Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Eliane Werneck Matias

Tangram – uma proposta pedagógica para o ensino de área e perímetro de figuras poligonais planas

Rio de Janeiro

2024

Eliane Werneck Matias

Tangram – uma proposta pedagógica para o ensino de área e perímetro de figuras poligonais planas

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinícius Tovar Costa

Rio de Janeiro

2024

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ/REDE SIRIUS/BIBLIOTECA CTC/A

M431 Matias, Eliane Werneck.
Tangram: uma proposta pedagógica para o ensino de área e perímetro de figuras poligonais planas/ Eliane Werneck Matias. – 2024.
99 f.: il.

Orientador: Marcus Vinícius Tovar Costa
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Jogos em educação matemática - Teses. 2. Tangram - Teses. 3. Matemática - Estudo e ensino - Teses. I. Costa, Marcus Vinícius Tovar. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 51-8

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Eliane Werneck Matias

Tangram – uma proposta pedagógica para o ensino de área e perímetro de figuras poligonais planas

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 05 de julho de 2024.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Marcus Vinícius Tovar Costa – orientador
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Profª. Dra. Diana Sasaki Nóbrega
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Diego de Souza Nicodemos
Colégio Pedro II

Rio de Janeiro

2024

DEDICATÓRIA

Dedico esta Dissertação ao meu filho, Henrique, por sua paciência e resiliência. Ao meu “príncipe poderoso”, todo meu amor e que tudo isso sirva de exemplo e inspiração para sua vida. Pois nunca é tarde para começar e desistir nunca foi e nem será uma opção.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer primeiramente a Deus por minha vida e todas as bênçãos que recebo todos os dias. Agradecer à Maria Santíssima, minha “mãezinha” - nas pessoas de N.Sr.ª de Fátima, minha madrinha e N.Sr.ª das Graças, padroeira da paróquia que frequento, por me dar Seu “colo” e me fazer sentir acolhida e amparada nos momentos de desespero e aflição. Agradecer a São Judas Tadeu, por sua intercessão para que este trabalho pudesse caminhar, quando tudo parecia impossível, onde tudo era só escuridão.

Agradeço aos membros da minha família: pai, mãe, irmãs, sobrinhas, cunhado, que são meu alicerce e me dão coragem para seguir em frente, lembrando-me de onde eu vim e nunca me deixando esquecer onde eu pretendo chegar.

Agradeço também a todas as pessoas que direta, ou indiretamente, me ajudaram a concluir mais esta etapa, que é tão especial para mim. Elencando alguns desses nomes, destaco Sérgio Bomfim, por incansavelmente me incentivar a voltar a cursar o PROFMAT, repetindo que eu era capaz de chegar o fim. Ao professor Marcus Tovar, por sua ajuda para a conclusão deste trabalho. Aos colegas de turma, que fizeram parte desta jornada. Aos colegas da turma PROFMAT 2014/2015, que foram parte importantíssima na minha formação.

Agradeço aos meus colegas de escola, de modo especial Telma Lima, meu “Yin”, que me deu a força necessária num dos momentos mais difíceis, quando eu quis desistir de tudo, dividindo comigo as suas semelhantes angústias quando ela passou pelo mesmo processo de escrita de sua dissertação. E também agradecer à Marizete Canto, amiga, conselheira e mãe emprestada, que mesmo com todas as suas atribulações sempre tinha uma palavra de incentivo e não permitiu que eu desanimasse.

Sempre temos a sensação que está faltando alguém... Então, fica aqui meu agradecimento sincero a todas as pessoas que contribuíram para a realização deste sonho.

O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano. (*Isaac Newton*)

RESUMO

MATIAS, Eliane Werneck. *Tangram – uma proposta pedagógica para o ensino de área e perímetro de figuras poligonais planas.* 2024. 99 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2024.

É consenso que a Matemática é vista como um “bicho-papão” por grande parte dos alunos, de modo especial os conteúdos abordados em Geometria. Esta Dissertação tem por objetivo desmistificar essa visão e propor uma forma lúdica de consolidar os conceitos para determinação do cálculo de área e perímetro de figuras poligonais planas, utilizando o Tangram como material didático para este fim. Em caráter secundário também se propõe à ampliação e à consolidação de conceitos e propriedades de triângulos e quadriláteros, assim como o de vocabulário matemático específico, de modo particular àqueles que pertencem especificamente à área de Geometria Euclidiana Plana. Tendo em vista que, através do manuseio do material concreto, é possível aproximar o aluno do estudo das figuras poligonais planas. A fundamentação teórica se faz a partir do uso de jogos como meio de despertar o interesse para a aprendizagem Matemática. Na pesquisa foi utilizada a metodologia da Engenharia Didática, apresentando e aplicando suas quatro etapas: análises preliminares, construção do experimento, experimentação e validação, no experimento prático com os alunos. O projeto e a experimentação foram desenvolvidos com turmas de nono ano, do Ensino Fundamental 2, do Colégio Estadual Dr. Galdino do Valle Filho, da Rede Estadual de Ensino do Rio de Janeiro, situado na cidade de Nova Friburgo.

Palavras-chave: Tangram. Jogo. Área. Perímetro. Engenharia Didática.

ABSTRACT

MATIAS, Eliane Werneck. *Tangram: a pedagogical proposal for teaching the area and perimeter of flat polygonal figures*. 2024. 99 f. Master Theses (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Mathematics and Statistics Institute, Rio de Janeiro State University, Rio de Janeiro, 2024.

There is a consensus among most students that Mathematics is seen as a “bogeyman”, especially in the subject of Geometry. Using Tangram as a teaching material this Master Dissertation aims to demystify this vision and propose a playful way of consolidating the concepts for the calculation of area and perimeter of flat polygonal figures. It also proposes the expansion and consolidation of concepts and properties of triangles and quadrilaterals, and trace the way to na specific mathematical vocabulary, particularly within the area of flat Euclidean Geometry. We discuss that it is possible to bring the student closer to the flat polygonal figure study, through the handling of concrete material. The theoretical basis for this work is driven on the use of games as an interesting route to awake in learning Mathematics. The Didactic Engineering methodology was used in the research, presenting and applying its four stages: preliminary analysis, construction of the experiment, experimentation and validation, in the practical experiment with students. The project and experimentation were developed with ninth grade classes, from Elementary School , from Dr. Galdino do Valle Filho State Public School, from the Rio de Janeiro State Education System, located in the city of Nova Friburgo.

Keywords: Tangram. Game. Area. Perimeter. Didactic Engineering.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Esquema com as fases da Engenharia Didática.. 26
Figura 2 - Quadro ilustrativo com as fases da Engenharia Didática aplicadas neste trabalho de pesquisa.. 29
Figura 3 - Tangram Chinês – apresentação das peças 33
Figura 4 - Diferentes construções de triângulo com diferentes números de peças ... 34
Figura 5 - Tangram oval (ou ovo mágico) com suas 9 peças 35
Figura 6 - Primeiros passos da construção do tangram oval 36
Figura 7 - Finalização da construção do tangram oval 37
Figura 8 - Tangram oval completo 37
Figura 9 - Exemplos de imagens que podem ser construídas com o tangram oval e seus respectivos gabaritos 38
Figura 10a - Tangram coração colorido com suas 9 peças 39
Figura 10b - Tangram coração com suas 9 peças 39
Figura 11 - Exemplos de imagens construídas com o tangram coração 39
Figura 12a - Tangram triangular com suas 8 peças 40
Figura 12b - Tangram triangular colorido 40
Figura 13 - Tangram de Fletcher 42
Figura 14 - Tangram chinês 44
Figura 15 - Representação do triângulo retângulo isósceles, de cateto L 45
Figura 16 - Tangram chinês e relação entre as áreas tomando o quadrado grande como o unitário 48
Figura 17 - Grupo 1 produzindo e pintando o pinheiro com 4 copas 50
Figura 18 - Grupo 2 desenhando o pinheiro que foi construído com 3 copas 50
Figura 19 - Diferentes formações de pinheiro 51
Figura 20 - Mural com os pinheiros de natal aprentados pelos alunos do 9º ano e árvore dos desejos produzida pelos alunos do 8º 51
Figura 21 - Presépio produzido pelos alunos da 1ª série do Ensino Médio 52
Figura 22 - Mural com os nomes dos alunos do PCF 3 53
Figura 23 - Grupo do 9º ano com girafa, tentando reproduzir o elefante 54
Figura 24 - Animais selvagens confeccionados pela turma do PCF 4 54
Figura 25 - Grupo do 8º ano finalizando as imagens do elefante e do obá-obá 55

Figura 26 -	Alunos do PCF4 finalizando a parte artística do trabalho	55
Figura 27 -	Grupo de 9º ano tentando reproduzir o leão. Aluna sentada sobre a mesa para olhar por outra perspectiva as peças	55
Figura 28 -	Mural com alguns dos quadro produzidos por alunos do 8º , 9º ano e PCF 4	56
Figura 29 -	Grupo A da turma PCF 3, 2023, montando polígonos	57
Figura 30 -	Grupo B da turma PCF 3, 2023, montando polígonos	58
Figura 31 -	Grupo A, na fase final do trabalho	58
Figura 32 -	Primeiras dobras para a obtenção de um quadrado a partir de um retângulo	71
Figura 33 -	Quadrado dividido pela diagonal	71
Figura 34 -	Obtenção dos TG do Tangram	72
Figura 35 -	Obtenção do TM	72
Figura 36 -	Obtenção de um TP e do Q	73
Figura 37 -	Obtenção do outro TP e do P	74
Figura 38a -	Foto de aluno da turma 901 tentando refazer o quadrado original	75
Figura 38b -	Foto da aluna da turma 902 tentando refazer o quadrado original	75
Figura 39 -	Grupo A “medindo” a hipotenusa do TG	82
Figura 40 -	Grupo B analisando trapézio com 2 peças	82
Figura 41 -	Grupo C tentando construir figuras com 4 peças	82
Figura 42 -	TM representado como número racional	83
Figura 43 -	Grupo não verificou corretamente relação entre área e perímetro das figuras produzidas	87

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Relação das medidas dos lados de cada peça do Tangram tomando a medida do cateto do triângulo pequeno como L 46
Tabela 2 – Relação entre as bases e as alturas das peças do Tangram e determinação das áreas de cada peça 46
Tabela 3 – Determinação dos perímetros de cada peça do Tangram 47

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Análise da Sequência A: Identificação de paralelogramos 61
Gráfico 2 – Análise da Sequência B: Identificação de triângulo escaleno 62
Gráfico 3 – Análise da Sequência C: Identificação de retângulo 62
Gráfico 4 – Análise da Sequência D: Identificação de trapézio 63
Gráfico 5 – Análise da Sequência E: Identificação de trapézio retângulo 64
Gráfico 6 – Bloco 1: Identificação de figuras com mesma área 67
Gráfico 7 – Bloco 2: Classificação de triângulos e quadriláteros 68
Gráfico 8 – “Avaliação” final 86

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Atividade 1 (Avaliação diagnóstica) 60
Quadro 2 – Atividade 2 (Avaliação diagnóstica) 65
Quadro 3 – Atividade 3 (Avaliação diagnóstica) 66
Quadro 4 – Folha 1 (Experimentação) 78
Quadro 5 – Folha 2 (Experimentação) 79
Quadro 6 – Folha 3 (Experimentação) 80

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
GVF	Colégio Estadual Dr. Galdino do Valle Filho
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC	Ministério da Educação
PCF	Projeto Correção de Fluxo
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
SEEDUC-RJ	Secretaria Estadual de Educação do Estado do Rio de Janeiro
UERJ	Universidade do Estado do Rio de Janeiro

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO...	18
1	**FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA** ...	23
1.1	**Aprendizagem por meio de jogos** ...	23
1.1.1	Jogos nos PCN ...	25
1.2	**Metodologia: Engenharia Didática** ...	25
1.2.1	Análises preliminares ...	27
1.2.2	Construção do experimento (análise *a priori*) ...	27
1.2.3	Experimentação ...	28
1.2.4	Validação (análise *a posteriori*) ...	28
1.3	**Ensino Colaborativo** ...	30
2	**TIPOS DE TANGRAM** ...	32
2.1	**Tangram – Diferentes modelos** ...	32
2.1.1	Tangram Tradicional ...	32
2.1.2	Tangram Oval ...	35
2.1.3	Tangram Coração ...	38
2.1.4	Tangram Triangular ...	40
2.1.5	Tangram de Fletcher ...	41
3	**TANGRAM TRADICIONAL** ...	44
3.1	**Relação entre as peças do Tangram Chinês** ...	44
3.2	**Tangram em projetos** ...	49
4	**DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA** ...	59
4.1	**Atividades da Análise Preliminar** ...	60
4.2	**Construção do Experimento (análise *a priori*)** ...	69
4.3	**Construção do Tangram por meio de dobraduras**...	70
4.3.1	Passo 1 – Obtenção de um quadrado que será o tamanho do Tangram ...	70
4.3.2	Passo 2 - Divisão do quadrado por uma de suas diagonais ...	71
4.3.3	Passo 3 – Obtenção dos triângulos grandes (TG) do Tangram ...	71
4.3.4	Passo 4 – Obtenção do triângulo médio (TM) do Tangram ...	72
4.3.5	Passo 5 – Obtenção do quadrado (Q) e de um dos triângulos pequenos (TP) do Tangram ...	73
4.3.6	Passo 6 – Obtenção do paralelogramo (P) e de um dos triângulos pequenos (TP) do Tangram...	73

4.4 **Experimentação – atividades colaborativas** 76
4.5 **Validação (análise *a posteriori*)** 84
CONSIDERAÇÕES FINAIS.. 89
REFERÊNCIAS.. 93
ANEXO – Habilidades da BNCC 96

INTRODUÇÃO

Sou professora da Rede Estadual de Ensino do Estado do Rio de Janeiro desde fevereiro de 2002. Estudei em escolas públicas desde a antiga 5ª série até a formação universitária, passando pelas redes municipal (antigo ginásio 5ª a 8ª série, de 1985 a 1988) e estadual (curso de formação de professores no Colégio Estadual Heitor Lira, de 1989 a 1991 e nível universitário na UERJ (Universidade do Estado do Rio de Janeiro), graduação de 1995 a 1999, onde tive o meu primeiro contato com o Tangram e especialização em 2001 e 2002). Enquanto aluna da rede pública pude perceber algumas deficiências na minha formação, em especial na área de Matemática. Foi, contudo, a partir de esforço pessoal e muito apoio de alguns professores, que consegui atingir meus objetivos. Também pelo fato de ter sido aluna da rede pública e vivenciar algumas falhas no processo, resolvi prestar concurso público, e assim me tornar docente da rede para tentar mudar a vida de outros jovens. Fazer como alguns dos professores que passaram pela minha vida o fizeram.

Ao longo deste tempo, passei os 16 primeiros anos trabalhando numa escola exclusiva de Ensino Médio, tendo trabalhado na maior parte deste período com turmas de 2ª série. E foi então que o Tangram tradicional chinês começou a entrar na minha sala de aula, pois um dos conteúdos mais temidos pelos alunos é a Geometria e é na 2ª série do Ensino Médio o ano em que são estudados os sólidos geométricos, suas áreas e volumes. Entretanto os alunos traziam uma defasagem de conhecimentos que dificultava e por vezes inviabilizava a aprendizagem desses conceitos, relativos à série, e a efetuação dos cálculos.

A prática pedagógica foi me mostrando que não adianta falar que o volume de um prisma é obtido efetuando-se produto da área da base pela altura do prisma, pois o aluno sequer conhece o polígono que forma a base de tal sólido, e tão pouco como se calcula sua área. Comecei então a levar o Tangram, para a sala de aula, para que os alunos, em grupos, pudessem “brincar” e, a partir de então formar algumas figuras geométricas - quadrado, retângulo, triângulo, trapézio, pentágono, hexágono - e desse modo, irem se apropriando dos nomes dos polígonos, de algumas de suas propriedades e relações, através de comparações, ou seja, a partir do material concreto ir fechando essas lacunas que ainda estavam abertas.

A primeira vista, pode parecer impossível, imaginar que um aluno chegue ao Ensino Médio sem o conhecimento de conteúdos tão triviais, como o caso da identificação de polígonos. No entanto ao observarmos mais de perto, é possível verificar que este e tantos outros assuntos foram negligenciados ao longo da vida estudantil, em especial aos alunos mais pobres, aqueles que são oriundos da escola pública, onde os tempos de Matemática são escassos, fazendo com que os professores precisem "enxugar" o conteúdo e acabando não dando muita ênfase para os conteúdos de Geometria. Obviamente este era o primeiro passo, a motivação usada para que os alunos se interessassem um pouco e para tornar as aulas de Matemática mais atraentes e divertidas, de modo especial os conteúdos de Geometria.

Em 2018, mudei de cidade e consequentemente de escola e comecei a trabalhar exclusivamente com alunos do Ensino Fundamental 2, do 6º ao 9º ano. A partir de então, o Tangram se fez ainda mais presente na minha sala de aula, pois com o auxílio deste "quebra-cabeça", além de trabalhar conceitos e conteúdos da Geometria, era possível também identificar potencialidades e características individuais dos alunos, tais como: liderança, inteligência interpessoal, resiliência etc. Além é claro de desenvolver o raciocínio lógico, a concentração, confiança e a criatividade. Em outras palavras, constatei na prática, o que Freire (2002, p.25) sempre defendeu: "ensinar não é transmitir conhecimento, mas criar as possibilidades para sua produção ou sua construção".

As potencialidades do Tangram são inúmeras, podendo-se abordar vários conteúdos, alguns deles referentes à Geometria Euclidiana plana, tais como: a identificação de polígonos (EF06MA07), área e perímetro de figuras planas (EF07MA32), rotação e translação (EF07MA21), classificação e algumas propriedades de triângulos (EF06MA19) e quadriláteros (EF06M20). Com este material é possível reforçar a linguagem e o vocabulário matemático, pois a todo o momento os alunos precisam falar e apresentar os seus conhecimentos nas construções propostas e assim devem usar o vocabulário adequado. É possível também trabalhar conceito de fração (EF06MA07), operações com frações, números racionais e irracionais (EF09MA02). Entretanto os conteúdos trabalhados e os métodos dependem do ano/série em que o Tangram deverá ser utilizado na sala de aula, de modo que isso seja adequado àquela fase.

Ao longo de anos, de prática de sala de aula, algumas diferentes atividades foram realizadas em diferentes turmas, em quase todas as modalidades de Ensino Básico, desde os primeiros anos do Ensino Fundamental 2 até ao final Ensino Médio, passando inclusive por turmas de PCF (Projeto Correção de Fluxo): turmas nas quais foi possível fazer um trabalho de valorização pessoal e aumento de autoestima, sendo este um trabalho específico realizado com as letras do alfabeto, construído com as peças do Tangram, essas representavam a inicial do nome de cada aluno da turma e ao final do trabalho eles puderam expressar artisticamente, através de seu nome, um pouco da sua personalidade. A produção final deste trabalho pode ser vista na sessão 3.2 desta Dissertação. Estas experiências foram essenciais para a reflexão sobre a eficácia do uso do Tangram em sala de aula.

É importante esclarecer que toda questão matemática envolvida no Tangram é foco principal a que esta Dissertação se destina. No entanto é relevante destacar que esta não é a única possibilidade que ele traz para a sala de aula. A valorização do aluno como um todo é fundamental no seu desenvolvimento como ser humano. Por isso acreditamos que esta forma de trabalho e estudo ajude o aluno a perceber que a matéria em questão não é o “bicho de sete cabeças” que grande parte dos alunos acredita ser, afinal de contas, estamos imersos no mundo e devemos perceber que o ensino matemático, assim como o mundo, nos possibilita diversas formas de expressão, de entendimento e de aprendizagem com arte, criatividade e conhecimento.

Esta Dissertação visa apresentar uma proposta de aprendizagem para alunos de 9º ano, no ano letivo de 2023, da qual participam os alunos do GVF (Colégio Estadual Dr. Galdino do Valle Filho), das turmas 901 e 902. Estas turmas são muito heterogêneas, pois foram formadas a partir da reorganização de três turmas de 8º ano, que tiveram professores de Matemática diferentes, além de alguns alunos que vieram de outras escolas e alguns outros repetentes do ano anterior. Sem contar que esses alunos são os chamados “alunos da pandemia”, ou seja, alunos que ficaram praticamente dois anos (6º e 7º anos) sem aulas, pois estávamos em período pandêmico. Logo, são alunos com defasagens severas, em especial na área de Matemática e mais especificamente na área da Geometria.

O período da pandemia foi de muitos desafios e dificuldades tanto para professores quanto para os alunos. De maneira geral, os alunos tiveram perdas, sejam elas no campo pedagógico ou na área de desenvolvimento afetivo. No entanto para os alunos da rede pública de ensino outros fatores, tais como: desemprego familiar, insegurança alimentar, falta de equipamentos ou equipamentos inadequados, falta de acesso à internet, entre outros, tornou o acesso à escolarização um processo altamente carente. Segundo dados do site Data Senado, a falta de estrutura e a ineficácia do meio on-line foram as principais barreiras para o processo de aprendizagem no período pandêmico. Dados do INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas) num levantamento feito com 134.606 (97,2%) escolas públicas aponta que 85,9% das escolas estaduais do país, não retornaram as atividades presenciais no ano de 2020. Em média houve suspensão de 279 dias letivos. Em 2021 apenas 9,5% das escolas públicas optaram por adequar o calendário letivo para que fosse possível ajustar e enfrentar as perdas pedagógicas sofridas no primeiro ano de pandemia. No caso específico do Rio de Janeiro, a volta presencial ocorreu na totalidade a partir de outubro de 2021, Decreto Nº 47.801, entretanto, era facultativa a presença dos alunos.

No intuito de mitigar os danos provocados por essa defasagem de conteúdo e conhecimento, bem como propiciar a relação interpessoal entre os alunos, a utilização de jogos, em especial o Tangram, de forma colaborativa, se mostra necessária. Segundo Borin (1998), a introdução de jogos nas aulas de Matemática, diminuem os bloqueios apresentados pelos alunos, pois os mesmos deixam de se sentirem incapazes de aprendê-la. Conforme PCN (1997 p. 36) é possível ver que os jogos em grupo representam uma conquista de caráter emocional, social, cognitiva, além é claro de ser um estímulo para o raciocínio lógico. Piaget (1998) acredita que o jogo é essencial na vida da criança, pois prevalece a assimilação. Freire (1999) afirma que a prática educativa é descrita como: "transformadora, fundada no respeito, na dignidade e na possibilidade de construção da autonomia de adolescentes-jovens e que inspiram nossa trajetória".

A proposta desta Dissertação tem objetivos que podem ser apresentados da seguinte forma:

1 - Verificar que, com o uso do Tangram, é possível desenvolver, ampliar, revisar, deduzir conceitos e propriedades com figuras planas que serão trabalhadas;

2 - Ampliar e consolidar vocabulário matemático adequado e compatível com o ano escolar;

3 - Calcular e comparar área e perímetro de figuras planas;

4 - Reconhecer e verificar diferença entre um número racional e um irracional;

5 - Identificar e classificar triângulos e quadriláteros a partir de suas características;

6 - Desconectar a identificação de uma figura geométrica por sua imagem pictórica.

A Dissertação está dividida em quatro capítulos, apresentados da seguinte forma:

a) No primeiro capítulo apresenta-se a fundamentação teórica sobre utilização de jogos em aulas de Matemática discutindo como eles aproximam o aluno dos conceitos matemáticos e ajudam e potencializam no processo de aprendizagem. Apresentando também a metodologia de Engenharia Didática, utilizada no desenvolvimento da mesma; suas etapas serão explicitadas e será estabelecido um paralelo com o processo de desenvolvimento desta pesquisa;
b) o segundo capítulo faz um passeio por diferentes modelos de Tangram. Sendo apresentados alguns modos de construção e relação entre as peças, em alguns desses modelos;

c) no terceiro capítulo explora o Tangram chinês. São apresentadas as relações métricas de proporcionalidade, existentes entre as peças desse tipo de Tangram, em relação às medidas dos lados, bem como à área das peças. Estão elencados também, neste capítulo, alguns dos trabalhos e projetos que foram desenvolvidos com outros alunos em diversas turmas do GVF, entre os anos de 2021 e 2023, sendo estes, parte do encorajamento para que se realizasse a pesquisa aqui apresentada;
d) no quarto capítulo mostra-se a pesquisa propriamente dita, seu desenvolvimento e análises. Apresentam-se as atividades diagnósticas e suas respectivas análises feitas a partir das respostas dos alunos; estão ainda as atividades propostas na experimentação e as análises do experimento.

