PAULO SÉRGIO FONTES SANTANA

O USO DE "MATEMÁGICAS" NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM

Itabaiana

Junho de 2024

PAULO SÉRGIO FONTES SANTANA

O USO DE "MATEMÁGICAS" NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Sergipe como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Universidade Federal de Sergipe
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação

Orientador: Prof. Me. Samuel Brito Silva
Coorientador: Prof. Dr. Fábio Lima Santos

Itabaiana
Junho de 2024

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

S232u

Santana, Paulo Sérgio Fontes.
O uso de “matemágicas” no processo de ensino-aprendizagem / Paulo Sérgio Fontes Santana; orientador Samuel Brito Silva. – Itabaiana, SE, 2024.
69 f.: il.

Dissertação (mestrado profissional em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2024.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Professores - Formação. 3. Aprendizagem cognitiva. 4. Educação básica. 5. Indução (Matemática). 6. Numeração. 7. Fibonacci, Números de. I. Silva, Samuel Brito, orient. II. Título.

CDU 51-7

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

O uso de "Matemágicas" no processo de ensino e aprendizagem

por

Paulo Sergio Fontes Santana

Aprovada pela Banca Examinadora:

Samuel Brito Silva

Prof. Me. Samuel Brito Silva - UFS
Orientador

Marta Élid Amorim Mateus

Prof.ª Dr.ª Marta Elid Amorim Mateus - UFS
Primeiro Examinador

Michele Mendes Novais

Prof.ª Dr.ª Michele Mendes Novais - UFRPE
Segundo Examinador

São Cristóvão, 18 de Junho de 2024.

Cidade Univ. Prof. José Aloísio de Campos, Av. Marcelo Deda Chagas, s/n, Bairro Rosa Elze, CEP 49107-230 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – Tel. (00 55 79) 3194-6887
E-mail:profmat@academico.ufs.br

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por me conceder paciência e sabedoria nesta caminhada.

A minha mãe, Maria do Carmo Silva Fontes, meu pai, Romeu da Conceição Santana (em memória) e meu irmão, Antônio Carlos por sempre estarem me apoiando e incentivando a percorrer o caminho dos estudos.

A minha querida esposa e companheira Ana Paula da Silva Lemos, por todo o incentivo e ajuda nos momentos de maior dificuldade.

A todos os meus professores do curso de mestrado do PROFMAT-UFS de Itabaiana, meus sinceros agradecimentos por todos os ensinamentos e conhecimentos compartilhados, eles foram fundamentais para o meu crescimento acadêmico e pessoal. Em especial ao meu Orientador, Samuel Brito Silva e ao coorientador Fábio Lima Santos por acreditarem no desenvolvimento deste projeto, e auxiliarem na construção do mesmo.

A minha família, por sempre estarem ao meu lado me apoiando e incentivando durante essa jornada.

Aos colegas de curso e profissão que fizeram parte desta jornada e que tornaram esta caminhada mais leve. Agradeço especialmente ao colega e amigo, Jaedson dos Santos, por todos os aprendizados e momentos partilhados nesta jornada.

Enfim, a todas as pessoas que contribuíram de maneira direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho.

"O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001"

Resumo

Esta dissertação apresenta uma coletânea de "matemágicas" que podem ser utilizadas em sala de aula, explorando suas potenciais contribuições para o processo de ensino-aprendizagem. O diferencial deste trabalho é que, além de fornecer o passo a passo de cada "matemágica", apresenta também a explicação matemática formalizada de cada uma. Inclui-se, ainda, uma análise da aplicação de 3 dessas "matemágicas" em uma turma de ensino médio, trazendo a percepção dos discentes perante as mesmas. O público alvo deste trabalho são professores de Matemática da educação básica, visto que o mesmo visa fomentar o uso de truques matemáticos como aliado no ensino.

Palavras-chaves: Matemágica, ensino-aprendizagem, professores de Matemática.

Abstract

This dissertation presents a collection of “mathemagics” that can be used in the classroom, exploring their potential contributions to the teaching process-learning. The difference of this work is that, in addition to providing step-by-step each “mathemagic” also presents the formalized mathematical explanation of each one. It also includes an analysis of the application of 3 of these “mathemagics” in a class of high school, bringing the students' perception to them. The target audience of this work are basic education Mathematics teachers, as it aims to encourage the use of mathematical tricks as an ally in teaching.

Key-words:

Mathematics, teaching-learning, Mathematics teachers..

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

Matemática e Mágica são duas palavras que, de início, não parecem possuir nenhuma relação, visto que a primeira nos remete a uma área do conhecimento que envolve cálculos, fórmulas e teoremas, enquanto a outra fornece uma ideia de ilusionismos, truques e magia. O que esses dois termos possuem em comum? A resposta para essa indagação será apresentada ao longo deste trabalho. Será mostrada não apenas essa relação, como também a contribuição que a mesma pode trazer dentro do processo de ensino-aprendizagem da Matemática como disciplina obrigatória da educação básica.

Esta temática é de grande relevância no ensino de Matemática pois, o professor necessita buscar caminhos e modelos metodológicos que tragam o aluno para o centro do trabalho pedagógico, ou seja, desenvolver atividades que enfatizem a participação ativa, a colaboração e a resolução de problemas. Possibilitando aos alunos serem protagonistas do processo de ensino-aprendizagem, para que ganhem autonomia.

> A sala de aula pode ser esse espaço formador para o aluno. Espaço em que ele aprende a pesar, elaborar e expressar melhor suas ideias e a ressignificar suas concepções, ao ser introduzido no universo dos saberes teoricamente elaborados e nos procedimentos científicos de análise, interpretação e transformação da realidade (CARVALHO e CASTRO, 2001, p. 125).

Nesta perspectiva, é importante desenvolver atividades relacionadas a Matemática que despertem o interesse e a curiosidade dos alunos. Pois, a mesma é uma disciplina que é tida por muitos alunos como difícil, deixando assim vários discentes desmotivados a aprender.

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), evidencia que o Brasil fica sempre entre os países com o menor resultado em nível de proficiência em Matemática. O mau desempenho dos alunos brasileiros fica bastante visível quando considerado os resultados dos estudantes em Matemática. “No Brasil 27% dos estudantes atingiram pelo menos o nível 2 de proficiência em matemática, significativamente menor do que a média dos estudantes entre os países da OCDE (média da OCDE: 69 porcento)” (BRASIL, 2023).

Mediante ao evidenciado se faz necessário considerar os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), no que diz respeito ao ensino de Matemática, o qual enfatiza que, os temas a serem trabalhados em sala de aula, devem permitir uma articulação entre diferentes ideias e conceitos, para que assim, possa garantir maior significação no processo de ensino-aprendizagem.

Este trabalho tem como objetivos: analisar as possíveis contribuições do uso de matemágicas no processo de ensino-aprendizagem; apresentar uma coletânea de mágicas matemáticas que possam ser utilizadas por professores de Matemática na educação básica; e investigar a percepção dos alunos em relação à aplicação de três dessas mágicas em uma turma de ensino médio.

No decorrer deste trabalho, serão mostradas mágicas que possuem como fundamento o raciocínio lógico-matemático. Entre elas, terão exemplos que demandam o uso de baralho, cartelas, imagens e mágicas que envolvem apenas a conversação. Todas elas podem provocar indagações do tipo "como isso ocorre?", "como é possível?", "qual o truque?" e, com isso, despertar o interesse nos discentes em formular hipóteses sobre como essas mágicas ocorrem.

O público dessas mágicas são alunos de educação básica (ensino fundamental II e médio), sendo algumas mais recomendadas para discentes do ensino médio, pois, possuem maior maturidade no conhecimento de conceitos matemáticos.

O primeiro capítulo, denominado "resultados matemáticos", tem como intuito facilitar a compreensão do raciocínio matemático formalizado de algumas das mágicas apresentadas. O mesmo será útil para revisar conceitos importantes que serão utilizados em alguns dos truques apresentados.

Na sequência, temos o segundo capítulo voltado apenas a apresentação das mágicas. No início de cada mágica é apresentado um resumo que indica quais os materiais necessários para o truque, para quais séries a mesma é indicada e quais conceitos matemáticos podem ser desenvolvidos. Lembrando que é importante haver esta relação das mágicas com o conteúdo que está sendo abordado pelo professor. Com isso, espera-se que os discentes percebam que as mágicas contribuem na aprendizagem.

Para a escolha das mágicas, foi feito uma análise em livros, artigos periódicos e dissertações que apresentavam truques matemáticos. Entre as obras presentes nas referências deste trabalho vale destacar a **11** e **12**, dos autores João Carlos Vieira Sampaio e Pedro Luiz Aparecido Malagutti, que são escritores brasileiros que escreveram importantes obras relacionadas as mágicas Matemáticas. Dentre as mágicas aqui apresentadas, algumas foram adaptadas, seja no desenvolvimento do truque ou na explicação Matemática do mesmo.

O capítulo 3 apresenta os resultados de uma atividade aplicada em uma turma do ensino médio. A mesma, teve como objetivo analisar a percepção dos alunos em relação à apresentação de 3 mágicas matemáticas e o entendimento dos mesmos quanto ao uso de truques matemáticos como uma ferramente didática no processo de ensino-aprendizagem. Para esta análise foi utilizado um questionário e a observação dos discentes.

Entender a percepção dos alunos a respeito das mágicas matemáticas é essencial.

O uso das mesmas possui como principal objetivo, ajudar o docente a desenvolver um trabalho pedagógico mais dinâmico, flexível e adaptável, para assim conseguir atender melhor aos anseios dos alunos.

O uso da matemágica, não é algo que por si só vai melhorar o desempenho dos estudantes nesta área. Todavia, pode contribuir para motivar os alunos a exercitarem o raciocínio lógico.

Nota-se, portanto, que antes de levar as mágicas para a sala de aula, o professor tem que pesquisar bem sobre quais se encaixam com os conteúdos que estão sendo estudados, e se a demonstração da mágica está de acordo com o nível de aprendizado Matemático dos alunos. Com isso, os alunos ao conseguirem relacionar o truque mágico com o conteúdo estudado, tendem a sentir-se motivados com a sensação de descoberta. No entanto, se o professor utilizar mágicas não compatíveis com o nível da turma, os alunos podem sentir-se desmotivados e a mágica pode acabar causando o efeito contrário.

1 Resultados Matemáticos

Neste capítulo será apresentado alguns resultados e definições básicas que contribuem no entendimento de algumas das **Matemágicas** propostas.

1.1 Métodos de Indução

Métodos de indução são técnicas de demonstração Matemática. Eles são utilizados para demonstrar a validade de propriedades a respeito dos números naturais.

1.1.1 1° Método de indução

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que:

i. $P(1)$ é válida.

ii. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(n+1)$, onde $n+1$ é o sucessor de n.

Então $P(n)$ é válida qualquer que seja o número natural n.

1.1.2 2° Método de indução

Consideremos uma proposição $P(n)$ e um número natural a. Suponhamos que:

i. $P(a)$ é válida.

ii. Dado $m \geq a$, se $P(m)$ é verdadeira para todo $a \leq m \leq n$, então $P(n+1)$ é verdadeira.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$.

1.2 Sistemas de numeração

O nosso sistema de numeração formado pelos algarismos, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, é um sistema posicional, onde o valor relativo de cada algarismo é determinado por sua posição. O valor relativo de cada algarismo é representado pelo produto do mesmo por uma potência de base 10. Considerando os algarismo da direita para esquerda, o primeiro algarismo é multiplicado por 10^0, o segundo por 10^1, o terceiro por 10^2 e assim sucessivamente. O sistema é conhecido como decimal ou de base 10, pois apresenta 10 algarismos.

O sistema posicional possibilita escrever os números em outras bases, ele baseia-se no seguinte resultado:

Teorema 1.1. *Dados a, b inteiros não negativos, com $b > 1$ existe um número natural n e números naturais $c_0, c_1, \cdots, c_n$ menores do que b, univocamente determinados, tais que $a = c_0 + c_1 b + c_2 b^2 + c_3 b^3 + ... + c_n b^n$.*

Demonstração. Vamos demonstrar o teorema usando a segunda forma do Princípio de Indução Matemática sobre a. Se $a = 0$, ou se $a = 1$, basta tomar $n = 0$ e $c_0 = a$.

Supondo o resultado válido para todo natural menor do que a, vamos mostrar que ele é também válido para a. Pela divisão euclidiana, existem q e r inteiros não negativos, únicos tais que $a = bq + r$, com $0 \leq r < b$.

Como $q < a$, pela hipótese de indução, segue-se que existem números naturais n' e d_0, d_1, . . . , $d_{n'}$, com $d_j < b$, para todo $j \in \{0, 1, 2, \ldots, n'\}$, tais que

$$q = d_0 + d_1 b + \cdots + d_{n'} b^{n'}$$

Levando em conta as igualdades acima destacadas, temos que:

$$a = bq + r = b\left(d_0 + d_1 b + \cdots + d_{n'} b^{n'}\right) + r$$

O resultado segue-se pondo $c_0 = r$, $n = n' + 1$ e $c_j = d_{j-1}$ para $j = 1, ..., n$. A unicidade segue-se facilmente das unicidades acima estabelecidas. □

Do teorema acima observamos que o b representa a base do sistema. Sendo o $b = 10$ temos o nosso sistema decimal com 10 algarismos e para $b = 2$ o sistema binário que utiliza apenas os algarismos 0 ou 1. Concluímos então como consequência do teorema que qualquer número natural pode ser representado na base binária e de maneira única.

A transformação de uma número da base decimal para a base binária pode ser realizado utilizando o método de divisões sucessivas por 2.

Exemplo 1.1. *Para transformar* 75 *na base binária, utilizando as divisões sucessivas por*

2. *Pela divisão euclidiana temos:*

$$\begin{array}{rcrcl} 75 & = & 2\cdot 37 & + & 1 \\ 37 & = & 2\cdot 18 & + & 1 \\ 18 & = & 2\cdot 9 & + & 0 \\ 9 & = & 2\cdot 4 & + & 1 \\ 4 & = & 2\cdot 2 & + & 0 \\ 2 & = & 2\cdot 1 & + & 0 \\ 1 & = & 2\cdot 0 & + & 1 \end{array}$$

Agrupando os restos da divisão do último ao primeiro, teremos 1001011_2=75_{10}*. Esse procedimento pode ser utilizado para transformar qualquer número da base 10 para a binária.*

1.3 Teorema de Zeckendorf

Para enunciarmos o teorema de Zechendorf, primeiro vamos relembrar a sequência de Fibonacci, que é a sequência em que os 2 primeiros termos são iguais a 1, e os termos que se sucedem são sempre iguais a soma dos 2 termos anteriores. Denotando a sequência de Fibonacci por (F_n), temos: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, \cdots$. Essa sequência é definida por recorrência da forma $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Um número de Fibonacci é um termo da sequência de Fibonacci.

Vale relembrar as seguintes propriedades a respeito dos números de **Fibonacci**:

Propriedade 1.1. $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$

Propriedade 1.2. $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$

Propriedade 1.3. $F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$

Para comprovar a propriedade 1.1 basta observar que, por definição:

$$\begin{array}{rcccc} F_1 & = & F_3 & - & F_2 \\ F_2 & = & F_4 & - & F_3 \\ F_3 & = & F_5 & - & F_4 \\ & \vdots & & & \\ F_{n-1} & = & F_{n+1} & - & F_n \\ F_n & = & F_{n+2} & - & F_{n+1}, \end{array}$$

Somando membro a membro todas as equações acima, teremos do lado esquerdo $F_1+F_2+\cdots+F_n$, enquanto do lado direito, devido à alternância de sinais, restam somente $-F_2$ da primeira equação e F_{n+2} da última. Como $F_2 = 1$, temos a identidade desejada.

Para comprovar a 1.2 basta observar que:

$$\begin{array}{rcrcl} F_1 & = & F_2 & & \\ F_3 & = & F_4 & - & F_2 \\ F_5 & = & F_6 & - & F_4 \\ & \vdots & & & \\ F_{2n-1} & = & F_{2n} & - & F_{2n-2} \end{array}$$

Somando as equações, teremos do lado esquerdo, $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1}$, enquanto do lado direito resta F_{2n}.

A comprovação da propriedade 1.3 ocorre de maneira análoga à propriedade anterior, observando que:

$$\begin{array}{rcrcl} F_1 & = & 1 & & \\ F_2 & = & F_3 & - & F_1 \\ F_4 & = & F_5 & - & F_3 \\ & \vdots & & & \\ F_{2n} & = & F_{2n+1} & - & F_{2n-1} \end{array}$$

Considerando as propriedades 1.2 e 1.3 juntas, podemos escrever outra propriedade:

Propriedade 1.4. $F_k - 1 = F_{k-1} + F_{k-3} + \cdots + F_a$ *onde* $a = 3$ *se* k *é par ou* $a = 2$ *se* k *é ímpar.*

Essa última afirmação motiva o seguinte teorema:

Teorema 1.2. *(Teorema de Zeckendorf) Todo número inteiro positivo é um número de Fibonacci ou pode ser representado exclusivamente como uma soma de números de Fibonacci não consecutivos.*

Demonstração. Primeiro, vamos provar que todo número inteiro positivo é um número de Fibonacci ou pode ser representado como soma de números de Fibonacci, usando um raciocínio por indução. Se $N < 4$, é claro que N é ele mesmo um número de Fibonacci.

