



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



PROFMAT

Antônia Fabrícia de Souza

OS TEOREMAS DE PTOLOMEU E MENELAUS, DEMONSTRAÇÕES E APLICAÇÕES

Campina Grande - PB

junho/2024



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



PROFMAT

Antônia Fabrícia de Souza

OS TEOREMAS DE PTOLOMEU E MENELAUS, DEMONSTRAÇÕES E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. José de Arimatéia Fernandes

Campina Grande - PB
junho/2024

Antônia Fabrícia de Souza

OS TEOREMAS DE PTOLOMEU E MENELAUS, DEMONSTRAÇÕES E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

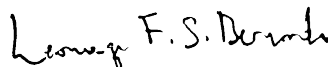
Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 21 de junho de 2024:



Dr. José de Arimatéia Fernandes
Orientador - UFCG



**Dr. Florêncio Ferreira Guimarães
Filho**
Membro Externo - UFES



**Dr. Leomaques Francisco Silva
Bernardo**
Membro Interno - UFCG

Campina Grande - PB
junho/2024

*Dedico este trabalho a minha querida mãe Sebastiana Fernandes de Souza (in
memorian), que fez tanto por mim ao longo da sua vida.*

Agradecimentos

Em primeiro lugar, a Deus, pela minha vida, e por me permitir ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo da realização deste trabalho, que fez com que meus objetivos fossem alcançados, durante todos os meus anos de estudos, por ter permitido que eu tivesse saúde e determinação para chegar até aqui.

À minha esposa Elayne Cristina e à meu filho Luís Eduardo, que sempre estiveram ao meu lado, me incentivaram nos momentos difíceis e compreenderam a minha ausência enquanto eu me dedicava ao longo de toda minha jornada no mestrado e na realização deste trabalho.

Aos meus irmãos e irmãs, Gasteliano, Sandra, Ariano, Fabiano, Fabiely, e minha cunhada quase irmã Eliziane. O apoio e o amor que recebo de vocês são o alicerce das minhas conquistas.

A todos os meus colegas de curso PROFMAT/UFCG turma de 2022, Alexandre, Antônio Marcos, Emidio, Flávia, Geovane, Lucivaldo, Mozart, Pedro, Rejane, Renan, Renato, Ruth, Silvana, Thiago e Tiago Emanuel. Nossa jornada juntos foi marcada por momentos de aprendizado, colaboração e crescimento mútuo. Cada um de vocês contribuiu de maneira única para o meu desenvolvimento, oferecendo apoio, compartilhando conhecimentos e incentivando a perseverança. O espírito de equipe que desenvolvemos ao longo desses períodos fizeram toda a diferença, tornando os desafios mais leves e as vitórias ainda mais gratificantes.

Em especial para minhas colegas e amigas Flávia e Silvana, do mestrado para a vida. Sou grata por cada interação e amizade que formamos, e levo comigo as valiosas lições que aprendi com vocês.

Ao meu professor e orientador Dr. José de Arimatéia Fernandes, primeiramente pelas valiosas contribuições como meu professor na disciplina de Geometria do PROFMAT e por me acompanhar e auxiliar durante todo o processo de desenvolvimento do nosso trabalho.

A todos os professores do PROFMAT/UFCG, em especial os que tive a honra de tê-los como professores: Leomaques Silva, Luiz Antônio, Marcelo Carvalho, Jaime Alves, Daniel Cordeiro e José Fernando. A dedicação e o conhecimento que cada um de vocês trouxe para as aulas foram fundamentais para o meu crescimento acadêmico e profissional. Vocês não só compartilharam seus vastos conhecimentos em matemática, mas também inspiraram a curiosidade, o pensamento crítico e a busca incessante pelo aprendizado.

Aos demais funcionários da UAMAT/UFCG, em particular a dedicada e eficiente secretária Isabela.

À banca examinadora pela dedicação e pelo empenho ao avaliar este trabalho de dissertação. Aguardo suas valiosas observações, críticas construtivas e sugestões para o aprimoramento da minha pesquisa.

Aos meus colegas de trabalho, alunos, gestão e demais funcionários da Escola Estadual Doutor Silvio Bezerra de Melo na cidade de Currais Novos RN, dos quais me despedi no ano de 2023, mas foram essenciais no início dessa trajetória.

Aos meus colegas de trabalho, alunos, gestão e demais funcionários da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Deputado Pedro Pascoal de Oliveira na cidade Juazeirinho PB, pelos quais fui tão bem acolhida no ano de 2022 e acompanharam meu percurso até aqui, com todo apoio e compreensão.

Às pessoas com quem convivi ao longo desses anos de curso, que me incentivaram e que certamente tiveram impacto na minha formação acadêmica contribuindo direta ou indiretamente, dentre essas pessoas destaco meus amigos pessoais e parceiros de estrada da turma 2023 do PROFMAT/UFCG, Eli Carlos, Emanuel e Francicarlos.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela oferta do Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), pelo apoio e investimento ao programa que promove a excelência e a disseminação do saber matemático em nosso país.

Finalmente, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio essencial ao longo do meu mestrado. O financiamento disponibilizado pela CAPES foi fundamental para a realização deste curso. Agradeço pelo compromisso com a promoção da educação de qualidade e pela valorização da formação de profissionais capacitados.

*“As abelhas ... em virtude de uma certa intuição geométrica ...
sabem que o hexágono é maior que o quadrado e o triângulo,
e conterà mais mel com o mesmo gasto de material.”
(Pappus de Alexandria)*

Resumo

Neste trabalho exploramos os Teoremas de Ptolomeu e Menelaus, pouco conhecidos no Ensino Médio, apesar de serem relevantes na Geometria Plana. Apresentamos demonstrações para esses teoremas, aplicações que revelam sua importância na compreensão de resultados conhecidos e outros menos explorados. O Teorema de Ptolomeu, relacionando lados e diagonais de quadriláteros inscritíveis, é discutido em conjunto com suas aplicações em geometria e trigonometria. O Teorema de Menelaus, que trata da colinearidade de pontos em triângulos, é abordado com aplicações como Teorema de Ceva e outros. Ambos os teoremas são de grande utilidade na resolução de problemas geométricos simples ou complexos. A pesquisa também propõe uma Disciplina Eletiva para o Ensino Médio, focada em ampliar a compreensão do aluno em Geometria Plana explorando esses teoremas. Além disso, é destacada a utilização do software Geogebra para visualizar e compreender conceitos geométricos, com construções detalhadas fornecidas para facilitar a replicação em sala de aula. O objetivo geral é apresentar, demonstrar e incentivar o uso dos Teoremas de Ptolomeu e Menelaus, bem como inspirar uma apreciação renovada pela beleza e utilidade da geometria no ensino básico.

Palavras-chave: Teorema de Ptolomeu. Teorema de Menelaus. Geometria Plana. Ensino Médio. Demonstrações matemáticas. Disciplina Eletiva. Geogebra.

Abstract

In this work we explore the Theorems of Ptolemy and Menelaus, little known in High School, despite being relevant in Plane Geometry. We present demonstrations for these theorems, applications that reveal their importance in understanding known results and others that are less explored. Ptolemy's Theorem, relating sides and diagonals of inscribable quadrilaterals, is discussed together with its applications in geometry and trigonometry. Menelaus' Theorem, which deals with the collinearity of points in triangles, is addressed with applications such as Ceva's Theorem and others. Both theorems are very useful in solving simple or complex geometric problems. The research also proposes an Elective Subject for High School, focused on expanding student understanding of Plane Geometry by exploring these theorems. Additionally, the use of Geogebra software to visualize and understand geometric concepts is highlighted, with detailed constructions provided to facilitate replication in the classroom. The overall goal is to present, demonstrate, and encourage the use of the Theorems of Ptolemy and Menelaus, as well as to inspire a renewed appreciation for the beauty and usefulness of geometry in High School.

Keywords: Ptolemy's Theorem. Menelaus' theorem. Flat Geometry. High school. Mathematical demonstrations. Elective Subject. Geogebra.

Lista de ilustrações

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Cláudio Ptolomeu | 19 |
| Figura 2 – Reprodução do mapa de Ptolomeu por Johannes Schnitzer, 1482. | 21 |
| Figura 3 – Menelau de Alexandria | 22 |
| Figura 4 – Triângulo cortado por uma secante | 23 |
| Figura 5 – Ângulo | 24 |
| Figura 6 – (a) | 25 |
| Figura 7 – Prova (a) | 25 |
| Figura 8 – (b) | 26 |
| Figura 9 – Prova (b) | 26 |
| Figura 10 – Prova (c) | 26 |
| Figura 11 – Triângulos Semelhantes | 27 |
| Figura 12 – $ABCD$ convexo e $EFGH$ não convexo | 28 |
| Figura 13 – $ABCD$ inscrito e $EFGH$ não inscrito | 28 |
| Figura 14 – Quadrilátero inscrito | 29 |
| Figura 15 – Marcação do ponto P | 30 |
| Figura 16 – Triângulo Equilátero | 31 |
| Figura 17 – Retângulo inscrito | 32 |
| Figura 18 – Círculo circunscrito ao triângulo ABC | 33 |
| Figura 19 – Segmentos perpendiculares a AB | 34 |
| Figura 20 – Ângulos alternos internos congruentes ($CP//AB$) | 35 |
| Figura 21 – Triângulo ABC inscrito no círculo | 36 |
| Figura 22 – Ilustração de B' e C' | 36 |
| Figura 23 – Seno da soma | 37 |
| Figura 24 – Seno da diferença | 38 |
| Figura 25 – Pentágono regular | 39 |
| Figura 26 – Relação de Stewart | 40 |
| Figura 27 – ABC inscrito em Γ | 40 |
| Figura 28 – Teorema de Hiparco | 42 |
| Figura 29 – $ABCD'$ | 43 |
| Figura 30 – $ABC'D$ | 43 |
| Figura 31 – Triângulo ABC e reta r | 45 |
| Figura 32 – Demonstração I | 46 |
| Figura 33 – M , N e P colineares | 47 |
| Figura 34 – Demonstração II | 48 |
| Figura 35 – Segmento AC | 49 |

| | |
|---|----|
| Figura 36 – Teorema de Desargues | 50 |
| Figura 37 – Triângulo ZAA' | 50 |
| Figura 38 – Triângulo YZA | 51 |
| Figura 39 – Triângulo YZA' | 51 |
| Figura 40 – Eixo de Reflexão | 53 |
| Figura 41 – Triângulo ABC ($\overline{AB} < \overline{AC}$) | 53 |
| Figura 42 – $\overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{QA}$ | 54 |
| Figura 43 – $\overleftrightarrow{BB''} \parallel \overleftrightarrow{AP}$ | 54 |
| Figura 44 – Colinearidade dos pés de certas bissetrizes | 55 |
| Figura 45 – Triângulo XYZ | 56 |
| Figura 46 – Triângulo $X'Y'Z'$ | 58 |
| Figura 47 – O Teorema de Ceva | 59 |
| Figura 48 – Concorrência das medianas | 61 |
| Figura 49 – Concorrência das bissetrizes internas | 61 |
| Figura 50 – Concorrência das bissetrizes internas (ABC Isósceles) | 62 |
| Figura 51 – Concorrência das alturas | 62 |
| Figura 52 – Quadrilátero $ABCD$: Problema 1 | 64 |
| Figura 53 – Quadrilátero $ABCD$: Problema 2 | 65 |
| Figura 54 – Solução Problema 2 | 66 |
| Figura 55 – Triângulo ABC : Problema 3 | 67 |
| Figura 56 – Problema 3 | 67 |
| Figura 57 – Problema 4 | 68 |
| Figura 58 – Problema 4: Solução | 69 |
| Figura 59 – Trapézio isósceles $ABCD$ | 71 |
| Figura 60 – Quadrado $ABCD$ | 72 |
| Figura 61 – Problema 6: Solução | 72 |
| Figura 62 – Problema 7 | 73 |
| Figura 63 – Problema 7: Solução | 73 |
| Figura 64 – Problema 8: Solução | 74 |
| Figura 65 – Imagem criada para apresentação da disciplina aos alunos | 76 |
| Figura 66 – GeoGebra Clássico 6 | 82 |
| Figura 67 – Aplicativos GeoGebra para dispositivos móveis | 82 |
| Figura 68 – Comparação de aplicativos matemáticos GeoGebra | 83 |
| Figura 69 – Elementos básicos | 84 |
| Figura 70 – Disposições | 85 |
| Figura 71 – Construção do Pentágono Regular | 96 |

Sumário

| | | |
|------------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 15 |
| 1.1 | Objetivos | 16 |
| 1.1.1 | Objetivos Gerais | 16 |
| 1.1.2 | Objetivos Específicos | 16 |
| 1.2 | Organização | 17 |
| 2 | RESUMO HISTÓRICO | 19 |
| 2.1 | Ptolomeu | 19 |
| 2.2 | Menelaus | 21 |
| 3 | O TEOREMA DE PTOLOMEU, DEMONSTRAÇÃO E APLICAÇÕES | 24 |
| 3.1 | Tópicos Preliminares | 24 |
| 3.1.1 | Ângulo | 24 |
| 3.1.2 | Teorema do Ângulo Inscrito | 25 |
| 3.1.3 | Semelhança de Triângulos | 27 |
| 3.1.4 | Quadrilátero | 28 |
| 3.1.5 | Quadrilátero Inscritível | 28 |
| 3.2 | Enunciado | 29 |
| 3.3 | Demonstração | 29 |
| 3.4 | Aplicações | 31 |
| 3.4.1 | Teorema de Chadú | 31 |
| 3.4.2 | Teorema de Pitágoras | 32 |
| 3.4.3 | Lei dos Cossenos | 33 |
| 3.4.4 | Seno da soma e da diferença | 34 |
| 3.4.4.1 | Lei dos senos | 35 |
| 3.4.4.2 | Seno da soma | 36 |
| 3.4.4.3 | Seno da diferença | 37 |
| 3.4.5 | Razão Áurea no pentágono regular | 38 |
| 3.4.6 | Teorema de Stewart | 40 |
| 3.4.7 | Teorema de Hiparco | 41 |
| 4 | O TEOREMA DE MENELAUS, DEMONSTRAÇÃO E APLICAÇÕES | 45 |
| 4.1 | Demonstração I | 45 |

| | | |
|------------|---|-----------|
| 4.1.1 | Enunciado: | 45 |
| 4.1.2 | Demonstração: | 45 |
| 4.2 | Demonstração II | 47 |
| 4.2.1 | Definição: Segmento orientado | 47 |
| 4.2.2 | Teorema de Menelaus para segmento orientado | 47 |
| 4.2.3 | Demonstração | 47 |
| 4.3 | Aplicações | 49 |
| 4.3.1 | Teorema de Desargues | 49 |
| 4.3.1.1 | Observação: Eixo de Reflexão | 52 |
| 4.3.2 | Colinearidade entre os pés de bissetrizes | 52 |
| 4.3.2.1 | Teorema da bissetriz | 53 |
| 4.3.2.2 | Colinearidade dos pés de certas bissetrizes | 55 |
| 4.3.3 | Teorema de Pappus | 56 |
| 4.3.4 | O Teorema de Ceva | 58 |
| 4.3.4.1 | Concorrência das medianas, bissetrizes internas e alturas | 60 |
| 5 | ALGUNS PROBLEMAS | 64 |
| 5.1 | Problema 1 | 64 |
| 5.2 | Problema 2 | 65 |
| 5.3 | Problema 3 | 66 |
| 5.4 | Problema 4 | 68 |
| 5.5 | Problema 5 | 70 |
| 5.6 | Problema 6 | 71 |
| 5.7 | Problema 7 | 72 |
| 5.8 | Problema 8 | 74 |
| 6 | UMA PROPOSTA DE ELETIVA | 76 |
| 6.1 | DISCIPLINA ELETIVA | 76 |
| 6.1.1 | TÍTULO | 77 |
| 6.1.2 | COMPONENTE CURRICULAR | 77 |
| 6.1.3 | JUSTIFICATIVA | 77 |
| 6.1.4 | OBJETIVOS | 77 |
| 6.1.5 | CONTEÚDO PROGRAMÁTICO | 77 |
| 6.1.6 | HABILIDADES DESENVOLVIDAS | 78 |
| 6.1.7 | METODOLOGIA | 79 |
| 6.1.8 | RECURSOS DIDÁTICOS | 79 |
| 6.1.9 | PROPOSTA DE CULMINÂNCIA | 79 |
| 6.1.10 | AVALIAÇÃO | 79 |
| 6.1.11 | FASES, METAS E AÇÕES | 79 |

| | | |
|------------|--|-----------|
| 7 | CONSTRUÇÕES NO GEOGEBRA | 81 |
| 7.1 | Sobre o GeoGebra | 81 |
| 7.2 | Instruções preliminares | 84 |
| 7.3 | Construções: Capítulo 3 | 86 |
| 7.3.1 | Figura 14 | 86 |
| 7.3.2 | Figura 15 | 87 |
| 7.3.3 | Figura 16 | 88 |
| 7.3.4 | Figura 17 | 89 |
| 7.3.5 | Figura 18 | 90 |
| 7.3.6 | Figura 19 | 91 |
| 7.3.7 | Figura 20 | 91 |
| 7.3.8 | Figura 21 | 92 |
| 7.3.9 | Figura 22 | 93 |
| 7.3.10 | Figura 23 | 93 |
| 7.3.11 | Figura 24 | 94 |
| 7.3.12 | Figura 25 | 95 |
| 7.3.13 | Figura 26 | 96 |
| 7.3.14 | Figura 27 | 97 |
| 7.3.15 | Figura 28 | 98 |
| 7.3.16 | Figura 29 | 98 |
| 7.3.17 | Figura 30 | 99 |
| 7.4 | Construções: Capítulo 4 | 99 |
| 7.4.1 | Figura 31 | 99 |
| 7.4.2 | Figura 32 | 100 |
| 7.4.3 | Figura 33 | 101 |
| 7.4.4 | Figura 34 | 101 |
| 7.4.5 | Figura 35 | 101 |
| 7.4.6 | Figura 36 | 102 |
| 7.4.7 | Figura 40 | 103 |
| 7.4.8 | Figura 41 | 104 |
| 7.4.9 | Figura 42 | 105 |
| 7.4.10 | Figura 43 | 105 |
| 7.4.11 | Figura 44 | 106 |
| 7.4.12 | Figura 45 | 106 |
| 7.4.13 | Figura 46 | 107 |
| 7.4.14 | Figura 47 | 108 |
| 7.4.15 | Figura 48 | 109 |
| 7.4.16 | Figura 49 | 109 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 7.4.17 | Figura 50 | 110 |
| 7.4.18 | Figura 51 | 111 |
| 8 | CONCLUSÕES | 112 |
| | REFERÊNCIAS | 114 |
| | APÊNDICES | 116 |
| | APÊNDICE A – ACESSO AS CONSTRUÇÕES | 117 |
| | APÊNDICE B – ACESSO AS CONSTRUÇÕES: PROBLEMAS | 119 |
| | APÊNDICE C – SEQUÊNCIA DIDÁTICA | 120 |

1 Introdução

Os teoremas clássicos de Ptolomeu e Menelaus têm sido pouco explorados nos livros didáticos do Ensino Médio, mesmo sendo pilares fundamentais e tendo aplicações em muitos resultados conhecidos da Geometria Plana. Neste Trabalho, exploraremos além de demonstrações para esses importantes teoremas, também algumas aplicações interessantes desses teoremas para demonstrar alguns resultados conhecidos da Geometria Plana, e outros também pouco explorados no ensino básico. Isso mostra que, embora aparentem ser teoremas abstratos, os referidos resultados podem ser muito úteis para ilustrar a Geometria, nos livros didáticos, além dos resultados comumente explorados como semelhança e áreas de triângulos.

O Teorema de Ptolomeu, atribuído ao matemático grego Cláudio Ptolomeu, é uma poderosa ferramenta que nos fornece uma importante relação entre os lados e diagonais de um quadrilátero inscrito. Suas aplicações envolvem conceitos fundamentais da geometria, como o famoso Teorema de Pitágoras, além de também podermos deduzir algumas identidades trigonométricas conhecidas, e demonstrar outros teoremas que trazem relações métricas em um quadrilátero inscrito.

O Teorema de Menelaus, foi escrito e demonstrado pelo matemático e astrônomo grego, Menelaus de Alexandria, por volta do ano 100 e trata dos problemas envolvendo a colinearidade de três pontos dados sobre os lados de um triângulo, incluindo os prolongamentos desses lados. Como aplicação do Teorema de Menelaus, além de importantes teoremas da geometria projetiva, demonstraremos o Teorema de Ceva, devido ao matemático italiano Giovanni Ceva. Como consequência do Teorema de Ceva, provaremos que em um triângulo qualquer, as medianas, as bissetrizes internas e as retas suportes das alturas são concorrentes.

Os Teoremas de Ptolomeu e Menelaus, desempenham papéis significativos na resolução de problemas geométricos complexos e na compreensão da estrutura das figuras geométricas, abrindo um leque de possibilidades a se trabalhar com alunos de diferentes níveis, nesse contexto apresentamos aqui também alguns problemas e suas soluções que ilustram a relevância e a versatilidade desses teoremas na resolução de problemas, assim como uma proposta estrutural de Disciplina Eletiva a ser trabalhada preferencialmente na 1ª série do Ensino Médio, que explore conceitos básicos da Geometria Plana e se estenda para os Teoremas históricos já citados.

Ao longo do desenvolvimento surgiu a necessidade constante de construções de figuras geométricas próprias que representassem o que estava sendo tratado de forma clara e intuitiva, por esse motivo está relatado detalhadamente as construções realizadas com o software Geogebra, além de uma breve introdução ao mesmo, para que o leitor

possa replicar em futuras aplicações em sala de aula. O Geogebra, como um software de geometria dinâmica, pode ser usado para ilustrar e explorar os Teoremas de Ptolomeu e Menelaus, facilitando a compreensão dos conceitos e permitindo a resolução de problemas de forma mais intuitiva e eficiente.

Esperamos que a pesquisa desenvolvida nesse Trabalho possa mostrar ao leitor interessado no estudo da Geometria Plana, a nível de Ensino Médio, que alguns resultados, aparentemente, abstratos podem ter aplicações em resultados conhecidos e, nesse sentido, o leitor poderá conhecer algumas demonstrações diferentes de resultados bem conhecidos, como também passar a conhecer se for o caso. É esperado também que esta dissertação não apenas enriqueça o conhecimento do leitor sobre os Teoremas de Ptolomeu e Menelaus, mas que além disso inspire uma apreciação renovada pela beleza e pela utilidade da geometria, servindo como incentivo para a propagação destes no ensino básico.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivos Gerais

Apresentar os Teoremas de Ptolomeu e Menelaus, explorando suas demonstrações matemáticas, aplicações e resolução de problemas geométricos diversos, além de disponibilizar um estudo sobre a utilização do software Geogebra como ferramenta complementar para a compreensão e visualização desses conceitos. Com foco em incentivar professores de matemática do Ensino Médio, a expor e explorar estes teoremas em sala de aula com seus alunos.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Executar um levantamento bibliográfico sobre Ptolomeu e Menelaus, incluindo resumo histórico e contribuições para a matemática e outras áreas;
- Apresentar as demonstrações detalhadas dos Teoremas de Ptolomeu e Menelaus, de forma clara e com linguagem acessível, priorizando os fundamentos matemáticos e as implicações geométricas;
- Expor algumas aplicações dos Teoremas de Ptolomeu e Menelaus, nas demonstrações de outros teoremas também relevantes da geometria;
- Desenvolver uma sequência de problemas que utilizem os Teoremas de Ptolomeu e Menelaus em suas soluções, incentivando o leitor a aplicar esses conceitos em novos contextos e situações na resolução de problemas;

- Elaborar uma proposta de disciplina eletiva para ser oferecida no Ensino Médio, que aborda a geometria plana de modo amplo abrangendo os Teoremas de Ptolomeu e Menelaus, incluindo suas demonstrações, aplicações e o uso do software Geogebra como ferramenta de ensino;
- Definir os objetivos de aprendizagem, o conteúdo programático e a metodologia de ensino para a disciplina eletiva proposta, considerando diferentes abordagens pedagógicas e estratégias de ensino-aprendizagem;
- Contribuir para o avanço do ensino de matemática, incrementando uma possibilidade para a inclusão dos Teoremas de Ptolomeu e Menelaus no currículo escolar, por meio de disciplina eletiva;
- Dedicar um capítulo específico à utilização do software Geogebra como ferramenta de visualização e exploração dos Teoremas de Ptolomeu e Menelaus suas aplicações e problemas, com introdução, instruções e passo a passo das construções utilizadas no trabalho;
- Favorecer a divulgação do conhecimento matemático, promovendo uma compreensão ampla e aprofundada dos Teoremas de Ptolomeu e Menelaus, bem como do potencial do software Geogebra como recurso educacional.

1.2 Organização

Com a intenção de que os objetivos expostos na Seção 1.1 sejam alcançados, este trabalho foi estruturado em oito capítulos, sendo o Capítulo 1 dedicado as considerações iniciais, apresentação do tema da dissertação e sua importância, objetivos gerais e específicos do trabalho, estruturação dos capítulos e visão geral do conteúdo abordado.

No Capítulo 2 apresentamos o Resumo Histórico, com contextualização histórica de vida e obras dos matemáticos Ptolomeu e Menelaus, breve revisão de suas contribuições e influências na geometria da época e na geometria moderna.

O Capítulo 3 é dedicado ao Teorema de Ptolomeu, onde traremos a demonstração do mesmo por meio de semelhança de triângulos. Este capítulo também compreende as aplicações do teorema de Ptolomeu, tratando-se de: Teorema de Chádú; Teorema de Pitágoras; Lei dos Cossenos; Seno da soma e da diferença; Razão Áurea no pentágono regular; Teorema de Stewart; Teorema de Hiparco.

O Capítulo 4 abordará duas demonstrações do Teorema de Menelaus ambas por semelhança de triângulos, sendo que a segunda consideramos os segmentos orientados e obtemos a forma mais completa deste teorema onde vale a recíproca. Como aplicações do Teorema de Menelaus provamos neste capítulo o Teorema de Desargues,

Colinearidade entre os pés de certas bissetrizes, o Teorema de Pappus e o Teorema de Ceva.

No Capítulo 5 serão apresentados oito problemas que utilizam os Teoremas de Ptolomeu e Menelaus em suas soluções, foram selecionados, adaptados e/ou elaborados de forma que explorem diversos conceitos geométricos e matemáticos, convidando o leitor a aplicar seus conhecimentos para resolvê-los, podendo também serem explorados em sala de aula. Cada problema está acompanhado de sua resolução detalhada.

Já o Capítulo 6 conterá uma proposta detalhada para uma disciplina eletiva, que inclui os Teoremas de Ptolomeu e Menelaus no Ensino Médio, estruturada em: Justificativa; Objetivos; Conteúdo Programático; Habilidades Desenvolvidas; Metodologia; Recursos Didáticos; Proposta de Culminância; Avaliação; Fases, Metas e Ações.

Temos também o Capítulo 7 dedicado ao Software Geogebra, nele tratamos detalhadamente sobre esta ferramenta educacional riquíssima em funções e aplicações, com instruções para facilitar sua utilização. Foi feito o passo a passo de cada construção das figuras presentes no terceiro e quarto capítulo, não detalhamos as construções das figuras utilizadas nos problemas do quinto capítulo, pois as instruções seriam repetitivas por serem semelhantes as já presentes, mas disponibilizamos todos os acessos nos apêndices A e B.

Por fim, serão apresentadas as conclusões do trabalho no Capítulo 8, fazendo uma recapitulação dos principais pontos abordados na dissertação, destacando os principais resultados, contribuições e perspectivas para pesquisas futuras e possíveis extensões do trabalho na área, bem como considerações finais sobre o uso do Geogebra e a proposta de disciplina eletiva.

2 Resumo Histórico

Neste capítulo apresentaremos um breve resumo histórico acerca das contribuições intelectuais e biografias dos renomados Geômetras alvos da nossa pesquisa, indo ao primeiro século da era comum com Ptolomeu e seu contemporâneo Menelau, no Egito antigo. As principais fontes utilizadas para a finalidade deste capítulo são Boyer (1974), Aaboe (2013) e Roque e Pitombeira (2012).

2.1 Ptolomeu

Cláudio Ptolomeu (Ptolomaeus, Klaudios Ptolemaios, Ptolomeu) foi um cientista, astrônomo, matemático e geógrafo grego que viveu no Egito, a data de seu nascimento e morte não têm registro exato, mas devido as suas observações em Alexandria que datam de 127 a 151 E.C. (Era Comum), estima-se que Ptolomeu nasceu em torno do fim do primeiro século da era comum, assim viveu entre aproximadamente 90 e 168 E.C.

Figura 1 – Cláudio Ptolomeu



Fonte: Wikipédia

Ele atuou em diversas áreas de conhecimento, ficando mais conhecido por suas contribuições no campo da astronomia e pela sua obra *Almagesto*, que se tornou uma referência fundamental na astronomia ocidental durante a Idade Média e o Renasci-

mento. A astronomia era um fascínio seu, como pode-se perceber em um trecho retirado de Boyer (1974, p.116) que é atribuído a Ptolomeu:

Quando eu traço a meu prazer os movimentos dos corpos celestiais eu já não toco a terra com os meus pés: eu estou na presença do próprio Zeus e me alimento de ambrosia, o manjar dos deuses.

A obra de Ptolomeu que ficou conhecida como *Almagesto* (“maior”), na verdade era um conjunto de tratados escritos em treze livros que recebeu o título de *Syntaxis matemática* (Síntese matemática), é considerada segundo Boyer (1974, p.119) “de longe a mais influente e significativa obra trigonométrica da antiguidade”, e acabou por ser frequentemente chamada de *Almagesto* devido existir uma outra coleção de tratados astronômicos, escrito por outros autores, que era conhecida como “menor” e sendo assim a *Syntaxis matemática* de Ptolomeu a “maior”. Neste livro Ptolomeu não desenvolve apenas seus modelos astronômicos, como também as ferramentas matemáticas necessárias para a astronomia, entre elas a geometria elementar e a trigonometria. Esta obra baseia-se e referencia as ideias de outros estudiosos da época, como Eratóstenes que teve detalhes de seu tratado *Sobre a medida da Terra* preservados graças a obras como a de Ptolomeu e outros, e baseando-se principalmente nas obras de Hiparco de Niceia ao que se refere inclusive ao uso do círculo de 360°, semelhança de métodos e na construção de sua tabela de cordas.

Segundo Aaboe (2013, p.128):

[...] Ptolomeu, diferentemente de Euclides, reconheceu as realizações de seus antecessores generosa e precisamente, de maneira que nosso conhecimento de astronomia pré-ptolomaica é mais rico e mais firme do que da matemática pré-euclidiana. Pela mesma razão podemos identificar bem as contribuições do próprio Ptolomeu.

Ptolomeu viveu na cidade de Alexandria, não há registro de que ao longo de sua vida tenha estado em outro lugar, esta cidade era um importante centro intelectual na antiguidade, onde teve acesso a vastos conhecimentos acumulados pelos estudiosos gregos e egípcios. Em seu trabalho, Ptolomeu apresentou um modelo geocêntrico do sistema solar, no qual a Terra está no centro e os planetas, incluindo o Sol e a Lua, orbitam ao seu redor em órbitas circulares, esta teoria prevaleceu durante 1400 anos, sendo substituída pela teoria heliocêntrica no século XV por Nicolas Copérnico (1473-1543) que propõe que o sol é o centro do universo. No entanto, é importante reconhecer que as contribuições de Ptolomeu desempenharam um papel crucial na preservação e transmissão do conhecimento astronômico da antiguidade para as gerações posteriores.

Além da astronomia, Ptolomeu também contribuiu significativamente para a geografia. Ele escreveu o *Guia Geográfico* ou *Geografia*, uma obra em vários volumes que compilava conhecimentos sobre a localização de diferentes regiões do mundo conhecido

na época. Embora muitas das informações contidas na obra *Geografia* fossem imprecisas e baseadas em relatos de viajantes, ela teve uma grande influência na cartografia medieval e renascentista.

Figura 2 – Reprodução do mapa de Ptolomeu por Johannes Schnitzer, 1482.



Fonte: Delgado, Frensel e Crissaff (2017)

Outras obras de Ptolomeu foram a *Harmônica*, que foi sua contribuição para a música com a teoria matemática de sons, e o *Tetrabiblos* na área da Astrologia, onde acredita-se que a posição dos astros determinam e/ou influenciam o comportamento do indivíduo, em sua época a Astrologia era considerada uma ciência rigorosa tal qual a Astronomia.

2.2 Menelaus

Menelau de Alexandria (70-140 E.C.), nasceu em Alexandria no Egito e posteriormente viveu em Roma, dedicou-se a Astronomia e a Geometria, foi um dos últimos geômetras gregos que aplicou a geometria esférica à astronomia. Ele é mais conhecido pelo teorema que trataremos neste trabalho e que recebe seu nome.

Apesar de que pouco conheçamos sobre a vida de Menelau de Alexandria, há registros de Ptolomeu sobre observações astronômicas feitas por Menelau em Roma, dentre estas observações está a ocultação da estrela Beta Scorpii pela lua. É chamado de Menelau de Alexandria por outros estudiosos que vieram depois dele e fizeram comentários sobre seu trabalho como Pappus (290 – 350 E.C.) e Proclus (411 – 485 E.C.).

Figura 3 – Menelau de Alexandria



Fonte: Wikipédia

Pappus é o último dos grandes geômetras gregos e um de seus teoremas é citado como base da geometria projetiva moderna, Proclus foi um filósofo grego que se tornou chefe da Academia de Platão.

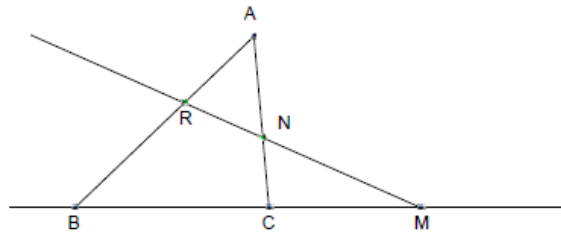
Há registros e semelhanças de métodos que apontam, que Menelau deu continuidade aos trabalhos de Hiparco de Niceia sobre trigonometria, dentre as obras dele estão *O Livro das Proposições Esféricas* (tratado *Sphaerica*), *Sobre o Conhecimento dos Pesos e a Distribuição de Diferentes Corpos*, três livros sobre *Elementos de Geometria* com quantidade significativa de teoremas e *O Livro sobre o Triângulo*. Destas obras, unicamente o seu tratado *Sphaerica*, alcançou a época atual, em três volumes em relação a esféricos, que se preservou devido a uma tradução árabe e é o trabalho mais antigo, até onde se sabe, sobre trigonometria esférica.

Segundo Boyer (1974) o Livro I do tratado de *Sphaerica*, constitui uma base teórica para o estudo dos triângulos esféricos, como Euclides fez para os triângulos planos, teoremas usuais de congruência e teoremas sobre triângulos isósceles, entre outros, Menelau fez um análogo para triângulos esféricos. Além de apresentar outros resultados para os triângulos esféricos dos quais não existe análogo na geometria plana. O Livro II, trata de teoremas de interesse da astronomia, Boyer (1974) destaca que este livro “é de pouco interesse matemático”. Já o Livro III aborda o desenvolvimento da trigonometria esférica, neste livro que se encontra o Teorema de Menelau objeto da nossa pesquisa, Menelau também produziu uma versão triangular esférica deste teorema, é provável que este teorema para o caso de triângulos planos já fosse conhecido por Euclides, e tenha se perdido junto com sua obra *Porismas*.

Roque e Pitombeira (2012, p.137) também comenta sobre Menelau que:

Ele usou, sem demonstrar, o teorema de geometria plana conhecido hoje como teorema de Menelau: Se o triângulo ABC é cortado por uma secante que intersecta seus três lados [...] então $NA \times RB \times MC = NC \times RA \times MB$.

Figura 4 – Triângulo cortado por uma secante



Fonte: Roque e Pitombeira (2013)

O'Connor e Robertson (1999) comentam que:

Vários escritores árabes acreditam que Menelau escreveu um texto sobre mecânica. Afirmar-se que o texto estudava as balanças estudadas por Arquimedes e as idealizadas pelo próprio Menelau. Em particular, Menelau estava interessado em gravidades específicas e na análise de ligas.

Assim sabemos que os trabalhos de Menelau não foram resumidos apenas à Geometria.

Menelau, assim como Ptolomeu e outros grandes estudiosos da antiga civilização mediterrânea, participou da escola de Alexandria, onde desenvolveu e propagou boa parte de seus trabalhos, vindo a falecer por volta do ano 140 na mesma cidade em que nasceu.

3 O Teorema de Ptolomeu, demonstração e aplicações

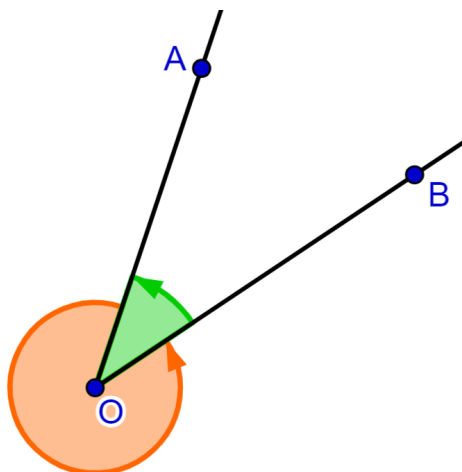
Este capítulo é dedicado ao Teorema de Ptolomeu, seguindo com uma demonstração para o mesmo e algumas aplicações. O teorema que apresentaremos a seguir nos fornece uma relação entre as medidas dos lados e das diagonais de um quadrilátero inscrito. Para uma melhor compreensão dos conceitos utilizados nas demonstrações, tanto do Teorema de Ptolomeu quanto em suas aplicações, abordaremos alguns tópicos preliminares.