Há ainda um Anexo, onde foram elencadas as habilidades, previstas na BNCC (Base Nacional Comum Curricular, Brasil, 2018), que devem ser desenvolvidas nos alunos do 1º ao 9º ano do Ensino Fundamental, e que se aplicam a esta Dissertação.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1 Aprendizagem por meio de jogos

Os jogos e as brincadeiras fazem parte da vida da criança desde os primeiros anos de vida. Contudo cabe dizer que à medida que a criança ou adolescente vai se desenvolvendo, novos jogos, utilizando regras previamente definidas vão sendo introduzidos, e ajudando no seu desenvolvimento social e emocional. Comumente usamos a palavra jogo e brinquedo (ou brincadeira) para definir a mesma coisa. Kishimoto (2002) atribui a Giles Brougère e Jacques Henriot a classificação de jogo como algo que pode ser dividido e identificado em três níveis de diferenciação:

– o resultado de um sistema linguístico que funciona dentro de um contexto social;

– um sistema de regras; e

– um objeto.

Kishimoto (2002) afirma ainda, que os "brinquedos educativos" datam dos tempos do Renascimento e ganham força a partir do século XX. Sendo considerado um recurso que ensina, desenvolve e educa de forma prazerosa. São considerados clássicos de brinquedos desse tipo: os quebra-cabeças, brinquedos de encaixe, jogos de tabuleiro, podendo cada um deles desenvolver habilidades matemáticas sobre sequências, formas, operações matemáticas. Além disso, os jogos/brinquedos educativos são capazes de propiciar diversão, prazer ou mesmo desprazer, se escolhidos de forma voluntária. E exercer uma função educativa, pois o brinquedo ensina qualquer coisa que complete o indivíduo em seu saber, seus conhecimentos e sua apreensão do mundo.

> Apesar da riqueza de situações de aprendizagens que propicia, nunca se tem a certeza de que a construção do conhecimento efetuado pela criança será exatamente a mesma desejada pelo professor.
> A utilização do jogo potencializa a exploração e a construção do conhecimento, por contar com a motivação interna, típica do lúdico, mas o trabalho pedagógico requer a oferta de estímulos externos e a influência de parceiros bem como a sistematização dos conceitos em outras situações que não jogo. (Kishimoto, 2002, p. 37 - 38)

O Tangram é um objeto, uma espécie de quebra-cabeças, sendo assim, pode ser identificado como um tipo de jogo e/ou um brinquedo educativo. Ele que pode ser usado tanto individual quanto coletivamente. Menezes (2008) afirma que o Tangram auxilia os professores a introduzir conceitos geométricos de maneira agradável e desafiadora, além de ser um excelente instrumento mediador em relação às questões que desenvolvem a visualização espacial.

> Um dos principais benefícios que o Tangram pode trazer é o desenvolvimento do pensar geométrico (SOUZA et al, 1995) correspondendo a um conjunto de habilidades mentais. Segundo estes autores, para desenvolver estas habilidades, estes alunos precisam ter a oportunidade de:
> - perceber formas geométricas (ver, tocar);
> - representar figuras geométricas (desenhar, escrever sobre, interpretar esquemas,...)
> - construir (fazer, modificar,...)
> - conceber (criar objetos e formar, imaginar,...) (p. 3-4). (Menezes, 2008, p. 116 e 117)

Menezes (2002) relata ainda que a revista *Leipziger Magazin* publicou um artigo sobre o Tangram: "novas demonstrações matemáticas euclidianas que se tornam claras e acessíveis aos jovens através das peças triangulares que fazem parte do quebra-cabeça chinês", deixando claro que o jogo é usado também para ajudar a compreender demonstrações de propriedades e teoremas.

Menezes (2002) apresenta outras possibilidades para o uso do Tangram. Ele pode também ser usado na escola de forma interdisciplinar, pois além de toda questão geométrica e do raciocínio lógico-matemático envolvido, podem ser construídas imagens de animais (domésticos, selvagens, aves, mamíferos), árvores, objetos (barcos, pontes, casas, velas), letras do alfabeto, que se relacionam com as disciplinas de Ciências, História, Geografia, Artes etc. Além disso, existe o fato de desenvolver no aluno as inteligências emocional, interpessoal e intrapessoal. No Capítulo 3, sessão 3.2, serão apresentadas algumas dessas possibilidades; trabalhos, desenvolvidos pela autora, em anos anteriores, em diferentes turmas do GVF, ilustrando formas de animais, letras do alfabeto, pinheiros de Natal, apresentam trabalhos envolvendo não apenas a Matemática, mas também outras áreas do conhecimento.

Segundo Borin (1998) para construção de um ambiente reflexivo, a partir de observações e de uma análise cuidadosa, é primordial que haja troca de opiniões, que sejam oportunizadas as argumentações mútuas, de forma organizada. Outro aspecto relevante, a ser considerado ao se trabalhar com jogos, é a oportunidade de lidar com o erro, no decorrer da atividade, Borin (1998) destaca que ao resolver problemas, os alunos não devem apagar as soluções que julguem erradas, tendo em vista que elas irão servir para que eles cheguem à resposta correta, a partir das análises das mesmas. Contudo é fundamental que o professor solicite aos alunos os registros de todos os passos, no seu processo para a construção do conhecimento. Deste modo, os jogos podem contribuir como agentes motivadores nesse processo, além de atuarem como facilitadores no "desenvolvimento da linguagem, criatividade e raciocínio dedutivo, exigidos na escolha de uma jogada e na argumentação necessária durante a troca de informações" (Borin, 1998, p. 8).

1.1.1 Jogos nos PCN

Conforme descrito nos PCN (Brasil, 1997), através dos jogos as crianças vivenciam situações repetitivas e aprendem a pensar por analogia. Além disso, jogos em grupos propiciam estímulos para o desenvolvimento tanto cognitivo quanto afetivo, além de estimular o raciocínio lógico. Sendo assim, a introdução de jogos no fazer educacional da sala de aula pode gerar ganhos em diferentes campos da vida do aluno. Neste sentido, a introdução do material, em atividades feitas em grupos, visa proporcionar aos alunos uma nova forma de ver a Matemática, de aprender fazendo e não apenas decorando fórmulas. É no trabalho em grupo que o aluno pode também desenvolver aspectos emocionais, aprender a expressar sua opinião, a ouvir a opinião dos outros e chegar a um acordo de qual é a melhor estratégia para a solução de determinado problema. Ao trabalhar em grupos, os alunos vão automaticamente revisitando conteúdos e ensinando o que cada um sabe aos colegas e através dessa troca de conhecimento todos saem ganhando. Um dos objetivos gerais da Matemática, para o Ensino Fundamental, conforme PCN é: "interagir com seus pares de forma cooperativa trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles". Durante este processo, o professor vira um agente mediador e orientador das ações, fazendo as intervenções apenas quando algo é dito de maneira equivocada, além de um observador das potencialidades, identificando algumas das inteligências múltiplas possíveis de serem observadas nesse contexto.

> Finalmente, um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar potencialidades educativas dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver. (Brasil, 1997, p.36)

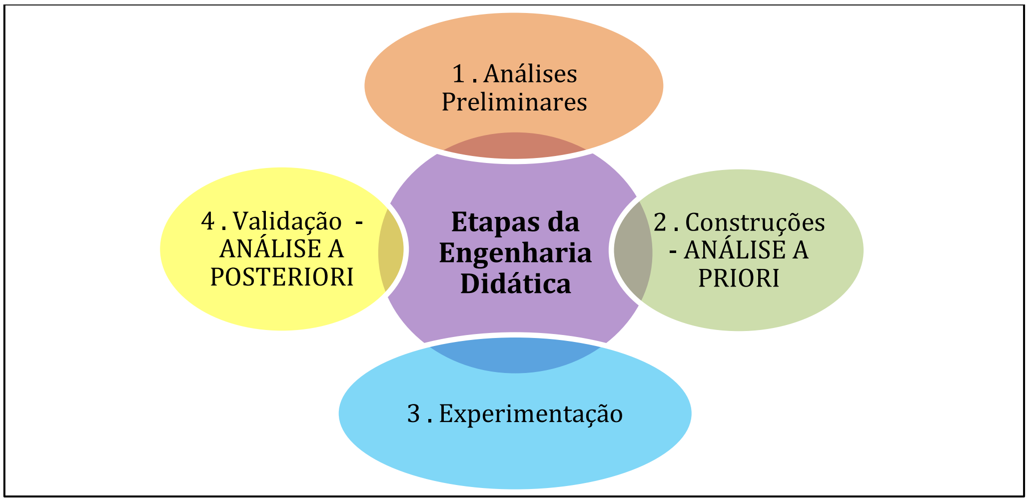
1.2 Metodologia: Engenharia Didática

Nesta Dissertação, é utilizada a teoria metodológica da Engenharia Didática para fundamentar e embasar a proposta. Segundo Santos e Alves (2018), a metodologia da Engenharia Didática teve início com Guy Brousseau, nos anos de 1965 e com Yves

Chevallard, a partir dos anos de 1980, na França. Foi, entretanto, em 1989, com Michèle Artigue, em Educação Matemática, que ela foi amplamente difundida.

A metodologia de pesquisa tem caráter experimental, baseia-se e divide-se em quatro fases: análises preliminares, construção/ concepção do experimento (análise *a priori*), experimentação e validação da hipótese (análise *a posteriori*). Essa metodologia busca construir um caminho para ensinar Matemática através das experiências vividas em sala de aula. O uso desta metodologia nos possibilita saber se os conceitos escolares ensinados pelo professor foram ou não consolidados pelos alunos, tendo em vista que, no processo ensino-aprendizagem, é fundamental a verificação da compreensão dos assuntos abordados em sala de aula e a de que esses saberes estão sendo utilizados de maneira apropriada. A Figura 1 apresenta um esquema com as etapas da Engenharia Didática.

Figura 1 – Esquema com as fases da Engenharia Didática



Fonte: a autora, 2023

A Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa com ênfase nas realizações e fazer didático da sala de aula. Contudo sua forma de apresentação faz um paralelo e se assemelha ao trabalho de um engenheiro frente ao seu projeto, pois é preciso conceber, planejar, executar e realizar o mesmo. Assim também ocorre em relação às etapas do processo na Engenharia Didática. Deve-se, no entanto, levar em conta que este processo não é de modo algum automatizado, tendo em vista que a sala de aula apresenta caraterísticas específicas e certas peculiaridades. Assim, a metodologia da Engenharia Didática busca unir a teoria com a prática.

> A noção de Engenharia Didática emergiu em Didática da Matemática no início dos anos 1980. E trata-se de classificar por este termo uma forma de trabalho didático;

> comparável ao do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apoia sobre um conjunto de conhecimentos científicos do seu domínio, aceita se submeter a um controle do tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar sobre objetos mais complexos do que os objetos depurados pela ciência e assim, se debruça praticamente, com todos os meios pelos quais ele dispõe mesmo os problemas ainda não considerados pela ciência. (Artigue, 1998, p. 243, *apud* Santos e Alves)

1.2.1 Análises Preliminares

Esta fase do processo é aquela que irá buscar as dificuldades dos alunos. Faz-se uma investigação a respeito dos conhecimentos prévios e analisam-se os dados. É fundamental perceber dificuldades que os alunos apresentam frente a determinados conteúdos.

Este é o momento de fazer as análises críticas em relação aos conteúdos propriamente ditos, o modo como são abordados e o quanto os alunos conhecem, ou não, tais conteúdos, além das defasagens existentes. É preciso que essas análises sejam feitas com um olhar de mudança, de como esse quadro pode ser melhorado.

Segundo Artigue (1996), nesta etapa são considerados os aspectos que permitirão alicerçar a investigação, analisando de forma epistemológica os conteúdos, bem como os obstáculos em relação ao ensino na qual se pretende realizar a prática pedagógica, além das concepções dos alunos e análise do ensino atual acadêmico e seus efeitos.

> • a análise do ensino habitual e dos seus efeitos;
> • a análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução;
> • a análise do campo de constrangimento no qual virá a situar-se a realização didática efetiva;
> • e, naturalmente, tendo em conta os objetivos específicos da investigação. (Artigue, p.198)

1.2.2 Construção do Experimento (análise *a priori*)

Esta fase do processo apresenta ao professor uma série de variáveis que precisam ser consideradas, sendo necessária a verificação de quais dessas variáveis estarão sob o seu controle, bem como uma análise geral e local a respeito do público alvo, para tentar prever uma melhora nos resultados, após a experimentação. Assim são criadas as hipóteses que serão validadas, ou não, na última fase do processo. Nesta etapa do processo é feito um plano de ação, com o objetivo de direcionar a pesquisa, onde serão criadas as atividades que serão propostas aos alunos. É preciso analisar se ao lecionar um conteúdo matemático de modo diferente ao modo tradicional, isso de fato melhorará o desempenho do aluno. Para Artigue, o objetivo da análise *a priori* é:

> Determinar de que forma permitem as escolhas efetuadas controlar os comportamentos. Para isso, ela funde-se em hipóteses; será a validação dessas hipóteses que estará, em princípio, indiretamente em jogo no confronto operado na quarta fase, entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*. (Artigue 1996, p.205, *apud* Soares, 2016)

1.2.3 Experimentação

A experimentação consiste na parte prática do trabalho, onde é aplicada uma sequência de passos específicos e também são aplicadas as situações didáticas onde são coletados os dados relativos à pesquisa. Para a coleta de dados, podem ser usados diversos recursos, tais como: relatórios, fotografias, produção dos alunos, entrevistas, entre outros. Nesta fase acontece a execução das ações que foram decididas na etapa anterior.

Aplicam-se o plano de ações e são feitos os registros do retorno, que serão analisados na próxima fase. Referente a isto, Berenguer afirma que:

> Nesta fase, há de se colher também os meios de registros dos dados colhidos na experimentação, que vai depender das variáveis priorizadas na análise a priori. Os dados coletados mediante observações feitas nas sessões de ensino e pelas produções dos alunos, com a utilização de gravações do diário de bordo. Além disso, para uma melhor compreensão do ocorrido, estes dados podem ser completados com uso de questionários, entrevistas e testes, individuais ou em pequenos grupos, realizados durante a experimentação ou no final dela. (Bereguer 2010, p. 14,)

1.2.4 Validação (análise *a posteriori)*

A Engenharia Didática possui validação interna que se apoia na confrontação entre a análise *a priori* (baseada nos estudos preliminares e certo número de hipóteses) e análise *a posteriori* (baseada em dados da realização efetiva).

Nesta fase acontece a ordenação do que foi coletado e analisado na etapa anterior, avaliando como foi toda parte prática do projeto, ou seja, após a estruturação da pesquisa deverá ser feita a análise daquilo que de fato foi produzido, podendo inclusive surgir neste momento novos questionamentos, que poderão ser investigados em novas pesquisas.

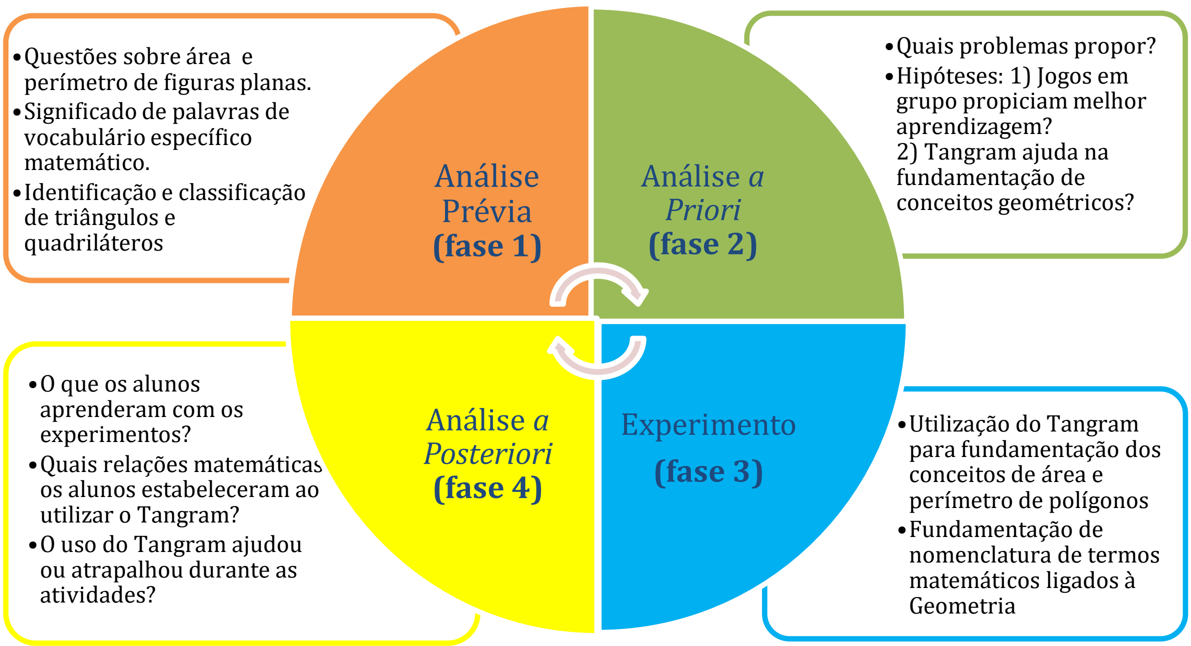
É nesta fase que o professor verifica o que de fato funcionou, o que poderá ser utilizado e aplicado em outros conteúdos e o que não funcionou e precisa ser revisto em nova pesquisa da Engenharia Didática. Concluída essa etapa, os dados deverão ser validados ou questionados. Termos a “Validação”, contudo, através da confirmação da Análise *a priori*.

Artigue (1996), entretanto, indica algumas dificuldades existentes na fase de validação encontradas nos trabalhos publicados sobre Engenharia Didática.

> - Na maior parte dos textos publicados relativos a engenharias, o confronto das duas análises, a priori e a posteriori, exibe distorções. Elas estão longe de ser sempre analisadas em termos de validação, a saber, investigando aquilo que, nas hipóteses consideradas, as distorções constatadas invalidam. Com grande frequência, os autores limitam-se a propor modificações da engenharia, visando a sua redução, sem se envolverem, pois, verdadeiramente, num procedimento de validação.
> - As próprias hipóteses explicitamente envolvidas nos trabalhos de engenharia são, com grande frequência, hipóteses relativamente globais, que põem em jogo processos de aprendizagem a longo prazo, que a amplitude da engenharia não permite necessariamente fazer entrar, de facto, no procedimento de validação (Artigue. 1996, p.209)

Podendo ser observado, na Figura 2, cada etapa, do processo da Engenharia Didática, bem como foram utilizadas nesta Dissertação.

Figura 2 – Quadro ilustrativo com as fases da Engenharia Didática aplicadas neste trabalho de pesquisa



Fonte: a autora, 2023

A Engenharia Didática, assim como todo seu processo em etapas, é uma ferramenta que ajuda o aperfeiçoamento do professor na sua prática pedagógica dia-a-dia, tornando este processo um ciclo sem fim.

1.3 Ensino Colaborativo

Em conformidade com a LDB (Lei de Diretrizes de Bases), de 1996, que define a Educação Básica como aquela que compreende os Ensinos Infantil, Fundamental e Médio, a BNCC vem como um marco norteador para os currículos das escolas públicas e privadas. Ela estabelece conhecimentos, competências e habilidades que os estudantes precisam desenvolver ao longo desses anos que compreendem a Educação Básica. Sendo, portanto, a BNCC um documento que tem o caráter normativo, definindo o conjunto progressivo das aprendizagens essenciais na Educação Básica.

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica (http://basenacionalcomum.mec.gov.br/ disponível em 10/11/2023)

A BNCC normatiza as habilidades e competências gerais e específicas que devem ser desenvolvidas no ensino de Matemática. Sendo uma das competências específicas a integração entre os alunos de forma colaborativa:

> Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (Brasil, 2018, p. 267)

O trabalho colaborativo proporciona aos alunos uma maneira não usual de aprendizagem, pois apresenta a possibilidade de desenvolvimento não apenas intelectual, mas também emocional e social. Aprender a hora de falar e de ouvir, de respeitar as diferenças é de suma importância para a formação do aluno, pois apresenta um desenvolvimento de forma ampla e completa. Destaca-se aqui, em particular, a proposta dos PCN sobre este assunto:

> - participação em jogos de grupo também representa uma conquista cognitiva, emocional, moral e social para a criança e um estímulo para o desenvolvimento do seu raciocínio lógico. (Brasil, 1997, p.36)

Silva e Castro Filho (2012) atribuem a Dillenbourg, a afirmação de não haver definição única para aprendizagem colaborativa. Entretanto a definição de a aprendizagem colaborativa, de maneira ampla, pode ser àquela em que duas ou mais pessoas aprendem, ou tentam aprender, algo juntas. Sendo esta é uma definição insatisfatória, pois requer diferentes tipos de análises implícitas, tais como: duas ou mais pessoas, pode significar uma dupla, ou trio, ou ainda uma turma inteira, ou até mesmo todos os alunos de uma escola; aprender algo pode significar resolver problemas, aprender coisas do cotidiano. Essa aprendizagem poderia se dar de modo síncrono ou assíncrono, de modo presencial ou remoto.

Podemos dizer que a aprendizagem colaborativa trata-se de situações onde existem expectativas de que certas formas de interação aconteçam, de modo a desencadear mecanismos de aprendizagem. No entanto não existem garantias se essas interações de fato ocorrerão. Pensando sobre esse prisma, deve-se haver uma preocupação ainda maior para garantir e ampliar a interação entre os membros do grupo que estão envolvidos no processo.

Para Silva e Castro Filho (2012) a relação está não apenas em aprender a colaborar, mas também em colaborar para aprender. E deste modo, professores e alunos constroem o conhecimento de forma ampla.

> Trata-se não só de aprender a colaborar, mas também de colaborar para aprender numa sociedade em que o respeito ao outro, o diálogo, a empatia, a tolerância e a solidariedade devem ser buscado com veemência. Nesse processo, professores e alunos constroem o conhecimento por meio de interações e ajuda mútua, o que possibilita um grande avanço nas aprendizagens individual e coletiva. (Silva e Castro Filho 2012)

A sala de aula deve ser lugar de debate e construção de saberes. A aula de Matemática não é apenas pra "fazer conta". Desmistificar essa lógica é um processo moroso e cansativo, mas que deve ser arraigada pelos professores da disciplina. A aprendizagem crítica e significativa é cada vez mais necessária. O aluno vê mais sentido e tem maior compreensão dos conceitos e conteúdos, quando ele "aprende – fazendo". Freire (2002), dizia que um educador democrático precisa reforçar a capacidade crítica do aluno, sua curiosidade. Que a tarefa do educador não é ser um transmissor de conteúdos, mas de ser criador, investigador e inquieto, assim como devem ser também os alunos.

> E esta rigorosidade metódica não tem nada que ver com o discurso 'bancário' meramente transferidor do perfil do objeto ou do conteúdo. É exatamente neste sentido que ensinar não se esgota no 'tratamento' do objeto ou do conteúdo, superficialmente feito, mas se alonga à produção das condições em que aprender criticamente é possível. E essas condições implicam ou exigem a presença de educadores e de educandos criadores, investigadores, inquietos, rigorosamente curiosos, humildes e persistentes. (Freire, 2002, p. 28 e29)

2 TIPOS DE TANGRAM

Nesta Dissertação desenvolveu-se um trabalho com os alunos utilizando o chamado Tangram tradicional, ou Tangram chinês – o mais difundido e conhecido. No entanto serão apresentados, a título de curiosidade, outros modelos que foram desenvolvidos ao longo dos tempos.

