações. O povo egípcio trabalhava com as frações de forma reduzida, transformando-as em soma de frações unitárias, frações do tipo $\frac{1}{b}$, com $b \neq 0$. Nessa época, eles utilizavam símbolos para representar as frações, as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$ eram as únicas que tinham símbolos especiais.

Durante a investigação sobre frações, tornou-se evidente a importância de esclarecer e explorar os distintos significados dos termos números racionais, números fracionários, fração e representação fracionária. Isso se deve à constatação, na prática educativa, de que esses conceitos frequentemente se entrelaçam equivocadamente e são erroneamente compreendidos. De modo especial, os significados carecem de tratamento mais ampliado, visto que parte-todo, ainda é o mais tratado em sala de aula, em alguns casos, em detrimento aos demais significados, como destaca Oliveira (2021). Para o pesquisador, uma representação fracionária pode ser feita com quaisquer que sejam os números, já que não necessita de uma obrigatoriedade de numeradores e denominadores inteiros, fazendo com que, por exemplo, e possa ser escrito numa representação fracionária, $\frac{24.e}{24}$, mesmo sendo um número irracional.

Podemos definir o conjunto das frações incluindo todos os números da forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são números inteiros, sendo $b \neq 0$. Os inteiros a e b que compõem uma fração recebem o nome de numerador e denominador respectivamente.

Figura 1 – Representação de fração



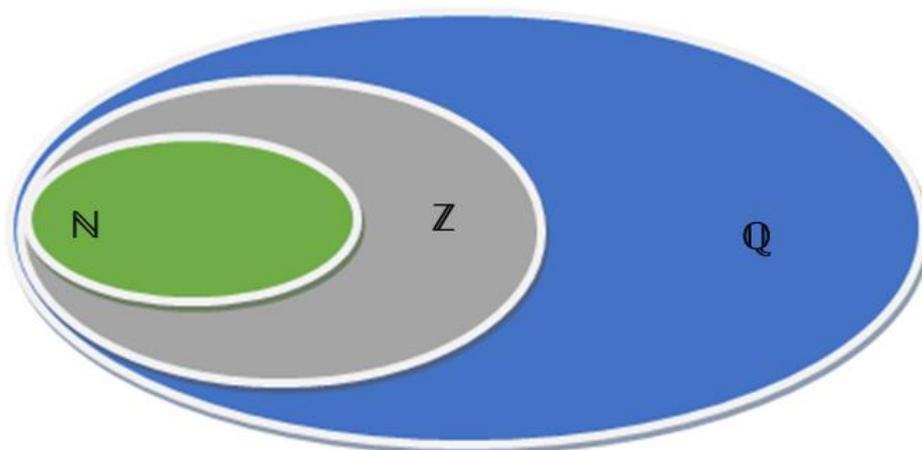
Fonte: <https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=28>

O material didático disponível no portal da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas² (OBMEP) relembra que frações podem ser vistas como divisões. Sendo assim, a fração $\frac{24}{2}$ tem o mesmo resultado que 24 dividido por dois que é 12; continuando essa ideia, podemos dizer que todos os números dos conjuntos dos naturais e inteiros podem ser escritos como uma divisão dele mesmo por um, já que dividir por um não altera o resultado. Como existe uma infinidade de divisões diferentes que resultam no mesmo resultado, como, por exemplo, $6 = \frac{24}{4} = \frac{30}{5} = \frac{42}{7}$, isso pode mostrar que existem várias formas de escrever uma só fração. Essas frações podem ser chamadas de frações equivalentes, pois mesmo sendo escritas de formas diferentes, elas equivalem a mesma quantidade.

Logo, as frações equivalentes serão todas as frações $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$, que têm o seu numerador a e denominador b multiplicados ou divididos pelo mesmo número. Desse modo, podemos chamar a fração que origina todas as outras frações equivalentes de fração irredutível.

Em resumo, podemos escrever o conjunto de racionais, também denotado por \mathbb{Q} , sendo todos os números que podem ser escritos na forma de fração, sendo assim $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}, \text{ sendo } a \text{ e } b \text{ números inteiros e } b \neq 0\}$. Com essa definição, conseguimos notar que todos os números naturais e inteiros também podem ser escritos de tal forma a serem considerados racionais, como se pode ver todo número natural n pode ser escrito como $\frac{n}{1}$ e todo número inteiro k pode ser escrito como $\frac{k}{1}$. Com essa ideia, nota-se que todo número natural e inteiro é também um número racional.

Figura 2 – Representação do conjunto dos racionais



Fonte: Elaboração própria.

² Para mais informações, acesse <https://portaldaoimpep.br/index.php/site/index>.

3 REVISÃO DE LITERATURA: ELEMENTOS CENTRAIS

Para darmos continuidade ao nosso estudo, neste item, reunimos informações sobre pesquisas já realizadas acerca do tópico curricular em foco em busca de entendimentos sobre como tornar o ensino e a aprendizagem de frações mais eficazes no ensino fundamental. Para isso, utilizamos o Quadro 1, a seguir, como parâmetro para organizar os dados obtidos de modo a possibilitar a visualização de consensos e lacunas para avançarmos na pesquisa na área.

Quadro 1 – Quadro adotado para a organização e sistematização dos dados

Nº	Referência	País	Referencial Teórico	Objetivos	Métodos	Resultados

Fonte: Fávero e Pina Neves (2006, p. 35).

Entendemos que a pesquisa na área de Educação Matemática é ampla e abrange diferentes contextos. Assim, focamos estudos que tomaram situações educacionais mais próximas às vividas por nós, tendo como intenção construir entendimentos possíveis para a pesquisa empírica da dissertação, bem como para nossa prática profissional. Para tanto, realizamos buscas nos principais periódicos da área, integrando os termos frações e ensino fundamental. Em seguida, os artigos foram lidos e aqueles que tinham realizado pesquisa empírica com frações, no ensino fundamental, por meio da abordagem didática do ensino exploratório, assim como defende Canavarro (2011), foram mantidos no estudo. Desse modo, as pesquisas incluídas no Quadro 2, expressam tal possibilidade permitindo o acesso às especificidades da abordagem didática adotada, às tarefas matemáticas utilizadas, aos modos de desenvolvê-las e de mediá-las em sala de aula.

Quadro 2 – Pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de frações no ensino fundamental

Nº	REFERÊNCIA	PAÍS	REFERENCIAL TEÓRICO	OBJETIVOS	MÉTODOS	RESULTADOS
1	QUARESMA; PONTE, 2016	Portugal	BEZUK; CRAMER, 1989 e WEBB, BOSWINKEL; DEKKER, 2008	Examinar em que medida uma abordagem exploratória contribui para o aprimoramento da capacidade dos alunos em comparar e ordenar números racionais, e analisar como eles empregam diferentes representações e descrevem seus processos de raciocínio.	O processo metodológico foi iniciado com a contextualização dos conceitos teóricos fundamentais (representações e raciocínio), seguido por uma breve revisão das pesquisas existentes sobre a comparação e ordenação de números racionais. Em seguida, foi apresentada a unidade de ensino e delineada a metodologia de pesquisa. Posteriormente, foi conduzida uma análise do desempenho de uma aluna (Leonor) antes, durante e após a implementação da unidade de ensino, com atenção especial à sua utilização de diferentes representações e aos seus processos de raciocínio.	A participação de Leonor na unidade de ensino proporcionou o aprimoramento do seu entendimento sobre números racionais e aprimorou sua habilidade na conversão entre diferentes representações. Inicialmente, com experiência limitada em frações unitárias, Leonor enfrentava dificuldades na comparação de frações simples e na comparação de números decimais com diferentes casas decimais. No entanto, ao longo da unidade de ensino, ela demonstrou uma melhora significativa na compreensão do sistema decimal, tornando-se mais hábil na comparação de números decimais. Além disso, ela desenvolveu a capacidade de comparar frações usando procedimentos formais, como a conversão para numerais decimais ou percentagens, e recorrendo à transformação de frações em equivalentes. Essa evolução sugere que a abordagem adotada na unidade de ensino facilitou uma integração positiva entre os processos informais e formais de raciocínio de Leonor.
02	PONTE; QUARESMA; MATA- PEREIRA; BAPTISTA, 2016	Brasil	FERNÁNDEZ; CANNON; CHOKSHI, 2003, PERRY; LEWIS, 2009 e MURATA, 2011	Compreender as potencialidades do estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional e os desafios que se colocam à sua realização, assim como a criação de um ambiente de	Em Lisboa, cinco professores de 5º e 6º ano, selecionados pela própria escola, participam do processo de estudo de aula, realizado em 12 sessões. As observações são tiradas de diário de bordo, gravação de áudio das sessões e de vídeo da aula de	Os resultados mostram que as professoras, depois de alguma estranheza inicial com o formato da formação, envolveram-se fortemente na resolução de tarefas matemáticas e na exploração de questões como a natureza das tarefas e os processos de raciocínio

Nº	REFERÊNCIA	PAÍS	REFERENCIAL TEÓRICO	OBJETIVOS	MÉTODOS	RESULTADOS
				confiança e trabalho colaborativo.	investigação, com transcrições integrais. As sessões foram divididas da seguinte forma: a) sessão 1: apresentar o estudo de aula às professoras e programar o trabalho; b) sessões 2 a 6: aprofundar o conhecimento sobre um tópico e preparar uma aula sobre esse tópico; c) sessão 7: observação da aula; d) sessão 8: reflexão sobre a aula; e) sessões 9 a 12: planificar e refletir sobre as aulas; f) Sessão 12: balanço final de todo o trabalho em entrevista focal.	dos alunos. As professoras evidenciam diversas aprendizagens profissionais por si realizadas, valorizando em especial as discussões coletivas na sala de aula, e destacam o trabalho colaborativo e a oportunidade para se constituírem num grupo de trabalho na escola.
03	GUERREIRO; SERRAZINA, 2017	Portugal	MOSS; CASE, 1999	O trabalho busca perceber como se pode construir uma aprendizagem com compreensão dos números racionais, remetendo a uma aprendizagem enquadrada numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número. Assim, tenta-se compreender o papel que as representações assumem à medida que são usadas e transformadas como modelos de situações contextualizadas e vão evoluindo para modelos de raciocínio por alunos do 1º ciclo do Ensino Básico (dos 8 aos 10 anos).	É apresentada uma trajetória de aprendizagem que privilegia inicialmente a compreensão da percentagem e são analisadas quatro tarefas de uma experiência de ensino, que seguem os procedimentos metodológicos de uma Investigação Baseada em Design. Os dados foram recolhidos através da observação da participante, apoiada em um diário de bordo, gravações em áudio e vídeo das aulas e produções dos alunos. A implementação da experiência de ensino acontece em uma mesma turma em que a professora titular é também investigadora (primeira autora), ao longo de vinte aulas no 3º e 4º anos, nos anos letivos de 2012/2013 e 2013/2014. A turma, com vinte alunos no 3º ano e vinte e dois no 4º, com idades entre 8 e 10 anos, conta com alunos provenientes	A análise evidencia que a construção coparticipada de modelos a partir de representações, inicialmente associadas à percentagem, fortalece a interpretação de relações e facilita a compreensão de conceitos relativos aos números racionais. Os resultados permitem, ainda, evidenciar que o trabalho com a percentagem pode ser desenvolvido afastado dos procedimentos de cálculo formais, como afirmam Moss e Case (1991), privilegiando-se o desenvolvimento de estratégias de cálculo que coordenam os conhecimentos intuitivos dos alunos com as estratégias de manipulação dos números inteiros que dominam, como a da composição e decomposição dos números ou a das metades/dobros. Progressivamente, o modelo deixa a função de representar um problema contextualizado (modelo de) e passa a constituir base do raciocínio

Nº	REFERÊNCIA	PAÍS	REFERENCIAL TEÓRICO	OBJETIVOS	MÉTODOS	RESULTADOS
					de um meio socioeconômico médio-baixo, em uma escola pública da Grande Lisboa, em Portugal. Esse percurso segue uma trajetória de aprendizagem inspirada em Moss e Case (1999), considerada pouco comum no 1º ciclo do Ensino Básico, em que o trabalho com a porcentagem em um significado de medida é inicialmente privilegiado.	matemático (modelo para). Dessa forma, o modelo é interpretado como uma construção gradual que resulta da atividade do aluno sobre uma representação, apoiando a construção de relações e constituindo a base do seu raciocínio matemático.
04	MAIA, 2019	Brasil	BEHR et al., 1983; MIOLA (2011) e ROSSATO (2014)	Apresentar algumas considerações sobre as teses e dissertações que envolvem o ensino e a aprendizagem de números racionais nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a partir de um levantamento de teses e dissertações brasileiras de 2001 a 2015.	Pesquisa de caráter exploratório e histórico-bibliográfico, o que a insere no âmbito das pesquisas do tipo Estado da Arte nos moldes apresentados por Romanowski. Foi realizada uma busca em todo o território brasileiro por meio de consulta ao banco de teses e dissertações da CAPES e da BDTD, além dos diversos programas de estudos pós-graduados das universidades brasileiras, para ter o acesso aos resumos e/ou trabalhos completos, no período de 1997 a 2017. Foi apresentado um recorte da tese de doutorado em andamento, em trabalhos que investigam ou responderam questões referentes ao ensino e aprendizagem de números racionais nos diferentes níveis do currículo. Foram catalogados 115 trabalhos, sendo filtrados em 11, que foram realizados em âmbito nacional dos programas stricto sensu e que estudaram sobre ensino e aprendizagem de	O recorte apresentado traz pistas sobre a necessidade de uma mudança no que diz respeito ao ensino dos números racionais nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Há um consenso entre os pesquisadores apresentados, no sentido de que o ensino dos números fracionários é fortemente focado no significado de parte-todo e que isso acaba levando a não compreensão dos números fracionários pelos alunos. Além, disso a maioria sugere mudanças no currículo e na prática docente. Apesar de os trabalhos darem ênfase a representação fracionária ou a representação decimal, percebemos que, em todos, fica evidenciada a necessidade de se trabalhar as duas representações nas sequências de atividades propostas a fim de garantir a compreensão do número racional.