3.1 Tópicos Preliminares

3.1.1 Ângulo

Definição 3.1. ***Ângulo** é uma região delimitada por duas semirretas que partem do mesmo ponto. Dadas as semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , um ângulo de vértice O e lados \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} é uma das regiões limitadas por \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} como mostra a figura 5.*

Figura 5 – Ângulo



Fonte: Autora

Definição 3.2. *A todo **ângulo** esta associada uma **medida** da região do plano que ele ocupa. A medida de um ângulo é um número real positivo x , com unidade de medida em graus, tal que $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.*

Observação 3.1. *Na figura 5 tem-se $\angle AOB + \angle BOA = 360^\circ$. $\angle AOB$ (em laranja) é um ângulo maior que 180° e $\angle BOA$ (em verde) é um ângulo menor que 180° , con-*

sideramos nessa notação o sentido anti-horário, de agora em diante quando usarmos a notação $\angle AOB$ estaremos nos referindo ao ângulo menor que 180° , exceto quando deixado claro que é o contrário.

3.1.2 Teorema do Ângulo Inscrito

Definição 3.3. Um **ângulo inscrito** num círculo é um ângulo do qual o vértice é um ponto do círculo e os lados são duas cordas do mesmo círculo.

Teorema 3.1 (Teorema do Ângulo Inscrito). Se AB e AC são cordas de um círculo de centro O , então a medida do ângulo inscrito $\angle BAC$ é igual a metade da medida do ângulo central $\angle BOC$, isto é:

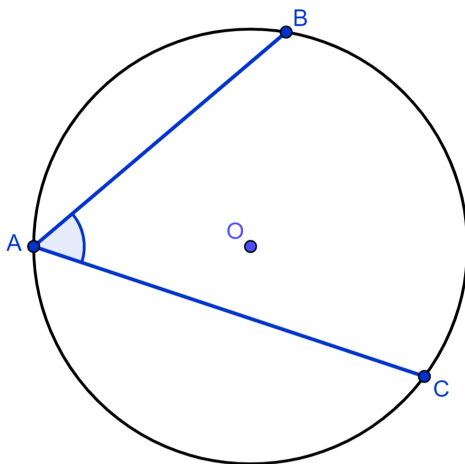
$$\angle BOC = 2\angle BAC.$$

Demonstração. Dividiremos em três casos:

(a) O ângulo $\angle BAC$ contém o centro O em seu interior (figura 6):

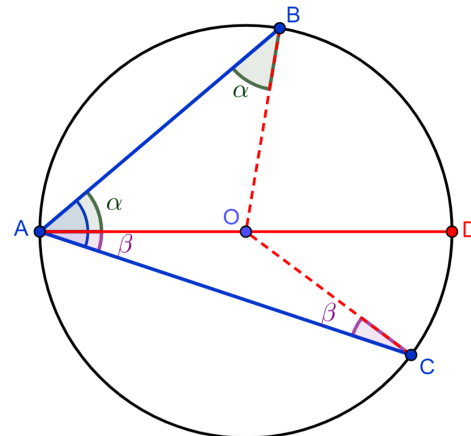
Tracemos \overline{AD} diâmetro do círculo de centro O , e os raios \overline{OB} e \overline{OC} , assim tem-se $\triangle ABO$ e $\triangle AOC$ isósceles de bases, respectivamente, AB e AC , consequentemente $\angle OAB = \angle ABO = \alpha$ e $\angle OCA = \angle CAO = \beta$, como mostra a figura 7.

Figura 6 – (a)



Fonte: Autora

Figura 7 – Prova (a)



Fonte: Autora

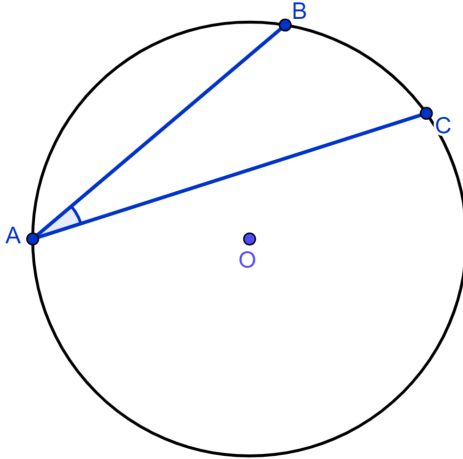
Segue-se, que $\angle BAC = \alpha + \beta$ e, pelo teorema do ângulo externo de um triângulo, que $\angle DOB = \alpha + \alpha = 2\alpha$ e $\angle COD = \beta + \beta = 2\beta$. Logo:

$$\angle BOC = \angle DOB + \angle COD = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2\angle BAC.$$

(b) O ângulo $\angle BAC$ não contém o centro O em seu interior (figura 8):

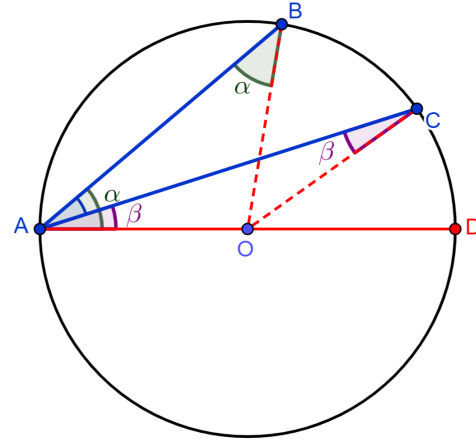
De modo análogo a prova anterior, traçando \overline{AD} , \overline{OB} e \overline{OC} , temos $\triangle ABO$ e $\triangle AOC$ isósceles de bases, respectivamente, AB e AC , assim $\angle OAB = \angle ABO = \alpha$ e $\angle OAC = \angle ACO = \beta$ (figura 9).

Figura 8 – (b)



Fonte: Autora

Figura 9 – Prova (b)



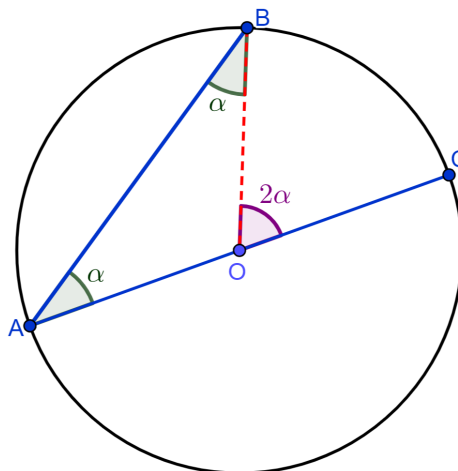
Fonte: Autora

Segue-se, que $\angle BAC = \alpha - \beta$, novamente pelo teorema do ângulo externo, que $\angle DOB = 2\alpha$ e $\angle COD = 2\beta$. Logo:

$$\angle BOC = \angle DOB - \angle COD = 2\alpha - 2\beta = 2(\alpha - \beta) = 2\angle BAC.$$

(c) O centro O está sobre um dos lados do ângulo $\angle BAC$:

Figura 10 – Prova (c)



Fonte: Autora

Sem perda de generalidade, consideremos \overline{AC} como um diâmetro do círculo de centro O . Traçando o raio \overline{OB} , temos $\angle OAB = \angle ABO = \alpha$ e, pelo teorema do ângulo externo, $\angle BOC = 2\alpha$ (figura 10). Logo:

$$\angle BOC = 2\alpha = 2\angle OAB = 2\angle BAC.$$

■

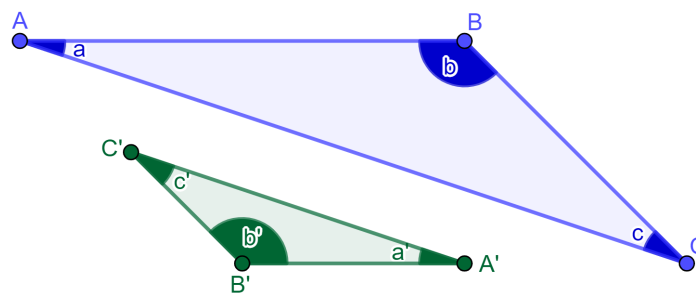
Uma consequência do teorema acima é que ângulos inscritos determinados por um mesmo arco, ou corda, têm mesma medida, isto é, são congruentes.

3.1.3 Semelhança de Triângulos

Dois triângulos são semelhantes se existir uma correspondência vértice a vértice, de modo que os ângulos correspondentes sejam congruentes, e os comprimentos dos lados correspondentes sejam proporcionais.

Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes:

Figura 11 – Triângulos Semelhantes



Fonte: Autora

- $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$;
- $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$.

Usamos a notação $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Critérios de semelhança de triângulos:

- Critério AA

Dois quaisquer triângulos são semelhantes se tiverem dois ângulos correspondentes geometricamente iguais (o terceiro ângulo é necessariamente igual, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180°).

- Critério LAL

Dois quaisquer triângulos são semelhantes se tiverem dois lados correspondentes diretamente proporcionais e os ângulos correspondentes, adjacente a estes lados, forem congruentes.

- Critério LLL

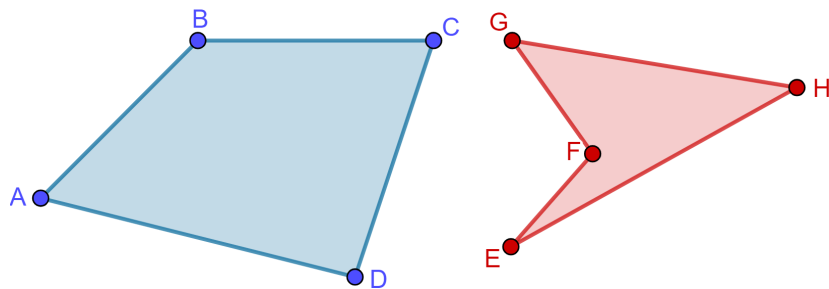
Dois quaisquer triângulos são semelhantes se tiverem os três lados correspondentes diretamente proporcionais.

3.1.4 Quadrilátero

Definição 3.4. *Quadrilátero* é um polígono de quatro lados e quatro vértices, onde dois lados têm um único vértice em comum

Definição 3.5. Um *quadrilátero* é dito **convexo** quando, ao tomarmos dois pontos quaisquer distintos A e B no seu interior, o segmento \overline{AB} está totalmente no interior do quadrilátero.

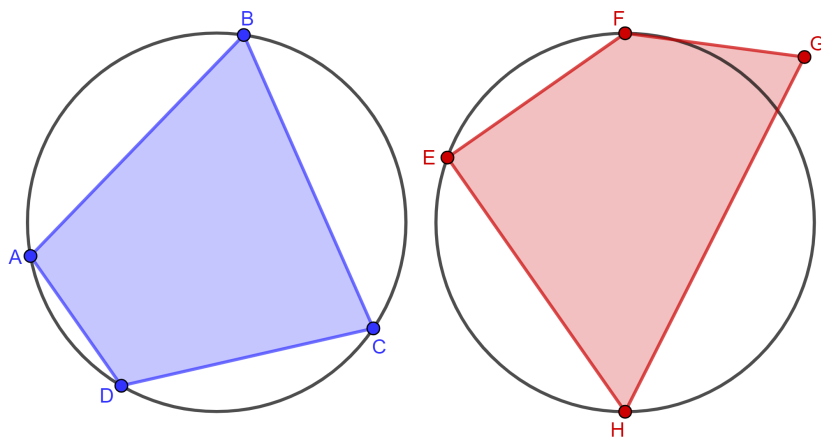
Figura 12 – $ABCD$ convexo e $EFGH$ não convexo



Fonte: Autora

3.1.5 Quadrilátero Inscritível

Figura 13 – $ABCD$ inscritível e $EFGH$ não inscritível



Fonte: Autora

Definição 3.6. Um **quadrilátero** é chamado de **inscritível** se todos os seus vértices pertencem a uma mesma circunferência. Em outras palavras, um quadrilátero é inscritível se ele pode ser inscrito em uma circunferência.

3.2 Enunciado

Se $ABCD$ é um quadrilátero inscritível de diagonais AC e BD , então

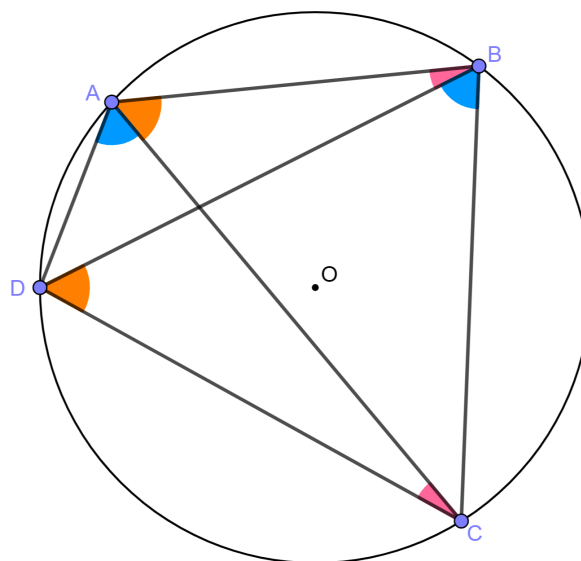
$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

O enunciado acima se refere ao teorema, conhecido como, de Ptolomeu, apesar de que segundo Aaboe (2013) tenha sido descoberto muito antes de sua época, sendo o real propósito de Ptolomeu, em relação a este teorema, a possibilidade de aplicá-lo na construção da *Tabela de Cordas* que encontra-se na sua obra *Almagesto*. A seguir veremos a prova deste teorema por meio de semelhança de triângulos, vale ressaltar que existe outras diversas formas de demonstrar esse teorema, porém esse não é o objetivo deste trabalho, a prova por semelhança de triângulos é uma demonstração que poderia ser exposta tranquilamente a alunos de Ensino Médio da Educação Básica, por esse motivo foi a escolhida para ser exposta.

3.3 Demonstração

Seja $ABCD$ um quadrilátero nas condições do enunciado como mostra a Figura 14.

Figura 14 – Quadrilátero inscritível



Fonte: Autora

Inicialmente observemos que,

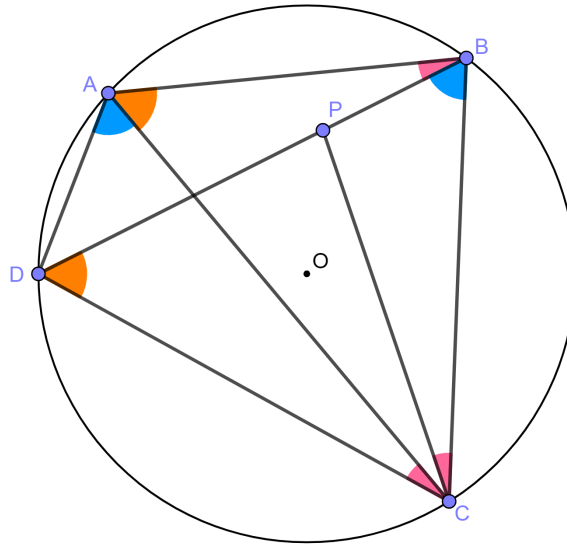
- (I) $\angle ABD = \angle ACD$ por serem ângulos determinados pelo arco menor AD ;
- (II) $\angle BAC = \angle BDC$ por serem ângulos determinados pelo arco menor BC ;
- (III) $\angle CAD = \angle CBD$ por serem ângulos determinados pelo arco menor CD .

Agora marcaremos o ponto P na diagonal BD de modo que,

- (IV) $\angle BCP = \angle ACD$

(consequentemente de (I) $\angle BCP = \angle ABD$ também). Veja Figura 15.

Figura 15 – Marcação do ponto P



Fonte: Autora

Notemos que,

- (V) $\angle ACB = \angle DCP$, pois

$$\angle ACB = \angle ACP + \angle PCB = \angle ACP + \angle ACD = \angle DCP.$$

De (III) e (IV) temos a semelhança pelo caso AA dos triângulos ACD e BCP , segue-se que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BP}} \Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{BP} = \overline{AD} \cdot \overline{BC}.$$

De (II) e (V) temos a semelhança dos triângulos ABC e DPC , também pelo caso AA, daí

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DP}} \Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{DP} = \overline{AB} \cdot \overline{CD}.$$

Somando ambos os membros das relações obtidas através das semelhanças que citamos anteriormente, obtemos:

$$\overline{AC} \cdot \overline{BP} + \overline{AC} \cdot \overline{DP} = \overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \overline{AC} \cdot (\overline{BP} + \overline{DP}) &= \overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} \\ \Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{BD} &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC},\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

3.4 Aplicações

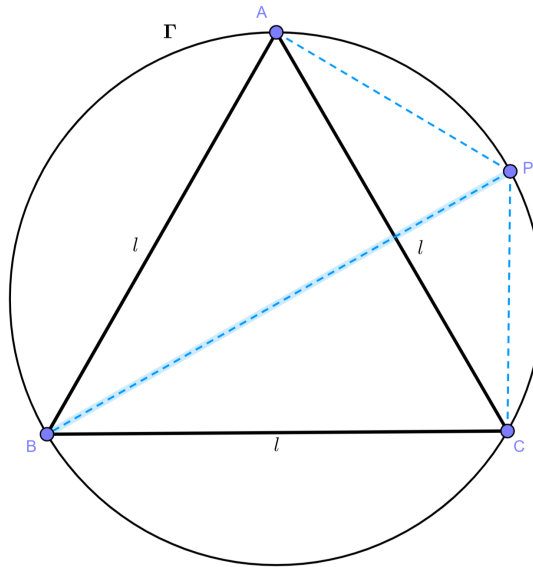
3.4.1 Teorema de Chadú

Um corolário imediato do Teorema de Ptolomeu, é o caso para um triângulo equilátero, também conhecido na literatura como “Teorema de Chadú”.

Seja ABC um triângulo equilátero de lado l . Sendo P um ponto qualquer no arco menor AC , temos que:

$$\overline{PB} = \overline{PA} + \overline{PC}$$

Figura 16 – Triângulo Equilátero



Fonte: Autora

De fato, operando o Teorema de Ptolomeu no quadrilátero $ABCP$, obtém-se

$$\begin{aligned}\overline{AC} \cdot \overline{PB} &= \overline{PA} \cdot \overline{BC} + \overline{PC} \cdot \overline{AB} \\ \Rightarrow l \cdot \overline{PB} &= \overline{PA} \cdot l + \overline{PC} \cdot l \\ \Rightarrow \overline{PB} &= \overline{PA} + \overline{PC}. \blacksquare\end{aligned}$$

3.4.2 Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras pode ser obtido do Teorema de Ptolomeu, isto é, a conhecida relação de igualdade entre o quadrado da hipotenusa e a soma dos quadrados dos catetos, de um triângulo retângulo, que leva o nome de Pitágoras¹, pode ser tratado como um caso particular do Teorema de Ptolomeu aplicado a um retângulo.

Seja $ABCD$ um retângulo qualquer, sabemos que $ABCD$ é inscritível, pois

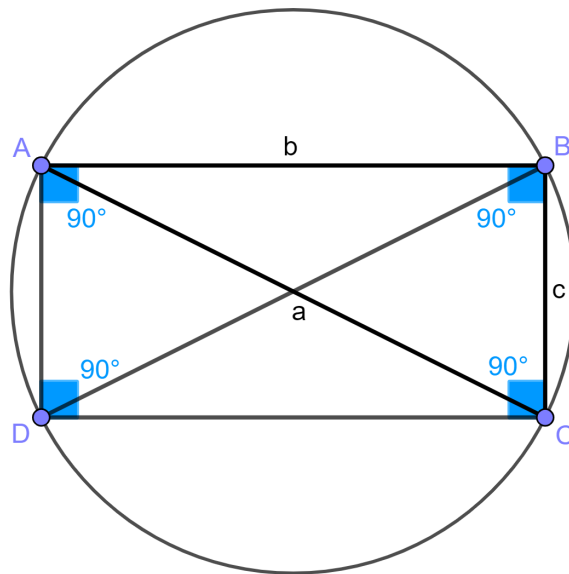
$$\angle ABC + \angle ADC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

que é uma condição necessária e suficiente para que um quadrilátero seja inscritível.

Proposição 3.39 (MUNIZ NETO, 2013).

Consideremos, $\overline{AB} = b$, $\overline{BC} = c$ e a diagonal $\overline{AC} = a$, lembremos que em um retângulo os lados opostos têm a mesma medida e as diagonais também, dessa forma $\overline{AB} = \overline{CD} = b$, $\overline{BC} = \overline{AD} = c$ e $\overline{AC} = \overline{BD} = a$.

Figura 17 – Retângulo inscrito



Fonte: Autora

Agora aplicando o Teorema de Ptolomeu ao retângulo $ABCD$, obtemos:

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC},$$

$$\Rightarrow a \cdot a = b \cdot b + c \cdot c,$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2. \blacksquare$$

¹Segundo o site do Museu da Matemática UFMG:

Apesar do nome deste famoso teorema, Pitágoras não foi seu descobridor, a prova de que já era conhecido antes dele vem dos babilônios

e data de 1800 a.C. Indianos, egípcios e babilônios já usavam essas triplas de números, há pelo menos mil anos. Os hindus, por exemplo, os utilizavam entre 800 e 600 a.C, para desenhar triângulos e trapézios, consideradas figuras nobres, nos altares de cemitérios, em reverência aos deuses.

3.4.3 Lei dos Cossenos

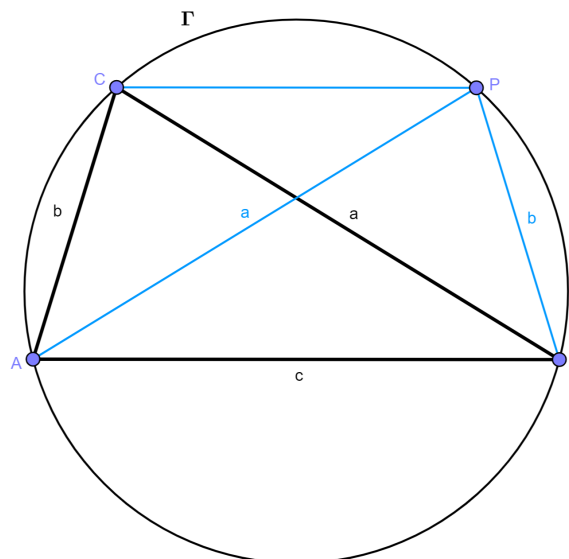
Dado um triângulo qualquer ABC de lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$, a lei dos cossenos nos fornece a relação:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}.$$

O Teorema de Ptolomeu é uma ferramenta bem interessante para se demonstrar a lei dos cossenos para um triângulo qualquer.

Seja ABC um triângulo de lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$. Sendo Γ (se lê gama) o círculo circunscrito ao triângulo ABC , marcaremos em Γ o ponto P de modo que $AP = BC = a$ e $BP = AC = b$, a existência de tal ponto P esta garantida, pois o trapézio isósceles da Figura 18 é inscritível porque dois de seus ângulos opostos são suplementares. De fato: $\angle CPB + \angle CAB = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$.

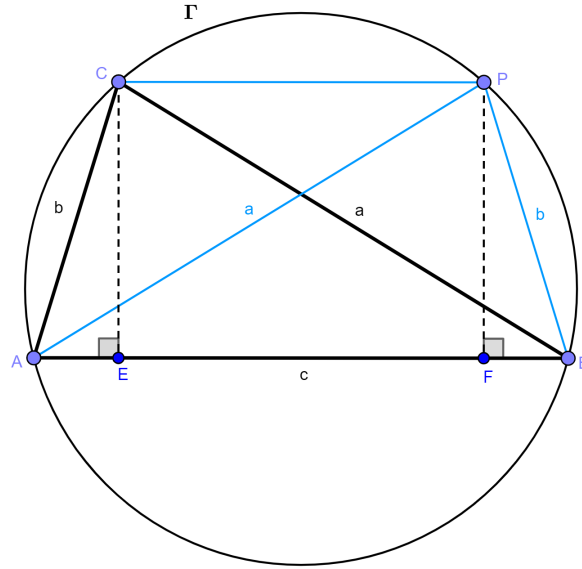
Figura 18 – Círculo circunscrito ao triângulo ABC



Fonte: Autora

Baixemos de C e P os segmentos CE e PF , ambos perpendiculares, ao lado AB .

Note que, os triângulos ABC e BAP são congruentes pelo caso LLL (lado, lado, lado), assim $\angle CAB = \angle PBA = \hat{A}$. Trataremos apenas por \hat{A} em relação ao ângulo interno do triângulo ABC , daí obtemos outra congruência por LAA° (lado, ângulo, ângulo oposto) dos triângulos ACE e BPF , que nos fornece $\overline{AE} = \overline{BF}$.

Figura 19 – Segmentos perpendiculares a AB 

Fonte: Autora

No triângulo retângulo ACE temos:

$$\cos \hat{A} = \frac{\overline{AE}}{b} \Rightarrow \overline{AE} = b \cos \hat{A}.$$

Temos ainda:

$$\begin{aligned} \angle CAB &= \angle PBA \Rightarrow \angle CAP + \angle PAB = \angle PBC + \angle CBA \\ &\Rightarrow \angle CAP + \angle PAB = \angle CAP + \angle CPA \\ &\Rightarrow \angle PAB = \angle CPA \end{aligned}$$

logo $CP \parallel AB$. Corolário 2.17 (MUNIZ NETO, 2013).

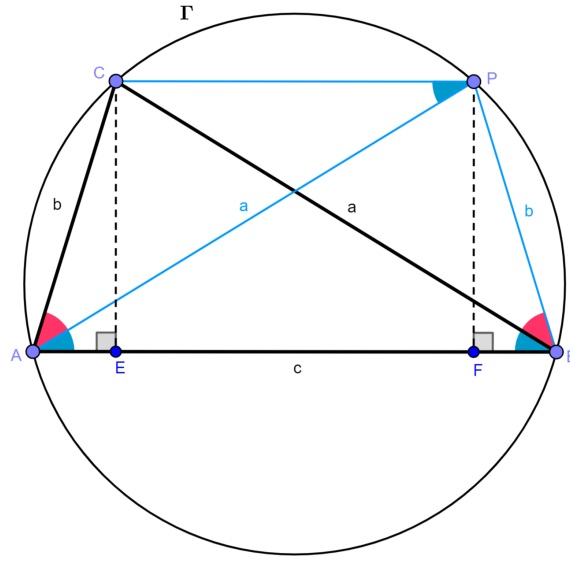
Finalmente, aplicando o Teorema de Ptolomeu ao quadrilátero $ABPC$, temos:

$$\begin{aligned} \overline{BC} \cdot \overline{AP} &= \overline{AC} \cdot \overline{BP} + \overline{AB} \cdot \overline{CP} \\ &\Rightarrow a \cdot a = b \cdot b + c \cdot (c - 2b \cos \hat{A}) \\ &\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}, \end{aligned}$$

pois $\overline{CP} = \overline{EF} = \overline{AB} - 2 \cdot \overline{AE} = c - 2 \cdot b \cos \hat{A}$. ■

3.4.4 Seno da soma e da diferença

O Teorema de Ptolomeu é muito útil na trigonometria, assim como vimos para lei dos cossenos, conseguimos também demonstrar as fórmulas de seno da soma e diferença de dois ângulos. Para isso usaremos a Lei dos Senos, que será enunciada e demonstrada a seguir.

Figura 20 – Ângulos alternos internos congruentes ($CP \parallel AB$)

Fonte: Autora

3.4.4.1 Lei dos senos

Se R é o raio do círculo circunscrito a um triângulo de lados a, b e c , então

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen}A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}C}} = 2R.$$

Sejam um triângulo ABC , tal que $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ e o círculo $\Gamma(O, R)$ circunscrito a ABC . Suponhamos ABC acutângulo, sendo as provas para os casos ABC retângulo e ABC obtusângulo essencialmente análogas a esta.

Marquemos A' no arco menor AC , de modo que A' seja o simétrico de B em relação a O , assim $\triangle A'BC$ é retângulo em \widehat{C} pois $A'B$ é diâmetro de Γ , e $\angle BAC = \angle BA'C = \widehat{A}$ pois são determinados pelo arco menor BC , como ilustra a Figura 21.

Segue-se, que:

$$\widehat{\text{sen}A} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}} \Rightarrow \widehat{\text{sen}A} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\widehat{\text{sen}A}} = 2R.$$

De forma análoga se marcarmos B' e C' (Figura 22) simétricos, respectivamente, a C e A em relação a O , obtemos:

$$\frac{b}{\widehat{\text{sen}B}} = 2R$$

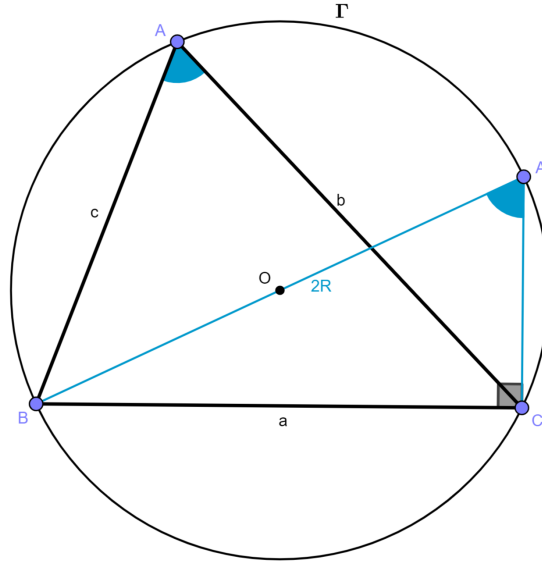
e

$$\frac{c}{\widehat{\text{sen}C}} = 2R.$$

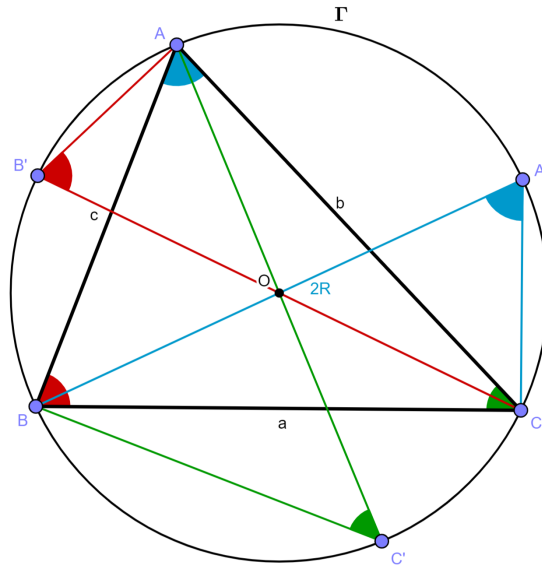
Portanto,

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen}A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}C}} = 2R. \blacksquare$$

Figura 21 – Triângulo ABC inscrito no círculo



Fonte: Autora

Figura 22 – Ilustração de B' e C' 

Fonte: Autora

3.4.4.2 Seno da soma

Dados dois ângulos agudos α e β construímos um quadrilátero $ABCD$, tal que $\angle CAD = \alpha$ e $\angle BAC = \beta$ e $ABCD$ está inscrito em um círculo $\Gamma(O, R)$ de diâmetro $2R = \overline{AC} = 1$.

Notemos que os triângulos ABC e ADC são retângulos de hipotenusa AC , pois AC é diâmetro de Γ , proposição 3.30 (MUNIZ NETO, 2013). Segue-se, que:

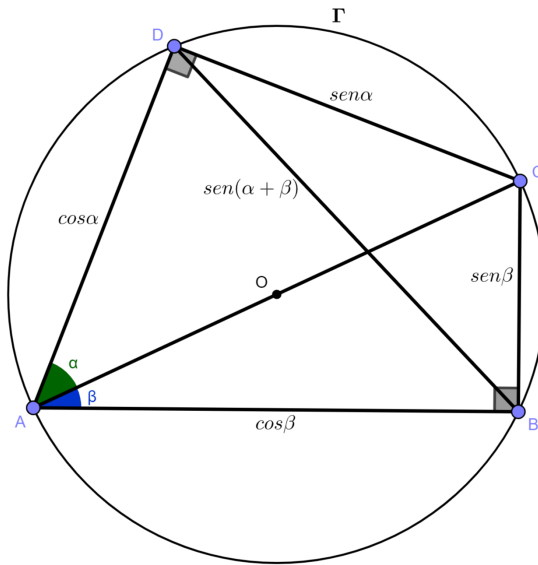
- $\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \cos \alpha \Rightarrow \overline{AD} = \cos \alpha$;

- $\frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} = \text{sen}\alpha \Rightarrow \overline{DC} = \text{sen}\alpha$;
- $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \cos\beta \Rightarrow \overline{AB} = \cos\beta$;
- $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \text{sen}\beta \Rightarrow \overline{BC} = \text{sen}\beta$.

Aplicando a Lei dos Senos no triângulo ABD , obtemos

$$\frac{\overline{BD}}{\text{sen}\hat{A}} = 2R \Rightarrow \frac{\overline{BD}}{\text{sen}(\alpha + \beta)} = \overline{AC} \Rightarrow \overline{BD} = \text{sen}(\alpha + \beta).$$

Figura 23 – Seno da soma



Fonte: Autora

Logo, ao utilizarmos o Teorema de Ptolomeu no quadrilátero $ABCD$, temos

$$\begin{aligned} \overline{AC} \cdot \overline{BD} &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} \\ \Rightarrow 1 \cdot \text{sen}(\alpha + \beta) &= \cos\beta \cdot \text{sen}\alpha + \cos\alpha \cdot \text{sen}\beta \\ \Rightarrow \text{sen}(\alpha + \beta) &= \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \text{sen}\beta. \blacksquare \end{aligned}$$

3.4.4.3 Seno da diferença

Dados dois ângulos agudos α e β , agora construímos um quadrilátero $ABCD$, inscrito em um círculo $\Gamma(O, R)$ de diâmetro $2R = \overline{AB} = 1$, de modo que $\angle BAD = \alpha$ e $\angle BAC = \beta$.

Como AB é um diâmetro, ABC e ABD são triângulos retângulos de hipotenusa AB . Daí:

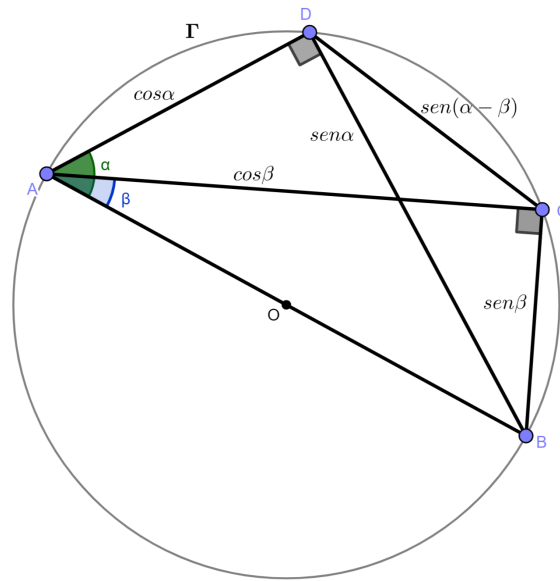
- $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \cos\alpha \Rightarrow \overline{AD} = \cos\alpha$;

- $\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \text{sen}\alpha \Rightarrow \overline{BD} = \text{sen}\alpha;$
- $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \cos\beta \Rightarrow \overline{AC} = \cos\beta;$
- $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \text{sen}\beta \Rightarrow \overline{BC} = \text{sen}\beta.$

Aplicando a Lei dos Senos no triângulo ACD , obtemos

$$\frac{\overline{CD}}{\text{sen}(\angle DAC)} = 2R \Rightarrow \frac{\overline{CD}}{\text{sen}(\alpha - \beta)} = \overline{AB} \Rightarrow \overline{CD} = \text{sen}(\alpha - \beta).$$

Figura 24 – Seno da diferença



Fonte: Autora

Segue-se, do emprego do Teorema de Ptolomeu no quadrilátero $ABCD$, que

$$\begin{aligned} \overline{AC} \cdot \overline{BD} &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} \\ \Rightarrow \cos\beta \cdot \text{sen}\alpha &= 1 \cdot \text{sen}(\alpha - \beta) + \cos\alpha \cdot \text{sen}\beta \\ \Rightarrow \text{sen}(\alpha - \beta) &= \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \text{sen}\beta. \blacksquare \end{aligned}$$

3.4.5 Razão Áurea no pentágono regular

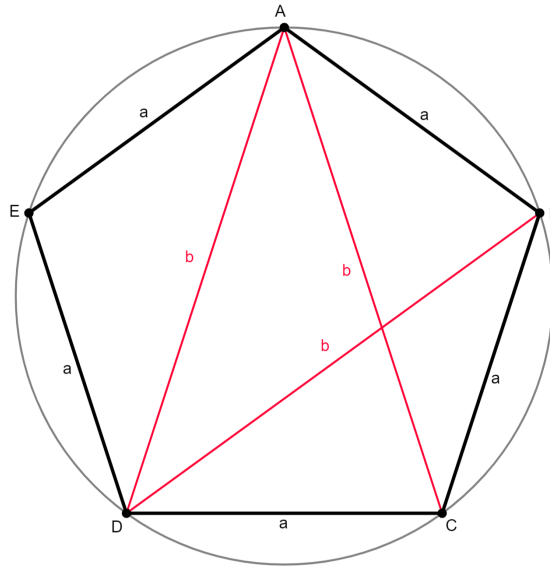
A razão áurea, também conhecida como número de ouro, proporção áurea ou divina proporção, é um número irracional aproximadamente igual a 1,6180339887. Ela é frequentemente representada pela letra grega φ (phi). Essa proporção aparece em muitos contextos da natureza, arquitetura, arte e design devido à sua propriedade estética e harmônica. Por exemplo, na arte renascentista, muitas obras foram criadas usando a razão áurea para obter uma sensação de equilíbrio e beleza.