2.1 Tangram – Diferentes Modelos

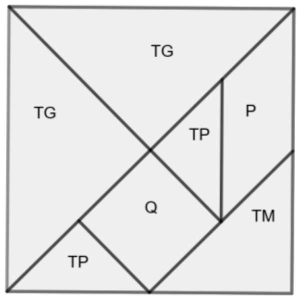
Alguns modelos de tangram são formados apenas por polígonos, outros ainda possuem algumas peças em formato arredondado ou de setores circulares. Veremos a seguir alguns deles, tais como: o tangram oval – formado por nove peças; tangram coração – formado por nove peças; tangram triangular – formado por oito peças; tangram de Fletcher – formado por sete peças e bastante semelhante ao Tangram tradicional. Essas são apenas algumas das variações de tangram que temos.

2.1.1 Tangram Tradicional

O Tangram é um jogo milenar chinês formado por sete peças. Cinco delas são triângulos, classificados como retângulos e isósceles; dentre eles: 2 são "grandes" – TG (triângulo grande), 1 "médio" – TM (triângulo médio) e 2 "pequenos" – TP (triângulo pequeno). Além disso, há 1 "quadrado" – Q (quadrado) e 1 "paralelogramo" – P (paralelogramo) com ângulos de 45º e 135º, conforme a Figura 3. Acredita-se que ele tenha surgido na China durante a dinastia Song (960-1279). Na época, ele era visto como um dos mais famosos testes utilizados para estudar a inteligência humana. O jogo chegou ao ocidente na metade do século XIX e tornou-se conhecido em países como Alemanha, França, Itália e Áustria. Ainda hoje é utilizado como jogo/quebra-cabeça utilizado para desenvolver raciocínio lógico-matemático, concentração, cooperação, criatividade, entre outras habilidades.

O objetivo do jogo é formar silhuetas com as peças. A regra é que as peças precisam ser organizadas justapostas, sem sobreposição. Como todos os jogos, podemos fazer adaptações e veremos, neste trabalho, que em alguns momentos não serão usadas todas as peças e sim apenas algumas delas. Segundo Menezes (2008) é possível montar cerca de 1700 figuras, entre animais, objetos, números, letras e formas geométricas, com as peças do Tangram.

Figura 3 - Tangram chinês – apresentação das peças



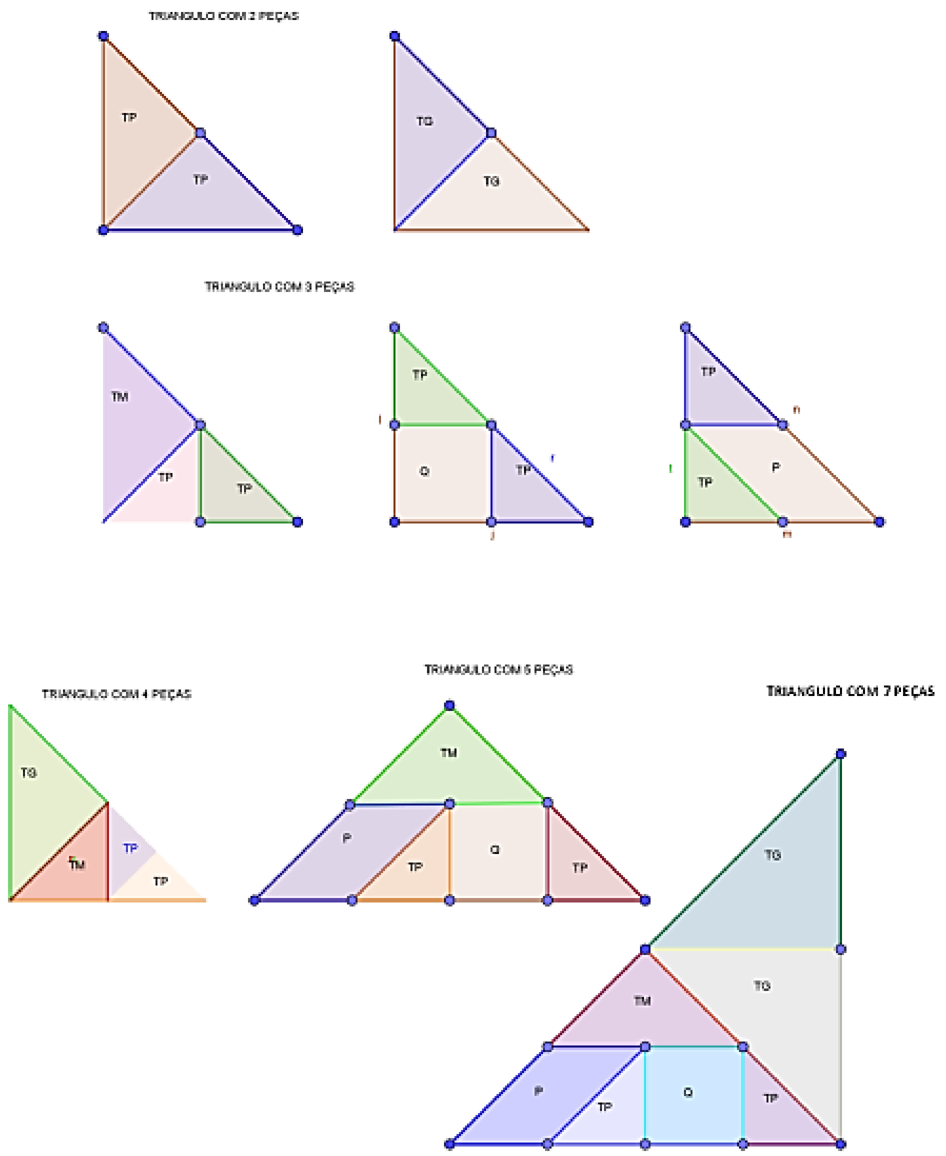
Fonte: a autora

Existe uma lenda, bastante difundida, a respeito da história da "criação" do Tangram, segundo a qual, um sábio chinês deveria levar ao Imperador uma placa de jade. No entanto no percurso, o sábio tropeçou e deixou a placa cair e partiu-se em sete pedaços. Então o sábio tentou remendar e, a cada tentativa, surgia uma nova figura. Os sete pedaços representariam as sete virtudes chinesas (castidade, caridade, temperança, diligência, paciência, bondade e humildade), aonde a paciência seria mais desenvolvida com o Tangram. A origem do significado da palavra Tangram possui diversas versões. Uma delas está ligada à palavra chinesa '*Tchi Tchiao Pan'* cuja tradução é "sete peças da sabedoria". O nome chinês do Tangram é *Chi-Chiao*, que significa "os sete pedaços inteligentes" ou "o quebra-cabeça de sete sabedorias", por isso considera-se o Tangram "tábua das sete sabedorias" ou "tábua das sete sutilezas".

Utilizando todas as peças, ou parte delas, é possível construir inúmeras figuras, tais como: polígonos (triângulos, quadriláteros, pentágonos, hexágonos), além de formas humanas, objetos, animais, letras do alfabeto, algarismos indo-arábicos etc. O Tangram pode ser um grande aliado na sala de aula, pois, por meio do material concreto, o aluno do Ensino Básico, de modo especial os alunos que tiveram uma defasagem de conhecimentos na área de Geometria, podem desenvolver raciocínio lógico e espacial, compreender conceitos geométricos, construir seu próprio conhecimento matemático. Com o auxílio do Tangram é possível levar o aluno a familiarização e/ou reforço de conceitos da Geometria.

Com alunos mais novos, ou que estão iniciando o processo de apropriação de conceitos e identificação de figuras poligonais planas, é recomendado que, nessa construção, sejam usadas parte das peças do jogo, tornando um processo paulatino. Podemos, por exemplo, construir triângulos, o polígono mais simples, usando parte ou a totalidade das peças, conforme Figura 4, são apresentadas algumas maneiras de aquisição de triângulos, usando duas ou mais peças do Tangram, com diferentes versões para tal.

Figura 4 - Diferentes construções de triângulo com diferentes números de peças



Fonte: a autora

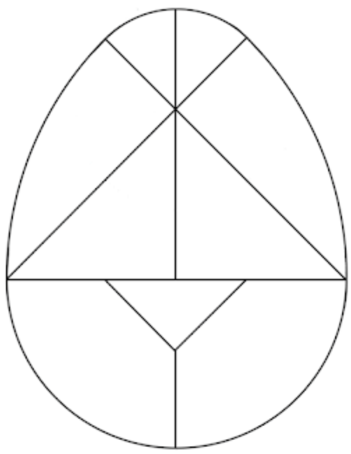
Há uma relação direta, de proporcionalidade, entre as peças do Tangram, tanto em relação às medidas dos lados dos polígonos quanto em relação à medida das áreas. Tais relações serão abordadas e explicitadas no Capítulo 3, que trata de modo exclusivo o Tangram chinês.

2.1.2 Tangram Oval

O tangram oval é também chamado de ovo mágico ou ovo de Colombo, formado por nove peças, sendo 3 delas triângulos do tipo: retângulos e isósceles e as outras 6 têm uma borda curva, sendo três pares de figuras distintas, como vemos na Figura 5. Este fato possibilita criar formas geométricas planas não poligonais, além de outras figuras, que possibilitam o desenvolvimento criativo.

A história deste tangram tem origem em 1879, data em que os irmãos Otto e Gustav Lilienthal, engenheiros, inventaram uma forma de reproduzir blocos de pedra manuais, chamados pedras de Anker, a partir de areia de quartzo, gesso e azeite de linhaça. Entretanto, a patente destes blocos foi adquirida por Friedrich A. Richer, a partir de 1890, quando lançou uma linha de quebra-cabeças, feitas com pedras Anker, que podiam combinar-se de modo a formar novas figuras. Um desses quebra-cabeças foi o ovo de Colombo, que surgiu em 1893, e cujo objetivo era formar 95 figuras diferentes com as nove peças que o compunham.

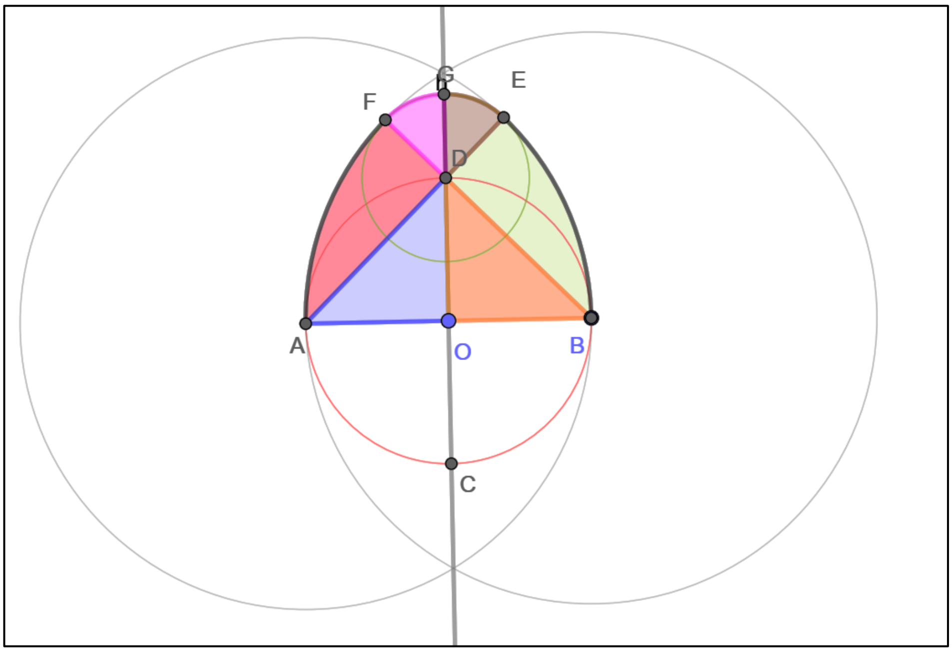
Figura 5 – Tangram oval (ou ovo mágico) com suas 9 peças



Fonte: a autora

A seguir, nas Figuras 6 e 7, podem ser observados os passos para a obtenção do tangram oval. A construção do tangram oval ocorre a partir de um círculo, com centro em O e diâmetro AB, como é possível ver na Figura 6. Determina-se então o diâmetro CD, perpendicular à AB. Assim, é possível determinar as duas primeiras figuras: os triângulos retângulos isósceles grandes: triângulo AOD e triângulo BOD, retos em Ô. Prolongando os segmentos AD e BD e traçando o círculo com centro em A e raio AB e o círculo com centro em B e raio AB é possível determinar os pontos E e F, pontos de intersecção de cada um dos círculos com os prolongamentos anteriores. Em seguida podemos obter o círculo de centro D e raio DE. O ponto G é o ponto de intersecção entre este círculo e o prolongamento do diâmetro CD. Daí é possível determinar os dois setores pequenos: setor EDG e setor FDG; além das regiões limitadas por DFA e DEB. Apresenta-se nesta primeira etapa, na Figura 6, a obtenção de seis peças do tangram oval.

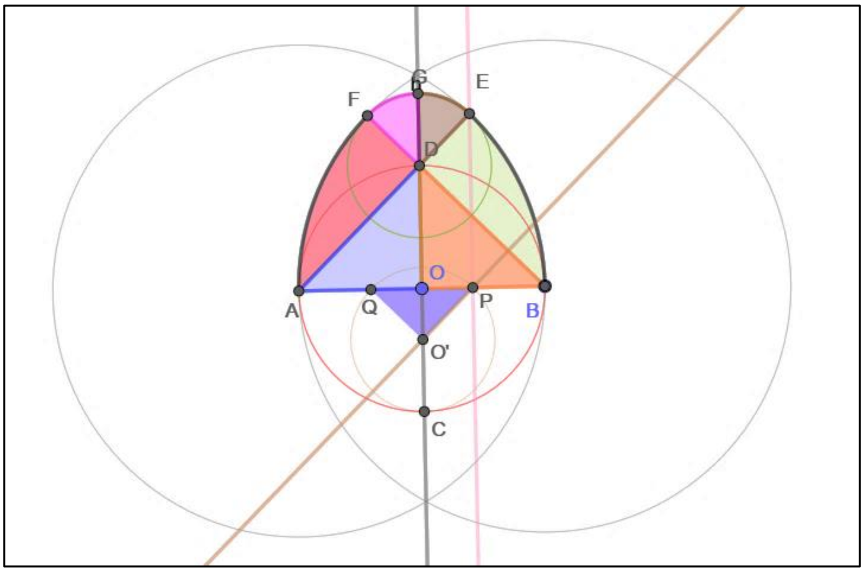
Figura 6 – Primeiros passos da construção do tangram oval



Fonte: a autora

Continuando o processo de construção, para determinar as três peças que faltam. Baixando uma perpendicular de E à AB, obtemos o ponto P. Refletindo sobre O, o ponto P, temos o ponto Q. Traçando uma paralela à DE, passando por P, é possível determinar o ponto O’ (interseção entre esta reta e a reta CD) que é o centro da circunferência tangente ao círculo inicial e que tem o mesmo raio da circunferência menor, de centro DE, determinando-se assim mais uma figura: o triângulo PO’Q, reto em O’. As outras figuras circulares ficam determinadas por CO’PB e AQO’C, conforme apresentado na Figura 7.

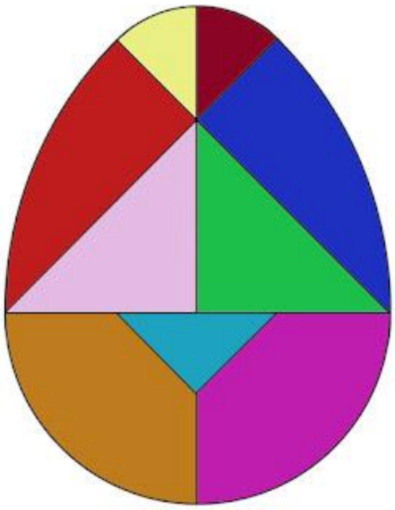
Figura 7 – Finalização da construção do tangram oval



Fonte: a autora

A Figura 8 apresenta um tangram oval com suas peças coloridas, enquanto o que vemos na Figura 7 é um exemplo de construção mostrando os passos tanto em uma forma fechada, como explicitando as respectivas peças. Na Figura 9 são apresentadas imagens representando uma ave, na primeira e terceira linhas, enquanto nas linhas 2 e 4 estão os respectivos gabaritos da construção.

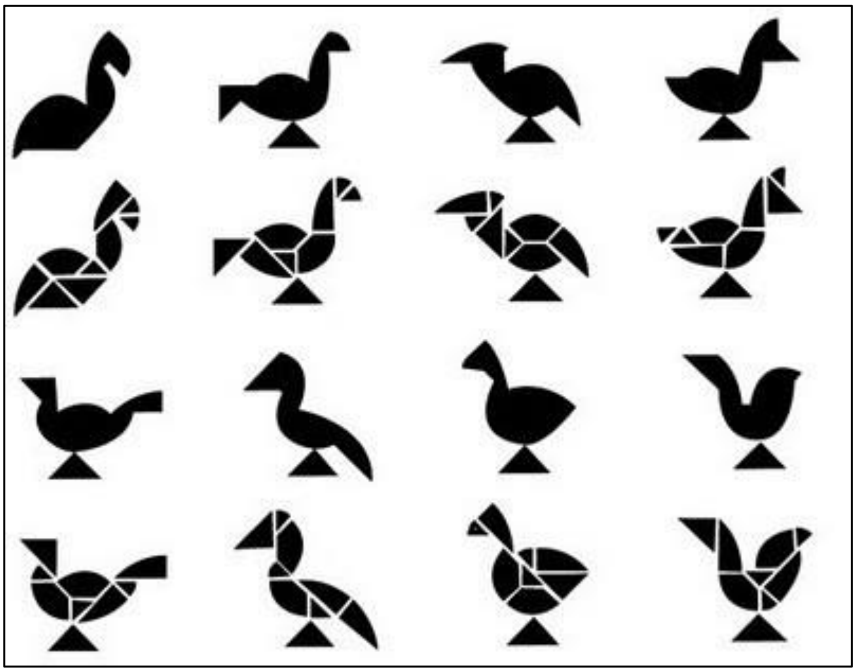
Figura 8 – Tangram oval completo



Fonte: https://www.espacoeducar.net/2016/05/tipos-de-tangram-quais-os-tipos-de.html

Disponível em: 29/04/2023

Figura 9 – Exemplos de imagens que podem ser construídas com o tangram oval e seus respectivos gabaritos



Fonte: https://imagensparacolorir.blogs.sapo.pt/397731.html

Disponível em: 2023

2.1.3 Tangram Coração

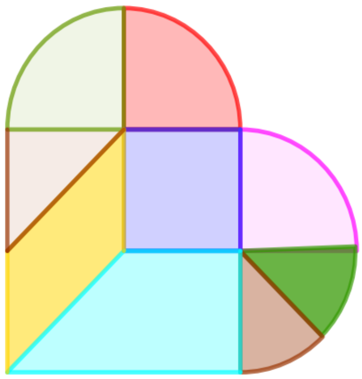
O tangram coração é formado por nove peças: 1 triângulo retângulo e isósceles, 1 quadrado, 1 trapézio retângulo, 1 paralelogramo, 3 setores circulares (ângulo central 90º) e 2 setores circulares (ângulo central 45º), conforme apresentado nas Figuras 10 a e 10 b.

O tangram coração parte de um quadrado central, e a partir dele temos as outras oito figuras: os cinco setores circulares todos eles de raio igual à medida do lado do quadrado, três dos quais o ângulo central é reto e os outros dois o ângulo central é de 45º; e o triângulo retângulo e isósceles – com os catetos tendo a mesma medida do lado do quadrado; o paralelogramo – cujo lado menor tem a medida do lado do quadrado e o lado maior com a mesma medida da hipotenusa do triângulo e com ângulos são de 45º e 135º e o trapézio retângulo – onde a base menor e o lado perpendicular às bases têm a mesma medida do lado do quadrado, o lado não perpendicular às bases tem a mesma medida da hipotenusa do triângulo e a base maior mede o dobro da medida do lado do quadrado.

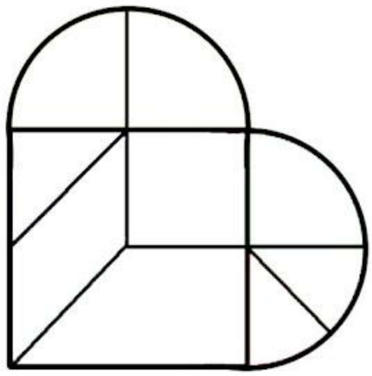
Figura 10 a – Tangram coração colorido com suas 9 peças

Figura 10 b – Tangram coração com suas 9 peças

a



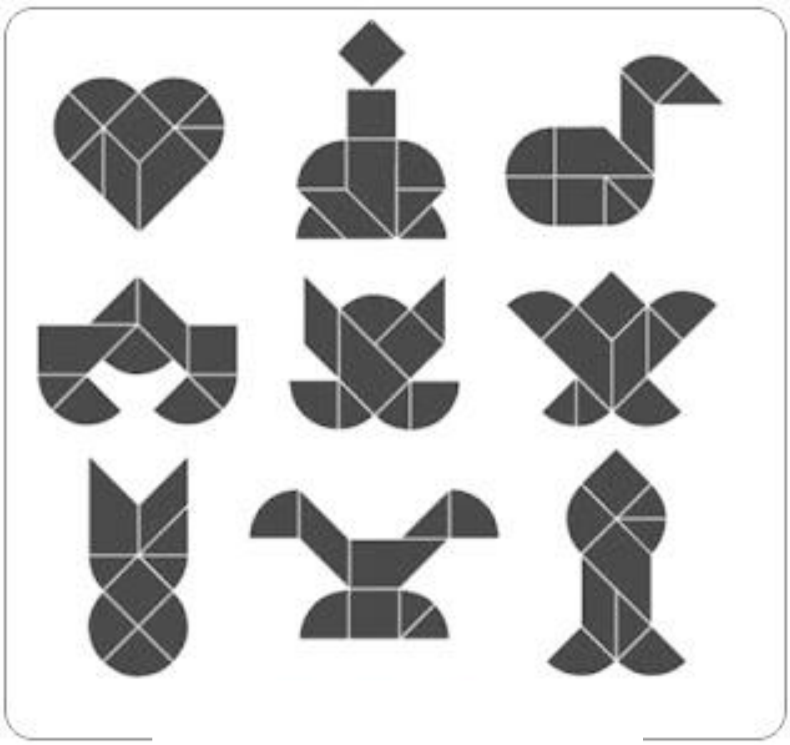
b



Fonte: a autora

A Figura 11 apresenta alguns exemplos de formas que podem ser construídas usando o tangram coração.

Figura 11 – Exemplos de imagens construídas com o tangram coração



Fonte: https://matheusmathica.blogspot.com/

Disponível: 2023

2.1.4 Tangram Triangular

O tangram triangular é formado por oito peças, todas elas poligonais, sendo 2 triângulos equiláteros – um pequeno e um grande, 3 trapézios isósceles – 1 pequeno, 1 médio e 1 grande, 1 hexágono regular, 2 losangos – 1 pequeno e 1 grande. Conforme apresentado nas Figuras 12 a e 12 b.

