

**Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT**

**Yúdi João Manoel Silva de Oliveira**

**Análise Numérica e Modos de Cálculo Aproximado de Áreas e Volumes**

**Maceió  
2024**



Instituto de Matemática



**PROFMAT**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS INSTITUTO DE MATEMÁTICA**  
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL PROFMAT**

**YÚDI JOÃO MANOEL SILVA DE OLIVEIRA**

**ANÁLISE NUMÉRICA E MODOS DE CÁLCULO APROXIMADO DE ÁREAS E  
VOLUMES**

**Maceió**  
**2024**

**YÚDI JOÃO MANOEL SILVA DE OLIVEIRA**

**ANÁLISE NUMÉRICA E MODOS DE CÁLCULO APROXIMADO DE ÁREAS E  
VOLUMES**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Alagoas, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, como um dos pré-requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva.

**Maceió**

**2024**

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecária: Helena Cristina Pimentel do Vale CRB-4/ 661

- O48a Oliveira, Yúdi João Manoel Silva de.  
Análise numérica e modos de cálculo aproximado de áreas e volumes / Yúdi João Manoel Silva de Oliveira. – 2024.  
49 f. : il. color.
- Orientador: Márcio Henrique Batista da Silva.  
Dissertação (mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2024.
- Bibliografia: f. 49.
1. Análise numérica. 2. Educação básica. 3. Base Nacional Comum Curricular.  
4. Métodos numéricos. 5. Área e volume – Cálculo. I. Título.

CDU: 514:37

## Folha de Aprovação

YÚDI JOÃO MANOEL SILVA DE OLIVEIRA

Análise Numérica e Modos de Cálculo aproximado de áreas e volumes

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 03 de Abril de 2024.

---

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva – UFAL (Orientador)

**Banca examinadora:**

---

Prof. Dr. José Anderson de Lima e Silva – UFAL (Examinador Interno)

---

Prof. Dr. Márcio Silva Santos – UFPB (Examinador Externo)

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente, expresso minha gratidão a Deus, em nome de Jesus, pelo dom da vida e pela saúde que me permitiram concluir este projeto. Agradeço por conceder-me inteligência, saúde e força, e por nunca desistir de mim.

Aos meus pais, José de Oliveira e Josefa Francisca, agradeço por todo o incentivo, apoio e investimento que possibilitaram a realização das minhas metas acadêmicas.

Agradeço de todo o coração à minha esposa Mylene Mendonça pelo seu companheirismo e apoio ao longo dos anos em que estivemos juntos. Agradeço por sempre acreditar no meu potencial e por ser tão paciente e compreensiva ao abdicar de muito do nosso tempo para que eu pudesse concluir este projeto profissional.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva, expresso minha gratidão por ter aceitado me orientar. Agradeço pelas suas sugestões, orientações, atenção, compromisso, paciência e seriedade com que me guiou durante toda a construção do meu trabalho.

A todos os amigos que fizeram parte desta jornada, em especial aos meus nobres amigos José Roberto, Pedro Henrique Fidelis e Felipe Ferreira, agradeço por todo o apoio. Também agradeço à minha sogra Josilene, meu irmão Yúgu e minha cunhada Lara.

Gostaria também de expressar minha gratidão a todos os meus professores do Mestrado do Profmat, pelo auxílio e apoio na busca pelo conhecimento.

## RESUMO

Neste trabalho abordamos de maneira abrangente a importância das técnicas numéricas na estimativa de áreas e volumes em diversas situações. Destacamos a relevância dessas técnicas em contextos complexos, nos quais abordagens diretas são impraticáveis ou inacessíveis. A análise numérica, por meio de abordagens matemáticas e computacionais, desempenha um papel crucial na determinação de áreas e capacidades, especialmente em geometrias problemáticas. No texto exploramos a integração das habilidades relacionadas ao ensino de áreas e volumes ao longo da Educação Básica, alinhadas com a base nacional curricular (BNCC). No âmbito da análise numérica, são apresentados conceitos fundamentais mas de um ponto de vista acessível, entre os conceitos temos a integral definida, métodos de integração numérica, erro numérico e convergência, que são essenciais para o cálculo eficiente de áreas e volumes. Além disso, discutimos métodos específicos, como o dos retângulos, trapézios e a regra de Simpson para áreas, bem como métodos da seção transversal e das cascas cilíndricas para volumes. Propõe-se ainda a investigação e comparação de métodos numéricos, visando contribuir para a escolha adequada dessas técnicas em diferentes contextos aplicados. Em resumo, neste trabalho, apresentamos uma visão abrangente sobre a importância das técnicas numéricas na estimativa de áreas e volumes, destacando sua aplicabilidade em situações desafiadoras e proporcionando uma base sólida para a seleção e aplicação dessas técnicas em diversos contextos educacionais e práticos.

**Palavras-chave:** Análise numérica; educação básica; métodos numéricos; áreas; volumes; integral definida; Base Nacional Comum Curricular.

## ABSTRACT

In this work, we comprehensively address the importance of numerical techniques in estimating areas and volumes in various situations. We emphasize the relevance of these techniques in complex contexts where direct approaches are impractical or inaccessible. Numerical analysis, through mathematical and computational approaches, plays a crucial role in determining areas and capacities, especially in challenging geometries. The text explores the integration of skills related to the teaching of areas and volumes throughout Basic Education, aligned with the National Curricular Base (BNCC). In the scope of numerical analysis, fundamental concepts are presented from an accessible standpoint. Among these concepts are the definite integral, numerical integration methods, numerical error, and convergence, which are essential for the efficient calculation of areas and volumes. Furthermore, specific methods are discussed, such as the rectangle method, trapezoidal method, and Simpson's rule for areas, as well as methods involving cross-sectional areas and cylindrical shells for volumes. The article also proposes the investigation and comparison of numerical methods, aiming to contribute to the appropriate selection of these techniques in different applied contexts. In summary, this work provides a comprehensive view of the importance of numerical techniques in estimating areas and volumes, highlighting their applicability in challenging situations and offering a solid foundation for the selection and application of these techniques in various educational and practical contexts.

**Keywords:** Numerical analysis; basic education; numerical methods; areas; volumes; definite integration; National Common Curricular Base.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Código alfa-numérico do Ensino Fundamental.....	15
Figura 2 - Código alfa-numérico do Ensino Médio.....	17
Figura 3 - Área usando a extremidade esquerda.....	21
Figura 4 - Área usando a extremidade direita.....	21
Figura 5 - Área usando o ponto médio.....	22
Figura 6 - Aproximação pela área de um trapézio.....	23
Figura 7 - Área para $n > 1$ trapézios.....	24
Figura 8 - Casca cilíndrica.....	30
Figura 9 - Função $f(x) = y$ .....	31
Figura 10 - Rotação da função $f(x) = y$ .....	31
Figura 11 - Plano de Flutuação de um Navio.....	33
Figura 12 - Semiplano superior de um plano de flutuação.....	33
Figura 13 - Canteiro irregular.....	34
Figura 14 - Representação de um seno.....	36
Figura 15 - Tubulação curva.....	36
Figura 16 - Raio em função da altura.....	38
Figura 17 - Gráfico de $e^{-x^2}$ .....	40
Figura 18 - Esfera de raio $r$ .....	44
Figura 19 - Sólido obtido pela rotação da curva $y = 3x - x^2$ em torno do eixo $y$ .....	45

## SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO.....	12
2.	ÁREAS E VOLUMES NA BNCC.....	14
3.	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	19
3.1	Conceitos básicos .....	19
3.2	Métodos de cálculo de áreas .....	20
3.2.1	Método dos retângulos .....	20
3.2.2	Regra dos Trapézios .....	23
3.2.3	Regra de Simpson .....	25
3.3	Métodos de cálculo de volumes .....	28
3.3.1	Método da Seção Transversal .....	28
3.3.2	Método das Cascas Cilíndricas.....	29
4.	APLICAÇÕES .....	33
4.1	Cálculo da área de um plano de flutuação .....	33
4.2	Área de um canteiro de flores de forma irregular .....	34
4.3	Volume de um reservatório de água .....	35
4.4	Volume de um sino nada pequeno.....	35
4.5	Fabricação de uma Tubulação Curva para uma Indústria .....	36
4.6	Volume de um Tanque com Formato de Tronco de Cone.....	37
4.7	Total de Energia Consumida por um Edifício.....	38
5.	RESULTADOS E DISCUSSÕES .....	40
5.1	Áreas.....	40

<b>5.2</b>	<b>Volumes.....</b>	<b>43</b>
<b>6.</b>	<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>47</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>49</b>

## 1. INTRODUÇÃO

A aplicação de técnicas numéricas e a estimativa aproximada de extensões e capacidades desempenham um papel crucial em diversas esferas da ciência e engenharia. Isso possibilita a compreensão e modelagem de fenômenos complexos que muitas vezes não podem ser abordados de forma exata por métodos analíticos. Essas aplicações são valiosas em cenários nos quais soluções analíticas são inacessíveis, seja pela complexidade das equações envolvidas ou pela natureza não tão compreensível das questões.

A análise numérica emprega abordagens matemáticas e computacionais para derivar soluções aproximadas em situações que envolvem equações diferenciais, integrais e outras formas de equações matemáticas. Na disciplina da geometria e na determinação de extensões e capacidades, a análise numérica desempenha um papel essencial, devido à grande variedade de formas complexas e irregulares presentes. Por exemplo, considere a geometria intrincada de uma peça de maquinário elaborada, uma região geográfica complexa ou uma molécula dentro de um sistema biológico. Determinar suas áreas ou capacidades com precisão por meio de métodos analíticos pode ser uma tarefa inviável ou altamente impraticável.

Os cálculos aproximados de áreas e volumes são cruciais nessas situações. Esses métodos oferecem uma maneira de dividir as formas complexas em partes menores e mais simples e calcular suas áreas ou volumes através da somatória de áreas ou volumes dessas partes. Isso é obtido através de técnicas como a subdivisão de regiões em elementos geométricos mais simples, retângulos e trapézios, e a utilização de fórmulas que permitem aproximar a área ou o volume total com base nessas partes discretas. Esses cálculos aproximados são muito mais viáveis de maneira computacional do que a obtendo através de soluções analíticas, permitindo uma abordagem prática para problemas complexos.

Além disso, existem aplicações em diversas áreas, como na engenharia civil, pelo projeto de estruturas complexas, na física, como a modelagem de fenômenos físicos, na biologia, através da análise de estruturas moleculares, na geografia, cálculos de áreas de regiões geográficas, e é claro, em outras disciplinas científicas. A capacidade de obter resultados próximos da realidade, mesmo em cenários altamente complexos, é de suma importância para a tomada de decisões e o avanço do conhecimento em diversas áreas.

O tema escolhido é essencial na caixa de ferramentas matemáticas e computacionais para lidar com problemas complexos e irregulares. Eles capacitam pesquisadores, cientistas e engenheiros a enfrentar desafios que seriam inacessíveis ou impraticáveis, promovendo avanços significativos em diversas áreas do conhecimento.