Em um pentágono regular podemos encontrar a razão áurea, na razão entre as medidas da diagonal pela aresta:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887.$$

De fato, seja $ABCDE$ um pentágono regular de aresta medindo a e diagonal medindo b , lembremos que todas as diagonais de um pentágono regular têm a mesma medida, como ilustra a figura 25, pela congruência dos respectivos triângulos.

Figura 25 – Pentágono regular



Fonte: Autora

Consideremos o quadrilátero $ABCD$:

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} \Rightarrow b \cdot b = a \cdot a + b \cdot a$$

$$\Rightarrow b^2 = a^2 + ab \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} + \frac{ab}{a^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 + \frac{b}{a} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b}{a} - 1 = 0$$

tomando $x = \frac{b}{a}$, resolvemos a equação

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como nos interessa apenas a solução positiva, tem-se

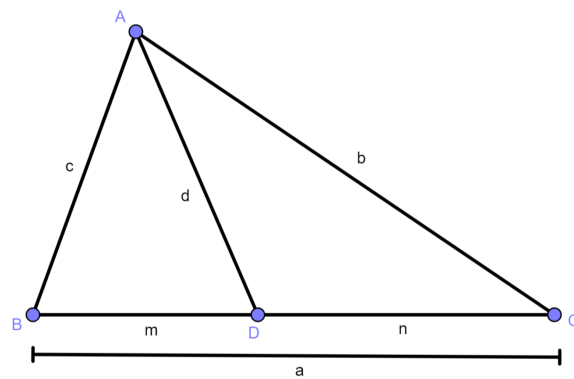
$$x = \frac{b}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

3.4.6 Teorema de Stewart

Seja ABC um triângulo de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, sendo $\overline{AD} = d$ uma ceviana que divide BC em dois segmentos, $\overline{BD} = m$ e $\overline{CD} = n$, como na Figura 26. O Teorema de Stewart, ou Relação de Stewart, afirma que:

$$a(d^2 + mn) = b^2m + c^2n.$$

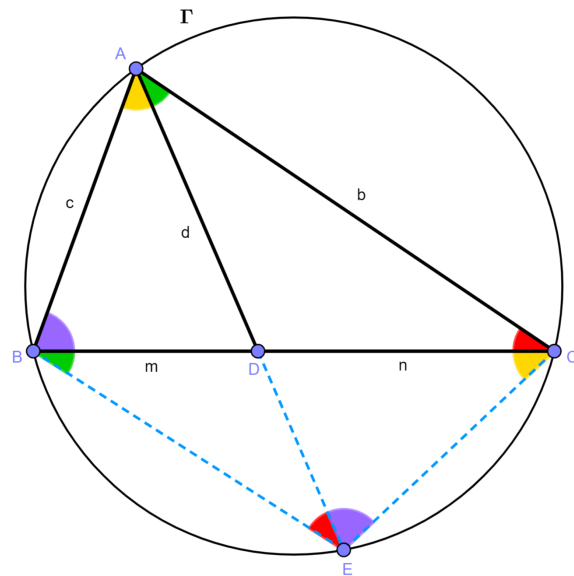
Figura 26 – Relação de Stewart



Fonte: Autora

Sejam Γ o círculo circunscrito a ABC , e $E \in \Gamma$ o prolongamento de AD , como ilustra a Figura 27.

Figura 27 – ABC inscrito em Γ



Fonte: Autora

Notemos que:

- $\angle ACB = \angle AEB$, por serem ângulos determinados pelo arco menor AB ;
- $\angle CAE = \angle CBE$, por serem ângulos determinados pelo arco menor CE .

Logo ACD é semelhante a BED pelo caso AA, daí

$$(I) \quad \frac{b}{\overline{BE}} = \frac{d}{m} \Rightarrow \overline{BE} \cdot d = b \cdot m \Rightarrow \overline{BE} = \frac{bm}{d};$$

$$(II) \quad \frac{n}{\overline{DE}} = \frac{d}{m} \Rightarrow \overline{DE} \cdot d = m \cdot n \Rightarrow \overline{DE} = \frac{mn}{d}.$$

Podemos ainda, de modo análogo, extrair a semelhança dos triângulos ABD e CED , assim

$$(III) \quad \frac{\overline{CE}}{c} = \frac{n}{d} \Rightarrow \overline{CE} = \frac{cn}{d}.$$

Agora utilizando o Teorema de Ptolomeu no quadrilátero $ABEC$, e em seguida substituindo as relações (I), (II) e (III) obtidas. Segue-se que

$$\overline{BC} \cdot \overline{AE} = \overline{AB} \cdot \overline{CE} + \overline{AC} \cdot \overline{BE}$$

$$\Rightarrow a \cdot \left(d + \frac{mn}{d} \right) = c \cdot \frac{cn}{d} + b \cdot \frac{bm}{d}$$

$$\Rightarrow ad \cdot \left(d + \frac{mn}{d} \right) = c^2 n + b^2 m$$

$$\Rightarrow a(d^2 + mn) = c^2 n + b^2 m,$$

como queríamos. ■

3.4.7 Teorema de Hiparco

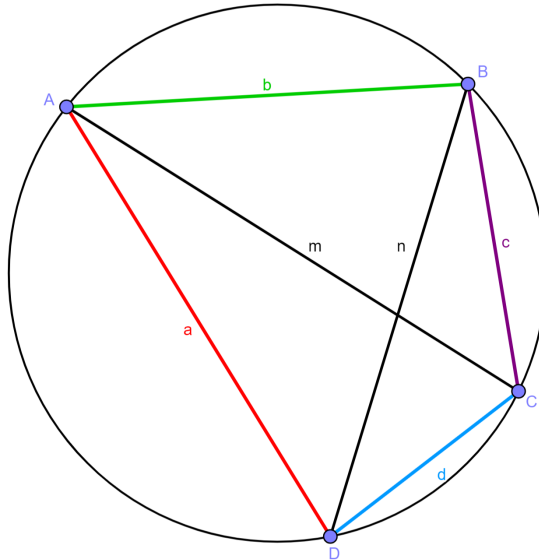
Hiparco de Nicéia, segundo ROQUE e PITOMBEIRA (2012), pode ser considerado o fundador da trigonometria, viveu em torno de 120 a.E.C., mas pouco se sabe sobre sua vida. E grande maioria do que se conhece sobre ele é através das varias citações de resultados seus, sobre trigonometria e astronomia, nos trabalhos de Ptolomeu, como também alguns fragmentos em obras de outros autores gregos.

O Teorema de Hiparco, a qual trataremos nessa seção, pode ser confundido com o Teorema de Ptolomeu, por ambos tratarem de uma relação entre os lados e diagonais de um quadrilátero inscrito, mas enquanto que Ptolomeu relaciona o produto das diagonais com a soma dos produtos dos lados opostos, o Teorema de Hiparco diz que: “para qualquer quadrilátero inscrito, a razão entre as diagonais é igual a razão da soma dos produtos dos lados que concorrem com as respectivas diagonais”.

Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito, de lados $\overline{AB} = b$, $\overline{BC} = c$, $\overline{CD} = d$ e $\overline{AD} = a$, como na Figura 28. Sendo as diagonais $\overline{AC} = m$ e $\overline{BD} = n$, a relação a qual queremos provar é:

$$\frac{m}{n} = \frac{a \cdot b + c \cdot d}{a \cdot d + b \cdot c}.$$

Figura 28 – Teorema de Hiparco



Fonte: Autora

Note que os quadriláteros, $ABCD'$ com $\overline{AB} = b$, $\overline{BC} = c$, $\overline{CD'} = a$ e $\overline{AD'} = d$ (Figura 29), e $ABC'D$ com $\overline{AB} = b$, $\overline{BC'} = d$, $\overline{C'D} = c$ e $\overline{AD} = a$ (Figura 30), também são inscritíveis, notemos ainda que as diagonais BD' e AC' são iguais,

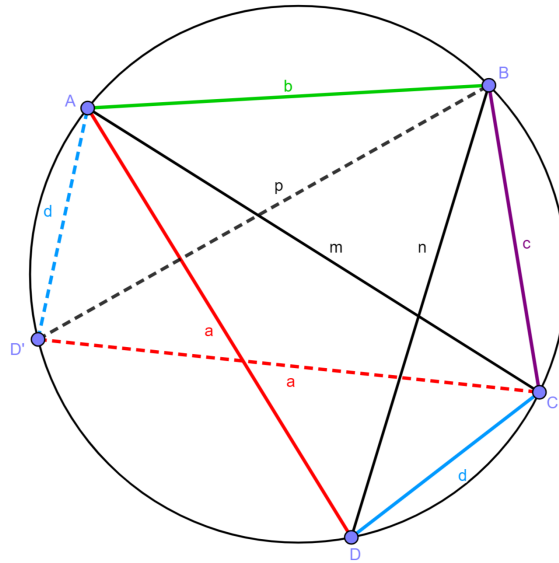
$$\overline{AC'} = \overline{BD'} = p.$$

Aplicando o Teorema de Ptolomeu em $ABCD$, $ABCD'$ e $ABC'D$, respectivamente, obtemos:

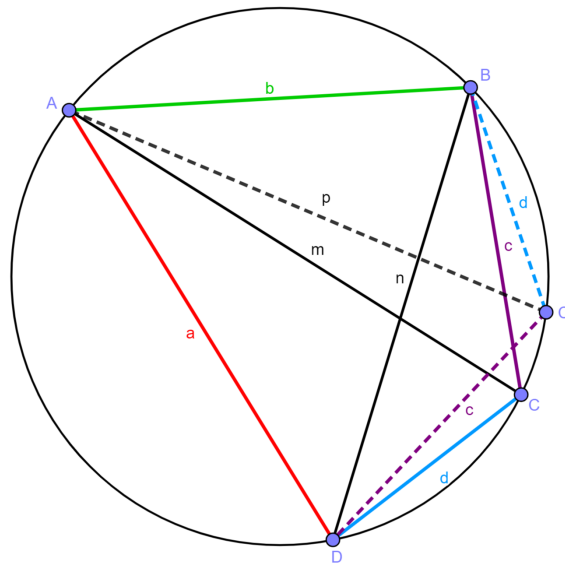
$$(I) \quad mn = ac + bd;$$

$$(II) \quad mp = ab + cd;$$

$$(III) \quad np = ad + bc.$$

Figura 29 – $ABCD'$ 

Fonte: Autora

Figura 30 – $ABC'D$ 

Fonte: Autora

Dividindo (II) por (III):

$$(IV) \quad \frac{mp}{np} = \frac{ab + cd}{ad + bc} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{ab + cd}{ad + bc}$$

que é a relação desejada. ■

Além disso, podemos extrair relações que nos possibilita determinar a medida das diagonais, independente uma da outra, conhecendo os lados do quadrilátero.

Realizando o produto de (I) por (IV):

$$\begin{aligned} mn \cdot \frac{m}{n} &= (ac + bd) \cdot \frac{ab + cd}{ad + bc} \\ \Rightarrow m^2 &= \frac{(ac + bd) \cdot (ab + cd)}{ad + bc}. \end{aligned}$$

Dividindo (I) por (IV):

$$\begin{aligned} \frac{mn}{\frac{m}{n}} &= \frac{(ac + bd)}{\frac{ab + cd}{ad + bc}} \\ \Rightarrow mn \cdot \frac{n}{m} &= (ac + bd) \cdot \frac{ad + bc}{ab + cd} \\ \Rightarrow n^2 &= \frac{(ac + bd) \cdot (ad + bc)}{ab + cd}. \end{aligned}$$

4 O Teorema de Menelaus, demonstração e aplicações

Apresentaremos neste capítulo duas propostas do Teorema de Menelau, a forma mais básica em 4.1 e considerando os segmentos orientados em 4.2. Na seção 4.3 discorreremos sobre algumas aplicações.

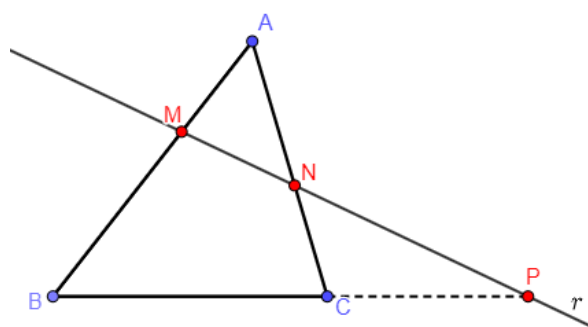
4.1 Demonstração I

4.1.1 Enunciado:

Sejam ABC um triângulo e r uma reta que intersecta ABC em dois lados e o prolongamento do terceiro, como na figura 31, então:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} = 1.$$

Figura 31 – Triângulo ABC e reta r



Fonte: Autora

4.1.2 Demonstração:

Tracemos a reta $s \parallel r$ passando por B e o prolongamento de AC até intersectar s em D , como ilustra a figura 32.

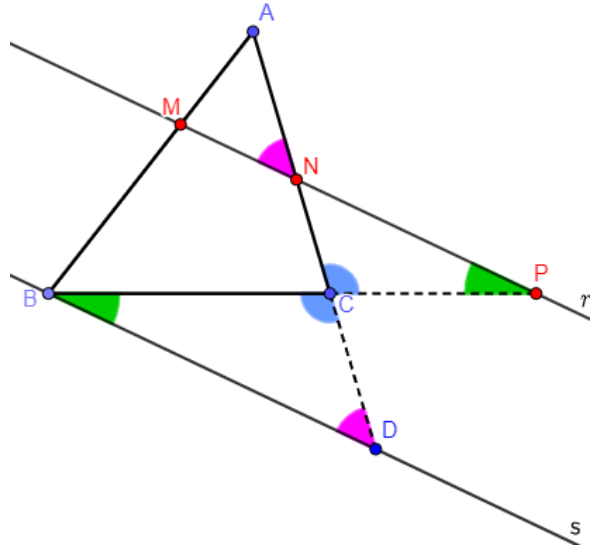
Notemos que:

$\angle NPC = \angle DBC$ (ângulos alternos internos determinados pelas paralelas r, s e a transversal \overleftrightarrow{BP});

$\angle BCD = \angle PCN$ (ângulos opostos pelo vértice).

Logo pelo caso AA (ângulo, ângulo), os triângulos BCD e PCN são semelhantes.

Figura 32 – Demonstração I



Fonte: Autora

Daí,

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CN}} \Rightarrow \frac{\overline{BP} - \overline{PC}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{ND} - \overline{CN}}{\overline{CN}} \Rightarrow \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} - \frac{\overline{PC}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{ND}}{\overline{CN}} - \frac{\overline{CN}}{\overline{CN}} \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} - 1 = \frac{\overline{ND}}{\overline{CN}} - 1 \Rightarrow \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{ND}}{\overline{CN}} \Rightarrow \overline{ND} = \overline{CN} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}. (1)$$

Tem-se ainda que:

 $\angle ANM = \angle ADB$ (ângulos correspondentes); $\angle MAN = \angle BAD$ (ângulo comum).

Assim, segue que os triângulos AMN e ABD são semelhantes. Dessa semelhança extraímos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{NA}} \Rightarrow \frac{\overline{AM} + \overline{MB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{DN} + \overline{NA}}{\overline{NA}} \Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{AM}} + \frac{\overline{MB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{NA}} + \frac{\overline{NA}}{\overline{NA}} \Rightarrow$$

$$1 + \frac{\overline{MB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{NA}} + 1 \Rightarrow \frac{\overline{MB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{NA}} \Rightarrow \overline{DN} = \overline{NA} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{AM}}. (2)$$

Como $\overline{ND} = \overline{DN}$, segue-se de (1) e (2):

$$\overline{CN} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \overline{NA} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{AM}} \Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} = 1$$

como queríamos demonstrar.

4.2 Demonstração II

4.2.1 Definição: Segmento orientado

Seja AB um **segmento orientado** de origem A e extremidade B . Isto é, no segmento AB estabelecemos o sentido de percurso de A para B . Dizemos, então, que o segmento BA tem sentido de percurso oposto ao do segmento AB . Assim, escrevemos

$$AB = -BA.$$

4.2.2 Teorema de Menelaus para segmento orientado

Seja ABC um triângulo e M , N e P pontos sobre as retas suportes dos lados AB , AC e BC , respectivamente, todos distintos dos vértices de ABC . Então:

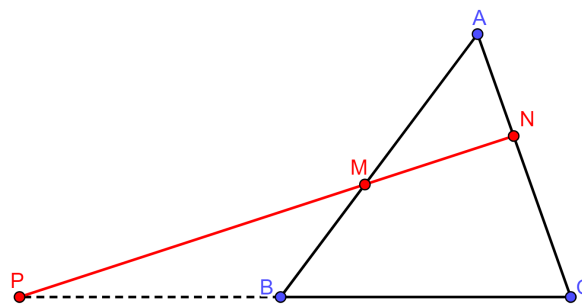
$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CN}{NA} = -1$$

se, e somente se, os pontos M , N e P forem colineares.

4.2.3 Demonstração

Suponhamos que M , N e P são colineares. Sem perda de generalidade consideremos o caso em que M está entre A e B , N está entre A e C , e P está a esquerda de B , isto é, M e N sobre os lados AB e AC , respectivamente, e P no prolongamento de \overrightarrow{CB} , como mostra a figura 33.

Figura 33 – M , N e P colineares

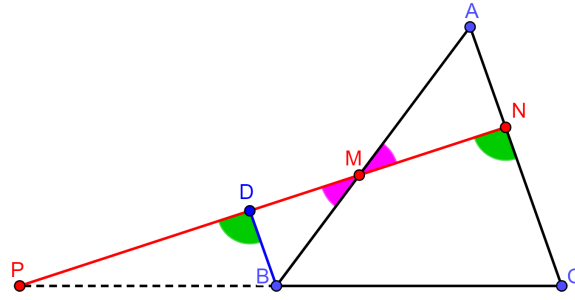


Fonte: Autora

Marcando D em \overleftrightarrow{MP} , de modo que $\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{AC}$, obtemos:

- $\angle DBM = \angle NAM$ (ângulos alternos internos);
- $\angle BMD = \angle AMN$ (ângulos opostos pelo vértices);
- $\angle PDB = \angle PNC$ (ângulos correspondentes);

Figura 34 – Demonstração II



Fonte: Autora

- $\angle DPB = \angle NPC$ (ângulo comum).

Logo $\triangle BMD \sim \triangle AMN$ e $\triangle DPB \sim \triangle NPC$, daí:

$$\frac{BD}{AN} = \frac{BM}{AM} \Rightarrow \frac{BD}{-NA} = \frac{-MB}{AM} \Rightarrow BD = \frac{MB}{AM} \cdot NA$$

e

$$\frac{BD}{CN} = \frac{BP}{CP} \Rightarrow \frac{BD}{CN} = \frac{BP}{-PC} \Rightarrow BD = -\frac{BP}{PC} \cdot CN.$$

Então:

$$-\frac{BP}{PC} \cdot CN = \frac{MB}{AM} \cdot NA \Rightarrow \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CN}{NA} = -1.$$

Reciprocamente, sejam M , N e P pontos situados sobre as retas suportes dos lados AB , AC e BD , respectivamente, todos distintos dos vértices, de ABC e tais que a relação

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CN}{NA} = -1$$

seja válida. Marque o ponto de interseção N' , das retas \overleftrightarrow{PM} e \overleftrightarrow{AC} . Como P , M e N' são colineares, o que já provamos acima garante que

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CN'}{N'A} = -1.$$

Comparando as relações anteriores, obtém-se:

$$\frac{CN}{NA} = \frac{CN'}{N'A}.$$

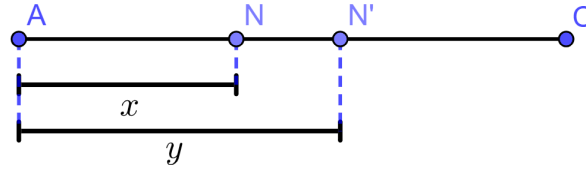
Notemos que, sendo N e N' pontos no interior de um segmento AC a igualdade $\frac{CN}{NA} = \frac{CN'}{N'A}$, implica que $N = N'$. De fato, tome $\overline{AC} = a$, $\overline{AN} = x$ e $\overline{AN'} = y$.

Então:

$$\frac{CN}{NA} = \frac{CN'}{N'A} \Rightarrow \frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{CN'}}{\overline{N'A}} \Rightarrow \frac{a-x}{x} = \frac{a-y}{y} \Rightarrow$$

$$ay - xy = ax - xy \Rightarrow ay = ax \Rightarrow y = x.$$

Isto é, N e N' são coincidentes. Portanto, M , N e P são colineares.

Figura 35 – Segmento AC 

Fonte: Autora

4.3 Aplicações

4.3.1 Teorema de Desargues

Girard Desargues (1591-1661) foi o primeiro a elaborar com linguagem matemática aquilo que pintores, que buscavam qualidade da representação tridimensional em suas obras, traziam em suas telas. Para se analisar tais construções com olhar matemático, foi necessário iniciar o estudo sobre um novo ramo da geometria conhecido como geometria projetiva. O teorema de Desargues, o qual apresentaremos aqui, relata propriedades projetivas entre dois triângulos.

Enunciado:

Se ABC e $A'B'C'$ são triângulos tais que $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{Z\}$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = \{X\}$ e $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = \{Y\}$, então X , Y e Z são colineares se, e só se, $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são concorrentes ou paralelas.

Prova:

Suponha inicialmente, que X , Y e Z são colineares (figura 36). Com a intenção de mostrarmos que as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são concorrentes ou paralelas, basta considerar que $\overleftrightarrow{AA'}$ e $\overleftrightarrow{BB'}$ são concorrentes em O e mostrar que $O \in \overleftrightarrow{CC'}$, isto é, O , C e C' são colineares.

Aplicando o teorema de Menelaus aos triângulos:

(I) ZAA' (destacado na figura 37)

$$\frac{ZB'}{B'A'} \cdot \frac{A'O}{OA} \cdot \frac{AB}{BZ} = -1;$$

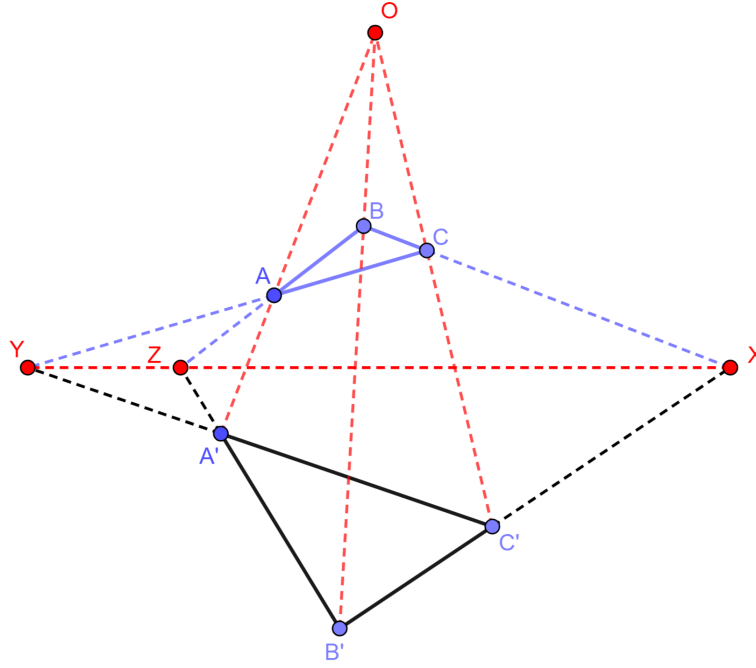
(II) YZA (destacado na figura 38)

$$\frac{YX}{XZ} \cdot \frac{ZB}{BA} \cdot \frac{AC}{CY} = -1;$$

(III) YZA' (destacado na figura 39)

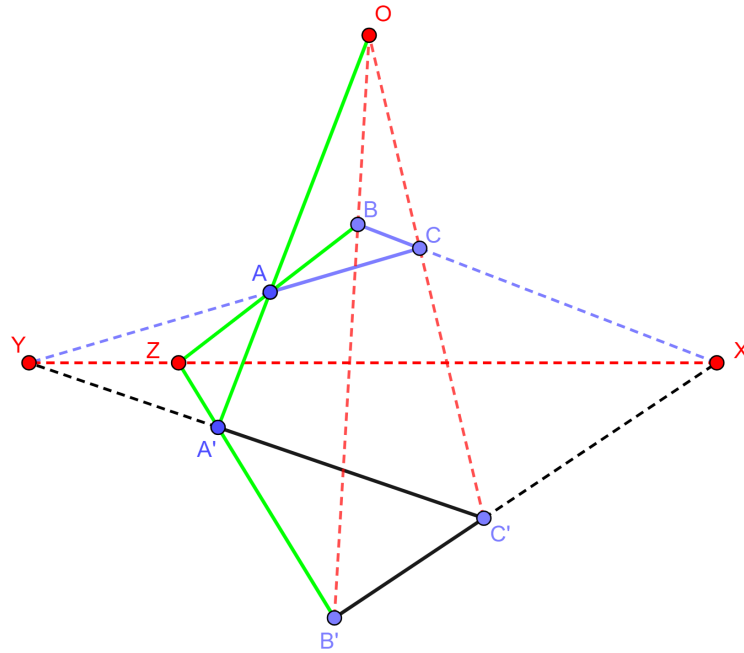
$$\frac{YC'}{C'A'} \cdot \frac{A'B'}{B'Z} \cdot \frac{ZX}{XY} = -1.$$

Figura 36 – Teorema de Desargues



Fonte: Autora

Figura 37 – Triângulo ZAA'

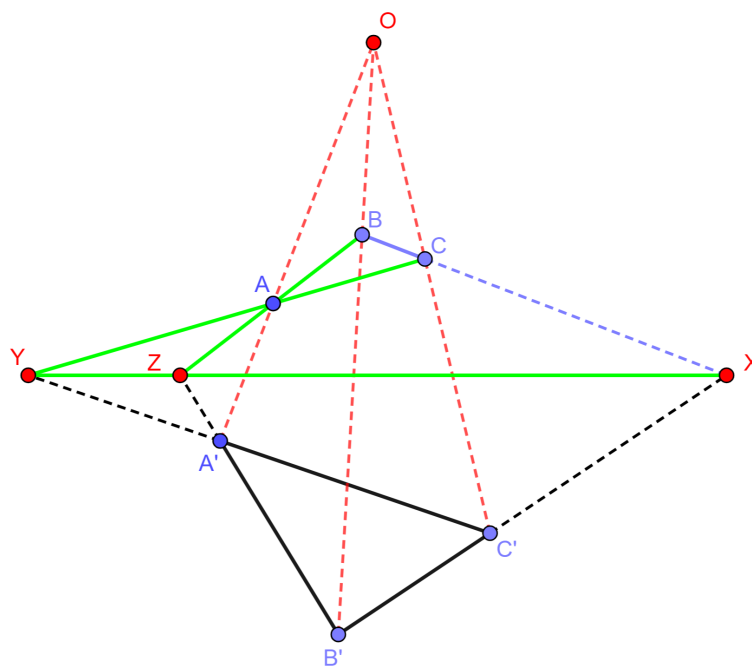


Fonte: Autora

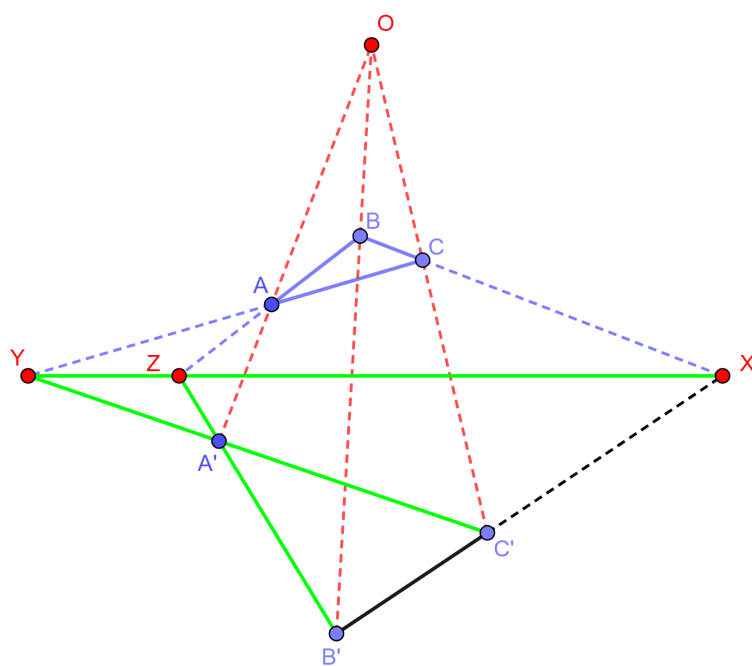
Multiplicando membro a membro as relações I, II e III, obtemos:

$$\frac{ZB'}{B'A'} \cdot \frac{A'O}{OA} \cdot \frac{AB}{BZ} \cdot \frac{YX}{XZ} \cdot \frac{ZB}{BA} \cdot \frac{AC}{CY} \cdot \frac{YC'}{C'A'} \cdot \frac{A'B'}{B'Z} \cdot \frac{ZX}{XY} = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow \frac{A'O}{OA} \cdot \frac{AC}{CY} \cdot \frac{YC'}{C'A'} \cdot \frac{ZB'}{B'Z} \cdot \frac{AB}{BA} \cdot \frac{YX}{XY} \cdot \frac{ZB}{BZ} \cdot \frac{A'B'}{B'A'} \cdot \frac{ZX}{XZ} = -1$$

Figura 38 – Triângulo YZA 

Fonte: Autora

Figura 39 – Triângulo YZA' 

Fonte: Autora

$$\Rightarrow \frac{A'O}{OA} \cdot \frac{AC}{CY} \cdot \frac{YC'}{C'A'} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{A'O}{OA} \cdot \frac{AC}{CY} \cdot \frac{YC'}{C'A'} = -1.$$

Logo O , C e C' são colineares.

Para a recíproca, suponha que $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são concorrentes ou paralelas, inicialmente considere $\overleftrightarrow{AA'} \cap \overleftrightarrow{BB'} \cap \overleftrightarrow{CC'} = \{O\}$, assim como na figura 36.

Aplicando o teorema de Menelaus aos triângulos:

(IV) OBC

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{OB'}{B'B} = -1;$$

(V) OAC

$$\frac{CY}{YA} \cdot \frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{OC'}{C'C} = -1;$$

(VI) OAB

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BB'}{B'O} \cdot \frac{OA'}{A'A} = -1.$$

Multiplicando membro a membro as relações IV, V e VI, obtemos:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{OB'}{B'B} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{OC'}{C'C} \cdot \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BB'}{B'O} \cdot \frac{OA'}{A'A} = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{CC'}{C'C} \cdot \frac{OB'}{B'O} \cdot \frac{AA'}{A'A} \cdot \frac{OC'}{C'O} \cdot \frac{BB'}{B'B} \cdot \frac{OA'}{A'O} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = -1$$

Portanto X , Y e Z são colineares. ■

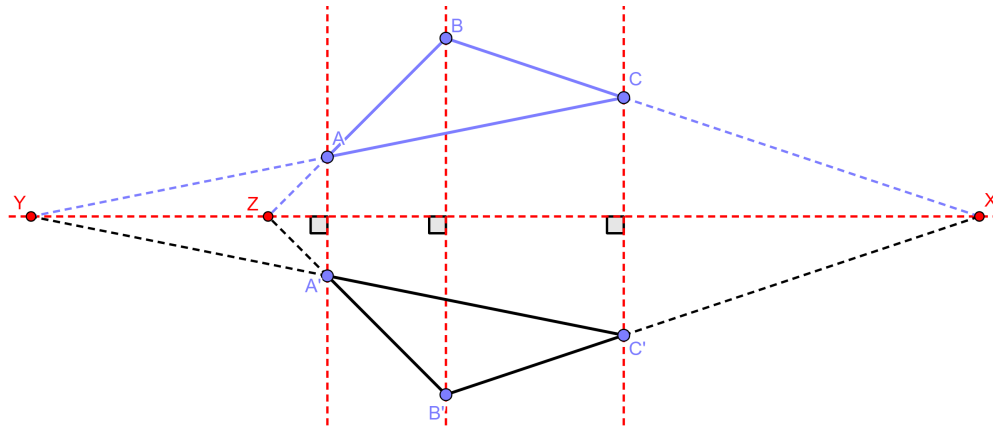
4.3.1.1 Observação: Eixo de Reflexão

Se $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'}$ e $r \perp \overleftrightarrow{AA'}$, onde a reta r contém os pontos X , Y e Z então o triângulo $A'B'C'$ é a reflexão de ABC com relação a r , segue figura 40.

4.3.2 Colinearidade entre os pés de bissetrizes

Para demonstrar o resultado que trata da colinearidade entre os pés de certas bissetrizes de um triângulo não isósceles, utilizaremos, além do teorema de Menelaus, o teorema da bissetriz que é uma aplicação do conhecido teorema de Thales, bastante explorado no ensino básico. Para essa finalidade o teorema da bissetriz também será demonstrado a seguir.

Figura 40 – Eixo de Reflexão



Fonte: Autora

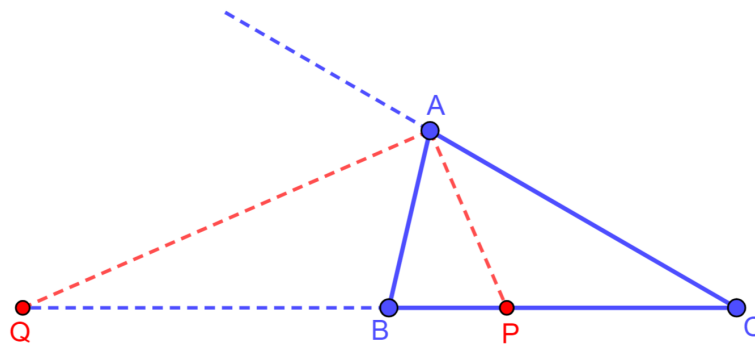
4.3.2.1 Teorema da bissetriz

Seja ABC um triângulo tal que $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Se P é o pé da bissetriz interna e Q é o pé da bissetriz externa relativa ao lado BC , então

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}.$$

Prova:

Suponhamos $\overline{AB} < \overline{AC}$, sendo o caso $\overline{AB} > \overline{AC}$ provado de modo análogo.

Figura 41 – Triângulo ABC ($\overline{AB} < \overline{AC}$)

Fonte: Autora

Trace $\overrightarrow{BB'} \parallel \overrightarrow{QA}$, com $B' \in AC$. Marque $X \in \overrightarrow{CA} \setminus AC$, ponto de referência para o ângulo externo no vértice A (figura 42), daí:

- $\angle QAB = \angle XAQ$ (\overrightarrow{AQ} é bissetriz de $\angle BAX$);
- $\angle XAQ = \angle AB'B$ (ângulos correspondentes);
- $\angle B'BA = \angle QAB$ (ângulos alternos internos).

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{B''A}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}. (II)$$

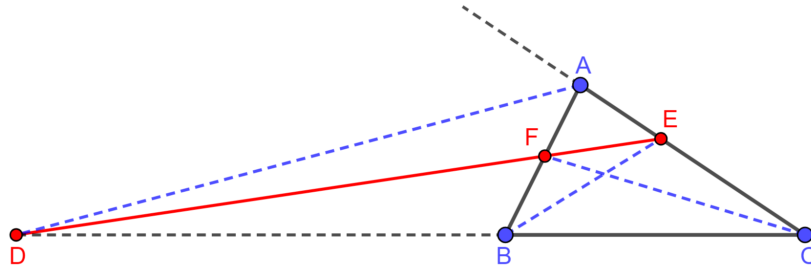
Portanto, de I e II , tem-se:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}. \blacksquare$$

4.3.2.2 Colinearidade dos pés de certas bissetrizes

Seja ABC um triângulo tal que $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Se D é o pé da bissetriz externa e E e F são os pés das bissetrizes internas relativas a B e C , prove que os pontos D , E e F são colineares.

Figura 44 – Colinearidade dos pés de certas bissetrizes



Fonte: Autora

Prova:

Sem perda de generalidade, suponhamos $\overline{AB} < \overline{AC}$, dessa forma o vértice B está situado no interior do segmento CD .

Aplicando o teorema da bissetriz, provado na subseção anterior, temos:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}};$$

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}};$$

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{BA}}.$$

Multiplicando membro a membro as três expressões acima, obtemos:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{BA}} \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1.$$

Portanto, pelo teorema de Menelaus (seção 4.1) os pontos D , E e F são colineares. \blacksquare

4.3.3 Teorema de Pappus

O teorema da geometria plana, o qual apresentaremos aqui, que recebe o nome do geômetra grego Pappus (290 - 350 E.C) é considerado como uma das bases da geometria projetiva moderna, pode ser tratado como um caso particular do Teorema do Hexagrama de Pascal: “se um hexágono está inscrito numa cônica, então os pontos de intersecção dos três pares de lados opostos são colineares e reciprocamente”.

Pappus Alexandrinus (Alexandria) foi um dos últimos e mais importantes geômetras da Grécia Antiga. Sua notoriedade consiste em sua extensa obra denominada *The Collection*, na qual ele reuniu uma lista de relevantes obras antigas, algumas atualmente perdidas. Foi também um influente pesquisador e autor de textos sobre cientistas da antiga civilização grega, onde Menelaus foi um dos alvos de seus estudos.