Dado agora $N \geq 4$, suponha (indutivamente) que todo inteiro positivo menor que N possa ser escrito da forma do enunciado e considere o maior número de Fibonacci F_n que seja menor ou igual a N, isto é, $F_n \leq N < F_{n+1}$, o qual é sempre possível encontrar, pois a sequência de Fibonacci é uma sequência estritamente crescente de números naturais.

Logo, $N = F_n + k$, onde k é um inteiro tal que $0 \leq k < N$ (pois $F_n > 0$) e também $k < F_{n-1}$ (caso contrário, teriamos $N = F_n + k \geq F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$, o que é falso). Se $k = 0$, nada mais há a ser provado. Se $k > 0$, como $k < N$, então, pela hipótese indutiva, podemos escrever k como soma de números de Fibonacci não consecutivos e menores que F_{n-1} já que $k < F_{n-1}$ e, portanto, $N = F_n + k$. Dessa forma, temos uma decomposição de N em soma de números de Fibonacci distintos e não consecutivos.

A decomposição é única, pois, dado N com $F_n \leq N < F_{n+1}$,. Suponha por absurdo que existam duas tais decomposições. Completando com zeros se necessário, teremos duas sequências binárias a_k's e b_k's distintas tais que:

$$N = b_2F_2 + \cdots + b_nF_n = a_2F_2 + \cdots + a_nF_n$$

Seja k o maior índice onde as sequências diferem e suponha, sem perda de generalidade, que $a_k = 1$ e $b_k = 0$. Logo:

$$b_2F_2 + \cdots + b_{k-1}F_{k-1} = a_2F_2 + \dots a_kF_k$$

Como $a_k = 1$, então $a_2F_2 + \cdots + a_kF_k \geq F_k$. Por outro lado:

$$b_2F_2 + \cdots + b_{k-1}F_{k-1} \leq F_{k-1} + F_{k-3} + \cdots + F_a = F_k - 1 < F_k,$$

onde $a = 3$, se k for par, ou $a = 2$ se k for ímpar, o que estabelece uma contradição.

Para justificar a desigualdade:

$$b_2F_2 + \cdots + b_{k-1}F_{k-1} \leq F_{k-1} + F_k - 3 + \cdots + F_a,$$

vamos nos concentrar primeiro na soma das duas últimas parcelas do lado esquerdo, isto é:

$$b_{k-2}F_{k-2} + b_{k-1}F_{k-1}$$

Os possíveis valores para essa soma são: F_{k-1} (se $b_{k-2} = 0$ e $b_{k-1} = 1$), ou F_{k-2} (se b_{k-2} e $b_{k-1} = 0$), ou ainda 0 (se $b_{k-2} = b_{k-1} = 0$). Dos três valores, o maior é F_{k-1}, já que a sequência de Fibonacci é crescente. Então, $b_{k-2}F_{k-2} + b_{k-1}F_{k-1} \leq F_{k-1}$. Um raciocínio análogo, mostra que $b_{k-4}F_{k-4} + b_{k-3}F_{k-3} \leq F_{k-3}$, e assim sucessivamente. $\square$

1.4 Princípio do ternário balanceado

Teorema 1.3. *Todo número inteiro ou é uma potência de base 3 ou pode ser escrito como uma soma de distintas potências de base 3, com o uso de sinais positivos e/ou negativos e esta representação é única, exceto cancelamentos (ou seja, cada número inteiro tem uma única representação ternária balanceada, onde 0 é a representação "vazia").*

Demonstração. Suponha que $k \in \mathbb{Z}^+$. Para esta demonstração, utilizaremos o 2^o método de indução. Primeiramente, note que $1 = 3^0$ e claramente não existe outra representação ternária balanceada para 1. Assim, 1 possui uma única representação ternária balanceada.

Suponha agora por hipótese de indução que para todo $k \in \mathbb{Z}^+$ com $t < k$, t possua uma única representação ternária balanceada. Seja então $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ tal que $3^n \leq k < 3^{n+1}$. Pelo algoritmo da divisão, existem únicos inteiros q, r tais que $k = 3^n \cdot q + r$ com $q \in \{1, 2\}$ (pois $3^n \leq K < 3^{n+1}$) e $0 \leq r < 3^n$.

Se $r = 0$ e $q = 1$, $k = 3^n$ é a única representação ternária. Se $r = 0$ e $q = 2$, então $k = 3^n \cdot (3^1 - 3^0) = 3^{n+1} - 3^n$ é uma única representação ternaria balanceada.

Suponha agora que $r > 0$. Como $r < k$, então por hipótese de indução, r possui uma única representação ternária balanceada. Como $r < 3$, então a maior potência de 3 que pode aparecer na representação ternária balanceada de r é 3^n. Suponha primeiro que 3^n não apareça na representação ternária de r. Se $q = 1$, então $k = 3^n + r$, ou seja, 3^n somado com a representação ternaria de r nos dá uma representação ternária para k. Se $q = 2$, então $k = 3^n \cdot (3^1 - 3^0) + r = 3^{n+1} - 3^n + r$ e k tem uma única representação ternária balanceada.

Agora suponha que 3^n apareça na representação de r. Como $r < 3^n$, então o termo 3^n deve ter sinal positivo. Seja então $x = r - 3^n$, assim a representação ternária balanceada de x não contém um termo 3^n. Assim, $k = 3^n \cdot q + r = 3^n \cdot q + 3^n + x = 3^n \cdot (q+1) + x$. Se $q + 1 = 3$, então $k = 3^{n+1} + 0 \cdot 3^n + x$ nos dá uma representação ternária balanceada para k, e se $q + 1 = 2$, então $k = 3^n\,(3^1 - 3^0) + x = 3^{n+1} - 3^n + x$ nos dá uma representação ternária balanceada para k.

Dessa forma, todo inteiro positivo possui uma unica representação ternária balanceada.

Se $k = 0$, então todos os coeficientes das potências de 3 são zero e temos a única representação “vazia".

Por fim, se k for um inteiro negativo, note que $k = -|k|$, então usamos a representação ternária balanceada de $|k|$ para obter uma representação ternária balanceada para k □

2 MÁGICAS MATEMÁTICAS

Neste capítulo, será apresentado uma coletânea de mágicas matemáticas. Antes da apresentação de cada truque, é descrito os materiais necessários para o seu desenvolvimento, as turmas em que o mesmo pode ser utilizado e os conteúdos que podem ser trabalhados. Para o entendimento de alguns destes truques, é necessário ao leitor o conhecimento de conteúdos básicos de matemática tais como: (as 4 operações, potenciação e equação de 1º grau), já outros, exigem também a compreensão de resultados matemáticos apresentados no capítulo anterior.

2.1 Cartelas mágicas (sistema binário)

Para a realização deste truque, será utilizado cartelas que podem ser facilmente elaboradas em um computador e impressas em folhas de papel A4, ou podem ser construídas à mão em materiais semelhantes. A sua realização é indicada para turmas do ensino fundamental 2 e médio. Podendo ser utilizado no ensino de conteúdos como os sistemas de numeração decimal, potenciação e números binários.

Descrição da mágica: inicialmente o **mágico** apresenta as cartelas da Figura 1 para o público.

Figura 1 – Cartelas mágicas na base binária.

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31
33	35	37	39
41	43	45	47
49	51	53	55
57	59	61	63

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31
34	35	38	39
42	43	46	47
50	51	54	55
58	59	62	63

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31
36	37	38	38
44	45	46	47
52	53	54	55
60	61	62	63

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31
40	41	42	43
44	45	46	47
56	57	58	59
60	61	62	63

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

32	33	34	35
36	37	38	39
40	41	42	43
44	45	46	47
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

Fonte: Elaborada pelo autor

Na sequência, pede a algum dos ouvintes para pensar em um dos números presentes nas cartelas. Em seguida, pergunta ao ouvinte em quais cartelas está presente o número que foi pensado. A partir desta resposta, o mágico diz exatamente o número que foi pensado pelo ouvinte, trazendo para o público a ideia de que conseguiu ler o pensamento.

Ficando a indagação, qual o segredo por trás dessa mágica? Nas mídias digitais têm muitos vídeos de pessoas explicando como chegar no número pensado, mostrando que o segredo é apenas somar o primeiro número de todas as cartelas que continham o número pensado. Isto diz como chegar no resultado, mas não mostra toda Matemática envolvida para a escolha dos números das cartelas e porque a mágica funciona.

Explicação Matemática da mágica: o truque principal consiste na escolha dos números das cartelas. O método utilizado para a escolha dos números nas cartelas é a base binária. Mas por que ele funciona? Ele funciona devido ao Teorema 1.1 demonstrado no capítulo anterior, que mostra que qualquer número natural pode ser escrito em outra base e de forma única.

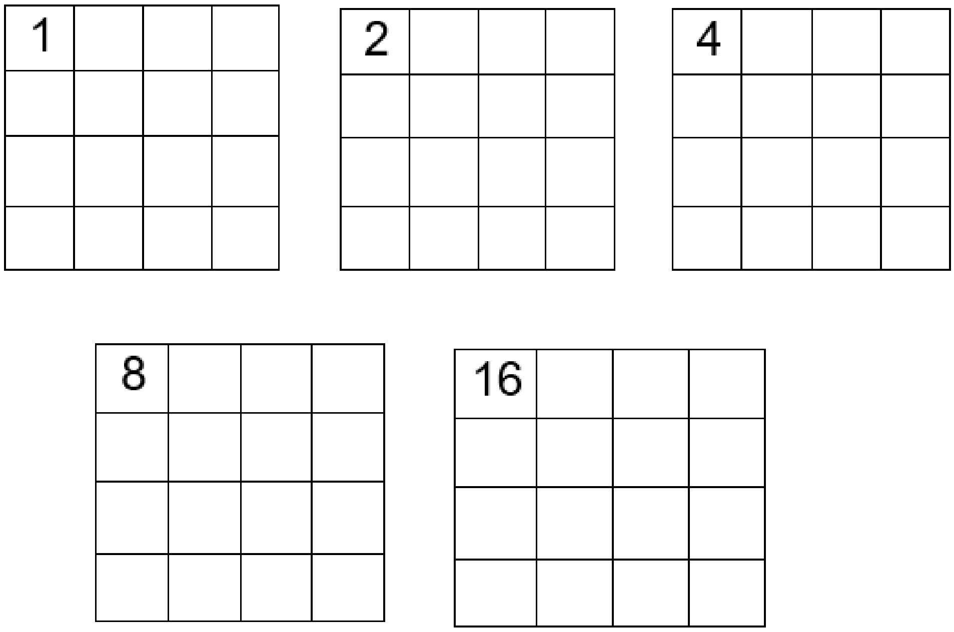
Lembremos que a base binária é composta apenas de 2 dígitos 1 ou 0, foi visto também que para a transformação do número binário em um número na base decimal, considerando os algarismos da direita para esquerda, devemos multiplicar o primeiro algarismo por 2^0, o segundo por 2^1, o terceiro por 2^2 e assim sucessivamente multiplicando sempre o algarismo por uma potência de base 2 elevada ao número da posição do algarismo menos um. Ao final, somando todos os valores é obtido o valor correspondente do número na base decimal.

Exemplo 2.1. *O número* $10011_2 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 = 19$*, ou seja, os algarismos zero presentes na representação binária, representam a ausência de uma potência de base* 2 *correspondente, pois zero multiplicado por qualquer número é igual a zero, enquanto cada algarismo* 1 *representa a presença de uma potência de distinta* 2*, pois o algarismo* 1 *multiplicado por uma potência de 2 vai ser igual a ela mesma. Sendo que essa soma de distintas potências de* 2 *vai ser igual ao número na base decimal.*

Logo é percebido que todo número natural na base decimal, ou é uma potência de base 2, ou pode ser escrito por uma combinação única de distintas potências de base 2.

Justamente essa ideia é que faz com que a mágica funcione. Sendo o primeiro número de cada cartela uma potência de base 2, para a escolha dos números nas cartelas, cada número só vai ser posto na cartela que possui as potências de base 2 correspondentes em sua decomposição. A exemplo das cartelas da Figura 2 para serem preenchidas.

Figura 2 – Cartelas mágicas não preenchidas.



Fonte: Elaborada pelo autor

É percebido na figura 2, 5 cartelas, cada uma com uma das 5 primeiras potências de base 2, com isso o maior número que é possível formar com as respectivas potências de 2 é $31 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16$. No exemplo da figura 1, que haviam 6 cartelas, o maior número entre as cartelas era 63, pois $63 = 1+2+4+8+16+32$. Aumentando as cartelas aumentam-se o total de números possíveis, sendo n o número de cartelas o valor máximo que é possível obter com as mesmas será sempre igual $2^{n+1} - 1$.

Isto ocorre pois a soma das n primeiras potências de 2 é igual a $2^{n+1} - 1$. Isto vai ser provado agora por indução em n.

1. Para $n = 1$, a proposição é válida pois, $2^0 + 2^1 = 2^2 - 1$.

2. Consideremos, por hipótese de indução, que a proposição $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ seja válida para algum $n \geq 1$. Somando 2^{n+1} a cada membro teremos:

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} &= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} \\ &= 2 \cdot (2^{n+1}) - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1 \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução temos que a fórmula é válida para todo $n \geq 1$.

Note que, para a mágica com n cartelas, cada cartela contém 2^{n-1} elementos. De fato, os elementos da cartela referente ao termo 2^k são da forma:

$$a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \cdots + 1 \cdot 2^k + \cdots + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$$

e para cada a_i, tem duas possibilidades 0 ou 1. Dessa forma, pelo princípio fundamental da contagem, temos 2^{n-1} possibilidades para cada cartela.

De conhecimento da quantidade de números possíveis, agora é só alocar os números. Por exemplo, o número 19 visto no exemplo 2.1, que é escrito na base 2 como 10011_2, possui em sua decomposição o $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^4 = 16$ então, como o 19 possui em sua decomposição a soma dos números 1,2 e 16, isso indica que o 19 só deve estar presente nas cartelas que apresenta esses números como primeiro algarismo.

Isso é equivalente a apenas observar os algarismos do número decimal, representado na base binária da direita para a esquerda. Considerando o primeiro algarismo referente a primeira cartela, o segundo algarismo a segunda cartela, e assim sucessivamente. O algarismo 1 representa que esse número deve aparecer na cartela, e o 0 que não deve aparecer.

Temos a seguir a escrita de alguns números na base binária:

$3 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 = 11_2$, isso indica que o 3 deve aparecer na primeira e segunda cartela.

$4 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 100_2$, o 4 deve aparecer apenas na terceira cartela

$5 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 101_2$, o 5 deve aparecer na primeira e terceira cartela.

$6 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 110_2$, o 6 deve aparecer na terceira e segunda cartela.

Utilizando esse raciocínio para os 31 primeiros algarismos encontra-se os seus lugares correspondentes em todas as cartelas.

Assim, quando um espectador menciona as cartelas que contêm o número pensado, cabe ao mágico apenas somar os primeiros algarismos das cartelas escolhidas, e o resultado será exatamente o número pensado.

A Figura 3 apresenta um exemplo das 5 cartelas já preenchidas.

Utilizando um raciocínio análogo é possível criar também as cartelas mágicas com potências de base 3. Pois, como um número inteiro pode ser escrito em qualquer base pelo Teorema 1.1, isso permite que todo número natural possa também ser esscrito na base 3.

A base 3 é formada com o uso dos algarismos 0, 1 e 2. Então agora para as escolhas das cartelas, os primeiros algarismos das cartelas deverão conter uma potência de base 3 multiplicada por 1 ou por 2. Com isso, haverá duas cartelas para cada potência de base 3.

Figura 3 – Cartelas mágicas preenchidas.

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	21	23
28	29	30	31

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

Fonte: Elaborada pelo autor

Para a escolha dos restantes dos algarismos das cartelas, deverá ser observado a escrita do número na base 3 da direita para a esquerda, sendo o primeiro algarismo referente a primeira e segunda cartela, o segundo algarismo a terceira e quarta, o terceiro a quinta e sexta e assim sucessivamente. Considerando as cartelas que fazem referência, o algarismo 0 indica que o número não aparece em nenhuma das 2 cartelas, o algarismo 1 indica que vai aparecer apenas na primeira cartela, e o 2 indica que vai aparecer apenas na segunda cartela.

Escrita de alguns números na base 3:

$4 = 1 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^1 = 11_3$

$5 = 2 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^1 = 12_3$

$6 = 0 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 = 20_3$

$7 = 1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 = 21_3$

$8 = 2 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 = 22_3$

Observe agora a Figura 4 que apresenta um exemplo de **Cartelas mágicas na base 3**, e veja que o primeiro algarismo de cada cartela é representado por uma potência de 3 multiplicada pelo algarismo 1 ou o 2 na sequência e observemos então, que a escolha dos números para as cartelas ocorreu da forma descrita.

Figura 4 – Cartelas na base 3.