A partir disso, temos como objetivos investigar e comparar os métodos numéricos mais utilizados para calcular áreas e volumes de formas geométricas complexas, além de avaliar a precisão e a eficiência de cada método em diferentes contextos, visando contribuir para a escolha adequada desses métodos em diferentes situações aplicadas.

## 2. ÁREAS E VOLUMES NA BNCC

O ensino sobre áreas e volumes é delineado por documentos desde as séries iniciais do Ensino Fundamental, e assim persiste ao longo de toda a trajetória do estudante pela Educação Básica. Agora vamos procurar analisar dentro da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) quais as habilidades que envolvem o ensino de áreas e volumes na educação básica de um estudante.

Sobre a BNCC, o documento completo diz que:

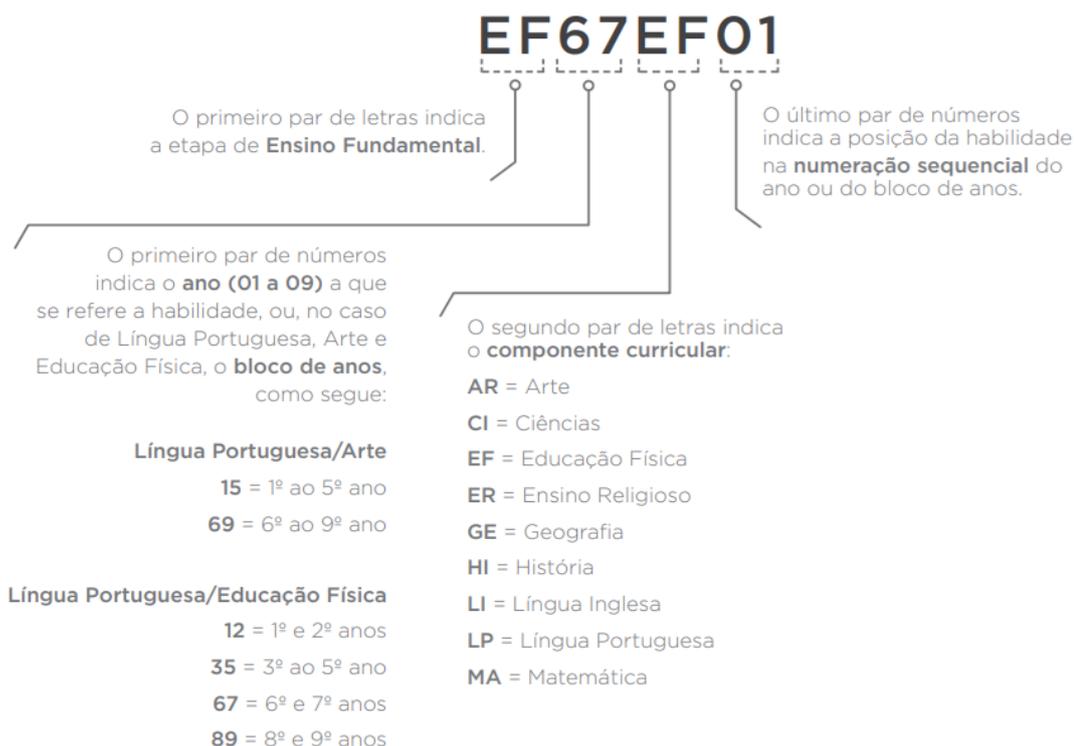
A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). (BRASIL, 2018, p. 7)

Já sobre competências e habilidades a BNCC fala o seguinte:

Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2018, p. 8)

Dessa forma, procuramos, dentre esse conjunto de habilidades, aquelas que estão associadas ao aprendizado de áreas e volumes na Educação Básica. Na BNCC, as habilidades são apresentadas por meio de códigos alfanuméricos. Esses códigos, conforme é mostrado na Figura 1, indicam a etapa escolar, o ano ou bloco de anos a que se refere a habilidade, o componente curricular e a posição da habilidade na numeração sequencial do ano ou bloco de anos. Então, por exemplo, o código EF07MA01 é referente a disciplina de matemática, no 7º ano do ensino fundamental e a habilidade 01 “Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos”.

Figura 1 - Código alfa-numérico do Ensino Fundamental



Fonte: BRASIL (2018)

O ensino de áreas inicia-se já no 3º ano do ensino fundamental, no contexto da unidade temática "Grandezas e medidas", abordando a comparação de áreas por superposição. Nesse ano, a habilidade EF03MA21 tem como objetivo que os estudantes possam comparar, visualmente ou por superposição, as áreas de faces de objetos, figuras planas ou desenhos.

No 4º ano do ensino fundamental, também na unidade temática "Grandezas e medidas", o objeto de conhecimento relacionado ao ensino de áreas aborda as áreas de figuras construídas em malhas quadriculadas. Com a habilidade EF04MA21, espera-se que os estudantes possam medir, comparar e estimar áreas de figuras planas desenhadas em malha quadriculada, utilizando a contagem dos quadradinhos ou metades de quadradinho. É importante que reconheçam que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área.

No 5º ano do ensino fundamental, o objeto de conhecimento voltado para o ensino de áreas irá abordar sobre algumas relações entre áreas e perímetros de figuras poligonais e é introduzida a noção de volume. A habilidades EF05MA19 fala sobre a resolução e elaboração de problemas envolvendo medida de grandezas, entre elas áreas, usando de transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais. Já a habilidade EF05MA20 espera que o estudante saiba concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que o contrário também procede. Indo

para volumes, a habilidade EF05MA21 quer que o estudante reconheça volume como uma grandeza associada a sólidos geométricos e meça volumes por meio de empilhamento de cubos, utilizando, preferencialmente, objetos concretos.

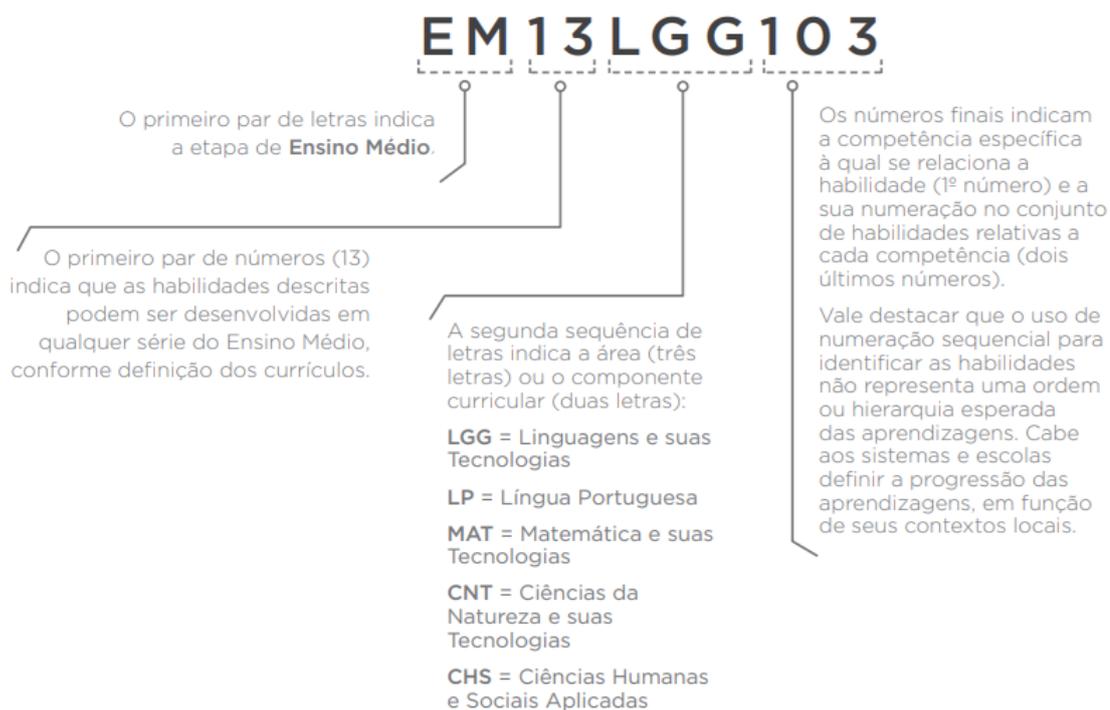
Chegando no 6º ano do ensino fundamental, o objeto de conhecimento voltado para áreas e volumes pretende que sejam aplicados problemas sobre medidas envolvendo grandezas como área e volume, dentre outras elencadas no documento. Indo para as habilidades temos que o a EF06MA24 pretende que o estudante consiga resolver e elaborar problemas que envolvam, dentre outras, as grandezas área (triângulos e retângulos) e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas utilizando, sempre que possível, contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.

Para o 7º ano do ensino fundamental, os assuntos abordados irão falar sobre a equivalência de área de figuras planas, indo para o cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras áreas mais fáceis de serem determinadas além do cálculo de volume de blocos retangulares, utilizando de unidades de medida convencionais mais usuais. Aqui temos a habilidade EF07MA29 que pretende resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas; a habilidade EF07MA31 quer estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros; com a EF07MA32 queremos resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas; por fim, a EF07MA30, que fala de volume, quer resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais.

No 8º ano do ensino fundamental, a EF08MA19 quer resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas e a EF08MA21 quer que o estudante saiba resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente de formato de um bloco retangular. Finalizando os anos finais do ensino fundamental, no 9º ano, a EF09MA19 fala sobre a resolução e elaboração de problemas que envolvam medidas de volume de prismas e de cilindros retos.

Indo agora para o ensino médio, cada habilidade é identificada por um código alfanumérico explicado na Figura 2, a seguir.

Figura 2 - Código alfa-numérico do Ensino Médio



Fonte: BRASIL (2018)

Nessa etapa de ensino as habilidades voltadas para o estudo de áreas e volumes, descritas no documento da BNCC são: EM13MAT307 “Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (...) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (...)”; EM13MAT309 “Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais (...)”; EM13MAT506 “Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas”; EM13MAT509 “Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia, como a cilíndrica e a cônica”; EM13MAT201 “Propor ações comunitárias, como as voltadas aos locais de moradia dos estudantes dentre outras, envolvendo cálculos das medidas de área, de volume, de capacidade ou de massa, adequados às demandas da região”; EM13MAT309 “Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados”; EM13MAT504 “Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras”.

O ensino sobre áreas e volumes é uma parte essencial da trajetória educacional do estudante, sendo delineado desde as séries iniciais do Ensino Fundamental e persistindo ao longo de toda a Educação Básica. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) desempenha um papel fundamental nesse contexto, estabelecendo as aprendizagens essenciais para todos os alunos.

Desde o 3º ano do Ensino Fundamental, inicia-se o aprendizado sobre áreas, evoluindo para o entendimento de volumes no 5º ano. As habilidades se desenvolvem progressivamente, abordando a comparação de áreas, medidas em malhas quadriculadas, relações entre áreas e perímetros, além da introdução à noção de volume. No Ensino Médio, as habilidades se aprofundam, incluindo métodos diversos para medir áreas, resolução de problemas envolvendo volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos, representação gráfica de variações e investigação de deformações em projeções cartográficas.