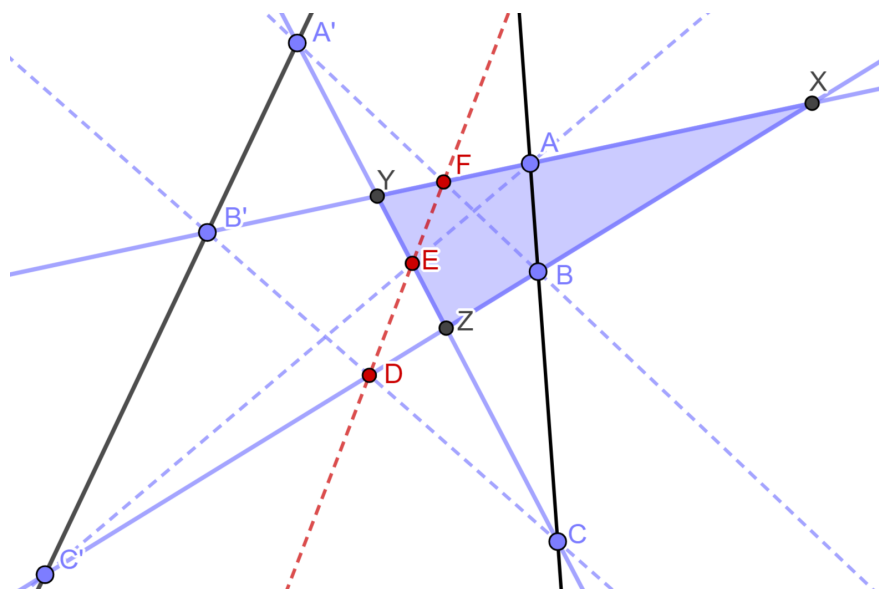
Enunciado:

Dados dois ternos de pontos colineares A, B, C e A', B', C' . Se $\overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'B} = \{F\}$, $\overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{A'C} = \{E\}$ e $\overleftrightarrow{BC'} \cap \overleftrightarrow{B'C} = \{D\}$, então os pontos D, E e F são colineares.

Prova:

Inicialmente, suponhamos $\overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{BC'} = \{X\}$, $\overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'C} = \{Y\}$ e $\overleftrightarrow{A'C} \cap \overleftrightarrow{BC'} = \{Z\}$ (figura 45).

Figura 45 – Triângulo XYZ



Fonte: Autora

Aplicando o teorema de Menelaus ao triângulo XYZ , em relação a cada terno de pontos colineares a seguir:

(I) A, B, C

$$\frac{XA}{AY} \cdot \frac{YC}{CZ} \cdot \frac{ZB}{BX} = -1;$$

(II) A', B', C'

$$\frac{XB'}{B'Y} \cdot \frac{YA'}{A'Z} \cdot \frac{ZC'}{C'X} = -1;$$

(III) A, E, C'

$$\frac{XA}{AY} \cdot \frac{YE}{EZ} \cdot \frac{ZC'}{C'X} = -1;$$

(IV) B', C, D

$$\frac{XB'}{B'Y} \cdot \frac{YC}{CZ} \cdot \frac{ZD}{DX} = -1;$$

(V) A', B, F

$$\frac{XF}{FY} \cdot \frac{YA'}{A'Z} \cdot \frac{ZB}{BX} = -1.$$

Multiplicando membro a membro as expressões III, IV e V, obtemos:

$$\frac{XA}{AY} \cdot \frac{YE}{EZ} \cdot \frac{ZC'}{C'X} \cdot \frac{XB'}{B'Y} \cdot \frac{YC}{CZ} \cdot \frac{ZD}{DX} \cdot \frac{XF}{FY} \cdot \frac{YA'}{A'Z} \cdot \frac{ZB}{BX} = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow \frac{XA}{AY} \cdot \frac{YC}{CZ} \cdot \frac{ZB}{BX} \cdot \frac{XB'}{B'Y} \cdot \frac{YA'}{A'Z} \cdot \frac{ZC'}{C'X} \cdot \frac{YE}{EZ} \cdot \frac{ZD}{DX} \cdot \frac{XF}{FY} = -1.$$

Substituindo as igualdades obtidas em I e II, tem-se:

$$(-1) \cdot (-1) \cdot \frac{YE}{EZ} \cdot \frac{ZD}{DX} \cdot \frac{XF}{FY} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{YE}{EZ} \cdot \frac{ZD}{DX} \cdot \frac{XF}{FY} = -1.$$

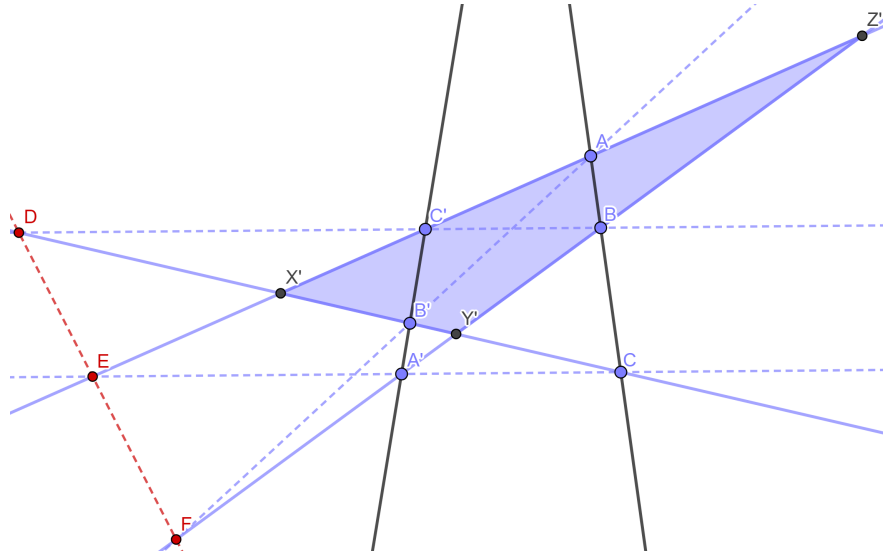
Logo pelo teorema de Menelaus D, E e F são colineares.

Consideremos, agora, os casos que ao menos um dentre os pares de retas $\overleftrightarrow{AB'}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$, $\overleftrightarrow{AB'}$ e $\overleftrightarrow{A'C'}$, $\overleftrightarrow{A'C'}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$ seja formados por retas paralelas. Sem perda de generalidade, sendo os demais casos provados de modo análogo, suponhamos $\overleftrightarrow{A'C'} \parallel \overleftrightarrow{BC'}$ e $\overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = \{X'\}$, $\overleftrightarrow{A'B'} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = \{Y'\}$ e $\overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{Z'\}$ (figura 46).

Aplicando o teorema de Menelaus ao triângulo $X'Y'Z'$, em relação a cada terno de pontos colineares a seguir:

(VI) A, B, C

$$\frac{X'A}{AY'} \cdot \frac{Y'C}{CZ'} \cdot \frac{Z'B}{BX'} = -1;$$

Figura 46 – Triângulo $X'Y'Z'$ 

Fonte: Autora

(VII) A', B', C'

$$\frac{X'B'}{B'Y'} \cdot \frac{Y'A'}{A'Z'} \cdot \frac{Z'C'}{C'X'} = -1;$$

(VIII) D, C', B

$$\frac{X'D}{DY'} \cdot \frac{Y'B}{BZ'} \cdot \frac{Z'C'}{C'X'} = -1;$$

(IX) E, A', C

$$\frac{Z'E}{EX'} \cdot \frac{X'C}{CY'} \cdot \frac{Y'A'}{A'Z'} = -1;$$

(X) F, B', A

$$\frac{Y'F}{FZ'} \cdot \frac{Z'A}{AX'} \cdot \frac{X'B'}{B'Y'} = -1.$$

Multiplicando membro a membro as expressões VIII, IX e X, em seguida substituindo VI e VII, obtemos:

$$\frac{X'D}{DY'} \cdot \frac{Y'F}{FZ'} \cdot \frac{Z'E}{EX'} = -1.$$

Portanto, D , E e F são colineares. ■

4.3.4 O Teorema de Ceva

Embora o teorema de Menelaus tenha sido desenvolvido muito antes do teorema de Ceva, as duas contribuições estão diretamente relacionadas na geometria e têm

aplicações semelhantes na solução de problemas geométricos, podendo o trabalho de Ceva ser considerado uma continuidade do trabalho de Menelaus.

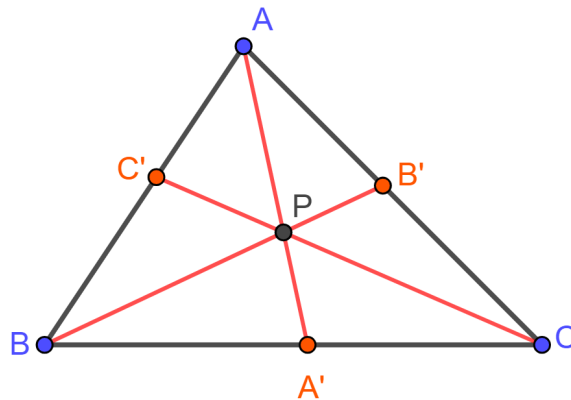
Giovanni Ceva foi um matemático italiano do século XVII cujas contribuições tiveram um impacto significativo na geometria. Nasceu em 01 de setembro de 1647 na cidade de Milão no Império Habsburgo (atual Itália) e morreu dia 13 de maio de 1734 em Mântua também no Império Habsburgo (atual Itália). Sua obra mais conhecida é o *De lineis rectis* (Sobre linhas retas), publicada em 1678, na qual ele introduziu o teorema que recebe seu nome, o qual trataremos nesta seção. Será exposta na subseção 4.3.4.1 uma interessante aplicação do Teorema de Ceva.

Enunciado:

Sejam A' , B' e C' pontos, respectivamente, sobre os lados BC , AC e AB de um triângulo qualquer ABC . As cevianas AA' , BB' e CC' se intersectam em um ponto P , se, e somente se

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = 1.$$

Figura 47 – O Teorema de Ceva



Fonte: Autora

Prova:

Inicialmente consideremos que AA' , BB' e CC' se intersectam em um ponto P . Aplicando o Teorema de Menelaus aos triângulos ABA' e $AA'C$, considerando os respectivos ternos de pontos colineares C' , P , C e B , P , B' , obtemos:

$$(I) \quad \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{CA'}} \cdot \frac{\overline{A'P}}{\overline{PA}} = 1;$$

$$(II) \quad \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{PA'}} \cdot \frac{\overline{A'B}}{\overline{BC}} = 1.$$

Multiplicando membro a membro as igualdades obtidas *I* e *II*, tem-se:

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{CA'}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{PA'}} \cdot \frac{\overline{A'B}}{\overline{BC}} = 1 \cdot 1;$$

Como, $\overline{A'B} = \overline{BA'}$, $\overline{CA'} = \overline{A'C}$, $\overline{A'P} = \overline{PA'}$ e $\overline{AP} = \overline{PA}$, então:

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = 1.$$

Reciprocamente, suponha que vale

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = 1.$$

Marque B'' em AC de modo que AA' , BB' e CC' sejam concorrentes, segue da primeira parte que

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB''}}{\overline{B''A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = 1.$$

Logo,

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB''}}{\overline{B''A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \Rightarrow \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{CB''}}{\overline{B''A}}.$$

De modo análogo ao feito em 4.2.3 figura 35, temos que

$$\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{CB''}}{\overline{B''A}} \Rightarrow B' = B''.$$

Portanto, AA' , BB' e CC' são concorrentes. ■

Muniz (2013) apresenta uma versão mais completa do Teorema de Ceva, considerando as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ concorrentes ou paralelas, porem a demonstração apresentada não se dar por aplicação do Teorema de Menelaus, por esse motivo não será exposta aqui.

4.3.4.1 Concorrência das medianas, bissetrizes internas e alturas

A concorrência entre as cevianas notáveis de um triângulo qualquer, pode ser provada usando o Teorema de Ceva. Provaremos a seguir que as medianas, as bissetrizes e as retas suportes das alturas de ABC são concorrentes.

Sejam M_a , M_b e M_c os pontos médios dos lados BC , AC e AB respectivamente (figura 48).

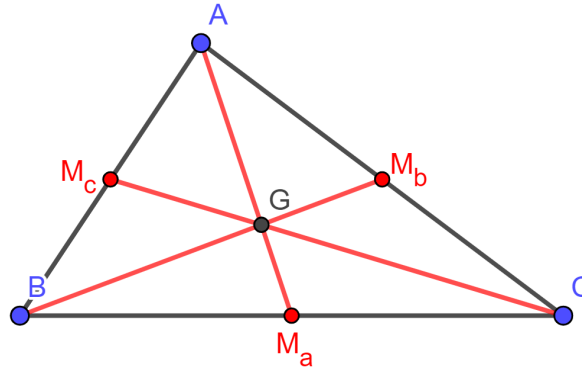
Note que,

$$\frac{\overline{BM_a}}{\overline{M_aC}} = \frac{\overline{CM_b}}{\overline{M_bA}} = \frac{\overline{AM_c}}{\overline{M_cB}} = 1,$$

logo

$$\frac{\overline{BM_a}}{\overline{M_aC}} \cdot \frac{\overline{CM_b}}{\overline{M_bA}} \cdot \frac{\overline{AM_c}}{\overline{M_cB}} = 1.$$

Figura 48 – Concorrência das medianas

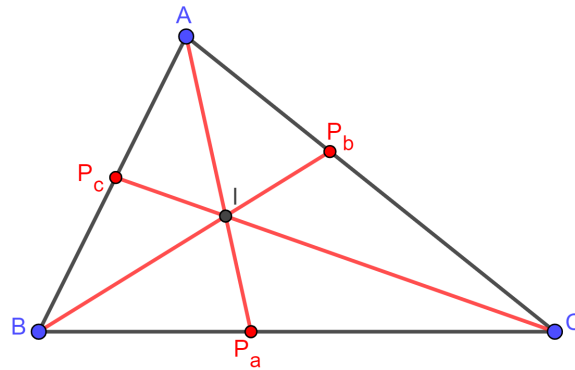


Fonte: Autora

Portanto pelo Teorema de Ceva, AM_a , BM_b e CM_c concorrem em um único ponto, denominado **baricentro**.

Para o que se segue, tomemos $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Sejam P_a , P_b e P_c , respectivamente, os pés das bissetrizes internas relativas a BC , AC e AB .

Figura 49 – Concorrência das bissetrizes internas



Fonte: Autora

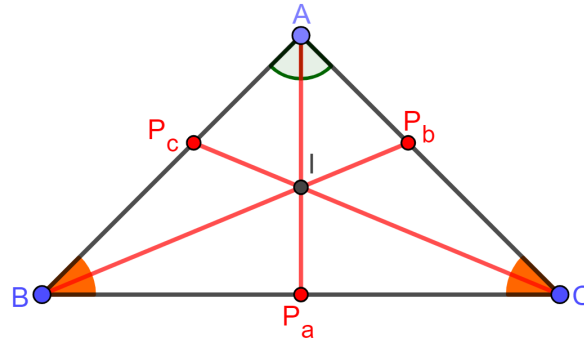
Se ABC escaleno (figura 49), pelo teorema da bissetriz (4.3.2.1) tem-se

$$\frac{\overline{AP_c}}{\overline{P_cB}} = \frac{b}{a}, \quad \frac{\overline{BP_a}}{\overline{P_aC}} = \frac{c}{b} \text{ e } \frac{\overline{CP_b}}{\overline{P_bA}} = \frac{a}{c}, \text{ de forma que}$$

$$\frac{\overline{AP_c}}{\overline{P_cB}} \cdot \frac{\overline{BP_a}}{\overline{P_aC}} \cdot \frac{\overline{CP_b}}{\overline{P_bA}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} = 1.$$

Se ABC for um triângulo pelo menos isósceles, considere sem perda de generalidade $\overline{AB} = \overline{AC}$ como mostra a figura 50, daí:

- $AP_aC \equiv AP_aB$ (por LAL) $\Rightarrow \overline{BP_a} = \overline{P_aC}$;
- $BP_cC \equiv CP_bB$ (por ALA) $\Rightarrow \overline{CP_b} = \overline{P_cB}$;
- $ABP_b \equiv ACP_c$ (por ALA) $\Rightarrow \overline{AP_c} = \overline{P_bA}$.

Figura 50 – Concorrência das bissetrizes internas (ABC Isósceles)

Fonte: Autora

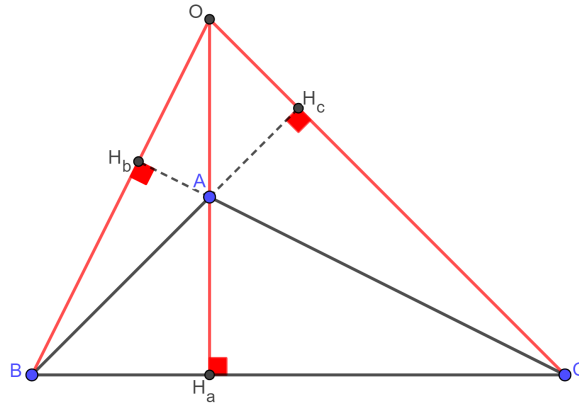
Logo,

$$\frac{\overline{BP_a}}{\overline{P_aC}} \cdot \frac{\overline{CP_b}}{\overline{P_bA}} \cdot \frac{\overline{AP_c}}{\overline{P_cB}} = 1.$$

Assim pelo teorema de Ceva AP_a , BP_b e CP_c concorrem em um único ponto, denominado **incentro**.

Para a concorrência das alturas, sejam ABC um triângulo qualquer, H_a , H_b e H_c , respectivamente, os pés das alturas relativas aos vértices A , B e C .

Figura 51 – Concorrência das alturas



Fonte: Autora

Usando a relação trigonométrica do cosseno de um ângulo, nos triângulos retângulos ABH_a , ACH_a , BAH_b , BCH_b , CAH_c e CBH_c , extraímos:

- $\cos(\widehat{ABH_a}) = \frac{\overline{BH_a}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{BH_a} = \overline{AB} \cdot \cos(\widehat{ABH_a}) = \overline{AB} \cdot \cos(\widehat{ABC});$
- $\cos(\widehat{ACH_a}) = \frac{\overline{H_aC}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{H_aC} = \overline{AC} \cdot \cos(\widehat{ACH_a}) = \overline{AC} \cdot \cos(\widehat{ACB});$
- $\cos(\widehat{BAH_b}) = \frac{\overline{H_bA}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{H_bA} = \overline{AB} \cdot \cos(\widehat{BAH_b});$
- $\cos(\widehat{BCH_b}) = \frac{\overline{CH_b}}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{CH_b} = \overline{BC} \cdot \cos(\widehat{BCH_b}) = \overline{BC} \cdot \cos(\widehat{ACB});$

- $\cos(\widehat{CAH}_c) = \frac{\overline{AH_c}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{AH_c} = \overline{AC} \cdot \cos(\widehat{CAH}_c) = \overline{AC} \cdot \cos(\widehat{BAH}_b);$
- $\cos(\widehat{CBH}_c) = \frac{\overline{H_cB}}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{H_cB} = \overline{BC} \cdot \cos(\widehat{CBH}_c) = \overline{BC} \cdot \cos(\widehat{ABC}).$

Daí,

$$\frac{\overline{AH_c}}{\overline{H_cB}} \cdot \frac{\overline{BH_a}}{\overline{H_aC}} \cdot \frac{\overline{CH_b}}{\overline{H_bA}} = \frac{\overline{AC} \cdot \cos(\widehat{BAH}_b)}{\overline{BC} \cdot \cos(\widehat{ABC})} \cdot \frac{\overline{AB} \cdot \cos(\widehat{ABC})}{\overline{AC} \cdot \cos(\widehat{ACB})} \cdot \frac{\overline{BC} \cdot \cos(\widehat{ACB})}{\overline{AB} \cdot \cos(\widehat{BAH}_b)}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AH_c}}{\overline{H_cB}} \cdot \frac{\overline{BH_a}}{\overline{H_aC}} \cdot \frac{\overline{CH_b}}{\overline{H_bA}} = 1.$$

Portanto, novamente pelo teorema de Ceva AH_a , BH_b e CH_c concorrem em um único ponto, denominado **ortocentro**.

5 Alguns problemas

A seguir apresentamos oito problemas e suas soluções, nas quais usamos os teoremas de Ptolomeu ou de Menelaus. Estes problemas são de autoria própria, onde alguns tiveram como inspiração problemas ou desafios encontrados em paginas de redes sociais, outros em questões de olimpíadas matemáticas como as presentes no livro de GOMES (2016).

5.1 Problema 1

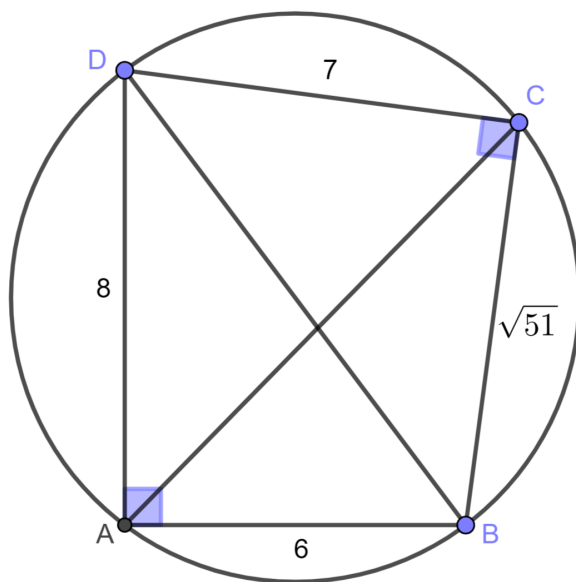
Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $\overline{AB} = 6$, $\overline{AD} = 8$, $\overline{BC} = \sqrt{51}$ e $\overline{DC} = 7$. Sabendo que $\angle BAD = \angle DCB = 90^\circ$, calcule \overline{AC} e \overline{BD} .

Solução:

Como $\angle BAD = \angle DCB = 90^\circ$, então $ABCD$ é inscritível, pois

$$\angle BAD + \angle DCB = 180^\circ.$$

Figura 52 – Quadrilátero $ABCD$: Problema 1



Fonte: Autora

O valor de \overline{BD} pode ser facilmente obtido aplicando o teorema de Pitágoras em um dos triângulos retângulos ABD ou BCD que têm \overline{BD} como hipotenusa. Assim:

$$\overline{BD}^2 = 7^2 + \sqrt{51}^2 \Rightarrow \overline{BD} = 10.$$

Agora aplicando o Teorema de Ptolomeu ao quadrilátero $ABCD$, obtemos:

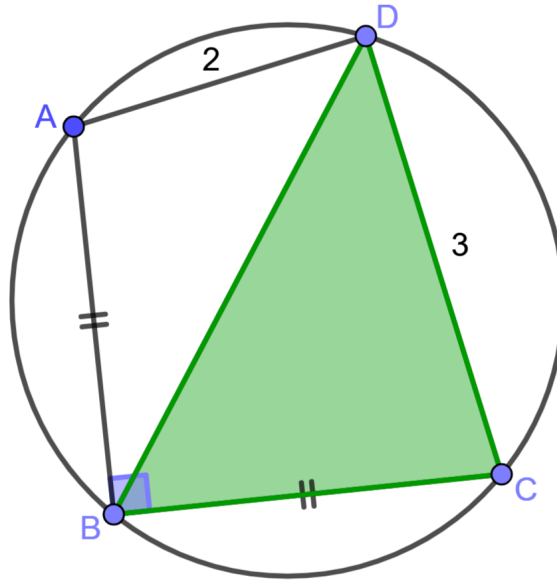
$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} \Rightarrow \overline{AC} \cdot 10 = 6 \cdot 7 + 8 \cdot \sqrt{51}$$

$$\Rightarrow \overline{AC} = \frac{42 + 8\sqrt{51}}{10} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{21 + 4\sqrt{51}}{5}.$$

5.2 Problema 2

Seja $ABCD$ um quadrilátero, com $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ e $\overline{AB} = \overline{BC}$, se $ABCD$ é inscritível, $\overline{AD} = 2$ e $\overline{DC} = 3$ como mostra a figura 53, qual a área do triângulo BCD ?

Figura 53 – Quadrilátero $ABCD$: Problema 2



Fonte: Autora

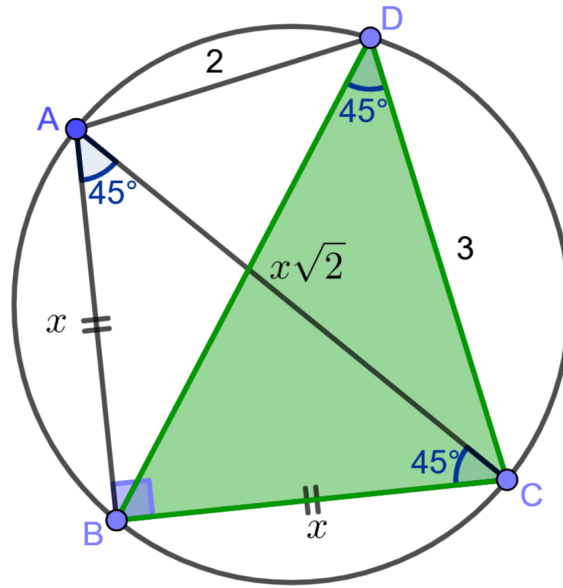
Solução:

Trace a diagonal AC e note que ABC é um triângulo retângulo isósceles, logo $\angle BAC = \angle ACB = 45^\circ$. Daí, $\angle BDC = \angle BAC = 45^\circ$ (ângulos determinados pelo arco BC).

Tomando $\overline{AB} = \overline{BC} = x$, tem-se $\overline{AC} = x\sqrt{2}$. Podemos calcular a área de BCD pelo seno de $\angle BDC$, para isso precisamos da medida de \overline{BD} , que encontraremos aplicando o Teorema de Ptolomeu ao quadrilátero $ABCD$:

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} \Rightarrow x\sqrt{2} \cdot \overline{BD} = x \cdot 3 + 2 \cdot x$$

Figura 54 – Solução Problema 2



Fonte: Autora

$$\Rightarrow x\sqrt{2} \cdot \overline{BD} = 5x \Rightarrow \overline{BD} = \frac{5x}{x\sqrt{2}} \Rightarrow \overline{BD} = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Logo,

$$A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{DC} \cdot \text{sen}(\angle BDC)$$

$$\Rightarrow A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot 3 \cdot \text{sen}(45^\circ)$$

$$\Rightarrow A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow A_{BCD} = \frac{15}{4} \text{ unidades de área.}$$

5.3 Problema 3

No triângulo ABC , D é o ponto médio de \overline{AB} , o ponto E está sobre \overline{BC} , tal que $\overline{BE} = 2\overline{EC}$. Sabendo que $\angle ADC = \angle BAE$, calcule o valor do ângulo $\angle BAC$.

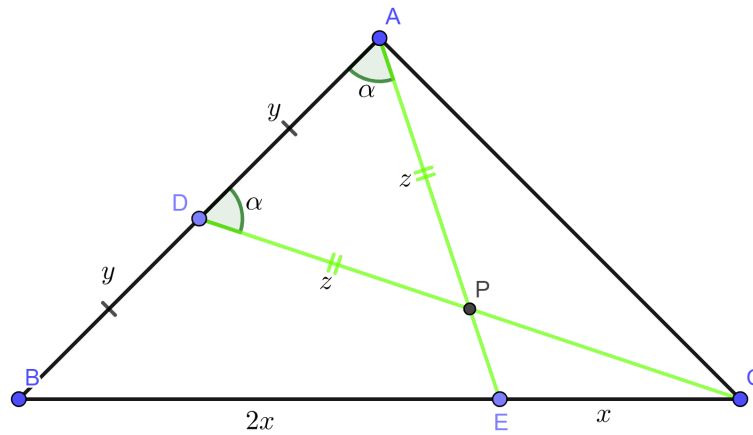
Solução:

Seja $AE \cap DC = \{P\}$. Note que:

- Como $\angle ADC = \angle BAE = \alpha$, então ADP é um triângulo isósceles de base AD , isto é, $PA = PD = z$;
- $\overline{BE} = 2x$ e $\overline{EC} = x$;
- $\overline{AD} = \overline{DB} = y$;

Reunimos essas informações notadas na figura 55 a seguir.

Figura 55 – Triângulo ABC : Problema 3



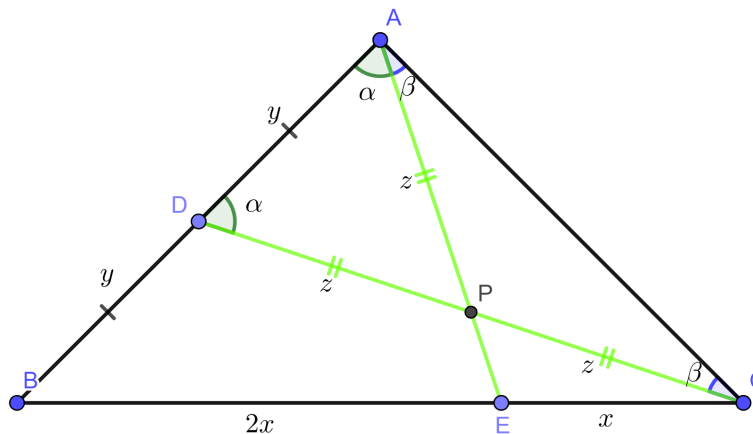
Fonte: Autora

Aplicando o Teorema de Menelaus ao triângulo BCD :

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{DA}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{CP}}{z} \cdot \frac{y}{2y} \cdot \frac{2x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{CP}}{z} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \Rightarrow \overline{CP} = z.$$

Figura 56 – Problema 3



Fonte: Autora

Logo $\overline{AP} = \overline{CP}$, então o triângulo APC é isósceles de base AC , isto é,

$$\angle ACP = \angle EAC = \beta.$$

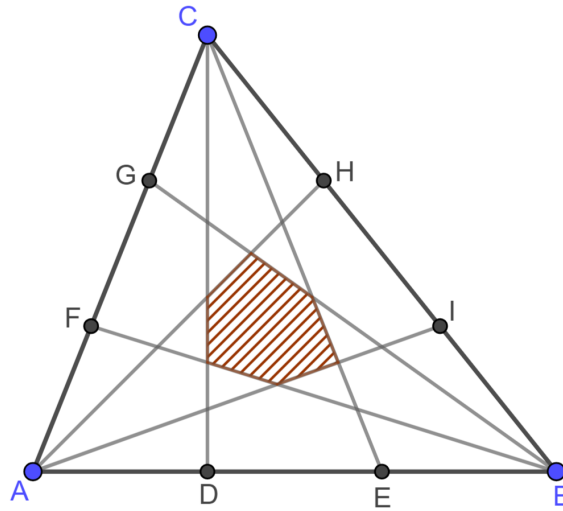
Daí, $\angle BAC = \alpha + \beta$ (figura 56). Mas pela soma dos ângulos internos de um triângulo, no triângulo ADC temos que:

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \angle BAC = 90^\circ.$$

5.4 Problema 4

Os lados AB , BC e CA do triângulo ABC da figura 57 estão divididos em três partes iguais cada um pelos pontos D , E , F , G , H e I . Sabendo-se que a soma das medidas dos comprimentos das cevianas AI , AH , BF , BG , CD e CE é 160cm , determine o perímetro do hexágono tracejado na figura 57.

Figura 57 – Problema 4



Fonte: Autora

Solução:

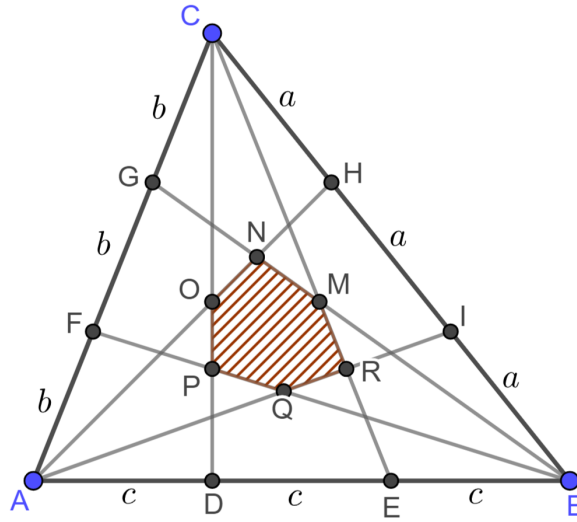
Sejam:

- $\overline{CH} = \overline{HI} = \overline{IB} = a$;
- $\overline{CG} = \overline{GF} = \overline{FA} = b$;
- $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{EB} = c$;
- $CE \cap BG = \{M\}$;

- $BG \cap AH = \{N\}$;
- $AH \cap CD = \{O\}$;
- $CD \cap BF = \{P\}$;
- $BF \cap AI = \{Q\}$;
- $AI \cap CE = \{R\}$.

Como mostra a figura 58.

Figura 58 – Problema 4: Solução



Fonte: Autora

Aplicando o Teorema de Menelaus ao triângulo BCE com pontos colineares A , R e I sobre as retas suportes dos seus lados:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BA}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{ER}}{\overline{RC}} \cdot \frac{\overline{CI}}{\overline{IB}} &= 1 \Rightarrow \frac{3c}{2c} \cdot \frac{\overline{ER}}{\overline{RC}} \cdot \frac{2a}{a} = 1 \Rightarrow 3 \cdot \frac{\overline{ER}}{\overline{RC}} = 1 \\ \Rightarrow \frac{\overline{CE} - \overline{RC}}{\overline{RC}} &= \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\overline{CE}}{\overline{RC}} - 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\overline{CE}}{\overline{RC}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\overline{RC}}{\overline{CE}} = \frac{3}{4}. \quad (1) \end{aligned}$$

Agora aplicando o Teorema de Menelaus ao triângulo ACE com pontos colineares B , M e G sobre as retas suportes dos seus lados:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{CM}}{\overline{ME}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{BA}} \cdot \frac{\overline{AG}}{\overline{GC}} &= 1 \Rightarrow \frac{\overline{CM}}{\overline{ME}} \cdot \frac{c}{3c} \cdot \frac{2b}{b} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{CM}}{\overline{ME}} \cdot \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{ME}}{\overline{CM}} = \frac{2}{3} \\ \Rightarrow \frac{\overline{CE} - \overline{CM}}{\overline{CM}} &= \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\overline{CE}}{\overline{CM}} - 1 = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\overline{CE}}{\overline{CM}} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{\overline{CM}}{\overline{CE}} = \frac{3}{5}. \quad (2) \end{aligned}$$

Fazendo a diferença de (1) por (2):

$$\frac{\overline{RC}}{\overline{CE}} - \frac{\overline{CM}}{\overline{CE}} = \frac{3}{4} - \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\overline{RC} - \overline{CM}}{\overline{CE}} = \frac{15 - 12}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{MR}}{\overline{CE}} = \frac{3}{20} \Rightarrow \overline{MR} = \frac{3}{20} \cdot \overline{CE}.$$

Aplicando de modo essencialmente análogo o Teorema de Menelaus para os outros lados do hexágono podemos perceber que o comprimento de cada um dos seus lados é $\frac{3}{20}$ da ceviana que o contém. Dessa forma o perímetro do hexágono tracejado é $\frac{3}{20}$ da soma dos comprimentos das cevianas. Daí, sendo $2p$ o perímetro do hexágono, tem-se:

$$2p = \frac{3}{20} \cdot 160 \Rightarrow 2p = 24cm.$$

5.5 Problema 5

Dado um trapézio $ABCD$ isósceles de bases $\overline{AD} = 6cm$ e $\overline{BC} = 14cm$. Determine o comprimento dos lados laterais e das diagonais do trapézio $ABCD$, sabendo que $\overline{AB} + \overline{AC} = 21cm$.

Solução:

Inicialmente, notemos que como $ABCD$ é um trapézio isósceles, tem-se:

- $\overline{AB} = \overline{DC} = a$;
- $\overline{AC} = \overline{BD} = d$;
- $ABCD$ é inscritível, pois $\angle ADC = \angle BAD = \alpha$ e $\angle DCB = \angle CBA = \beta$, assim

$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ.$$

As informações apontadas até agora constam na figura 59. Aplicando o Teorema de Ptolomeu ao trapézio $ABCD$:

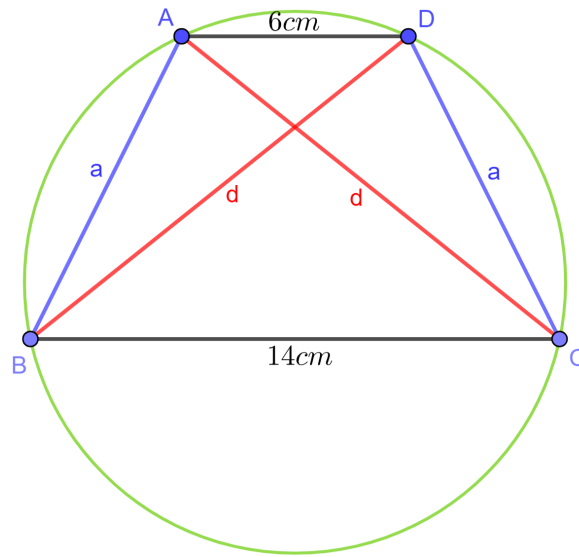
$$d \cdot d = 6 \cdot 14 + a \cdot a \Rightarrow d^2 = 84 + a^2$$

$$\Rightarrow d^2 - a^2 = 84 \Rightarrow (d + a) \cdot (d - a) = 84.$$

Mas por informação do enunciado do problema, temos $d + a = 21$, logo:

$$21 \cdot (d - a) = 84 \Rightarrow d - a = \frac{84}{21} \Rightarrow d - a = 4.$$

Agora, basta resolver o sistema:

Figura 59 – Trapézio isósceles $ABCD$ 

Fonte: Autora

$$\begin{cases} d + a = 21 \\ d - a = 4 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{25}{2} \text{ e } a = 21 - \frac{25}{2}.$$

Portanto, $d = 12,5cm$ e $a = 8,5cm$.