Figura 12 a – Tangram triangular com suas 8 peças

a

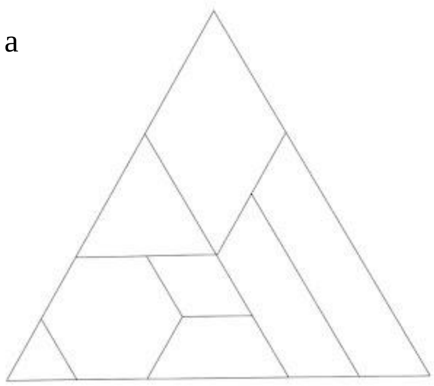
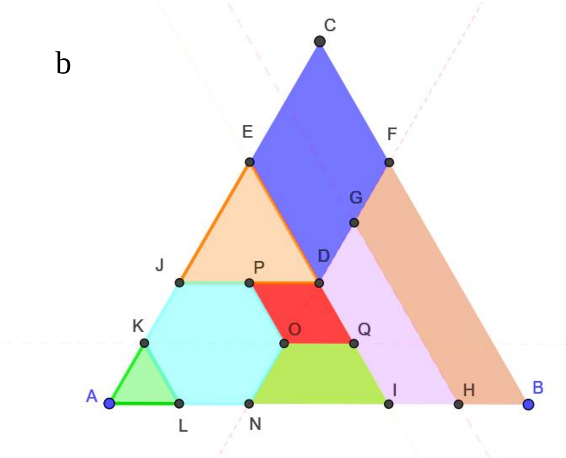


Figura 12 b – Tangram triangular colorido

b



Fonte: a autora

Tomando como figura original o triângulo equilátero ABC, figura 12 b, e fazendo as divisões para obter as oito peças do tangram triangular, devemos determinar o baricentro do triângulo – o ponto D. A partir de então traçamos uma paralela à AC passando por D, encontramos assim o ponto F – ponto sobre BC que pertence à reta traçada. Do mesmo modo traçamos uma paralela à BC passando por D, e encontramos o ponto E – ponto sobre AC que pertence à reta traçada. Temos assim determinada a primeira figura do tangram triangular: o losango grande (DECF).

Agora podemos determinar agora o ponto G, ponto médio do segmento DF. Traçar o segmento paralelo à BC passando por G. Sobre AB determina-se o ponto H. Temos assim a segunda peça do tangram: o trapézio grande (BFGH). Traçando agora a paralela à BC que passa por D, determinamos o ponto I – ponto sobre AB. E assim fica definida mais uma peça: o trapézio médio (IHGD).

Para determinar o triângulo grande, traçamos uma paralela à AB passando por D, encontramos assim o ponto J – que pertence à AC e esta reta traçada. O triângulo

EDJ é a quarta peça do tangram a ser definida. Determinamos agora o ponto P, ponto médio de DJ. O ponto K – ponto médio de AJ. Traçamos agora a paralela à AB que passa por K. Assim encontramos o ponto Q – ponto sobre DI que pertence a esta reta traçada. Traçando uma paralela à BC que passa por P, fica definido o ponto O – ponto de intersecção entre esta reta e a que foi traçada no passo anterior, e também o ponto N – ponto sobre AB que pertence a esta reta. Deste modo é possível construir as outras peças: o triângulo equilátero AKL, onde L é um ponto sobre AB; o losango (PDQO), o trapézio pequeno (OQIN) e o hexágono regular (JPONLK).

O tangram triangular é um excelente aliado para a observação das relações e propriedades dos triângulos equiláteros, bem como verificar relação entre as áreas das figuras, ou a construção de figuras planas a partir da composição e organização das peças para fazer assim o ladrilhamento. Habilidades estas previstas na BNCC (BNCC, p. 309): EF07MA32 - Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.

2.1.5 Tangram de Fletcher

O tangram de Fletcher é bem semelhante ao Tangram chinês tradicional, contento também sete peças, entretanto, ele é formado por 2 quadrados (um médio e um grande), 4 triângulos retângulos e isósceles (dois médios e dois pequenos) e 1 paralelogramo (grande) – com ângulos de 45º e 135º. O tangram de Fletcher também apresenta uma relação de semelhança entre as suas peças. Esse tipo de tangram pode ser usado em turmas de crianças menores, pois pelo fato de possuir uma variedade menor de peças, ele pode servir como um elemento introdutório para a iniciação geométrica, em especial dos polígonos.

Tomando a Figura 13 como referência, podemos observar a relação entre as áreas das peças. Observa-se que os triângulos azuis são congruentes, bem como os triângulos de cor verde e laranja.

Chamaremos de A_1 e A_2 as áreas dos triângulos azuis; A_3 será a área do quadrado vermelho; A_4 e A_5 representam as áreas dos triângulos: verde e laranja, respectivamente; A_6 a área do paralelogramo rosa e A_7 será a área do quadrado amarelo. Deste modo podemos observar as seguintes relações entre cada uma dessas áreas:

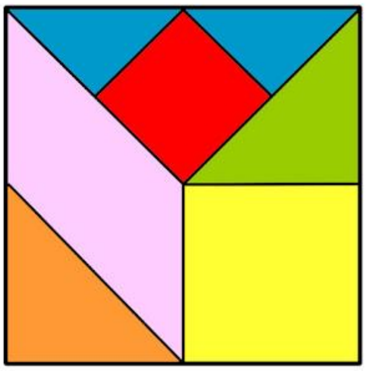
1) $A_1 = A_2$
2) $A_4 = A_5$
3) $A_1 + A_2 = \begin{cases} A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{cases}$
4) $A_4 + A_5 = \begin{cases} A_6 \\ A_7 \end{cases}$

Tomando A_1 como unidade de área (1 u.a.), podemos verificar que:

1) $A_1 = A_2 = 1$ u.a
2) $A_3 = A_4 = A_5 = 2$ u.a.
3) $A_6 = A_7 = 4$ u.a

Logo, $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 = 16$ u.a

Figura 13 - Tangram de Fletcher



Fonte: www.espacoeducar.net/2016/05/tipos-de-tangram-quais-os-tipos-de.html

Disponível em 2023

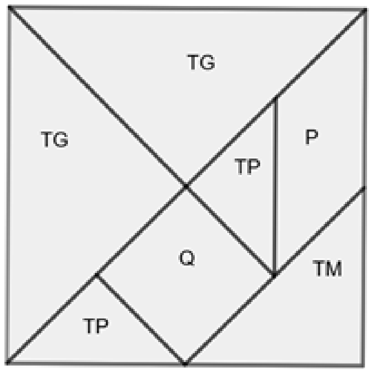
Semelhante ao Tangram chinês, podemos dizer que o tangram de Fletcher possui também duas peças "pequenas", três "médias" e duas "grandes", havendo entre as áreas delas a mesma relação que há entre as áreas das peças do tangram tradicional. A diferença se faz, entretanto, em relação aos perímetros das peças, visto que, no caso do Tangram tradicional as peças "grandes" são triângulos iguais, que têm mesmo perímetro; enquanto no tangram de Fletcher, essas peças são formadas por quadriláteros distintos: um quadrado e um paralelogramo – sendo um dos lados deste polígono igual ao lado do quadrado – deste modo podemos afirmar que as duas figuras, têm perímetros distintos.

Usando o tangram de Fletcher é possível relembrar de modo especial os polígonos mais básicos – triângulos, quadrados, retângulo, trapézios – a partir daí iniciar a classificação e identificação diferentes triângulos e quadriláteros; estudar sobre área e perímetro de figuras planas, proporção, semelhança, conceito de frações – mostrando para o aluno que este conceito está atrelado ao fato das "partes" serem divididas do mesmo "tamanho" e como isso será possível uma vez que as peças são diferentes, além de introduzir e/ou fundamentar a ideia e o conceito de rotação e translação, por vezes complexo para os alunos. A comparação entre as áreas das peças é de fácil verificação através da sobreposição entre as peças, podendo ser utilizada com os alunos das séries iniciais, da educação básica. Entretanto fazer essa comparação entre os perímetros das figuras já não é tão trivial, visto que uma vez tomada uma das medidas como unidade, haverá outras que representarão números irracionais, e estes números são apresentados aos alunos somente a partir do 8º ano do Ensino Fundamental. Enfim, verificamos que as possibilidades são inúmeras: áreas, formas geométricas, frações, dependendo do que o professor deseja trabalhar e também da faixa etária e nível de aprendizagem dos alunos da turma, o material pode ser usado como instrumento de investigação e para consolidação de conceitos.

3 TANGRAM TRADICIONAL

Vimos anteriormente que o Tangram chinês é formado por sete peças poligonais e a Figura 14 apresenta com a nomenclatura conforme explicitada na seção 2.1.1. Veremos agora que existem relações de proporcionalidade entre comprimento dos lados dos polígonos bem como entre as áreas das figuras que formam o jogo.

Figura 14 - Tangram chinês



Fonte: a autora, 2023

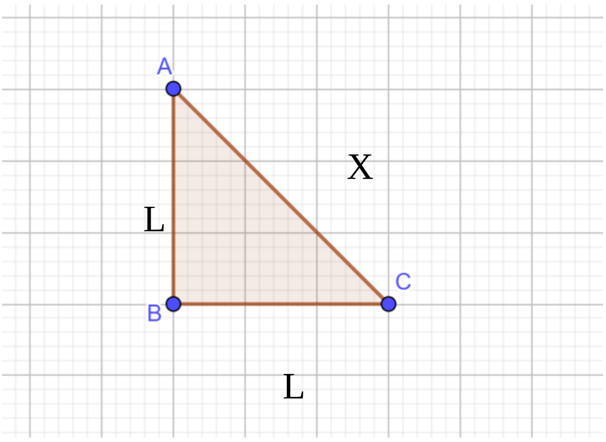
3.1 Relação entre as peças do Tangram Chinês

É sempre importante deixar claro para o aluno que medir é comparar, e que para medir algo, é fundamental que haja aquilo que chamamos de parâmetro, que é a unidade do que vamos usar para verificar e comparar com outras coisas da mesma natureza. Ou seja, para medir o comprimento dos lados dos polígonos que correspondem às peças do Tangram é importante que se tome, por exemplo, um lado de uma das peças como parâmetro. A princípio, podemos usar qualquer uma das peças, qualquer um de seus lados; podemos inclusive usar o quadrado básico, formado com as sete peças, ou seja, usar o lado do quadrado formado por todas as peças, como sendo o parâmetro e a partir da medida do seu lado determinar das medidas dos outros polígonos.

Intuitivamente, o aluno percebe que há duas peças “menores”, ou seja, peças que se forem comparadas às demais têm comprimento dos lados e área menores. Sendo assim, para deixar as medidas como múltiplos, e não submúltiplos; vamos utilizar a menor peça, ou seja, o triângulo pequeno como referência de unidade. Deste modo, a medida dos catetos será a unidade, assim, este lado será o parâmetro para determinar as outras medidas dos lados das demais figuras. Inicialmente o aluno começa a sobrepor as peças, uma sobre as outras na tentativa de fazer esse tipo de comparação, seja das medidas dos lados, quer sejam das áreas. Esse primeiro passo é importante. Entretanto é preciso deixar claro para o aluno que ele não é suficiente. E que para que possamos fazer essas comparações vamos recorrer aos cálculos matemáticos e mostrar aquilo que eles perceberam sobrepondo as peças do Tangram.

Iniciamos com o TP e como os triângulos do Tangram são classificados como triângulos retângulos, então vale o Teorema de Pitágoras. Denominamos por L, a medida do menor lado, ou seja, do cateto do TP; deste modo, a hipotenusa deste triângulo mede $L\sqrt{2}$, valor obtido aplicando o teorema. Conforme é possível verificar na Figura 15.

Figura 15 - Representação do triângulo retângulo isósceles, de cateto L



Fonte: a autora, 2023

Aplicando-se o teorema de Pitágoras, temos que:

$X^2 = L^2 + L^2$

$X^2 = 2.L^2$

$X = \sqrt{2L^2}$

$X = L\sqrt{2}$

Usando agora as medidas do cateto, e da hipotenusa como parâmetros, é possível determinar as medidas dos lados de cada uma das outras figuras. Tais relações entre essas medidas estão apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Relação das medidas dos lados de cada peça do Tangram tomando a medida do cateto do triângulo pequeno como L

Peça do Tangram	Lado menor	Lado maior
TRIÂNGULO PEQUENO	L	$L.\sqrt{2}$
QUADRADO	L	L
PARALELOGRAMO	L	$L.\ \sqrt{2}$
TRIÂNGULO MÉDIO	$L.\ \sqrt{2}$	2.L
TRIÂNGULO GRANDE	2.L	$2.\ L.\ \sqrt{2}$

Fonte: a autora, 2023

Tendo a medida dos lados, bem como os ângulos internos de cada uma das figuras é possível calcular a área de cada uma delas e verificar a relação entre elas. É possível verificar que o quadrado, o triângulo médio e o paralelogramo têm mesma área, e que a sua área é o dobro da área do triângulo pequeno. Essa tarefa pode ser verificada pelo aluno ao sobrepor sobre as peças médias – Q, TM e P – duas pequenas. Posteriormente podemos apresentar essas relações com os cálculos algébricos. Assim é possível mostrar ao aluno que figuras que têm mesma área não precisam ter a mesma forma e não necessariamente têm o mesmo perímetro. De modo semelhante, é possível verificar que a área do triângulo grande é o quádruplo do triângulo pequeno, como pode ser observado na Tabela 2.

Tabela 2 – Relação entre as bases e as alturas das peças do Tangram e determinação das áreas de cada peça

Peça do Tangram	Base	Altura	Área
TRIÂNGULO PEQUENO	L	L	$L^2/2$
QUADRADO	L	L	L^2
PARALELOGRAMO	L	L	L^2
TRIÂNGULO MÉDIO	$L.\ \sqrt{2}$	$L.\ \sqrt{2}$	L^2
TRIÂNGULO GRANDE	2.L	2. L	$2.L^2$

Fonte: a autora, 2023

Assim é possível verificar que as peças médias – TM, Q, P – possuem mesma área, e que elas valem o dobro da área da peça pequena – TP, do mesmo modo as peças grandes – TG – têm área que equivale ao dobro das peças médias, ou ao quádruplo das peças pequenas.

De modo análogo, podemos construir a Tabela 3, que apresenta os perímetros das peças do Tangram. Para efeito prático, vamos elencar os lados dos polígonos em ordem crescente, de acordo com suas medidas, tomando como unidade "L", o cateto do TP.

Tabela 3 – Determinação dos perímetros de cada peça do Tangram

Peça do Tangram	Lado 1	Lado 2	Lado 3	Lado 4	Perímetro
TRIÂNGULO PEQUENO	L	L	$L.\sqrt{2}$	*****	$2L + L.\sqrt{2}$
QUADRADO	L	L	L	L	4L
PARALELOGRAMO	L	L	$L.\sqrt{2}$	$L.\sqrt{2}$	$2L +2 L.\sqrt{2}$
TRIÂNGULO MÉDIO	$L.\sqrt{2}$	$L.\sqrt{2}$	2L	*****	$2L + 2 L.\sqrt{2}$
TRIÂNGULO GRANDE	2L	2L	$2 L.\sqrt{2}$	*****	$4L + 2 L.\sqrt{2}$

Fonte: a autora, 2023

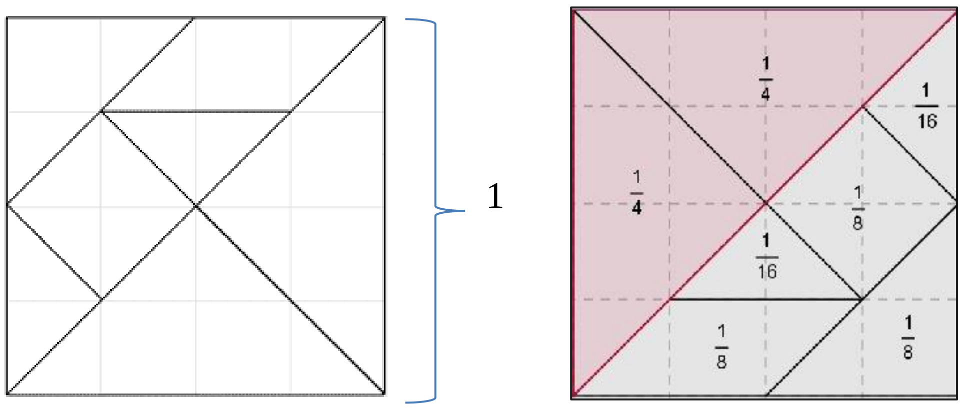
Deste modo, é possível verificar que, por exemplo, apesar das peças "médias": Q, TM e P terem os mesmos valores de áreas, apenas P e TM têm perímetros iguais. Além disso, apesar da área do TP ser a metade da área de cada peça média, essa relação de proporcionalidade não se aplica a relação entre os perímetros das figuras.

Todas essas relações verificadas entre áreas e as medidas dos lados, de cada uma das peças, como seus respectivos perímetros, ajudam o aluno a perceber que é possível construir diferentes figuras, com peças de mesma área, podendo haver alteração no perímetro. Por exemplo, se usarmos um quadrado e os dois triângulos pequenos vamos formar um trapézio isósceles; este trapézio terá a mesma área de um retângulo formado pelo paralelogramo e os triângulo pequenos, no entanto, os perímetros das duas figuras são diferentes. Do mesmo modo que o aluno poderá construir figuras que tenham o mesmo perímetro, e que suas respectivas áreas serão diferentes. Embora essa questão possa parecer elementar, na prática, para o aluno isso nem sempre é claro.

É importante ressaltar que esta estratégia pode ser utilizada também com os alunos das séries iniciais, alunos do 6º ou 7º anos. É claro que ainda não poderemos utilizar o conceito de número irracional e talvez não seja ainda a hora falar sobre o Teorema de Pitágoras, neste caso especificamente, utilizando as peças do Tangram, pois alguns dos lados terão valores irracionais. Entretanto é possível e razoável verificar com o aluno que os triângulos possuem um ângulo reto e que os lados que formam esse ângulo são chamados de catetos e o lado oposto a esse ângulo é chamado de hipotenusa. Sendo nomeados os lados desse tipo de triângulo é possível ainda verificar que no caso específico, dos triângulos que compõem o tangram, os catetos têm a mesma medida, assim poderemos, por exemplo, tomar a peça menor – TP - chamar esses catetos do triângulo pequeno de “C” e a hipotenusa de “H”, por exemplo. É importante que o aluno verifique que precisa usar letras diferentes, pois catetos e hipotenusa têm medidas diferentes. A partir daí é possível traçar um comparativo entre os lados das outras peças, em função de “C” e de “H”. E deste modo também será possível determinar os perímetros das peças, bem como o de cada forma geométrica que o aluno venha a construir. Iniciando-se assim, a escrita algébrica.

Outra estratégia que pode ser usada com os alunos menores, que ainda não sabem usar as fórmulas para o cálculo das áreas, é fazer com eles a construção das peças no papel quadriculado, podendo ser feita as figuras inicialmente separadas e depois reagrupar, ou vice-versa. Para a verificação de quantos “quadradinhos” há em cada uma das peças (Figura 16), essa estratégia que ajuda na comparação entre as figuras, possibilitando e ajudando também na construção e ideia do conceito de fração.

Figura 16 - Tangram chinês e relação entre as áreas tomando o quadrado grande como o unitário



Fonte: a autora, 2022

Pode-se perceber que todos conteúdos matemáticos citados anteriormente podem ser trabalhados em sala de aula utilizando outros materiais ou mesmo de forma mais dura, sem o auxílio de elementos concretos. No entanto a introdução de um jogo, ou quebra-cabeças, como o caso do Tangram, propicia algo que está além da apropriação de conceitos matemáticos.

Quando o Tangram é utilizado em sala de aula, em grupos, ele apresenta aos alunos a oportunidade de imaginar, de se colocar, de se permitir errar e tentar novamente, fomenta a interação entre os alunos a fim de atingir, em conjunto, o objetivo solicitado naquele momento. Para alguns alunos é um meio de perceber que é possível aprender Matemática. É o momento em que ela deixa de ser o “bicho papão” e se torna acessível. Utilizando o Tangram é possível levar o aluno a experimentar, monstrar e verificar potencialiades que talvez nem ele mesmo tenha conhecimento que as tem.

Com o Tangram é viável mostrar como a Arte e a Matemática podem caminhar lado a lado. É realizável a produção de trabalhos insterdisciplinares, com a construção das figuras, efetuação de cálculos e das relações que existem entre elas para que por fim aconteça a criação de trabalhos artísticos com aqueles elementos. Estas potencialidades do Tangram poderão ser observadas, na sessão seguinte, bem como suas aplicações, em projetos desenvolvidos com alunos do GVF, entre os anos de 2021 e 2023.

3.2 Tangram em projetos

No ano de 2021, com o retorno ainda que parcial, dos alunos ao regime presencial, depois de quase dois anos sem aulas, era visível a falta de entendimento dos alunos sobre aquele espaço. Era como se eles tivessem esquecido como era o funcionamento da escola e de como deveria ser a postura de um aluno frente aquele ambiente. Alguns alunos, ainda, apresentaram sintomas psicológicos e emocionais especialmente devido a perdas sofridas no período pandêmico. Esses fatores levaram o corpo docente a pensar mais em acolhimento do que em explanação de conteúdos.

Frente a esse problema, uma das estatégias da autora, foi aplicar e utilizar o Tangram como instrumento de interação entre seus alunos, do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental e da 1ª série do Ensino Médio, tendo em vista que as atividades propostas eram realizadas sempre em duplas ou pequenos grupos, com no máximo quatro alunos. Inicialmente eles puderam manusear o jogo e tentar produzir formas conforme desejassem. Contudo ao final dessas aulas, foi produzido com os alunos o projeto “Natal 2021”, onde os alunos do 8º ano elaboraram a “árvore dos desejos”: Paz, Amor, Esperança, Harmonia, Felicidade, foram algumas palavras, escolhidas pelos alunos, que representavam tais desejos. Usando todas as peças do Tangam, os alunos reproduziram as letras iniciais das palavras que representavam seus desejos para o ano vindouro e terminavam de escrever a palavra usando a forma de letra que desejassem. O trabalho final dos alunos, ou seja, a árvore propriamente dita, foi apresentado em forma de mural e pode ser observado na Figura 20.

Com a turma de 9º ano, foi realizada a reprodução de diferentes modelos de “pinheiros”, como se fosse a representação de “árvores de Natal”. A produção, em sala de aula, em diferentes grupos e em diferentes etapas, pode ser observada nas Figuras 17, 18 e 19. Ao final do trabalho, os pinheiros também foram expostos, num mural, que pode ser obervado na Figura 20.

Figura 17 – Grupo 1 produzindo e pintando o pinheiro com 4 copas

Fonte: a autora, 2021

Figura 18 - Grupo 2 desenhando o pinheiro que foi construído com 3 copas

Fonte: a autora, 2021

Figura 19 - Diferentes formações de pinheiro

Fonte: a autora, 2021

Figura 20 - Mural com os pinheiros de Natal aprentados pelos alunos do 9º ano e árvore dos desejos produzida pelos alunos do 8º ano

Fonte: a autora, 2021

Com a turma da 1ª série do Ensino Médio foi construída uma cena que faz referência ao "Presépio Natalino", onde cada elemento: forma humana (magos, Jesus, Maria e José), animais (camelo, vaca), anjos, estrela, montanhas, foram confeccionadas a partir das sete peças de um Tangram chinês. A atividade foi desenvolvida em dupla de alunos e cada uma ficou responsável pela produção de dois elementos e ao final do trabalho, a turma, em conjunto fez a organização dos mesmos para reproduzir a cena, como é possível observar na Figura 21.

Figura 21 - Presépio produzido pelos alunos da 1ª série do Ensino Médio

Fonte: a autora, 2021

No ano de 2022, a autora utilizou o Tangram em algumas aulas, ao longo do período letivo, de modo especial com a turma de 9º ano, onde foram estudados especificamente os polígonos. A classificação de quadriláteros foi um tema que pôde ser revisto e aprofundado com a utilização do material. Neste ano também foi desenvolvido um projeto de valorização da auto-imagem, com a turma PCF 3.

No primeiro semestre, o Tangram foi apresentado aos alunos da turma PCF 3, como meio de tentar promover maior interesse dos alunos pelas aulas de Matemática. As turmas de "PCF" são formadas por alunos com distorção idade-série. Esse programa visa corrigir essa distorção, apresentando para tal uma metodologia própria e faz divisão dos conteúdos propostos em quatro ciclos semestrais. Alunos que repetem por diversas vezes e com isso crie essa distorção idade-série, caso não tenham concluído o 7º ano, são os "eleitos" para fazerem parte de turmas como essas. Ao final desses quatro ciclos, o aluno estará habilitado para cursar o Ensino Médio regular. Normalmente esses alunos são marginalizados dentro da própria escola, não pelo fato de serem alunos com baixo rendimento, e sim pelo fato de que, na maioria das vezes, serem alunos com problemas disciplinares, o que os torna alvo e faz com que toda e qualquer ação efetuada por eles, seja vista de forma depreciativa, aumentando ainda mais a baixa autoestima já presente nesses alunos.