Nº	REFERÊNCIA	PAÍS	REFERENCIAL TEÓRICO	OBJETIVOS	MÉTODOS	RESULTADOS
					<p>números racionais nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Foram considerados os estudos que abordam documentos oficiais, livros didáticos, práticas pedagógicas, aprendizagem dos alunos de licenciatura em matemática e da pedagogia e avaliações externas. Seguindo esses critérios, foram realizadas 23 investigações em nível de doutorado e 92 em nível de mestrado, sendo que nos anos de 2015 e de 2016 há o maior número de pesquisas publicadas, totalizando 14 em cada um desses anos.</p>	
05	OLIVEIRA; BASNIAK, 2021	Brasil	BEHR et al. (1983), ESCOLANO (2007) e LAMON (2012).	Refletir sobre o ensino e a aprendizagem de frações a partir da problematização das múltiplas interpretações que envolvem esse objeto matemático, em uma perspectiva histórica e epistemológica.	Foi realizado um ensaio teórico, no qual se diferenciam números fracionários, fração e números racionais e discute-se a imbricação entre o senso numérico e o senso fracionário, e como as características do primeiro refletem no segundo. Em seguida, apresentam-se as diferentes interpretações das frações e suas implicações para a compreensão dos números racionais. Ao final, discute-se a compreensão dessas questões para o ensino e a aprendizagem da matemática. Os pesquisadores mobilizaram a bibliografia conforme a necessidade para construir sua argumentação, fundando as discussões em autores que introduzem a problemática referente às múltiplas interpretações das	O estudo indicou que, a fim de que os alunos compreendam as diferenças entre o conjunto dos números racionais em relação aos números naturais, admite-se que a introdução ao ensino de frações seja realizada pela interpretação medida, compreendida como uma relação de comparação multiplicativa entre quantidades, porque coincide com a gênese histórica das frações, que emergem da necessidade de medir quantidades contínuas. Para isso, são necessários estudos empíricos que esclareçam quando e como ensinar cada interpretação de fração, favorecendo sua compreensão, diferenciação e associação aos demais conteúdos matemáticos.

Nº	REFERÊNCIA	PAÍS	REFERENCIAL TEÓRICO	OBJETIVOS	MÉTODOS	RESULTADOS
					frações e sua importância para o ensino e para a aprendizagem.	
06	AMARAL; RODRIGUES; SOUZA; POWELL, 2023	Brasil	POWELL et al. 2022 BOGDAN; BIKLEN, 1994	Propõe identificar, por meio de uma revisão integrativa (sistemática mais narrativa) de literatura, noções de professores e futuros professores que ensinam matemática, emersas de tarefas planejadas para investigação sobre unidade de referência ou fração unitária, apontadas em artigos científicos revisados por pares sobre Educação Matemática. A revisão foi realizada a partir de buscas por artigos científicos publicados em periódicos e anais de eventos, ambos nacionais e internacionais, com amplo acervo científico na área de Educação Matemática – Scielo, Springer, Science Direct, Scopus, Web of Science, Eric e Doaj – tendo em conta responder ao seguinte questionamento: Que noções emersas de tarefas planejadas para investigação sobre unidade de referência e fração unitária apresentam professores e futuros professores que ensinam matemática? Assim como a sistemática, a revisão narrativa de literatura (RNL) tem caráter qualitativo e descritivo (BOGDAN; BIKLEN, 1994), e foi debruçada sobre tarefas planejadas para investigar	A revisão sistemática de literatura (RSL), de caráter qualitativo e descritivo, foi elaborada tomando os cinco passos descritos por Khan et al. (2003): 1. Esboçar questões para uma revisão; 2. Identificar trabalhos relevantes; 3. Avaliar a qualidade dos estudos; 4. Resumir a evidência; 5. Interpretar os achados. A sistematização, embora ampla, não trouxe artigos relevantes publicados em periódicos brasileiros por não estarem indexados nas bases tradicionais da Educação. Por isso, foi incluída uma seção para abrigar uma revisão narrativa (RNL) de dois artigos não contemplados na sistematização (B1 e B2). Os nove trabalhos da RSL, em geral, se concentraram em discussões sobre conhecimento de unidade de referência, frações unitárias e conceito de fração por meio de tarefas. Os resultados de buscas preliminares que antecederam a RSL indicaram poucos estudos sistemáticos e epistemológicos sobre o tema, e, por essa razão, não foram colocadas limitações temporais na pesquisa de artigos. Assim, foram selecionados nove artigos (A1-A9) que seguiram para leitura completa, verificação, classificação de aderência e posterior análise. Eles foram divididos em quatro	A autora concluiu pela existência de lacunas sobre as compreensões básicas do que seja a unidade de medida para apoio à análise de situações que envolvam números fracionários. Ademais, a unidade de medida não parece ter apoiado os participantes para a resolução das tarefas. Foram identificados que a compreensão de unidade de referência pelos professores parece influenciar as opções de algumas resoluções de tarefas matemáticas. Por exemplo, sua compreensão parcial pode levá-los a optar por estratégias equivocadas (COPURGENCTURCK; OLMEZ, 2020; SOUZA, 2021; POWELL et al., 2022), como adotar a mesma unidade de referência para operações aritméticas com frações que têm unidades diferentes. Com exceção do artigo A6, todos os trabalhos que se referiam à compreensão das frações unitárias comprovaram a hipótese de Ciosek e Samborska (2016, p. 22) de que “em um procedimento iterativo de dissecar algo em n partes iguais para constituir uma fração 1/n pode deixar a falsa crença de que se um inteiro está dividido em n partes desiguais, nenhuma delas pode ser $1/n$ do seu comprimento”. Essa falsa crença, ao lado da interpretação de que a única forma de obter 1/n de um todo dado é dividindo-o em n partes iguais (POWELL, 2022), molda a

Nº	REFERÊNCIA	PAÍS	REFERENCIAL TEÓRICO	OBJETIVOS	MÉTODOS	RESULTADOS
				<p>unidade de referência ou fração unitária. A busca por artigos científicos harmonizados com esse tema ocorreu no Google Scholar com os mesmos descritores da sistemática, mas traduzidos para a língua portuguesa.</p>	<p>categorias: 1. Tarefas baseadas em esquemas (A4, A5 e A7); 2. Tarefas apoiadas em partição e iteração (A1, A3, A8 e A9); 3. Tarefas sobre a compreensão da fração unitária (A6); 4. Tarefa sobre a compreensão da importância da unidade de referência (A2). As argumentações aconteceram ao longo de oficinas propostas em uma formação continuada com 20 professores dos anos iniciais do ensino básico. As oficinas objetivavam oportunizar aprofundamento conceitual em relação aos números fracionários e à vivência de práticas de ensino, incluindo a ideia de fração como unidade de medida.</p>	<p>percepção equivocada de como muitos professores (e não apenas alunos, como na investigação de Ciosek e Samborska (2016)) percebem o todo e uma fração unitária associada, podendo influenciar negativamente na aprendizagem de alunos sobre frações e operações aritméticas com frações. A respeito da unidade de referência, os artigos demonstraram que houve pouca percepção ou atenção ao inteiro nas tarefas por parte dos professores, levando-os a cometerem equívocos. O artigo B1 descreveu um trabalho formativo que promoveu alguma compreensão sobre a unidade de medida por professores de anos iniciais do ensino básico. Os resultados de B1 mostraram desconhecimento do reconhecimento de frações unitárias e da importância do apoio da unidade de referência para solução de tarefas envolvendo frações. Essa conclusão foi corroborada pelo artigo B2, que, embora não tenha sido um trabalho formativo, mostrou um retrato do status quo da incompreensão acerca da unidade de medida por atores que atuam no ensino básico.</p>

Fonte: Elaborado pelos autores.

3.1 Compreensões e encaminhamentos

A leitura das pesquisas reunidas no Quadro 2 nos auxiliou no entendimento de alguns consensos e necessidades em termos de prática docente. De modo geral, os estudos revelam falhas conceituais entre os alunos do ensino fundamental II sobre os conjuntos numéricos e defendem que a introdução do ensino de frações ocorra alinhada à gênese histórica das frações, ou seja, a partir da necessidade de medir quantidades contínuas. Do mesmo modo, alertam para a primazia do ensino dos números fracionários focado no significado parte-todo, prejudicando a compreensão dos demais significados.

Os estudos mostram, ainda, as escolhas dos pesquisadores em termos de uso de materiais manipulativos, como material dourado e quadro de valor de lugar, com o intuito de consolidar os conhecimentos prévios dos alunos e ampliar suas compreensões conceituais. Igualmente, revelam a necessidade de novas propostas didáticas, contrapondo-se ao excessivo uso em regras e procedimentos ainda vigentes em muitas salas de aula.

3.2 Abordagem exploratória e o ensino de frações

A abordagem exploratória, conforme Canavarro (2011, p. 11 apud Richit; Tomkelski; Richit, 2021, p. 5), oferece ao estudante caminhos e/ou referências para a descoberta conceitual. Esses caminhos são colocados como possibilidades, não como um único percurso a ser seguido. No contexto do ensino exploratório, os alunos aprendem por meio do trabalho sério com tarefas valiosas que destacam a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas, as quais são sistematizadas em discussão coletiva.

Ao se envolverem em tarefas exploratórias instigantes e desafiadoras, os alunos têm a chance de verem surgir, de maneira significativa, procedimentos, conceitos e conhecimentos matemáticos. Simultaneamente, desenvolvem capacidades, como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática. Essas tarefas tornam as aulas de Matemática mais significativas e desafiadoras, pois estimulam a necessidade de processos de resolução, contribuindo para a compreensão de procedimentos e conceitos matemáticos e promovendo o desenvolvimento do conhecimento matemático dos alunos.

De acordo com Richit, Tomkelski e Richit (2021, p. 6), a tarefa exploratória se aproxima da perspectiva de problema, incorporando o aspecto da exploração. Nesse contexto, os alunos desempenham um papel ativo ao se envolverem em atividades mais abertas, estruturadas e com um nível equilibrado de desafio, elaboradas com base nas características e necessidades da

turma. Essa abordagem exploratória pode favorecer o trabalho com diferentes tópicos curriculares, facilitando a aprendizagem e o desenvolvimento dos alunos.

Na abordagem exploratória, o estudante assume o papel de protagonista na resolução das tarefas matemáticas, sendo convidado a interpretá-las, representar as informações apresentadas e conceber estratégias de resolução, devendo ser capazes de apresentá-las e justificá-las perante a turma. O professor, nessa abordagem de ensino, desempenha papéis fundamentais e muito diferentes da abordagem didática tradicional, uma vez que deve promover um ambiente de descoberta, de trocas, de argumentação e de defesa das estratégias de resolução concebidas. Assim, cabe ao professor promover o estudante à categoria de protagonista na interpretação das tarefas; mediar possíveis conflitos entre os alunos no momento de apresentação e discussão das diferentes resoluções, levando os alunos a desenvolverem maior capacidade de diálogo e de defesa de suas estratégias. Dessa forma, proporcionará entre os alunos a capacidade de explorar ideias e conceitos matemáticos em diferentes contextos.