1	4	7
10	13	16
19	22	25

2	5	8
11	14	17
20	23	26

3	4	5
12	13	14
21	22	23

6	7	8
15	16	17
24	25	26

9	10	11
12	13	14
15	16	17

18	19	20
21	22	23
24	25	26

Fonte: Elaborada pelo autor

O intuito de trabalhar mágicas que envolvem cartelas com base numérica é despertar no educando o interesse não só pela mágica em si, como também o anseio de entender os conceitos matemáticos que as envolvem.

2.2 Cartelas de Fibonacci

Este truque utiliza os mesmos materiais do anterior. A sua realização é indicada para alunos do ensino médio. Por envolver a sequência de Fibonacci, o professor pode se utilizar deste truque, para desenvolver o conceito deste tipo de sequência.

Descrição da mágica: a execução desta mágica ocorre da seguinte forma: O mágico apresenta algumas cartelas para o público, cartelas estas contendo vários números. Na sequência informa que consegue adivinhar a idade de qualquer pessoa com a ajuda das cartelas. Na sequência um voluntário se aproxima e o mágico pede para que ele aponte em quais cartelas está o número que corresponde a sua idade. Na sequência o mágico revela a idade do voluntário.

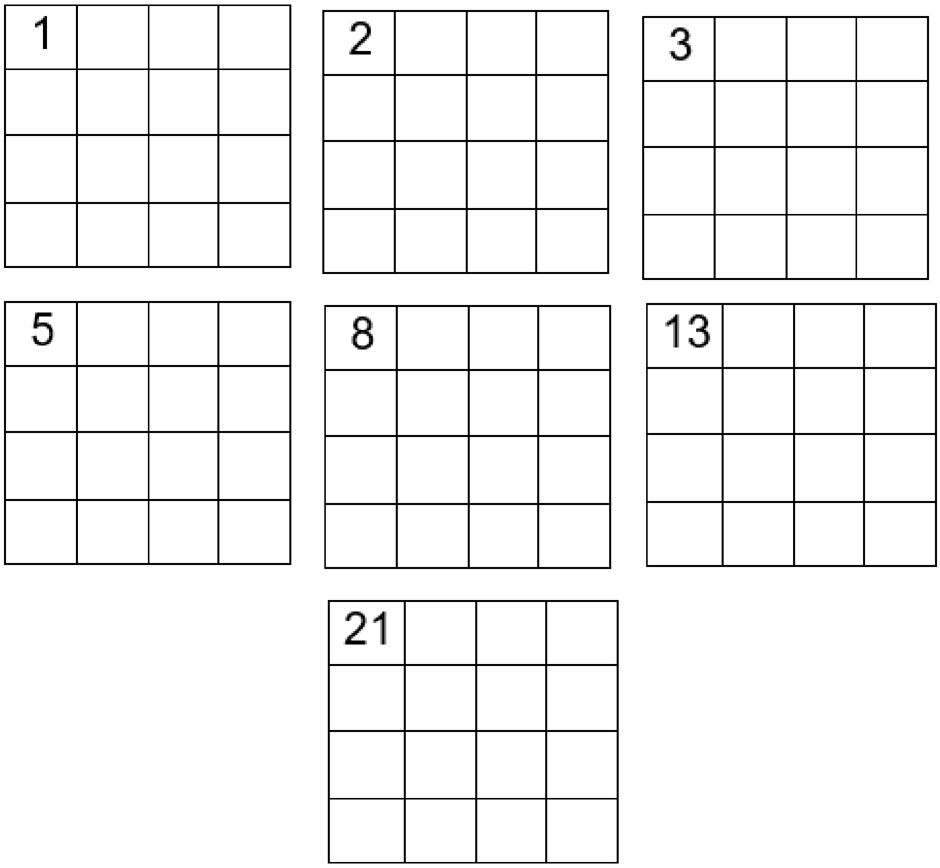
Explicação Matemática da mágica: apesar da semelhança em sua execução com a mágica anterior, ocorre uma diferença entre elas que reside na escolha dos números para as cartelas, visto que a escolha agora está relacionada aos números da sequência de **Fibonacci**.

De acordo com Meire de Freitas (2018), o que garante que é possível criar cartões mágicos com os números da sequência de **Fibonacci** é o **Teorema de Zeckendorf**.

O **Teorema de Zeckendorf** nos diz que: todo número inteiro positivo pode ser representado exclusivamente como uma soma de números de Fibonacci não consecutivos.(o mesmo foi provado no 1° capítulo).

Então, como escolher os números das cartelas? O primeiro passo é escolher uma sequência dos números de Fibonacci a partir de F_2, cada número dessa sequência, vai ser o primeiro algarismo de uma cartela, a quantidade de números de Fibonacci da sequência representa a quantidade de cartelas do jogo, por exemplo, se escolhermos os números F_2, F_3, F_4, F_5,F_6, F_7 e F_8 então haverá 7 cartelas. Como ocorre na Figura 5

Figura 5 – Cartelas de Fibonacci não preenchidas.



Fonte: Elaborada pelo autor

No exemplo acima, que foi escolhido números até F_8 e considerando a maior soma possível dos números de cartelas não consecutivas, observa-se que a maior soma possível é 33 que é equivalente a $F_9 - 1$. Isso pode ser observado na Propriedade 1.4 a qual mostra que a maior soma possível de termos não consecutivos de uma sequência de **Fibonacci** a partir de F_2 até F_{n-1} é igual a $F_n - 1$.

Sabendo o valor máximo que é possível ser formado, a tarefa agora é observar a decomposição em números não consecutivos de **Fibonacci** de todos os números que é possível formar com a quantidade de cartelas escolhida e colocar esses números apenas nas tabelas que contêm os números de Fibonacci da sua decomposição.

Lembrando que a cartela 1 possui como primeiro algarismo o valor de F_2, a segunda o valor de F_3 e assim sucessivamente.

Fazendo essa decomposição com alguns números:
$4 = F_2 + F_4$, logo, o 4 vai aparecer na 1° e 3° cartela.
$6 = F_2 + F_5$, logo, o 6 vai aparecer na 1° e 4° cartela.
$7 = F_3 + F_5$, logo, o 7 vai aparecer na 2° e 4° cartela.
$19 = F_2 + F_4 + F_6$, logo, o 19 vai aparecer na 2°, 4° e 6° cartela.

Esse processo deve ser repetido até ser colocado nas cartelas todos os valores que são possíveis com a combinação da soma dos números não consecutivos de **Fibonacci**.

Sendo assim, quando o jogador apontar as cartelas que possuem o número pensado, o "mágico" irá apenas somar o primeiro digito das cartelas escolhidas, e o Teorema de Zechendorf vai garantir que será encontrado o resultado correto.

A Figura 6 apresenta um exemplo das cartelas preenchidas:

Figura 6 – Cartelas de Fibonacci preenchidas.

1	4	6	9
12	14	17	19
22	25	27	30
33	51	57	63

2	7	10	15
20	23	28	31
47	50	52	55
58	61	65	70

3	4	11	12
16	17	24	25
32	33	44	48
49	54	59	66

5	6	7	18
19	20	26	27
28	40	45	48
51	55	57	59

8	9	10	11
12	29	30	31
32	33	37	44
48	51	60	31

13	14	15	16
17	18	19	20
41	42	43	44
53	54	55	56

21	22	23	24
25	26	27	28
29	30	31	32
33	42	60	65

Fonte: Elaborada pelo autor

Foi mostrado anteriormente que o maior número que é possível formar com as cartelas seria o 33. No entanto, é possível observar que as cartelas apresentam números bem maiores, então, porque isso ocorre? Esses números maiores que 33 podem ser escolhidos de maneira aleatória, o que deve ser considerado para a mágica funcionar são apenas os números entre 1 e 33. É válido notar que a mágica não irá funcionar se na turma houver pessoas com mais de 33 anos, o que raramente ocorre em turmas de ensino médio. Caso isso ocorra, torna-se necessário acrescentar outras cartelas para aumentar a quantidade de números possíveis.

2.3 Truque: Igualando as cartas

Para a realização desta mágica, é necessário um baralho completo de 52 cartas (sem os coringas). A mesma é recomendada para alunos do ensino fundamental 2 e ensino médio. O professor pode utilizá-la para trabalhar conteúdos de adição, subtração e equação de 1° grau.

Descrição da mágica: de início, é solicitado a participação de um voluntário, para embaralhar as cartas. Na sequência, é solicitado ao voluntário virar 20 cartas das 52 do baralho. O baralho passa a ter 20 cartas voltadas para baixo e 32 voltadas para cima. Em seguida é solicitado ao voluntário embaralhar as cartas novamente e separar 20 destas 52 cartas, obtendo assim, 2 montes, um de 20 cartas e outro de 32 cartas, ambos possuindo cartas viradas para baixo e para cima. O mágico então toma o monte de 20 cartas, vira-o para baixo e afirma que vai ajustar este monte para que o mesmo possua a mesma quantidade de cartas viradas para cima do outro monte. O mágico então, coloca este monte sobre a mesa e solicita ao voluntário contar o número de cartas viradas para cima em cada monte. O voluntário chegará então a conclusão que os 2 montes possuem a mesma quantidade de cartas viradas para cima.

Explicação Matemática da mágica: após as instruções do mágico, no baralho de 52 cartas há a formação de 2 montes: um possuindo 20 cartas voltadas para cima e o outro 32 cartas voltadas para baixo. Considerando x a quantidade de cartas voltadas para cima no monte de 20 cartas, assim o número de cartas voltadas para baixo neste mesmo monte será de $20 - x$. No monte de 32 cartas, têm-se $20 - x$ cartas para cima (pois, no monte de 20 cartas tinha x para cima e, originalmente, foram voltadas para cima 20 cartas e, depois, misturadas no baralho). Para completar as 32 cartas teremos $12 + x$ cartas voltas para baixo. A quantidade dos 2 montes está representada na Figura 7.

Figura 7 – Divisão das cartas nos 2 montes

	Monte de 20 cartas	Monte de 32 cartas
Cartas para cima	x	$20-x$
Cartas para baixo	$20-x$	$12+x$

Fonte: Fajardo, Kegler e Becker (2017)

Portanto, o número de cartas para baixo no monte com 20 é igual ao número de cartas para cima no monte com 32. Desta forma, ao simplesmente virar todo o monte de 20 cartas, o número de cartas voltadas para cima se iguala nos dois montes.

2.4 Truque das 21 cartas

Para a realização desta mágica, é necessário o uso de 21 cartas de um baralho normal com 52 cartas. Este truque é recomendado para alunos do ensino fundamental e médio. Apesar do truque não envolver cálculos em sua explicação, o mesmo envolve raciocínio lógico matemático, este que pode ser definido como a habilidade de solucionar problemas a partir da relação lógica entre as informações. O professor pode utilizar este tipo de mágica para desenvolver a lógica Matemática dos alunos.

Descrição da mágica: para a construção dessa mágica, é necessário 21 cartas diferentes de baralho. O mágico coloca as cartas na mesa, dividindo-as em 3 montes, a ordem de colocar as cartas na mesa, é seguindo a sequência de 1 carta em cada monte, depois repete-se o processo até terminar as cartas. Como ocorre na imagem da Figura 8, em que a primeira carta a ser colocada foi o 9 de espadas, a segunda o 9 de ouros, a terceira o 3 de copas e assim sucessivamente.

Na sequência, o mágico pede a um convidado da plateia para pensar em uma das cartas, sem dizer a resposta, e informar em qual monte está a carta pensada. Em seguida o mágico junta as cartas de cada monte na ordem em que foram colocadas e organiza os montes em sua mão. A organização dos montes na mão ocorre da seguinte forma: primeiro coloca-se um monte que não contêm a carta escolhida, na sequência o monte com a carta escolhida e por último o terceiro monte.

O mágico redistribui as cartas novamente do mesmo modo e pergunta em qual

Figura 8 – Cartas de baralho: divididas em 3 montes, com 7 cartas cada.

Fonte: Elaborada pelo autor

monte está a carta escolhida e o convidado responde. Novamente, o mágico recolhe e redistribui as cartas pelo mesmo processo, e pergunta em qual monte está a carta correta. Na sequência o mágico recolhe as cartas pelo mesmo processo e informa ao convidado qual foi a carta pensada.

Explicação Matemática da mágica: o mágico realiza o processo que foi descrito acima para recolher as cartas, com isso a carta correta estará entre as cartas de posição 8° até a 14º posição.

Ao redistribuir novamente as cartas na mesa pelo processo que foi descrito, a carta correta só poderá aparecer nas seguintes posições (contando de cima pra baixo) 4° ou 5° do primeiro monte, 3°, 4° ou 5° do segundo monte, ou 3° e 4° do terceiro monte.

O convidado novamente escolhe o monte correto e o mágico por sua vez repete o mesmo processo de recolhimento e redistribuição das cartas.

Se o monte citado anteriormente que havia a carta correta era o primeiro, com a nova redistribuição das cartas, a carta correta estará na 4° posição do segundo ou terceiro monte.

Caso a carta não estivesse no primeiro monte e sim no segundo, com a redistribuição, a carta correta estaria na 4° posição do primeiro, segundo ou terceiro monte.

Caso a carta não esteja no segundo monte e sim no terceiro. Com a redistribuição, a carta correta estará na 4° posição do primeiro ou segundo monte.

Como o convidado ainda vai falar em qual monte está a carta pensada, o mágico vai ter certeza de qual é a carta correta, pois sabe que a mesma está na 4° posição. Ao recolher as cartas pelo processo que foi mencionado acima, o mágico terá a certeza de que a carta correta sempre estará na posição 11.

2.5 Mágica com baralho: príncipio do ternário balanceado

Para a realização deste truque é necessário um baralho comum de 52 cartas. Ele é indicado para ser utilizado em turmas de ensino fundamental 2 ou nível médio. O professor pode utiliza-lo para trabalhar potenciação, no caso aqui específico as potências de base 3.

Descrição da mágica: o mágico pega um baralho comum, embaralha as cartas e entrega as 6 primeiras, viradas para baixo, a um voluntário e pede para que ele escolha 3 destas 6 cartas. O mágico então pede ao voluntário para observar o valor numérico correspondente a cada carta, e que considere com valor numérico negativo as cartas com naipe vermelho, e valor numérico positivo as com naipe preto.

Relembrando que há cartas que apresentam valores numéricos de 2 a 10, e cartas que apresentam letras, sento estas: o ÁS (representado pela letra A e que possui valor numérico 1), o valete (representado pela letra J, com valor númerico 11), a rainha (representada pela letra Q, com valor numérico 12) e o rei (representado pela letra K, com valor numérico 13).

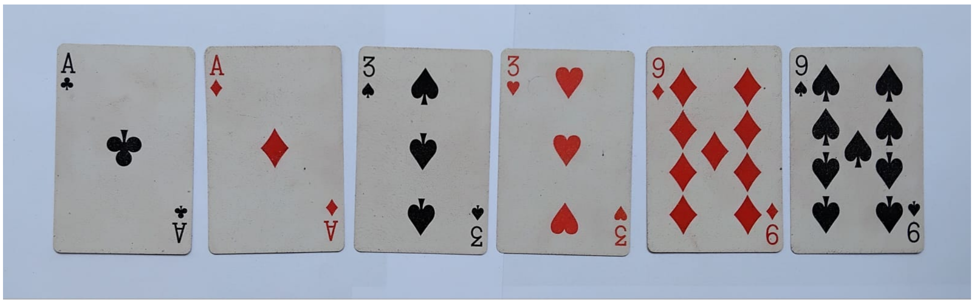
Então é solicitado ao voluntário que informe qual a pontuação total dessas 3 cartas. Após isso, o mágico consegue dizer quais são exatamente as 3 cartas escolhidas, ou dirá para o voluntário excluir 2 cartas que ele adivinhou que são iguais, e acertará qual é exatamente a carta restante.

Explicação Matemática da mágica: uma parte da mágica consiste na forma de embaralhar as cartas, de forma que as 6 primeiras cartas continuem na mesma posição e na escolha destas 6 primeiras cartas que deverão ser potências de base 3.

Lembremos que as únicas cartas no baralho que possuem numeração com o valor de um potência de base 3 é o Ás, o 3 e o 9, sendo o Ás=1. Dentre as 6 cartas, deverá ser escolhido essas 3 numerações da cor preta (naipe de espadas ou paus) e 3 da cor vermelha (naipe de copas ou ouro). De preferência, os naipes destas 6 cartas devem estar em ordem alternada, para dar a ideia que as cartas foram escolhidas de maneira aleatória. O mágico deve decorar estas 6 cartas.

A imagem da Figura 9 ilustra um exemplo da escolha dessas 6 cartas.

Figura 9 – Cartas de baralho na base 3.



Fonte: Elaborada pelo autor

Mesmo conhecendo as cartas, ainda lhe resta a tarefa de adivinhar 3 das 6 cartas escolhidas. O total de possibilidades para escolher 3 cartas entre 6 utilizando combinação é 20. Então, como ele consegue desvendar as cartas corretas dentre tantas possibilidades?.

O segredo para isso está revelado no Princípio Ternário Balanceado: "Todo número inteiro pode ser escrito como uma soma de potências de 3 com sinais distintos, e esta representação é única, exceto cancelamentos.