Em 2022, a turma PCF 3 possuía 12 alunos, sendo 11 rapazes e apenas uma moça, com idades entre 15 e 18 anos. Uma das características desse tipo de turma é um quantitativo elevado de rapazes, tendo em vista que, por motivos diversos, eles são aqueles que ficam mais vezes retidos nos anos escolares, ao longo de todo processo educacional. Todos os alunos eram provenientes de turmas de 6º ano, tendo cursado os módulos 1 e 2, do projeto, no ano de 2021, no sistema remoto. O fato é que era urgente apresentar para eles não apenas os conteúdos, mas também criar nesses estudantes autonomia e interesse, levando em conta que dentro de um ano escolar, eles estariam em turmas regulares do Ensino Médio.

Com a percepção, da autora, a respeito principalmente dos problemas de autoestima desses alunos, foi apresentado o Tangram, como um quebra-cabeças, inicialmene com a proposta de que eles pudessem estudar um pouco de Geometria. Vendo que o interesse aumentou, foi proposta uma atividade para valorização e elevação do amor-próprio desses alunos. Eles puderam criar, com o Tangram, a letra inicial de seus nomes, e depois produzir um quadro. Este trabalho foi exposto para toda comunidade escolar, que teceu muitos elogios a esses alunos. Essa atitude desenvolveu neles não apenas a autoestima, mas também o interesse pela escola, em especial pela Matemática, tornando a relação professor-aluno fluida. A partir de então eles puderam perceber a escola como um agente transformador. E os profissinais e alunos da escola, puderam enxergar esses alunos com menos preconceito e de forma não depreciativa. O mural final pode ser observado na Figura 22.

Figura 22: Mural com os nomes dos alunos do PCF 3

Fonte: a autora, 2022

Ao final do ano letivo, a autora, propôs aos alunos das diferentes turmas, que apresentassem, cenas que remontassem à paisagens africanas. Os alunos pesquisaram sobre paisagens, animais da fauna e itens da flora africana e deste modo, foram separados alguns elementos que fizessem referência a elas. A partir de então, eles em grupos com 5 ou 6 integrantes escolheram duas figuras para reproduzirem com o Tangram. Escolhidas e reproduzidas as figuras , deveriam pintar um Tangram de papel e criar um quadro que representasse sua leitura coletiva da paisagem africana. O trabalho final fez parte do projeto da escola na semana da consciência negra. Os quadros, produzidos pelos alunos ficaram expostos em murais na entrada do colégio. A Figura 28 apresenta alguns dos quadros produzidos pelos alunos. Ao todo foram produzidos três murais distintos.

Este trabalho foi desenvolvido com uma turma de 8º ano, uma turma de 9º ano e com a turma de PCF 4. O desenvolvimento do trabalho, em sala de aula, pode ser observado, nas diferentes turmas, nas Figuras 23, 24, 25, 26 e 27, apresentando diferentes fases no processo de construção.

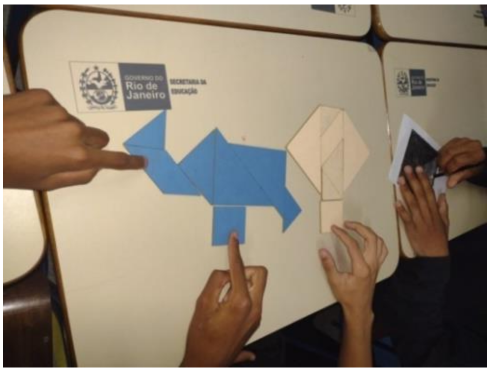
Figura 23 - Grupo do 9º ano com girafa, tentando reproduzir o elefante

Fonte: a autora, 2022

Figura 24 - Animais selvagens confeccionados pela turma do PCF 4

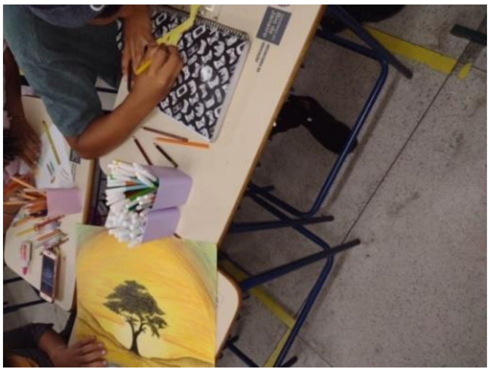
Fonte: a autora, 2022

Figura 25 - Grupo do 8º ano finalizando as imagens do elefante e do obá-obá



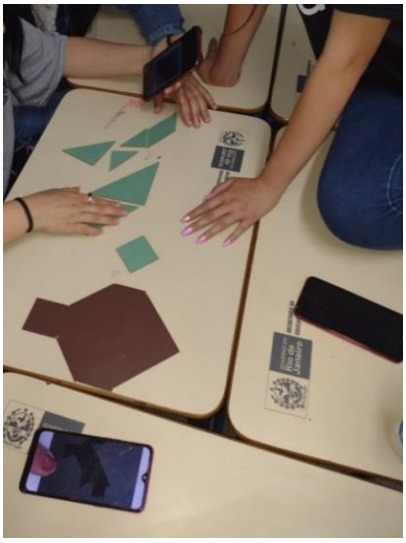
Fonte: a autora. 2022

Figura 26 - Alunos do PCF 4 finalizando a parte artística do trabalho



Fonte: a autora, 2022

Figura 27 - Grupo de 9º ano tentando reproduzir o leão. Aluna sentada sobre a mesa para olhar por outra perspectiva as peças



Fonte: a autora, 2022

Figura 28 - Mural com alguns dos quadro produzidos por alunos do 8º , 9º ano e PCF 4

Fonte: a autora, 2022

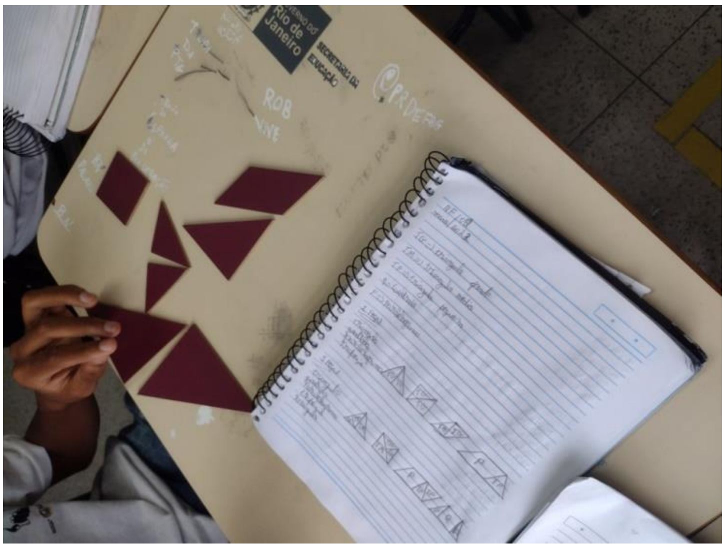
No primeiro semestre de 2023 foi desenvolvido com os alunos da turma PCF 3, um trabalho com o objetivo ampliar a concentração e organização espacial, bem como o reconhecimento de polígonos e também a classificação de quadriláteros. Esta turma contava com 10 alunos, dos quais quatro deles apresentavam algum tipo de necessidade especial, sendo alunos com transtornos psíquicos, psicológicos ou cognitivos. Perante este cenário, foi apresentado um trabalho diferente do tradicional. Durante todo o primeiro semestre foram executadas, com os alunos, em diferentes momentos, atividades colaborativas, para o desenvolvimento de diferentes habilidades, não apenas lógico-matemática, mas também verbo-linguística, espacial e interpessoal.

No início do ano letivo, os alunos se mostraram extremamente agitados e agressivos verbalmente, e até mesmo fisicamente, uns com os outros. Com o objetivo de liquidar este comportamemto, os três professores da turma, decidiram promover ações para este fim. Atividades diversificadas e colaborativas foram introduzidas ao planejamento formal. Uma das ações apresentada pela autora, foi a introdução do Tangram, com o objetivo de estudar as figuras poligonais planas. Em um traballho que durou duas semanas, 20 tempos de aula, os alunos puderam aprender sobre os polígonos a partir da construção utilizando as peças do Tangram.

O trabalho, em sala de aula, se desenvolvou com a turma sendo dividida em dois grupos de cinco alunos, que tinham por objetivo a construção das figuras poligonais com diferentes quantidades de peças. A participação e o envolvimento de cada integrante era sempre reforçado positivamente pela professora, o que fazia com que o interesse aumentasse. Durante o processo de construção, os alunos, em grupo, deveriam usar o Tangram de MDF para produzir a figura e depois cada alunos deveria registrar em seu caderno como foi a montagem. Na última etapa do processo, os alunos usaram Tangram de papel e puderam pintar e recortar as peças, para que fossem coladas, e deste modo foi apresentado algumas diferentes maneiras de conseguir a mesma figura geométrica, usando diferentes peças do Tangram. Ao final desta atividades, eles já estavam ser relacionando de maneira mais harmônica e conseguindo identificar e diferenciar figuras poligonais planas.

As Figuras 29 e 30 apresentam os dois grupos da turma, na primeira etapa do processo, onde os alunos usam o Tangram de MDF para confeccionar as figuras e depois fazem os registros no caderno. Já a Figura 31 apresenta a segunda etapa do processo, onde eles fazem o registro das figuras usando folha de papel quadriculada, sendo fixada uma das medidas e depois pintam e recortam peças de um Tangram de papel e ao final colam para formar as estruturas das imagens que foram concebidas inicialmente.

Figura 29 – Grupo A da turma PCF 3, 2023, montando polígonos

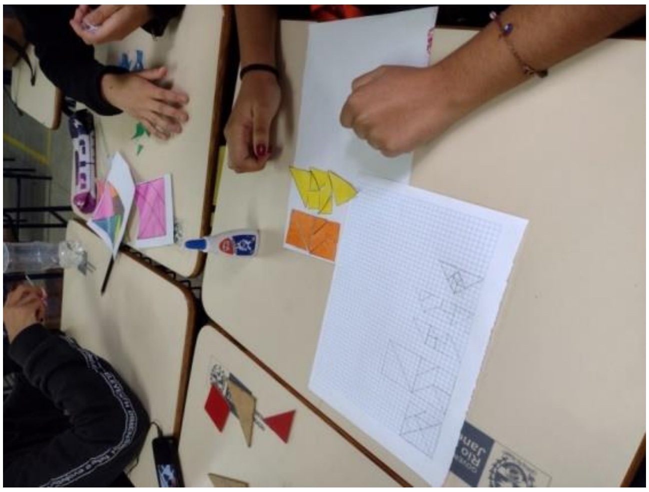


Fonte: a autora, 2023

Figura 30 – Grupo B da turma PCF 3, 2023, montando polígonos

Fonte: a autora, 2023

Figura 31 – Grupo A, na fase final do trabalho



Fonte: a autora, 2023

Foram elencados apenas alguns dos trabalhos e projetos desenvolvidos pela autora ao longo de sua prática pedagógica. É notório dizer, entretanto, que todos os trabalhos e projetos que foram desenvolvidos, pela mesma, ao longo dos anos, serviram de alicerce, suporte e incentivo para o desenvolvimento da pesquisa proposta nesta Dissertação.

4 DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

A pesquisa teve início com a realização de uma avaliação diagnóstica, feita com os alunos, na intenção de analisar basicamente quais eram seus conhecimentos prévios a respeito do vocabulário matemático específico, de modo especial na área da Geometria, bem como a respeito de relações e conceitos sobre área e perímetro de figuras planas. As atividades estão apresentadas, na íntegra, na seção 4.1, bem como algumas análises feitas a partir dela. Esta etapa do processo é a chamada "Análise Preliminar", onde são identificadas as lacunas que deverão ser preenchidas na "Experimentação", terceira etapa do processo, segundo a Engenharia Didática.

No entanto é possível adiantar que o resultado estava muito aquém do que era esperado para uma turma de 9º ano. Alguns alunos sequer conseguiram distinguir um triângulo de um quadrilátero. E em relação ao vocabulário, a questão foi ainda mais crítica. Tendo em vista todas essas questões, foi iniciado o estudo ao qual se destina esta Dissertação.

A partir da análise das avaliações diagnósticas demos início à segunda etapa: "Análise *a priori*", com a construção do experimento. Quais problemas propor? Será que o uso de jogos, em grupos, possibilita uma melhor aprendizagem? O Tangram, como material didático, ajuda ou atrapalha na consolidação de conceitos matemáticos? Responder, ou tentar responder, essas perguntas é ao que se destina esta Dissertação.

A elaboração das atividades, assim como a divisão de temas que seriam abordados nas diferentes aulas, foi prevista nesta fase. Baseando-se nas respostas da avaliação diagnóstica, foi possível perceber que os alunos não apresentavam consolidação de conceitos e detinham um vocabulário extremamente empobrecido, acerca dos entes matemáticos. Foi, contudo, necessário iniciar a etapa da "Experimentação" com a construção, por meio de dobraduras, do Tangram, pois deste modo, seria possível fazer a uma "revisão" e fixação de termos e dos conteúdos que deveriam ter sido apreendidos nos anos escolares anteriores, mas que não foram apresentados ou que não tiveram a fixação e fundamentação adequadas e necessárias.

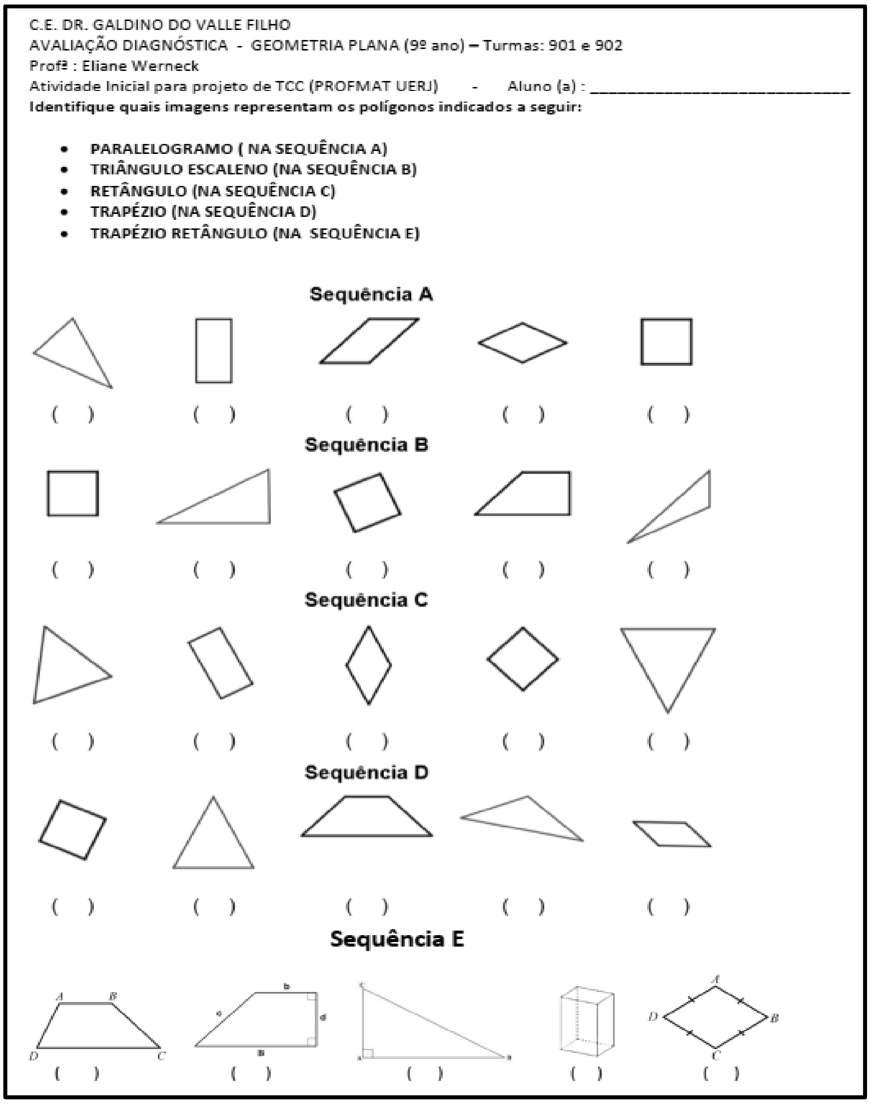
Em sequência virão atividades colaborativas, de construção e análises de formas geométricas, com o uso do Tangram para tal. Essas atividades serão realizadas em grupos fixos, formado por quatro alunos, pré-determinados. As diferentes atividades propostas, na fase da experimentação, serão apresentadas na seção 4.4.

A análise dos resultados da “Experimentação” faz parte da última etapa do processo, sendo feita a validação, ou não, das hipóteses levantadas na “Análise *a priori”*.

4.1 Atividades da Análise Preliminar

Serão apresentadas, nos Quadros 1, 2 e 3, as avaliações diagnósticas aplicadas aos alunos, individualmente, bem como as análises feitas, pela autora, a partir das respostas dadas. Participaram desta primeira etapa, 54 alunos. As análises referentes a cada atividade se encontra imediatamente posteriores a cada quadro.

Quadro 1 – Atividade 1 (Avaliação diagnóstica)


C.E. DR. GALDINO DO VALLE FILHO
AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA - GEOMETRIA PLANA (9º ano) – Turmas: 901 e 902
Profª : Eliane Werneck
Atividade Inicial para projeto de TCC (PROFMAT UERJ) - Aluno (a) : ______________________________
Identifique quais imagens representam os polígonos indicados a seguir:

- **PARALELOGRAMO (NA SEQUÊNCIA A)**
- **TRIÂNGULO ESCALENO (NA SEQUÊNCIA B)**
- **RETÂNGULO (NA SEQUÊNCIA C)**
- **TRAPÉZIO (NA SEQUÊNCIA D)**
- **TRAPÉZIO RETÂNGULO (NA SEQUÊNCIA E)**

Sequência A

( ) ( ) ( ) ( ) ( )

Sequência B

( ) ( ) ( ) ( ) ( )

Sequência C

( ) ( ) ( ) ( ) ( )

Sequência D

( ) ( ) ( ) ( ) ( )

Sequência E

( ) ( ) ( ) ( ) ( )

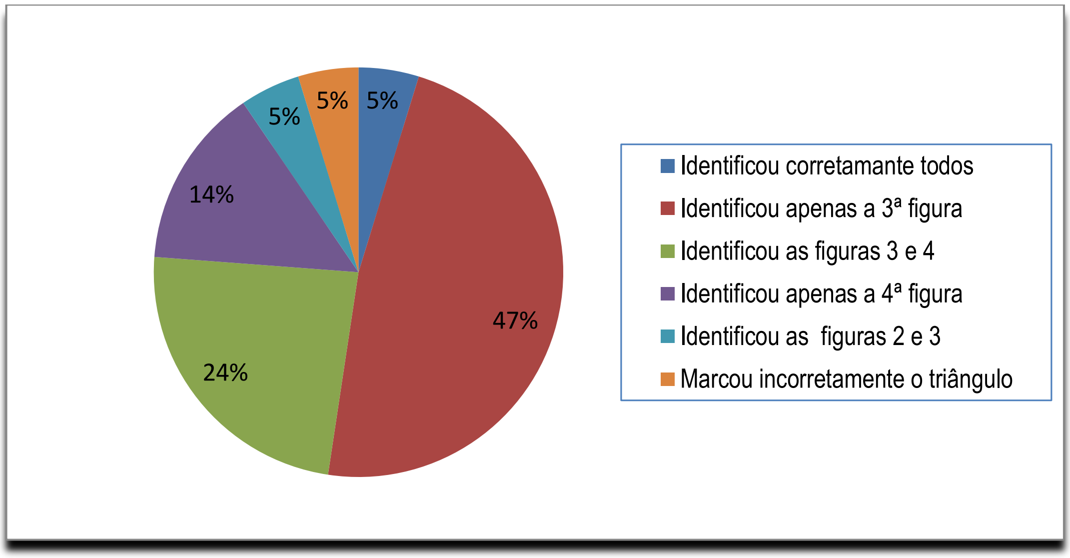
Fonte: a autora, 2023

As figuras não apresentam marcações em relação aos seus lados e ângulos, no entanto, essas informações foram apresentadas no quadro, em sala de aula. Os ângulos retos dos retângulos, bem como os lados congruentes dos polígonos foram indicados.

A seguir estão algumas análises dos resultados, apresentadas por meio de gráficos, os Gráficos 1, 2, 3, 4 e 5, apresentam as análises das “Sequências” A, B, C, D e E, respectivamente. A fim de facilitar a leitura dos gráficos, enumeram-se, da esquerda para a direita, as figuras, conforme se apresentam em cada uma das “Sequências”.

No Gráfico 1, pode-se observar a análise de respostas em relação à “Sequência A”. Tomando como “totalmente correta” a identificação das figuras 2, 3, 4 e 5 como paralelogramos É possível verificar que apenas 5% dos alunos, verificaram que todas aquelas figuras representavam um paralelogramo. Sendo que quase metade da turma apresenta como paralelogramo apenas a figura que tem a imagem pictórica atrelada a este quadrilátero.

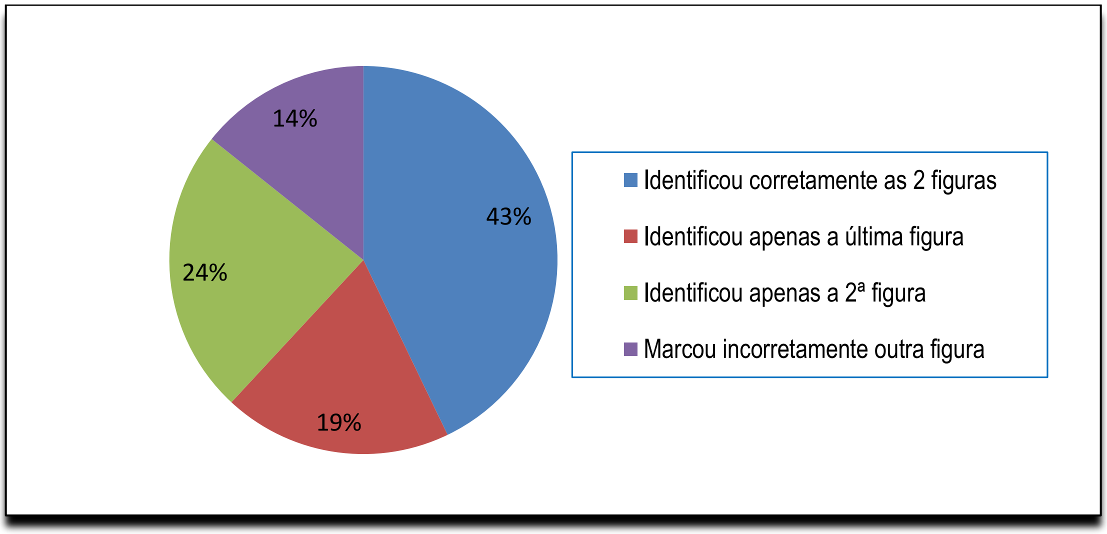
Gráfico 1 – Análise da Sequência A: Identificação de paralelogramos



Fonte: a autora, 2023

No Gráfico 2, está apresentada a análise de respostas em relação à “Sequência B”. Neste item seria correta a identificação das figuras 2 e 5 com triângulo escaleno. Nesta questão, é viável a observação de que 43% dos alunos identificaram corretamente, sendo que outros 43%, reconheceram apenas uma das figuras, como sendo um triângulo escaleno.