Em suma, a BNCC fornece um guia estruturado para o ensino de áreas e volumes, promovendo uma abordagem progressiva e integrada ao longo da Educação Básica, capacitando os estudantes a aplicar esses conceitos em situações reais e desenvolver habilidades fundamentais para sua formação.

### 3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Antes de explorarmos alguns dos métodos numéricos no cálculo de áreas e volumes, existem alguns princípios essenciais que são fundamentais para lidar de forma eficiente com cálculos relacionados a formas complicadas ou irregulares. Esses conceitos básicos não só formam a base matemática, mas também nos dão ferramentas necessárias para lidar com desafios geométricos de maneira precisa e eficiente.

#### 3.1 Conceitos básicos

No âmbito da análise numérica, um conjunto de conceitos essenciais emerge para a eficaz abordagem dos cálculos de áreas e volumes, especialmente quando se trata de formas complexas ou irregulares. Esses conceitos fundamentais fornecem a base matemática e computacional necessária para enfrentar tais desafios de maneira precisa e eficiente.

A integral definida se destaca como uma ferramenta central para cálculos de áreas e volumes, estabelecendo a relação entre uma função contínua e a área ou volume sob sua curva ou superfície. Esse conceito permite que a análise numérica transforme problemas geométricos complexos em operações matemáticas mais gerenciáveis.

Nesse contexto, os métodos de integração numérica desempenham um papel crucial. Esses métodos, como a regra dos trapézios e a regra de Simpson, subdividem a região sob a curva em segmentos menores e aproximam o cálculo integral através da soma ponderada de áreas de figuras geométricas simples (CHAPRA, 2011). A aplicação desses métodos requer a discretização da região de interesse em uma malha numérica, essencial para permitir cálculos aproximados de áreas e volumes.

Além disso, a convergência é um tópico crítico. Ela descreve a tendência de um método numérico a se tornar mais preciso à medida que a subdivisão aumenta. A análise de convergência é fundamental para determinar a eficiência do método escolhido.

Nos casos de cálculos de volumes e áreas em cenários tridimensionais, entra em cena o cálculo tridimensional. Esse conceito permite a representação e manipulação de formas e regiões complexas no espaço tridimensional, facilitando a realização de integrações em coordenadas.

Contudo, é crucial não apenas obter resultados aproximados, mas também avaliar a estabilidade dos métodos em relação a perturbações nos dados de entrada. Além disso, é imprescindível analisar a influência dos parâmetros dos métodos, como o número de

subintervalos ou pontos de amostragem, na precisão dos resultados.

Em suma, compreender esses conceitos é essencial para selecionar e aplicar com sabedoria os métodos numéricos de cálculo de áreas e volumes. Eles fornecem as ferramentas necessárias para enfrentar a complexidade geométrica, promovendo a precisão e a eficiência nos cálculos numéricos em uma ampla gama de aplicações científicas e práticas.

### 3.2 Métodos de cálculo de áreas

Vamos explorar métodos essenciais no cálculo de áreas que desempenham um papel crucial na matemática aplicada. O método dos retângulos, o método dos trapézios e a regra de Simpson são ferramentas valiosas que nos permitem aproximar e compreender áreas sob curvas complexas. Cada método oferece uma abordagem única para lidar com problemas geométricos, sendo fundamentais em contextos que vão desde a física até a engenharia.

#### 3.2.1 Método dos retângulos

Também chamado de Método da Soma de Riemann, o Método dos Retângulos é uma técnica numérica utilizada para calcular, de forma aproximada, a área de uma curva de uma dada função, em um intervalo finito  $[a, b]$ . Esse método é fundamentado na ideia de subdividir a área da curva em retângulos, que estejam igualmente espaçados entre si, e somar as áreas desses retângulos para conseguir uma estimativa da área total. Quanto maior for a quantidade de subintervalos, mais preciso será o valor da área encontrada.

Seja  $f$  uma função contínua no intervalo  $[a, b]$ , isto é, uma função cujo gráfico não tem saltos. Imagine que desejamos saber a área sob o seu gráfico. Dado intervalo finito  $[a, b]$  no eixo- $x$ , particionamos esse intervalo em  $n$  subintervalos que estejam igualmente espaçados, onde  $\Delta x = \frac{a-b}{n}$  representa a largura de cada subintervalo. Para cada  $\Delta x$  escolhemos um ponto  $x_i$ , onde iremos calcular o valor de  $f(x_i)$ . Aqui temos que  $x_0 = a$  e  $x_n = b$ . Os pontos  $x_i$  podem ser tomados usando a extremidade esquerda, extremidade direita ou o ponto médio do subintervalo.

Tomando a extremidade esquerda teremos que a área de cada retângulo será dada por  $A_i = f(x_i) \cdot \Delta x$ .

Figura 3 - Área usando a extremidade esquerda

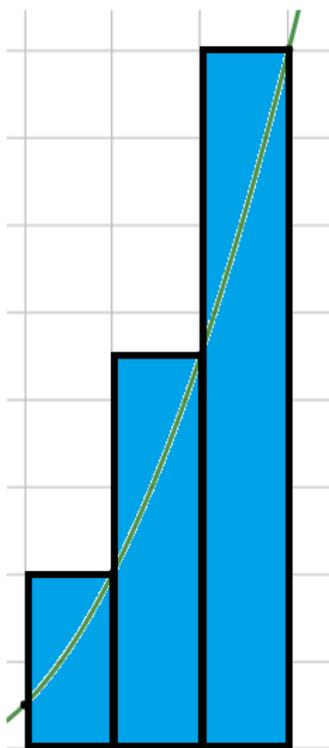


Fonte: Elaborada pelo autor

Tomando a extremidade direita teremos que a área de cada retângulo será dada por

$$A_i = f(x_{i+1}) \cdot \Delta x.$$

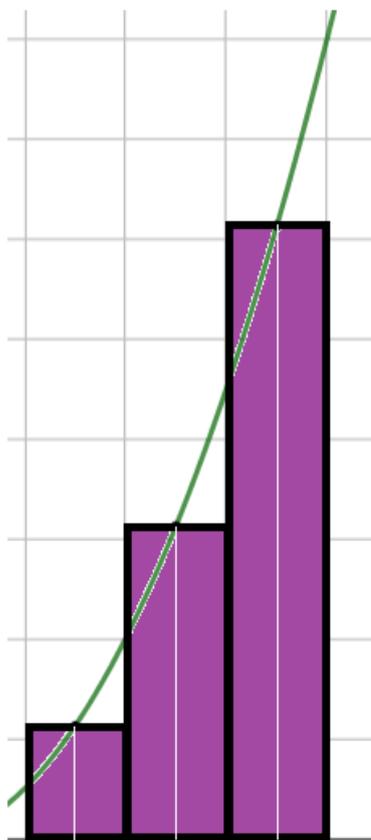
Figura 4 - Área usando a extremidade direita



Fonte: Elaborada pelo autor

Tomando o ponto médio de cada subintervalo, a área de cada retângulo será dada por  $A_i = f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) \cdot \Delta x$ .

Figura 5 - Área usando o ponto médio



Fonte: Elaborada pelo autor

Somando as áreas de todos os retângulos calculados nos casos anteriores, e observando que o valor de  $\Delta x$  é constante, temos que uma estimativa da área total sob a curva é dada pelo seguinte somatório.

Para a escolha do ponto na extremidade esquerda,

$$A \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x = \Delta x \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$

Para a escolha do ponto na extremidade direita,

$$A \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \cdot \Delta x = \Delta x \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}).$$

Para a escolha onde  $x_i$  é o ponto médio do subintervalo,

$$A \approx \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \cdot \Delta x = \Delta x \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right).$$

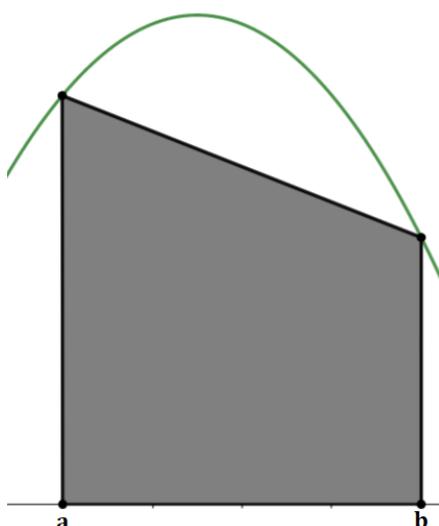
Para qualquer um desses casos, iremos obter uma aproximação para a área procurada.

### 3.2.2 Regra dos Trapézios

Nesta técnica, também iremos estimar o valor da integral definida de uma função em um dado intervalo finito, dividindo a área sob a curva, em relação ao eixo das abscissas, em trapézios de mesma altura e, em seguida, somar a área de todos eles, para obter uma estimativa da integral. Esse método é útil quando não é possível, ou muito complexo, obter uma solução analítica para a integral da função.

A ideia é aproximar a função  $f(x)$  contínua no intervalo finito  $[a, b]$ , no eixo-x, por um polinômio de primeira ordem. Mostraremos que  $f$  pode ser aproximada pela área de um trapézio.

Figura 6 - Aproximação pela área de um trapézio



Fonte: Elaborada pelo autor

Usando a fórmula de Lagrange para podermos encontrar o polinômio interpolador de primeiro grau,  $p_1(x)$ , que interpola  $f(x)$  nos pontos  $x_0 = a$  e  $x_1 = b$ , temos o seguinte:

$$p_1(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x),$$

onde  $L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}$  e  $L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$ .

Agora tomando o intervalo  $[a, b]$  e o subdividindo em  $n$  partes. Seja  $h$  o comprimento de cada subintervalo, logo  $h = \frac{b-a}{n}$ . Como  $n = 1$ , pois queremos um único trapézio, então temos que  $h = b - a = x_1 - x_0$ , para esse caso específico. Fazendo a substituição em  $p_1(x)$ , ficamos com:

$$p_1(x) = \frac{x - x_1}{-h} f(x_0) + \frac{x - x_0}{h} f(x_1).$$

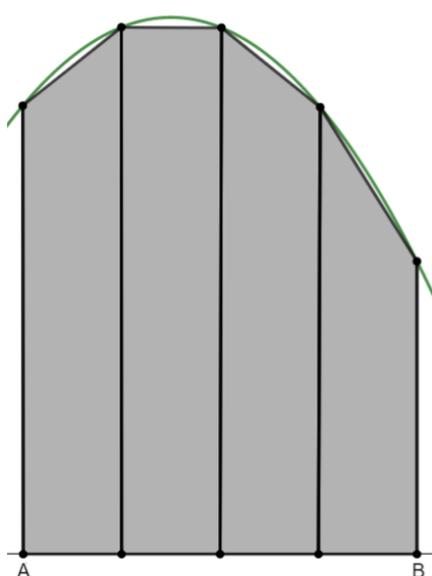
Logo, temos que a integral de  $f(x)$  no intervalo  $[a, b]$  pode ser aproximada por:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_{a=x_0}^{b=x_1} p_1(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{x - x_1}{-h} f(x_0) + \frac{x - x_0}{h} f(x_1) \right] dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)].$$

Logo, podemos concluir que a integral de  $f(x)$ , pode ser aproximada pela área de um trapézio de altura  $h = x_1 - x_0$  e bases  $f(x_1)$  e  $f(x_0)$ .