Temos que cada uma dessas 6 cartas representam uma potência de 3, só mudando os sinais. Quando o voluntário revela a soma das 3 cartas, há 2 opções para se pensar:

1. se o resultado for uma potência de base 3, então ocorreu de haver 2 cartas de mesmo valor que se cancelaram, logo o mágico avisa que 2 cartas se cancelaram, e a soma que foi dita representa a carta correta.

2. se o resultado não for uma potência de base 3. O mágico deve pensar qual a decomposição desse número em potências de base 3, e essa decomposição vai representar as cartas corretas.

2.6 Adivinhando o número pensado em um calendário

Para a realização deste truque é necessário o uso de um calendário. Ele é indicado para discentes do ensino médio. Este truque pode ser utilizado para trabalhar conteúdos que envolvam média aritmética e equação de 1° grau.

Descrição da mágica: o mágico mostra um calendário qualquer com os meses do ano e entrega esse calendário a um voluntário da plateia. O mágico então pede a esse voluntário para circular nove números no calendário de forma que fiquem no formato de um quadrado 3 por 3 e de modo que o mágico não veja esse números. Como mostrado na Figura 10.

Figura 10 – Folhinha de um calendário: Com marcação de 9 dias em um quadrado 3 por 3.

DOM	SEG	TER	QUA	QUI	SEX	SAB
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Fonte: Elaborada pelo autor

O mágico então pede ao voluntário que informe o valor da soma desses 9 números escolhidos. Rapidamente sabendo do valor dessa soma, o mágico diz exatamente o número que está no centro dos 9 números escolhidos.

Explicação Matemática da mágica: os calendários são divididos em 7 linhas verticais que representam os dias da semana e linhas horizontais que apresentas os dias do mês em ordem crescente.

O modo como os 9 números devem ser escolhidos, sendo sempre num formato 3 por 3, não é por acaso. Imagine que foi escolhido esses 9 números e o primeiro número seja n, o segundo será $(n+1)$, o terceiro $(n+2)$, o quarto número será 7 unidades a mais que o primeiro logo será, $(n+7)$, o quinto $(n+8)$ e o sexto $(n+9)$, o sétimo será $(n+14)$, o oitavo $(n+15)$ e o nono $(n+16)$.

Os números escolhidos se apresentarão no calendário deste modo:

$$\begin{array}{ccc} n & n+1 & n+2 \\ n+7 & n+8 & n+9 \\ n+14 & n+15 & n+16 \end{array}$$

Somando esses nove números teremos:

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+7)+(n+8)+(n+9)+(n+14)+(n+15)+(n+16)=9n+72$$

Ao dividirmos essa soma $(9n+72)$ por 9 (que é a quantidade de números escolhidos), encontramos como resultado $(n+8)$ que é exatamente igual quinto termo e ao termo central entre os números escolhidos. Logo para o mágico descobrir o termo central, ele precisa apenas calcular o resultado da divisão do número informado pelo voluntário por 9.

2.7 Adivinhando a soma de várias datas escolhidas em uma calendário

Para a realização deste truque é necessário um calendário. Ele é indicado para alunos do ensino médio. Este truque pode ser utilizado para trabalhar média aritmética.

Descrição da mágica: de início o mágico apresenta a folha de um calendário que contenha um mês de 5 semanas, como o exemplo da Figura 11.

Figura 11 – Folhinha de um calendário.

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

Fonte: Sampaio (2005)

Folhinhas que possuem 2 domingos sobrepostos em um mesmo quadrinho, não devem ser utilizadas, pois, envolvem 6 semanas e não 5, como na imagem da Figura 12.

Figura 12 – Folhinha de um calendário: com 2 domingos sobrepostos.

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23 **30**	24	25	26	27	28	29

Fonte: Sampaio (2005)

De início, o mágico convida um voluntário a se aproximar do calendário e o orienta a escolher um dia de cada uma das 5 semanas. O voluntário é orientado a anotar os 5 dias que foram escolhidos. Na sequência, o mágico pede-lhe então para dizer apenas quantos domingos escolheu, quantas segundas, quantas terças, e assim por diante. O mágico então anota esses dias que foram escolhidos e logo lhe diz qual a soma do valor numérico dos dias escolhidos. Este truque causa grande surpresa.

Explicação Matemática da mágica: considere que o voluntário escolheu os dias apresentados na Figura 13.

Figura 13 – Folhinha de calendário: com marcação de um dia em cada semana

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
		1	2	3	$\boxed{4}$	5
6	$\boxed{7}$	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	$\boxed{18}$	19
20	21	22	$\boxed{23}$	24	25	26
$\boxed{27}$	28	29	30			

Fonte: Sampaio (2005)

Ao ser perguntado, ele responderá que escolheu um domingo, uma segunda, uma quarta e duas sextas-feiras. De posse desta informação o mágico revelará ao público que a soma dos dias escolhidos é 79.

O mágico olha na folhinha para ver a data central (quarta-feira da terceira semana) que aparece nela. No nosso exemplo, essa data é 16. O mágico calcula $5 \times 16 = 80$.

De posse desse dado, o mágico presta atenção nas informações que lhe são repassadas pelo voluntário que escolhe as 5 datas.

A partir destas informações o mágico realiza o seguinte cálculo:
Para cada domingo, o mágico subtrai 3;
Para cada segunda-feira, subtrai 2;
Para cada terça-feira, subtrai 1;
As quartas-feiras são ignoradas;
Para cada quinta-feira, soma (acrescenta) 1;
Para cada sexta-feira, acrescenta 2, e para cada sábado acrescenta 3.

Em outras palavras, no caso do calendário da Figura 13, ao número $5 \times 16 = 80$, o mágico fará a sequência de cálculos $80 - 3 - 2 + 2 + 2 = 79$, isto é: $80 - 3$ (um domingo) -2 (uma segunda) $+2 + 2$ (duas sextas).

Mas porquê a fórmula funciona? Primeiramente imaginemos que os espaços vazios da folhinha também estejam preenchidos, com as "datas" em progressão aritmética. Assim a folhinha acima ficará na forma da Figura 14.

Figura 14 – Folhinha de um calendário: com todos os espaços vazios preenchidos.

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
−1	**0**	1	2	3	$\boxed{4}$	5
6	$\boxed{7}$	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	$\boxed{18}$	19
20	21	22	$\boxed{23}$	24	25	26
$\boxed{\mathbf{27}}$	28	29	30	**31**	**32**	**33**

Fonte: Sampaio (2005)

Então a soma dos dias que foram escolhidos será, neste exemplo,

$$4 + 7 + 18 + 23 + 27 = (\underline{2} + 2) + (\underline{9} - 2) + (\underline{16} + 2) + (\underline{23} + 0) + (\underline{30} - 3)$$

Os números aqui sublinhados são as datas das cinco quartas-feiras do calendário.. Eles ficam posicionados nas cinco colunas centrais.

O segundo número 2 da soma $2 + 2$ refere-se a um deslocamento para a direita de duas casas a partir da coluna central. O número -2 da subtração $9 - 2$ refere-se a um deslocamento para a esquerda de duas casas a partir da coluna central. O número 2 da soma $16 + 2$ refere-se a um deslocamento para a direita de 2 casas, e assim por diante. Assim sendo a soma acima será $(2 + 9 + 16 + 23 + 30) - 3 - 2 + 2 + 2 = 79$

A soma $2+9+16+23+30$ é a soma de 5 termos de uma progressão aritmética de razão 7, portanto, igual a 5 vezes o termo central ($= 5 \times 16 = 80$). O mesmo argumento se aplicaria à folhinha à esquerda da figura 15, que tem apenas quatro quartas-feiras (e data central 13), daí a inserção de números negativos na explicação aritmética do truque. Isso pode ser observado na Figura 15.

Figura 15 – Comparação entre 2 folhinhas: uma normal e outra com os espaços vazios preenchidos.

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
−4	−3	−2	−1	0	1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

Fonte: Sampaio (2005)

2.8 Adivinhação com números

Para a realização deste truque, é necessário apenas uma canete e uma folha de papel. O mesmo é recomendado param alunos do 9° ano do ensino fundamental e do ensino médio. Este truque pode ser utilizado no ensino de equação de 1° grau. Truques deste tipo são bastante interessantes, pois apesar de serem bem simples, trazem uma reação de surpresa de todo o público.

Descrição da mágica: esta mágica ocorre da seguinte forma, o mágico diz que pensou em um número, o anota em um papel e o guarda. Na sequência pede a todo o público ouvinte para pensarem em um número entre 1 e 100. Logo após, o público deve realizar os seguintes cálculos com esse número pensado:

1. Multiplica-lo por 2;
2. Com o resultado anterior somar 2;
3. Multiplicar este último resultado por 5;
4. Subtrair 3 unidades do resultado.

Logo após, o público vai revelando de um em um, o resultado da operação, e o mágico então revela o número que foi escondido inicialmente e mostra que todos os resultados apresentados contêm o número que cada um do público pensou e o número que o mágico pensou.

Explicação Matemática da mágica: imagine que uma pessoa do público tenha pensado no número 6, após a sequência de operações o resultado seria 67. O 6 vai corresponder ao número pensado inicialmente e o 7 corresponde ao número do mágico.

Considerando n como o número pensado inicialmente e aplicando as operações pedidas, teremos $5(2n+2)-3 = 10n+7$. Isso mostra que ao final dos cálculos propostos será sempre obtido, um número que possui o 7 como algarismos das unidades, e o restante dos algarismos representando o número n que foi pensado.

Percebe-se que além da subtração do 3, o mágico poderia utilizar a subtração de qualquer outro número natural entre 1 e 9. Com isso é possível refazer o truque, várias vezes, utilzando números diferentes e chegando a diversos resultados, o que causa maior surpresa.

2.9 Idade com o número mágico

Para a realização desta mágica é necessário a utilização de papel e caneta. Este truque é indicado para alunos do ensino fundamental 2 e médio. O docente pode se utilizar desse conteúdo para trabalhar a operação de adição e o sistema numérico posicional.

Descrição da mágica: o mágico diz a plateia que vai conseguir adivinhar a idade de algum parente (avó, avô, mãe, pai, tio, tia). Solicita então a presença de um voluntário e pede para que siga as seguintes instruções:

1. Escolha um parente, e escreva a idade do mesmo em um folha de papel;
2. Abaixo da idade do parente escrever o número mágico que é 80 e somar ambos os números;
3. Deste último resultado, retire o algarismo que está mais a esquerda e some este algarismo ao número que sobrou;
4. Informar o resultado destas operações ao mágico.

Em posse do resultado o mágico rapidamente informa qual a idade deste parente. O voluntário por sua vez mostra a idade do parente que havia anotado e isto confirma que o mágico realmente adivinhou a data correta.

Explicação Matemática da mágica: imagine que a idade do parente do voluntário seja 35 anos. Seguindo as instruções do mágico teremos:

1. Idade, 35 anos;
2. Somando 80 teremos 115;
3. O algarismo a esquerda é o 1, somando 1 com o que sobrou que é 15 teremos 16;
4. O voluntário então informa o resultado 16.

Ao saber que a soma é 16, o mágico então soma 19 ao resultado final e de forma mágica encontra a idade correta do parente.

Quando foi solicitado que o voluntário escolhesse um dos familiares citados é porque, em geral, essas idades se enquadram no intervalo desejado: que é entre 20 e 120. Para uma idade menor que 20 o número mágico deverá ser maior.

Somado essa idade com o número mágico 80, o resultado estará entre 100 e 200. O resultado obtido deve ter esse formato, após o participante ter somado a idade do familiar com o número mágico e sendo x essa idade, obteremos um número, $x+80$, que se encontra entre 100 e 200. Este fato é crucial, pois, ao se retirar o algarismo da esquerda, deve-se ter certeza que o número cancelado é o digito 1 na casa da centena.

Tendo em vista que o algarismo na casa da centena será sempre o 1, devido ao intervalo de que foi escolhido, quando este número é cancelado ocorre que se está subtraindo 100 do número e ao adicionar 1, termina-se por subtrair 99 da idade do parente.

Uma vez que já foi adicionado 80 (número mágico), resta somar 19 $(99 - 80)$ ao número final para chegar assim, a idade correta.

2.10 Números secretos

Para a realização desta mágica não é necessário nenhum material. Este truque é indicado para alunos do ensino fundamental 2 e ensino médio. O docente pode utilizá-la para trabalhar as operações aritméticas e equação de 1° grau.

Descrição da mágica: o mágico diz a plateia que consegue adivinhar a idade e o número do calçado das pessoas. Convida um voluntário e solicita que o mesmo realize as seguintes tarefas:

1. pense em sua idade;
2. Multiplique-a sua idade por 20;
3. Adicione ao resultado a data de hoje (por exemplo, se for 15 de junho, adicionar 15);
4. Multiplique o resultado por 5;
5. Acrescente ao resultado o número de seus sapatos;
6. Subtraia do resultado 5 vezes a data de hoje;
7. Mostre-lhe a resposta.

Com o conhecimento da resposta, o mágico informa a idade e o número do calçado do voluntário.

Explicação Matemática da mágica: imagine que o voluntário tenha 13 anos, que a data de hoje fosse 15 e que o número do sapato fosse 38. Após realizar as tarefas solicitadas pelo mágico, o resultado encontrado será 1315, sendo o 13 a idade do voluntário e 38 o número de seus sapatos.

Para entendermos melhor o truque, consideremos a idade do voluntário sendo igual a x, a data de hoje sendo y e o número do sapato igual z. Realizando as tarefas solicitadas, teremos;

1. Pense em sua idade: x;
2. Multiplique-a sua idade por 20: $20x$;
3. Adicione ao resultado a data de hoje: $20x + y$;

4. Multiplique o resultado por 5: $5(20x + y) = 100x + 5y$;

5. Acrescente ao resultado o número de seus sapatos: $100x + 5y + z$;

6. Subtraia do resultado 5 vezes a data de hoje: $100x + 5y + z - (5y)$;

7. Mostre-lhe a resposta: $100x + z$.

Observa-se que, independente da idade, dia do mês e número de sapato, o resultado das operações propostas, será sempre igual ao produto da idade (x) por 100, somado com o número do sapato (z). Lembremos que, multiplicar um número por 100 equivale a acrescentar 2 zeros a sua direita e como o número de sapato possui 2 dígitos, quando os valores são somados, os zeros são substituídos pelo número do sapato, resultado assim na idade seguida do número do sapato do voluntário.

2.11 Adivinhação de números com Fibonacci

Para a realização desta mágica é necessário a lousa da sala de aula e um piloto para quadro branco. A mesma é indicada para alunos dos anos finais do ensino fundamental e ensino médio. O docente pode utilizá-la para trabalhar conteúdos como: sequências e aritmética.

Descrição da mágica: o mágico convida um voluntário, entrega-lhe um piloto e diz para ir até o quadro branco. Na sequência o mágico fica de costas para o quadro e pede ao voluntário para anotar 2 números inteiros de 1 a 10, um abaixo do outro. O voluntário deve somar esses 2 números e colocar o resultado abaixo dos outros 2 formando assim um 3° número, após isso deve somar o 2° com o 3° número, formando um 4° número, depois somar o 3° com o 4° número, formando o 5°. Esse processo deve ser continuado até chegar ao décimo número e todos eles formando uma coluna vertical.

Supondo que o voluntário tenha escolhido os número 8 e 3, a coluna ficaria dessa forma:

$$\begin{array}{c} 8 \\ 3 \\ 11 \\ 14 \\ 25 \\ 39 \\ 64 \\ 103 \\ 167 \\ 270 \end{array}$$

Logo após o voluntário terminar de escrever os números, o mágico então volta-se para o quadro e quase que de modo imediato consegue adivinhar a soma de todos os números. O que no exemplo acima seria 704.

Explicação Matemática da mágica: esse tipo de sequência que foi solicitada é conhecida como "sequência de Fibonacci generalizada" que são todas as sequências definidas pela recorrência $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, onde $F_1 = a$ e $F_2 = b$, com a e $b \in \mathbb{N}$.

Para entendermos o funcionamento deste truque, consideremos que foram escolhidos 2 números naturais a e b quaisquer sendo a o primeiro termo da sequência e b o segundo. Elencando os 10 primeiros na forma que foi solicitada pelo mágico, teremos:

$$\begin{gathered} a \\ b \\ a+b \\ a+2b \\ 2a+3b \\ 3a+5b \\ 5a+8b \\ 8a+13b \\ 13a+21b \\ 21a+34b \end{gathered}$$

Somando todos esses termos, temos como resultado $55a + 88b$, o que é equivalente a 11 vezes o valor do 7º termo da sequência. Logo, o mágico ao olhar os 10 termos apresentados no quadro, observa qual o 7° termo e faz a multiplicação do mesmo por 11, chegando assim ao resultado desejado. Para fazer a multiplicação por 11, o mágico pode se utilizar de técnicas de cálculo mental.

Uma delas é a seguinte: imagine que o 7º termo seja n, então o seu produto por 11 será igual a $11n$ e esse resultado podemos reescreve-lo como $n(10 + 1)$ e utilizando a propriedade da distributividade na multiplicação, teremos $10n + n$, ou seja, podemos pensar no produto do 7º número por 10 e depois somá-lo a este resultado, o que torna o cálculo mais simples. No exemplo da mágica acima, o 7° termo foi 64. Utilizando esta técnica, teremos $64 \cdot 10 + 64 = 640 + 64 = 704$.