5.6 Problema 6

Observe a figura 60, ela representa um papel quadrado $ABCD$, com $10cm$ de lado, que foi dobrado na linha AM , em que M é o ponto médio do lado BC . Considerando que após a dobra A , B , M e B' são coplanares, determine a distancia de B a B' .

Solução:

Pelos dados enunciados, temos $\overline{BM} = \overline{B'M} = \frac{\overline{BC}}{2} = 5cm$ e $\overline{AB} = \overline{AB'} = 10cm$.

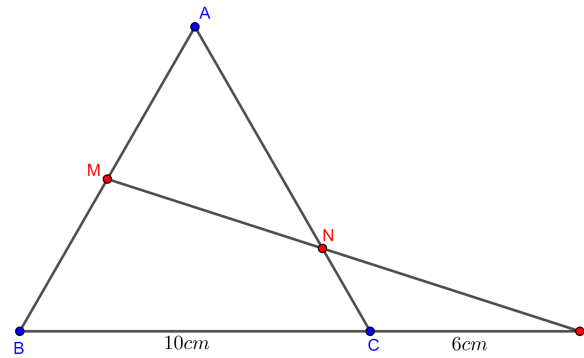
Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ABM :

$$\begin{aligned} \overline{AM}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BM}^2 \Rightarrow \overline{AM}^2 = 10^2 + 5^2 \\ \Rightarrow \overline{AM}^2 &= 125 \Rightarrow \overline{AM} = \sqrt{125} \Rightarrow \overline{AM} = 5\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Agora, aplicando o Teorema de Ptolomeu ao quadrilátero $ABMB'$, que é inscritível pois $\angle ABM = \angle MB'A = 90^\circ$. Obtém-se:

$$\overline{AM} \cdot \overline{BB'} = \overline{AB} \cdot \overline{B'M} + \overline{AB'} \cdot \overline{BM} \Rightarrow 5\sqrt{5} \cdot \overline{BB'} = 10 \cdot 5 + 10 \cdot 5$$

Figura 62 – Problema 7

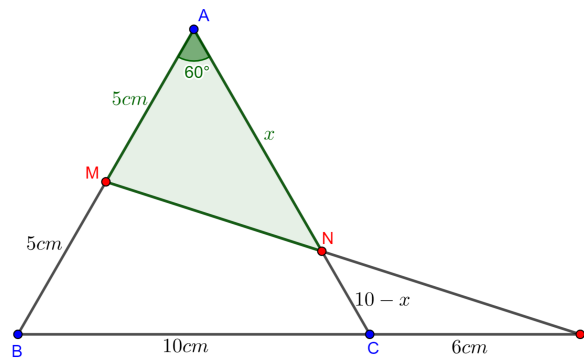


Fonte: Autora

Solução:

Como ABC é equilátero e M é ponto médio de AB , tem-se: $\angle BAC = 60^\circ$ e $\overline{AM} = \overline{MB} = 5\text{cm}$. Tome $\overline{AN} = x$, assim $\overline{CN} = 10 - x$.

Figura 63 – Problema 7: Solução



Fonte: Autora

Aplicando o Teorema de Menelaus ao triângulo ABC , obtemos:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} = 1 \Rightarrow \frac{5}{5} \cdot \frac{16}{6} \cdot \frac{10-x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{8}{3} \cdot \frac{10-x}{x} = 1 \Rightarrow 3x = 80 - 8x \Rightarrow 11x = 80 \Rightarrow x = \frac{80}{11}.$$

Agora, conhecemos dois lados do triângulo AMN e o ângulo entre eles, assim usando a fórmula do seno para áreas:

$$A_{AMN} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{80}{11} \cdot \text{sen}60^\circ \Rightarrow A_{AMN} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{80}{11} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow A_{AMN} = \frac{100}{11} \sqrt{3} \text{cm}^2.$$

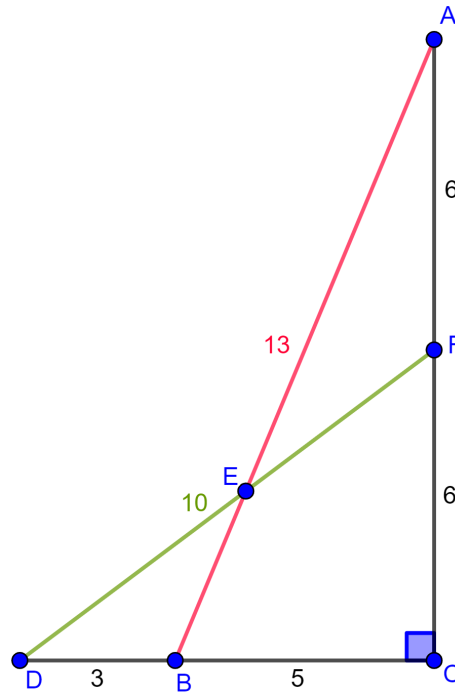
5.8 Problema 8

Sejam ABC e FDC , dois triângulos retângulos em C , onde C é um vértice comum. Sendo $AB \cap FD = \{E\}$, determine $\overline{EB} + \overline{ED}$, sabendo que $\overline{AB} = 13$, $\overline{FD} = 10$, $\overline{BC} = 5$ e $2\overline{FC} = \overline{AC}$.

Solução:

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo ABC encontramos $\overline{AC} = 12$, como $2\overline{FC} = \overline{AC}$, então $\overline{FC} = 6$. Agora ao triângulo FDC obtém-se $\overline{DC} = 8$.

Figura 64 – Problema 8: Solução



Fonte: Autora

Temos ainda:

- $\overline{AF} = 12 - 6 \Rightarrow \overline{AF} = 6$;
- $\overline{DB} = 8 - 5 \Rightarrow \overline{DB} = 3$.

Agora aplicando o Teorema de Menelaus ao triângulo ABC :

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{8}{3} \Rightarrow \overline{AE} = \frac{8}{3} \cdot \overline{EB}.$$

Como $\overline{AE} + \overline{EB} = \overline{AB} = 13$, tem-se:

$$\frac{8}{3} \cdot \overline{EB} + \overline{EB} = 13 \Rightarrow \frac{11}{3} \cdot \overline{EB} = 13 \Rightarrow \overline{EB} = \frac{39}{11}.$$

Aplicando o Teorema de Menelaus novamente, agora no triângulo FDC :

$$\frac{\overline{FE}}{\overline{ED}} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CA}}{\overline{AF}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{FE}}{\overline{ED}} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{6} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{FE}}{\overline{ED}} = \frac{5}{6} \Rightarrow \overline{FE} = \frac{5}{6} \cdot \overline{ED}.$$

Mas $\overline{FE} + \overline{ED} = \overline{FD} = 10$, assim:

$$\frac{5}{6} \cdot \overline{ED} + \overline{ED} = 10 \Rightarrow \frac{11}{6} \cdot \overline{ED} = 10 \Rightarrow \overline{ED} = \frac{60}{11}.$$

Portanto,

$$\overline{EB} + \overline{ED} = \frac{39}{11} + \frac{60}{11} = \frac{99}{11} = 9.$$

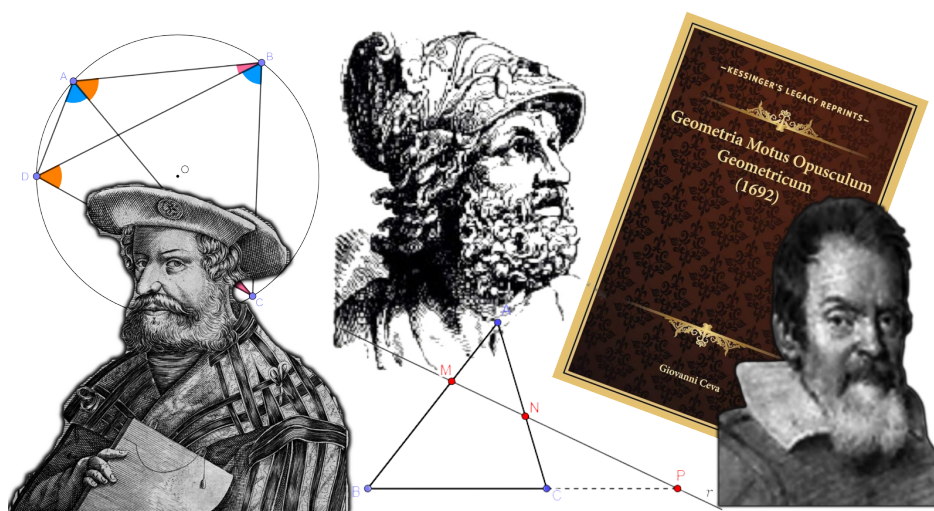
6 Uma proposta de Eletiva

No contexto do novo ensino médio, as disciplinas eletivas são componentes curriculares opcionais que os estudantes podem escolher conforme seus interesses, dentre as ofertadas em sua instituição de ensino. Diferentemente das disciplinas obrigatórias, as eletivas permitem uma personalização maior da trajetória educativa, promovendo um aprendizado mais alinhado com os projetos de vida dos alunos. Essas disciplinas são projetadas para complementar a formação geral e proporcionar experiências diversificadas que possam despertar a curiosidade e o potencial dos estudantes.

Neste capítulo apresentamos uma proposta de disciplina eletiva, desenvolvida com base na pesquisa e execução desta dissertação, com o intuito de incentivar a disseminação dos teoremas aqui abordados, e como ferramenta para melhorar a base dos conhecimentos geométricos dos alunos que tiverem a oportunidade de cursá-la. Esta disciplina está em andamento no corrente ano na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Deputado Pedro Pascoal de Oliveira na cidade de Juazeirinho Paraíba, cada Encontro na seção 6.1.11 equivale a duas horas/aula, vale salientar que o tempo pedagógico pode e deve ser ajustado a depender do nível de cada turma.

6.1 DISCIPLINA ELETIVA

Figura 65 – Imagem criada para apresentação da disciplina aos alunos



Fonte: Autora

6.1.1 TÍTULO

Redescobrimos teoremas históricos da Geometria Plana: Ptolomeu, Menelaus e Ceva

6.1.2 COMPONENTE CURRICULAR

Matemática e suas tecnologias

6.1.3 JUSTIFICATIVA

A geometria e os estudos em torno dela, foram de fundamental importância para a evolução humana, desde a criação da roda, até os dias atuais, a geometria auxilia o desenvolvimento de civilizações, em sua criação, constante crescimento e modernização para se adaptar a cada geração. Está presente, além da arquitetura, em toda a segurança, sistemas hidráulicos, elétricos, como também na própria formação do universo. Dessa forma a geometria é uma maneira, ou uma ferramenta, indispensável para compreender e interpretar o mundo ao nosso redor. Os teoremas de Ptolomeu, Menelaus e Ceva, não fazem parte da grade curricular do ensino médio, então essa disciplina eletiva irá apresentá-los para os alunos de forma dinâmica e interativa, não deixando de lado a matemática dedutiva nem as demonstrações teóricas.

6.1.4 OBJETIVOS

- Aprofundar os conhecimentos básicos em geometria plana;
- Identificar e compreender a importância histórica da geometria;
- Utilizar ferramentas simples entendendo sua função;
- Aprender novos conceitos;
- Desenvolver habilidades com aplicativos e software que podem ser utilizados para construção, exploração e melhor compreensão dos conteúdos trabalhados;
- Adquirir novas ferramentas para a resolução de problemas geométricos;
- Desenvolver habilidades na resolução de problemas;
- Instigar a curiosidade e fomentar o interesse pela matemática e suas tecnologias.

6.1.5 CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

- Ponto, reta e plano;
- Medição de segmento;
- Medição de ângulos;

- Triângulos: classificação quanto a lados e ângulos;
- Congruência de triângulos;
- Paralelismo;
- O teorema de Thales;
- Semelhança de triângulos;
- Quadriláteros notáveis;
- Círculos;
- Quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis;
- Teorema de Ptolomeu
- Colinearidade e concorrência;
- Teorema de Menelaus;
- Teorema de Ceva.

6.1.6 HABILIDADES DESENVOLVIDAS

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras.

(EM13MAT308) Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança.

(EM13MAT406) Utilizar os conceitos básicos de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

(EM13MAT407) Interpretar e construir vistas ortogonais de uma figura espacial para representar formas tridimensionais por meio de figuras planas.

(EM13MAT512) Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos.

6.1.7 METODOLOGIA

- Aulas expositivas dialogadas;
- Aulas dinâmicas com oficinas;
- Pesquisas orientadas no laboratório de informática;
- Tarefas e problemas a serem solucionados;
- Uso de régua e compasso para construções;
- Uso de geogebra para construções dinâmicas e exploração;
- Apresentações de seminários, colocando o aluno como protagonista.

6.1.8 RECURSOS DIDÁTICOS

- Papel e lápis;
- Réguas, transferidores e esquadros;
- Compasso;
- Computadores;
- Recursos áudio visuais;
- Softwares educacionais.

6.1.9 PROPOSTA DE CULMINÂNCIA

A culminância será através de oficina presencial onde os estudantes irão expor aos demais seus trabalhos realizados ao longo das aulas.

6.1.10 AVALIAÇÃO

Será um processo de contínuo acompanhamento qualitativo na evolução do estudante. O mesmo será avaliado a partir do interesse, consciência crítica, participação e autonomia na abordagem dos assuntos a serem discutidos, analisados e apresentados na eletiva.

6.1.11 FASES, METAS E AÇÕES

Encontro 01 - Ponto, reta e plano.

Encontro 02 - Medição de segmento e medição de ângulos.

Encontro 03 - Triângulos: classificação quanto a lados e ângulos.

Encontro 04 - Exercícios e problemas básicos.

Encontro 05 - Congruência de triângulos.

Encontro 06 - Exercícios e problemas básicos.

Encontro 07 - Paralelismo.

Encontro 08 - Construções com réguas e compasso explorando os conceitos aprendidos.

Encontro 09 - O teorema de Thales.

Encontro 10 - Semelhança de triângulos.

Encontro 11 - Exercícios e problemas de média dificuldade.

Encontro 12 - Quadriláteros notáveis.

Encontro 13 - Círculos.

Encontro 14 - Explorando o Geogebra construindo triângulos, quadriláteros e círculos.

Encontro 15 - Quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis.

Encontro 16 - Teorema de Ptolomeu.

Encontro 17 - Exercícios e problemas de média dificuldade.

Encontro 18 - Usando o geogebra como auxílio na resolução de problemas.

Encontro 19 - Colinearidade e concorrência.

Encontro 20 - Teorema de Menelaus.

Encontro 21 - Teorema de Ceva.

Encontro 22 - Exercícios e problemas avançados.

Culminância (Encerramento)

7 Construções no GeoGebra

Este capítulo é dedicado ao Software Geogebra, tratamos sobre esta ferramenta educacional suas funções e aplicações, com instruções básicas da sua interface, até outros detalhes que facilitam sua utilização. Apresentamos o passo a passo de cada construção das figuras presentes no terceiro e quarto capítulo, nas seções 7.3 e 7.4.

7.1 Sobre o GeoGebra

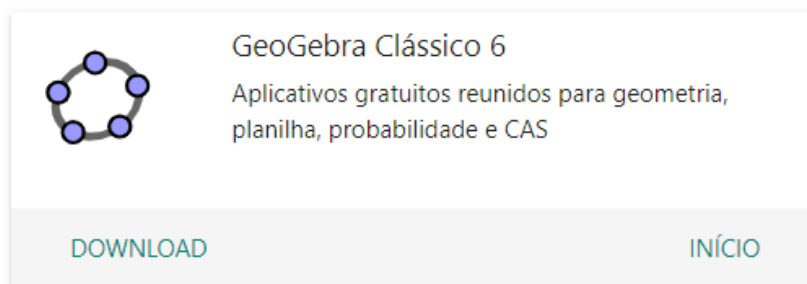
O GeoGebra é um software educacional de matemática dinâmica que combina geometria, álgebra e cálculo. O termo GeoGebra deriva da junção das palavras gregas geo (terra) e gebra (gráficos), refletindo a sua ênfase na visualização de conceitos matemáticos através de representações gráficas. Desenvolvido por Markus Hohenwarter, professor de Matemática austríaco, iniciou a criação do GeoGebra como parte de seu projeto de doutorado na Universidade de Salzburgo em 2001.

O software foi concebido como uma resposta à demanda por ferramentas educacionais mais acessíveis, intuitivas e eficazes no ensino e aprendizado da matemática, tem uma trajetória evolutiva notável, passando por diversas atualizações para se tornar uma ferramenta versátil e de fácil utilização. Tendo sua primeira versão lançada em 2002, nos anos seguintes ganhou popularidade em todo o mundo. Em 2008 tornou-se uma organização independente dedicada a desenvolver e promover o software em escala global, recebe o nome de Associação GeoGebra. Daí em diante, o GeoGebra passou por muitas atualizações e melhorias.

Desde o seu início, o GeoGebra tem se destacado como uma ferramenta valiosa na educação matemática. Professores e estudantes podem criar construções interativas, explorar relações matemáticas e visualizar conceitos abstratos de forma concreta. A interface amigável e as diversas funcionalidades, como a manipulação dinâmica de objetos geométricos e a integração de álgebra e cálculo, a torna uma poderosa ferramenta de ensino, proporcionando uma abordagem mais prática e intuitiva no aprendizado da matemática.

Existem versões do GeoGebra disponíveis para diferentes plataformas. Para computadores a versão mais atual (até a data da pesquisa) é o GeoGebra Clássico 6 (figura 66). No Windows pode ser baixado diretamente do site oficial ou através da Microsoft Store, para um computador com o sistema Linux ou Mac OS existem versões específicas disponíveis para download no site oficial do GeoGebra, e em ambos os casos pode-se usar as ferramentas diretamente no site de forma online sem necessidade de instalação,

Figura 66 – GeoGebra Clássico 6



Fonte: <<https://www.geogebra.org/download?lang=pt>>

com possibilidade de criar uma conta para entrar no sistema, gravar e acessar seus arquivos em todos os seus dispositivos. Para dispositivos móveis existem versões de aplicativos oficiais disponíveis, que reúne ferramentas para geometria, planilha, probabilidade e CAS (Computer Algebra System), na Google Play Store para dispositivos Android (figura 67) e para iOS na App Store.

Figura 67 – Aplicativos GeoGebra para dispositivos móveis










Fonte: Google Play Store

O aplicativo certo para você é aquele que atende às suas necessidades, a depender do seu objetivo, principalmente para uso em sala de aula já que a maioria dos alunos tem acesso a um smartphone, porém nem todos têm computadores, saber qual aplicativo utilizar pode facilitar um pouco esse processo. A figura 68 a seguir fornece uma visão geral de quais recursos estão disponíveis em quais aplicativos, por meio de uma comparação de aplicativos matemáticos do GeoGebra.

Neste trabalho utilizamos a versão 6.0.826.0 do GeoGebra Clássico 6 em um computador com Windows 11. Aqui estão alguns dos principais recursos disponíveis:

Figura 68 – Comparação de aplicativos matemáticos GeoGebra

| apps / features |  Scientific |  Graphing |  Geometry |  3D |  CAS |  Suite |  Classic |
|-------------------------|--|--|--|--|---|---|---|
| Numeric calculations | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Function operations | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Fraction operations | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Graphing | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Sliders | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Vectors & matrices | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Table of values | | ✓ | | | ✓ | ✓ | ✓ |
| Geometric constructions | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| 3D graphing | | | | ✓ | | ✓ | ✓ |
| Probability Calculator | | | | | | ✓ | ✓ |
| Derivatives & integrals | | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Equation solving | | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Symbolic calculations | | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Spreadsheet | | | | | | | ✓ |

Fonte: Learn GeoGebra Classic

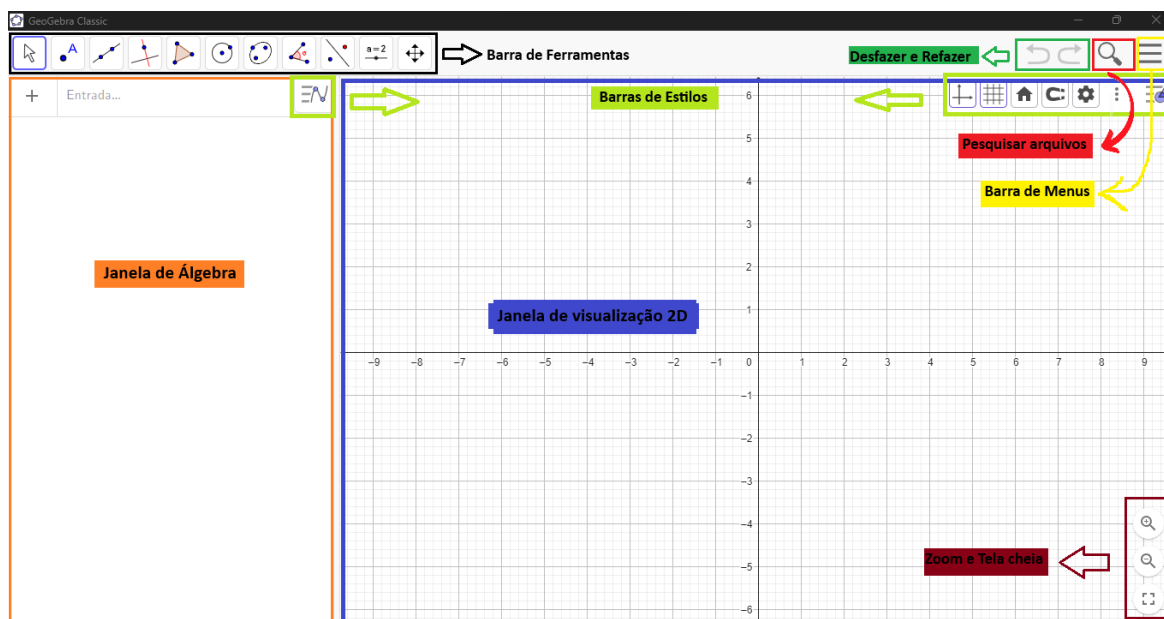
- **Gráficos:** Represente funções e equações, gráficos 2D e 3D, e explore suas propriedades.
- **Geometria:** Construa pontos, retas, círculos, ângulos, polígonos, poliedros, faça transformações geométricas e outros objetos.
- **Álgebra:** Resolva equações, simplifique expressões e trabalhe com álgebra simbólica.
- **Planilha:** Crie tabelas, insira dados e realize cálculos.
- **Probabilidade:** Explore conceitos de probabilidade e estatísticas.
- **CAS (Computer Algebra System):** Utilize um sistema de álgebra computacional para resolver problemas mais complexos.

Na seção a seguir as instruções são todas baseadas nesta versão, com foco nas ferramentas de gráficos e geometria.

7.2 Instruções preliminares

O GeoGebra é um software para todos os níveis de ensino, por ser muito intuitivo se torna fácil de manipular. Primeiramente precisamos reconhecer os elementos básicos na página inicial do Geogebra Clássico, para isso observemos a figura 69 onde estão destacados os elementos a seguir:

Figura 69 – Elementos básicos



Fonte: Autora

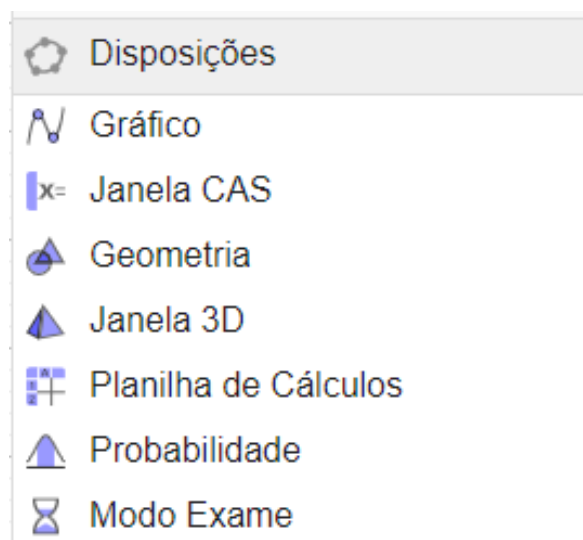
- **Barra de Ferramentas:** oferece acesso rápido através dos ícones que representam diversas ferramentas e comandos, da esquerda para direita tem-se as opções para “Mover”, criar “Pontos”, “Retas” e segmentos, retas com “Posições Relativas” a outro elemento, “Polígonos”, “Círculos” (setor circular e arco), “Cônicas”, “Ângulos” e outras medidas, “Transformações” isométricas e homotéticas, “Controles” deslizante e textos, por fim opções referentes “Exibição” da janela de visualização que está sendo usada;
- **Desfazer e Refazer:** autoexplicativo;
- **Pesquisar arquivos:** pode localizar arquivos próprios ou de terceiros de forma online;
- **Barra de Menus:** tem as opções relacionadas ao arquivo como criar novo, abrir, salvar, compartilhar, entre outros, opções de edição, é por onde se tem acesso as demais janelas disponíveis no GeoGebra, configurações básicas e configuração da

barra de ferramentas, em “Ajuda & Feedback” podemos obter o link para um tutorial do GeoGebra.org e por fim tem-se a opção de entrar com uma conta;

- **Janela de Álgebra:** é a janela em que são exibidas as coordenadas, equações, medidas e outras características dos objetos construídos através do campo de ENTRADA por digitação de comandos ou construídos diretamente pela Barra de Ferramentas. O GeoGebra gera automaticamente, na Janela de visualização que estiver em uso, representações gráficas para o que é inserido nessa área;
- **Barras de Estilos:** quando temos objetos criados, permite configurar estes objetos tanto em aparência quanto a rótulos e valores que os influenciam, por exemplo personalizar as cores e espessura;
- **Janela de visualização 2D:** as janelas de visualização, tanto a 2D que é a principal utilizada neste trabalho como a 3D, são a parte principal da área de interação do GeoGebra, onde são exibidas as representações gráficas dos objetos matemáticos construídos, sendo possível desenhar, mover e interagir com os objetos;
- **Zoom e Tela cheia:** autoexplicativo.

Além destes elementos da interface inicial podemos acessar diferentes opções de visualização, sendo que cada uma pode ser mais atrativa ou necessária para o usuário, dependendo do tópico que este deseja explorar. Tem-se acesso a estas diferentes disposições, por meio da Barra de Menus em seguida clicando em Disposições, será apresentada as opções como mostra a figura 70.

Figura 70 – Disposições



Fonte: Autora

Segue mais algumas instruções importantes:

- Para não exibir um elemento criado basta clicar no ícone que fica ao lado de sua representação na janela de álgebra, o mesmo pode ser feito ao clicar com o botão direito sobre o objeto na janela de visualização e selecionando "Mostrar Objetos".
- Para alterar um objeto já criado basta selecionar o ícone Mover, na Barra de Ferramentas, clicar no objeto que se deseja alterar e movimentá-lo pela janela de visualização, ou clicar na entrada a ser alterada e editar o comando desejado.
- Para renomear um elemento você poderá seguir o comando descrito anteriormente e editar o nome desejado.

Nas seções que se seguem, vamos detalhar o passo a passo das construções realizadas neste trabalho, especificamente no terceiro e quarto capítulo, para gerar as figuras de autoria própria, não serão expostos detalhes quanto a aparência, como estilo, cor, espessura, tamanho e renomeação ou ocultação de rótulos, pois qualquer mudança com relação a aparência dos objetos construídos não irão alterar o teor matemático da construção.

As construções feitas estão disponíveis na plataforma online do GeoGebra, os links de acesso podem ser encontrados no Apêndice A para as construções descritas a seguir, como também das construções feitas para os problemas, que não serão detalhadas, mas podem ser acessadas através do Apêndice B. Selecionando, no menu superior direito do site, a opção “Abrir com o GeoGebra App”, será possível fazer alterações e consultar o protocolo de construção do arquivo, este recurso é muito útil para entender como as construções foram criadas.

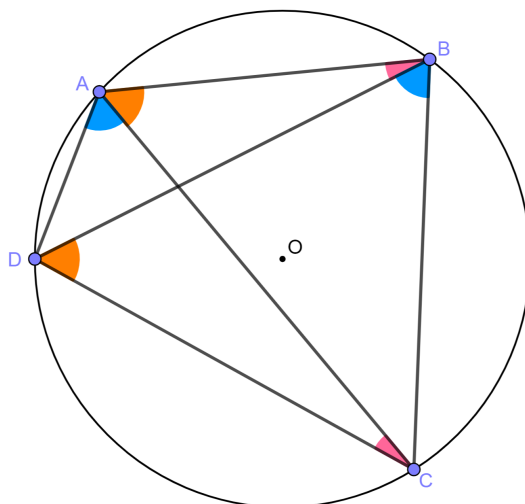
Para ter acesso ao Protocolo de Construção:

1. Selecione a Barra de Estilo da direita;
2. Clique no ícone \vdots (três pontos na vertical);
3. Selecione a opção Protocolo de Construção.

7.3 Construções: Capítulo 3

7.3.1 Figura 14

1. Construir um círculo digitando a equação $x^2 + y^2 = r^2$ no campo de Entrada, onde r deve ser o valor do raio que se deseja, ou clicando na ferramenta Círculo e em seguida em dois pontos, pré-existentes ou não, na janela de visualização, os



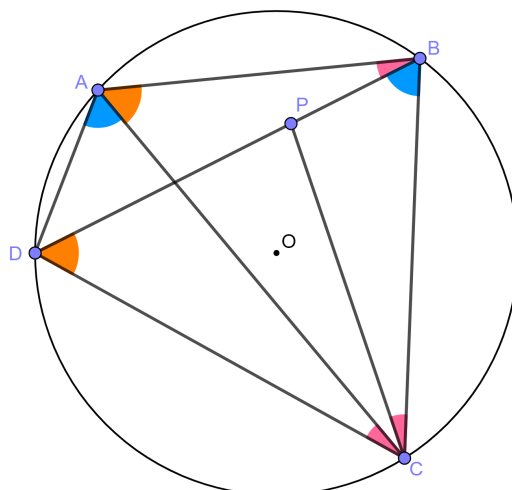
pontos são o centro e um ponto do círculo. Renomear e ocultar os pontos base para o círculo;

2. Selecione a ferramenta para Pontos e na janela de visualização clique sobre o círculo quatro vezes na posição que desejar. Como os pontos base foram renomeados, agora criamos os pontos A, B, C e D que serão os vértices do quadrilátero. Os pontos também podem ser inseridos pela Janela de Álgebra da forma $A = (x, y)$, desde que satisfaça $x^2 + y^2 = r^2$;
3. Na ferramenta de Retas selecione Segmento, construa os lados e as diagonais do quadrilátero $ABCD$ clicando consecutivamente em dois pontos que são as extremidades dos segmentos;
4. Clique na ferramenta de Ângulos e selecione os três pontos que determinam cada ângulo, $\angle ABD$, $\angle ACD$, $\angle CAB$, $\angle CDB$, $\angle DAC$ e $\angle DBC$. O sentido do ângulo que vai se formar é sempre o anti-horário, logo a ordem que ocorre a seleção dos pontos determina o ângulo que será construído.

7.3.2 Figura 15

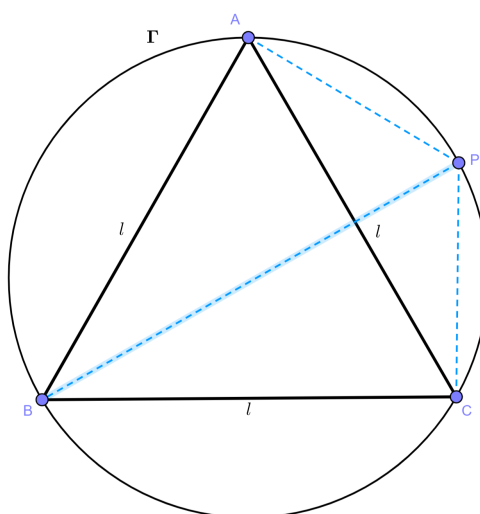
Dando continuidade na construção anterior, para marcar o ponto P de modo que $\angle BCP = \angle ACD$:

1. Na ferramenta de Ângulos selecione Ângulo com Amplitude Fixa, clique no ponto B , no ponto C , nesta ordem, no campo que será aberto para digitação da medida do ângulo digite “ $= a$ ”, onde a é o rótulo do $\angle ACD$. Nesse momento é gerado automaticamente um ponto B' dado pela rotação de B pelo ângulo a , onde $\angle BCB'$ é o ângulo que construímos;
2. Clique na ferramenta para Retas em Segmento, daí selecione os pontos C e B' ;



3. Na ferramenta de Pontos selecione Interseção de Dois Objetos, clique sobre os segmentos BD e CB' . O ponto de interseção é o ponto P desejado;
4. Por fim trace o segmento CP e oculte o ponto B' e o segmento CB' .

7.3.3 Figura 16

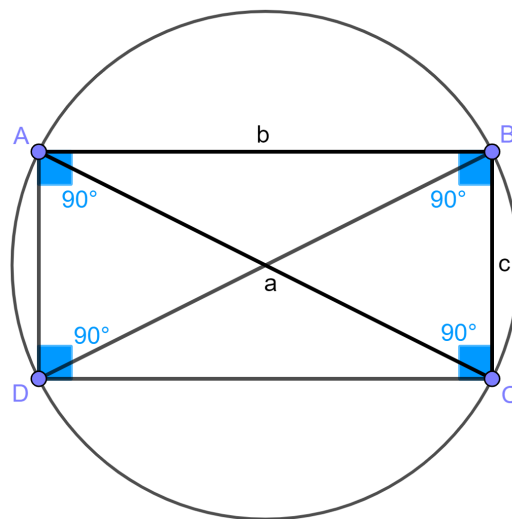


Há várias formas de construir um triângulo equilátero, a mais simples é usando a ferramenta de Polígonos e selecionando Polígono Regular, porém essa não foi a forma utilizada nessa construção.

1. Na ferramenta de Retas selecione Segmento, clique em dois pontos na Janela de Visualização, estar criado o segmento AB ;
2. Selecione a ferramenta Círculos, clique em A e em B , depois em B e A , nesta ordem, agora temos dois círculos com centros em A e B , ambos com raio \overline{AB} ;

3. Na ferramenta de Pontos escolha Interseção de Dois Objetos, ao clicar nos dois círculos teremos o ponto C e D , escolheremos C para ser o terceiro vértice do triângulo equilátero;
4. Construa os segmentos BC e AC , oculte os círculos criados até aqui e o ponto D ;
5. Para o círculo circunscrito ao triângulo ABC , selecione a ferramenta Círculos e escolha Círculo definido Por Três Pontos, clique nos vértices do triângulo;
6. Marque o ponto P no arco menor AC , usando a ferramenta Pontos;
7. Por fim, com a ferramenta Retas em Segmento, construa os segmentos AP , BP e CP .

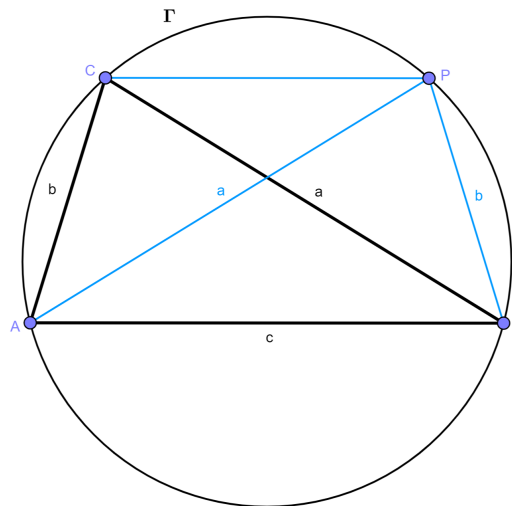
7.3.4 Figura 17



1. Em Retas selecione Segmento, clique em dois pontos na Janela de Visualização, criamos o segmento AB ;
2. Na ferramenta de Posições Relativas selecione Reta Perpendicular, clique em B e no segmento AB ,
3. Marque o ponto C sobre a reta criada, usando a ferramenta Pontos;
4. Em Posições Relativas selecione Reta Paralela, clique em C e no segmento AB , criamos a reta r ;
5. Novamente em Posições Relativas selecione Reta Perpendicular, clique em A e no segmento AB , criamos a reta s ;

6. Na ferramenta de Pontos escolha Interseção de Dois Objetos, clique nas retas r e s , o ponto D de interseção é o quarto ponto do retângulo;
7. Em Retas escolha Segmento, construa os segmentos BC , AC , BD , AD e CD . Oculte as retas suportes utilizadas;
8. Selecione a ferramenta de Ângulos e clique nos três pontos que determinam cada ângulo, ($\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ e $\angle DAB$;
9. Enfim, selecione a ferramenta Círculos e escolha Círculo definido Por Três Pontos, clique em três dos vértices do retângulo.