Entretanto, se tomarmos  $n = 1$ , obtemos uma aproximação que pode não ser muito confiável, vide a Figura 6. Porém, tomando o intervalo  $[a, b]$  e aplicando a Regra do Trapézio várias vezes, ou seja, tomando  $n > 1$ , obtemos uma melhor aproximação.

Figura 7 - Área para  $n > 1$  trapézios



Fonte: Elaborada pelo autor

Dividimos o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos de igual largura  $h = x_{i+1} - x_i$ , com  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , onde  $x_0 = a$  e  $x_n = b$ . Também podemos representar  $h = \frac{b-a}{n}$ .

Podemos encontrar os valores de cada ponto  $x_i$  partindo de  $x_i = x_0 + i \cdot h$ . Logo, podemos escrever a integral de  $f(x)$  de forma que seja a área dos  $n$  trapézios formados no intervalo  $[a, b]$ . Ou seja:

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_1 + A_2 + \dots + A_n,$$

onde  $A_i$  representa a área de cada trapézio em  $[a, b]$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ , e

$$A_i = \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)].$$

Como o valor de  $h$  é constante, podemos escrever a integral da seguinte forma:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \left[ f(x_0) + f(x_n) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right].$$

### 3.2.3 Regra de Simpson

Outra maneira de encontrar uma estimativa mais precisa para a área sob uma curva é a Regra de Simpson, onde queremos aproximar a função  $f(x)$  por um polinômio interpolado de grau mais alto, por exemplo, se entre  $f(a)$  e  $f(b)$  existir um ponto extra, no ponto médio, podemos pensar em uma parábola como polinômio interpolador, já se tivéssemos dois pontos igualmente espaçados, poderíamos pensar em um polinômio do 3º grau (CHAPRA, 2011).

Seja  $f(x)$  uma função, queremos três pontos que interpoem a função  $f$  para a interpolamos por uma parábola. Seja então os pontos  $a = x_0, b = x_2$  e  $x_1$  será o ponto médio do intervalo, ou seja,  $x_1 = x_0 + h$ , onde  $h = \frac{b-a}{2}$ .

Para encontrar o polinômio interpolador de segunda ordem,  $p_2(x)$ , podemos usar a fórmula de Lagrange, ou seja

$$\begin{aligned} p_2(x) &= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) = \\ &= f(x_0) \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1) \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2) \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}. \end{aligned}$$

Como  $a = x_0, b = x_2$  e  $x_1 = x_0 + h$ , então podemos escrever a integral de  $f(x)$  no intervalo  $[a, b]$  como:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_1} p_2(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[ f(x_0) \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \right. \\ \left. + f(x_1) \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2) \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \right] dx.$$

Onde, após a integração e suas devidas manipulações, encontramos:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)].$$

Conhecida como Regra 1/3 de Simpson, pelo fato que  $h$  está dividido por 3.

Agora, suponhamos que o intervalo  $[a, b]$  seja dividido em  $2n$  subintervalos, e que aplicamos a regra  $n$  vezes, pois, a cada par de subintervalos, teremos três pontos para encontrar uma parábola interpoladora logo, para  $2n$  subintervalos de tamanho  $h = \frac{b-a}{2n}$ .

A cada dois subintervalos calculamos a *Regra  $\frac{1}{3}$  de Simpson* de tal maneira que seja  $A_i$  a área sobre cada subintervalo, com  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , então

$$A_1 = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)];$$

$$A_2 = \frac{h}{3} [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)];$$

...

$$A_n = \frac{h}{3} [f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})].$$

Somando todas as áreas, a integral  $I$  pode ser aproximada por

$$\begin{aligned}
I &= \int_{x_0}^{x_{2n}} f(x) dx \approx A_1 + A_2 + \dots + A_n = \\
&= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3} [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \dots \\
&\quad + \frac{h}{3} [f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})] \\
&= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) \\
&\quad + f(x_{2n})] = \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + f(x_{2n}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i+1}) \right].
\end{aligned}$$

Agora, caso queiramos aproximar a função  $f(x)$  no intervalo de  $[a, b]$ , por um polinômio interpolador de terceira ordem, seriam necessários quatro pontos para obter tal polinômio. Para encontrar os pontos, pegamos o intervalo  $[a, b]$  e o dividimos em três subintervalos igualmente espaçados. Seja  $h$  o tamanho desse espaçamento, ou seja,  $h = \frac{b-a}{3}$ .

Logo, teremos que  $x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h$  e  $x_3 = a + 3h = b$ . Assim, podemos encontrar um polinômio  $p_3(x)$  pela fórmula de Lagrange, de tal forma que a integral  $I$  de  $f(x)$  no intervalo  $[a, b]$  pode ser aproximada da seguinte maneira,

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_3(x) dx.$$

Onde o valor de  $I$  será aproximado por,

$$I \approx \frac{3}{8} h [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)],$$

conhecida como *Regra 3/8 de Simpson*.

Caso queiramos ter uma maior precisão, tal qual a Regra  $\frac{1}{3}$  de Simpson, iremos dividir o intervalo  $[a, b]$  em  $3n$  subintervalos, pois o número de subdivisões deve ser múltiplo de 3, para conseguirmos ter um polinômio interpolador de terceiro grau. Seja  $h$  a distância desses subintervalos, então  $h = \frac{b-a}{3n}$ , onde  $x_0 = a$  e  $x_{3n} = b$ , e cada subintervalo pode ser escrito como  $[x_i, x_{i+3}]$ ,  $i = 0, 3, 6, \dots, 3n - 3$ . Temos então que a integral pode ser escrita da

seguinte forma

$$\int_{x_0}^{x_{3n}} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_3} f(x) dx + \int_{x_3}^{x_6} f(x) dx + \dots + \int_{x_{3n-3}}^{x_{3n}} f(x) dx.$$

Usando a Regra  $\frac{3}{8}$  de Simpson em cada intervalo  $[x_i, x_{i+3}]$ , podemos aproximar a integral.

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_{3n}} f(x) dx &\approx \frac{3}{8}h[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] + \frac{3}{8}h[f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + f(x_6)] \\ &+ \dots + \frac{3}{8}h[f(x_{3n-3}) + 3f(x_{3n-2}) + 3f(x_{3n-1}) + f(x_{3n})]. \end{aligned}$$

Ou ainda:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_{3n}} f(x) dx &\approx \frac{3}{8}h[f(x_0) + f(x_{3n}) + 3(f(x_1) + f(x_2)) + 2f(x_3) + 3(f(x_4) + f(x_5)) + 2f(x_6) \\ &+ \dots + 2f(x_{3n-3}) + 3(f(x_{3n-2}) + f(x_{3n-1}))]. \end{aligned}$$

### 3.3 Métodos de cálculo de volumes

O cálculo de volumes tem um papel fundamental em várias áreas da matemática, ciências naturais, engenharia e design. Queremos determinar o valor ocupado no espaço que um objeto ocupa. No entanto, nem todas as formas e objetos são simples ou fáceis de se encontrar o volume, o que pode tornar esse cálculo uma tarefa desafiadora. Por isso, existem métodos matemáticos e computacionais que são usados para tal finalidade.

Serão apresentados dois métodos para calcular volumes, serão eles o método da seção transversal e o método da casca cilíndrica. Cada um desses métodos possui suas próprias características, aplicações e vantagens, permitindo que seja determinado de maneira bem precisa o volume para diferentes tipos sólidos.

#### 3.3.1 Método da Seção Transversal

Esse método é útil quando temos objetos que possuem seções transversais regulares ou que consigamos dividir o sólido em seções que tenham formas definidas. O método é baseado na ideia de calcular a área de cada seção transversal ao longo de um eixo específico e, em seguida, integrar essas áreas para obter o volume total (STEWART, 2013).

Seja  $S$  um sólido qualquer. Agora vamos seccionar  $S$  em partes, e para cada parte, iremos aproximar por um cilindro. É possível ter uma ideia do volume de  $S$  somando os valores dos volumes dos cilindros. Se fizer essas secções de tal forma que sejam planos, teremos as secções transversais ao sólido  $S$ .

Vamos então “cortar”  $S$  por um plano  $\alpha$  qualquer, obtendo assim uma região de chamada de secção transversal de  $S$ . Seja então  $A(x)$  a área dessa secção transversal de  $S$  no plano  $P_x$ , que é ortogonal ao eixo  $x$  e que passe pelo ponto  $x$ , tal que  $x \in [a, b]$ , onde a projeção de  $S$  no eixo  $x$  está no intervalo  $[a, b]$ .

Se dividirmos  $S$  em  $n$  “fatias”, espaçadas igualmente, de largura  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ ,  $0 \leq i \leq n$ , onde  $x_0 = a$  e  $x_n = b$ , podemos aproximar cada uma dessas fatias por um cilindro de altura  $h = \Delta x$  e área da base  $A(x'_i)$ , onde  $x'_i \in [x_i, x_{i-1}]$ , que compreende a área da secção transversal de  $S$  que vai de  $x_i$  até  $x_{i-1}$ .

Logo, o volume  $V$  dessa secção transversal de  $S$  pode ser aproximado pela expressão  $V(S_i) \approx A(x'_i) \cdot \Delta x$ . Somando todos os volumes de todas as secções transversais de  $S$  podemos aproximar então o volume  $V$  do sólido por:

$$V \approx \sum_{i=1}^n A(x'_i) \cdot \Delta x.$$

Se  $n \rightarrow \infty$ , podemos definir  $V$  como sendo o limite das somas  $V(S_i)$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Ou seja:

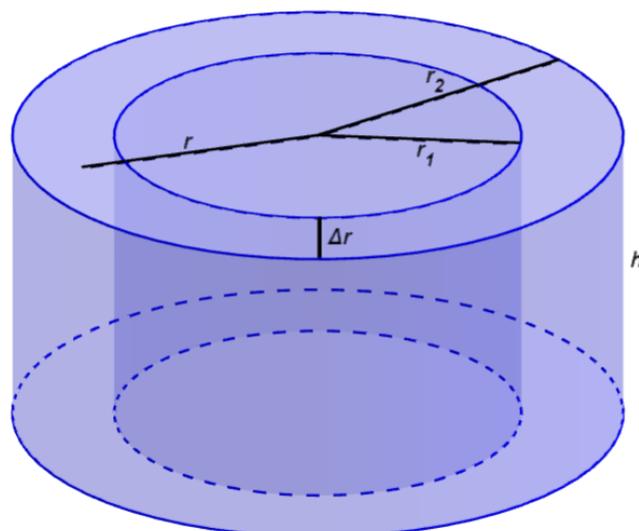
$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x'_i) \cdot \Delta x = \int_a^b A(x) dx.$$

Onde  $A(x)$  é a área de uma secção móvel transversal de  $S$ , obtida após fatiar em  $x$  de maneira perpendicular ao eixo  $x$ .