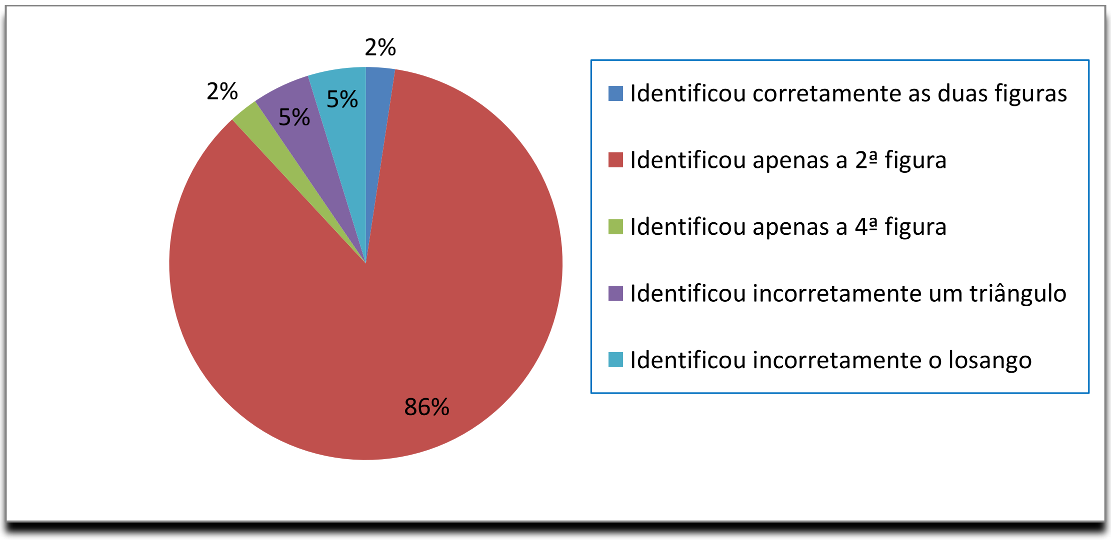
Gráfico 2 – Análise da "Sequência B": Identificação de triângulo escaleno



Fonte: a autora, 2023

O Gráfico 3, a seguir, apresenta as análises efetuadas em relação à "Sequência C". Neste item é considerada "correta" a identificação das figuras 2 e 4 como retângulos. Analisando as respostas dadas pelos alunos, observa-se, por exemplo, novamente o apego, à imagem pictórica de uma figura, fato este percebido, pois a ampla maioria dos alunos identifica apenas a figura 2, com um retângulo.

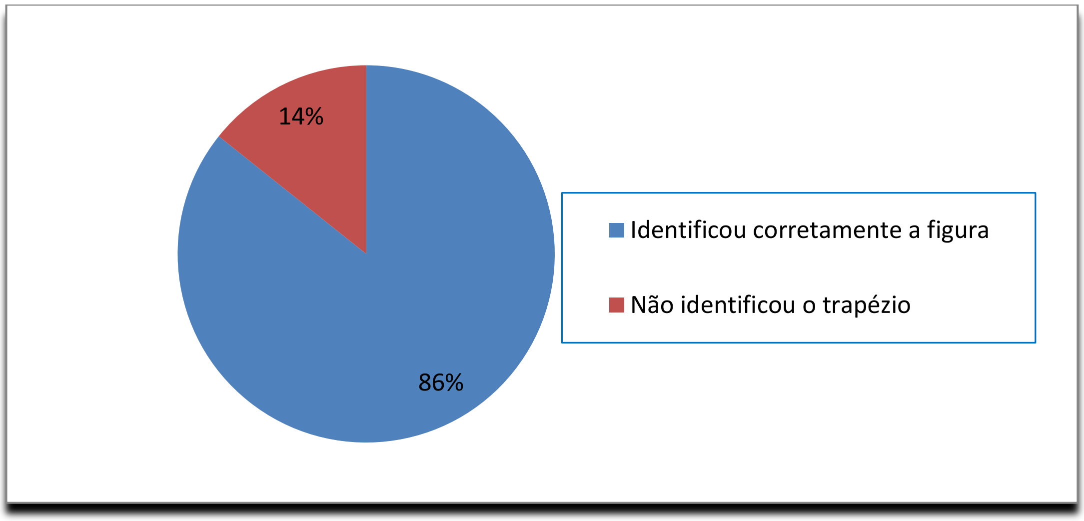
Gráfico 3 – Análise da "Sequência C": Identificação de retângulo



Fonte: a autora, 2023

As análises a respeito da "Sequência D" estão apresentadas no Gráfico 4. Nesta "Sequência", seria correta a identificação da "terceira figura" como trapézio. E como pode ser verificado no gráfico, apenas 14% dos alunos não identificaram o trapézio corretamente, sinalizando outra figura.

Gráfico 4 – Análise da "Sequência D": Identificação de trapézio



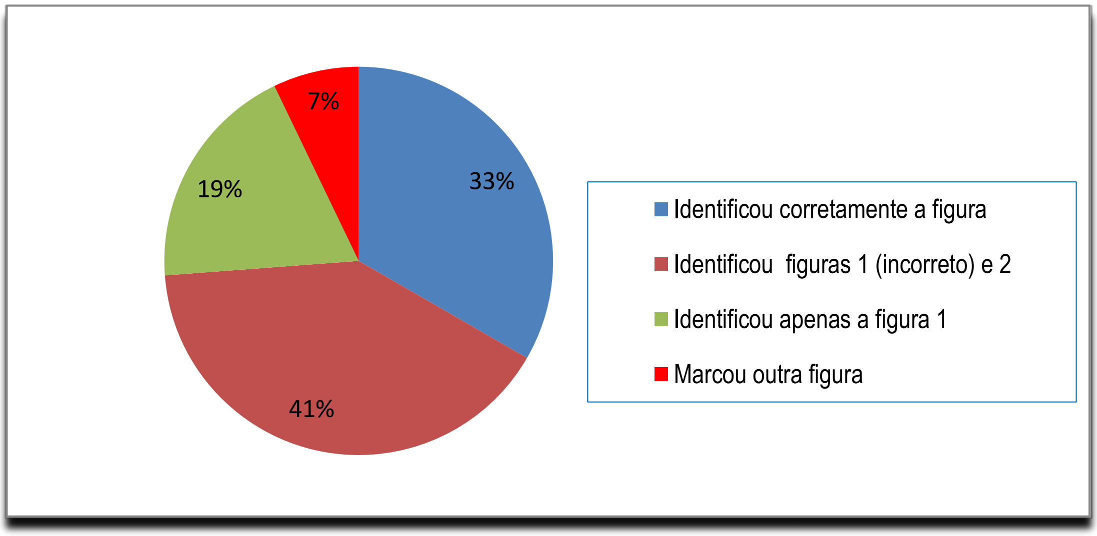
Fonte: a autora, 2023

Apesar da identificação de modo correto, pela maioria dos alunos, do que seja um trapézio, nota-se que esta identificação é parcial. Como é possível observar no Gráfico 5, apenas um terço da turma é capaz de classificar uma figura desse tipo, de modo mais específico.

O Gráfico 5, apresenta as observações a respeito da "Sequência E". Nesta questão, pretende-se verificar se o aluno consegue identificar a figura e também classificá-la, neste caso específico, analisando também os ângulos do quadrilátero. Neste contexto, é considerada "correta" a identificação apenas da "figura 2" como trapézio retângulo.

Nota-se que um terço da turma conseguiu identificar corretamente. Entretanto mais de 90% dos alunos da turma identificam parcialmente um trapézio, não conseguindo diferenciar se ele é isósceles, retângulo ou escaleno. Havendo ainda, 7% dos alunos analisados que sequer conseguem identificar esse tipo de figura, desses quase a totalidade sinalizou a figura 4, que sequer representa um polígono.

Gráfico 5 – Análise da “Sequência E”: Identificação de trapézio retângulo



Fonte: a autora, 2023

Analisando os dados dos gráficos, é possível perceber que alguns alunos ainda não têm a fundamentação a respeito da classificação de triângulos e de quadriláteros. Alguns deles estão atrelados às imagens pictóricas de certos polígonos, fato este observados a partir de observações nos Gráficos 1 e 3, e não aos conceitos matemáticos formais que levam uma determinada figura ser classificada.

O Quadro 2, apresenta a “Atividade 2”, que visa analisar o vocabulário dos alunos, no que se refere aos entes matemáticos. Além do apego à imagem pictórica, a insuficiência e/ou incapacidade dos alunos em relação ao uso adequado do vocabulário aplicado especificamente na área de Matemática, bem com a compreensão de seus significados, são fatores que dificultam, e muitas vezes impossibilitam a aprendizagem.

É perceptível que a falta de fundamentação teórica, bem como a falta de domínio do vocabulário são alguns dos fatores que levam ao mau desempenho dos alunos nos testes avaliativos de Matemática, de modo especial, na área da Geometria. Como é possível o aluno calcular o perímetro de um triângulo retângulo isósceles, se ele não sabe o significado das palavras, nem o conceito de “perímetro”, “triângulo retângulo” e “triângulo isósceles”?

A avaliação desta atividade trouxe preocupação para a autora, pois cerca de 70% dos alunos deixaram a atividade em branco, ou quase em branco. Alguns alunos conseguiram apenas fazer algumas figuras ilustrativas, a respeitos dos entes matemáticos abordados na mesma. Outros ainda apresentaram conceitos errados ou incompletos a respeito desses termos.

Quadro 2 – Atividade 2 (Avaliação diagnóstica)

C.E. DR. GALDINO DO VALLE FILHO
AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA - GEOMETRIA PLANA (9º ano) – Turmas: 901 e 902
Profª : Eliane Werneck
Atividade Inicial para projeto de TCC (PROFMAT UERJ) - Aluno (a) : ____________________

Escreva, com suas palavras, a definição dos termos matemáticos apresentados abaixo. Você pode usar uma figura ilustrativa para representar.

TRIÂNGULO ____________________

TRIÂNGULO RETÂNGULO ____________________

TRIÂNGULO ISÓSCELES ____________________

TRIÂNGULO ESCALENO ____________________

ÂNGULO ____________________

ÂNGULO RETO ____________________

ÂNGULO AGUDO ____________________

ÂNGULO OBTUSO ____________________

ÂNGULO RASO ____________________

RETAS PARALELAS ____________________

RETAS CONCORRENTES ____________________

RETAS PERPENDICULARES ____________________

PARALELOGRAMO ____________________

RETÂNGULO ____________________

LOSANGO ____________________

TRAPÉZIO ____________________

TRAPÉZIO RETÂNGULO ____________________

TRAPÉZIO ISÓSCELES ____________________

QUADRADO ____________________

HIPOTENUSA ____________________

CATETO ____________________

DIAGONAL ____________________

PONTO MÉDIO ____________________

CONGRUENTE ____________________

Fonte : a autora, 2023

A análise da Atividade 2 não foi registrada por meio de gráficos, tendo em vista que houveram poucas respostas e as respostas que foram apresentadas pelos alunos eram bastante diversificadas, sendo muitas delas feitas apenas por meio de desenhos ilustrativos.

O Quadro 3, refere-se à "Atividade 3", que tinha por objetivo aferir conhecimentos prévios dos alunos a respeito dos conceitos de área e perímetro de figuras planas, bem como a comparação entre essas figuras.

Quadro 3 – Atividade 3 (Avaliação diagnóstica)

C.E. DR. GALDINO DO VALLE FILHO
AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA - GEOMETRIA PLANA (9º ano) – Turmas: 901 e 902
Profª : Eliane Werneck
Atividade Inicial para projeto de TCC (PROFMAT UERJ) - Aluno (a) : ____________________________

ANALISE AS FIGURAS ABAIXO. Considere a distância vertical e horizontal entre as linhas (do quadriculado) tendo a distância de 1 unidade de medida de comprimento.

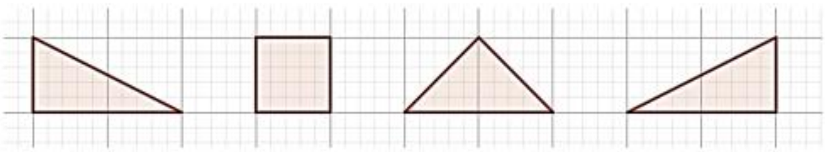


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

- Quais figuras têm ÁREAS IGUAIS?
- Explique como você chegou a conclusão do item anterior. Você pode explicar com palavras, ou por meio de cálculos.
- Qual o perímetro de cada uma das figuras? Explique com palavras ou cálculos como você achou o seu resultado.

OBSERVE AS FIGURAS A SEGUIR. Use as distâncias entre as linhas verticais e horizontais como de 1 unidade de comprimento e responda as questões:

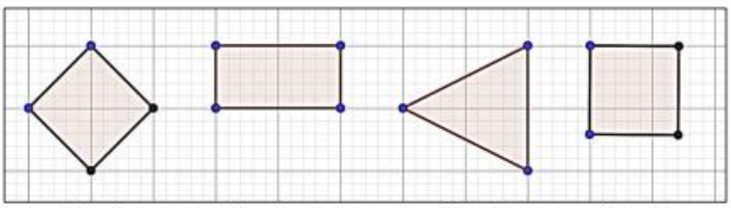


Figura A Figura B Figura C Figura D

- Classifique cada uma das figuras abaixo
- Quais figuras têm mesma área? Como você chegou a esta conclusão?
- Escreva em ordem crescente as figuras, levando em consideração o perímetro de cada uma delas. Diga como você chegou a esta conclusão.

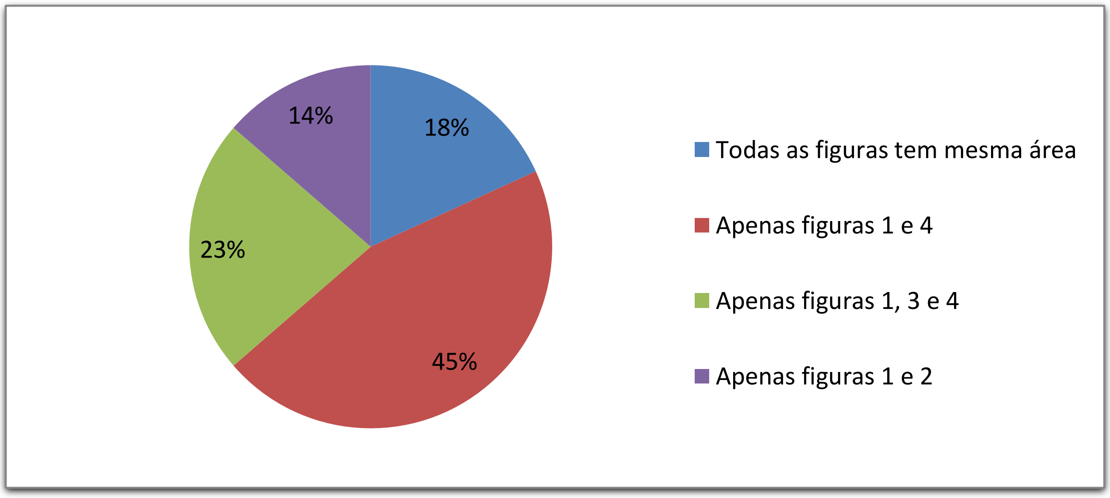
Fonte: a autora, 2023

A “Atividade 3” foi aplicada em dia diferente das duas primeiras. Deste modo, era esperado que os alunos tivessem pesquisado, ou mesmo perguntado a respeito dos termos e figuras que foram abordados nos testes anteriores. Fato este que não se evidenciou ao serem feitas as análises de respostas. Este teste tinha também a intenção de verificar o conhecimento dos alunos em relação à determinação de área e perímetro de polígonos em malha quadriculada (EF04MA21), usando o segmento da quadricula como unidade de medida de comprimento; podendo e devendo usar a medida do quadradinho como unidade de área (u.a.).

Na primeira parte desta atividade os alunos deveriam verificar quais figuras tinham áreas iguais e justificar, por meio de palavras ou cálculos, suas respostas. Apenas um dos alunos usou os cálculos para justificar suas conclusões, no entanto, o cálculo foi feito de modo incorreto, e por isso a conclusão ficou errada. Ele realizou de modo incorreto, a área de um triângulo, como sendo o produto entre o comprimento e a altura. Achando deste modo o valor “50” e não “25”, como esperado.

Nesta primeira sessão seria correto afirmar que todas as quatro figuras possuem a mesma área. O Gráfico 6, apresenta as respostas dos alunos, em relação a verificação das figuras que possuem a mesma área.

Gráfico 6 – Bloco 1: Identificação de figuras com mesma área



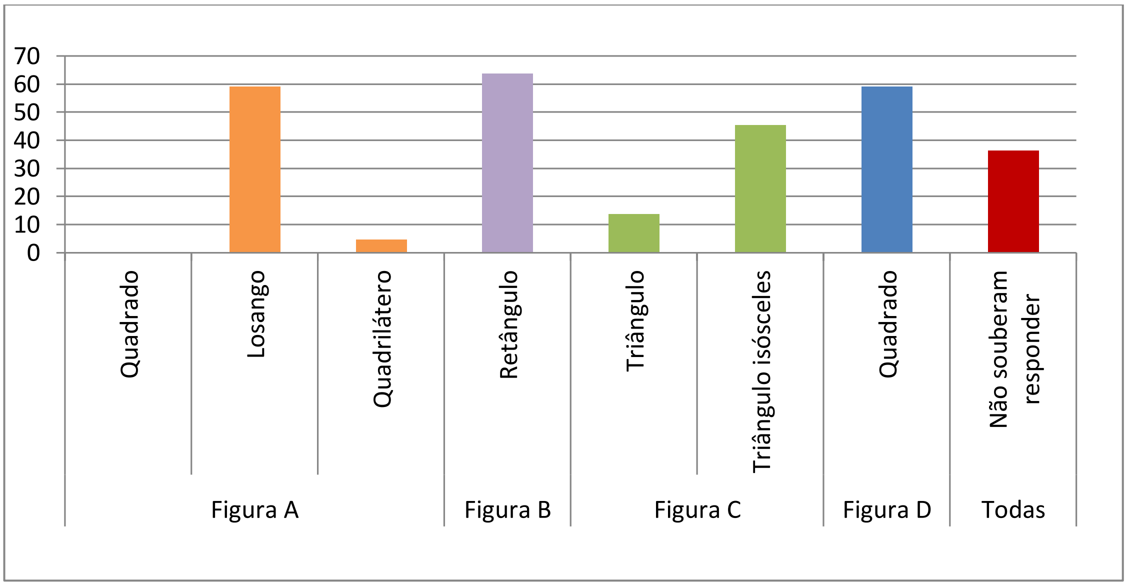
Fonte: a autora, 2023

Analisando o gráfico e as justificativas dadas, pelos alunos, é possível notar que a grande maioria deles, quase metade, percebe que apenas os triângulos congruentes têm mesma área. Embora eles não digam que os triângulos são congruentes, e nem que eles sofreram reflexão, como foi o caso. Outra parte dos alunos, cerca de um quarto, recorreu à contagem de “quadradinho”, fato este verificado com as marcações nos quadrículos da figura, em uma tentativa de sobreposição, para justificar que o triângulo da figura 3 também teria a mesma área dos demais. Os alunos que colocaram que as figuras 1 e 2 possuíam a mesma área, não justificaram a sua resposta.

Em relação à questão que trata sobre ao perímetro, nenhum dos alunos determinou corretamente o perímetro dos triângulos, apesar de alguns alunos já terem estudado o teorema de Pitágoras no 8º ano. E apenas 10% disseram corretamente que o perímetro do quadrado era 20 unidades de comprimento.

No segundo bloco, o aluno deveria classificar o mais detalhadamente possível cada uma das figuras apresentadas, ou seja, classificar o triângulo e os quadriláteros apresentados em relação a seus lados e ângulos. A seguir, apresentamos o Gráfico 7, com dados relativos, com as respostas dadas pelos alunos, para cada uma das figuras. Vale, no entanto, ressaltar que o gráfico não apresenta a realidade global, tento em vista que cerca de um terço da turma deixou esta questão totalmente em branco, apresentando total desconhecimento a respeito da classificação das figuras apresentadas.

Gráfico 7 – Bloco 2: Classificação de triângulos e quadriláteros



Fonte: a autora, 2023

Foi verificado, entretanto, e é passível de constatação também a dileção à imagem pictórica, pois vemos que no caso da figura D, os alunos não tiveram dificuldades de classificá-la como quadrado, já a figura A, cujo quadrado não está apresentado na sua imagem "usual", nenhum aluno o classificou de tal modo.

Em relação à área das figuras apresentadas, aquelas que possuem a mesma área são as figuras A, B e C cuja área é igual a 50 u.a., já a figura D tem área igual a 49 u.a..

Nenhum aluno apresentou o cálculo para justificar suas respostas. Alguns alunos, no entanto, apresentaram ainda que de maneira intuitiva e numa linguagem coloquial, o uso da decomposição das figuras, e rotação de "pedaços", a fim de comparar os polígonos apresentados.

A partir das análises de respostas dos alunos, deu-se o início à segunda fase do processo, ou seja, a construção propriamente dita do experimento, a chamada "análise *a priori*".

4.2 Construção do Experimento (análise *a priori*)

Nesta fase do processo, criam-se as hipóteses:

- Jogos em grupos propiciam melhor aprendizagem?
- Tangram, como material didático, ajuda na fundamentação teórica de conceitos geométricos?

E a partir da criação das hipóteses é possível gerar o plano de ações que deverá ser executado na fase da experimentação.

Tendo em vista a enorme dificuldade dos alunos em definir entes matemáticos, bem como a definição errada apresentada por alguns deles, levou a autora a começar seu planejamento a partir da construção, do Tangram, por meio de dobraduras, que será descrita na sessão 4.3, pois deste modo seria possível revisar conceitos, vocábulos e nomenclatura de polígonos e de modo especial classificação de triângulos e quadriláteros.

O segundo passo foi a elaboração de uma lista que deverá ser executada pelos alunos, em grupos. Esta lista, apresentada na seção 4.4, traz uma sequência de ações que devem ser seguidas a fim de consolidar os conceitos de área e perímetro de figuras planas, bem como o vocabulário matemático adequado para alunos de nono ano.

Ao final da própria lista é apresentada uma espécie de avaliação, sentenças que o aluno deverá julgar "falsa" ou "verdadeira", que será observada e analisada, juntamente com todo o processo de experimentação, a fim de dar ou não a validação do experimento. Fechando assim este ciclo, conforme previsto na metodologia da Engenharia Didática.

4.3 **Construção do Tangram através de dobraduras**

A primeira atividade realizada com os alunos foi uma construção de Tangram por meio de dobraduras. Nesta etapa, cada aluno construiu seu próprio Tangram. Deste modo, os alunos teriam a possibilidade de ter o material para utilizá-lo inclusive em casa. Este processo visou iniciar toda inserção e/ou reforço do vocabulário matemático que será usado, de modo especial na área de Geometria.

Será apresentado a seguir o passo-a-passo dessa construção. O processo inicia-se com uma folha de papel sulfite, tamanho A_4, pois se trata de material de fácil acesso na escola e de baixo custo. Foi sugerido aos alunos que ao final do processo, colassem as peças em papel cartão ou cartolina, para que ficassem mais rígidas. Este material, entretanto, não foi utilizado em outras etapas do processo, sendo usados os Tangram em MDF, por se tratar de material mais resistente.

As palavras apresentadas em 'caixa alta' foram ditas, durante o processo de construção, e cada um dos conceitos relacionados a elas foram também vistos ou revistos, durante esse processo. Alguns desses termos não eram de conhecimento dos alunos, fato este observado nas atividades diagnósticas e que foi comprovado durante a execução desta atividade; assim, foram necessárias muitas interrupções para a explicação desses termos, acontecendo, portanto, uma revisão e fixação de termos e conceitos matemáticos. Ao final da atividade, foi sugerido que os alunos anotassem as palavras e montassem uma espécie de glossário/resumo.