Outra técnica que pode ser utilizada, seria observar que quando o número que multiplica o 11 possui 2 dígitos e possui como soma de seus algarismos um número menor que 10, então o resultado da multiplicação será os 2 dígitos e o resultado da soma será posto no meio deles, como nos exemplos abaixo:
$34 \cdot 11 = 374$ (os dígitos são: 3, 3+4, 4);
$72 \cdot 11 = 792$ (os dígitos são; 7, 7+2 e 2)

Quando o resultado da soma dos 2 dígitos for maior ou igual a 10, deve-se colocar

o algarismo das unidades desta soma entre os 2 dígitos, e o algarismo da dezena deve ser somado ao primeiro dígito, como vemos abaixo:
$87 \cdot 11 = 957$ (os dígitos são: 8+1, 5 e 7);
$98 \cdot 11 = 1078$ (os dígitos são: 9+1, 7 e 8)

Essa técnica pode ser adaptada para somas de 3 ou mais algarismos. Sendo que quanto maior a quantidade de algarismos do número a ser multiplicado por 11, o cálculo mental também pode exigir mais esforço, sendo necessária certa habilidade em somas mentais da parte do mágico, para que o resultado apareça de forma rápida.

2.12 Mágica dos envelopes e príncipio de indução finita

Para a realização desta mágica, é necessário o uso de envelopes em quantidade suficiente para toda a turma e pedaços de papel. Este truque é bastante interessante, pois, envolve a turma inteira e causa bastante curiosidade. Ela é indicada para alunos dos anos finais do ensino fundamental e do ensino médio, a mesma traz conceitos de indução que podem despertar nos educandos o interesse de se aprofundar mais no conteúdo.

Descrição da mágica: de início o mágico vai distribuir envelopes e pedaços de papel para todos os participantes, em seguida ele solicita que todos os participantes anotem no papel o nome de suas avós e guardem no envelope.

Na sequência, o mágico recolhe todos os envelopes e diz que vai adivinhar o nome de todas as avós dos participantes. A seguir pega um envelope e diz o nome de uma avó, por exemplo, o nome Josefa, e pergunta se algum participante tem uma avó com esse nome e logo algum participante diz que é a avó do mesmo, o mágico então abre o envelope, olha o papel que havia dentro e confirma que adivinhou o nome correto.

O mágico repete o mesmo processo com todos os envelopes restantes e consegue adivinhar o nome corretamente de todas as avós dos participantes, o que deixa todos impressionados.

Explicação Matemática da mágica: para a realização deste truque é necessário que seja feito uma combinação prévia com um participante da turma, que deve informar o nome da avó. No momento de recolher os envelopes, o mágico pega o envelope do aluno que foi combinado inicialmente e o coloca embaixo de todos os outros envelopes.

O truque funciona graças a uma técnica de demonstração conhecida como método de indução, que foi apresentado no **capítulo 2.1**. O raciocínio que envolve esse método é semelhante ao famoso "efeito dominó". Neste sentido, a validade do item (i) representaria a derrubada de uma das peças, e a do item (ii) seria todas as outras peças que são derrubadas como consequência da primeira.

Nesse sentido, o mágico escolhe o primeiro envelope e fala o nome da avó que está no último envelope (que já é de conhecimento do mágico, pois já foi combinado previamente), isso corresponde a derrubada da primeira peça do dominó. Após isso, o mágico abre o envelope e lê o nome que consta nele, confirmando que o nome que foi pronunciado é o que está no envelope, nesse momento, o mágico olha o nome que está nesse envelope e guarda essa informação. Ao pegar o segundo envelope, o mágico informa o nome da avó que viu no primeiro envelope, ao pegar o terceiro informa o nome que viu no segundo, e vai repetindo esse processo até que seja finalizado todos os envelopes, o que seria equivalente á derrubada de todos os dominós restantes.

Percebe-se que graças ao princípio de indução finita, independente da quantidade de envelopes, esse método funcionará. É importante que o mágico seja bem convincente ao abrir o envelope e ao confirmar o nome para que não haja dúvidas sobre o truque.

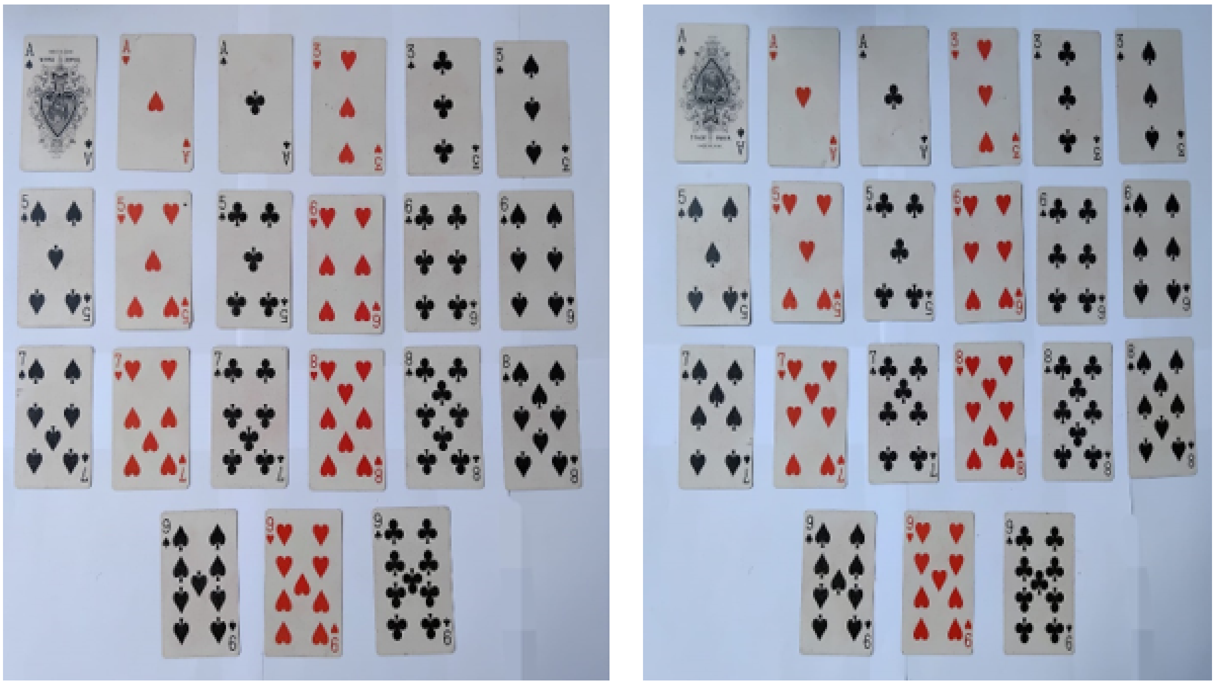
2.13 Mágica de baralho-simetria

Para a realização desta mágica é necessário o uso de um baralho comum de 52 cartas. O truque é indicado para alunos do ensino fundamental 2 e médio. O professor pode utiliza-la para trabalhar conceitos de simetria dentro da geometria.

Descrição da mágica: o mágico inicia o truque afirmando que possui poderes mágicos e que consegue ler a mente. Na sequência, mostra um baralho comum ao público e pede a presença de um voluntário. Com as cartas do baralho viradas para baixo, o mágico informa ao voluntário que vai começar a tirar as cartas uma a uma e colocá-las na mesa e o voluntário deve informar a hora de parar. Feito isto, quando é dado o comando para parar, o mágico coloca essa carta na mesa e pede ao voluntário para levantar a ponta da carta o observar qual foi a escolhida. Na sequência e sem observá-las, o mágico coloca todas as cartas de volta ao baralho e entrega ao voluntário para misturá-las. O mágico, em posse novamente do baralho, informa que já sabe qual a carta correta, vira o baralho para cima e começa a retirar as cartas de uma em uma até que para em uma carta e mostra ao voluntário, que confirma que foi a carta escolhida.

Explicação Matemática da mágica: esse truque é construído baseado na propriedade de simetria da geometria. A simetria ocorre quando as 2 partes de um elemento dividido ao meio são iguais, podendo ser definida também como a propriedade de transformar ou mover uma figura sem alterar sua forma original. No baralho, há cartas que possuem essa propriedade e outras não. No naipe de ouro, todas as cartas possuem essa propriedade. Voltando-se para as cartas que não possuem essa propriedade, temos o ÁS, $3, 5, 6, 7, 8$ e o 9 todas elas do naipe de espadas, paus ou copas, como pode ser observado nas cartas da Figura 16.

Figura 16 – 2 imagens contendo as mesmas 20 cartas de baralho, a imagen a direita todas as cartas deram uma rotação de 180°



Fonte: Elaborada pelo autor

Ao observar as 2 imagens percebemos que são as mesmas cartas, só que na segunda imagem todas as cartas deram um giro de 180°, o que provoca uma mudança nas imagens.

Sabendo disto, antes do truque iniciar o mágico organiza estas 21 cartas, na parte de cima do baralho de modo que as figuras das cartas que se modificam ao rotaciona-las 180° todas elas estejam na mesma direção. O mágico deve lembrar desta direção e o espectador deve escolher sua carta entre as 21 primeiras, caso contrário, haverá problemas. A maioria dos voluntários se sentirão sob pressão e não passarão das dez primeiras. Se o voluntário parecer que está indo além, o mágico deve lembrá-lo de que pode parar a qualquer momento e ele entenderá a dica.

Ao distribuir as cartas, o mágico mantém cuidadosamente as cartas alinhadas na mesma direção como sua pilha original. Então é muito importante que o voluntário não vire a carta quando está olhando para ela, e é por isso que o mágico faz com que espie a carta que está na mesa em vez de pegá-la. Na sequência, o mágico recolhe cuidadosamente todas as outras cartas da mesa para o baralho e o gira 180°, então quando a carta escolhida é posta no baralho ela vai ser a única a apontar para uma direção contrária.

Eles podem ser embaralhadas o quanto quiserem, isso não virará nenhuma carta. Então ao pegar as cartas e retirá-las, ficará fácil identificar a carta invertida do baralho, já que o cérebro é bom em reconhecer formas.

2.14 Mágica da mudança na Matriz

Para a realização desta mágica é necessário apenas o quadro branco, piloto e apagador. O truque é recomendado para alunos do ensino médio. O docente pode utilizar-se deste truque para trabalhar conceitos de matrizes e propriedades da multiplicação.

Descrição da mágica: de início o mágico desenha na lousa um quadriculado 8×8 destacando dentro dele um quadriculado 5×5. O mágico solicita a um voluntário para preencher o tabuleiro 5×5 em destaque com X's e 0's do modo que ele preferir. Do modo que pode ser observado na Figura 17.

Figura 17 – Quadriculado 8×8 e dentro do mesmo, um quadriculado 5×5 contendo X´s e 0´s

0	X	X	0	X			
0	0	0	0	0			
0	X	X	0	0			
X	0	0	0	X			
X	0	X	X	X			

Fonte: Elaborada pelo autor

O mágico informa que com sua mente treinada ele vai decorar toda a configuração da tabela e que para tornar o truque mais difícil irá acrescentar uma coluna e uma linha na tabela deixando a matriz no formato 6×6 como na Figura 18.

Figura 18 – Quadriculado 8×8 e dentro do mesmo um quadriculado 6×6 contendo X´s e 0´s

0	X	X	0	X	X		
0	0	0	0	0	0		
0	X	X	0	0	0		
X	0	0	0	X	0		
X	0	X	X	X	0		
0	0	X	X	X	X		

Fonte: Elaborada pelo autor

Após isso, o mágico fica de costas para o quadro e pede ao voluntário para trocar um elemento da tabela, ou o X pelo 0, ou o 0 pelo X. O mágico então diz que utilizará sua grande capacidade de memorização e descobrirá qual foi o elemento que foi mudado. O mágico então olha para a tabela e rapidamente aponta para o elemento modificado.

Explicação Matemática da mágica: após o voluntário preencher a matriz 5×5, o mágico preenche as linhas e colunas de modo que toda linha e coluna passa a ter um número par de X e de 0. Com isso, quando o voluntário troca um dos elementos da matriz 6×6, o mágico observará que uma linha e uma coluna não possui uma quantidade par dos elementos. O encontro desta linha com a coluna, correspondente ao elemento que foi alterado.

Pode surgir então a dúvida, será sempre possível acrescentar uma linha e uma coluna na matriz de modo que o último elemento da matriz seja o mesmo elemento que falta para a última linha e última coluna ficarem com a quantidade par de elementos? Esse último elemento está destacado na Figura 19.

Figura 19 – Quadriculado 8×8, dentro do mesmo um quadriculado 6×6 contendo X´s e 0´s e uma seta indicando o último elemento

0	X	X	0	X	X		
0	0	0	0	0	0		
0	X	X	0	0	0		
X	0	0	0	X	0		
X	0	X	X	X	0		
0	0	X	X	X	X		

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para facilitar o entendimento, imaginemos que no lugar dos $X's$ utilizaremos o algarimo 1 e no lugar dos $0's$ o -1. Podemos pensar na escolha do elemento que vai tornar a linha ou coluna como um número par de elementos, como sendo igual ao resultado do produto dos 5 elementos daquela linha ou coluna. Isso vai trazer uma paridade para a quantidade dos elementos 1 e -1, pois, o resultado da multiplicação dos 6 elementos será sempre positiva. Isso ocorre devido à regra de sinais na multiplicação dos números inteiros, em que só teremos paridade na quantidade de números positivos e negativos, se o produto entre uma quantidade par de elementos resultar em um valor positivo.

Como a casa marcada pela seta vai receber o elemento igual ao produto dos 5 elementos que representam o produto de todas as linhas da matriz 5×5 e o elemento igual ao produto dos 5 elementos que representam o produto de todas as colunas da matriz 5×5, e sendo o produto de todas as linhas da matriz 5×5 igual produto de todas as colunas da mesma matriz devido à propriedade comutativa da multiplicação, temos que esse valor será sempre o mesmo.

2.15 Leitor de mentes:

Para a realização desta mágica é necessário um data show e um notebook para reproduzir algumas imagens. O truque é indicado para alunos do ensino fundamental 2 e ensino médio. O mágico pode utilizar este conteúdo para trabalhar as operações matemáticas e equação de 1° grau.

Descrição da mágica: o mágico informa a plateia que possui o poder de ler mentes. Em seguida convida um voluntário e solicita que o mesmo realize as seguintes tarefas:

1. pensar em um número que possui 2 algarismos (o 38 por exemplo);
2. subtrair, desse número, os seus 2 dígitos (com o 38 teríamos $38 - 3 - 8 = 27$;
3. olhar na tabela apresentada na Figura 20 o símbolo que está a direita do resultado da operação feita (no exemplo seria o símbolo à direita do 27).

Figura 20 – Imagen contendo 100 números e 1 símbolo ao lado de cada número

99	☠	98	☼	97	✋	96	♈	95	♌	94	♌	93	✋	92	☸	91	♉	90	⌘
89	✞	88	☒	87	☠	86	♋	85	❍	84	💧	83	💣	82	♐	81	♈	80	☸
79	❖	78	❄	77	✞	76	□	75	♉	74	✞	73	❍	72	♈	71	●	70	●
69	❍	68	💣	67	⌘	66	✞	65	☠	64	♈	63	♈	62	☒	61	☺	60	◆
59	♒	58	●	57	☒	56	♒	55	❄	54	♈	53	❄	52	☠	51	♌	50	❄
49	❖	48	☸	47	♎	46	☼	45	♈	44	■	43	♈	42	●	41	⚐	40	❖
39	✞	38	💣	37	■	36	♈	35	●	34	♐	33	💧	32	💧	31	☸	30	❍
29	□	28	◆	27	♈	26	♋	25	💧	24	⌛	23	♋	22	♌	21	☼	20	✋
19	□	18	♈	17	♓	16	♒	15	♌	14	☼	13	❄	12	💣	11	❄	10	💣
9	♈	8	□	7	♓	6	💧	5	♎	4	❖	3	◆	2	☺	1	☼	0	♈

Fonte: Pereira de Sá (2018)

Logo após o voluntário afirmar que já olhou o símbolo, o mágico afirma que leu a mente do voluntário e mostra em tamanho grande no data show o símbolo o qual chegou o voluntário.

Na sequência o mágico apresenta uma nova tabela que apresenta os mesmos símbolos da anterior, mas em diferentes posições, como a da Figura 21.