Lopes (2008) ressalta a persistência de equívocos no ensino de Matemática, como a ênfase em nomenclaturas inúteis e conceitos obsoletos, destacando a urgência de evitar a introdução precoce de conceitos, como frações aparentes e impróprias, priorizando uma abordagem que estimule a intuição dos alunos.

O ensino tradicional de frações, até os dias atuais, caracteriza-se por uma abordagem que carece de significado para os alunos. Normalmente, as frações são apresentadas de forma técnica, com numerador e denominador, sem que esses termos tenham um significado claro para os alunos. Nesse sentido, Loss (2016) destaca que, ao longo de sua trajetória estudantil, a Matemática foi apresentada como uma ciência pronta e acabada, exigindo memorização de códigos e símbolos matemáticos, sem enfatizar a compreensão. As lembranças desse ensino são caracterizadas pela resolução de problemas desvinculados do contexto real e a prática de cálculos repetitivos, sem considerar a compreensão.

Muniz (2010), por sua vez, afirma que as dificuldades dos alunos poderiam ser minimizadas por meio do ensino de natureza exploratória, que envolvesse situações desafiadoras com significado para o aluno. Corroborando tal afirmação, Biembengut (2010) defende a importância de proporcionar situações-problemas que exijam leitura, interpretação, formulação e explicação de contextos matemáticos. Assim, busca-se, portanto, promover um ensino que permita a investigação e o desenvolvimento de habilidades de exploração e interpretação do aluno. Logo, é crucial adotar uma abordagem didática, especialmente em relação às frações, para promover uma aprendizagem mais significativa e eficaz. Isso envolve

a criação de contextos desafiadores, a ativa participação dos alunos na resolução de problemas e a mediação eficaz do professor para desenvolver o raciocínio e a compreensão matemática dos estudantes.

A palavra “autonomia” é, frequentemente, mencionada na BNCC (Brasil, 2018), predominantemente associada às competências das escolas, como ressalta o documento: “Cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos” (Brasil, 2023, p. 15). Já o termo “descoberta” é mencionado treze vezes na BNCC, e na Matemática, especificamente, destaca-se:

Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho (Brasil, 2023, p. 269).

Aqui, enfatiza-se a importância de reconhecer a Matemática como uma ciência viva que contribui para descobertas e construções, influenciando até mesmo o contexto profissional.

O termo “protagonismo” é mencionado quarenta e seis vezes na BNCC, embora não haja nenhuma menção específica na área da Matemática. A BNCC (Brasil, 2023, p. 15) destaca:

Assim, a BNCC propõe a superação da fragmentação radicalmente disciplinar do conhecimento, o estímulo à sua aplicação na realidade, a importância do contexto para dar sentido ao que se aprende e o protagonismo do estudante em sua aprendizagem e na construção de seu projeto de vida.

A perspectiva da BNCC é de que, para a aquisição do conhecimento, o aluno precisa ser protagonista, com o ensino centrado nele e na construção do seu próprio conhecimento, estabelecendo uma relação entre o que já sabe e o conhecimento apresentado. Ainda no mesmo documento, temos que:

Na Matemática escolar, o processo de aprender uma noção em um contexto, abstrair e depois aplicá-la em outro contexto envolve capacidades essenciais, como formular, empregar, interpretar e avaliar – criar, enfim –, e não somente a resolução de enunciados típicos que são, muitas vezes, meros exercícios e apenas simulam alguma aprendizagem (Brasil, 2018, p. 277).

Assim, apesar da ausência do termo específico, as orientações indicam a necessidade de os alunos formularem e interpretarem problemas, contribuindo para a construção de

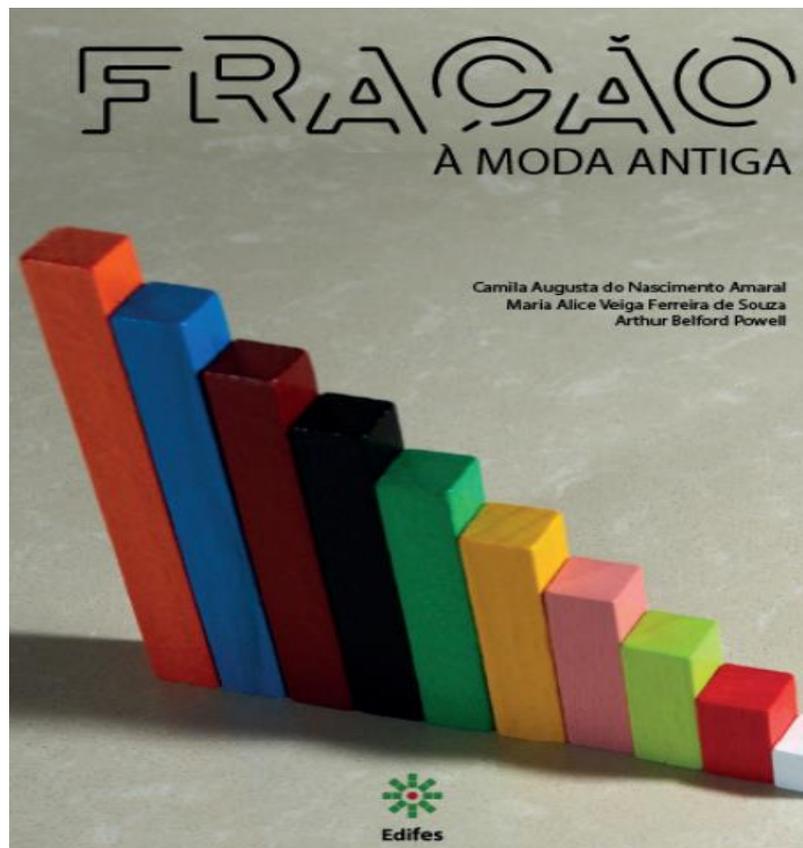
conhecimento, indo além da resolução de exercícios padronizados.

Diante de tudo isso, a presente pesquisa busca compreender as possibilidades da abordagem exploratória para promover a aprendizagem de frações no 6º ano do Ensino Fundamental, buscando novas possibilidades para o aprendizado de frações.

4 FRAÇÕES NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO E PESQUISA

Os estudos reunidos no Quadro 2 e os consensos que eles apresentam motivaram-nos a buscar um estudo focado no nosso interesse central: as frações e o seu ensino no sexto ano do ensino fundamental. Logo, debruçamo-nos sobre os estudos de Amaral (2021) e Amaral et al. (2021) por entender que eles reuniam aspectos conceituais que gostaríamos de entender e, também, por relatar uma experiência prática com estudantes. Assim, neste item, registramos aspectos do estudo realizado, destacando os recursos didáticos usados e as características da prática docente realizada.

Figura 3 – Capa do livro



Fonte: <https://repositorio.ifes.edu.br/>

Figura 4 – Sumário do livro



01. VOCÊ SABE COMO SURGIRAM AS FRAÇÕES	15
02. BARRAS DE CUISENAIRE E AS FRAÇÕES	18
03. 4A INSTRUCTIONAL MODEL	24
04. COMO ESSA PROPOSTA DIDÁTICA FOI CONSTRUÍDA?	32
05. VAMOS COMEÇAR A PRATICAR?	37
MAS, ANTES	38
AULA 01	42
AULA 02	51
AULA 03	60
AULA 04	70
AULA 05	81
AULA 06	90
ENFIM, O QUE PODE SER DIFERENTE?	97
CONHEÇA ALGUMAS REFERÊNCIAS QUE APOIARAM A CONSTRUÇÃO DESSA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	99
POSFÁCIO	103

Fonte: <https://repositorio.ifes.edu.br/>

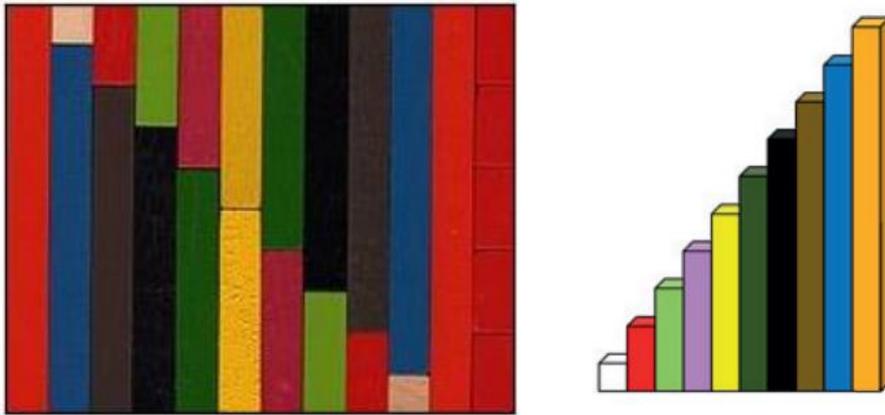
Nesse processo, foi necessário conhecer um recurso didático que, até então, não tínhamos conhecimento, as barras de Cuisenaire. No item seguinte, apresentamos informações centrais sobre tal recurso de modo ampliar o conhecimento a seu respeito.

4.1 Barras Cusinaire: aspectos históricos

As barras de Cuisenaire (Figura 5), também conhecidas como material manipulativo de Cuisenaire, apresentam uma versatilidade notável e são empregadas no ensino de diversos conteúdos matemáticos, abrangendo desde as operações aritméticas básicas até conceitos mais avançados, como frações, áreas e volumes de figuras geométricas, raízes quadradas, equações lineares e quadráticas e sistemas de equações.

Georges Cuisenaire (1891-1976) foi um professor belga e a ele é creditada a invenção dessas régua coloridas de madeira, concebidas originalmente para o ensino de aritmética aos seus alunos.

Figura 5 – Barras de Cuisenaire

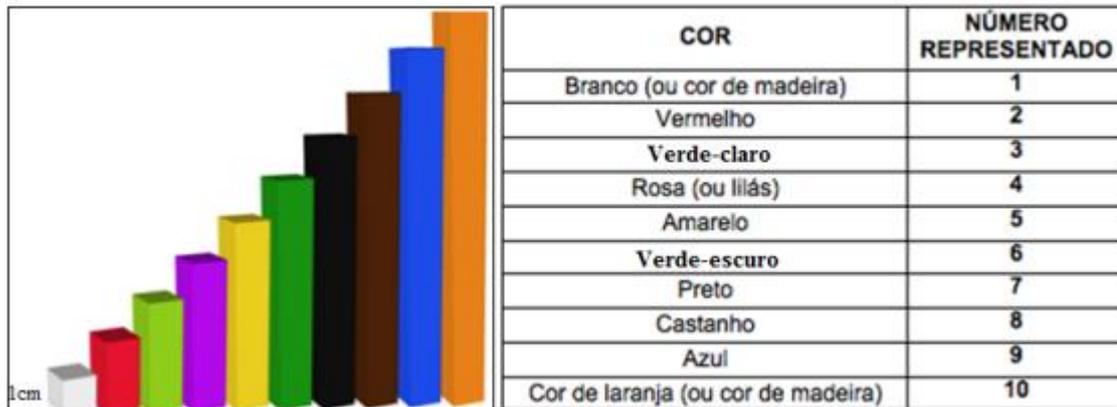


Fonte: Drummond (2016).

Entretanto, a disseminação dessas barras como recurso educacional efetivo para o ensino de Matemática foi impulsionada por Caleb Gattegno (1911-1988), um educador e matemático egípcio. Gattegno, que conduziu pesquisas em diversas áreas, incluindo Educação Matemática, linguística e psicologia, centralizou suas preocupações sociais no contexto africano. Em suas propostas educacionais, ele promovia a matematização de situações cotidianas, permitindo aos alunos associarem conceitos matemáticos a problemas concretos por meio da dedução e indução. Em 1953, ao deparar-se com o trabalho de Georges Cuisenaire, ele reconheceu o potencial pedagógico e matemático dessas barras, iniciando sua aplicação no ensino de diversos conteúdos matemáticos para seus alunos (Powell, 2004).

Além disso, o potencial pedagógico das barras de Cuisenaire demonstra aplicabilidade no processo de ensino e aprendizagem de crianças cegas. Para isso, foi empreendido um processo didático-pedagógico para adaptar esse material manipulativo, substituindo as cores por texturas, mantendo, no entanto, as características fundamentais das barras de Cuisenaire e a associação entre cores e números (Figura 5).

Figura 6 – Associação entre as cores os números nas barras de Cuisenaire



Fonte: (Drummond, 2016, p.14).

O conjunto de barras de Cuisenaire, constituído por barras prismáticas quadrangulares de madeira em dez tamanhos diferentes, apresenta-se como um material de base 10, com cores padronizadas. Além de sua utilidade na coordenação motora, o material é empregado para o desenvolvimento da memória, comparação, percepção de forma, tamanho e cores (Coelho et al., 2010).