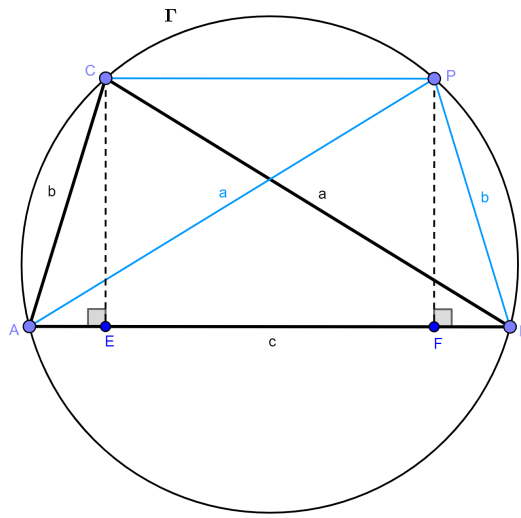
7.3.5 Figura 18



1. Usando a ferramenta Pontos, clique em três pontos na Janela de Visualização, na posição que desejar desde que não sejam colineares;
2. Em Retas escolha Segmento, construa os segmentos AB , AC e BC , temos ABC um triângulo qualquer;
3. Para construir Γ , o círculo circunscrito ao triângulo ABC , selecione a ferramenta Círculos e escolha Círculo definido Por Três Pontos, clique nos vértices do triângulo;
4. Marcaremos em Γ o ponto P de modo que $AP = BC = a$ e $BP = AC = b$, para isso em Posições Relativas selecione Reta Paralela, clique em C e no segmento AB , criamos a reta r ;

5. Na ferramenta de Pontos escolha Interseção de Dois Objetos, clique na reta r e no círculo Γ , essa interseção nos dá o ponto P desejado;
6. Em Retas escolha Segmento, construa os segmentos AP , BP e CP . Oculte a reta r .

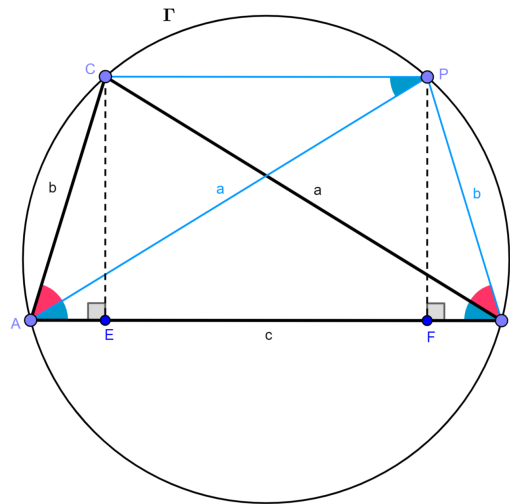
7.3.6 Figura 19



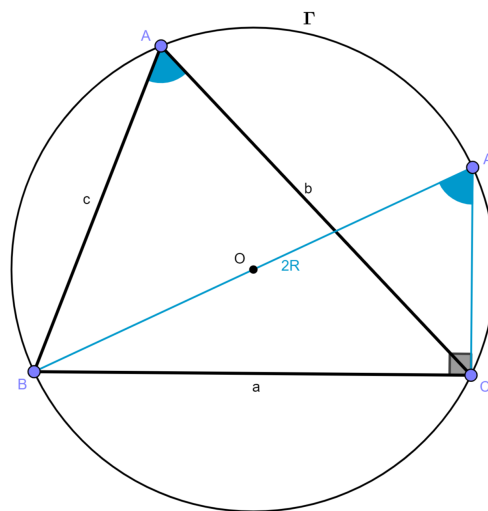
1. Para marcar E e F , projeções ortogonais de C e P no Segmento AB ,
2. Em ferramenta de Posições Relativas selecione Reta Perpendicular, clique em C e no segmento AB , depois P e no segmento AB , criamos as retas s e t ;
3. Na ferramenta de Pontos escolha Interseção de Dois Objetos, clique na reta s e no segmento AB , depois na reta t e no segmento AB , temos os pontos E e F ;
4. Em Retas escolha Segmento, construa os segmentos CE e PF . Oculte as retas s e t .
5. Selecione a ferramenta de Ângulos e clique nos três pontos que determinam os ângulos $\angle CEA$ e $\angle BFP$.

7.3.7 Figura 20

1. Enfim, para a figura 20, selecione a ferramenta de Ângulos e clique nos três pontos que determinam os ângulos $\angle PAC$, $\angle BAP$, $\angle CPA$, $\angle CBA$ e $\angle PBC$.



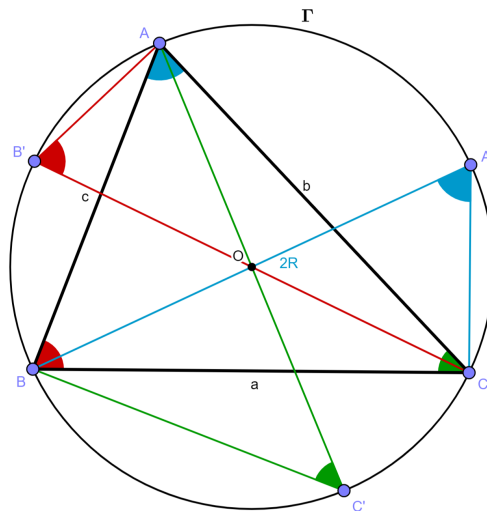
7.3.8 Figura 21



1. Construir um círculo Γ , com a ferramenta Círculos, dos pontos base não ocultaremos o centro;
2. Para nomear, use a ferramenta Controles e escolha Texto digite o símbolo Γ , nas configurações do círculo já criado habilite “Usar texto como legenda” e selecione texto1, ou simplesmente posicione o texto onde desejar;
3. Com a ferramenta Pontos selecionada, clique 3 vezes sobre o círculo, serão criados A , B e C sobre Γ ;
4. Em Retas selecione Segmentos, e construa os segmentos AC , AB e BC ;
5. Com a ferramenta Ângulos construa o $\angle BAC$;

6. Na ferramenta de Transformações selecione Reflexão com Relação a um Ponto, clique em B e no ponto que é centro do círculo Γ , A' é o ponto gerado;
7. Em Retas selecione Segmentos, e construa os segmentos BA' e $A'C$,
8. Em Ângulos construa: $\angle BA'C$ e $\angle A'CB$ (este último, apenas para destacar que é reto);

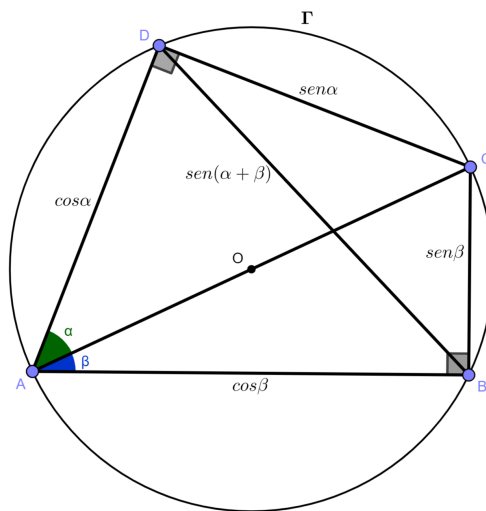
7.3.9 Figura 22



1. Repete-se o processo dos três últimos passos da figura anterior, para construir as reflexões dos pontos A e C com relação ao centro de Γ , os segmentos necessários e os ângulos em destaque. Observação: o $\angle A'CB$ foi ocultado.

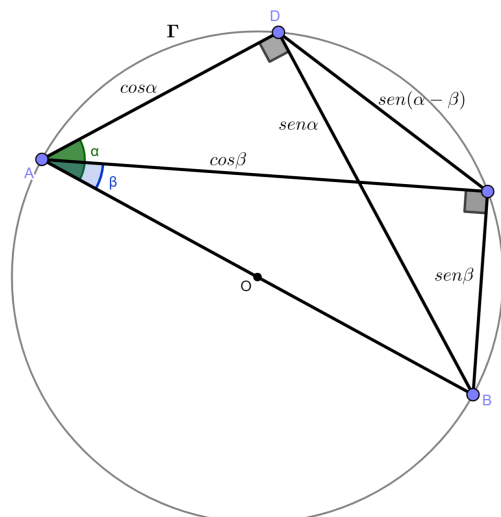
7.3.10 Figura 23

1. Criar um círculo clicando na ferramenta Círculo e em seguida em dois pontos na Janela de visualização pré-existentes ou não, os pontos são o centro e um ponto do círculo, renomear o centro como O ;
2. Com a ferramenta Pontos construa sobre o círculo os pontos A , B e D ;
3. Em Retas selecione Segmentos, e construa os segmentos BD , DA e AB ;
4. Para que a diagonal \overline{AC} seja diâmetro do círculo, construa o ponto C como reflexão do ponto A com relação ao ponto O , indo em Transformações e Reflexão com Relação a um Ponto;
5. Em Retas selecione Segmentos, e construa os segmentos AC , BC e DC ;



6. Destaque os ângulos $\angle CAD = \alpha$ e $\angle BAC = \beta$, e os ângulos retos $\angle ADC$ e $\angle CBA$, usando a ferramenta Ângulos;
7. Para nomear os segmentos em função dos senos de α e β , na ferramenta Contro-les escolha texto digite a expressão desejada, cada expressão deve ser um texto independente, nas configurações do objeto já criado habilite “Usar texto como legenda” e selecione o texto correspondente, ou simplesmente posicione o texto onde desejar.

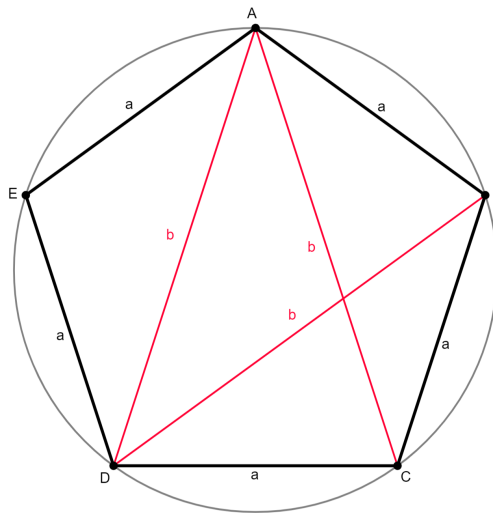
7.3.11 Figura 24



1. Criar um círculo clicando na ferramenta Círculo e em seguida em dois pontos na Janela de visualização pré-existentes ou não, os pontos são o centro e um ponto do círculo, renomear o centro como O ;

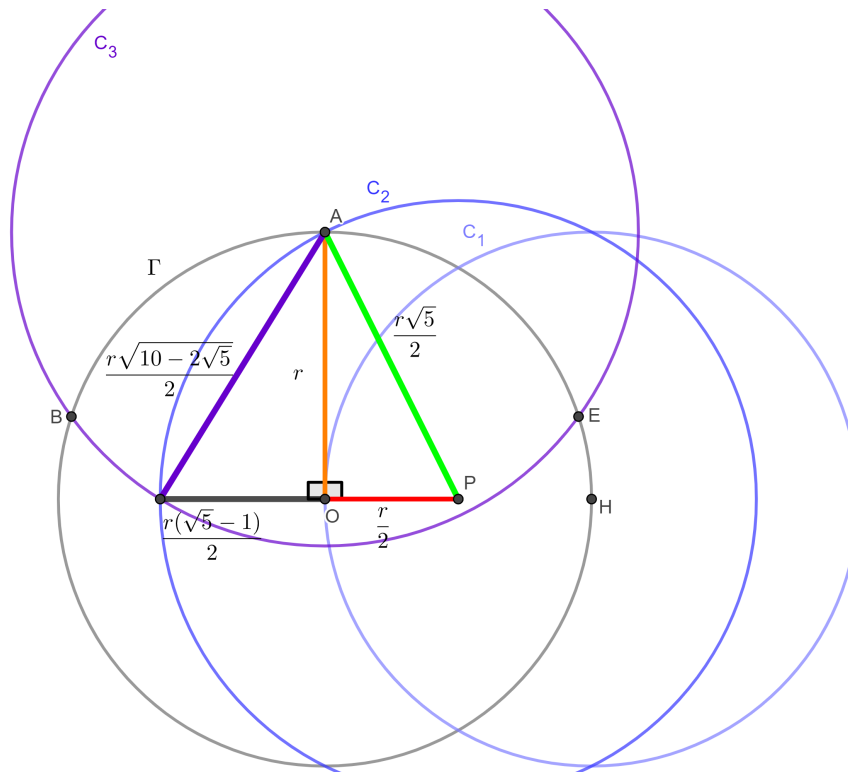
2. Com a ferramenta Pontos construa sobre o círculo os pontos A , C e D ;
3. Para que o lado \overline{AB} seja diâmetro do círculo, construa o ponto B como reflexão do ponto A com relação ao ponto O , indo em Transformações e Reflexão com Relação a um Ponto;
4. Com a ferramenta Mover ordene os pontos, na ordem alfabética no sentido anti-horário sobre o círculo;
5. Em Retas selecione Segmentos, e construa os segmentos AB , BC , CD , DA , AC e BD ;
6. Destaque os ângulos $\angle BAD = \alpha$ e $\angle BAC = \beta$, e os ângulos retos $\angle ADB$ e $\angle ACB$, usando a ferramenta Ângulos;
7. Para nomear os segmentos siga a mesma instrução dada no ultimo passo para a figura anterior.

7.3.12 Figura 25



1. Construa um círculo Γ centrado na origem, digitando $x^2 + y^2 = r^2$ na entrada da Janela de Álgebra, onde r é o raio escolhido;
2. Com a ferramenta Círculos, construa um círculo C_1 centrado em um ponto de Γ e com raio r ;
3. Em Pontos selecione Ponto Médio ou Centro, clique nos centros de Γ e C_1 , o ponto criado chamaremos de P ;

Figura 71 – Construção do Pentágono Regular

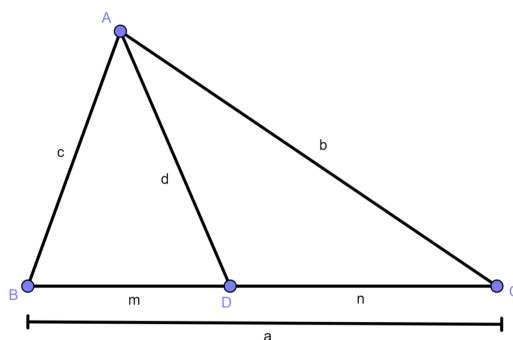


Fonte: Autora

4. Novamente em Círculos, selecione Círculo: Centro & Raio, crie agora o círculo C_2 centrado em P e com raio igual a $\frac{r\sqrt{5}}{2}$;
5. Em Pontos, selecione Interseção de Dois Objetos, faça a interseção de Γ com C_2 , escolha uma dessas pontos como A , o primeiro ponto do nosso pentágono;
6. Construa agora C_3 centrado em A com raio $\frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$;
7. Faça a interseção de C_3 com Γ , temos mais dois vértices do pentágono, B e E ;
8. Para marcar os pontos C e D , repita o processo feito nos passos 6 e 7, com os círculos centrados em B e E , um dos pontos de cada interseção é o ponto A , já existente e o terceiro será, respectivamente, C e D ;
9. Por fim, em Retas selecione Segmentos e trace os lados e as diagonais desejadas do pentágono regular.

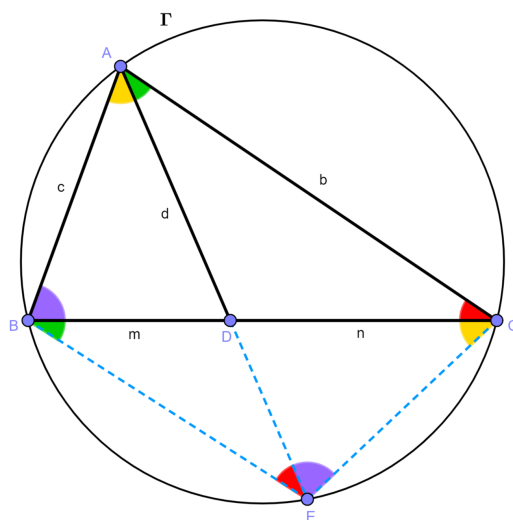
7.3.13 Figura 26

1. Com a ferramenta Pontos marque na Janela de Visualização os pontos A , B e C não colineares;
2. Em Retas selecione Segmento e conecte os pontos para formar o triângulo ABC ;



3. Marque o ponto D sobre o lado BC e em seguida construa o segmento AD ;
4. Para o segmento que destaca o comprimento de \overline{BC} , em Posições Relativas escolha Reta Perpendicular, clique em B e no segmento BC ;
5. Em Retas selecione Segmento com Comprimento Fixo, clique em um ponto qualquer na reta perpendicular a BC e digite “ $= a$ ”, onde a é o rotulo de BC , oculte a reta e edite as extremidades desse segmento nas suas configurações de estilo.

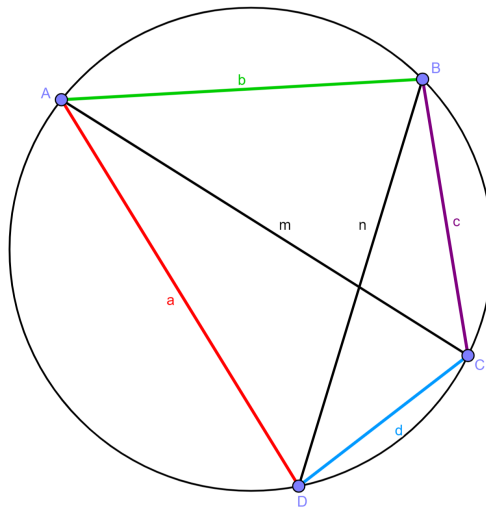
7.3.14 Figura 27



1. Dando continuidade a partir da figura anterior, oculte o segmento que destaca o comprimento de \overline{BC} ;
2. Na ferramenta Círculos e escolha Círculo definido Por Três Pontos, clique nos vértices do triângulo ABC ;
3. Selecione a ferramenta Retas e clique em A e em D , criamos a reta r ;

4. Em Pontos escolha Interseção de Dois Objetos, faça a interseção entre r e o círculo, temos o ponto E ;
5. Oculte a reta r e trace os segmentos BE , DE e CE , da forma já supracitada;
6. Em fim, destaque os ângulos formados nos vértices do quadrilátero $ABCD$ partidos pelas diagonais, usando a ferramenta Ângulos.

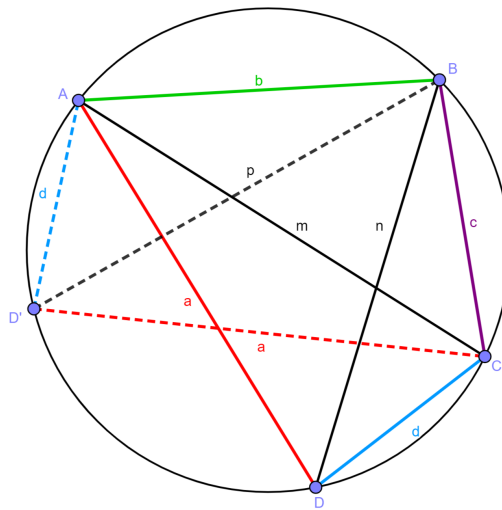
7.3.15 Figura 28



1. Construir um círculo, com a ferramenta Círculos ou pela entrada da Janela de Álgebra;
2. Criar os pontos A , B , C e D sobre o círculo, com a ferramenta Pontos;
3. Em Retas escolha Segmentos e trace os lados e as diagonais do quadrilátero $ABCD$.

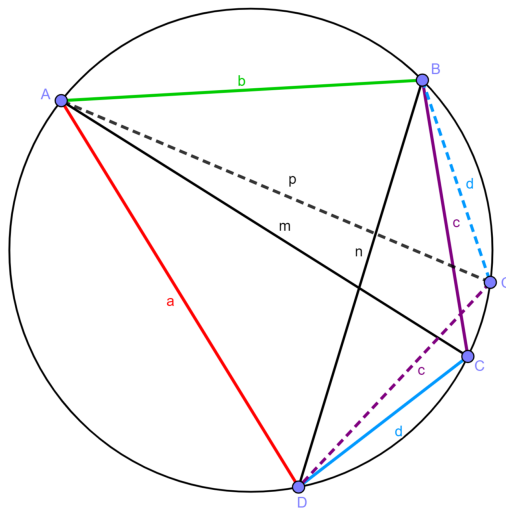
7.3.16 Figura 29

1. Para rotacionar os segmentos da forma que desejamos, precisaremos dos ângulos centrais determinados por cada arco, para isso os construiremos usando a ferramenta Ângulos, e o centro O do círculo;
2. Para facilitar mude os rótulos dos ângulos criados da seguinte forma: $\angle AOD = a$, $\angle BOA = b$, $\angle COB = c$ e $\angle DOC = d$;
3. Na ferramenta Transformações escolha Rotação em torno de um ponto, clique em D , depois em O , selecione sentido horário e digite " $a - d$ ", temos o ponto D' tal que $\overline{AD'} = \overline{DC} = d$ e $\overline{D'C} = \overline{AD} = a$;



4. Em Retas escolha Segmentos e trace os segmentos que faltam.

7.3.17 Figura 30

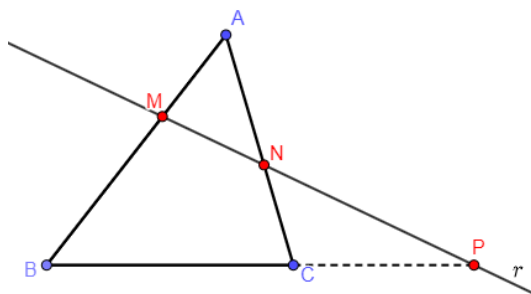


1. Na ferramenta Transformações escolha Rotação em torno de um ponto, clique em C , depois em O , selecione sentido anti-horário e digite " $c - d$ ", temos o ponto C' tal que $\overline{BC'} = \overline{DC} = d$ e $\overline{C'D} = \overline{BC} = c$;
2. Em Retas escolha Segmentos e trace os segmentos que faltam.

7.4 Construções: Capítulo 4

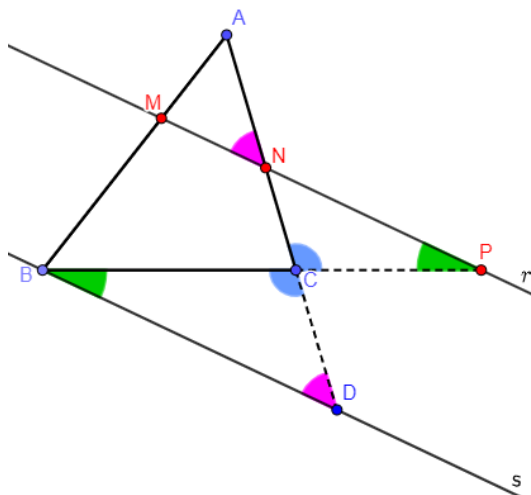
7.4.1 Figura 31

1. Com a ferramenta Pontos, marque A , B e C , não colineares;



2. Em Retas selecione Segmentos e trace AB , BC e CA ;
3. Com a ferramenta Pontos, marque M sobre AB e N sobre BC ;
4. Selecione Retas e clique sobre B e C , depois em M e N , temos, respectivamente retas t e r ;
5. Na ferramenta Pontos selecione Interseção de Dois Objetos, faça a interseção entre t e r , é o ponto P ;
6. Trace o segmento CP e oculte a reta t .

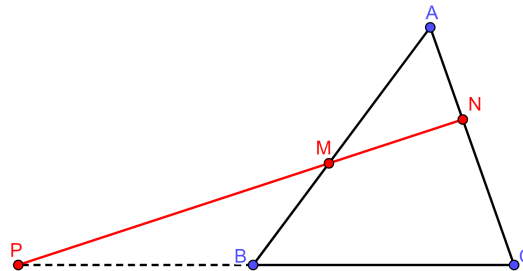
7.4.2 Figura 32



1. Na ferramenta de Posições Relativas escolha Reta Paralela, clique sobre B e r , temos $s \parallel r$ passando por B ;
2. Selecione Retas e clique sobre A e C , criamos a reta q ;
3. Na ferramenta Pontos selecione Interseção de Dois Objetos, faça a interseção entre q e s , é o ponto D ;

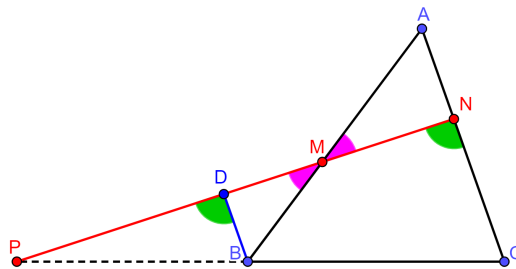
4. Trace o segmento CD e oculte a reta q ;
5. Por fim, com a ferramenta Ângulo construa: $\angle ANM$, $\angle CDB$, $\angle NPC$, $\angle DBC$, $\angle PCN$ e $\angle DBC$.

7.4.3 Figura 33



Siga exatamente os mesmos passos da subseção 7.4.1, diferindo apenas que P está a esquerda de B nesta figura.

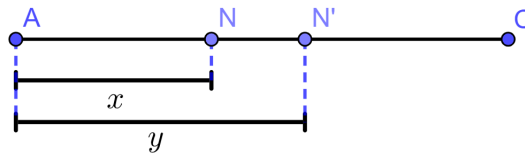
7.4.4 Figura 34



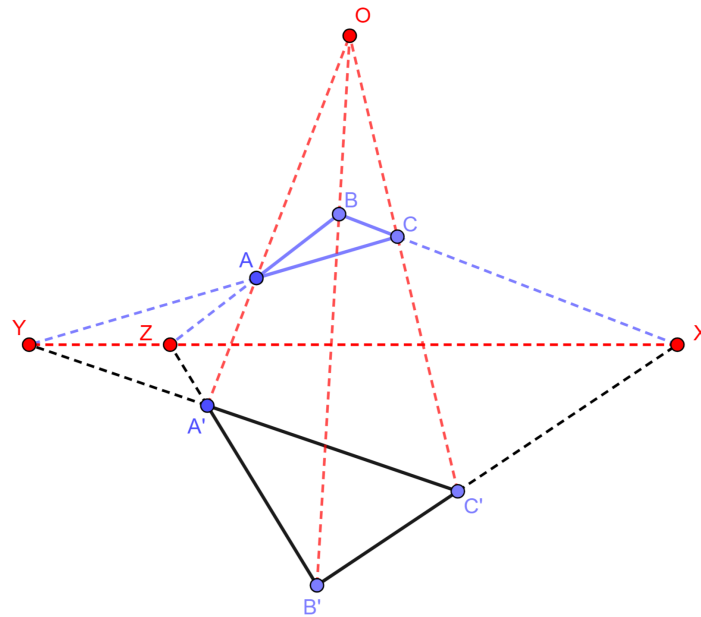
1. Em Posições Relativas escolha Reta Paralela, clique em B e no segmento AC , criamos uma reta s
2. Na ferramenta Pontos selecione Interseção de Dois Objetos, faça a interseção entre r e s , é o ponto D ;
3. Trace o segmento BD e oculte a reta s ;
4. Para finalizar, com a ferramenta Ângulo construa: $\angle PDB$, $\angle MNC$, $\angle DMB$ e $\angle NMA$.

7.4.5 Figura 35

Processo semelhante ao realizado para o segmento suporte nos passos 4 e 5 da subseção 7.3.13.



7.4.6 Figura 36



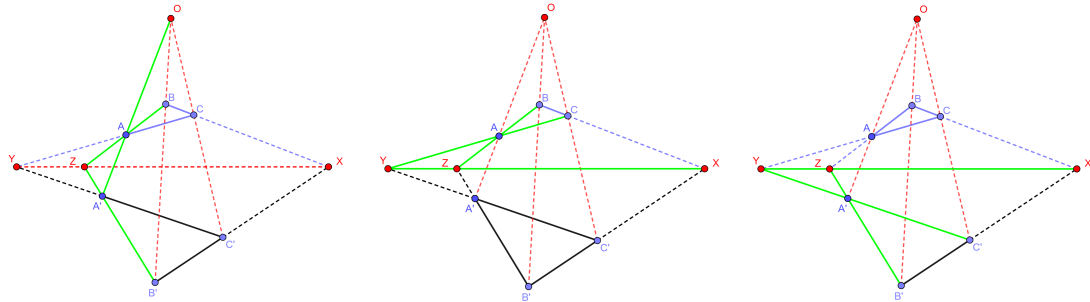
1. Selecione a ferramenta Retas e construa uma reta r ;
2. Com a ferramenta Pontos crie três pontos sobre r , são X , Y e Z ;
3. Ainda com Pontos, marque A acima de r e A' abaixo de r ;
4. Selecione a ferramenta Retas e trace \overleftrightarrow{ZA} , \overleftrightarrow{YA} , $\overleftrightarrow{ZA'}$ e $\overleftrightarrow{YA'}$;
5. Com a ferramenta Pontos, marque B em \overleftrightarrow{ZA} e B' em $\overleftrightarrow{ZA'}$;
6. Com a ferramenta Retas trace \overleftrightarrow{BX} e $\overleftrightarrow{B'X}$;
7. Em Pontos selecione Interseção de Dois Objetos, faça as interseções:

$$\overleftrightarrow{YA} \cap \overleftrightarrow{BX} = C \text{ e } \overleftrightarrow{YA'} \cap \overleftrightarrow{B'X} = C';$$

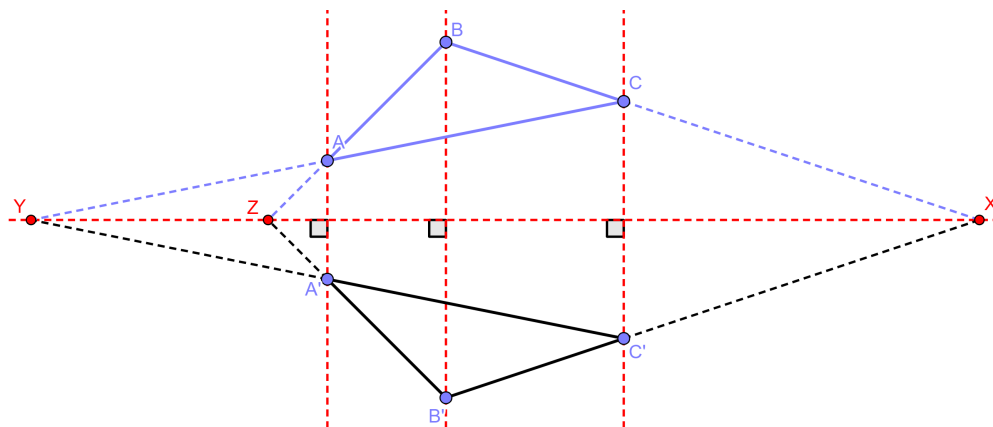
8. Novamente com a ferramenta Retas, trace $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$;
9. Em Pontos selecione Interseção de Dois Objetos, faça a interseção: $\overleftrightarrow{AA'} \cap \overleftrightarrow{BB'}$ ou $\overleftrightarrow{AA'} \cap \overleftrightarrow{CC'}$ ou $\overleftrightarrow{BB'} \cap \overleftrightarrow{CC'}$, qualquer uma nos fornece o ponto O ;

10. Em Retas selecione Segmentos e trace os lados e os prolongamentos dos triângulos ABC e $A'B'C'$, oculte as retas suporte criadas.

As figuras 37, 38 e 39 derivam da 36, destacando apenas os segmentos que interessam em cada caso.



7.4.7 Figura 40

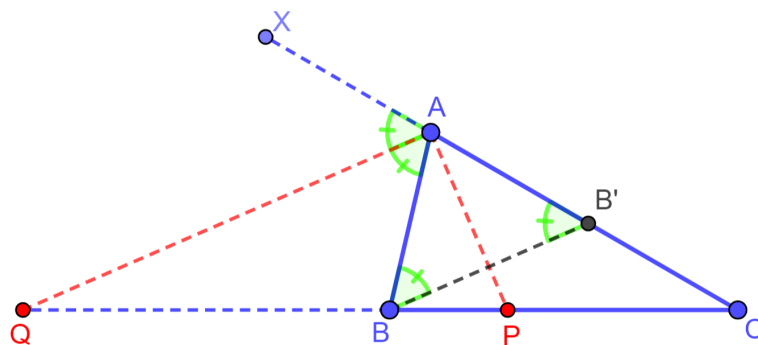


1. Construa a primeira reta, com a ferramenta Retas ou digitando a equação da reta na entrada da Janela de Álgebra;
2. Na ferramenta Posições Relativas escolha Reta Paralela e construa duas retas paralelas a primeira;
3. Em Pontos marque os pontos sobre as retas construídas, de modo que

$$\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'};$$

4. Novamente em Retas, trace \overleftrightarrow{AB} , $\overleftrightarrow{A'B'}$, \overleftrightarrow{BC} , $\overleftrightarrow{B'C'}$, \overleftrightarrow{AC} e $\overleftrightarrow{A'C'}$;
5. Em Pontos escolha Interseção de Dois Objetos e faça:

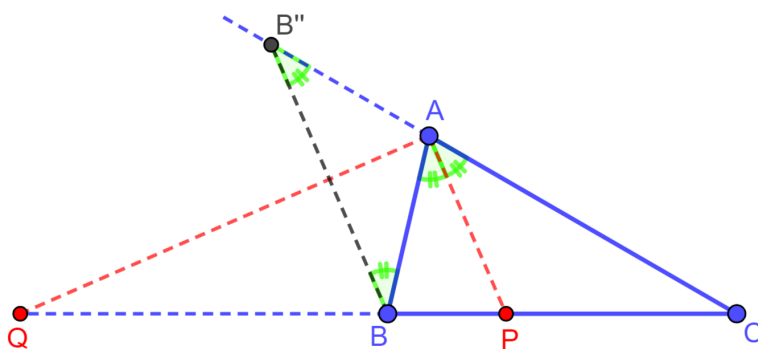
$$\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{Z\}, \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = \{X\} \text{ e } \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = \{Y\};$$



7.4.9 Figura 42

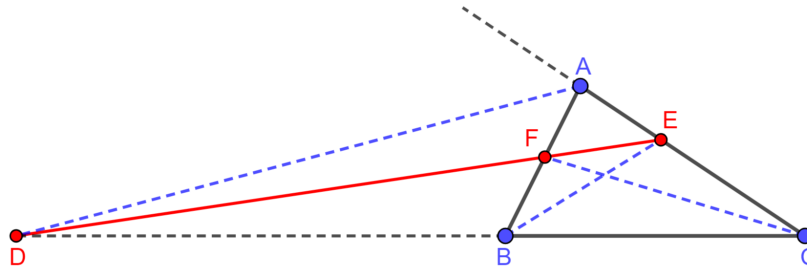
1. Na ferramenta Posições Relativas escolha Reta Paralela, trace a reta que passa por B e é paralela a \overleftrightarrow{QA} ;
2. Em Pontos selecione Interseção de Dois Objetos e marque a interseção entre \overleftrightarrow{AC} e a reta paralela construída, temos o ponto B' ;
3. Em Retas escolha Segmentos, trace o segmento BB' , em seguida oculte a reta;
4. Com a ferramenta Ângulos, construa $\angle QAB$, $\angle XAQ$, $\angle AB'B$ e $\angle B'BA$.

7.4.10 Figura 43



1. Oculte os objetos criados para a figura 42 na seção anterior;
2. Na ferramenta Posições Relativas escolha Reta Paralela, trace a reta que passa por B e é paralela a \overleftrightarrow{AP} ;
3. Em Pontos selecione Interseção de Dois Objetos e marque a interseção entre \overleftrightarrow{AC} e a reta paralela construída, é o ponto B'' ;
4. Em Retas escolha Segmentos, trace o segmento BB'' , em seguida oculte a reta;
5. Com a ferramenta Ângulos, construa $\angle PAC$, $\angle BB''A$, $\angle BAP$ e $\angle ABB''$.