Figura 21 – Imagen contendo 100 números e 1 símbolo ao lado de cada número

99	❖	98	✋	97	■	96	☒	95	☼	94	♒	93	♎	92	⌘	91	□	90	♎
89	♓	88	❄	87	⌘	86	💣	85	❄	84	✿	83	♐	82	♎	81	💣	80	☺
79	□	78	◆	77	❄	76	□	75	☺	74	⌘	73	⌛	72	💣	71	❖	70	♈
69	💣	68	♌	67	⚐	66	☼	65	✿	64	☒	63	💣	62	●	61	❄	60	♒
59	♉	58	✋	57	❄	56	♓	55	💧	54	💣	53	⌘	52	⌘	51	♎	50	♌
49	⌘	48	○	47	♌	46	□	45	💣	44	□	43	♐	42	♒	41	♉	40	♋
39	☒	38	♐	37	💧	36	💣	35	☒	34	☼	33	♈	32	♐	31	◆	30	♓
29	●	28	⚐	27	💣	26	●	25	✋	24	✋	23	☺	22	☠	21	❄	20	☠
19	💧	18	💣	17	❄	16	☺	15	☒	14	◆	13	♉	12	✝	11	♒	10	♓
9	💣	8	💣	7	♉	6	❖	5	❖	4	☼	3	●	2	♒	1	✋	0	💣

Fonte: Pereira de Sá (2018)

O mágico solicita a outro voluntário para realizar o mesmo procedimento feito anteriormente. E do mesmo modo apresenta a todos o símbolo que o voluntário chegou como resultado.

Explicação Matemática da mágica: para entender o segredo da mágica é necessário traduzir em linguagem Matemática todas as tarefas que é solicitada ao voluntário.

A primeira tarefa foi a de pensar em um número de 2 algarismos, consideremos que esse número seja DU sendo D o algarismo da dezena e U o da unidade. Como o D é o algarismo da dezena, temos que ele tem o seu valor multiplicado por 10, sendo assim podemos representar $DU = 10D + U$. A segunda tarefa foi a de subtrair do número os seus 2 dígitos, o que equivale a $10D + U - D - U$ sendo o resultado desta operação igual a $9D$.

Percebe-se então, que o resultado das operações propostas será sempre um múltiplo de 9, independente do número pensado inicialmente. Para a mágica funcionar é posto ao lado de todos os múltiplos de 9 na tabela o mesmo símbolo. Com isso o mágico sempre saberá qual o símbolo correto.

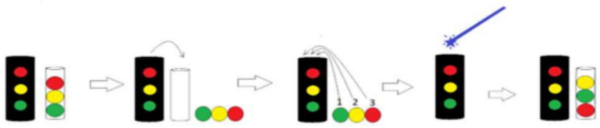
2.16 Mágica com bolinhas coloridas

Para a realização desta mágica é necessário um tubo de material da cor preta, um tudo de material da cor transparente, que caiba no tubo preto e 4 bolinhas que caibam uma acima da outra no tubo transparente. Esse truque é recomendável para alunos do ensino médio. O professor pode utilizá-lo para trabalhar o conceito de combinatória, probabilidade e funções.

Descrição da mágica: a mágica com bolinhas começa com um tubo preto e um tubo transparente no qual estão empilhadas bolinhas de 3 cores, como se fosse um semáforo (uma bolinha verde na parte inferior, em cima dela uma bolinha amarela e, sobre esta última, uma bolinha verde). O mágico retira as bolinhas do tubo transparente, coloca o tubo preto sobre o tubo transparente vazio e, a seguir, coloca as bolinhas na ordem:

verde, amarela e vermelha. Após fazer um passe de mágica o tubo preto é retirado e as bolinhas estão empilhadas em uma ordem diferente da que deveria estar. Elas aparecem na ordem: vermelha embaixo, verde no meio e amarela em cima. Como exemplificado na Figura 22.

Figura 22 – Representação da sequência dos passos na mágica envolvendo bolinhas em um tubo preto



Fonte: Malagutti (2023)

Explicação Matemática da mágica: Esta mágica permite apresentar o grupo de permutação de 3 elementos, $S(3)$, e introduzir as permutações como funções bijetoras de $1, 2, 3$ em si mesmo. Permite também definir uma transposição como sendo a permutação em que dois elementos trocam entre si suas posições e os demais ficam fixos.

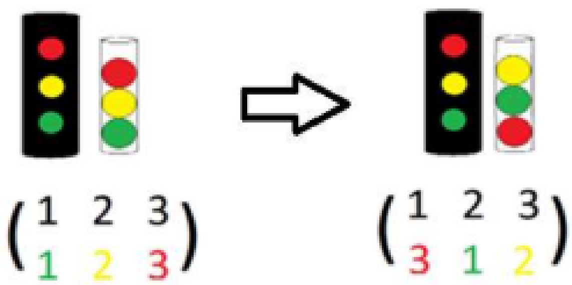
O conjunto das permutações de n elementos com a operação de composição é um grupo, chamado grupo simétrico $S(n)$. Este grupo, em geral, não é comutativo; ele possui $n!$ elementos.

Uma maneira muito útil de estudar permutações é utilizar a notação de ciclos.

Um r-ciclo $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ é uma permutação f tal que $f(i_1) = i_2$, $f(i_2) = i_3$, $\ldots$, $f(i_r) = i_1$ e os demais elementos ficam parados.

Na mágica das 3 bolinhas descritas acima, a surpresa é ver a permutação identidade ser transformada no 3-ciclo (132) como descrito na imagem da Figura 23.

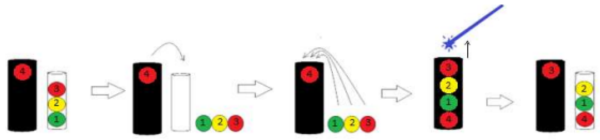
Figura 23 – Representação da mágica com auxílio da representação numérica



Malagutti,(2023)

Na verdade, ocorre a permutação de quatro bolinhas, uma verde, outra amarela e duas vermelhas, como mostra o esquema da Figura 24.

Figura 24 – Revelação do segredo da mágica Passo a passo.



Fonte: Malagutti (2023)

Somos levados, assim, ao estudo do grupo (4). Ele possui $4! = 24$ elementos, apresentados na Figura 25.

Figura 25 – Representação numérica de todas as permutações possíveis entre as 4 bolinhas

$$\begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\1243\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\1324\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\1342\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\1423\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\1432\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1234\\2134\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\2314\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\2341\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\2413\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\2431\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1234\\3124\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\3142\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\3214\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\3241\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\3412\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\3421\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1234\\4123\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\4132\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\4213\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\4231\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\4312\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\4321\end{pmatrix}$$

Fonte: Malagutti (2023)

A mágica mostra que a identidade é transformada no 4 - ciclo (1 4 3 2), como pode ser observado na Figura 26.

Figura 26 – Representação númerica da permutação das bolinhas na mágica

$$\begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1234\\4123\end{pmatrix}$$

Fonte: Malagutti (2023)

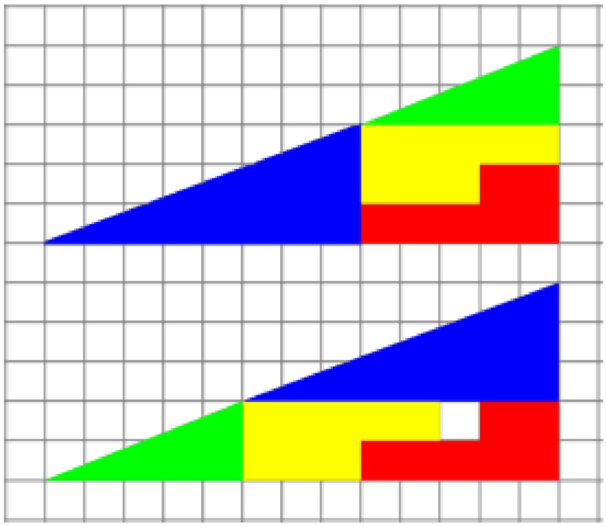
Como os elementos da quarta posição permanecem ocultos do espectador, cria-se a ilusão de que as cores nas posições 1, 2 e 3 trocaram de posição de uma maneira impossível. Isso ocorre porque as bolas vermelhas são idênticas e podem ocupar a posição uma da outra sem que ninguém perceba.

2.17 Paradoxo de curry

Para a aplicação desta mágica é necessário o uso de um data show e um notebook para a reprodução de algumas imagens. Este truque é recomendado para alunos do ensino médio. O docente pode utilizá-lo para trabalhar conceitos do cálculo de áreas, o teorema de Pitágoras, a semelhança de triângulos e a inclinação da reta.

Descrição da mágica: neste truque o mágico utiliza um data show e reproduz com o auxílio do mesmo a imagem da Figura 27 para a plateia.

Figura 27 – Paradoxo de Curry



Fonte: Nós e Sentone (2018)

O mágico após reproduzir a imagem, explica ao público que os 2 triângulos são compostos por 5 figuras iguais, logo elas deveriam ter a mesma área. No entanto, o primeiro triângulo esta completo, e o segundo está incompleto lhe faltando um "quadradinho". O mágica então insinua que o quadradinho sumiu magicamente.

Explicação matemática da mágica: as figuras apresentadas representam o famoso "paradoxo de Curry". O mesmo é uma ilusão de ótica com figuras geométricas planas criado pelo famoso mágico amador norte-americano Paul Jerome Curry (1917-1986). Como observado na imagem ele envolve o uso de 4 figuras que quando reagrupadas trazem a impressão de que está faltando um quadradinho.

Primeiro consideremos que cada quadradinho possui 1 unidade de medida do lado. Os 2 triângulos maiores aparentam ser iguais, sendo ambos triângulos retângulos. Sendo assim ambos possui base medindo 13 unidades e altura medindo 5 unidades, sabemos que a área de um triângulo corresponde a metade do produto da base pela altura, logo será igual a $\frac{13 \cdot 5}{2} = 32,5$, isso indica que cada figura deverá possuir esse valor de área. No entanto, se calcularmos separadamente a área de cada figura dentro do triângulo, teremos:

A área do triângulo retângulo azul que possui 8 unidades de base e 3 de altura é:

$$\frac{8 \cdot 3}{2} = 12$$

A área do triângulo retângulo verde que possui 5 unidade de base e 2 de altura é:

$$\frac{5 \cdot 2}{2} = 10$$

A área da figura vermelha é 7 pois a mesma corresponde a 7 quadradinhos e da figura em amarelo é 8.

Somando as áreas das 4 figuras $12 + 5 + 7 + 8 = 32$. Percebemos então uma inconsistência, pois se a soma das áreas das 4 figuras é igual a 32, a área do triângulo composto pelas 4 figuras também deveria ser igual a 32, no entanto já vimos que esta área é igual a 32,5 e a área do segundo triângulo deve ser igual a 33, pois, apresenta as mesmas 4 figuras e um quadradinho em branco. Percebe-se então que as 2 figuras não possuem a mesma área, embora as imagens demonstrem o contrário.

Mas então, porque as áreas são diferentes? Isto ocorre pois a ideia de que as figuras grandes são triângulos retângulos é falsa, na verdade as 2 figuras não são triângulos, pois para serem consideradas como tal os 3 lados devem ser segmentos de reta. Para entender melhor isto, imaginemos que a figura maior seja um triângulo retângulo e vamos chamar sua hipotenusa de h, pelo teorema de Pitágoras temos:

$$h^2 = 13^2 + 5^2$$
$$h^2 = 194$$
$$h = \sqrt{194}$$

Chamemos agora a hipotenusa do triângulo em azul de k, por pitágoras temos:

$$k^2 = 8^2 + 3^2$$
$$k^2 = 73$$
$$k = \sqrt{73}$$

Indiquemos a hipotenusa do triângulo em verde por p, temos então:

$$p^2 = 5^2 + 2^2$$
$$p^2 = 29$$
$$p = \sqrt{29}$$

Percebe-se que $h \neq k + p$, pois se $h = k + p$, teríamos:

$$\begin{array}{rcl} h^2 & = & (k+p)^2 \\ 194 & = & 73 + 2 \cdot \sqrt{73 \cdot 29} + 29 \\ 46 & = & \sqrt{2117} \\ 2116 & = & 2117 \end{array}$$

O que é um absurdo. Isso mostra que a junção das hipotenuzas dos triângulos azul e verde não é um segmento de reta e portanto não pode ser o que seria a hipotenuza do triângulo maior.

isto mostra que h não pode ser uma hipotenusa, já que não é uma reta, se o fosse, deveria ser exatamente igual a soma de suas 2 partes.

Outro modo de observar isto é por semelhança de triângulos. Visto que se o triângulo maior for retângulo, o mesmo deve ser semelhante ao triângulo em azul pelo critério 'ângulo, ângulo', pois, possuem um ângulo em comum e ambos possuem um ângulo reto. O cateto maior do triângulo grande mede 13 unidades e o menor 5 unidades, já o cateto maior do triângulo em azul mede 8 e o menor 3. Utilizando a relação de semelhança entre os lados teremos:

$$\frac{13}{8} = \frac{5}{3}$$

Fazendo o produto de meio por extremos encontramos $39 = 40$ o que é um absurdo. Isto mostra que os 2 triângulos não são semelhantes. Nota-se que a imagem traz uma ilusão de ótica, trazendo a impressão da imagem tratar de um triângulo retângulo, quando na verdade é um quadrilátero.

3 Explorando a Matemágica: Um estudo em sala de aula

Este capítulo apresenta o resultado do desenvolvimento de uma atividade realizada em uma turma de 2° série de ensino médio, em um colégio público estadual do interior do estado de Pernambuco. Ela envolveu a apresentação de mágicas MatemáticaS, para introduzir o conteúdo “Expressões algébricas”, com o intuito de conhecer a percepção dos alunos a respeito das mágicas apresentadas e a correlação que os alunos podem estabelecer entre as mágicas e o conteúdo apresentado.

Para a obtenção dos resultados da pesquisa foi feita a apresentação de 3 mágicas Matemáticas. Sendo analisado a reação, a interação e o comportamento dos discentes no momento do desenvolvimento das mágicas. Aliado a isso, foi feito a análise das repostas dos alunos em um questionário aberto que foi entregue a todos os alunos.

3.1 Resultados do estudo

As mágicas apresentadas aos alunos foram todas elas apresentadas no segundo capítulo deste trabalho, sendo elas a 2.9 Idade com o número secreto, 2.10 Números secretos e 2.15 Leitor de mentes. Todas elas envolvendo o conteúdo, expressões algébricas em sua explicação Matemática. Para a apresentação da mágica “leitor de mentes” foi utilizado como auxílio um Data show e um computador, pois, para a realização da mesma fez-se necessário a apresentação de algumas imagens.

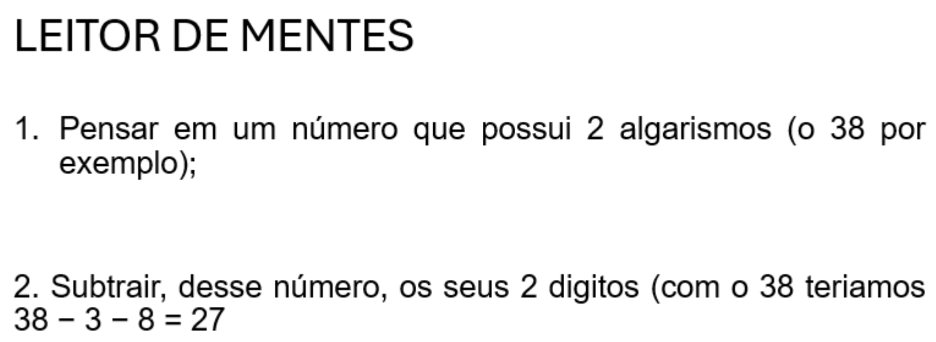
A primeira mágica apresentada foi a números secretos. Após a conclusão da mágica em que foi mostrado a idade e o número do sapato correspondente ao voluntário da mágica, alguns alunos comentaram que foi sorte ter chegado ao resultado e também solicitaram para fazer o mesmo truque com eles e isto foi feito.

Logo após, foi realizado o segundo truque que foi o da adivinhação da idade com o número mágico. Foi dito de início que seria desvendado a idade de um parente (mãe, pai, avô, avó, tio, tia e etc). Como os alunos viram que o primeiro truque funcionou, ficaram curiosos para saber como que ocorreria este novo. Após o primeiro participante revelar o número que encontrou depois dos cálculos solicitados, foi logo revelado qual a idade do parente que o mesmo pensou, e do mesmo modo que a mágica anterior os alunos ficaram intrigados sobre como a mágica funcionava. Foi realizado o truque com vários alunos da turma, um desses relatou que o truque não havia funcionado, no entanto, ao rever os cálculos o mesmo percebeu que cometeu um erro e que devia ter sido por isso que o truque não funcionou.

Ocorreu algo bastante interessante neste truque, um dos alunos conseguiu encontrar uma explicação para o truque e a mostrou para a turma. O mesmo informou que fazendo o processo inverso dos passos que foram solicitados é possível chegar ao resultado. Ou seja, este discente conseguiu encontrar uma explicação Matemática para a mágica apresentada diferente da qual foi apresentado nesta pesquisa, mostrando que subtraindo o número 1 que foi somado por último e logo após o 80 que foi somado inicialmente, chega-se ao número pensado. Os alunos ficaram entusiasmados com essa mágica, pois, desvendaram o segredo.

A terceira e última mágica apresentada foi a "leitor de mentes". Como já mencionado, para a apresentação da mesma foi utilizado um data show e um notebook. De início, foi orientado aos alunos que todos deveriam realizar as tarefas solicitadas no truque. As tarefas foram apresentadas com o auxílio do data show, a primeira tela de slide apresentada foi a da Figura 28.