O ensino da Matemática desempenha um papel crucial no desenvolvimento do pensamento lógico e do raciocínio dedutivo, capacitando os alunos a aprenderem, explorarem e descobrirem ideias de forma independente por meio da descrição, categorização, direção, quantidade, formas e atributos lógicos. No entanto, para alunos com dificuldades conceituais, a visualização de conceitos matemáticos demanda um processo cognitivo mais abrangente (Dick; Kubiak, 1997). Nesse sentido, a utilização de materiais manipulativos é uma abordagem eficaz, como destaca Brandão (2004, apud Silva, 2010), que ressalta que a aprendizagem de qualquer conceito matemático é facilitada quando associada a objetos concretos.

4.2 Uma experiência de ensino e pesquisa

Em Amaral (2021) e Amaral et al. (2021) conhecemos o estudo que foi realizado junto a 160 alunos dos três últimos anos do Ensino Fundamental (dos 10 aos 12 anos) e professores da educação básica do ensino público. Os objetivos do estudo centram-se em três focos: favorecer a construção de concepções adequadas, potencializar a ideia de número racional e facilitar a construção de ideias abstratas.

Para que os objetivos fossem alcançados, os pesquisadores adotaram o modelo de medida. Assim, a pesquisadora Amaral e outros onze professores formaram um grupo colaborativo e planejaram as aulas de acordo com a proposta de desenvolvimento profissional mundialmente conhecida por Lesson Study³ (Pina Neves; Fiorentini, 2021). As atividades planejadas pelo grupo foram divididas em seis aulas, cada uma com duração de 100 minutos.

A primeira aula teve como objetivo a manipulação e descoberta do material concreto adotado, introduzindo nomenclaturas como “trem”, “monotrem” e “multitrem”, assim como também conceitos básicos “maior que”, “menor que”, “igual a” e “diferente de”, juntamente com comparações de medidas entre as barras. A segunda focava o aspecto escrito, no qual as atividades passavam a englobar a elaboração de sentenças matemáticas que focalizam as comparações dos comprimentos das barras de Cuisenaire. As atividades apresentavam os símbolos que seriam atribuídos a cada cor de barra, visando simplificar a escrita das referidas sentenças.

Na terceira aula, foi utilizada a nomenclatura das frações, por meio de atividades que visavam representar frações nas barras e vice-versa. A quarta aula abordava equivalência de frações e comparações com o mesmo denominador. Na quinta sessão, foram exploradas as comparações entre frações com numeradores e denominadores diferentes por meio do “jogo” da “corrida das cores”, com o objetivo de igualar os denominadores para encontrar frações equivalentes. Na sexta e última sessão, foram exploradas comparações entre frações com o mesmo numerador, porém com denominadores diferentes. Com o objetivo de cumprir o planejamento construído coletivamente pelos 11 professores, cada aula foi desenvolvida de acordo com ações previamente planejadas, conforme evidenciado pelos dados apresentados a seguir.

4.2.1 Aula 1

Foi distribuído um kit de barras para cada dupla/trio de alunos como procedimento inicial. Nos primeiros minutos da aula, permitiu-se que os estudantes manipulassem as barras de forma livre. Posteriormente, foi solicitado que formassem desenhos com elas sobre a carteira. Em seguida, introduziu-se a nomenclatura de trem, monotrem e multitrem, com exemplos apresentados no *flipchart* para possível consulta dos alunos.

³ Para mais informações, acesse: <https://www.even3.com.br/iisilsem/>.

Foram explicadas as definições de trem, monotrem e multitrem: “Um trem pode ser uma única barra ou uma barra ligada a outra pela ponta, podendo estar na horizontal ou na vertical”; “Um monotrem possui duas ou mais barras da mesma cor enfileiradas”; e “Um multitrem possui duas ou mais barras de cores diferentes enfileiradas”. Os alunos foram instruídos a levantar as barras para exemplificar os conceitos de trem, monotrem e multitrem, além de mostrar a formação de uma escadinha. Posteriormente, foi proposto aos alunos o questionamento sobre quais barras poderiam ter o mesmo comprimento de um monotrem formado apenas com barras vermelhas e quais vagões não poderiam ter o mesmo comprimento de um monotrem formado apenas com vagões vermelhos, incentivando a discussão entre os colegas.

A ação do professor incluiu a orientação para que os alunos observassem e discutissem as semelhanças entre os grupos formados. Caso eles não reconhecessem as diferenças de comprimento das barras, o professor deveria retornar à atividade de contagem das barras brancas nas barras de outras cores para alcançar o reconhecimento dos grupos de barras com comprimento par e ímpar, e questionar novamente os alunos sobre as diferenças observadas.

As mediações que foram realizadas fizeram com que os alunos trabalhassem vários conceitos, como números pares, ímpares, múltiplos e que se familiarizassem com as características das barras, ajudando com que eles se familiarizassem com o material concreto. As atividades que trabalham a questão dos números pares, ímpares, múltiplos, entre outras características com as barras, ajudaram na familiarização com o material concreto, o que auxiliou na internalização das correlações entre as cores e a unidade de medida associada a cada barra.

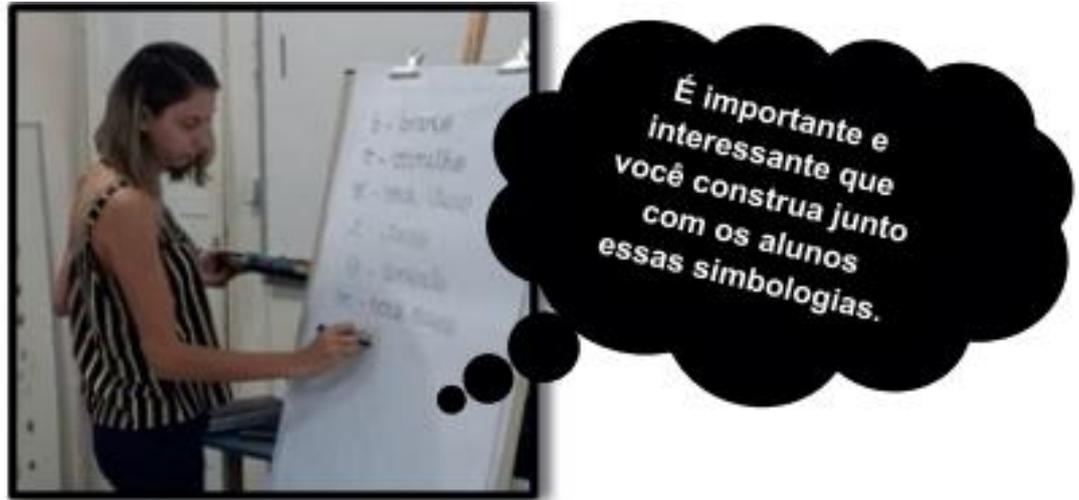
4.2.2 Aula 2

Durante a segunda aula, os alunos foram desafiados a identificar quais barras poderiam ter o mesmo comprimento de um monotrem constituído apenas por duas barras. Na ausência da apresentação de todas as possibilidades pelas duplas, o professor investigou se existiam outras combinações que satisfaziam essa condição, solicitando que os alunos compartilhassem suas descobertas com o restante da classe. O mesmo processo foi aplicado para determinar quais barras poderiam ter o mesmo comprimento de um monotrem formado por apenas três barras.

Com o intuito de facilitar o entendimento, estabeleceu-se uma convenção na qual cada cor de barra foi representada por uma letra, como branco (b), vermelho (v), verde claro (c), roxo (r), amarelo (o), verde escuro (e), preto (p), marrom (m), azul (a) e laranja (l). O professor

introduziu essa simbologia no *flipchart*; em seguida, os alunos foram questionados sobre a correspondência entre as letras e as barras, com ênfase na compreensão mútua das representações.

Figura 7 – Simbologias utilizadas nas atividades escritas

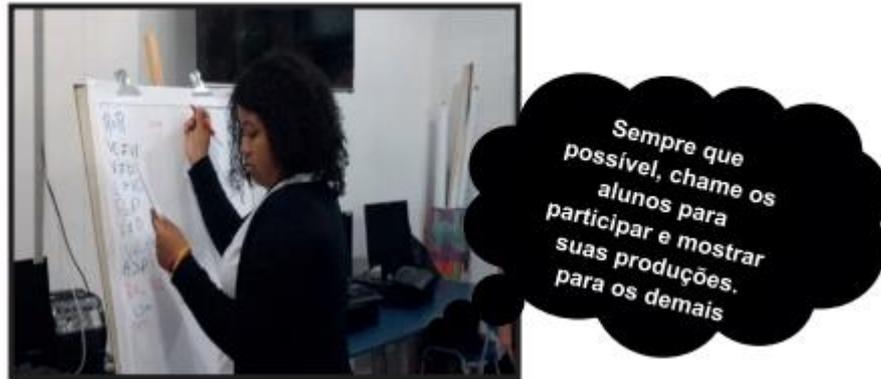


Fonte: Amaral (2021, p. 53).

Posteriormente, foram propostas atividades práticas nas quais os alunos foram desafiados a formar multitrens com determinadas combinações de cores e a analisarem as relações de comprimento entre esses multitrens. Eles foram incentivados a compartilharem suas descobertas e foram envolvidos na discussão dos diferentes multitrens formados.

Ao longo das atividades, os alunos foram convidados a criar sentenças matemáticas, utilizando os símbolos de comparação ($>$, $<$, $=$, \neq) e aplicando os conceitos discutidos. O professor orientou os alunos na elaboração e na verificação da veracidade das sentenças, recolhendo as folhas produzidas por eles e conduzindo uma discussão sobre as conclusões obtidas a partir das comparações realizadas. Em caso de dificuldades na compreensão da comutatividade, o professor forneceu exemplos adicionais para elucidar esse conceito.

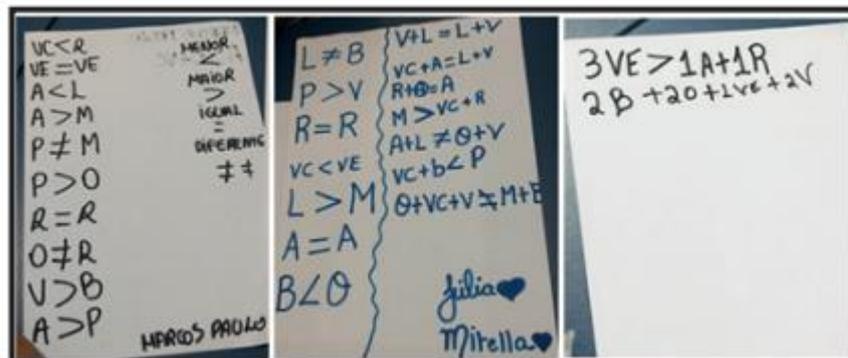
Figura 8 – Alunos apresentando suas produções.



Fonte: Amaral (2021, p. 56).

Foi perceptível, ao longo dessa sessão, que houve uma progressão na complexidade das sentenças formadas pelos estudantes. Inicialmente, os alunos compararam apenas os comprimentos de uma barra com outra e, mais tarde, avançaram para comparações envolvendo monotrens e multitrens. Durante esses momentos, eles exploraram conceitos de Álgebra e entenderam algumas propriedades fundamentais, como a comutatividade e a associatividade entre os elementos, sem que fossem fornecidas definições ou rótulos explícitos. Durante as atividades, os alunos perceberam, de forma natural, como escrever de forma mais simples as expressões. Do mesmo modo, eles foram introduzidos à escrita de equações e inequações sem receber denominações ou definições formais. Isso fez com que eles conseguissem perceber de forma mais clara que o que estavam aprendendo era Matemática.

Figura 9 – Trabalhos escritos



Fonte: Amaral (2021, p. 59).

4.2.3 Aula 3

Após a demonstração da compreensão dos comprimentos das barras de Cuisenaire pelos alunos, o início do trabalho com frações foi marcado nesta aula. As atividades propostas consistiram na representação de frações utilizando as barras.

Figura 10 – Alunos representando a fração $\frac{1}{2}$ com as barras



Fonte: Amaral (2021, 67).

Observe que na Figura 10, extraída de Amaral (2021, p. 67), o balão de texto destaca que “Com essa atividade, o aluno perceberá que a fração $\frac{1}{2}$ nem sempre representa a mesma medida, depende da unidade de medida estabelecida”. No entanto, tecnicamente, a fração não representa necessariamente o mesmo comprimento. A medida em si permanece como $\frac{1}{2}$, embora a unidade de medida possa variar, resultando em diferentes comprimentos.