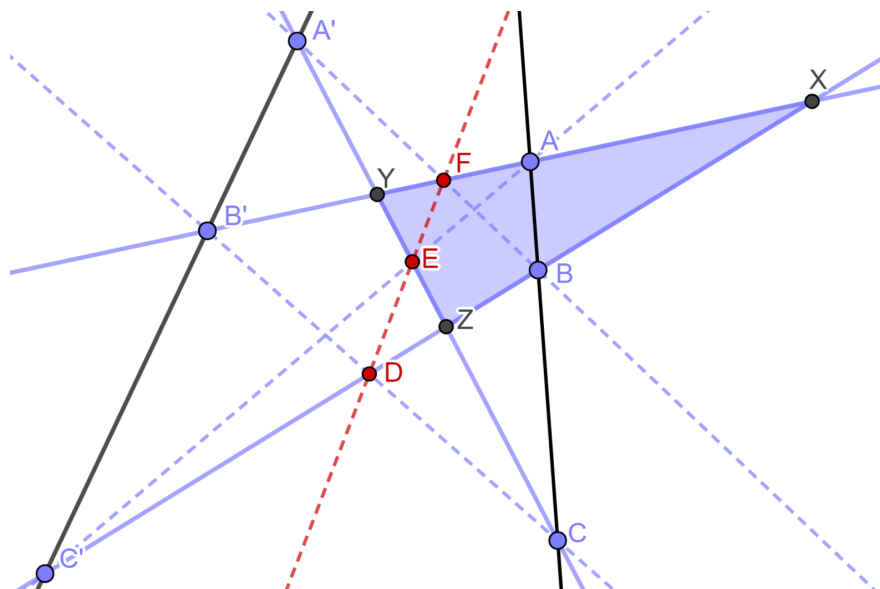
7.4.11 Figura 44



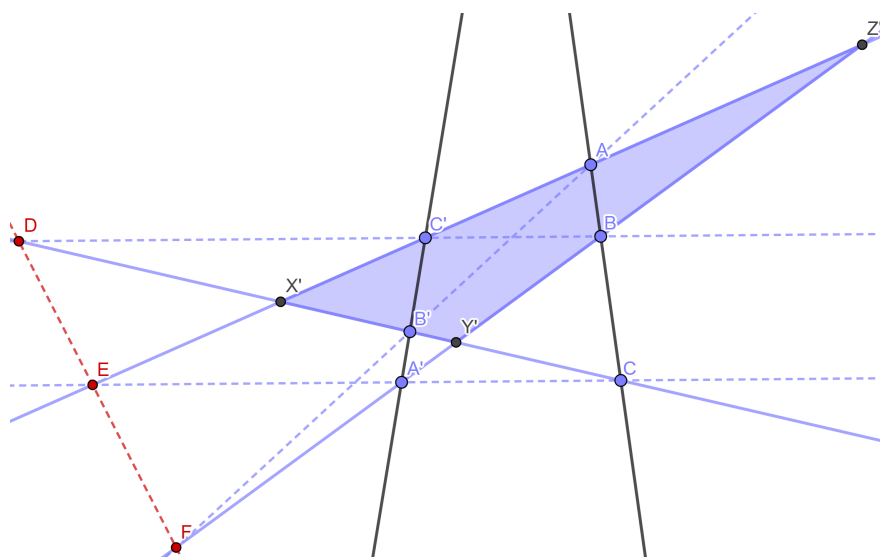
1. Com a ferramenta Pontos marque A , B e C , de modo que $\overline{AB} < \overline{AC}$;
2. Em Retas, trace \overleftrightarrow{AC} e \overleftrightarrow{BC} ;
3. Com a ferramenta Pontos marque $X \in \overleftrightarrow{AC}$;
4. Em Retas escolha Segmentos, trace os segmentos de ABC ;
5. Em Posições Relativas escolha Bissetriz, em seguida clique nos pontos, na ordem da mesma forma de quando se deseja construir um ângulo, para os ângulos $\angle XAB$, $\angle CBA$ e $\angle ACB$;
6. Em Pontos selecione Interseção de Dois Objetos e marque os pés das bissetrizes construída fazendo a interseção de ambas com os respectivos segmentos ou prolongamento do triângulo ABC , temos os pontos D , E e F ;
7. Em Retas escolha Segmentos, trace os segmentos que faltam e oculte as retas.

7.4.12 Figura 45

1. Com a ferramenta Retas selecionada, construa duas retas, oculte os pontos bases das retas;
2. Escolha a ferramenta de Pontos, e construa os pontos sobre as retas de modo que se tenha dois ternos de pontos colineares A, B, C e A', B', C' ;
3. Novamente em Retas, trace $\overleftrightarrow{AB'}$, $\overleftrightarrow{A'B}$, $\overleftrightarrow{AC'}$, $\overleftrightarrow{A'C}$, $\overleftrightarrow{BC'}$ e $\overleftrightarrow{B'C}$;
4. Na ferramenta Pontos escolha Interseção de Dois Objetos e faça as interseções: $\overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'B} = \{F\}$, $\overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{A'C} = \{E\}$ e $\overleftrightarrow{BC'} \cap \overleftrightarrow{B'C} = \{D\}$;
5. Trace a reta que passa por D , E e F ;
6. Com a ferramenta Pontos escolha Interseção de Dois Objetos e faça agora as interseções: $\overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{BC'} = \{X\}$, $\overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'C} = \{Y\}$ e $\overleftrightarrow{A'C} \cap \overleftrightarrow{BC'} = \{Z\}$;
7. Por fim com selecione Polígonos e construa o triângulo XYZ para destaca-lo.



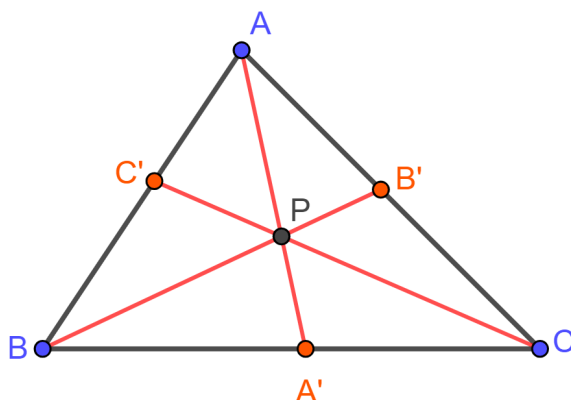
7.4.13 Figura 46



1. Com a ferramenta Retas selecionada, construa duas retas r e s , oculte os pontos bases das retas;
2. Escolha a ferramenta de Pontos, e construa os pontos $A' \in r$ e $C \in s$;
3. Com a ferramenta Retas selecionada, construa a reta $\overleftrightarrow{A'C}$;
4. Em Posições Relativas escolha Reta Paralela e construa uma reta t paralela a $\overleftrightarrow{A'C}$;
5. Na ferramenta Pontos escolha Interseção de Dois Objetos e faça as interseções:
 $r \cap t = \{C'\}$ e $s \cap t = \{B\}$;

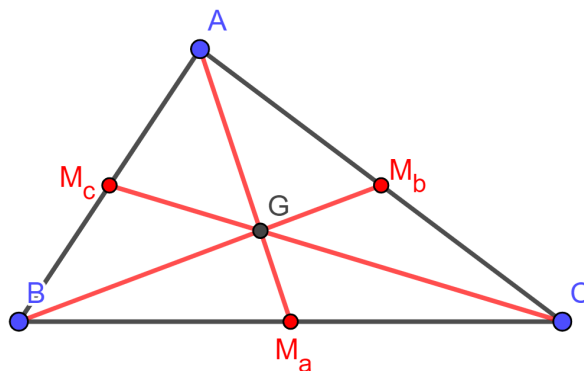
6. Escolha a ferramenta de Pontos, e construa os pontos $A \in s$ e $B' \in r$;
7. Novamente em Retas, trace $\overleftrightarrow{AB'}$, $\overleftrightarrow{A'B}$, $\overleftrightarrow{AC'}$ e $\overleftrightarrow{B'C}$;
8. Na ferramenta Pontos escolha Interseção de Dois Objetos e faça as interseções: $\overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'B} = \{F\}$, $\overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{A'C} = \{E\}$ e $\overleftrightarrow{BC'} \cap \overleftrightarrow{B'C} = \{D\}$;
9. Trace a reta que passa por D , E e F ;
10. Com a ferramenta Pontos escolha Interseção de Dois Objetos e faça agora as interseções: $\overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{B'C} = \{X'\}$, $\overleftrightarrow{A'B} \cap \overleftrightarrow{B'C} = \{Y'\}$ e $\overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{A'B} = \{Z'\}$;
11. Por fim com selecione Polígonos e construa o triângulo $X'Y'Z'$ para destaca-lo.

7.4.14 Figura 47



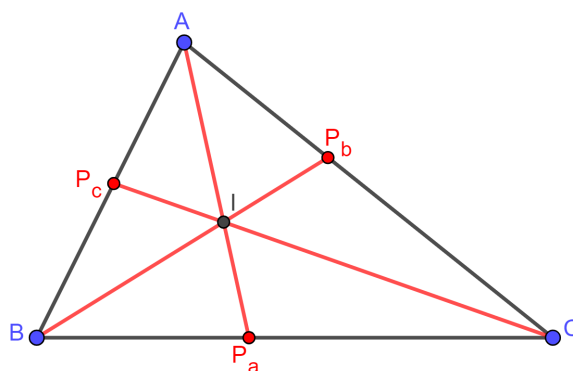
1. Com a ferramenta Pontos crie os pontos A , B e C quaisquer na Janela de Visualização;
2. Em Retas selecione segmento e construa os lados do triângulo ABC ;
3. Novamente em pontos clique, respectivamente, sobre os lados BC e AC , criamos A' e B' ;
4. Em Retas selecione segmento e trace as cevianas AA' e BB' ;
5. Na ferramenta Pontos escolha Interseção de Dois Objetos e clique sobre AA' e BB' , temos o ponto P ;
6. Com a ferramenta Retas trace \overleftrightarrow{CP} ;
7. Na ferramenta Pontos escolha Interseção de Dois Objetos e clique sobre AB e \overleftrightarrow{CP} , temos o ponto C' ;
8. Por fim, em Retas selecione segmento e trace a ceviana CC' e oculte a reta \overleftrightarrow{CP} .

7.4.15 Figura 48



1. Com a ferramenta Pontos crie os pontos A , B e C quaisquer na Janela de Visualização;
2. Em Retas selecione segmento e construa os lados do triângulo ABC ;
3. Na ferramenta Pontos selecione Ponto Médio ou Centro clique sucessivamente em BC , AC e AB , temos respectivamente M_a , M_b e M_c os pontos médios;
4. Em Retas selecione segmento e trace as cevianas AM_a , BM_b e CM_c ;
5. Por fim com a ferramenta Pontos selecione Interseção de Dois Objetos e clique sobre duas quaisquer das cevianas, temos o ponto G baricentro de ABC .

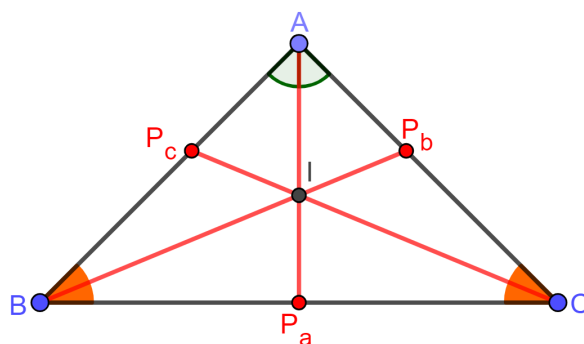
7.4.16 Figura 49



1. Com a ferramenta Pontos crie os pontos A , B e C quaisquer na Janela de Visualização;
2. Em Retas selecione segmento e construa os lados do triângulo ABC ;

3. Em Posições Relativas escolha Bissetriz, em seguida clique nos pontos, na ordem da mesma forma de quando se deseja construir um ângulo, para os ângulos $\angle BAC$, $\angle CBA$ e $\angle ACB$;
4. Na ferramenta Pontos escolha Interseção de Dois Objetos e clique sobre cada reta bissetriz e seu respectivo lado relativo, assim marcamos os pés das bissetrizes, P_a , P_b e P_c ;
5. Em Retas selecione segmento e trace as cevianas AP_a , BP_b e CP_c , depois oculte as retas;
6. Por fim com a ferramenta Pontos selecione Interseção de Dois Objetos e clique sobre duas quaisquer das cevianas, temos o ponto I incentro de ABC ;

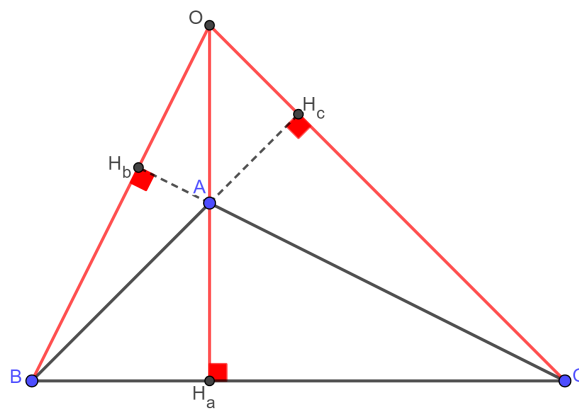
7.4.17 Figura 50



1. Com a ferramenta Retas selecione Segmentos e construa o segmento BC ;
2. Em Posições Relativas escolha Mediatriz e clique sobre BC ;
3. Selecione a ferramenta Pontos e clique na reta mediatriz criada no passo anterior, para o ponto A , de modo que A , B e C não sejam colineares;
4. Em Retas selecione segmento e construa os lados AB e AC do triângulo ABC ;
5. Em Posições Relativas escolha Bissetriz, em seguida clique nos pontos, na ordem da mesma forma de quando se deseja construir um ângulo, para os ângulos $\angle CBA$ e $\angle ACB$, a mediatriz criada no passo 2 é bissetriz de $\angle BAC$;
6. Na ferramenta Pontos escolha Interseção de Dois Objetos e clique sobre cada reta bissetriz e seu respectivo lado relativo, assim marcamos os pés das bissetrizes, P_a , P_b e P_c ;

7. Em Retas selecione segmento e trace as cevianas AP_a , BP_b e CP_c , depois oculte as retas;
8. Com a ferramenta Pontos selecione Interseção de Dois Objetos e clique sobre duas quaisquer das cevianas, temos o ponto I incentro de ABC ;
9. Selecione a ferramenta Ângulos e construa os ângulos necessários para destacar as congruências envolvidas na demonstração.

7.4.18 Figura 51



1. Com a ferramenta Pontos crie os pontos A , B e C quaisquer na Janela de Visualização;
2. Em Retas selecione segmento e construa os lados do triângulo ABC ;
3. Em Posições Relativas escolha Reta Perpendicular, clique em um vértice de ABC e em seguida no lado oposto, faça isso com os três vértices;
4. Na ferramenta Pontos escolha Interseção de Dois Objetos e clique sobre cada reta perpendicular e seu respectivo lado ou reta suporte relativa (se ABC obtusângulo), assim marcamos os pés das bissetrizes, H_a , H_b e H_c ;
5. Selecione a ferramenta Ângulos e construa os ângulos retos nos pés das alturas;
6. Por fim com a ferramenta Pontos selecione Interseção de Dois Objetos e clique sobre duas quaisquer das alturas, temos o ponto O ortocentro de ABC .

8 Conclusões

Alexandria, no Antigo Egito, foi uma cidade de imensa importância histórica e cultural, fundada por Alexandre, o Grande, em 331 a.E.C., tornou-se rapidamente um dos principais centros do mundo antigo, conhecida por sua localização estratégica tendo papel de ponte entre o Oriente e o Ocidente. Um dos aspectos mais marcantes de Alexandria foi o seu florescimento como um centro intelectual, a cidade se tornou um ímã para estudiosos, filósofos, cientistas e matemáticos de diversas partes do mundo. A grande biblioteca de Alexandria, foi o coração do movimento intelectual, sendo um verdadeiro depósito do conhecimento humano da época, onde estudiosos de diferentes origens podiam se reunir, trocar ideias e realizar pesquisas.

Foi nesse ambiente intelectualmente estimulante que os conhecimentos acumulados pelos estudiosos gregos e egípcios se fundiram e se expandiram. E foi o berço de Cláudio Ptolomeu e Menelaus, onde encontraram, um terreno fértil para o desenvolvimento de suas teorias e métodos, inspirados pelos que lá estiveram antes deles como Euclides, Arquimedes, Hiparco de Niceia, entre outros que deixaram suas marcas inapagáveis na história do pensamento matemático. Da mesma forma que foram inspirados, passaram também a serem inspiração para as gerações posteriores de matemáticos e geômetras que fizeram de Alexandria sua escola.

Ao longo dos capítulos, apresentamos demonstrações matemáticas detalhadas desses teoremas, devidos a Ptolomeu e Menelaus, exploramos suas aplicações em diferentes outros teoremas e relações de relevante importância matemática, propusemos uma série de problemas para ilustrar sua utilidade prática, isso nos leva a crer que foram bem aproveitados. Os resultados obtidos demonstram a força e a versatilidade dos Teoremas de Ptolomeu e Menelaus, revelando uma ampla aplicabilidade.

A proposta de uma disciplina eletiva com inclusão desses teoremas oferece uma oportunidade única para os estudantes explorarem esses conceitos minuciosamente, evoluindo sua compreensão da geometria e desenvolvendo habilidades analíticas e de resolução de problemas, o que se espera refletir no seu desempenho em todas as áreas da matemática e outras ciências.

A inserção do software Geogebra ao trabalho como ferramenta complementar mostrou-se valiosa e indispensável, permitindo uma forma dinâmica e interativa de visualizar e explorar os conceitos abordados em cada etapa. O passo a passo das construções no Geogebra oferece aos professores e estudantes uma abordagem prática para experimentar e testar os teoremas, fortalecendo sua compreensão e facilitando a aplicação dos conceitos nos problemas.

Entretanto, apesar da diversificada pesquisa construída nesta dissertação, ainda há

muito espaço para pesquisas futuras e possíveis extensões do trabalho. Novos estudos poderiam explorar variações e generalizações dos Teoremas de Ptolomeu e Menelaus, como por exemplo a Desigualdade de Ptolomeu e o Teorema de Menelaus para triângulos esféricos, bem como investigar suas aplicações para além da geometria em áreas decorrentes da ciência e da tecnologia, astronomia, engenharia e física, assim como sua relevância em olimpíadas de matemática nacionais e internacionais. Além disso, poderia ser feita uma avaliação da eficácia da proposta de disciplina eletiva e do uso do Geogebra de maneira aprofundada após aplicação em sala de aula, buscando entender melhor seu impacto no aprendizado dos estudantes e identificar possíveis melhorias para futuras implementações. Em suma, esta dissertação representa apenas uma pequena parte do que se pode obter com exploração destes fascinantes teoremas de Ptolomeu e Menelaus.

Referências

AABOE, Asger. Episódios da historia antiga da matemática. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 191 p. ISBN 9788585818951.

ANDRADE, Lenimar Nunes de. O Teorema de Ptolomeu e algumas aplicações. UFPB - João Pessoa, João Pessoa PB, p. 1-4, 18 ago. 2012.

ASSOCIAÇÃO GEOGEBRA. GeoGebra. In: HOHENWARTER, Markus. GeoGebra. 6.0.823.0. [S. l.]. Disponível em: <URL<https://www.geogebra.org/download?lang=pt>>. Acesso em: 19 fev. 2024.

BOYER, Carl B. História da matemática. Tradução: Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. Geometria analítica: coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2017. 380 p. ISBN 9788583371212.

GOMES, Carlos A. Tópicos de Matemática: IME- ITA - Olimpíadas. 1. ed. Fortaleza CE: VestSeller, Abril 2016. 669 p. v. 3. ISBN 9788560653454.

MAIA FILHO, Raimundo Alves. O Teorema de Ptolomeu e aplicações. Orientador: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo. 2016. 43 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande - PB, 2016. Disponível em: <<https://profmatsbm.org.br/dissertacoes/?aluno=&titulo=Ptolomeu&polo=>>. Acesso em: 24 nov. 2023.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. Geometria: coleção PROFMAT. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 442 p. ISBN 9788585818937.

NERY, Chico; OLIVEIRA, Edmundo Capelas de. Sobre o notável teorema de Ptolomeu. Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Campinas/SP, v. 23, ed. n. 1, 1 jul. 2023. DOI 10.21167/cqdv23n12023299316. Disponível em: <<https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/index>>. Acesso em: 31 ago. 2023.

O'CONNOR, John Joseph; ROBERTSON, Edmund Frederick. Bibliografias: Menelau de Alexandria. Mac Tutor, St Andrews, Escócia, p. 1-1, 13 fev. 1999. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Menelaus/>>. Acesso em: 13 fev. 2024.

ROQUE, Tatiana; PITOMBEIRA, João Bosco. TÓPICOS DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: coleção PROFMAT. 1. ed. [S. l.]: SBM, 2012. 467 p. ISBN 9788585818654.

SILVA, José Constantino. Os Teoremas de Menelaus e Ceva. Orientador: Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera. 2015. 115 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - UFRPE, Recife - PE, 2015. Disponível em: <<https://encurtador.com.br/uGTPl>>. Acesso em: 20 nov. 2023.

UFMG (Brasil). Museu da Matemática UFMG. TEOREMA DE PITÁGORAS. In: TEOREMA DE PITÁGORAS. ICEx, UFMG-Campus Pampulha, Av. Antônio Carlos, 6627, Belo Horizonte, MG. Disponível em: <<https://encurtador.com.br/y71Gv>>. Acesso em: 30 ago. 2023.

VELASCO, Fabio Couzzi. O USO DE ANIMAÇÕES POR MEIO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA. Orientador: Dr. Rogério César dos Santos. 2023. 73 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade de Brasília – UNB, Brasília, 2023. Disponível em: <URL<https://profmatsbm.org.br/dissertacoes/?aluno=&titulo=O+USO+DE+ANIMA%C3%87%C3%95ES+POR+MEIO+DO+SOFTWARE+GEOGEBRA+NO+ENSINO+DE+GEOMETRIA+ANAL%C3%8DTICA&polo=>>>. Acesso em: 19 fev. 2024.

Apêndices

APÊNDICE A – Acesso as Construções

- Demonstração do Teorema de Ptolomeu (subseções 7.3.1 e 7.3.2):
<<https://www.geogebra.org/m/wrbxds4j>>
- Teorema de Chadú (subseção 7.3.3):
<<https://www.geogebra.org/classic/ukdm7meg>>
- Teorema de Pitágoras (subseção 7.3.4):
<<https://www.geogebra.org/classic/eeuepyhh>>
- Lei dos Cossenos (subseções 7.3.5, 7.3.6 e 7.3.7):
<<https://www.geogebra.org/m/vdzpm3dt>>
- Lei dos Senos (subseções 7.3.8 e 7.3.9):
<<https://www.geogebra.org/m/rc7axmmf>>
- Seno da soma (subseção 7.3.10):
<<https://www.geogebra.org/m/mzr2kxm8>>
- Seno da diferença (subseção 7.3.11):
<<https://www.geogebra.org/m/anfckbyn>>
- Razão Áurea no pentágono regular (subseção 7.3.12):
<<https://www.geogebra.org/m/hsvy7krh>>
- Teorema de Stewart (subseções 7.3.13 e 7.3.14):
<<https://www.geogebra.org/m/yac87sxh>>
- Teorema de Hiparco (subseções 7.3.15, 7.3.16 e 7.3.17):
<<https://www.geogebra.org/m/g8cvetb4>>
- Teorema de Menelaus demonstração I (subseções 7.4.1 e 7.4.2):
<<https://www.geogebra.org/m/cwbdugkf>>
- Teorema de Menelaus demonstração II (subseções 7.4.3 e 7.4.4):
<<https://www.geogebra.org/m/epdeqx3v>>

- Segmento AC (subseção 7.4.5):
<<https://www.geogebra.org/m/ugd4vztc>>
- Teorema de Desargues (subseção 7.4.6):
<<https://www.geogebra.org/m/umvm2v8e>>
- Teorema de Desargues: Eixo de Reflexão (subseção 7.4.7):
<<https://www.geogebra.org/m/udhxmqnw>>
- Teorema da bissetriz (subseções 7.4.8, 7.4.9 e 7.4.10):
<<https://www.geogebra.org/m/yb6g8xem>>
- Colinearidade dos pés de certas bissetrizes (subseção 7.4.11):
<<https://www.geogebra.org/m/capk4hp4>>
- Teorema de Pappus: Parte 1 (subseção 7.4.12):
<<https://www.geogebra.org/m/jwc9hgsc>>
- Teorema de Pappus: Parte 2 (subseção 7.4.13):
<<https://www.geogebra.org/m/w9ygvsku>>
- Teorema de Ceva (subseção 7.4.14):
<<https://www.geogebra.org/m/yjpv5hdy>>
- Concorrência das medianas (subseção 7.4.15):
<<https://www.geogebra.org/m/hg4x3fev>>
- Concorrência das bissetrizes internas (subseção 7.4.16):
<<https://www.geogebra.org/m/pbwkyzp6>>
- Concorrência das bissetrizes internas (ABC Isósceles) (subseção 7.4.17):
<<https://www.geogebra.org/m/sz2qsaug>>
- Concorrência das alturas (subseção 7.4.18):
<<https://www.geogebra.org/m/e6bcvjgf>>

APÊNDICE B – Acesso as Construções: Problemas

- Problema 1 (5.1): <<https://www.geogebra.org/m/yaxrymsf>>
- Problema 2 (5.2): <<https://www.geogebra.org/m/qmz9rzc8>>
- Problema 3 (5.3): <<https://www.geogebra.org/m/jsdne4aw>>
- Problema 4 (5.4): <<https://www.geogebra.org/m/ras7cukz>>
- Problema 5 (5.5): <<https://www.geogebra.org/m/hbcpbvx8>>
- Problema 6 (5.6): <<https://www.geogebra.org/m/wmhnegvn>>
- Problema 7 (5.7): <<https://www.geogebra.org/m/enekajyj>>
- Problema 8 (5.8): <<https://www.geogebra.org/m/ywkcndv6>>

APÊNDICE C – Sequência didática



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA - CCT
UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA - UAMAT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA



Mestrado Profissional - PROFMAT

Sequência didática: Quadriláteros inscritíveis e O Teorema de Ptolomeu para o Ensino Médio

Antônia Fabrícia de Souza

PRODUTO EDUCACIONAL

Orientador: Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes

Campina Grande - PB
junho/2024

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 3 |
| 1.1 | Contextualização e importância do tema no Ensino Médio | 3 |
| 2 | Objetivos | 3 |
| 2.1 | Geral | 3 |
| 2.2 | Específicos | 3 |
| 3 | Referenciais Teóricos | 4 |
| 3.1 | BNCC - Base Nacional Comum Curricular | 4 |
| 3.1.1 | COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS | 5 |
| 3.1.2 | HABILIDADES | 5 |
| 4 | Desenvolvimento | 5 |
| 4.1 | Encontro 1: Quadriláteros inscritíveis | 6 |
| 4.1.1 | Tópicos Preliminares | 6 |
| 4.1.2 | Introdução aos Quadriláteros Inscritíveis | 6 |
| 4.1.3 | Afirmações para exploração e demonstração: | 8 |
| 4.1.4 | Métodos de Construção de Quadriláteros Inscritíveis | 9 |
| 4.1.5 | Atividades Teóricas e Práticas sobre Quadriláteros Inscritíveis | 10 |
| 4.1.6 | Revisão e Dúvidas | 12 |
| 4.2 | Encontro 2: O Teorema de Ptolomeu | 12 |
| 4.2.1 | Introdução ao Teorema de Ptolomeu | 12 |
| 4.2.2 | Definições Preliminares | 13 |
| 4.2.3 | Demonstração do Teorema de Ptolomeu | 14 |
| 4.2.4 | Aplicações do Teorema de Ptolomeu | 15 |
| 4.2.5 | Atividade Prática com uso do GeoGebra | 17 |
| 4.2.6 | Exercícios de fixação e problemas | 19 |
| 5 | Conclusão | 20 |
| 6 | Referências Bibliográficas | 21 |

1 Introdução

Esta sequência didática é um produto educacional integrante da dissertação de mestrado intitulada: *OS TEOREMAS DE PTOLOMEU E MENELAUS, DEMONSTRAÇÕES E APLICAÇÕES*. Tem como base o plano de disciplina eletiva, presente na mesma dissertação, a qual é dividida em 22 (vinte e dois) encontros baseados na realidade da escola em que está sendo aplicada, cada encontro equivale a 2 horas/aula. Essa sequência didática refere-se as aulas (ou encontros) de número 15 e 16 da disciplina eletiva, neste contexto vale ressaltar que os alunos já devem ter visto os conteúdos referentes as aulas anteriores como também acesso a uma aula introdutória ao software GeoGebra. Visamos abordar de forma detalhada os conceitos de quadriláteros inscritíveis, bem como o Teorema de Ptolomeu, trazendo relevância e contextualização para o Ensino Médio. Estes temas contribuem de forma significativa para o estudo da geometria, favorecendo a compreensão de propriedades e relações entre figuras geométricas, além de possibilitar a aplicação desses conceitos em problemas, os presentes nessa sequência são de autoria própria.

1.1 Contextualização e importância do tema no Ensino Médio

A geometria é um ramo da matemática fundamental presente no currículo do Ensino Médio, e o estudo dos quadriláteros inscritíveis, assim como o Teorema de Ptolomeu, pode desempenhar um papel na formação matemática dos estudantes, fortalecendo os conhecimentos prévios estudados no Ensino Fundamental e estimulando novas aprendizagens. Esses conteúdos proporcionam a compreensão das propriedades e relações entre os elementos geométricos, desenvolvendo o raciocínio lógico dedutivo e a capacidade de elaborar demonstrações coerentes. Além disso, contribuem para a visualização e representação geométrica dos problemas, habilidades essenciais não apenas para a compreensão da matemática, mas também para a formação integral dos estudantes.

2 Objetivos

2.1 Geral

O objetivo geral desta sequência didática é proporcionar aos estudantes do Ensino Médio uma compreensão aprofundada sobre quadriláteros inscritíveis, bem como o Teorema de Ptolomeu. Pretende-se que, ao final das aulas, os alunos sejam capazes de identificar e diferenciar esses tipos de quadriláteros, compreender suas propriedades e aplicar o Teorema de Ptolomeu para resolver problemas envolvendo relações métricas em figuras geométricas. Além disso, busca-se promover o desenvolvimento das habilidades e competências matemáticas estabelecidas na Base Nacional Comum Curricular - BNCC, contribuindo para a formação dos estudantes.

2.2 Específicos

Espera-se que os alunos serão habilitados a:

- Definir o que é um quadrilátero inscritível e reconhecer as suas principais características;

- Compreender e descrever as propriedades específicas dos quadriláteros inscritíveis, como a soma dos ângulos opostos ser igual a 180° ;
- Identificar quadriláteros inscritíveis em diversas figuras geométricas e situações práticas;
- Aplicar critérios matemáticos para determinar se um quadrilátero é inscritível, como verificar a soma dos ângulos opostos;
- Resolver problemas matemáticos que envolvem cálculos e propriedades de quadriláteros inscritíveis;
- Desenhar quadriláteros inscritíveis e aplicar o Teorema de Ptolomeu utilizando instrumentos de construção geométrica, como régua e compasso;
- Explorar quadriláteros inscritíveis e o Teorema de Ptolomeu utilizando softwares de geometria dinâmica, como GeoGebra, para visualizar, manipular e compreender as propriedades;
- Enunciar o Teorema de Ptolomeu e entender sua formulação matemática;
- Aplicar o Teorema de Ptolomeu para resolver problemas envolvendo quadriláteros inscritíveis;
- Explorar a relação entre o Teorema de Ptolomeu e outras propriedades de quadriláteros inscritíveis e figuras geométricas relacionadas;
- Aprender sobre a história e o contexto histórico do Teorema de Ptolomeu;
- Desenvolver habilidades de pensamento crítico, analítico e investigativo.

3 Referenciais Teóricos

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio, a Matemática é vista como um campo do conhecimento que possibilita a compreensão do mundo, a investigação de fenômenos do cotidiano e o desenvolvimento do raciocínio lógico. No contexto dos quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis e do Teorema de Ptolomeu, a BNCC destaca a importância de explorar e compreender as relações entre elementos geométricos, as propriedades dos quadriláteros e a aplicação de teoremas, o que contribui para a formação de estudantes críticos e reflexivos, capazes de argumentar e tomar decisões fundamentadas.

3.1 BNCC - Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo que define as diretrizes e expectativas de aprendizagem para os estudantes da educação básica no Brasil. Elaborada pelo Ministério da Educação (MEC) e homologada em 2017, a BNCC busca garantir que todos os alunos tenham acesso a uma educação de qualidade. Ela estabelece os conhecimentos, competências e habilidades que os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas de ensino, da educação infantil ao ensino médio. No contexto do ensino médio, a BNCC

tem como objetivo preparar os jovens para o exercício da cidadania e para o mundo do trabalho, promovendo uma formação integral que abrange tanto as áreas de conhecimento quanto o desenvolvimento de competências socioemocionais.

As competências e habilidades na BNCC são conceitos centrais que orientam o processo de ensino-aprendizagem. Competências são definidas como a capacidade de mobilizar conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do exercício da cidadania e do mundo do trabalho. Elas envolvem uma combinação de conhecimentos teóricos e práticos, e seu desenvolvimento é essencial para a formação integral dos estudantes. Habilidades, por sua vez, referem-se a aptidões específicas que os estudantes devem adquirir para desempenhar determinadas ações ou resolver problemas. Essas habilidades são componentes das competências e estão distribuídas de maneira a permitir uma progressão contínua e articulada ao longo dos anos escolares.

3.1.1 COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS

3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

3.1.2 HABILIDADES

(EM13MAT308) Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança.

(EM13MAT406) Utilizar os conceitos básicos de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

(EM13MAT512) Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos.

4 Desenvolvimento

No primeiro encontro, será apresentado o conceito de quadriláteros inscritíveis, destacando as propriedades que possuem. Serão explorados exemplos e construções desses quadriláteros. Já no segundo encontro, o foco será o Teorema de Ptolomeu, apresentando um pouco do seu contexto histórico, sua demonstração e aplicação na resolução de problemas envolvendo quadriláteros inscritíveis. Serão propostos exercícios práticos para que os estudantes desenvolvam

a habilidade de aplicar o teorema em situações diversas, consolidando assim o aprendizado.

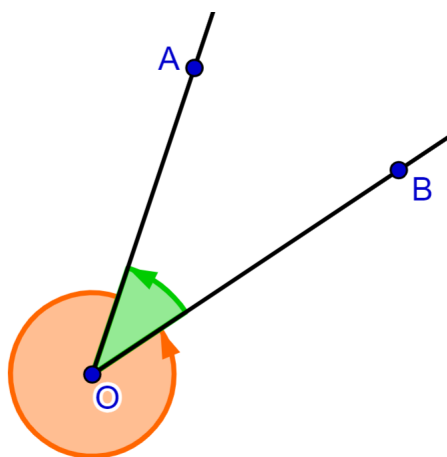
4.1 Encontro 1: Quadriláteros inscritíveis

4.1.1 Tópicos Preliminares

Ângulo:

Ângulo é uma região delimitada por duas semirretas que partem do mesmo ponto. Dadas as semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , um ângulo de vértice O e lados \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} é uma das regiões limitadas por \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} como mostra a figura 1.

Figura 1: Ângulo



Fonte: Autora

A todo **ângulo** esta associada uma **medida** da região do plano que ele ocupa. A medida de um ângulo é um número real positivo x , com unidade de medida em graus, tal que $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

Observação. Na figura 1 tem-se $\angle AOB + \angle BOA = 360^\circ$. $\angle AOB$ (em laranja) é um ângulo maior que 180° e $\angle BOA$ (em verde) é um ângulo menor que 180° , consideramos nessa notação o sentido anti-horário, de agora em diante quando usarmos a notação $\angle AOB$ estaremos nos referindo ao ângulo menor que 180° , exceto quando deixado claro que é o contrario.

Quadrilátero:

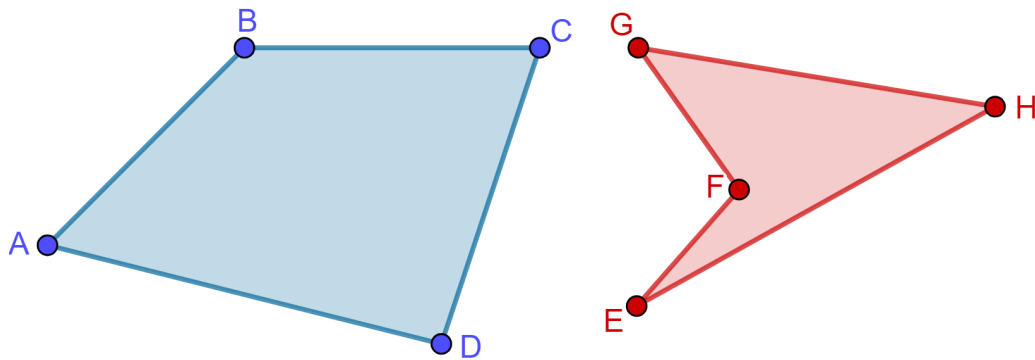
Quadrilátero é um polígono de quatro lados e quatro vértices, onde dois lados têm um único vértice em comum.

Um **quadrilátero** é dito **convexo** quando, ao tomarmos dois pontos quaisquer distintos A e B no seu interior, o segmento \overline{AB} esta totalmente no interior do quadrilátero (figura 2).

4.1.2 Introdução aos Quadriláteros Inscritíveis

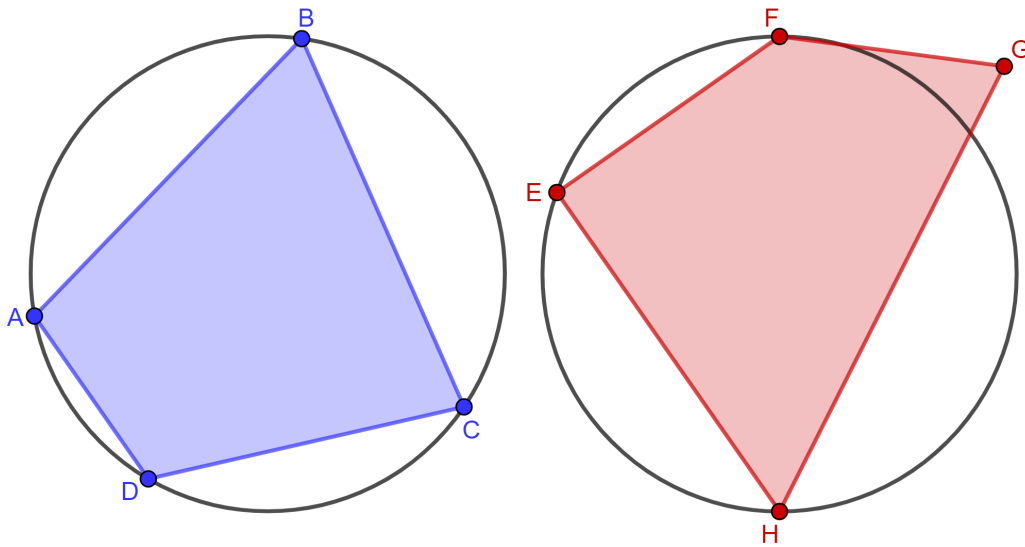
Definição:

Um quadrilátero é chamado de inscritível se todos os seus vértices pertencem a uma mesma circunferência. Em outras palavras, um quadrilátero é inscritível se ele pode ser inscrito

Figura 2: $ABCD$ convexo e $EFGH$ não convexo

Fonte: Autora

em uma circunferência.