4.3.1 Passo 1 – Obtenção de um quadrado que será o tamanho do Tangram

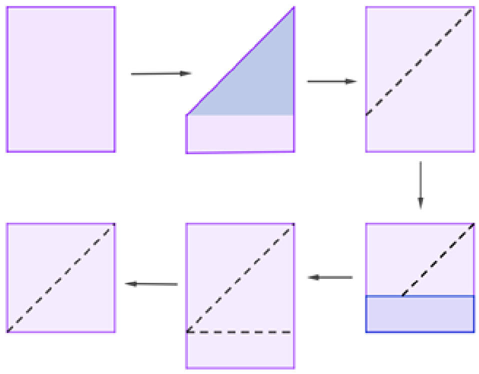
Pegar uma folha de papel sulfite tamanho A_4 em formato RETANGULAR e dobrar o papel sobrepondo o lado menor ao maior lado do retângulo.

A figura que se apresenta agora é um TRAPÉZIO RETÂNGULO.

Dobrar o pedaço que não está sobreposto, e retirá-lo (cortar). Tendo agora um QUADRADO, que já está dividido por uma das suas DIAGONAIS, em duas partes:

dois TRIÂNGULOS, conforme Figura 32. Esses triângulos são do tipo TRIÂNGULO RETÂNGULO. Conforme é possível verificar nas Figuras 33, 34 e 35.

Figura 32 – Primeiras dobras para a obtenção de um quadrado a partir de um retângulo

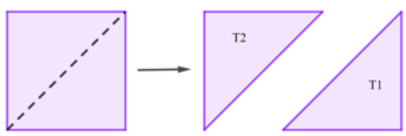


Fonte: elaboração própria

4.3.2 Passo 2 – Divisão do quadrado por uma de suas diagonais

Cortar sobre a DIAGONAL do quadrado, separando essas duas partes: TRIÂNGULOS RETÂNGULOS (T_1 e T_2). Observar que esses triângulos além de serem triângulos retângulos também são TRIÂNGULOS ISÓSCELES, conforme pode ser visto na Figura 33. No entanto, essas ainda não são as peças que formam o Tangram. Veremos nos próximos passos que elas serão novamente subdivididas para formar cada uma das sete peças que compõem o Tangram chinês.

Figura 33 – Quadrado dividido pela diagonal



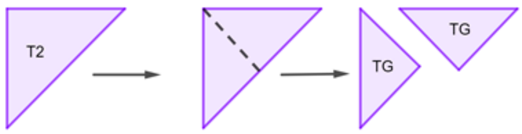
Fonte: a autora

4.3.3 Passo 3 – Obtenção dos triângulos grandes (TG) do Tangram

Pegar uma das partes. Observar os ÂNGULOS AGUDOS, verificar que têm a mesma medida, isso também é possível concluir, pois os lados do quadrado têm a mesma medida. Logo, esses triângulos são TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

ISÓSCELES. Vamos agora dobrar esta figura de modo que os ÂNGULOS CONGRUENTES sejam sobrepostos, bem como os LADOS CONGRUENTES, formando assim, dois novos TRIÂNGULOS ISÓSCELES RETÂNGULOS. Dividir, onde está a dobra, tendo assim as duas primeiras figuras do Tangram: os dois TRIÂNGULOS grandes (TG), vide Figura 34.

Figura 34 - Obtenção dos TG do Tangram



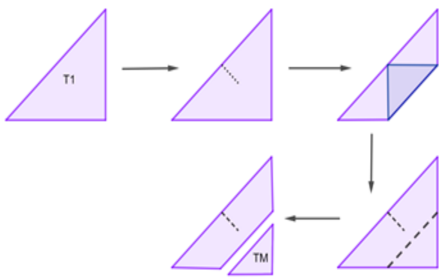
Fonte: a autora

Essas figuras devem ser separadas, o que também acontecerá com cada uma das demais peças conforme forem sendo obtidas.

4.3.4 Passo 4 – Obtenção do triângulo médio (TM) do Tangram

Pegar a outra parte (T_1) que sobrou para dividi-la também. Devemos unir os vértices dos ÂNGULOS AGUDOS e marcar sobre a HIPOTENUSA o ponto que a divide em duas partes iguais, observar que este ponto será o PONTO MÉDIO DA HIPOTENUSA do triângulo. Vamos identificar onde está o ÂNGULO RETO do triângulo, e dobrar de modo que este ângulo toque no LADO OPOSTO a ele, no PONTO MÉDIO. Em seguida devemos cortar e deste modo temos a terceira figura do Tangram: o TRIANGULO médio (TM). Conforme apresentado na Figura 35.

Figura 35 – Obtenção do TM



Fonte: a autora

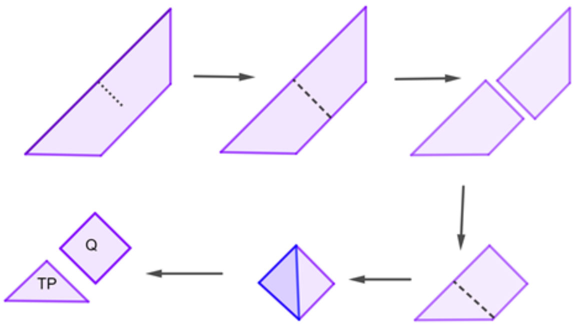
4.3.5 Passo 5 – Obtenção do quadrado (Q) e de um dos triângulos pequenos (TP) do Tangram

Observar que a figura que sobrou, no passo 4, é um TRAPÉZIO ISÓSCELES. A próxima dobradura acontecerá dividindo este TRAPÉZIO ISÓSCELES em duas partes e, cada uma delas representa um TRAPÉZIO RETÂNGULO, sendo eles CONGRUENTES. É preciso que os lados oblíquos do trapézio fiquem SOBREPOSTOS. Assim a figura novamente é dividida em duas, DOIS TRAPÉZIOS RETÂNGULOS, que devem ser separados.

Tomando-se uma dessas partes, vamos obter mais duas peças: o QUADRADO e um dos TRIÂNGULOS PEQUENOS; com a outra parte teremos as duas últimas peças. Os passos para obtenção dessas figuras podem ser verificados na Figura 36.

Conforme é possível acompanhar na Figura 36, na próxima dobradura, os vértices do lado maior do TRAPÉZIO devem se encontrar de modo que, a base maior do trapézio fica divida no PONTO MÉDIO. As figuras formadas devem ser separadas. Desta forma, teremos a formação TRIÂNGULO PEQUENO (TP), quarta figura e do QUADRADO (Q), quinta figura do Tangram.

Figura 36 – Obtenção de um TP e do Q



Fonte: a autora

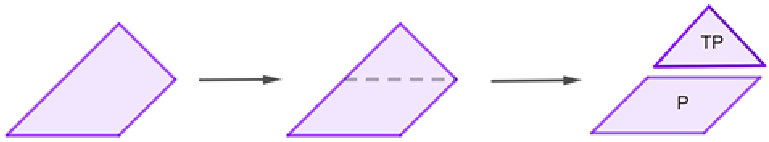
4.3.6 Passo 6 – Obtenção do paralelogramo (P) e de um dos triângulos pequenos (TP) do Tangram

Determinadas cinco peças do Tangram, faltam as duas últimas, que serão obtidas a partir da figura que não foi dividida.

Tomando-se o outro TRAPÉZIO RETÂNGULO, são feitas as últimas dobraduras para que sejam obtidas as duas últimas figuras do Tangram. Observar que neste trapézio temos as BASES MAIOR E MENOR, temos também dois ÂNGULOS RETOS, um ÂNGULO AGUDO E um ÂNGULO OBTUSO.

Para determinar as figuras que faltam, devemos unir o VÉRTICE cujo ângulo é reto do LADO MAIOR – BASE MAIOR DO TRAPÉZIO - ao VÉRTICE OPOSTO a ele (o que é vértice do ÂNGULO OBTUSO). Temos agora apresentadas as duas últimas figuras que compõem o Tangram: o outro TRIÂNGULO pequeno (TP) e o PARALELOGRAMO (P), bastando cortar onde foi feita a dobra, como na Figura 37.

Figura 37 – Obtenção do outro TP e do P



Fonte: a autora

Todo o processo de construção demorou quase dois tempos de aula, ou seja, cerca de 1 hora e 30 minutos. Embora o planejamento inicial previsto fosse de 40 minutos, fugindo assim um pouco do período planejado. No entanto, este era um passo importante e fundamental para o desenvolvimento do restante do trabalho e não poderia acontecer de modo negligente. Tendo em vista que, a cada palavra/conceito ditos, eram reforçados seus significados e, caso estes não fossem de conhecimento ou entendimento, por parte dos alunos, se fazia necessária uma pausa na construção, para a sua devida explicação e esclarecimento. Isso demandou uma série de interrupções até que todos os alunos pudessem entender. Com o decorrer do processo eles começaram a se sentir mais confiantes e de fato participar, pois se apropriaram do vocabulário que estava sendo utilizado.

Encerrada a confecção das peças do Tangram, por meio da dobradura, desconstrução/recorte, a partir de um quadrado original, a atividade mais intuitiva é que seja solicitado ao aluno que ele reconstrua esse quadrado. Embora seja uma tarefa aparentemente simples, pois é preciso repensar os passos dados e voltar a repeti-los, no sentido inverso, pôde-se observar que muitos alunos tiveram dificuldades de efetuar essa tarefa. Alguns deles não conseguiam sequer lembrar a ordem com que as peças foram sendo “retiradas” do todo. Tal dificuldade pode ser observada na foto apresentada na figura 38 a, que retrata um aluno tentando refazer o quadrado original montando diferentes quadrados; e na figura 38 b, onde a aluna junta um triângulo grande com o triângulo médio. Apesar de dificuldades como estas apresentadas pelos alunos, ao final da aula, com ou sem ajuda externa, da autora ou de outros alunos da própria turma, todos conseguiram remontar o quadrado original.

Figura 38 a - Foto de aluno da turma 901 tentando refazer o quadrado original

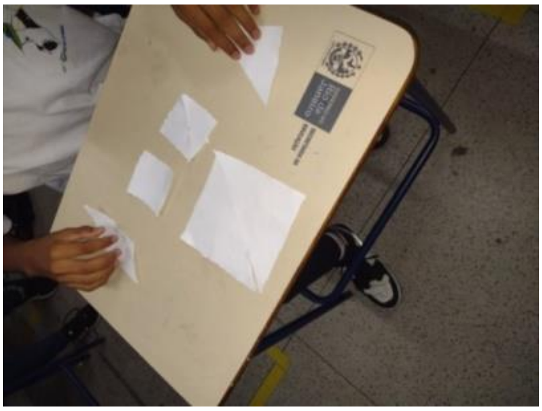


Figura 38 b – Foto da aluna da turma 902 tentando refazer o quadrado original

Fonte: a autora, 2023

Após a conclusão dessa tarefa foi iniciada a parte comparativa entre as peças do Tangram. É importante verificar com os alunos as relações que existem entre os lados e ângulos das sete figuras formadas. Desta forma, é possível observar que todos os ângulos agudos são iguais e deste modo podemos concluir, usando a relação da soma de ângulos internos de triângulos, que os ângulos agudos medem 45º. De maneira semelhante, pelas propriedades de paralelogramos, ou simplesmente pela sobreposição de figuras, é possível concluir que os ângulos obtusos do paralelogramo, valem 135º.

Os alunos conseguem verificar que a medida dos catetos do TP é igual à medida dos lados do quadrado ou dos lados menores do paralelogramo. Verificar que a hipotenusa do TM mede o dobro da medida do cateto do TP (EF05MA18). Ou ainda que o lado maior do paralelogramo tenha a mesma medida de cada cateto do TM. Esse período de exploração é fundamental, pois é o primeiro momento em que os alunos vão criando conexões e encontrando relações entre os lados das figuras, verificando suas semelhanças. Essas relações serão confirmadas, posteriormente, quando consideramos o estudo teórico dos triângulos como, por exemplo, através do teorema de Pitágoras.

A fim de ilustrar o Teorema de Pitágoras é solicitado aos alunos que já montaram o quadrado utilizando todas as peças, agora reagrupem as peças de modo a construir um quadrado com as peças grandes (TG) e outro quadrado com as peças restantes. Feito isto, em duplas, elas vão verificar que a "soma" de dois quadrados é igual a um único quadrado. Com a orientação da autora, eles reorganizam as três figuras formadas e verificam que isso está acontecendo quando os lados destes quadrados se arrumam de maneira a formar um triângulo retângulo no centro das três figuras. Neste momento é dito sobre a verificação do Teorema de Pitágoras utilizando o Tangram.

Embora esta não seja propriamente uma demonstração do teorema, pois utiliza um caso particular, de um triângulo retângulo e isósceles; é uma maneira concreta de o aluno perceber o teorema de Pitágoras. E a partir daí utilizá-lo na verificação das relações entre os lados dos triângulos do próprio Tangam (EF09MA14).

4.4 Experimentação – atividades colaborativas

Após essa etapa de construção do Tangram, aferição das medidas dos lados de cada peça, deu-se início à fase de construção e apropriação dos conceitos pertinentes a esta Dissertação. A partir desta etapa do processo, as atividades propostas aconteceram em grupos, formados por quatro alunos. Os grupos que iniciaram os trabalhos seguiram fixos, ou parcialmente fixos, até o término do mesmo, usando Tangram de MDF colorido, cada grupo com uma cor. Este material foi usado, pois se trata de material resistente e de baixo custo, que já era de propriedade da professora.

A seguir está apresenta a atividade proposta para a apropriação e fundamentação dos conceitos de área, perímetro de figuras planas. Bem como a comparação entre as medidas dessas figuras. Com esta atividade é possível retomar conteúdos, tais como: polígonos e classificação de triângulos e de quadriláteros; teorema de Pitágoras, operações com números reais, sejam eles, racionais ou irracionais.

A atividade foi dividida em três folhas, apresentadas nos Quadros 4, 5 e 6. O planejamento inicial previa 4 tempos de aula para que fosse concluída integralmente, no entanto, devido a alguns problemas de falta de alunos em determinados dias, ou até mesmo de grupos inteiros, foram necessários 6 tempos para que fosse finalizada a atividade por todos os grupos. A proposta da atividade é de reforçar tanto a linguagem matemática, quanto seus registros. A construção usando inicialmente uma parte das peças do quebra-cabeça, também tem como objetivo desenvolver habilidade perceptiva nos alunos, de como é possível compor, e posteriormente decompor uma figura geométrica em partes.

Ficou acordado com os alunos que quando fosse usado o termo “paralelogramo”, estaríamos nos referindo a uma figura semelhante à peça que faz parte do Tangram e recebe o mesmo nome, ou seja, um paralelogramo com lados e ângulos adjacentes com medidas distintas. Assim também aconteceu em relação ao termo “retângulo”, estaríamos nos referindo a retângulos cujas dimensões não fossem iguais. Isso se fez necessário para que não houvesse confusões posteriores, pois “retângulos” e “quadrados” também são paralelogramos, “quadrados” também são retângulos. Tal ação visa inclusive ajudar na consolidadação da classificação dos quadriláteros, tendo em vista que durante a construção do Tangram, por meio de dobraduras, já havia sido esclarecido, para os alunos, essa interrelação entre os conceitos que estão associados à sua características e propriedades.

É importante salientar que durante o processo de construção foi respeitado o tempo de cada grupo. As folhas eram entregues aos grupos conforme acontecia a finalização da folha anterior. Desde modo, pôde ser observado que alguns grupos demandaram um tempo maior em algumas fases, de modo especial no exercício 6, pois não havia especificamente o número de peças que deveria se usado, o que deixou alguns grupos desorientados.

Primeiramente foi feita a verificação das relações entre as figuras do Tangram. Adotando-se a unidade de medida de comprimento como sendo o cateto do TP e sendo observada a relação existente entre as demais medidas das outras peças do Tangram, bem como as relações entre as áreas e os perímetros de novas figuras formadas com parte das peças do Tangram. A proposta foi de revisitar e fundamentar o conceito do que é “medir”. E embora seja uma proposta semelhante a que foi usada na construção do Tangram por meio das dobraduras, alguns grupos demoraram um tempo além do que estava previsto para este item, sendo necessária a intervenção da professora para que a atividade pudesse continuar. Alguns alunos que participaram desta etapa, não realizaram a construção por meio de dobraduras, uma vez que alguns desses faltaram de fato no dia da realização da atividade e outros ainda foram transferidos para GVF neste interim.

Quadro 4 – Folha 1 (Experimentação)

Colégio Estadual Dr. Galdino do Valle Filho e
Trabalho de RPM – Profª Eliane Werneck - Turmas: 902
Atividade Colaborativa em grupos com 4 alunos para estudo de TCC (Tangram) – 4 tempos de aula
Grupo: ____
____ NF: ____/09/23

USANDO AS PEÇAS DO TANGRAM, FAÇA O QUE É PEDIDO A SEGUIR. REGISTRE NA FOLHA SUAS CONCLUSÕES

1) Considere cada peça do tangram de acordo com a legenda:
TG – triângulo grande - TP – triângulo pequeno - Q – quadrado
TM – triângulo médio - P – paralelogramo

Neste primeiro momento usaremos a medida do cateto pequeno igual a 1, ou seja, ele será a unidade de comprimento. A partir de então determine as medidas pedidas a seguir:

a) Hipotenusa de TP ______________
b) Cateto de TM_________________
c) Hipotenusa de TM ______________
d) Lado de Q __________________
e) Cateto de TG ________________
f) Hipotenusa de TG _____________
g) Lado menor de P ______________
h) Lado maior de P ______________

2) Usando duas peças do tangram forme: (faça os desenhos ilustrativos)

a) Um quadrado
b) Um triângulo
c) Um paralelogramo

- Você usou peças iguais para formar as três figuras? ( ) SIM ( ) NÃO
- Quais peças você usou? ____

Responda:

- O que você pode dizer sobre a área dessas três figuras?
( ) SÃO TODAS IGUAIS ( ) SÃO TODAS DIFERENTES ( ) DUAS SÃO IGUAIS

- O que você pode dizer sobre o perímetro dessas três figuras?
( ) SÃO TODAS IGUAIS ( ) SÃO TODAS DIFERENTES ( ) DUAS SÃO IGUAIS

==
Considere a medida do cateto do triângulo pequeno igual a 1 unidade de comprimento, determine quanto vale a área e o perímetro de cada uma das figuras que você construiu

a) Quadrado: área ____________ perímetro _____________
b) Triângulo : área _____________ perímetro _____________
c) Paralelogramo : área ______________ perímetro _____________

3) Existem algumas maneiras de formar um trapézio usando apenas duas peças. Apresente duas maneiras distintas Explique como. (faça os desenhos ilustrativos)

Fonte: a autora, 2023

Quadro 5 – Folha 2 (Experimentação)

Colégio Estadual Dr. Galdino do Valle Filho e
Trabalho de RPM – Profª Eliane Werneck - Turmas: 902
Atividade Colaborativa em grupos com 4 alunos para estudo de TCC (Tangram) – 4 tempos de aula
Grupo: ____
____ NF: ____/09/23

- Como você classifica os trapézios formados com as duas peças do tangram que vocês escolheram? ____

- O que você pode dizer ao comparar as áreas dessas duas figuras?
( ) SÃO IGUAIS ( ) SÃO DIFERENTES

- O que você pode dizer sobre o perímetro dessas duas figuras?
( ) SÃO IGUAIS ( ) SÃO DIFERENTES

===

Considere a medida do cateto do triângulo pequeno igual a 1 unidade de comprimento, determine quanto vale a área e o perímetro de cada uma das figuras que você construiu:
1º trapézio : área : ____________ perímetro ____________
2º trapézio: área : ____________ perímetro ____________

4) Escolha três peças do tangram para formar: (faça os desenhos ilustrativos)
   a) Um triângulo
   b) Um trapézio
   c) Um retângulo

- Quais peças você utilizou? ____
- Qual tipo de triângulo e de trapézio você formou? ______________________________

Responda:

- O que você pode dizer sobre a área dessas três figuras?
( ) são todas iguais ( ) são todas diferentes ( ) 1 e 2 são iguais ( ) 1 e 3 são iguais ( ) 2 e 3 são iguais

- O que você pode dizer sobre o perímetro dessas três figuras?
( ) são todas iguais ( ) são todas diferentes ( ) 1 e 2 são iguais ( ) 1 e 3 são iguais ( ) 2 e 3 são iguais

===

Considerando a medida do cateto do triângulo pequeno igual a L, escreva a sentença algébrica que representa a área e o perímetro de cada uma das figuras que você construiu:
(use o teorema de Pitágoras para determinar a medida da hipotenusa do triângulo pequeno)

a) Triângulo: área ___________ perímetro ___________
b) Trapézio : área ___________ perímetro ___________
c) Retângulo : área ___________ perímetro ___________

5) Escolha 4 peças do tangram forme : (apresente os desenhos ilustrativos)

a) Um triângulo

b) Um quadrado

c) Um trapézio retângulo

d) Um trapézio isósceles

Fonte: a autora, 2023

Quadro 6 – Folha 3 (Experimentação)

Colégio Estadual Dr. Galdino do Valle Filho e
Trabalho de RPM – Profª Eliane Werneck - Turmas: 902
Atividade Colaborativa em grupos com 4 alunos para estudo de TCC (Tangram) – 4 tempos de aula
Grupo: ____
____ NF: ____/09/23

- Algumas das figuras formadas têm a mesma área? ( ) sim ( )não. Em caso afirmativo diga quais. ____
- Algumas das figuras formadas têm perímetros iguais? ( )sim ( ) não. Em caso afirmativo diga quais ____

6) Use quantas peças quiser e forme duas figuras que tenham o mesmo perímetro. (faça os desenhos ilustrativos). Em seguida determine a área de cada uma delas, usando a medida do cateto pequeno como a unidade de comprimento.

7) Usando todas as peças do tangram, construa:
   a) Um quadrado
   b) Um triâgulo
   c) Um trapézio Isósceles
   d) Um trapézio Retângulo
   e) Um retângulo
   f) Um paralelogramo

   É verdadeiro dizer que todas as figuras têm a mesma área? ( ) sim ( ) não
   É verdadeiro dizer que todas essas figuras têm o mesmo perímetro? ( ) sim ( ) não
   ==

Usando as observações que foram feitas com as peças do tangram, classifique cada uma das sentenças a seguir como VERDADEIRAS OU FALSAS

A) É possível formar figuras planas com mesma área e perímetros diferentes ___________________________

B) É possível formar figura planas com mesmo perímetro e áreas diferentes ___________________________

C) Se duas figuras planas têm mesma área então o perímetro delas também será igual ___________________

D) Se duas figuras têm mesmo perímetro então a área delas também será igual _______________________

E) Se uma figura for decomposta em partes, sua área não se altera _________________________________

F) Se uma figura for decomposta em partes, seu perímetro não se altera ____________________________

G) Usando as peças do tangram é possível construir triângulo isósceles _____________________________

H) Usando as peças do tangram é possível construir triângulo equilátero ____________________________

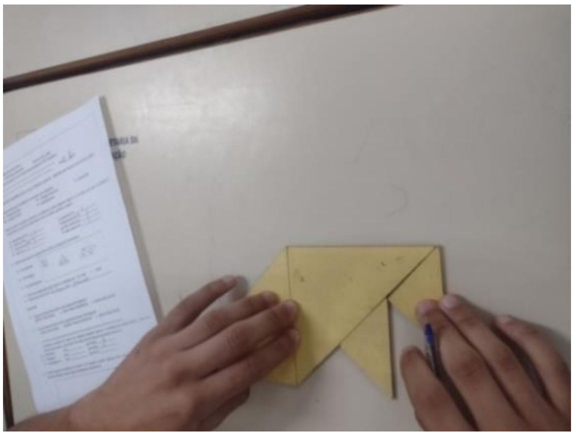
Fonte: a autora, 2023

Parte do processo de construção pode ser observada nas Figuras 39, 40, 41 e 42 que apresentam diferentes etapas e que foi realizada por grupos distintos. Inicialmente, quando era perguntado aos alunos: “Qual a “medida” do cateto ou da hipotenusa do triângulo?”, alguns se apressaram para pegar a régua e a partir de então usar este instrumento de medida para dar a resposta. Neste momento se fez necessária a interversão a fim de esclarecer o real sentido da palavra “medir”, e que o “metro”, “centímetro” e “milímetro” são termos que adotamos quando utilizamos uma das unidades de medida, no caso o metro (EF04MA20). Mas que esta não é a única unidade que pode ser usada para medir comprimento. Foi necessário fazer novamente um breve resumo oral sobre diferentes unidades de medidas, não apenas de comprimento, mas também de outras grandezas, de modo que os alunos entendessem que a unidade adotada também depende da grandeza que será medida (EF05MA19).