Figura 11 – Alunos representando a fração $\frac{13}{7}$ com as barras



Fonte: Amaral (2021, p. 68).

O professor conduziu questionamentos sobre o comprimento de uma barra verde escura em comparação com o comprimento de um monotrem formado por 6 barras brancas e incentivou os alunos a expressarem essas relações no *flipchart*. Foram feitas observações para garantir o entendimento adequado dos alunos, como a verificação da expressão “ $e = 6b$ ” para representar o comprimento das barras.

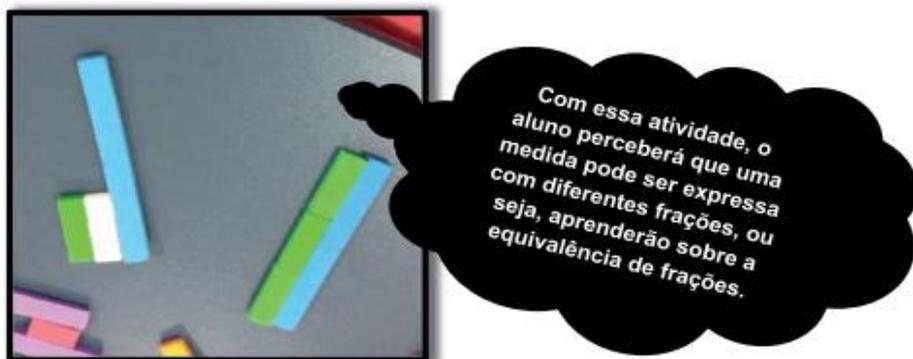
Outros questionamentos foram propostos, com comprimento de um monotrem formado por 2 barras verde escuras comparado ao comprimento de um monotrem formado por 6 barras brancas, e o comprimento de um multitrem formado por diferentes barras. Os alunos foram encorajados a escreverem essas sentenças no *flipchart* para promover a participação deles na atividade.

Além disso, os alunos foram orientados a criar sentenças matemáticas livremente, usando as barras, e responderam a questões sobre o comprimento das barras em relação a outras cores, como o número de barras brancas necessárias para igualar o comprimento de uma barra preta. O professor também conduziu questionamentos sobre a representação de frações com as barras, incentivando os alunos a demonstrarem diferentes modos de representação para a turma.

4.2.4 Aula 4

Nesta aula, os alunos foram desafiados a identificar as frações de comprimento representadas por diferentes combinações de barras de Cuisenaire. O professor conduziu uma série de questionamentos para guiá-los na compreensão das frações e de suas representações visuais.

Figura 12 – Alunos representando frações equivalentes com as barras



É importante ressaltar que na Figura 12, retirada de Amaral (2021, p.72), o balão de texto indica que “Com essa atividade, o aluno perceberá que uma medida pode ser expressa com diferentes frações, ou seja, aprenderá sobre a equivalência de frações.” No entanto, para uma precisão maior, seria mais adequado afirmar que “Com essa atividade, o aluno perceberá que um comprimento pode ser expresso com diferentes frações, ou seja, aprenderá sobre a equivalência de frações”.

Inicialmente, os alunos foram questionados sobre as barras que representavam $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{2}$ do comprimento de uma barra roxa, seguido pela colocação de barras coloridas em uma ordem específica para explorar as relações de comprimento entre elas. O professor os orientou a expressarem suas conclusões no *flipchart*, incentivando a participação ativa. Os alunos também foram desafiados a identificar as barras que representavam $\frac{3}{9}$ e $\frac{1}{3}$ do comprimento de uma barra azul e a realizar comparações de comprimento entre diferentes combinações de barras. Novamente, o professor orientou os alunos na representação visual e na compreensão das frações.

Outas atividades envolveram a representação de frações como $\frac{4}{10}$ e $\frac{2}{5}$ do comprimento de uma barra laranja, seguidas por comparações de comprimento entre diferentes combinações de barras. Os alunos foram encorajados a explorar diversas representações visuais e a compartilhar suas descobertas com a turma.

Figura 13 – Participação dos alunos no *flipchart*



Além disso, os alunos foram orientados a realizar comparações de comprimento entre barras e a escreverem essas comparações utilizando símbolos matemáticos adequados. O professor guiou os estudantes na análise das comparações e na identificação de padrões comuns entre elas.

Ao longo da aula, os alunos foram desafiados com uma série de perguntas sobre frações e comparações de comprimento, incentivando-os a aplicar os conceitos matemáticos aprendidos. O professor facilitou as discussões e orientou os alunos na representação visual e na interpretação das frações em relação ao comprimento das barras.

Figura 14 – Comparações de frações conforme 1ª propriedade

The image shows two pieces of paper with handwritten mathematical comparisons of fractions. The left piece has a grid of comparisons where the denominators are made equal (e.g., $\frac{3}{4} > \frac{2}{4}$, $\frac{9}{10} > \frac{1}{10}$, $\frac{10}{6} > \frac{1}{6}$, $\frac{9}{7} > \frac{4}{7}$, $\frac{8}{3} > \frac{4}{3}$, $\frac{10}{7} > \frac{2}{7}$, $\frac{1}{2} < \frac{5}{2}$, $\frac{7}{10} > \frac{3}{10}$, $\frac{2}{3} < \frac{7}{3}$). The right piece shows comparisons like $\frac{9}{7} > \frac{3}{7}$, $\frac{1}{3} < \frac{3}{3}$, $\frac{12}{8} > \frac{4}{8}$, and $\frac{28}{22} > \frac{6}{22}$.

Depois que a propriedade é formalizada, os alunos realizarão comparações de frações sem o auxílio das barras.

Fonte: Amaral (2021, p.80).

4.2.5 Aula 5

O professor instruiu os alunos a representarem as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{5}$ utilizando as barras e questionou se $\frac{2}{3}$ era menor ou maior que $\frac{1}{5}$. Em seguida, ele escreveu essas duas frações no *flipchart*. Para verificar se algum aluno conseguiu responder corretamente, solicitou que ele explicasse seu raciocínio para os demais colegas. Caso contrário, o professor continuou com os questionamentos, abordando as dificuldades em determinar quem era menor ou maior e discutiu sobre o que precisavam fazer para comparar as medidas. Uma atividade envolveu o jogo da “corrida das cores”, em que os alunos colocaram lado a lado uma barra verde clara e uma barra

amarela até que atingissem o mesmo comprimento. Eles foram questionados sobre o número representado por ambos os monotrens e quantas barras de cada cor foram necessárias para atingir esse número. O professor também orientou os alunos a compararem monotrens com diferentes cores, como vermelho e branco, e amarelo e branco para compreenderem as relações de medidas entre eles.

Figura 15 – “Corrida das cores” para encontrar MMC entre 2 e 9

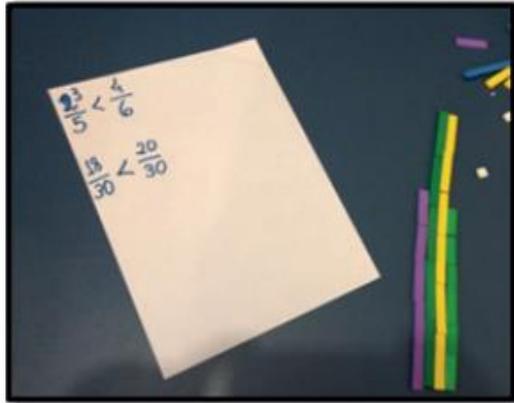


Fonte: Amaral (2021, 83).

Além disso, o professor apresentou outras frações, como $10/15$ e $3/15$, e questionou se $10/15$ era menor ou maior que $3/15$, relacionando essas medidas com as representadas anteriormente. Os alunos foram incentivados a fazerem comparações entre frações e a escreverem sentenças matemáticas usando símbolos de igualdade, maior que e menor que para expressar suas conclusões.

Após jogarem o jogo da “corrida das cores” para achar frações equivalentes com mesmos denominadores, os estudantes conseguiram fazer a comparações de forma simples, vendo que se os denominadores fossem iguais quanto maior fosse o numerador maior seria a fração.

Figura 16 – Comparações de frações conforme 2ª propriedade



Fonte: Amaral (2021, p.89).

4.2.6 Aula 6

Antes de iniciar as comparações, foi necessário igualar o denominador. Após essa etapa, o professor questionou sobre o que as comparações tinham em comum, ou seja, o que se repetiu em todas elas e concluiu com uma reflexão sobre as descobertas feitas pelos alunos. Concluiu-se que quando os denominadores são iguais basta ver qual numerador é maior para saber qual fração é maior.

Os alunos foram orientados a representar $3/2$ e $3/4$ utilizando as barras e determinar se $3/2$ era menor ou maior que $3/4$. Em seguida, foi permitido que eles realizassem a corrida das cores com as barras vermelha e roxa, seguida de perguntas sobre o número obtido e quantas barras de cada cor foram necessárias para atingir esse número. Também foram feitas comparações entre monotrens com diferentes cores para compreender as relações de medidas entre elas.

Outra atividade envolveu a representação de $6/4$ e $3/4$ com as barras, seguida pela determinação se $6/4$ era menor ou maior que $3/4$, com o professor escrevendo o sinal de maior entre as frações. Posteriormente, os alunos representaram $5/3$ e $5/2$ com as barras e determinaram se $5/3$ era menor ou maior que $5/2$, seguido pela realização da corrida das cores com as barras verde clara e vermelha. Novamente, foram feitas comparações entre monotrens com diferentes cores para entender as relações de medidas entre elas.

Ao final, os alunos receberam papel e caneta para escreverem outras sentenças comparativas, utilizando símbolos de maior que, menor que e igual a. O professor conduziu a turma a uma reflexão sobre o que as comparações tinham em comum e se havia alguma relação

entre os números apresentados e os resultados das comparações. Concluindo-se que quando os numeradores são iguais, basta ver qual denominador é menor para saber qual fração é maior.

Figura 17 – Comparações de frações conforme 3ª propriedade



Fonte: Amaral (2021, p. 96).

Ao final das sessões, Amaral (2021) destaca a ampliação das aprendizagens dos alunos e que as mediações realizadas, ao longo do processo, foram fundamentais para tal conquista. O modo como as produções e os entendimentos dos alunos foi socializado, durante as aulas, gerou autonomia, participação, esclarecimento de dúvidas, sempre apoiados nas barras – disponíveis para todos e a todo momento. O uso de *flipchat* fez com que a participação dos alunos fosse constante ao longo dos encontros, os momentos de escrita nas folhas também fizeram com que os alunos estivessem mais atentos e, assim, registrassem mais como estavam entendendo e o que estavam entendendo.

A interação com as barras de Cuisenaire, durante as aulas, não se limitou ao uso individual; ela foi fomentada por discussões em grupo, debates e reflexões coletivas. Isso criou um ambiente propício para que os alunos compartilhassem suas descobertas, aprendessem uns com os outros e construíssem conhecimentos de maneira mais ampla e diversificada em relação aos significados das frações.

O trabalho colaborativo dos professores envolvidos no planejamento e no desenvolvimento de todo trabalho fez com que as aulas fossem pensadas/analizadas e que tivessem, com mais facilidade, a previsão de dúvidas e os questionamentos dos alunos, fazendo com que as mediadoras conseguissem sanar as dúvidas e seguir com o próximo assunto. Pelas fotos e registros feitos em Amaral (2021), a pesquisadora pôde inferir que os alunos tiveram

uma participação constante e um interesse nas aulas por elas serem mais dinâmicas, envolventes e dirigidas às necessidades dos alunos.

De modo geral, podemos inferir que as aulas planejadas, desenvolvidas e analisadas em Amaral (2021) revelam possibilidades positivas do Estudo de Aula (Lesson Study) para a construção de propostas didáticas de qualidade que podem ser replicadas, revisitadas e melhoradas por outros professores e futuros professores, em diferentes contextos e momentos. Desse modo, entendemos que acessar os resultados de outras pesquisas se torna uma importante ferramenta para o desenvolvimento de outros professores.

5 METODOLOGIA

O presente estudo, de natureza qualitativa, foi realizado por meio da replicação das aulas descritas em Amaral (2021) junto a um grupo de estudantes do sexto ano do ensino fundamental de uma escola privada do Distrito Federal. A pesquisadora pediu autorização, pessoalmente, para a coordenadora do segmento do ensino fundamental II para ministrar as aulas em formato de oficinas no contraturno das aulas.