### 3.3.2 Método das Cascas Cilíndricas

Para determinar o volume de alguns sólidos que possuem uma forma cilíndrica, de arruela, ou que tem simetria em relação a algum eixo, utilizando o método das secções transversais, é bastante complicado, por isso o Método das Cascas Cilíndricas é mais fácil para tais situações (STEWART, 2013).

Figura 8 - Casca cilíndrica



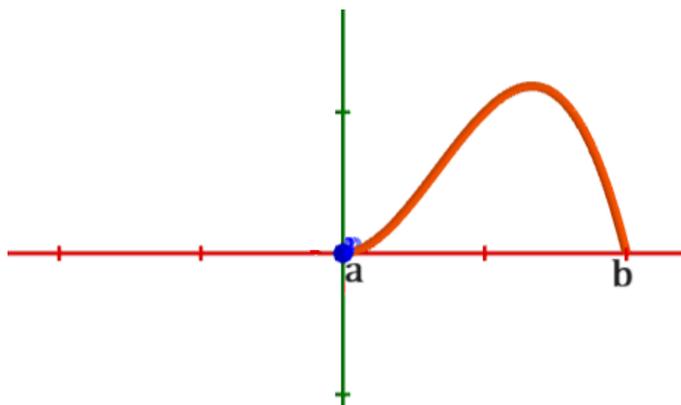
Fonte: Elaborada pelo autor

A Figura 8 é um exemplo de uma casca cilíndrica. Nela temos que  $r_1$  é o raio interno,  $r_2$  é o raio externo e  $h$  é a altura. E também  $\Delta r = r_2 - r_1$  e  $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ . O volume  $V$  dessa casca cilíndrica pode ser calculado pela diferença do volume  $V_2$  do cilindro externo pelo volume  $V_1$  do cilindro interno:

$$\begin{aligned} V &= V_2 - V_1 = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi(r_2^2 - r_1^2)h = \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h = 2\pi \frac{(r_2 + r_1)}{2} (r_2 - r_1)h \\ &= 2\pi r \Delta r h. \end{aligned}$$

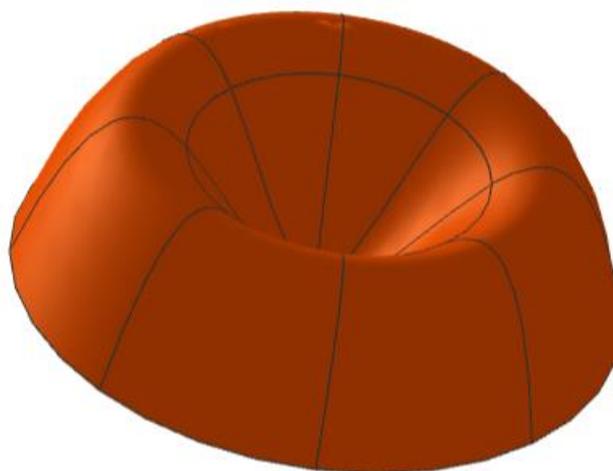
Logo,  $V = 2\pi r \Delta r h$ , onde  $\Delta r$  pode ser entendido como a espessura da casca cilíndrica.

Seja então agora  $S$  um sólido qualquer, por exemplo o sólido representado na figura 10, obtido pela rotação em torno do eixo  $y$  de uma região limitada  $f(x) = y, y = 0, x = a$  e  $x = b$ , com  $b > a \geq 0$ , e com  $f(x) \geq 0$ , representado na figura 9.

Figura 9 - Função  $f(x) = y$ 

Fonte: Elaborada pelo autor

Rotacionando a curva acima, figura 9, obtemos

Figura 10 - Rotação da função  $f(x)=y$ 

Fonte: Elaborada pelo autor

Dividindo o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$  de largura  $\Delta x$ , e seja  $\bar{x}_i$  o ponto médio do  $i$ -ésimo subintervalo. Se o retângulo de base  $[x_{i-1}, x_i]$  com altura  $f(\bar{x}_i)$  é girado em torno do eixo  $y$ , então teremos como resultado uma casca cilíndrica de raio médio  $\bar{x}_i$ , com espessura e altura, respectivamente iguais a  $\Delta x$  e  $f(\bar{x}_i)$ . Logo, seu volume é dado por

$$V_i = (2\pi\bar{x}_i)[f(\bar{x}_i)]\Delta x.$$

Então podemos aproximar o volume do sólido  $S$  pelo somatório de todos os volumes dessas cascas cilíndricas. Ou seja:

$$V \approx \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n 2\pi\bar{x}_i f(\bar{x}_i) \Delta x.$$

Se tomarmos a quantidade  $n$  de subintervalos tão grande que tenda ao infinito, temos que  $V$  pode se transformar na seguinte integral.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi \bar{x}_i f(\bar{x}_i) \Delta x = \int_a^b 2\pi x f(x) dx.$$

Logo, podemos concluir que o volume  $V$  de um sólido  $S$  obtido pela rotação em torno do eixo  $y$  da região sob a curva  $f(x) = y$  no intervalo  $[a, b]$  pode ser dado por:

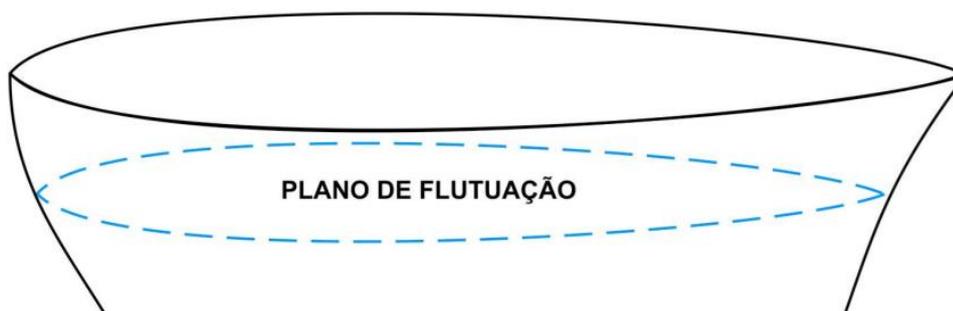
$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx, 0 \leq a < b.$$

## 4. APLICAÇÕES

### 4.1 Cálculo da área de um plano de flutuação

Em um navio, o chamado plano de flutuação é o plano horizontal que corresponde à superfície em que o casco do navio está flutuando.

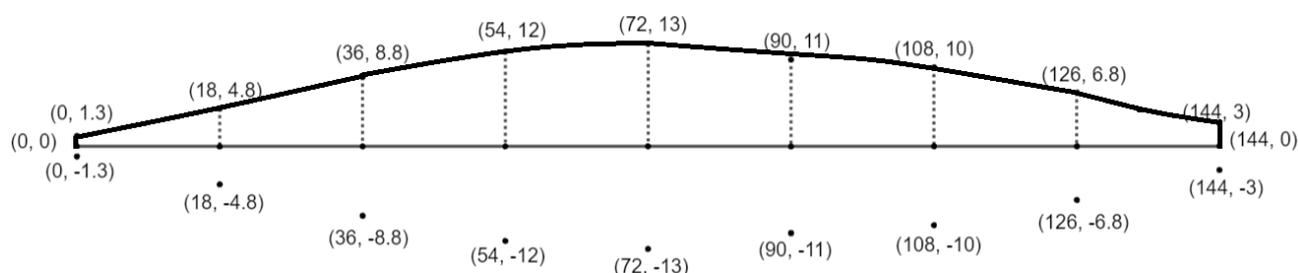
Figura 11 - Plano de Flutuação de um Navio



Fonte: Diretoria de Portos e Costas (2007)

Vamos calcular a área de um plano de flutuação, que foi dividido em seu eixo maior, abscissa, formando assim dois semiplanos, espaçadas igualmente a cada 18 metros, e são marcadas as seguintes ordenadas,  $y$  em metros, com igual espaçamento entre elas,  $y_1 = 1,3$ ;  $y_2 = 4,8$ ;  $y_3 = 8,8$ ;  $y_4 = 12$ ;  $y_5 = 13$ ;  $y_6 = 11$ ;  $y_7 = 10$ ;  $y_8 = 6,8$ ;  $y_9 = 3$ .

Figura 12 - Semiplano superior de um plano de flutuação



Fonte: Elaborada pelo autor

Para tal iremos usar a Regra  $\frac{1}{3}$  de Simpson, mas a versão para  $2n$  intervalos. Logo a área  $A$  do plano de flutuação pode ser aproximada por:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{18}{3} (1,3 + 4 \cdot 4,8 + 2 \cdot 8,8 + 4 \cdot 12 + 2 \cdot 13 + 4 \cdot 11 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 6,8 + 3) = \\
 &= 6(1,3 + 19,2 + 17,6 + 48 + 26 + 44 + 20 + 27,2 + 3) = 1254,6m^2.
 \end{aligned}$$

Como esse valor é calculado em relação a um dos semiplanos formados, então a área do plano de flutuação é o dobro desse valor, ou seja, a área total é de  $2509,2m^2$ .

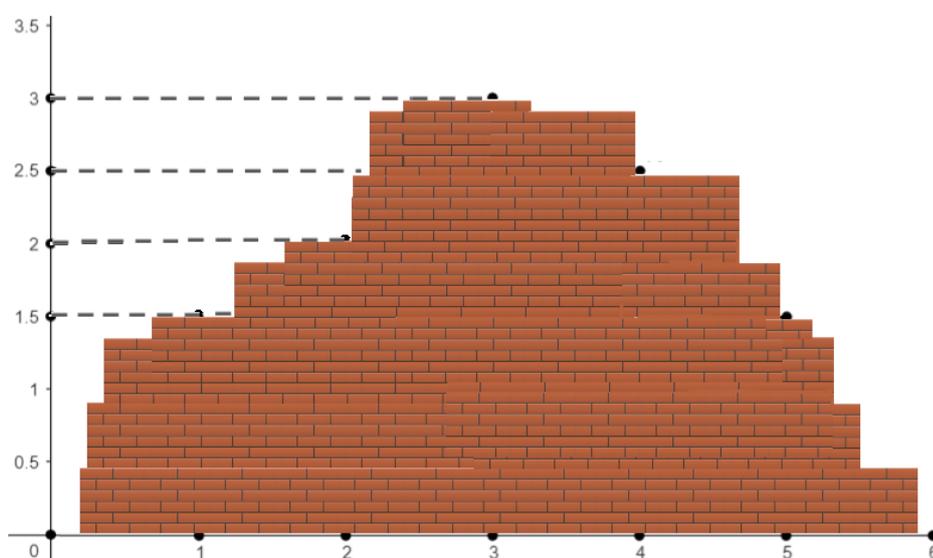
#### 4.2 Área de um canteiro de flores de forma irregular

Em um dado projeto de paisagismo é necessário calcular a área de um canteiro de flores que possui uma forma irregular. O contorno de tal canteiro possui um formato irregular de tal forma que não pode ser facilmente modelado por uma fórmula matemática simples. Segue as informações sobre tal canteiro, relacionando a posição, que pode ser entendida como a localização ao longo do comprimento do canteiro, com a altura encontrada em relação a tal posição, todos os dados em metros.