Figura 3: $ABCD$ inscritível e $EFGH$ não inscritível

Fonte: Autora

Propriedades:

P1: A característica mais marcante dos quadriláteros inscritíveis é que a soma dos ângulos opostos é sempre igual a 180° . Formalmente, se $ABCD$ é um quadrilátero inscritível, então:

$$\angle BAD + \angle DCB = 180^\circ \text{ ou } \angle CBA + \angle ADC = 180^\circ.$$

A recíproca é verdadeira e usada como critério para verificar se um quadrilátero é inscritível, isto é: Um quadrilátero é inscritível se e somente se a soma de seus ângulos opostos é igual a 180° .

P2: Outra propriedade que relaciona os ângulos de um quadrilátero inscritível é a que deriva dos ângulos determinados por um mesmo arco. Se $ABCD$ é um quadrilátero inscritível, então:

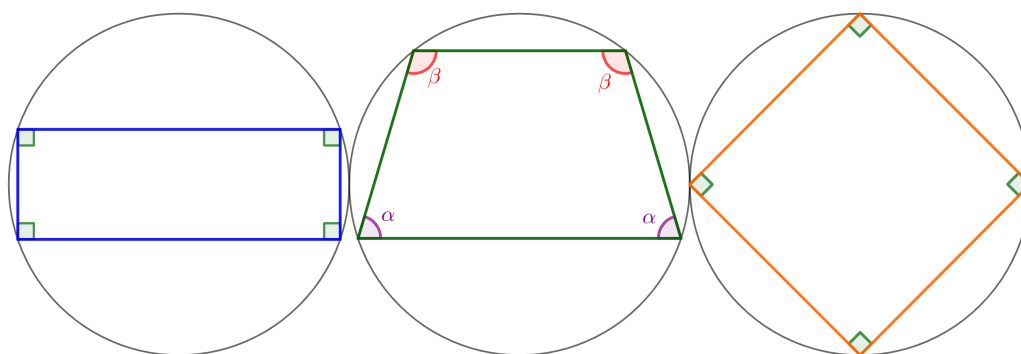
$$\angle BAC = \angle BDC.$$

A recíproca também é verdadeira, podendo essa propriedade ser usada como critério para a inscribibilidade de um quadrilátero.

Exemplos de Quadriláteros Inscritíveis:

1. **Retângulo:** Todo retângulo pode ser inscrito em uma circunferência porque os ângulos opostos de um retângulo são iguais e todos são retos, logo a soma dos ângulos opostos é sempre 180° .
2. **Trapézio Isósceles:** Um trapézio isósceles é inscrito porque é composto por dois pares de ângulos iguais que juntos somam 360° , portanto, a soma dos ângulos opostos é 180° .
3. **Quadrado:** Todo quadrado é um caso especial de retângulo e, portanto, também pode ser inscrito em uma circunferência.

Figura 4: Exemplos de Quadriláteros Inscritíveis



Fonte: Autora

4.1.3 Afirmações para exploração e demonstração:

Afirmção 1: Um paralelogramo é inscrito se, e somente se, for um retângulo.

Afirmção 2: Um trapézio é inscrito se, e somente se, for um trapézio isósceles.

Afirmção 3: Um losango é inscrito se, e somente se, for um quadrado.

Estas afirmações podem ser demonstradas facilmente com os alunos. Dica: Relembre as características destes quadriláteros.

Demonstrações:

Demonstração 1: Seja $ABCD$ um paralelogramo, logo os ângulos opostos são congruentes, isto é, $\angle BAD = \angle DCB = a$ e $\angle CBA = \angle ADC = b$, e os ângulos adjacentes são suplementares, assim $\angle BAD + \angle CBA = 180^\circ$ e $\angle DCB + \angle ADC = 180^\circ$, daí:

$$\angle BAD + \angle DCB = 180^\circ \iff a + a = 180^\circ \iff 2a = 180^\circ \iff a = 90^\circ.$$

Portanto, o paralelogramo $ABCD$ é inscrito se, e somente se for um retângulo.

Demonstração 2: Seja $ABCD$ um trapézio de bases AB e CD . Como $AB \parallel CD$, tem-se:

$$\angle BAD + \angle ADC = 180^\circ \text{ e } \angle CBA + \angle DCB = 180^\circ.$$

Segue-se, que:

$$\angle BAD + \angle DCB = 180^\circ \iff \angle BAD + \angle DCB = \angle BAD + \angle ADC \iff \angle DCB = \angle ADC.$$

Por outro lado, $ABCD$ é cíclico (cíclico é o mesmo que inscritível) se, e somente se, $\angle BAD + \angle DCB = 180^\circ$. Logo, $ABCD$ é inscritível se, e somente se, $\angle DCB = \angle ADC$.

Entretanto, $ABCD$ é isósceles se, e somente se, $\angle DCB = \angle ADC$. Portanto, o trapézio $ABCD$ é inscritível se, e somente se, $ABCD$ é isósceles.

Demonstração 3: Todo losango é um paralelogramo, com todos os lados de mesmo comprimento, logo pela **Demonstração 1** um losango é inscritível se, e somente se for um quadrado.

4.1.4 Métodos de Construção de Quadriláteros Inscritíveis

Nesse momento serão abordadas técnicas específicas para a construção desses tipos de quadriláteros. Existem vários métodos para construir tais quadriláteros, dependendo das condições e ferramentas disponíveis. Aqui estão alguns métodos que deverão ser aplicados com os alunos.

Construção a partir de uma Circunferência Dada:

1. Desenhe a circunferência: Comece desenhando uma circunferência com um compasso, determinando o centro O e o raio r ;
2. Escolha os vértices: Marque quatro pontos distintos A , B , C e D na circunferência, nesta ordem;
3. Conecte os vértices: Use uma régua para conectar os pontos A , B , C e D sequencialmente para formar o quadrilátero $ABCD$.

Verificação: Meça os ângulos internos usando um transferidor e verifique se a soma dos ângulos opostos é igual a 180° .

Construção a partir de Ângulos Dados:

1. Desenhe uma linha base: Desenhe um segmento AB de um comprimento arbitrário;
2. Marque os ângulos: Usando um transferidor, marque, para o mesmo lado, dois ângulos α e β em A e B respectivamente, onde $\alpha < 180^\circ$ e $\beta < 180^\circ$;
3. Desenhe as retas auxiliares: Desenhe as retas AD' e BC' formando os ângulos α e β com AB ;
4. Marque o ponto C : Escolha o ponto C na reta BC de modo que ele esteja localizado antes do cruzamento de AD' e BC' ;

5. Marque o ângulo suplementar de α : Usando um transferidor, marque o ângulo $180^\circ - \alpha$ em C ;
6. Complete o quadrilátero: Marque D na intersecção da reta que partiu de C com a reta AD' .

Verificação: Meça o ângulo $\angle ADC$ e verifique ser igual a $180^\circ - \beta$.

Dica: Nessa construção a partir de Ângulos Dados, dê valores exatos para α e β que facilitem o uso do transferidor, por exemplo $\alpha = 60^\circ$ e $\beta = 70^\circ$.

Construção a partir do Comprimento das diagonais:

1. Determine as diagonais: Suponha que você tenha os comprimentos das diagonais AC e BD , tais que $\overline{AC} \geq \overline{BD}$;
2. Desenhe a circunferência: Desenhe uma circunferência de tal forma que seu raio r seja tal que $2r \geq \overline{AC}$;
3. Trace as diagonais: Com o auxílio de uma régua para fixar os comprimentos, trace \overline{AC} e \overline{AD} de modo que estes segmentos se intersectem no interior da circunferência e os pontos A , B , C e D estejam sobre a circunferência;
4. Conecte os vértices: Use uma régua para conectar A com B , B com C , C com D e D com A .

Construção utilizando Software de Geometria Dinâmica:

1. Abra o software: Utilizaremos o software GeoGebra;
2. Desenhe a circunferência: Use a ferramenta de círculos para desenhar um círculo;
3. Marque os vértices: Clique para marcar quatro pontos distintos A , B , C e D sobre o círculo, com a ferramenta Pontos selecionada;
4. Conecte os vértices: Use a ferramenta para segmentos para conectar os pontos A , B , C e D sequencialmente.

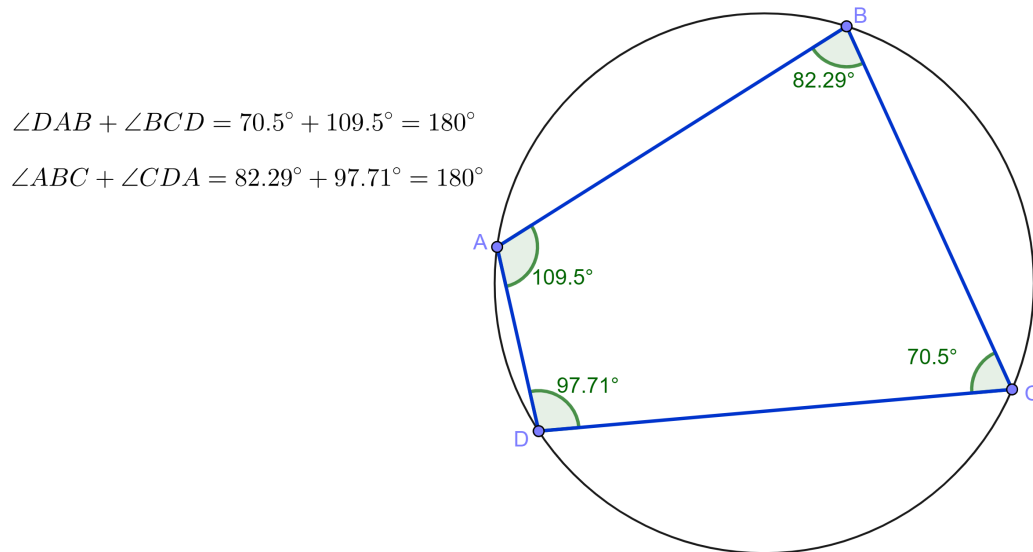
Verificação: O software permite ajustar os pontos e observar em tempo real se os ângulos opostos somam 180° . Para isso, os alunos devem ser orientados ao uso da ferramenta de ângulos para destacar os ângulos internos do quadrilátero $ABCD$. Segue imagem (Figura 5) e link de um exemplo com texto dinâmico: <https://www.geogebra.org/m/u7a4fk3j>

4.1.5 Atividades Teóricas e Práticas sobre Quadriláteros Inscritíveis

Sugestão de atividade para que os alunos coloquem em prática os conceitos e técnicas aprendidas:

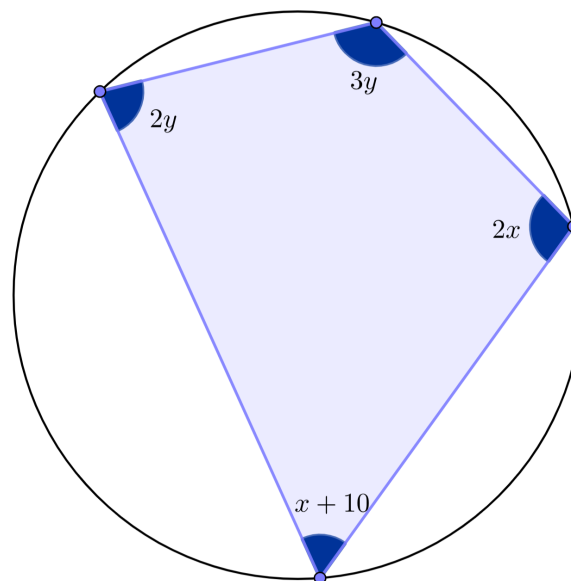
Exercício 1 - Seja um quadrilátero inscritível $ABCD$. Determine $\angle CDA$ e $\angle DAB$, sabendo que $\angle ABC = 40^\circ$ e $\angle BCD = 80^\circ$.

Exercício 2 - Determine o valor de x e y no quadrilátero abaixo (figura 6).

Figura 5: Construção do Quadrilátero $ABCD$ inscrito

Fonte: Autora

Figura 6: Exercício 2



Fonte: Autora

Exercício 3 - Construa um quadrilátero $ABCD$ inscrito, tal que a circunferência circunscrita a $ABCD$ tenha raio de 5cm e $ABCD$ seja um:

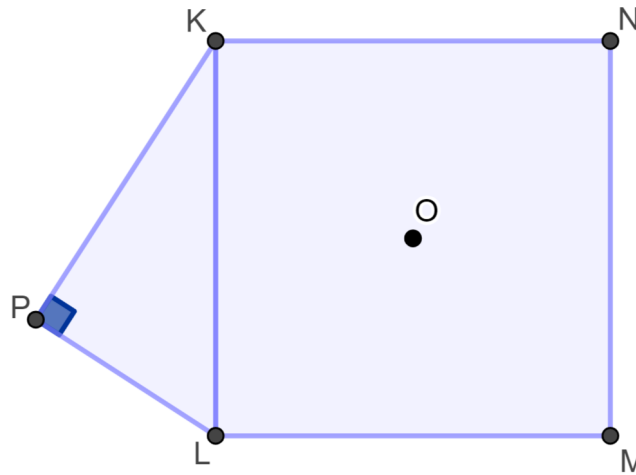
- Paralelogramo.
- Trapézio.
- Losango.

Exercício 4 - Construa um quadrilátero $ABCD$ inscrito, tal que $\angle DAB = 45^\circ$ e $\angle ABC = 70^\circ$.

Exercício 5 - Construa um quadrilátero $ABCD$ inscrito, com diagonais $\overline{AC} = 6\text{cm}$ e $\overline{BD} = 7\text{cm}$.

Exercício 6 - Na figura 7, $KLMN$ é um quadrado de centro O . Determine a medida de $\angle LPO$.

Figura 7: Exercício 6



Fonte: Autora

4.1.6 Revisão e Dúvidas

- **Revisão:** Recapitule os principais conceitos da aula.
- **Dúvidas:** Abra espaço para perguntas e esclareça quaisquer dúvidas que os alunos possam ter.

4.2 Encontro 2: O Teorema de Ptolomeu

4.2.1 Introdução ao Teorema de Ptolomeu

Enunciado:

Se $ABCD$ é um quadrilátero inscritível de diagonais AC e BD , então

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

Ou seja, a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das diagonais.

Contextualização histórica:

O enunciado acima se refere ao teorema, conhecido como, de Ptolomeu, apesar de que há indícios que tenha sido descoberto muito antes de sua época, sendo o real propósito de Ptolomeu, em relação a este teorema, a possibilidade de aplica-lo na construção da *Tabela de Cordas* que encontra-se na sua obra *Almagesto*.

Cláudio Ptolomeu, foi um cientista grego que viveu no Egito entre aproximadamente 90 e 168 E.C.(Era Comum), é reconhecido principalmente por suas contribuições na astronomia, matemática e geografia. Sua obra mais famosa, *Almagesto*, é uma coleção de tratados que introduziu modelos e ferramentas matemáticas cruciais, como a trigonometria, baseando-se

nos trabalhos de estudiosos anteriores como Hiparco e Eratóstenes. Ptolomeu desenvolveu o modelo geocêntrico do sistema solar, que permaneceu influente por 1400 anos até ser substituído pela teoria heliocêntrica de Copérnico. Sua obra permitiu a preservação e transmissão do conhecimento astronômico antigo.

Ptolomeu fez importantes contribuições para a geografia com sua obra *Geografia*, que compilou informações sobre diversas regiões do mundo conhecido na época, influenciando a cartografia medieval e renascentista. Ele também contribuiu para a música com sua *Harmônica* e para a astrologia com *Tetrabiblo*, refletindo as práticas científicas de sua época. Vivendo em Alexandria, um centro intelectual da antiguidade, Ptolomeu teve acesso a vastos conhecimentos, que utilizou para fundamentar e expandir suas teorias e observações.

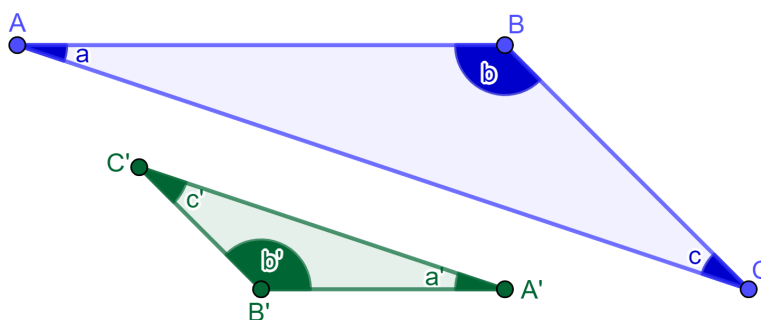
4.2.2 Definições Preliminares

Revise os critérios de semelhança de triângulos:

Dois triângulos são semelhantes se existir uma correspondência vértice a vértice, de modo que os ângulos correspondentes sejam congruentes, e os comprimentos dos lados correspondentes sejam proporcionais.

Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes:

Figura 8: Triângulos Semelhantes



Fonte: Autora

- $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$;
- $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$.

Critérios de semelhança de triângulos:

- Critério AA

Dois quaisquer triângulos são semelhantes se tiverem dois ângulos correspondentes geometricamente iguais (o terceiro ângulo é necessariamente igual, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180°).

- Critério LAL

Dois quaisquer triângulos são semelhantes se tiverem dois lados correspondentes diretamente proporcionais e os ângulos correspondentes, adjacente a estes lados, forem congruentes.

- Critério LLL

Dois quaisquer triângulos são semelhantes se tiverem os três lados correspondentes diretamente proporcionais.

Retome os conhecimentos sobre quadriláteros inscritíveis:

Relembre os conceitos aprendidos na aula anterior, enfatizando principalmente as características relacionadas aos ângulos de um quadrilátero inscritível.

Breve introdução a ângulo inscrito:

Um **ângulo inscrito** num círculo é um ângulo do qual o vértice é um ponto do círculo e os lados são duas cordas do mesmo círculo.

Teorema do Ângulo Inscrito: Se AB e AC são cordas de um círculo de centro O , então a medida do ângulo inscrito $\angle BAC$ é igual a metade da medida do ângulo central $\angle BOC$, isto é:

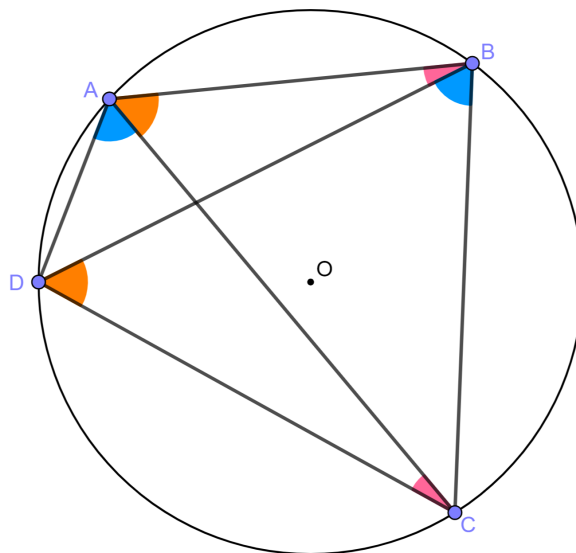
$$\angle BOC = 2\angle BAC.$$

Uma consequência do teorema acima é que ângulos inscritos determinados por um mesmo arco, ou corda, têm mesma medida, isto é, são congruentes.

4.2.3 Demonstração do Teorema de Ptolomeu

Seja $ABCD$ um quadrilátero nas condições do enunciado como mostra a Figura 9.

Figura 9: Quadrilátero inscritível



Fonte: Autora

Inicialmente observemos que:

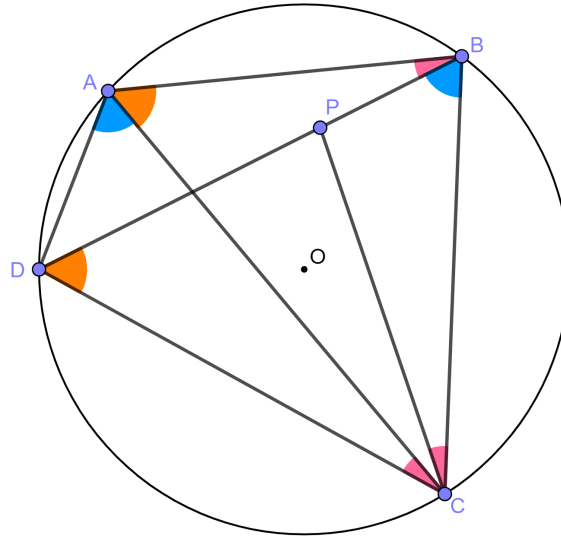
- (I) $\angle ABD = \angle ACD$ por serem ângulos determinados pelo arco menor AD ;
- (II) $\angle BAC = \angle BDC$ por serem ângulos determinados pelo arco menor BC ;
- (III) $\angle CAD = \angle CBD$ por serem ângulos determinados pelo arco menor CD .

Agora marcaremos o ponto P na diagonal BD de modo que:

(IV) $\angle BCP = \angle ACD$

(consequentemente de (I) $\angle BCP = \angle ABD$ também). Veja Figura 10.

Figura 10: Marcação do ponto P



Fonte: Autora

Notemos que:

(V) $\angle ACB = \angle DCP$, pois

$$\angle ACB = \angle ACP + \angle PCB = \angle ACP + \angle ACD = \angle DCP.$$

De (III) e (IV) temos a semelhança pelo caso AA dos triângulos ACD e BCP , segue-se que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BP}} \Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{BP} = \overline{AD} \cdot \overline{BC}.$$

De (II) e (V) temos a semelhança dos triângulos ABC e DPC , também pelo caso AA, daí

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DP}} \Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{DP} = \overline{AB} \cdot \overline{CD}.$$

Somando ambos os membros das relações obtidas através das semelhanças que citamos anteriormente, obtemos:

$$\begin{aligned} \overline{AC} \cdot \overline{BP} + \overline{AC} \cdot \overline{DP} &= \overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} \\ \Rightarrow \overline{AC} \cdot (\overline{BP} + \overline{DP}) &= \overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} \\ \Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{BD} &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

4.2.4 Aplicações do Teorema de Ptolomeu

No texto base estão expostas diversas aplicações do teorema de Ptolomeu, a escolhida aqui para ser exposta para os alunos foi a Lei dos Cossenos, ficando a critério do(a) professor(a) que pretenda aplicar essa sequência didática a exposição dessa ou de outras aplicações.

Lei dos Cossenos

Dado um triângulo qualquer ABC de lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$, a lei dos cossenos nos fornece a relação:

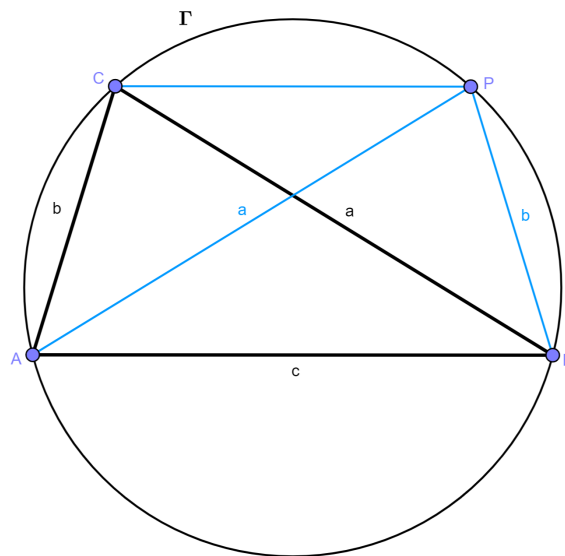
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}.$$

O Teorema de Ptolomeu é uma ferramenta bem interessante para se demonstrar a lei dos cossenos para um triângulo qualquer.

Seja ABC um triângulo de lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$. Sendo Γ o círculo circunscrito ao triângulo ABC , marcaremos em Γ o ponto P de modo que $AP = BC = a$ e $BP = AC = b$, a existência de tal ponto P esta garantida, pois o trapézio isósceles da Figura 11 é inscritível porque dois de seus ângulos opostos são suplementares. De fato:

$$\angle CPB + \angle CAB = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ.$$

Figura 11: Círculo circunscrito ao triângulo ABC



Fonte: Autora

Baixemos de C e P os segmentos CE e PF , ambos perpendiculares, ao lado AB .

Note que, os triângulos ABC e BAP são congruentes pelo caso LLL (lado, lado, lado), assim $\angle CAB = \angle PBA = \hat{A}$. Trataremos apenas por \hat{A} em relação ao ângulo interno do triângulo ABC , daí obtemos outra congruência por $LAAo$ (lado, ângulo, ângulo oposto) dos triângulos ACE e BPF , que nos fornece $\overline{AE} = \overline{BF}$.

No triângulo retângulo ACE temos:

$$\cos \hat{A} = \frac{\overline{AE}}{b} \Rightarrow \overline{AE} = b \cos \hat{A}.$$

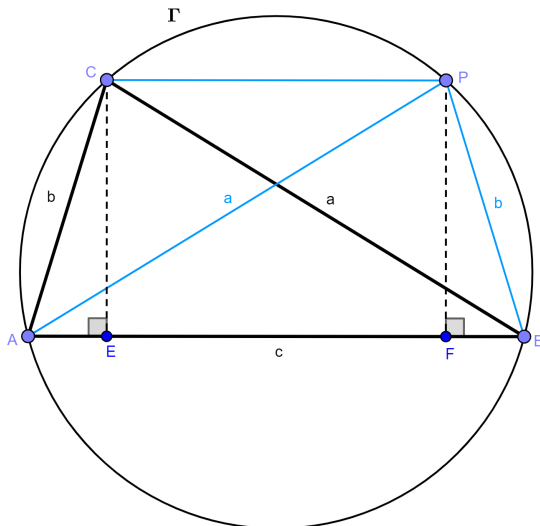
Temos ainda:

$$\angle CAB = \angle PBA \Rightarrow \angle CAP + \angle PAB = \angle PBC + \angle CBA$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \angle CAP + \angle PAB &= \angle CAP + \angle CPA \\ \Rightarrow \angle PAB &= \angle CPA\end{aligned}$$

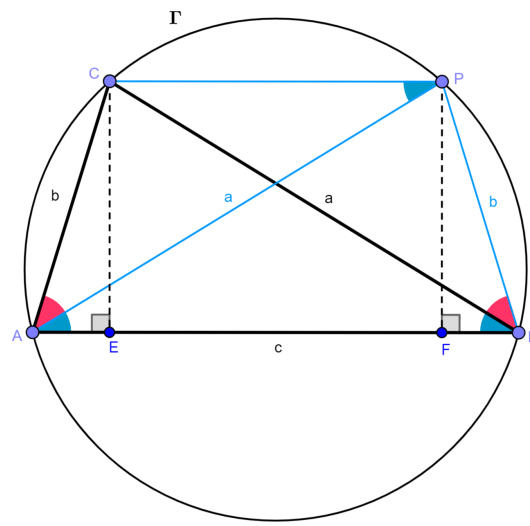
logo $CP \parallel AB$. Corolário 2.17 (MUNIZ NETO, 2013).

Figura 12: Segmentos perpendiculares



Fonte: Autora

Figura 13: $(CP \parallel AB)$



Fonte: Autora

Finalmente, aplicando o Teorema de Ptolomeu ao quadrilátero $ABPC$, temos:

$$\begin{aligned}\overline{BC} \cdot \overline{AP} &= \overline{AC} \cdot \overline{BP} + \overline{AB} \cdot \overline{CP} \\ \Rightarrow a \cdot a &= b \cdot b + c \cdot (c - 2b \cos \hat{A}) \\ \Rightarrow a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A},\end{aligned}$$

pois $\overline{CP} = \overline{EF} = \overline{AB} - 2 \cdot \overline{AE} = c - 2 \cdot b \cos \hat{A}$. ■

4.2.5 Atividade Prática com uso do GeoGebra

Atividade: Explorando o Teorema de Ptolomeu com GeoGebra.

1. Construa o Círculo:

- Abra o GeoGebra e desenhe um círculo usando a ferramenta de círculo (selecionando um ponto central e um ponto no círculo).

2. Construa um Quadrilátero inscrito no círculo:

- Escolha quatro pontos distintos no círculo e marque-os.
- Conecte esses pontos em ordem para formar um quadrilátero cíclico (usando a ferramenta de polígono ou de segmentos).

3. Medição dos Lados e Diagonais:

- Use a ferramenta de medição de distâncias ou segmentos para medir os quatro lados do quadrilátero.
- Meça também as duas diagonais do quadrilátero.

4. Aplicação do Teorema de Ptolomeu:

- Peça aos alunos para calcular a soma dos produtos dos lados opostos e o produto das diagonais.
- Utilize o GeoGebra para inserir os cálculos e verificar se o Teorema de Ptolomeu é satisfeito: $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$

5. Use a ferramenta de texto:

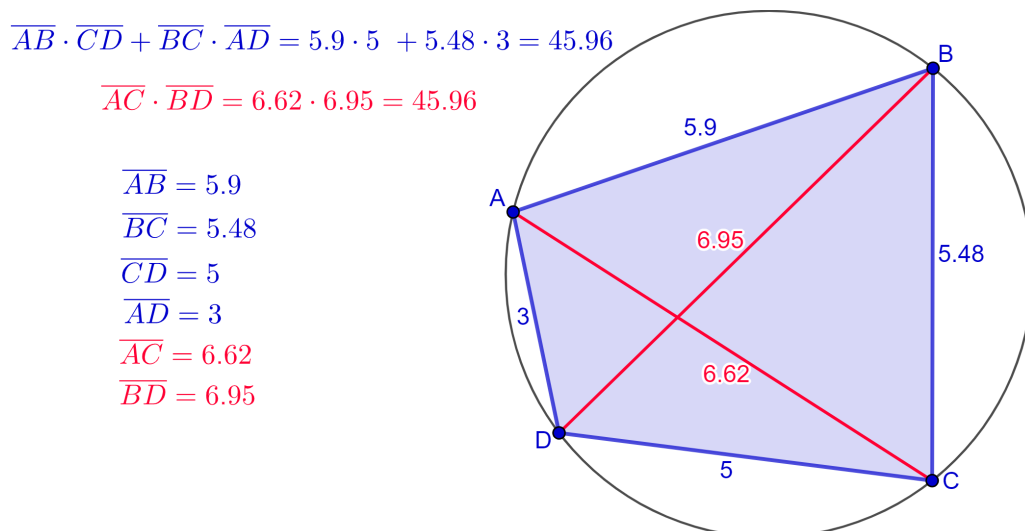
- Use variáveis auxiliares para os cálculos do teorema:
 $s = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$ e $t = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$.
- Use a ferramenta para textos e crie um texto dinâmico para exibir os resultados.

6. Exploração e Manipulação:

- Permita que os alunos movam os pontos no círculo e observem como as medidas dos lados e das diagonais mudam.
- Incentive-os a verificar repetidamente o Teorema de Ptolomeu com diferentes configurações de quadriláteros cíclicos.

Segue link e imagem exemplo dessa construção: <https://www.geogebra.org/m/dgqpayaaj>

Figura 14: Explorando o Teorema de Ptolomeu com GeoGebra



Fonte: Autora

4.2.6 Exercícios de fixação e problemas

Inicialmente serão propostos exercícios de fixação, onde não há muita exigência de interpretação ou contextualização com outros conteúdos matemáticos, seguindo com os problemas que necessitam de uma maior amplitude de conhecimentos prévios como também um melhor desempenho em resoluções de problemas.

Exercícios:

Exercício 1. Dado um quadrilátero inscritível $ABCD$ onde $\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 6$, $\overline{CD} = 5$ e $\overline{DA} = 7$. Se a diagonal \overline{AC} mede 10, determine a medida da diagonal \overline{BD} .

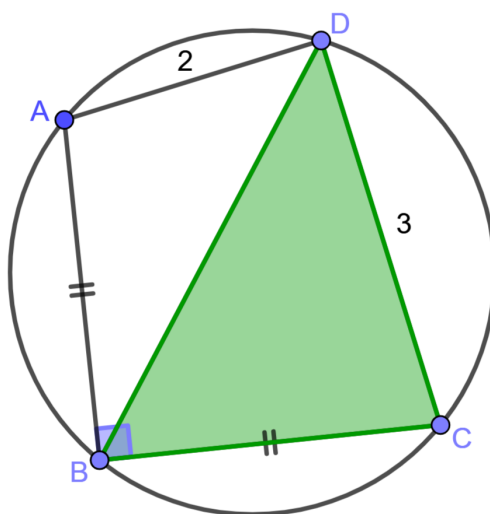
Exercício 2. No quadrilátero cíclico $WXYZ$, os lados são $\overline{WX} = 9$, $\overline{XY} = 12$, $\overline{YZ} = 5$, $\overline{ZW} = 15$. Calcule o produto das duas diagonais \overline{WY} e \overline{XZ} .

Exercício 3. Verifique se o quadrilátero $PQRS$ com lados $\overline{PQ} = 10$, $\overline{QR} = 6$, $\overline{RS} = 8$, $\overline{SP} = 15$ e diagonais $\overline{PR} = 14$ e $\overline{QS} = 12$ é um quadrilátero inscritível.

Exercício 4. Um quadrilátero cíclico $ABCD$ possui $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 4$, $\overline{CD} = 3$, $\overline{DA} = 6$ e a diagonal $\overline{BD} = 7$. Determine a medida da diagonal \overline{AC} .

Problemas:

Figura 15: Quadrilátero $ABCD$: Problema 2



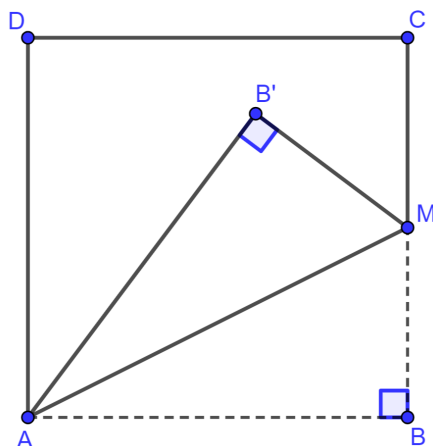
Fonte: Autora

Problema 1. Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $\overline{AB} = 6$, $\overline{AD} = 8$, $\overline{BC} = \sqrt{51}$ e $\overline{DC} = 7$. Sabendo que $\angle BAD = \angle DCB = 90^\circ$, calcule \overline{AC} e \overline{BD} .

Problema 2. Seja $ABCD$ um quadrilátero, com $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ e $\overline{AB} = \overline{BC}$, se $ABCD$ é inscritível, $\overline{AD} = 2$ e $\overline{DC} = 3$ como mostra a figura 15, qual a área do triângulo BCD ?

Problema 3. Dado um trapézio $ABCD$ isósceles de bases $\overline{AD} = 6\text{cm}$ e $\overline{BC} = 14\text{cm}$. Determine o comprimento dos lados laterais e das diagonais do trapézio $ABCD$, sabendo que $\overline{AB} + \overline{AC} = 21\text{cm}$.

Problema 4. Observe a figura 16, ela representa um papel quadrado $ABCD$, com 10cm de lado, que foi dobrado na linha AM , em que M é o ponto médio do lado BC . Considerando que após a dobra A , B , M e B' são coplanares, determine a distância de B a B' .

Figura 16: Quadrado $ABCD$ 

Fonte: Autora

5 Conclusão

Esta sequência didática é um dos frutos das experiências vivenciadas no curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmato), onde foram adquiridos os conhecimentos prévios necessários para sua idealização e construção, e também pela vivência em sala de aula ao ministrar a disciplina eletiva *Redescobrendo teoremas históricos da Geometria Plana: Ptolomeu, Menelaus e Ceva*, ainda em andamento, na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Deputado Pedro Pascoal de Oliveira, no município de Juazeirinho-PB, para alunos da 1^a série do Ensino Médio do turno vespertino.

Presume-se que este material didático, que é o produto educacional da dissertação intitulada: *OS TEOREMAS DE PTOLOMEU E MENELAUS, DEMONSTRAÇÕES E APLICAÇÕES*, seja utilizado por outros professores, e futuros professores, de matemática das escolas públicas brasileiras, dentro do plano da disciplina eletiva ou não, de modo a expandir e propagar para seus alunos esses conhecimentos, destacando a importância de uma abordagem prática e contextualizada no ensino de geometria no Ensino Médio.

6 Referências Bibliográficas

Referências Bibliográficas

- [1] AABOE, Asger. Episódios da historia antiga da matemática. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 191 p. ISBN 9788585818951.
- [2] ANDRADE, Lenimar Nunes de. O Teorema de Ptolomeu e algumas aplicações. UFPB - João Pessoa, João Pessoa PB, p. 1-4, 18 ago. 2012.
- [3] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.
- [4] GOMES, Carlos A. Tópicos de Matemática: IME- ITA - Olimpíadas. 1. ed. Fortaleza CE: VestSeller, Abril 2016. 669 p. v. 3. ISBN 9788560653454.
- [5] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. Geometria: coleção PROFMAT. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 442 p. ISBN 9788585818937.
- [6] NERY, Chico; OLIVEIRA, Edmundo Capelas de. Sobre o notável teorema de Ptolomeu. Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Campinas/SP, v. 23, ed. n. 1, 1 jul. 2023. DOI 10.21167/cqdv23n12023299316. Disponível em: <https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/index> . Acesso em: 31 ago. 2023.
- [7] ROQUE, Tatiana; PITOMBEIRA, João Bosco. Tópicos de História da Matemática: coleção PROFMAT. 1. ed. [S. l.]: SBM, 2012. 467 p. ISBN 9788585818654.