No primeiro contato com a coordenadora, juntamente com os professores regentes, eles avaliaram a proposta com a utilização de materiais concretos como de grande valia, pois todos concordaram que a aprendizagem de frações apresenta lacunas sérias ao longo de todo ensino fundamental. Após a autorização dada pela equipe de coordenação da escola e pelos pais, as aulas foram marcadas para as datas 03, 08 e 10 de agosto de 2023 e cada aula teve duração de 45 minutos. Foram realizadas aulas duplas em cada dia, totalizando uma hora e meia de aula por dia. Foi criado um *forms* para que os alunos se inscrevessem, já que a participação nas aulas era opcional.

A análise foi realizada por meio da leitura e organização dos dados produzidos pelos alunos em diálogo com os resultados dos estudos de Amaral (2021). Logo, trata-se de uma análise interpretativa do material disponível (Gil, 1999).

Figura 18 – Espaços físicos da escola



Fonte: Acervo da pesquisa.

6 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo, apresentamos a parte prática do estudo que foi realizado junto a estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental em uma escola privada do Distrito Federal. As ações realizadas pela pesquisadora e os desdobramentos em termos de ações, falas e registros dos estudantes são apresentados e discutidos a seguir. Foram ministradas três aulas duplas de 1h 30 para alunos do 6º ano, centradas na introdução às frações, utilizando o material concreto adotado. Ao longo desse texto, serão destacados os momentos de exploração, discussão mediada e ações práticas, evidenciando a interação dos alunos, as descobertas realizadas e o impacto do uso do material no processo de aprendizagem. Houve uma preparação da sala antes de iniciar as sessões, as carteiras foram organizadas de modo a atender 3 estudantes, sendo que todos os grupos teriam as barras de Cuisenaire sobre a mesa.

Figura 19 – Espaço da sala de aula organizado para início das sessões



Fonte: Acervo da pesquisa.

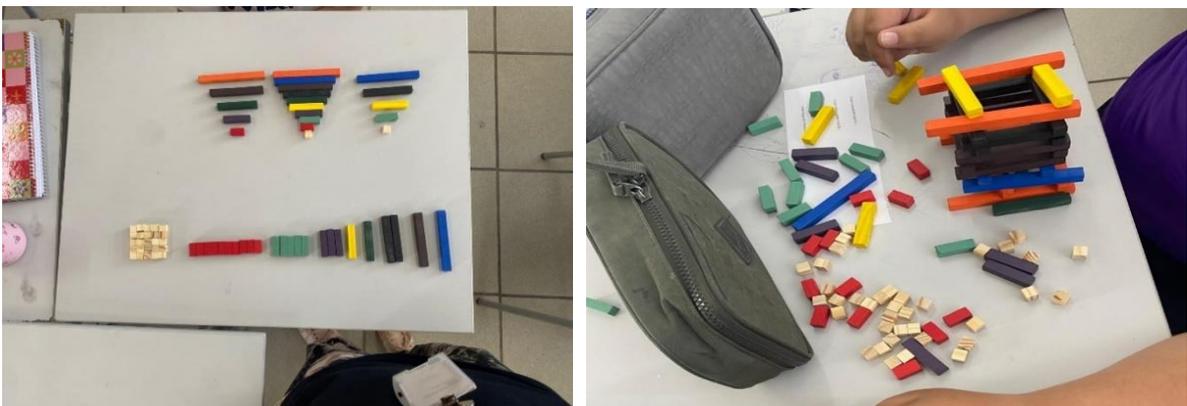
Figura 20 – Material disponível para a realização das atividades



Fonte: Acervo da pesquisa.

Na primeira sessão foi dado um primeiro momento para que todos os alunos manipulassem os materiais assim como estava previsto em Amaral (2021). Este momento foi marcado pela participação dos alunos que se mostraram interessados e curiosos. Percebemos que nesse primeiro momento eles não estavam entendendo muito como o material concreto faria parte do ensino sobre frações.

Figura 21 – Atividades com as barras de Cuisenaire



Fonte: Acervo da pesquisa.

Depois, houve o momento como previsto na aula 1, descrita em Amaral (2021), na qual foram explicados os conceitos de trem, monotrem e multitrem. Percebemos que foi um conceito muito intuitivo e bem aprendido, assim como que cada cor teria um valor e que cores iguais

teriam medidas iguais. Foi um momento de relembrar, também, alguns termos matemáticos como “menor que”, “maior que”, “igual a” e “diferente de”. Nessa ocasião, observamos que essas terminologias já estavam compreendidas por todos os alunos da aula.

Esse primeiro momento foi bem estimulante para os alunos que estavam animados para descobrirem como usariam o material e como ligar aquelas barras com o conteúdo de fração. Com o apoio de *slides*, foram explicitadas as ações esperadas para os alunos, bem como questionamentos que foram realizados pela pesquisadora.

Os alunos entenderam na sessão 1 a ordem de comprimento das barras, o que era um trem, monotrem e multitrem manipulando o material. Colocaram as barras em ordem de comprimento e tiveram um momento de identificar as barras que tinham comprimento ímpar e comprimento par.

Figura 22 – Barras de Cuisenaire organizadas pelos alunos



Fonte: Acervo da pesquisa.

Na sessão 2, como previsto em Amaral (2021), o trabalho escrito foi iniciado, concentrando-se em ações que envolveram a formulação de sentenças matemáticas que comparam os comprimentos das barras de Cuisenaire. Além disso, nessa sessão, foram introduzidas ações destinadas a familiarizar os alunos com símbolos que representam cada cor de barra, com o objetivo de simplificar a escrita dessas sentenças.

Para que eles compreendessem as abreviações das cores das barras, optamos por registrar no quadro um esquema para que eles pudessem rever sempre que precisassem. Nessa sessão, alguns alunos foram ao quadro, participaram em mesa e registraram no papel algumas sentenças já envolvendo as barras de Cuisenaire.

Figura 23 – Abreviações das cores das barras

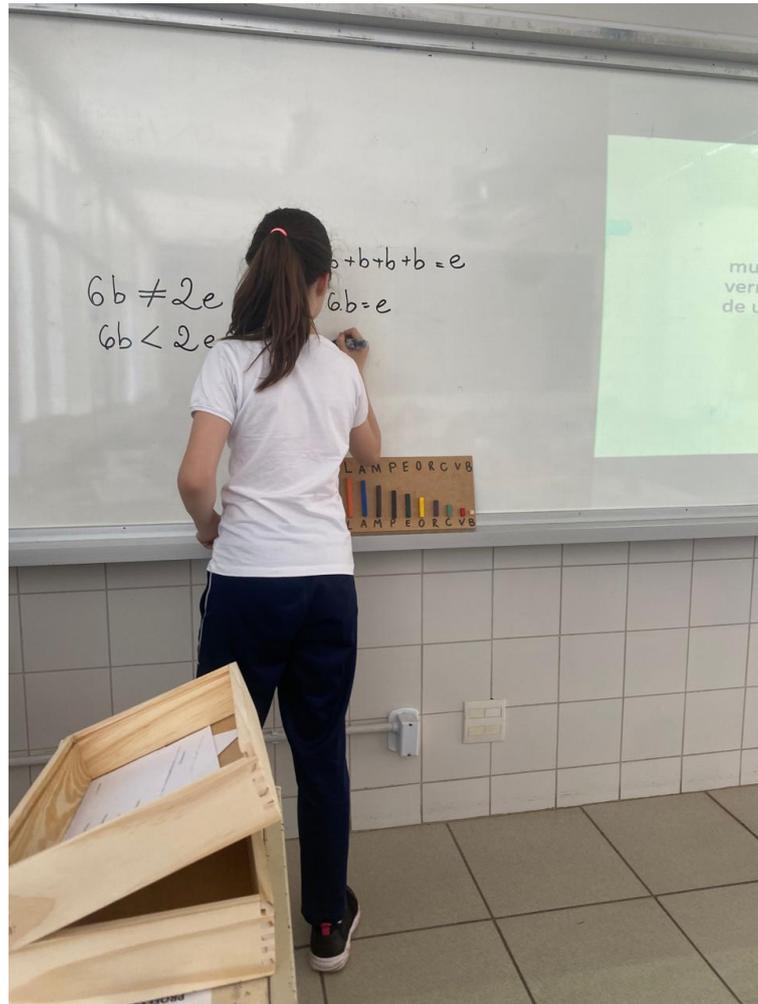


Fonte: Acervo da pesquisa.

Assim como aconteceu na sessão 2 em Amaral (2021), as sentenças que os alunos escreveram foram progredindo em nível de complexidade a partir das mediações realizadas pela pesquisadora. Foram conduzidas discussões em grupo para explorar diferentes formas de expressar as sentenças, incentivando a participação ativa dos alunos na atividade. A pesquisadora empregou perguntas direcionadas para orientá-los na simplificação da escrita das sentenças. Durante essa fase da sessão, ficou evidente o aprendizado colaborativo, com os alunos contribuindo ativamente, e o *feedback* imediato às suas respostas aumentou o engajamento para os próximos momentos de escrita.

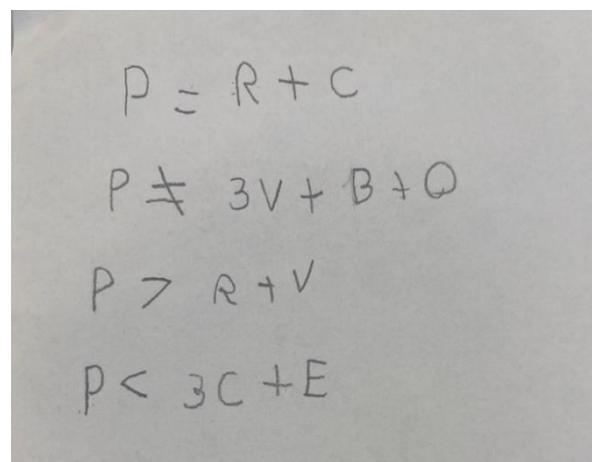
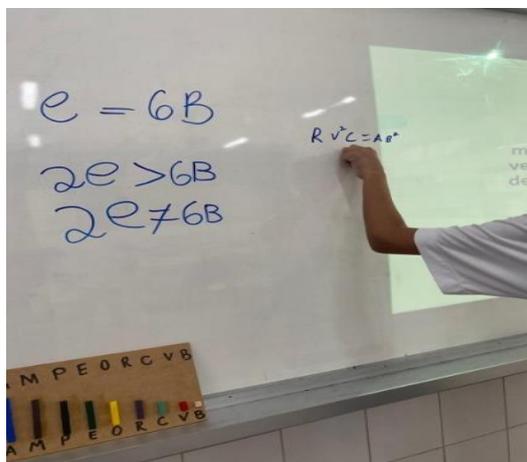
Em determinados momentos, os alunos receberam folhas de anotação nas quais escreveram várias sentenças utilizando os símbolos de “menor que”, “maior que”, “igual a” e “diferente de”. Essa ação ofereceu-lhes uma oportunidade de praticar e compreender com maior clareza o uso de ferramentas matemáticas, enriquecendo, assim, sua compreensão dos conceitos apresentados. Observou-se um notável aumento no interesse e na participação dos alunos quando lhes era sugerido que escrevessem no quadro branco as sentenças que haviam escrito nas folhas. Devido a essa resposta positiva, essa mediação foi proposta em mais ocasiões durante as sessões subsequentes.

Figura 24 – Participação dos alunos no quadro



Fonte: Acervo da pesquisa.

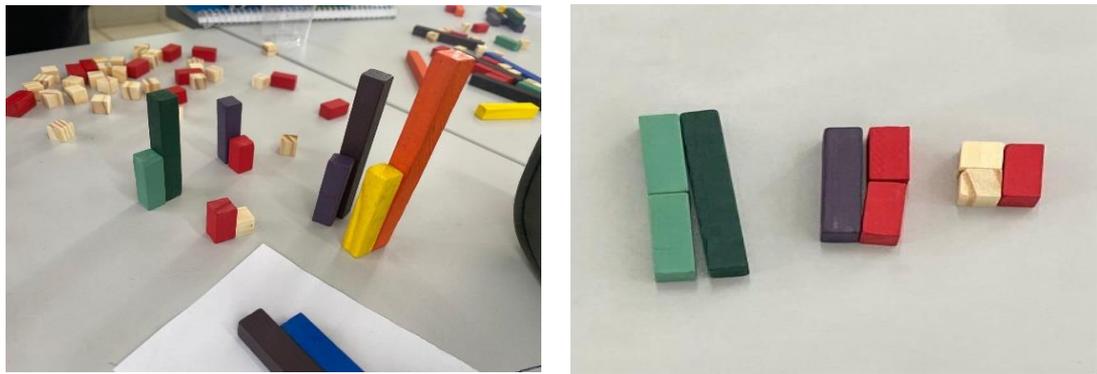
Figura 25 – Sentenças usando as abreviações



Fonte: Acervo da pesquisa.