Posição	Altura
0	0
1	1,5
2	2
3	3
4	2,5
5	1,5
6	0

A figura 12 representa o formato irregular desse canteiro de formato irregular, que será destinado ao uso de flores.

Figura 13 - Canteiro irregular



Fonte: Elaborada pelo autor

Utilizando a Regra dos Trapézios, temos que uma aproximação para a Área será:

$$A \approx \frac{1}{2}(0 + 2 \cdot 1,5 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2,5 + 2 \cdot 1,5 \cdot 0) = \frac{1}{2} \cdot 21 = 10,5m^2.$$

Logo, a aproximação para a área de tal canteiro será  $10,5m^2$ .

### 4.3 Volume de um reservatório de água

Um reservatório de água está sendo construído em um terreno inclinado. Tal terreno varia ao longo do comprimento do reservatório. Vamos determinar o volume total de água que esse reservatório pode armazenar, utilizando o método das seções transversais.

Dividindo então o terreno em várias seções transversais, de mesmo intervalo, ao longo do comprimento do reservatório, onde cada seção é perpendicular ao terreno inclinado.

Cada seção dista uniformemente uma da outra no valor de 2 metros e possuem áreas iguais a:  $A_1 = 250m^2, A_2 = 280m^2, A_3 = 320m^2, A_4 = 370m^2, A_5 = 430m^2, A_6 = 500m^2$ . Pelo método das seções transversais, teremos que o volume  $V$  é aproximado por

$$V \approx \sum_{i=1}^n A_i \cdot \Delta x = 2 \cdot (250 + 280 + 320 + 370 + 430 + 500) = 4300m^3.$$

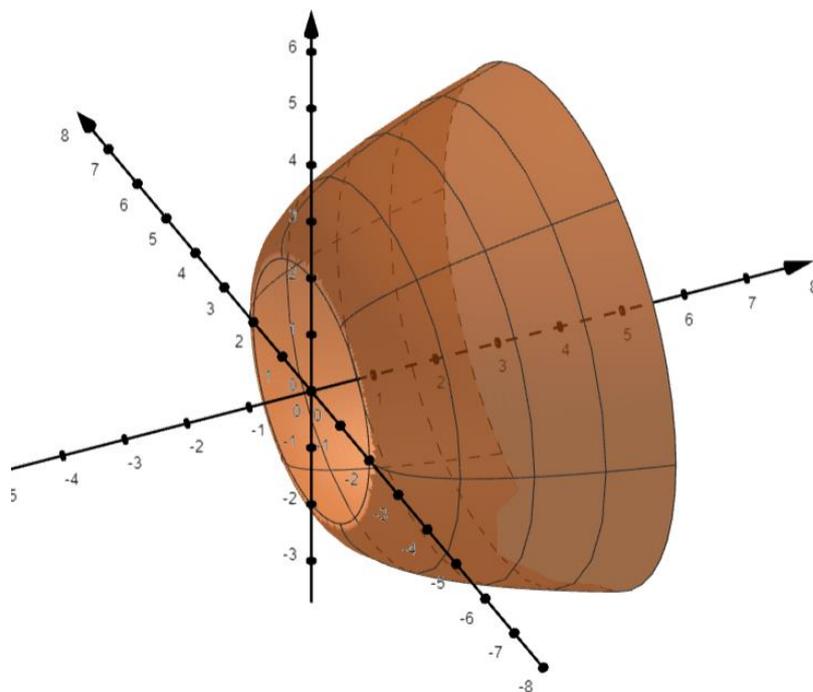
### 4.4 Volume de um sino nada pequeno

Suponhamos que recebemos de presente um sino gigantesco, cujo formato pode ser aproximado por um sólido obtido girando a região limitada pela curva  $y = f(x) = 2 + \sqrt{x}$ , no intervalo  $[0,4]$ , em torno do eixo  $x$ . Temos que  $0 \leq x \leq 4$  e pelo método das cascas cilíndricas, o volume é dado por:

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx = \int_0^4 2\pi x(2 + \sqrt{x}) dx = 2\pi \int_0^4 (2x + x\sqrt{x}) dx = \frac{288\pi}{5}.$$

Logo, o volume do círculo é  $\frac{288\pi}{5}$  unidades cúbicas.

Figura 14 - Representação de um sino

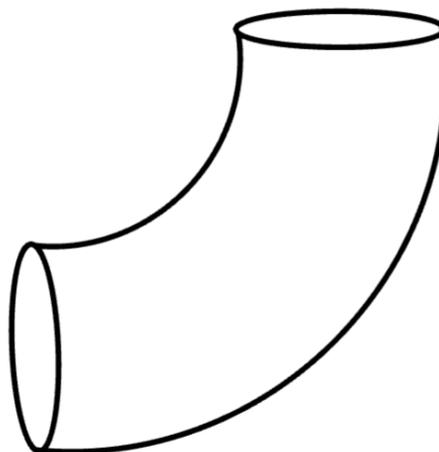


Fonte: Elaborada pelo autor

#### 4.5 Fabricação de uma Tubulação Curva para uma Indústria

Uma tubulação curva refere-se a um segmento de um sistema de tubulação que possui uma forma curva em vez de ser reto. Conexão curvas são peças fabricadas em aço carbono, aço inox e ligas leves e utilizadas para mudar a direção de uma linha de tubulação. As curvas nas tubulações servem a diversos propósitos, incluindo a alteração da direção do fluxo de fluido, acomodação a restrições espaciais e a otimização do layout do sistema.

Figura 15 - Tubulação curva



Fonte: Elaborada pelo autor

Vamos considerar a situação de calcular o volume de material necessário para fabricar uma tubulação curva, usando o método das cascas cilíndricas. Essa aplicação é comum em indústrias onde tubulações curvas são utilizadas para condução de fluidos. Os seguintes dados sobre tal tubulação são expressos a seguir: raio interno da tubulação  $R = 1m$ , raio externo da tubulação, considerando uma espessura de parede constante,  $R + d = 1,2m$ , comprimento da tubulação curva  $L = 10m$ , arco de círculo que a tubulação segue  $\frac{\pi}{4}rad$ . Nosso objetivo é calcular o volume de material necessário para fabricar a tubulação curva.

Primeiramente, a forma da tubulação curva pode ser entendida considerando um elemento infinitesimal de comprimento  $dx$  ao longo da tubulação, localizado a uma distância  $x$  do início da curva. Ao girar esse elemento em torno do eixo da tubulação, é formado um cilindro oco de raio externo  $R + d$  e raio interno  $R$ . O volume da casca cilíndrica infinitesimal pode ser expresso por  $dV = 2\pi x \cdot h \cdot r(x) \cdot dx$ , onde  $h$  é a altura da casca cilíndrica, que é a largura da tubulação.

A altura pode ser calculada como o comprimento do arco correspondente ao elemento  $dx$ . Como a tubulação segue um arco de  $\frac{\pi}{4}$  radianos ao longo do comprimento total, a altura é dada por  $h = \frac{\pi}{4}R$ . Fazendo as devidas substituições temos que:

$$dV = 2\pi x \cdot \frac{\pi}{4}R \cdot (R + d) \cdot dx.$$

Integrando  $dV$  de 0 até  $L$  para obter o volume total de material necessário para fabricar a tubulação curva temos:

$$\begin{aligned} V_{tubulação} &= \int_0^L 2\pi x \cdot \frac{\pi}{4}R \cdot (R + d) \cdot dx = \int_0^{10} 2\pi x \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1 \cdot (1 + 0,2) \cdot dx = \frac{\pi^2}{2} \int_0^{10} 1,2x \, dx = \\ &= \frac{\pi^2}{2} \cdot \left[ 1,2 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^{10} = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{1,2}{2} \cdot (10^2 - 0^2) = 30\pi^2 \, m^3. \end{aligned}$$

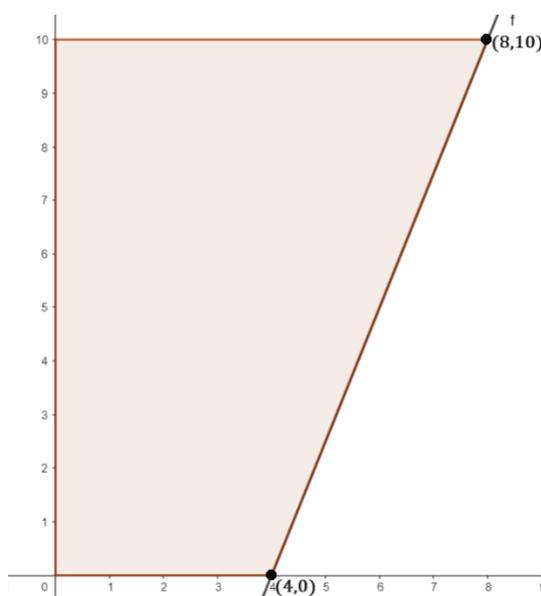
#### 4.6 Volume de um Tanque com Formato de Tronco de Cone

Um tanque com formato de tronco de cone pode ser usado com o intuito de armazenar determinados elementos com maior facilidade, onde a base de maior raio, parte superior desse tronco de cone, representa a capacidade de armazenamento principal e a parte inferior, ou seja, a base de menor raio, representa uma área de descarga para facilitar o escoamento do conteúdo. Iremos calcular o volume desse tanque com formato de tronco de cone invertido.

Como já foi dito, temos que a parte superior será mais larga e a parte inferior será mais estreita. A base maior tem raio  $R_1 = 8m$  e a base menor tem raio  $R_2 = 4m$ . A altura total do tronco é  $H = 10m$ . Iremos aplicar o método das seções transversais para calcular o volume do tronco, onde vamos dividir o tronco em seções transversais infinitesimais, calcular a área de cada seção transversal e, em seguida, integrar essas áreas ao longo da altura para obter o volume total.

Como o raio de cada seção irá variar em relação a altura, primeiramente vamos colocar esse raio  $x$  em função da altura do tronco de cone para qualquer momento. Como podemos observar na figura 13, basta que encontremos a equação da reta que passa pelos pontos  $(8,10)$  e  $(4,0)$ , logo temos que o valor do raio  $x$  será  $x = \frac{2}{5}y + 4$ .