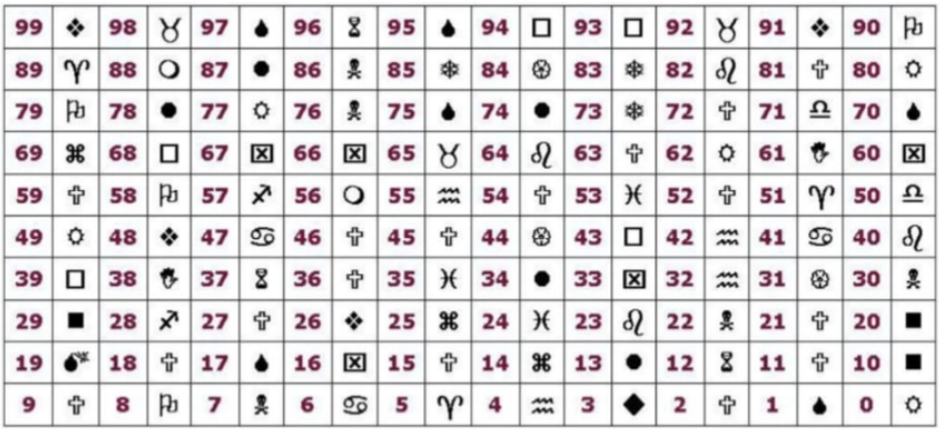
Figura 28 – Tela 1: do slide apresentado.



Fonte: Elaborada pelo autor

Após os alunos pensarem no resultado ao qual chegaram depois de realizarem as tarefas determinadas. Foi solicitado que procurassem o resultado a que chegaram na tabela abaixo e gravassem a figura que está à direita do resultado. A imagem que os alunos visualizaram foi a da figura abaixo:

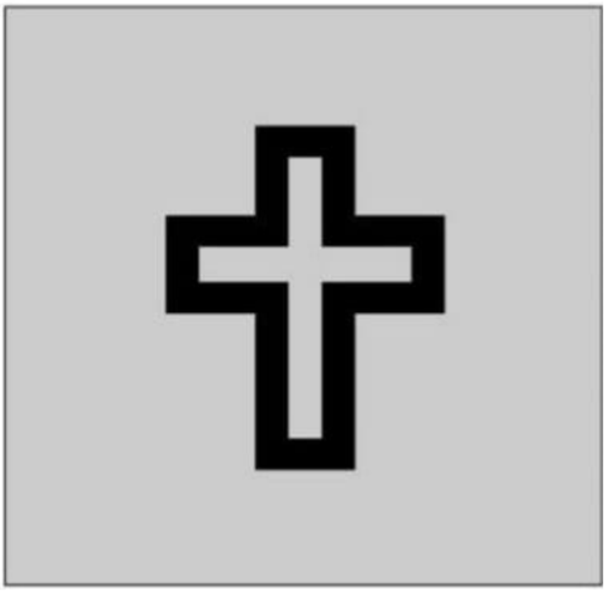
Figura 29 – Tela 2: do slide apresentado



Fonte: Pereira de Sá (2018)

Logo após, foi informado aos alunos que seria apresentado a todos a figura á qual chegaram. Foi então projetado a imagem da Figura 30.

Figura 30 – Tela 3: do slide apresentado



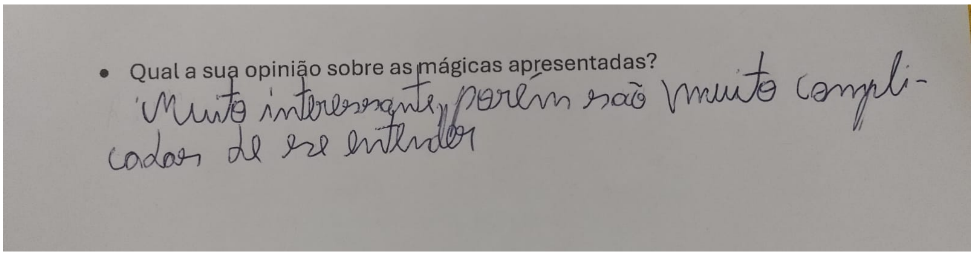
Fonte: Pereira de Sá (2018)

Os discentes demonstraram surpresa ao perceberem que o truque realmente funcionou. Na sequência foi realizado o mesmo truque variando apenas as imagens sendo apresentado a imagem da Figura 21 e logo após foi apresentado novamente a imagem correta. Os discentes aparentarem estar bem confusos com o truque, nenhum aluno conseguiu desvendá-lo.

Ao fim das apresentações das mágicas, foi entregue a cada aluno um formulário (que consta nos anexos) contendo 3 perguntas. Havia 29 alunos presentes na turma, destes, 2 alunos não quiseram responder, com isso, no total 27 alunos responderam ao formulário. Cada aluno será identificado aqui por um número entre 1 e 27.

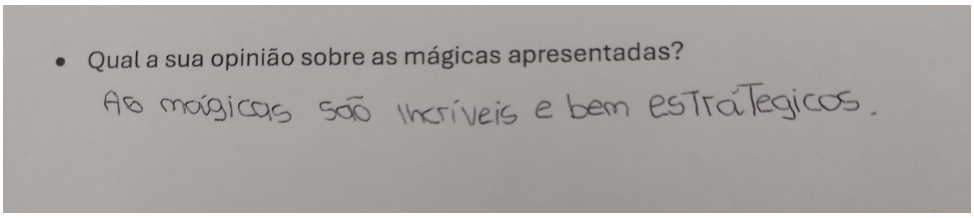
Todas as perguntas foram abertas e relacionadas as mágicas apresentadas. A primeira pergunta foi: qual a sua opinião sobre as mágicas apresentadas? O objetivo desta pergunta foi coletar informações acerca do sentimento pessoal de cada aluno a respeito dos truques apresentados. Entre as respostas, houve respostas bem simples, que só utilizaram expressões do tipo (gostei, interessante, legal, confusas e não gostei) e respostas um pouco mais elaboradas, justamente essas respostas serão aqui apresentadas. Como pode observado na Figura 31.

Figura 31 – Resposta do aluno 5 a primeira pergunta.



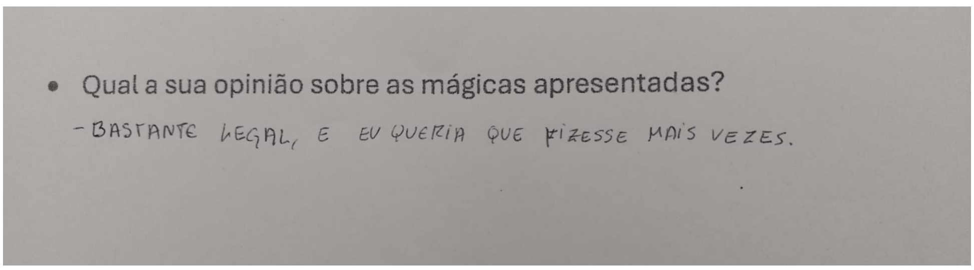
Este estudante demonstrou que apesar de gostar das mágicas apresentadas, teve dificuldade em compreender a explicação Matemática envolvida na mesma. A Figura 32 apresenta a resposta de outro estudante.

Figura 32 – Resposta do aluno 11 a primeira pergunta.



Mediante a figura apresentada é perceptível que o discente avaliou de maneira positiva os truques apresentados. O mesmo, conseguiu compreender a explicação Matemática das mágicas.

Figura 33 – Resposta do aluno 23 a primeira pergunta.

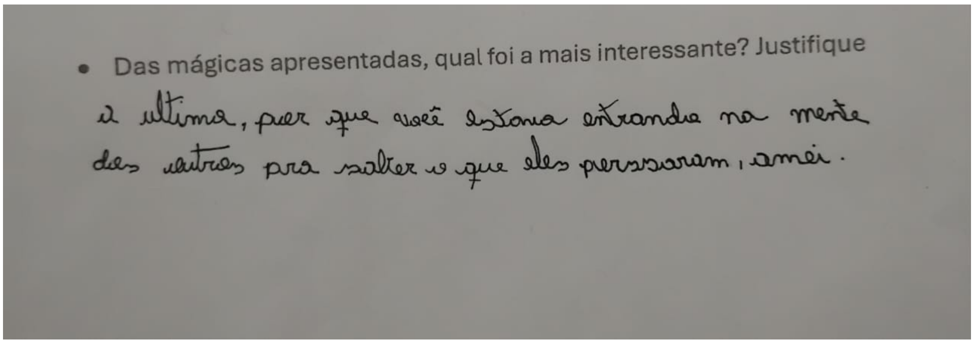


Observa-se na Figura 33, uma resposta motivadora por parte do aluno. O mesmo demonstra que possui interesse em ver outras mágicas. As demais respostas possuem sentido semelhante às apresentadas.

A segunda pergunta do questionário foi: das mágicas apresentadas, qual foi a mais interessante? Justifique. Está pergunta teve o intuito de trazer uma reflexão ao aluno, para que o mesmo apresente suas preferências individuais. Torna-se importante ter esse feedback dos alunos, para entender qual tipo de mágica apresenta maior eficiência, despertando maior interesse.

Embora parecidas, os 3 truques possuem suas peculiaridades. O primeiro apresenta um maior número de cálculos a ser feito. A segunda é mais simples e apresenta menos cálculos. A terceira apresenta poucos cálculos e o uso de imagens. A figura 34 apresenta a resposta de outro discente.

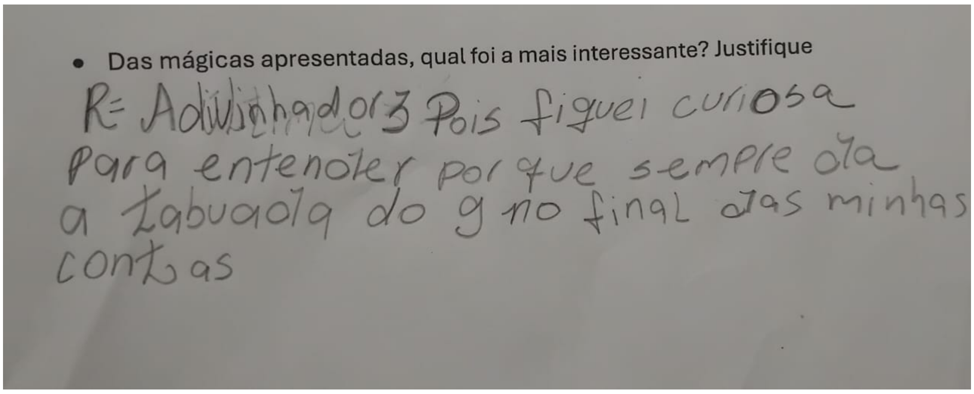
Figura 34 – Resposta do aluno 20 a segunda pergunta.



Este aluno apresentou a mágica de número 3 como sua favorita. Justificando que a mesma traz um efeito de ilusionismo. Esta resposta ilustra a percepção que outros alunos transmitiram nas repostas ao questionário.

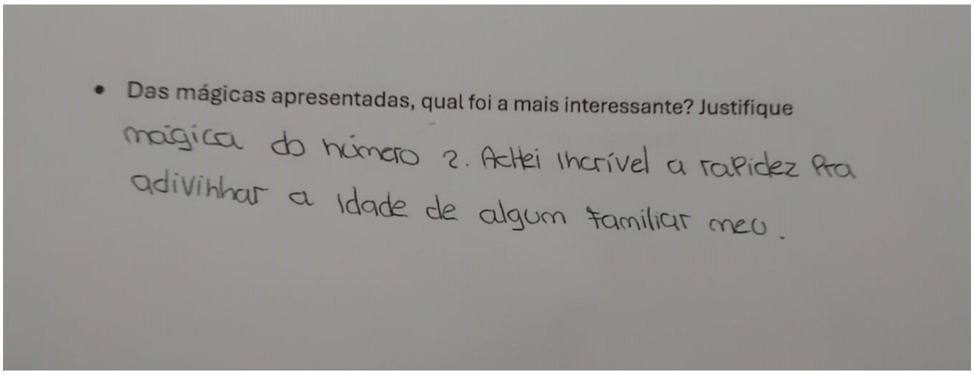
A seguir é apresentado uma imagem que apresenta o truque de número 3 como o mais interessante, para um aluno. Este por sua vez informa que a motivação para escolhê-lo, foi a curiosidade por sempre chegar a um resultado da tabuada do 9. Esta percepção foi ótima, pois, este é o motivo que faz com que a mágica funcione, com um pouco mais de investigação, este aluno poderia facilmente entender o segredo da mágica.

Figura 35 – Resposta do aluno 16 a segunda pergunta.



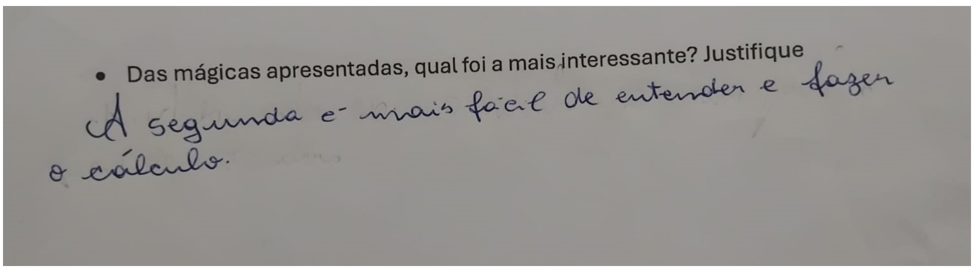
Nota-se que o uso de imagens nas mágicas, conseguem reter à atenção dos alunos. No entanto, a mágica que houve maior número de respostas como sendo a mais interessante, foi a de número 2, onde houve um grande número de respostas do tipo da apresentada na Figura 36.

Figura 36 – Resposta do aluno 11 a segunda pergunta.



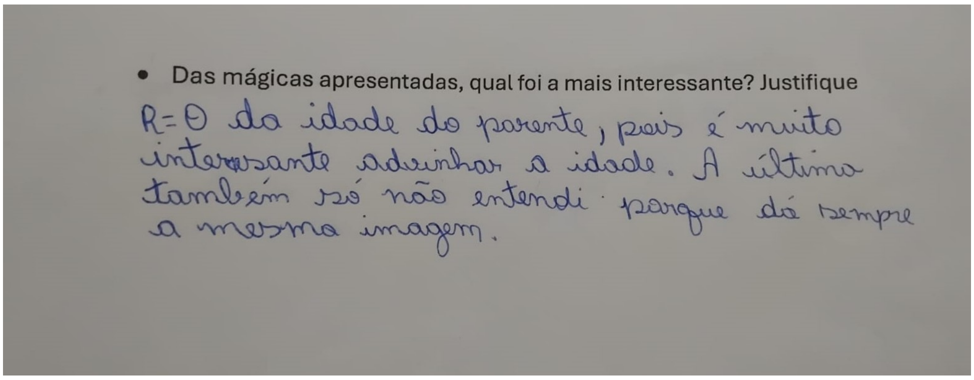
Percebe-se que o fato da mágica apresentar poucos cálculos e trazer uma resposta rápida, contribui para que os discentes a considerassem como a mais interessante. Como é mostrado na resposta da Figura 37

Figura 37 – Resposta do aluno 25 a segunda pergunta.



Em geral, as outras respostas foram análogas às apresentadas. Um dos motivos que provavelmente tornou a mágica 2 como a mais interessante, foi que os estudantes conseguiram descobrir uma explicação para o funcionamento da mesma. Este sentimento de descoberta e aprendizado é muito importante. Foi isto que tirou o posto de mágica mais interessante da número 3. Como pode ser observado na resposta da Figura 38.

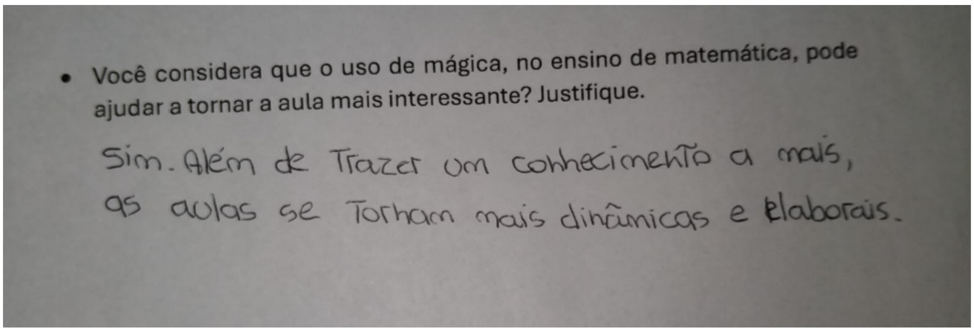
Figura 38 – Resposta do aluno 13 a segunda pergunta.



A terceira pergunta do questionário foi: você considera que o uso de mágica no ensino de Matemática, pode ajudar a tornar a aula mais interessante? Justifique. O intuito deste questionamento foi entender a percepção dos alunos a respeito do uso de mágicas no ensino, ou seja, descobrir se os discentes as enxergam como algo que pode contribuir no processo de ensino-aprendizagem ou apenas como uma atividade divertida.