Tendo em vista que, nessas primeiras duas sessões, eles já demonstraram a compreensão dos comprimentos das barras de Cuisenaire, na sessão 3, eles fizeram várias representações de frações, percebendo que cada barra poderia ser considerada uma parte de um todo. Como, por exemplo, a barra amarela do lado da barra laranja representava $\frac{1}{2}$, assim como muitas outras representações que eles mesmos fizeram.

Figura 26 – Alunos representando a fração $\frac{1}{2}$ com as barras



Fonte: Acervo da pesquisa.

Na sessão 4, o foco foi as ações que exploravam o conceito de frações equivalentes. Evidenciamos, nesse momento, que todos os alunos já estavam familiarizados com esse conceito. Em seguida, foi trabalhada a primeira propriedade de comparação de frações, que envolve a comparação de frações com o mesmo denominador, assim como estava previsto em Amaral (2021).

Os alunos participaram de ações que incluem tanto o uso quanto a ausência das barras de Cuisenaire e, ao longo das aulas, com o auxílio da pesquisadora que mediava as ações, fazendo perguntas direcionadas, eles mesmos foram concluindo e verbalizando que “dadas duas frações com o mesmo denominador, aquela que tiver o maior numerador terá a maior medida”.

Figura 27 – Alunos representando frações equivalentes com as barras



Fonte: Acervo da pesquisa.

Nessa sessão, também teve o momento de os alunos irem ao quadro branco, no qual eles apresentaram suas produções e explicaram aos colegas o que realizaram, usando termos matemáticos e, assim, internalizando de forma mais lúdica as nomenclaturas de frações.

Diferente do que aconteceu em Amaral (2021), as sessões neste estudo tiveram duração de 45 min e foram 2 sessões por dia totalizando 1h30 de aula, tendo um espaçamento de um dia entre elas. Isso gerou o entendimento de que os alunos tiveram um aproveitamento muito maior não precisando de retomada no início do dia seguinte, fazendo com que não houvesse perda de tempo nesse quesito.

Figura 28 – Mediações da pesquisadora durante as aulas



Fonte: Acervo da pesquisa.

Figura 29 – Alunos sendo questionados nos grupos



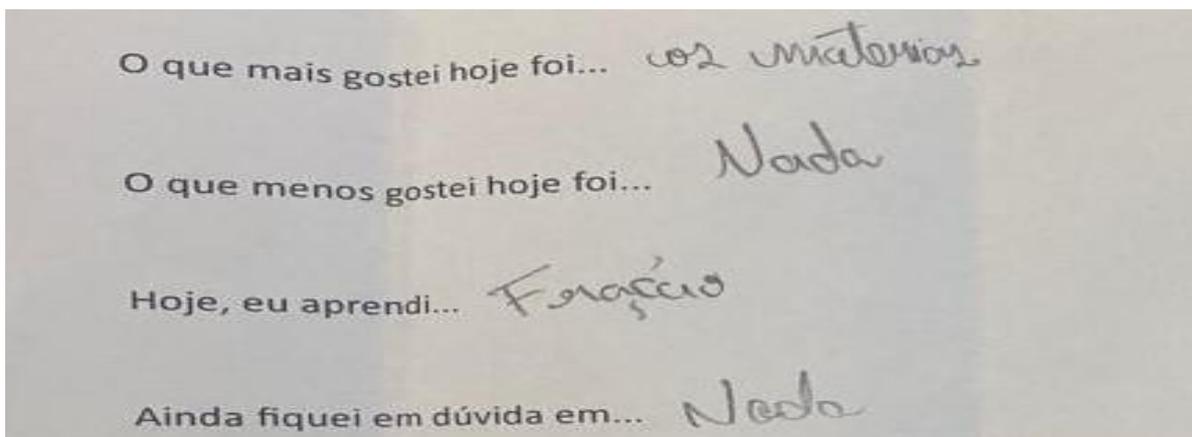
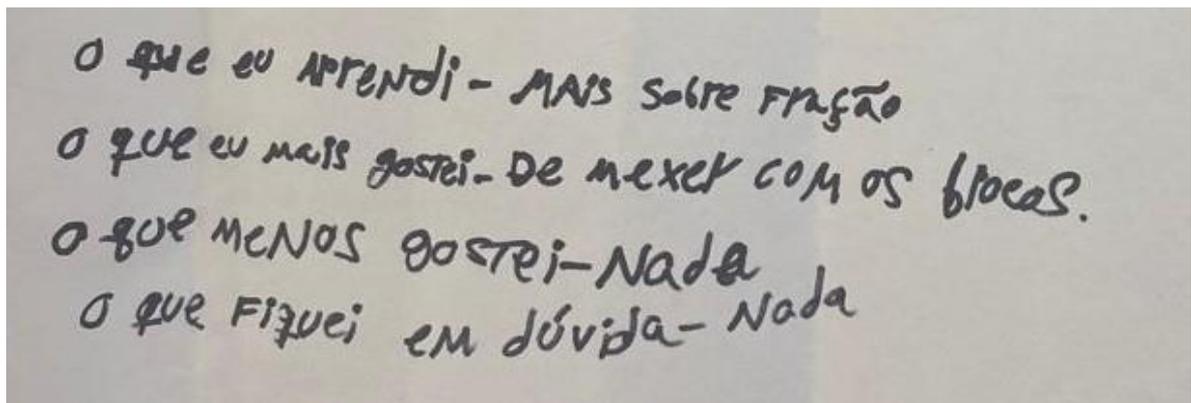
Fonte: Acervo da pesquisa.

As sessões 5 e 6 foram desenvolvidas no mesmo dia, quando se encerrou a ação. Na sessão 5, como previsto em Amaral (2021), tínhamos o objetivo de dar continuidade às

comparações de frações com numeradores diferentes, envolvendo a busca por frações equivalentes para esse tipo de frações. Para isso, foi usado o jogo “corrida das cores” com o objetivo de que os alunos encontrassem denominadores comuns para duas frações. Foi notável o maior envolvimento dos estudantes nessa sessão, pois como a atividade envolvia jogos, eles se sentiram muito motivados.

Ao final das aulas, foi entregue aos alunos uma folha para que eles pudessem avaliar a experiência. O retorno dos estudantes foi muito importante para poder analisar como eles se sentiram em relação à dinâmica e estrutura das aulas. Na folha, havia quatro frases para serem completadas “o que mais gostei hoje foi...”; “o que menos gostei hoje foi...”, “hoje eu aprendi...” e “ainda fiquei em dúvida em...” para que eles tivessem um momento em que pudessem expressar seus sentimentos de forma anônima.

Figura 30 – Feedback do primeiro dia



Fonte: Acervo da pesquisa.

Figura 31 – Feedback do segundo dia

O que mais gostei hoje foi...
tudo. :)

O que menos gostei hoje foi...
não sei ???

Hoje, eu aprendi...
Equivalência de frações e
maior, menor

Ainda fiquei em dúvida em...
entende tanto o conteúdo
que fiquei sem duvidar

O que mais gostei hoje foi... > Dequinhas

O que menos gostei hoje foi... as frações

Hoje, eu aprendi... a montar frações

Ainda fiquei em dúvida em... frações

Fonte: Acervo da pesquisa.

Figura 32 – Feedback do terceiro dia

1 De montar e a explicações
 2 Não sei, não tenho
 3 m m c
 4 "nada"

① Que mais gostei de hoje: Frações e o aula
 ② O que menos gostei: nada
 ③ Hoje, eu aprendi: O que é corvado da esor
 ④ Ainda fiquei em dúvida em: nada

Fonte: Acervo da pesquisa.

6.1 Elementos de síntese

As aulas da pesquisadora tiveram uma duração menor que 100 minutos, tendo cada sessão 45 minutos e duas sessões no mesmo dia, fazendo com que não tivesse a necessidade de retomada do que foi tratado de uma sessão para outra, já que foram espaçadas com poucos dias entre uma e outra.

O público da pesquisa foi alunos de escola particular que optaram pelas aulas que foram ofertadas de forma voluntária e numa proposta de retomada de conhecimentos, já que os alunos estavam no final do semestre letivo e já haviam estudado no ensino regular o conteúdo de

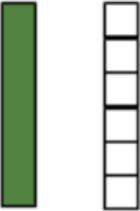
frações. Tudo isso fez com que a pesquisadora tivesse um público de alunos interessados, mesclando alunos de alto rendimento e alunos que estavam passando por grandes dificuldades em entender o conteúdo. As barras de Cuisenaire ampliaram a apropriação da ideia de frações equivalentes, visto a percepção mais concreta do porquê precisamos dividir o novo denominador pelo anterior e multiplicar pelo numerador, aquela famosa frase “divide pelo de baixo e multiplica pelo de cima” teve mais significado para os alunos. Desse modo, em um próximo momento, se pode aumentar o número de aulas e acrescentar algumas ações que incluam as operações.

No que se refere à aproximação da abordagem do ensino exploratório discutida em Canavarro (2011), temos as seguintes etapas:

1. **Antecipar:** Nesta etapa, o professor prepara os alunos para a exploração do tema, fornecendo informações iniciais, levantando questões ou criando expectativas sobre o que será explorado.
2. **Monitorizar:** Durante a exploração, o professor observa atentamente o progresso dos alunos, identificando suas dificuldades, compreensões emergentes e áreas que necessitam de apoio adicional.
3. **Selecionar:** Com base na monitorização, o professor seleciona estrategicamente atividades, recursos ou intervenções para atender às necessidades dos alunos e promover seu aprendizado.
4. **Sequenciar:** As atividades e recursos são organizados em uma sequência lógica, levando em consideração a progressão do aprendizado e garantindo uma abordagem gradual e coerente do tema.
5. **Estabelecer Conexões:** O professor ajuda os alunos a fazerem conexões entre diferentes ideias, conceitos ou experiências, promovendo uma compreensão mais integrada e profunda do tema em estudo.

A etapa de antecipação foi evidenciada no planejamento descrito em Amaral (2021, p. 61), em que são destacados questionamentos que o professor poderá utilizar, bem como possíveis respostas e reações que os alunos poderiam apresentar diante desses questionamentos.

Figura 33 – Parte do planejamento da Aula 3

AULA 3			
<p>Professor: "O que podemos dizer do comprimento de uma barra verde escura e o comprimento de um monotrem formado por 6 barras brancas?"</p> <p>Possível resposta dos alunos: "Que são iguais".</p> <p>Professor: "Como podemos escrever isso?"</p> <p>Possível resposta dos alunos: "e=6b ou e=b+b+b+b+b+b".</p> <p>Ação do professor: Professor pede que algum aluno escreva essas sentenças no flipchart.</p> <p>Observação para o professor: Se algum aluno não escrever $e = 6b$, a professora deverá perguntar se há outra forma de escrever a mesma expressão e/ou perguntar quantos "b's" têm aqui para que vejam haver 6 "b's".</p> <p>Professor: "E o que vocês escreveram é igual a escrever $6b = e$?"</p> <p>Possível resposta dos alunos: "Sim".</p> <div style="text-align: center;">  </div>	<p>O0</p> <p>O11</p> <p>O12</p>	<p>AA</p> <p>WA</p>	<p>5</p>

Fonte: Amaral (2021).

A etapa de monitorização foi facilitada devido à organização dos estudantes em pequenos grupos de três pessoas. Essa estratégia de agrupamento permitiu que a pesquisadora acompanhasse de perto o progresso de cada grupo, uma vez que o número reduzido de alunos em comparação às turmas regulares facilitou a circulação pela sala de aula durante as atividades. Essa proximidade física possibilitou que a pesquisadora ouvisse as discussões, validasse as ideias matemáticas apresentadas pelos alunos e compartilhasse *insights* relevantes para enriquecer as experiências de aprendizado. Dessa forma, a monitorização não só permitiu que a pesquisadora identificasse as necessidades individuais dos alunos, mas também promoveu uma interação mais próxima e uma compreensão mais aprofundada dos conceitos matemáticos em discussão.

A etapa de selecionar foi complementada pela oportunidade oferecida aos alunos voluntários de irem ao quadro e compartilharem suas ideias durante os questionamentos. Essa estratégia, além de cativar a atenção dos demais alunos, permitiu que as ideias fossem socializadas e debatidas. Além disso, a pesquisadora identificava os alunos que não se voluntariavam, mas que tinham registrado suas ideias no papel e compartilhava essas ideias com o restante da turma. Nesse sentido, a pesquisadora pôde selecionar ativamente as estratégias para compartilhar com toda a turma, enriquecendo, assim, a discussão e o aprendizado coletivo.