Figura 16 - Raio em função da altura



Fonte: Elaborada pelo autor

Logo, o valor da área da seção transversal, perpendicular a altura do tronco de cone, será  $A(y) = \pi \left(\frac{2}{5}y + 4\right)^2$ . O valor do volume será dado por:

$$\begin{aligned} \int_0^{10} A(y) dy &= \int_0^{10} \pi \left(\frac{2}{5}y + 4\right)^2 dy = \pi \int_0^{10} \left(\frac{4y^2}{25} + \frac{16y}{5} + 16\right) dy = \pi \left(\frac{160}{3} + 160 + 160\right) = \\ &= \frac{1120}{3} \pi m^3. \end{aligned}$$

#### 4.7 Total de Energia Consumida por um Edifício

Vamos considerar uma situação onde é necessário calcular a quantidade total de energia consumida por um edifício ao longo de um determinado intervalo de tempo, com

base em um gráfico que mostra a variação da potência elétrica em kilowatts ao longo do tempo. Suponhamos que a função de potência em função do tempo seja dada por  $P(T) = 2t^2 - 3t + 10$ , onde  $t$  representa o tempo em horas.

A tarefa é determinar a energia total consumida pelo edifício durante um intervalo de tempo específico, por exemplo, de  $t = 1$  até  $t = 5$ . Utilizaremos o método dos retângulos para determinar essa energia total. Iremos dividir o intervalo dado em subintervalos de largura uniforme, calcular a altura da função em cada ponto inicial de subintervalo e multiplicar essa altura pela largura do subintervalo. Por fim, iremos somar essas áreas e obteremos uma aproximação para a energia total consumida.

Uma aproximação para a área será dada pelo seguinte somatório:

$$A \approx \sum_{i=1}^n P(t_i) \cdot \Delta t.$$

Onde,  $\Delta t$  é a largura de cada subintervalo, dada por  $\frac{b-a}{n}$ ,  $a$  e  $b$  são os limites inferior e superior do intervalo e  $n$  é o número de subintervalos. Vamos calcular a energia total consumida pelo edifício no intervalo  $t = 1$  até  $t = 5$ , com  $n = 4$  subintervalos. Logo,  $\Delta t = \frac{5-1}{4} = 1$  e  $\text{Área} \approx P(1) \cdot \Delta t + P(2) \cdot \Delta t + P(3) \cdot \Delta t + P(4) \cdot \Delta t$ .

Substituindo os valores, teremos que a área terá a aproximação:

$$\begin{aligned} \text{Área} \approx & (2 \times 1^2 - 3 \times 1 + 10) \cdot 1 + (2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 10) \cdot 1 + (2 \times 3^2 - 3 \times 3 + 10) \cdot 1 \\ & + (2 \times 4^2 - 3 \times 4 + 10) \cdot 1 = 9 + 12 + 19 + 30 = 70. \end{aligned}$$

Portanto, a energia total consumida pelo edifício no intervalo dado é de aproximadamente 70 kilowatt. Este é um exemplo do método dos retângulos aplicado para calcular a energia total consumida com base na variação da potência elétrica ao longo do tempo.

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

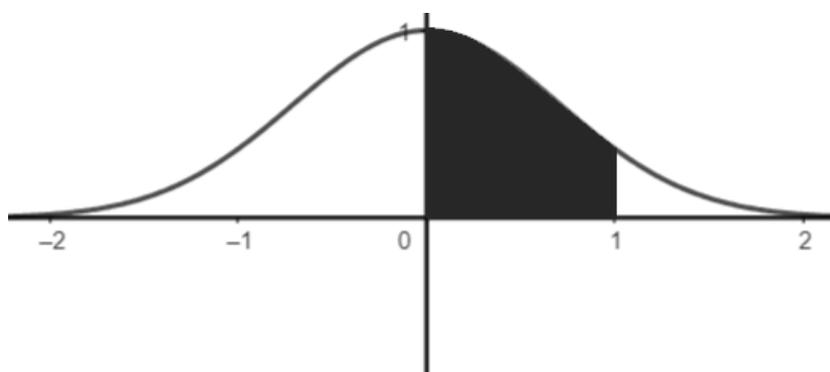
### 5.1 Áreas

A estimativa de áreas sob curvas é uma tarefa fundamental em diversas disciplinas da matemática, ciência e engenharia. Uma variedade de métodos está disponível para realizar essa estimativa, cada um com características distintas em termos de precisão e estabilidade. Neste tópico, exploraremos os resultados obtidos por meio dos métodos de cálculo de áreas, com uma interpretação dos dados, comparação de desempenho, bem como uma avaliação da precisão e estabilidade inerentes a cada método. Essa análise nos permitirá tomar decisões informadas sobre a escolha do método mais apropriado, considerando a complexidade das funções e a precisão desejada em diversas aplicações práticas.

Começando pelo Método dos Retângulos, uma técnica simples e direta para calcular áreas sob curvas. Este método divide a região sob a curva em retângulos de largura uniforme e, em seguida, soma as áreas de cada retângulo. Embora seja um dos métodos mais básicos, é importante compreender suas características e limitações. A precisão deste método varia com a escolha do número de retângulos e a natureza da função, muitas vezes resultando em estimativas que podem subestimar ou superestimar a área real, dependendo da concavidade da curva. Vamos agora ver a aplicação do Método dos Retângulos na aproximação da seguinte integral:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

Figura 17 - Gráfico de  $e^{-x^2}$



Fonte: Elaborada pelo autor

Calculando a integral normalmente obtemos como resposta que  $\int_0^1 e^{-x^2} dx = 0,746824 \dots$

Calculando agora pelo Método dos Retângulos, temos que  $a = 0$  e  $b = 1$ . Tomando  $n = 4$ , temos que  $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$ . Usaremos o ponto médio do intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ .

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &\approx \Delta x \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{4} \left[ f\left(\frac{0 + 0,25}{2}\right) + f\left(\frac{0,25 + 0,5}{2}\right) + f\left(\frac{0,5 + 0,75}{2}\right) + f\left(\frac{0,75 + 1}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left[ f\left(\frac{0,25}{2}\right) + f\left(\frac{0,75}{2}\right) + f\left(\frac{1,25}{2}\right) + f\left(\frac{1,75}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{4} [f(0,125) + f(0,375) + f(0,625) + f(0,875)] = \\ &= \frac{1}{4} (0,98449644 + 0,8688151 + 0,676634 + 0,465043) = \\ &= 0,748747135. \end{aligned}$$

Agora iremos comparar o resultado encontrado com o Método dos Trapézios, a fim de destacar a precisão entre os métodos. Isso nos ajudará a compreender como e quando o Método dos Retângulos pode ser apropriado em aplicações específicas.

Vamos calcular o valor da mesma integral do exemplo anterior, agora usando o Método dos Trapézios. Ou seja, iremos calcular uma aproximação para  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ .

Para usarmos tal métodos temos que a aproximação para a integral é dada por,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left[ f(x_0) + f(x_n) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right],$$

onde  $n$  é o número de subintervalos e  $h = \frac{b-a}{n}$ . Dividindo a integral em  $n = 4$  subintervalos, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &\approx \frac{1-0}{4} [f(0) + f(1) + 2 \cdot [f(0,25) + f(0,5) + f(0,75)]] = \\ &= \frac{0,25}{2} [1 + 0,367879 + 2 \cdot (0,9394131 + 0,778801 + 0,569783)] = \\ &= 0,74298415. \end{aligned}$$

Agora iremos analisar o Método de Simpson, reconhecido por sua alta precisão,

permitindo uma melhor aproximação e comparação com os outros métodos. Para esse método temos que o valor da aproximação será dado por:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

onde  $h = \frac{b-a}{2}$ .

Ou seja,

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &\approx \frac{1-0}{3} [f(0) + 4f(0,5) + f(1)] = \\ &= \frac{0,5}{3} [1 + 4 \cdot 0.778801 + 0.367879] = 0.7471805. \end{aligned}$$

Agora, se usássemos dois intervalos  $[0, \frac{1}{2}]$  e  $[\frac{1}{2}, 1]$  e em cada intervalo aplicarmos a Regra de Simpson, obteríamos a seguinte aproximação:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &\approx \frac{0,25}{3} [f(0) + 4f(0,25) + f(0,5)] + \frac{0,25}{3} [f(0,5) + 4f(0,75) + f(1)] = \\ &= \frac{0,25}{3} (1 + 4 \cdot 0.9394131 + 2 \cdot 0.778801 + 4 \cdot 0.569783 + 0.3678794) = \\ &= 0.74685548. \end{aligned}$$

Obtemos então uma ótima aproximação em relação ao valor da integral  $\int_0^1 e^{-x^2} dx = 0,746824$ .

Disso, podemos falar que o método dos retângulos é o mais simples dos três. Ele divide a área sob a curva em retângulos de largura uniforme e, em seguida, soma as áreas desses retângulos. Quanto mais retângulos forem usados, mais precisa será a estimativa. No entanto, mesmo com um grande número de retângulos, ele pode não ser tão preciso quanto os outros métodos. Os resultados obtidos com o método dos retângulos tendem a subestimar a área real sob a curva se a função for côncava para cima e superestimar se for côncava para baixo.

O método dos trapézios é uma melhoria em relação ao método dos retângulos. Ele divide a área sob a curva em trapézios de largura uniforme e, em seguida, calcula a soma das áreas desses trapézios. Ao considerar a forma da curva, o método dos trapézios oferece estimativas mais precisas do que o método dos retângulos. Quanto mais trapézios são

usados na subdivisão, mais próxima a estimativa fica da área real sob a curva. No entanto, ainda pode haver alguma imprecisão, especialmente em curvas com variações acentuadas.

O método de Simpson é o mais preciso dos três métodos e é baseado na ideia de aproximar a curva por segmentos de parábola. Ele divide a área sob a curva em segmentos de parábola (parábolas de Simpson) e, em seguida, calcula a soma das áreas dessas parábolas. Esse método é altamente preciso e pode fornecer resultados muito próximos da área real sob a curva, mesmo em funções complexas. É particularmente eficaz quando a função é relativamente suave, pois a parábola se ajusta bem à curvatura da função.

Podemos concluir que o método dos retângulos é o mais simples e menos preciso, o método dos trapézios é uma melhoria em relação ao método dos retângulos, e o método de Simpson é o mais preciso dos três. A escolha do método a ser utilizado depende da natureza da função a ser integrada e da precisão desejada. Em muitos casos, o método de Simpson é a escolha ideal quando a alta precisão é necessária, mas requer mais cálculos do que os outros métodos. Por outro lado, o método dos retângulos e o método dos trapézios são mais rápidos de calcular, tornando-os úteis em situações em que a velocidade é mais importante do que a precisão.

## 5.2 Volumes

Conforme temos ciência, os métodos de cálculo de volume amplamente reconhecidos sob as designações de "método das seções transversais" e "método das cascas cilíndricas" são instrumentos que nos permitem a determinação da extensão do espaço ocupado por objetos tridimensionais. Esses métodos se destacam por sua capacidade de revelar medidas que, de outra forma, seriam de difícil determinação através dos meios convencionais disponíveis. Cada um desses métodos oferece uma abordagem única para determinar volumes e possui suas próprias aplicações e benefícios.