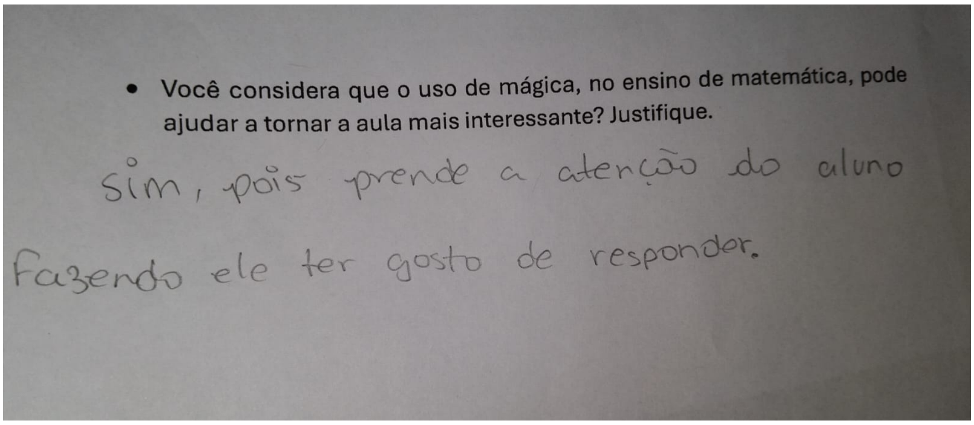
Dentre as respostas trazidas pelos alunos, muitas foram bem diretas não apresentando nenhuma justificativa. Será apresentado aqui algumas das respostas dentre as que apresentaram justificativas. Como a da Figura 39.

Figura 39 – Resposta do aluno 11 a terceira pergunta.



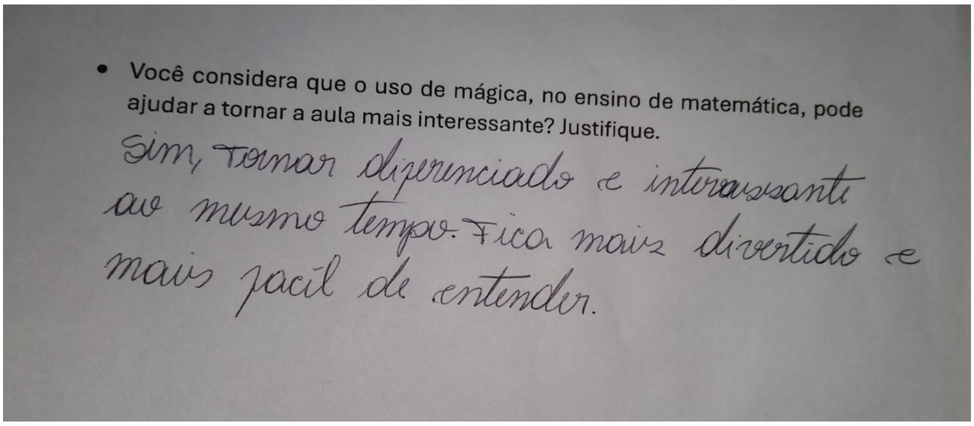
Este discente traz um ponto importante, mostrando que as mágicas contribuem para tornar as aulas mais dinâmicas. Isso é significativo, pois, mostra que o uso das mágicas pode colaborar em tornar o ensino de Matemática mais atrativo. Isso também é confirmado com a resposta apresentada na Figura 40.

Figura 40 – Resposta do aluno 4 a terceira pergunta.



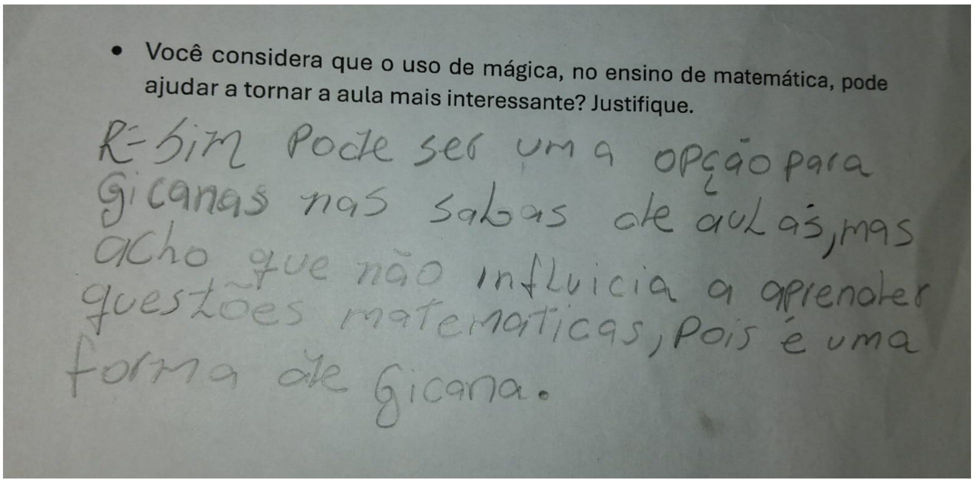
Isto mostra que os discentes apresentaram a percepção de que as mágicas no ensino da Matemática, é algo interessante e que pode contribuir de forma bastante positiva no ensino. A próxima resposta apresentada na Figura 41 também corroborá com está ideia:

Figura 41 – Resposta do aluno 23 a terceira pergunta.



Novamente, vemos uma resposta que demonstra que os alunos perceberam as mágicas como algo divertido e que contribui na aprendizagem. No entanto, teve uma resposta que apontou as mágicas como sendo algo apropriado apenas para gincanas, como pode ser observado na Figura 42.

Figura 42 – Resposta do aluno 16 a terceira pergunta.



- Você considera que o uso de mágica, no ensino de matemática, pode ajudar a tornar a aula mais interessante? Justifique.

R= Sim Pode ser uma opção para gicanas nas salas de aulas, mas acho que não influicia a aprender questões matematicas, Pois é uma forma de gicana.

É percebido com esta resposta da Figura 42, que a percepção do aluno, foi de que a mágica serviu apenas com entretenimento, visto que o mesmo afirma que o uso das mágicas apresentadas servem apenas para gincanas. Uma hipótese para a fala deste discente, é que o mesmo não conseguiu relacionar os truques apresentados com a matemática. Isto provavelmente ocorreu, pois o aluno considera que a matemática se resume apenas a resolução de problemas.

Nesse sentido, é válido destacar, que a mágica cumpriu um de seus requisitos que é ser algo divertido que atrai a atenção dos estudantes. No entanto, é importante que os alunos tenham a consciência de que os truques podem contribuir no entendimento de conteúdos. Para isso, é essencial que o professor utilize as mágicas para introduzir um conteúdo, ou seja, após a apresentação o docente deve trazer uma reflexão para os alunos, sobre a relação da mágica com o novo conteúdo a ser estudado. O docente pode também utilizar os truques, como forma de avaliar a turma a respeito do aprendizado do conteúdo.

Além de ser analisado as respostas dos discentes ao questionário, foi apreciado também a interação dos mesmos com a apresentação das mágicas. Foi observado que os alunos aceitaram bem a proposta de uma aula com apresentação de truques. Os mesmos demonstraram estar bem curiosos quanto aos truques que seriam apresentados.

Ao apresentar o primeiro truque, foi percebido que os alunos, em sua maioria, fizeram os cálculos propostos e demonstraram bastante surpresa com o resultado apresentado, que sempre era correto. No entanto, alguns alunos não chegaram na resposta correta, pois, fizeram as contas na calculadora de uma única vez. Na sequência foi explicado aos discentes o motivo pelo qual não chegaram ao resultado correto. Isso mostra outro conteúdo que pode ser desenvolvido com essa mágica, que é “expressões numéricas”.

Observa-se, que o truque em questão foi além das expectativas, visto que mostrou novos usos para o mesmo. No segundo truque, foi verificado que os discentes também demonstraram interesse e todos conseguiram chegar ao resultado esperado. Como já aqui comentado, um aluno conseguiu desvendar esse truque e compartilhou isto com a turma. Isto foi estimulante para os alunos, mostrando que os mesmos eram capazes de descobrir o raciocínio envolvido.

Com o terceiro truque, foi notado que os discentes ficaram bastante surpresos, com o resultado, visto que todos chegaram na mesma imagem. Isto corroborou com a ideia de que truques que envolvem o uso de imagens despertam mais atenção.

De acordo com D' Ambrosio (1986), a matemática é vista e passada para os discentes como uma disciplina complexa, sendo que a maioria dos professores trabalha apenas conceitos e fórmulas distanciando ainda mais o que está sendo desenvolvido em sala de aula com a realidade do alunado, embora saibam que é preciso haver a quebra desses paradigmas para que os discentes percebam que a mesma tem relevância no seu cotidiano.

Perante o pressuposto, é notório que os profissionais da área de matemática precisam rever a forma como estão desenvolvendo o seu trabalho em sala de aula, havendo uma necessidade latente por mudança na didática utilizada, onde os mesmos compreendam que há várias vertentes para serem trabalhados os conteúdos, uma vez que, quando ocorre um trabalho significativo os discentes conseguem absorver com maior qualidade.

Algumas estratégias como o uso das novas tecnologias assim como também o uso de atividades lúdicas, precisam ser levadas em consideração no processo de ensino da matemática, Grilo (2002) afirma que a aprendizagem lúdica pode ser a ponte facilitadora da aprendizagem, se, o professor puder refletir e questionar-se sobre sua forma de ensinar, utilizando o lúdico como fator motivador e diferenciador em suas metodologias.

O entretenimento educacional é um instrumento didático facilitador que induz o discente a uma aprendizagem eficaz e prazerosa, facilitando a didática do professor e o entendimento do educando, ao relacionar os troques de mágicas aqui apresentadas com conteúdos já estudado por eles.

Deste modo, portanto, percebe-se que a observação foi de encontro as respostas apresentadas no questionário. Os alunos demonstraram gostar das mágicas e participaram do desenvolvimento das mesmas. Esse feedback do questionário foi de grande relevância para a pesquisa, visto que, apresenta pontos positivos e negativos da percepção dos alunos sobre os truques. O conhecimento disto, possibilita ao docente conhecer o que deve continuar sendo utilizado e o que deve ser aprimorado, tanto na escolha dos truques quanto na apresentação dos mesmos.

4 Considerações Finais

No decorrer desta dissertação foi apresentado uma coletânea de “matemágicas”. Foi mostrado a descrição da mágica, como o professor pode aplicar a mesma em sala de aula e na sequência a “explicação matemática da mágica”, que mostra todo o raciocínio matemático envolvido na mesma. Também houve a indicação para as turmas que cada truque é mais indicado de acordo com os conteúdos matemáticos envolvidos na explicação do mesmo.

Todos os truques apresentados foram indicados para o ensino fundamental 2 ou ensino médio, no entanto, alguns deles também podem ser utilizados no ensino fundamental 1 em conteúdos que envolvem as 4 operações a exemplo dos truques que envolvem a adivinhação de números após uma sequência de operações.

Vale ressaltar, que as mágicas são indicadas para as aulas da disciplina de Matemática. No entanto, com o Novo Ensino Médio passou a existir disciplinas eletivas relacionadas a Matemática, nesse sentido, as “matemágicas” também poderiam ser utilizadas nestas novas disciplinas.

O ensino da matemática vem sendo remodelado com o intuito de mostrar aos discentes a importância de se estudar tal disciplina, nessa etapa é imprescindível que os professores tenham um vasto conhecimento sobre o conhecimento teórico assim como também das aplicações.

Mostrar aplicações matemáticas dentro do contexto do cotidiano dos discentes, trazendo significado para o que se é estudado em sala de aula, é uma ótima forma de fazer com que os alunos criem o gosto pela matemática, uma vez que, a matemática desde o princípio, é vista pela maioria da sociedade como algo muito complexo, criando-se preconceitos, paradigmas que causam bloqueios na hora em que um determinado sujeito se depara com a disciplina em sala de aula.

Muitos alunos alegam não gostar da matéria, alegando a complexidade de se entender os processos que são necessários para as resoluções de problemas propostos pelo professor. Mediante ao evidenciado, ao trabalhar o conteúdo e mostrar que tal possui diversas aplicações, como é o caso das mágicas apresentadas nesse trabalho, o aluno começa a vislumbrar a matemática como uma ciência que possibilita entender os mistérios e truques lógicos.

Relativo à pesquisa de campo, a mesma foi essencial, pois, evidenciou que os truques podem ser utilizados como uma ferramenta que atrai a atenção dos discentes. Visto que os mesmos se mostraram motivados e curiosos em entender as “matemágicas” apresentadas.

Fica visível a importância do professor de matemática desenvolver um trabalho pedagógico que desperte nos discentes o interesse por aprender sempre mais, sendo de fundamental importância, trazer questões que possam ser investigadas pelos alunos, deixando-os livres para pensar em como chegar a resultados satisfatórios com os conhecimentos prévios que possuem, sendo possível eles perceberem que a matemática não é algo tão abstrato e difícil como eles acreditavam ser, que há sim possibilidades de modelá-la e relaciona-la com temas desafiadores que é justamente o caso do uso da “matemágica”.

Desse modo, é percebido a necessidade do docente buscar aprimorar-se constantemente, para que suas aulas sejam atrativas, que consigam prender a atenção dos alunos. A matemática está em toda parte, cabe ao docente especializado na área mostrar o mundo de possibilidades existentes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ANNA, Claybourn. 91 Truques matemáticos legais para você suspirar!. Brasil: Pé de Letra, 2021.

[2] BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Notas sobre o Brasil no Pisa 2022. Brasília, DF: Inep, 2023.

3 CASTRO, A.D e CARVALHO, A.M.P. Ensinar a ensinar: Didática para a Escola Fundamental e Média. São Paulo: Pioneira Thonsom Learning, 2005.

[4] CERIOLI, Maria R. Números de Fibonacci e representação de números inteiros positivos. Universidade Federal do Rio de Janeiro, RPM 53.

[5] DIAS, David Pires. Indução Finita. IME-USP. 2013. Disponível em: https://www.ime.usp.br/ brolezzi/disciplinas/20141/mat1513/tge.pdf . Acesso em 23/03/ 2024.

[6] FAJARDO, Ricardo. Matemágica na sala de aula [recurso eletrônico] : uma perspectiva pedagógica / Ricardo Fajardo, Natália Alessandra Kegler, Alex Jenaro Becker. – 1. ed. – Santa Maria : Ed. PRE, 2017. 1 e-book. – (Série Cadernos de extensão. Educação).

[7] FREITAS, O.M; DIAS, L.D e FILHO, D.C.M C.Termo geral da sequência de Fibonacci e os incríveis cartões mágicos. Campina Grande: III Encontro de Educação, Ciência e Tecnologia, 2018. Disponível em: file:///E:/tcc/cartAcesso em : 30/04/2024.

[8] GRILO, Ana Paula Santiago. O Lúdico na formação do Professor. Salvador-BA, 2002.

[9] HEFEZ, Abramo. Aritmética. 3. ed. – Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.

[10] MALAGUTTI, Pedro Luiz Aparecido. Mágicas com Combinatória na sala de aula. Papmem, 2023. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2023/07/Aula_Malagutti_Papmem-julho-2023.pdf. Acesso em 06/04/2024.

[11] MALAGUTTI, P.L.A. e SAMPAIO, J. C. V. Mágicas, Matemática e outros mistérios. EDFSCar, 2012.

[12] MALAGUTTI, P.L.A. e SAMPAIO, J. C. V . Mágicas com papel, Geometria e outros mistérios. EDFSCar, 2014.

[13] NÓS, R.L e SENTONE, F.G. Explorando paradoxos geométricos nas aulas de Geometria. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied

Mathematics. 2018. DOI: https://doi.org/10.5540/03.2018.006.01.0365

[14] Peter McOwan with Matt Parker. The Manual of Mathematical Magic. ISBN No. 978-0-9551179-7-8. Disponível em: https://cs4fndownloads.wordpress.com/wpcontent /uploads/2018/05/mathsmagic.pdf. Acesso em 10/05/2024.

[15] PEREIRA, Paulo César Antunes.O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA – uma abordagem no ensino médio. Dissertação de Mestrado. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2013.

[16] SÁ, Ilídio Pereira de. A Magia da Matemática - Atividades Investigativas, Curiosidades e Histórias da Matemática. 4. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2018.

[17] SAMPAIO, João Carlos Vieira. Aritmágicas. UFSCAR, 2005. Disponível em https://www.dm.ufscar.br/profs/sampaio/aritmagicas.pdf. Acesso em: 23/03/2024.

[18] UBIRATAN, D'Ambrosio, Da realidade à ação: reflexão sobre educação Matemática, 6ª ed, São Paulo: Summus, 1986, 115p.

[19] WEEKS, Timothy R., "Mathematical Explorations of Card Tricks"(2015). Senior Honors Projects. 73. Disponível em: http://collected.jcu.edu/honorspapers/73. Acesso em 08/05/2024.

[20] WHITE, Laurence B. Math-a-magic : number tricks for magicians. Albert Whitman e Company: Niles, Illinois, 1990.

ANEXOS

Figura 43 – Questionário entregue aos alunos

QUESTIONÁRIO

- Qual a sua opinião sobre as mágicas apresentadas?

- Das mágicas apresentadas, qual foi a mais interessante? Justifique

- Você considera que o uso de mágica, no ensino de matemática, pode ajudar a tornar a aula mais interessante? Justifique.

Fonte: Elaborado pelo autor