Ao considerar os objetivos de aprendizagem propostos, a etapa de sequenciar adquire ainda mais importância no planejamento elaborado por Amaral (2021). A organização metódica das atividades em uma sequência lógica permite não apenas que os alunos progredam gradualmente no desenvolvimento de seus conhecimentos matemáticos, mas também que alcancem os objetivos específicos delineados para o aprendizado. Ao estabelecer relações entre os comprimentos das barras, equivalência de frações, frações próprias e impróprias, os alunos avançam em direção à compreensão mais profunda dos conceitos abordados. Além disso, a sequenciação cuidadosa também facilita a compreensão das relações entre numeradores e denominadores e a comparação de frações. Assim, os alunos tiveram a oportunidade de consolidar esses conceitos, contribuindo para o alcance dos objetivos de aprendizagem estabelecidos.

Na etapa de estabelecer conexões, os alunos foram incentivados a relacionar continuamente o que estavam aprendendo com o uso das barras de Cuisenaire ao que já haviam aprendido em aulas regulares. Durante as ações, eles destacaram conexões entre o material manipulativo e os conceitos previamente abordados, como a possibilidade de realizar a soma de frações utilizando frações equivalentes com o mesmo denominador. Essa prática permitiu que eles ultrapassassem simples regras e procedimentos, concentrando-se na compreensão dos significados subjacentes aos conceitos matemáticos. Ao estabelecerem essas conexões entre o material manipulativo e os conceitos previamente aprendidos, os alunos foram capazes de desenvolver uma compreensão mais profunda e significativa dos temas abordados.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino exploratório, no contexto das aulas de frações, representa uma abordagem pedagógica que visa promover uma compreensão mais profunda e significativa desse conteúdo

matemático. Diferentemente da abordagem didática tradicional, centrada na transmissão de informações, o ensino exploratório coloca o aluno no papel ativo de construtor do próprio conhecimento.

Nessa perspectiva, as aulas exploratórias sobre frações buscaram envolver os alunos em ações práticas, manipulando materiais concretos, como as barras de Cuisenaire. Esse material possibilitou a visualização das relações entre as partes e o todo, além de favorecer a compreensão das operações matemáticas envolvidas. Durante as aulas, os alunos foram encorajados a interagir, experimentar e expressar suas ideias. O foco não estava apenas na obtenção de respostas corretas, mas na compreensão dos processos e na construção de significados para as frações. Os erros foram vistos como oportunidades de aprendizagem, estimulando a reflexão e a correção conjunta.

Replicar as seis aulas planejadas e desenvolvidas no trabalho de Amaral (2021) foi de suma importância para o crescimento profissional da pesquisadora. Poder vivenciar aulas nessa perspectiva fez com que percebesse o quão valioso é colocar os alunos como construtores do seu conhecimento. O uso do material concreto, além de despertar a curiosidade nos alunos, também fez com que eles se sentissem mais incluídos, gerando mais engajamento e participação. Assim como os alunos, a pesquisadora também sentiu que pode desenvolver mais aulas em alinhamento às já desenvolvidas, abarcando outros temas, como as operações de frações.

A pesquisadora pretende introduzir essas aulas para os alunos do 5º ano do ensino fundamental, visando realizar análises e comparações. Considerando que o ensino de frações tem início nesse ano, é possível que seja mais benéfico para eles receberem essas aulas antes de começarem o ensino regular no 6º ano. É provável que os alunos se sintam mais envolvidos e interessados nessas aulas durante o 5º ano do ensino fundamental, o que fortaleceria os conceitos de fração. Isso permitiria que eles ingressassem no ensino fundamental II com uma compreensão mais consolidada do tema. Além disso, expandir o currículo para incluir não apenas a compreensão de frações, mas também as operações básicas envolvendo frações proporcionaria aos alunos a oportunidade de aplicar seus conhecimentos de maneira prática e abrangente. Isso não só consolidaria os conceitos aprendidos, mas também os prepararia melhor para os desafios matemáticos futuros.

Ao adotar o ensino exploratório no ensino de frações, os educadores buscam não apenas transmitir conhecimentos, mas proporcionar experiências que despertem o interesse, a curiosidade e o pensamento crítico dos alunos, contribuindo para uma aprendizagem mais

duradoura e significativa. Essa abordagem alinha-se com as demandas contemporâneas por práticas educacionais inovadoras, que privilegiam a construção ativa do saber e a formação de alunos autônomos e críticos. O ensino exploratório no contexto das aulas de frações ganha ainda mais profundidade quando incorporamos o uso das barras de Cuisenaire. Essas ferramentas pedagógicas se tornam instrumentos essenciais para promover uma compreensão concreta e visual dos conceitos fracionários.

As barras de Cuisenaire proporcionam uma representação tangível das frações, permitindo que os alunos manipulem fisicamente as peças para explorar as relações entre numeradores e denominadores. Esse caráter concreto facilita a internalização dos conceitos, pois os estudantes não apenas veem, mas também tocam e constroem mentalmente as ideias relacionadas às frações. Assim, as barras de Cuisenaire foram como um elo entre o abstrato e o concreto, permitindo aos alunos a criação de composições visuais das frações, comparação de tamanhos e identificação de equivalências.

Portanto, ao integrar o ensino exploratório de frações com as barras de Cuisenaire, os educadores não apenas enriquecem as experiências de aprendizagem dos alunos, mas também oferecem uma plataforma que possibilita a exploração ativa e participativa do universo das frações, tornando o processo educacional mais envolvente e eficaz. Além disso, as barras de Cuisenaire facilitam a compreensão de conceitos mais avançados relacionados às frações, como a adição, subtração, multiplicação e divisão. Os alunos podem visualizar de maneira clara e palpável como essas operações se desdobram, permitindo uma transição suave do concreto para o abstrato. Em resumo, a integração do ensino exploratório no contexto das frações, aliado ao uso das barras de Cuisenaire, representa uma estratégia pedagógica valiosa. Ela não apenas atende às diretrizes educacionais, mas também proporciona uma experiência de aprendizado significativa e duradoura, preparando os alunos para compreender e aplicar conceitos matemáticos em seu percurso acadêmico e profissional.

REFERÊNCIAS

- ALRØ, H.; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e aprendizagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2006.
- AMARAL, C. A. do N. **Fração à moda antiga**. Vitória: Editora do Instituto Federal do Espírito Santo, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, 2021.
- AMARAL, C. A. N.; RODRIGUES, P. F. C.; SOUZA, M. A. V. F.; POWELL, A. B. Unidades de Referência e Frações Unitárias em Tarefas Matemáticas: uma Revisão Integrativa de Literatura. **Perspectivas da Educação Matemática**, [s. l.], v. 16, n. 42, p. 1-24, 19 maio, 2023.
- ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, M. L.; PONTE, J. P. “Eu perguntei se o cinco não tem metade”: ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.21, n. 2, pp.466-490, 2019.
- BERTONI, N. E. **Educação e linguagem matemática IV**: Frações e Números fracionários. Brasília: Universidade de Brasília, 2009.
- BIEMBENGUT, M. S. et al. Modelagem na Educação Matemática. **Revista do Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino – CREMM**, Blumenau, 2010.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br> / Acesso em: 13 dez. 2023.
- CAMPOS, T. M. M. et al. Uso de situações quociente no ensino de frações. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, [s. l.], v. 7, n. 3, 2014.
- CANAVARRO, Ana Paula. Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. **Educação e Matemática**, [s. l.], n. 115, p. 11-17, 2011.
- COELHO, E. B.; COSTA, A. P.; TAVARES, L. C.; ALVES, C. C. **Dossier pedagógico barrinhas do ludo, o sonhador-imagina, constrói e sonha com o Cuisenaire**: metodologia e finalidades de exploração. In: Actas do I Encontro @rcaComum. Braga, Portugal: Universidade do Minho, 2010. pp. 188-198.
- DICK, T.; KUBIAK, E. Issues and aids for teaching mathematics to the blind. **Mathematics Teacher**, [s. l.], v. 90, p. 344-349, 1997.
- DIRK, J. S. **A Concise History of Mathematics**. Dover, 1967.
- DÖRR, Raquel C. **Análises de aprendizagens em cálculo diferencial e integral**: um estudo de caso de desenvolvimento de conceitos e procedimentos algébricos em uma universidade pública brasileira. 2017. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Brasília, Brasília, 2017.
- GUERREIRO, H. G.; SERRAZINA, L.; PONTE, J. P. Uma trajetória na aprendizagem dos números racionais através da percentagem. **Educação Matemática Pesquisa**, [s. l.], v. 20, n. 1, p. 359-384, 2018. DOI 10.23925/1983-3156.2018v20i1p359-384

GUERREIRO, H. G.; SERRAZINA, M. L. A Aprendizagem dos Números Racionais com Compreensão Envolvendo um Processo de Modelação Emergente. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 31, n. 57, p. 181–201, jan. 2017.

HOLANDA, F. B.; ANTONIO, A. **Material Teórico - Módulo de Frações**, O Primeiro Contato: Frações e suas Operações. Sexto Ano do Ensino Fundamental. [material online], 2024.

JUNG, Carlos Fernando; DÖRR, Carine Raquel Backes. Método para elaboração de programas de disciplinas a partir de competências: habilidades, atitudes e conhecimentos. *In: COLÓQUIO INTERNACIONAL DE GESTÃO UNIVERSITÁRIA*, 17. 2017, Mar del Plata, Argentina. **Anais [...]**. Mar del Plata, 2017.

LANNIN, J.; ELLIS, A. B.; ELLIOT, R. **Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2011.

LOPES, J. A. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, p. 1 a 22, 2008.

LOSS, A. S. **Anos iniciais: metodologia para o ensino da matemática**. Appris Editora e Livraria Eireli-ME, 2016.

MAIA, D. Um levantamento de teses e dissertações sobre o ensino e aprendizagem de números racionais nos anos iniciais do ensino fundamental (1997-2017). *In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 23. 2019, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo, 2019.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. DA. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 781–801, dez. 2018.

NOVAES, B. W.; PINTO, N. B. Estudos recentes sobre frações no campo da História da Educação Matemática: avanços e desafios. **REnCiMa. Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, [s. l.], v. 12, n. 5, p. 1-20, 2021.

OLIVEIRA, V. S. D.; BASNIAK, M. I. FRAÇÕES E SUAS MÚLTIPLAS INTERPRETAÇÕES: reflexões sobre o ensino e a aprendizagem. **Revista de História da Educação Matemática**, [s. l.], v. 7, p. 1–20, 2021. Disponível em: <https://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/388>. Acesso em: 27 fev. 2024.

PATRONO, R. M. **A aprendizagem de Números Racionais na forma fracionária no 6º ano do Ensino Fundamental: análise de uma proposta de ensino**. 2011. Tese (Mestrado em Educação Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. *In: GTI (Ed.). O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34.

PONTE, J. P. *et al.* O Estudo de Aula como Processo de Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 30, n. 56, p. 868–891, set. 2016.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; QUARESMA, M. Exploratory activity in the mathematics classroom. *In*: LI, Y.; SILVER, E. A.; LI, S. (Eds.). **Transforming mathematics instruction: Multiple approaches and practices**. Dordrecht: Springer Science+Business Media Dordrecht, 2014.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. 3 ed. Autêntica, Belo Horizonte, Brasil. 2013.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Ações do professor na condução de discussões matemáticas. **Quadrante**, [s. l.], v. 22, n. 2, p. 55-81, 2013.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M. Dinâmicas de Reflexão e Colaboração entre Professores do 1.º Ciclo num Estudo de Aula em Matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática** [online], Rio Claro, v. 33, n. 63, p. 368-388, 2019.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Uma abordagem à Análise de Dados de Vídeo para investigar o desenvolvimento de ideias e raciocínios matemáticos de estudantes. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 21, p. 81–140, 2004.

RICHIT, A. Estudos de aula na perspectiva de professores formadores. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, v. 25, p. 1-24, 2020.

RICHIT, A.; PONTE, J.P.; TOMKELSKI, M. Estudos de aula na formação de professores de matemática do ensino médio. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Distrito Federal, v. 254, p. 54-88, 2019.

RICHIT, A.; TOMKELSKI, M. L.; RICHIT, A. Compreensões sobre perímetro e área mobilizadas a partir da abordagem exploratória em um estudo de aula. **Acta Scientiae**, Canoas, p.01-36, 2021.

SANTANA, L. E. de L. **Os saberes conceituais de pedagogos em formação inicial, acerca de Fração**. 2012. Tese (Mestrado em Educação) - Centro de Educação, Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2012.