Por exemplo, sabemos que o volume  $V$  de uma esfera de raio  $r$  é dado por  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  (STEWART, 2013).

Utilizando o método das seções transversais, podemos demonstrar o motivo do volume ser dado dessa maneira.

Colocando uma esfera de tal maneira que seu centro se localiza na origem, temos que um plano perpendicular ao eixo  $x$  que corta a dada esfera, irá formar círculos de raio  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ . Logo, a área de cada círculo formado assim será dada por

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2).$$

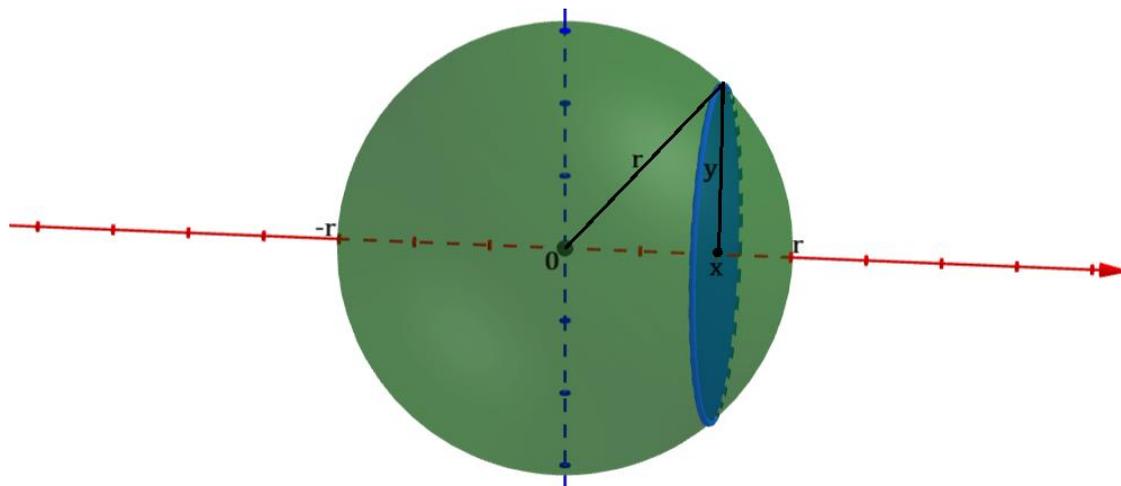
Como já sabemos,

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x'_i) \cdot \Delta x = \int_a^b A(x) dx,$$

onde  $a = -r$  e  $b = r$ . Então,

$$V = \int_{-r}^r \pi(r^2 - x^2) dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \left[ r^2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = 2\pi \left( r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

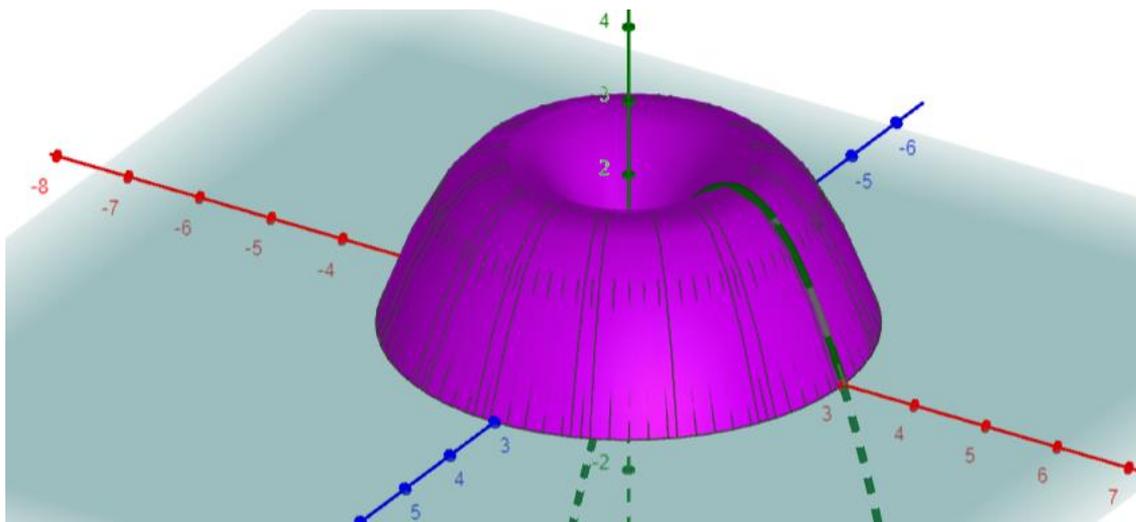
Figura 18 - Esfera de raio  $r$



Fonte: Elaborada pelo autor

Vamos ver agora um exemplo de onde pode ser usado o Método das Cascas Cilíndricas. Imagine que queiramos saber o volume do sólido delimitado pelo eixo  $x$  e a curva  $y = 3x - x^2$ , quando ele é rotacionado em torno do eixo  $y$ . Segue figura.

Figura 19 - Sólido obtido pela rotação da curva  $y = 3x - x^2$  em torno do eixo  $y$



Fonte: Elaborada pelo autor

Pelo método das cascas cilíndricas podemos expressar o volume do sólido por  $V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$ , onde  $a = 0, b = 3$  e  $f(x) = 3x - x^2$ . Logo, a integral fica

$$V = \int_0^3 2\pi x(3x - x^2) dx = 2\pi \int_0^3 (3x^2 - x^3) dx = 2\pi \left[ x^3 - \frac{x^4}{4} \right]_0^3 = 2\pi \left( 27 - \frac{81}{4} \right) = \frac{27\pi}{2}.$$

O método da seção transversal é uma abordagem geralmente usada para calcular o volume de objetos sólidos com formas irregulares ou não-uniformes. Ele envolve a subdivisão do objeto em fatias finas e planas, geralmente perpendiculares a um eixo de referência, como um eixo  $x$ ,  $y$  ou  $z$ . Calcula-se a área da seção transversal de cada fatia e, em seguida, integra-se ao longo do eixo de referência para obter o volume total do objeto. Esse método é particularmente útil quando as dimensões do objeto mudam significativamente ao longo de seu comprimento, tornando difícil a aplicação de outras técnicas.

Por outro lado, o método das cascas cilíndricas é uma abordagem específica para objetos que podem ser rotacionados em torno de um eixo para formar uma forma tridimensional. Esse método se baseia na criação de cascas cilíndricas concêntricas ao redor do eixo de rotação do objeto. Cada casca cilíndrica é tratada como um cilindro oco com uma área de seção transversal constante, e o volume total é calculado somando as contribuições de todas as cascas cilíndricas. Esse método é amplamente usado na determinação de volumes de sólidos de revolução, como cones, esferas, ou objetos com simetria cilíndrica.

Ambos os métodos têm suas próprias vantagens. O método da seção transversal é versátil e pode ser aplicado a uma variedade de objetos, mesmo aqueles com geometrias complexas. Por outro lado, o método das cascas cilíndricas é especialmente eficaz para objetos com simetria rotacional, economizando tempo e esforço no cálculo.

## 6. CONCLUSÃO

Nesta dissertação, investigamos diversos métodos para a determinação de áreas e volumes, destacando especialmente as abordagens dos retângulos, dos trapézios, da regra de Simpson, das seções transversais e das cascas cilíndricas. Essas técnicas desempenham um papel essencial em diversas disciplinas da matemática, ciência e engenharia, constituindo ferramentas valiosas para a resolução de problemas práticos que demandam o cálculo preciso de áreas e volumes em formas complexas.

Ao longo deste trabalho, dedicamo-nos a examinar as características, aplicabilidade e limitações de cada um desses métodos. O método dos retângulos, sendo o mais simples entre eles, revela-se útil para estimativas rápidas, embora sua precisão seja relativamente limitada quando comparada aos demais. O método dos trapézios aprimora a precisão ao considerar a inclinação das curvas, enquanto a regra de Simpson leva esse refinamento a um patamar superior, incorporando parábolas nas estimativas.

No cálculo de volumes, os métodos das seções transversais e das cascas cilíndricas se destacam como ferramentas poderosas para lidar com sólidos tridimensionais complexos. O método das seções transversais desmembra o sólido em seções finas, aproximando o volume total como a soma de infinitas seções transversais. Já o método das cascas cilíndricas utiliza cascas cilíndricas concêntricas para calcular o volume de sólidos de revolução, revelando-se particularmente útil em contextos de geometria com simetria rotacionais.

Além disso, destacamos a importância da integração como uma ferramenta fundamental no contexto desses métodos. A integração, seja por métodos tradicionais ou computacionais, desempenha um papel essencial na resolução de problemas de cálculo de áreas e volumes, fornecendo uma abordagem sistemática para somar infinitos elementos e aproximar valores.

No entanto, é crucial lembrar que a escolha do método adequado depende da natureza do problema em questão. Problemas simples podem ser resolvidos com métodos mais básicos, enquanto problemas complexos exigirão métodos mais avançados. A precisão e a eficiência são fatores determinantes na seleção do método a ser empregado. Além disso, as tecnologias modernas, como software de cálculo numérico, tornam o processo de cálculo mais eficiente e preciso, permitindo a automação de muitos dos cálculos que antes eram realizados manualmente.

Em resumo, os métodos de cálculo de áreas e volumes desempenham um papel crucial em diversas disciplinas, abrangendo desde a matemática pura até a física aplicada e a engenharia. Estes métodos proporcionam soluções elegantes e poderosas para problemas complexos, permitindo uma compreensão e modelagem mais aprofundadas do mundo ao nosso redor. A habilidade de compreender esses métodos e aplicá-los adequadamente é valiosa para qualquer pessoa envolvida em campos que demandam análise quantitativa e modelagem.

À medida que avançamos no século XXI, com novos desafios e oportunidades em todas as áreas da ciência e tecnologia, é evidente que esses métodos continuarão a desempenhar um papel central na resolução de problemas complexos e na busca pelo conhecimento. Portanto, investir no aprofundamento do estudo desses métodos e de suas aplicações é uma estratégia que vale a pena, capacitando-nos a enfrentar os desafios do futuro com confiança e competência matemática.

## REFERÊNCIAS

BRASIL. MARINHA DO BRASIL. DIRETORIA DE PORTOS E COSTAS. **Ensino Profissional Marítimo - Módulo de Estabilidade - Unidade de Estudo Autônomo.**

1.ed.2007

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018.

BURDEN, R. I.; FAIRES, J. D.; BURDEN, A. M. **Análise Numérica.** 3.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Métodos numéricos para engenharia.** 5.ed. Porto Alegre: AMGH, 2011

CUNHA, F. G. M.; CASTRO, J. K. S. **Cálculo Numérico.** Fortaleza: UAB/EFCE, 2010.

STEWART, J. **Cálculo, volume 1.** São Paulo: Cengage Learning, 2013.