Nesta etapa foi possível revisitar conceitos e propriedades, especialmente de triângulos e quadriláteros. Retomando o conceito de “medir”, deixando claro para os alunos que para “medir” é preciso que seja definido anteriormente um parâmetro, ou seja, algo que será considerado a unidade de medida, seja ela de comprimento, de área, ou de qualquer outra grandeza que se deseja medir. E a partir de então verificar se outra coisa de mesma natureza é maior ou menor que o parâmetro e verificar quantas vezes o é. Além disso, foi necessário evidenciar que é possível se modificar o referencial, ou seja, a unidade de medida, e deste modo poderá haver mudanças numéricas em relação ao objeto que está sendo analisado, uma vez que o parâmetro foi mudado.

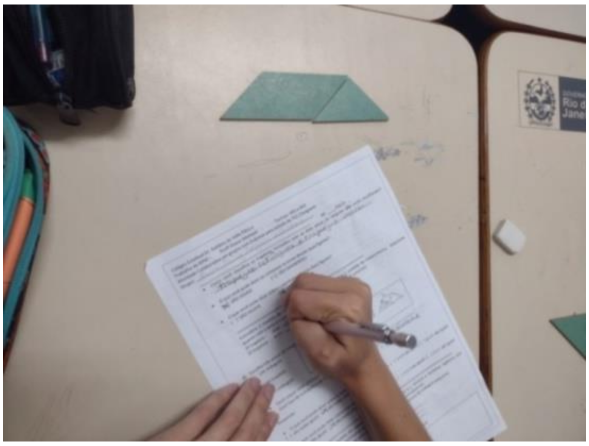
Outro desafio observado no processo de experimentação se deu com a utilização do número irracional, pois uma vez definida a unidade (EF09MA01), como sendo a menor das medidas observadas, outras medidas seriam iguais a ela, ou múltiplas, e que em alguns casos não era possível determinar essa multiplicidade. Mesmo usando o teorema de Pitágoras e verificando que alguns lados seriam números irracionais, alguns grupos tiveram resistência para usar esse número, conforme pode ser observado na Figura 42, quando o grupo apresenta a medida do TM igual a “2,7 cm”. Este foi mais um desafio a ser ultrapassado neste trabalho.

Figura 39 – Grupo A “medindo” a hipotenusa do TG



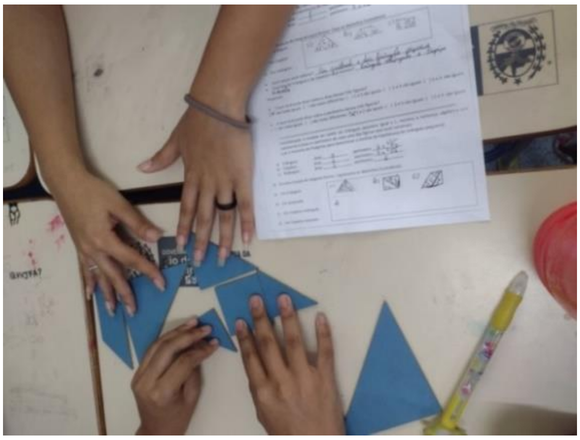
Fonte: a autora, 2023

Figura 40 – Grupo B analisando trapézio com 2 peças



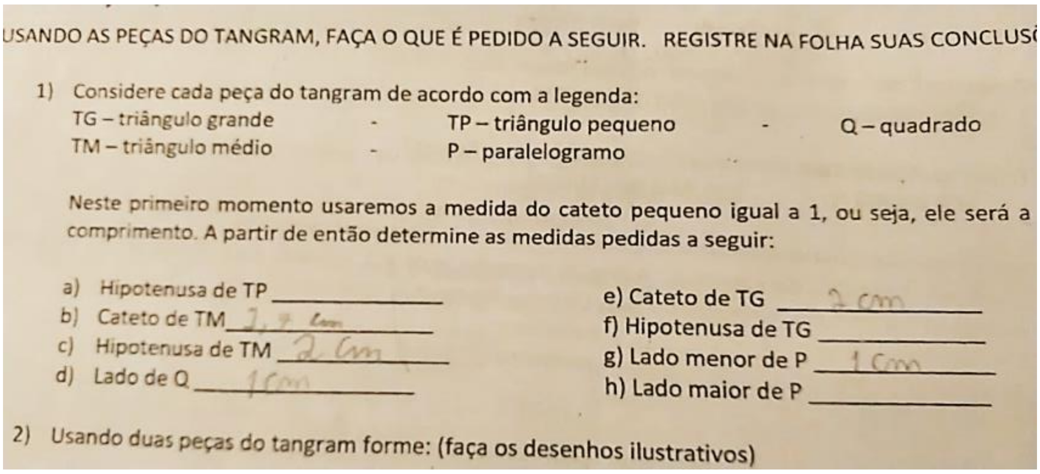
Fonte: a autora, 2023

Figura 41 – Grupo C tentando construir figuras com 4 peças



Fonte: a autora, 2023

Figura 42 – TM representado como número racional



USANDO AS PEÇAS DO TANGRAM, FAÇA O QUE É PEDIDO A SEGUIR. REGISTRE NA FOLHA SUAS CONCLUS

1) Considere cada peça do tangram de acordo com a legenda:
TG – triângulo grande - TP – triângulo pequeno - Q – quadrado
TM – triângulo médio - P – paralelogramo

Neste primeiro momento usaremos a medida do cateto pequeno igual a 1, ou seja, ele será a comprimento. A partir de então determine as medidas pedidas a seguir:

a) Hipotenusa de TP ______
b) Cateto de TM 1,4 cm
c) Hipotenusa de TM 2 cm
d) Lado de Q 1cm
e) Cateto de TG 2 cm
f) Hipotenusa de TG ______
g) Lado menor de P 1 cm
h) Lado maior de P ______

2) Usando duas peças do tangram forme: (faça os desenhos ilustrativos)

Fonte: a autora, 2023

O desenvolvimento do trabalho, na fase da experimentação, sofreu algumas alterações e modificações frente ao que foi planejado. O trabalho ficou parcialmente comprometido, de modo especial em relação à continuidade do mesmo, pois teve início com a construção do Tangram por meio das dobraduras e do processo comparativo de medidas, entretanto sofreu interrupções devido ao período de greve, recesso escolar e provas externas, aplicadas nas turmas nos dias de aula, atrasando assim a pesquisa e alterando a fluidez do processo. Além de necessitar de adequações dos grupos devido à transferência de alunos neste processo.

No decorrer do processo de construção e experimentação foram necessárias também algumas intervenções para relembrar a classificação dos quadriláteros (EF06MA20), pois alguns grupos ainda estavam confundindo trapézios com paralelogramos, bem como a diferença entre área e perímetro. A proposta deste experimento é também a de consolidar e ensinar aos alunos que uma figura que é decomposta em outras figuras, preserva a sua área original (EF07MA32), mas o mesmo não ocorre em relação ao perímetro, das figuras originais. Para este fim, foram dadas, as oportunidades aos alunos de construírem formas diferentes, usando as mesmas peças do Tangram, e a partir daí, perceber que fazendo apenas a realocação das peças, as áreas das figuras formadas não se alterariam e que em contra partida os perímetros, sim.

A partir das construções repetitivas, do mesmo grupo de figuras geométricas, os alunos foram percebendo e se apropriando de algumas características dos polígonos, e consolidando a nomenclatura e classificação dos diferentes tipos de quadriláteros. A dinâmica era desenvolvida respeitando o tempo de aprendizagem de cada grupo, sendo o papel da professora uma espécie de coordenadora e motivadora, que estava orientando aos grupos para que seguissem o roteiro, a fim de concluírem, fase a fase, o que era previsto. Além disso, era importante deixar que os alunos percebessem o que estavam construindo e estimulando o raciocínio e a escrita matemática.

As interferências, durante o processo, eram feitas conforme, sobretudo, havia necessidade. Através da observação daquilo que era falado, pelos integrantes dos grupos, a autora seguia em direção do mesmo para verificar se aquilo de fato havia sido registrado. Foi percebido que muitas vezes, os grupos montavam as diferentes figuras pedidas, usando o Tangram, mas não faziam esse registro na ficha, nem tão pouco as observações que eram solicitadas naquele determinado item. Em outras oportunidades, eles verbalizavam a respeito da medida da área ou do perímetro, mas também não registravam. Por este motivo, parte da avaliação foi realizada de modo informal, apenas a partir da observação e da produção oral por parte dos alunos.

Inicialmente a observação era feita à distância, na tentativa de dar maior liberdade para que os alunos pudessem se expressar como achasse conveniente. No entanto foi possível perceber que por muitas vezes eles apenas faziam o registro oral e não deixavam o registro na folha, que posteriormente seria analisada. Foi a partir daí que houve necessidade de observar mais de perto os grupos e incentivar os registros escritos.

4.5 **Validação (análise *a posteriori)***

Devemos lembrar que, segundo a Engenharia Didática, a validação se dá por meio da comparação entre aquilo que foi aferido na etapa das análises prévias com as análises feitas após a experimentação, ou seja, nas análises *à posteriori*. Frente a isso, devemos observar se houveram ou não progressos obtidos pelos alunos, para que deste modo, em caso positivo, seja dada a validação do processo.

Tendo em vista que a prática do registro do pensamento, bem como o modo de escrita matemática foram ações amplamente estimuladas por este trabalho, foi possível perceber a evolução dos alunos, sejam em relação à utilização adequada das palavras, ou das diferentes formas de expressar o pensamento. É factível que os alunos perceberam a importância de ir registrando passo-a-passo os seus pensamentos, percebendo que deste modo iam construindo o conhecimento de maneira integral e cooperativo.

O manuseio constante do material tornou a apropriação tanto de vocabulário quanto de conceito algo dinâmico. Foi possível perceber vantagens com a utilização do Tangram, tendo em vista que ao usavam repetidamente o material, transladando ou rotacionando as peças, os alunos iam percebendo algumas propriedades dos quadriláteros. Outra vantagem foi a de oportunizar a redução da concepção de uma figura geométrica a partir de sua imagem pictórica. Pode-se citar como exemplo, um grupo que ao construir um triângulo usando três peças, não conseguiu perceber que se tratava de tal figura, pois, nas palavras dos alunos: "ele estava torto". Sendo necessária nova intervenção, a fim de retomar o conceito e esclarecer que não importa o quanto ela está ou pareça "torta", que para ser um triângulo, basta que seja um polígono e que tenha três lados.

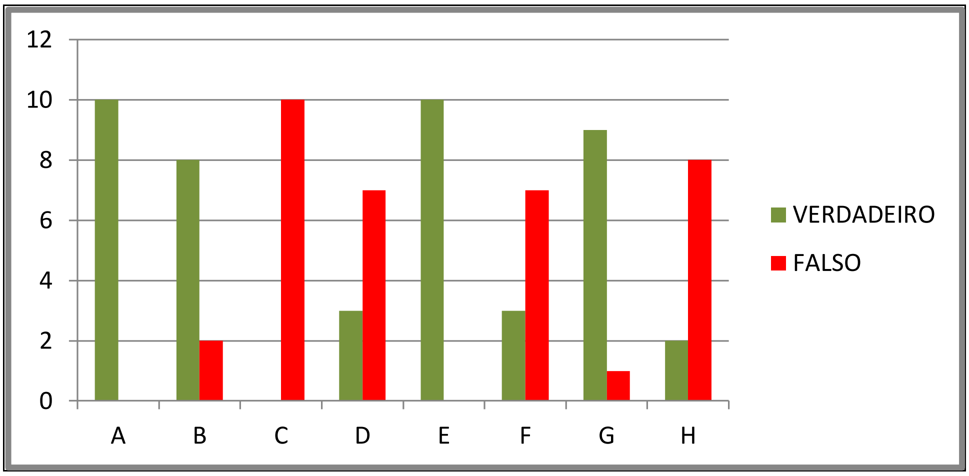
O processo de aprendizagem de modo colaborativo é muitas vezes um desafio, tanto para professores quanto para alunos. As pessoas, de modo geral, preferem trabalhar apenas com seus "pares". Os alunos querem formar grupo de amigos e não grupos de trabalho, onde possivelmente haverá diversidade e divergência. Para que este trabalho pudesse acontecer foi preciso inicialmente negociar com os alunos, para que aceitassem formar os grupos propostos. Ao final, entretanto, grande parte dos alunos, viu o grupo como algo positivo, pois na diversidade foi possível acontecer o crescimento de todos, pois se completavam. Outra parte, no entanto, classificou como negativa a experiência de formação de grupos sem que fosse por afinidade.

Trabalhar e respeitar a diversidade se mostra cada dia mais necessário na nossa sociedade. Aprender o momento de ouvir e de falar. Aprender a respeitar a opinião do outro, ainda que seja diferente da sua, se faz cada vez mais necessário e importante. Aprender que a opinião de alguém pode e será aceita e respeitada se a pessoa tiver os argumentos que assegurem a mesma, entender e aprender como criar tais argumentos. Tendo em vista uma sociedade, que se apresenta cada dia, mais agressiva e intolerante, criar ambientes de debate e escuta se torna cada vez mais urgente. Com este trabalho, os alunos puderam exercer esse papel de ouvintes e locutores e assim perceber que não é através da força que se convence, e sim por meio de argumentos sólidos.

Ao final da experimentação, havia uma espécie de avaliação, onde os alunos, a partir das análises feitas, ao longo de todo o processo de construção, deveriam chegar às conclusões; sobre comparações, verificando se as afirmativas apresentadas eram “verdadeiras” ou “falsas”. Essas análises referiam-se a respeito da medida de áreas e perímetros de figuras poligonais planas, tendo em vista que este é objetivo que leva o nome desta pesquisa.

Analisando as respostas, dadas pelos 10 grupos de alunos, que participaram da etapa completamente, nota-se que os conceitos referentes à área de uma figura, bem como sua conservação, independente dos possíveis “cortes” que uma figura geométrica plana possa sofrer, foi bem assimilado pelos alunos. Entretanto em relação aos conceitos referentes ao cálculo e comparações de perímetro das figuras planas abordadas, alguns grupos apresentaram dúvidas, não apenas durante o processo de construção do conhecimento, mas também ficou evidenciada a falta de assimilação, fato verificado mediante observação das respostas dadas pelos alunos, na fase final. A seguir está o Gráfico 8, produzido a partir da análise das respostas dadas pelos grupos.

Gráfico 8 – “Avaliação” final



Fonte: a autora, 2024

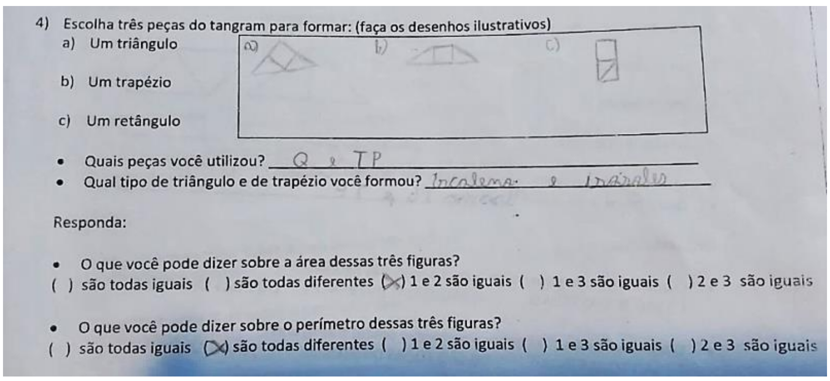
Analisando cada item, indicado na avaliação, foram concluídas as seguintes questões:

A) Todos os grupos chegaram à conclusão que é possível formar figuras planas com mesma área e perímetros diferentes;
B) 80% os grupos chegaram à conclusão que é possível formar figuras planas com mesmo perímetro e áreas diferentes;
C) Todos os grupos perceberam que não há obrigatoriedade de manutenção de perímetros de figuras que possuam mesma área;

D) Três grupos afirmaram, equivocadamente, que se figuras têm mesmo perímetro, então terão áreas iguais;
E) Em relação à decomposição de figuras haver a manutenção da área original, todos os grupos compreenderam tal conceito;
F) Em relação à manutenção do perímetro, em relação à decomposição de uma figura, três grupos, julgaram, erroneamente, ser verdadeira a sentença;
G) Para surpresa da professora, um grupo respondeu que não era possível formar triângulo isósceles usando as peças do Tangram. Tal resposta foi surpreendente, tendo em vista que por muitas vezes, foi esclarecido e falado, que os triângulos formados com as peças do Tangram eram sempre do tipo “isósceles e retângulo”;
H) Dois grupos, disseram ser possível construir triângulo equilátero. Um dos grupos foi o mesmo que errou a questão do item anterior.

Durante a experimentação, os grupos de alunos tiveram a oportunidade revisitar os conceitos previstos para esta pesquisa. Apesar das atividades propostas terem sido produzidas apresentando um caráter construtivo e cumulativo, alguns grupos se perderam no processo. Na Figura 43, é possível verificar que o grupo atendeu à primeira ação, de construir as três diferentes figuras usando as mesmas três peças, entretanto, eles não conseguiram verificar que por este motivo os três polígonos teriam áreas iguais, e nem tão pouco verificar que as duas primeiras figuras, por eles construída tinham mesmo perímetro. Tendo se confundido também em relação à classificação do triângulo e do quadrilátero

Figura 43 – Grupo não verificou corretamente relação entre área e perímetro das figuras produzidas


4) Escolha três peças do tangram para formar: (faça os desenhos ilustrativos)
a) Um triângulo
b) Um trapézio
c) Um retângulo

- Quais peças você utilizou? Q e TP
- Qual tipo de triângulo e de trapézio você formou?

Responda:

- O que você pode dizer sobre a área dessas três figuras?

( ) são todas iguais ( ) são todas diferentes (X) 1 e 2 são iguais ( ) 1 e 3 são iguais ( ) 2 e 3 são iguais

- O que você pode dizer sobre o perímetro dessas três figuras?

( ) são todas iguais (X) são todas diferentes ( ) 1 e 2 são iguais ( ) 1 e 3 são iguais ( ) 2 e 3 são iguais

Fonte: a autora, 2023

Em todo método, ou procedimento, utilizado no processo ensino-aprendizagem, há falhas e, em relação a esta experiência não foi diferente. Contratempos, tais como a greve, ou mesmo a resistência inicial dos alunos em aderir ao trabalho proposto, foram fatores que contribuíram para a validação parcial do experimento. Baseando-se, entretanto, neste grupo analisado, que a utilização do Tangram como material de apoio para a aprendizagem em fixação de conceitos geométricos foi de grande valia. Tendo em vista, a análise efetivada na primeira etapa do processo, onde os alunos não conseguiram expressar o que sabiam, ou achavam que sabiam; a avaliação final, juntamente com as avaliações feitas a partir da observação da autora durante a experimentação, exprimem tal avanço, seja ele em relação a apropriação de vocabulário adequado, aprendizagem de registros e até mesmo na aferição das medidas das áreas ou perímetros de figuras poligonais.

Alunos, pais e até mesmo professores e profissionais da educação têm resistência a métodos não convencionais para o ensino, de modo particular o ensino da Matemática. Ouve-se comumente, que o aluno de hoje não é como o aluno de “antigamente”, que é preciso repensar as formas de ensinar, de pensar nesse aluno “globalizado”, de novas técnicas ou estratégias para ensinar essa “geração” Mas será que de fato o aluno mudou? Será que os alunos e pais estão preparados para inovações dentro da escola? Será que os professores estão capacitados ou se capacitando para abdicar de suas convicções em relação à sala de aula e promover ações inovadoras? Repensar sobre essas questões nos faz voltar ao início do processo onde devermos fazer novos questionamentos e gerar novas teses.

Acreditamos que a sala de aula, deve ser um lugar de intercâmbio, sejam elas na relação professor-aluno ou aluno-aluno. Atividades lúdicas, colaborativas fomentam ações que colaboram para uma melhor interlocução entre as partes. É neste universo da aprendizagem cooperativa que o professor deixa a posição de mero transmissor de conteúdos e abre para os alunos a possibilidade de uma verdadeira aprendizagem, formando assim novos alunos, e estes, ao lado dos professores, tornam-se também sujeitos na construção e reconstrução de seus saberes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A grande maioria dos alunos do GVF ficou durante os anos de 2020 e 2021 sem nenhum, ou quase nenhum, contato com a escola e/ou com os conteúdos apresentados. Nem mesmo tiveram acesso às plataformas digitais ou apostilas impressas e não tiveram apoio familiar para desenvolver e ampliar seus conhecimentos educacionais. Um fator que agravou o problema foi a “promoção automática”, de série/ano, decretada pelo governador do estado, nas resoluções 5879 de 13 de outubro 2020 e 6015 de 10 de dezembro de 2021, acontecendo na prática uma promoção de dois anos escolares dentro do processo educacional sem nenhum tipo de ajuste ou adaptação dos conteúdos programáticos. Sendo assim, tivemos em 2022, quase na totalidade, alunos que estavam no 8º ano, mas que de fato, haviam efetivamente concluído e estudado apenas os tópicos do Ensino Fundamental 1 (5º ano) em 2019.

Em 2022, a escola funcionou com três turmas de 8º ano, e em cada uma delas contou com diferentes professores, que lecionaram as disciplinas de Matemática com 4 tempos e de Resolução de Problemas Matemáticos com 2 tempos, respectivamente. Deste modo, os alunos, das diferentes turmas tiveram acesso a conteúdos diversos, pois cada professor elaborou seu planejamento próprio, na tentativa de reduzir os danos provocados pelo período pandêmico. Isso fez com que os alunos promovidos para o ano seguinte, 9º ano, estivessem em níveis diferentes no que se refere ao conteúdo programático da disciplina de Matemática. Estes alunos constituem o grupo de estudo analisado nesta Dissertação.

No ano letivo de 2023, iniciou-se a pesquisa apresentada nesta Dissertação, com alunos do 9º ano do GVF, ou seja, alunos que foram aprovados das três turmas de 8º ano (70%), juntamente com alunos que ficaram reprovados no 9º ano (20%) em 2022 e ainda alguns outros alunos que foram transferidos (10%) de outras unidades escolares da região. As turmas de 9º ano foram formadas reagrupando aleatoriamente esses alunos e distribuindo-os nas duas turmas existentes. Tendo-se deste modo, turmas “grandes”, para os padrões locais - em torno de trinta alunos - além de totalmente heterogêneas.

No início do ano de 2023, como de costume, foi feita uma breve avaliação diagnóstica, com esses alunos, a fim de verificar os conteúdos apreendidos por eles, e o resultado foi de fato crítico e preocupante. A partir de então foi possível verificar que a maior parte da turma não tinha conhecimento básico, a respeito de conteúdos de

Aritmética, Álgebra ou Geometria. Além disso, eles apresentavam um vocabulário muito empobrecido e não dominavam, de modo geral, o vocabulário matemático necessário e adequado para um aluno de conclusão de ciclo, ou seja, de alunos de 9º ano. Por esses e outros motivos, esta Dissertação se iniciou com o objetivo de atenuar os danos, pedagógicos matemáticos, causados de modo específico pela pandemia; além de reforçar diariamente a necessidade de aplicação de vocabulário adequado, bem como a apropriação dos conceitos por trás de cada palavra usada no campo da Matemática.

Uma das questões da avaliação diagnóstica era justamente para que o aluno pudesse definir, ou explicar usando suas próprias palavras, o que ele entendia por uma série de termos elencados numa lista de 24 palavras, tais como: triângulo, quadrado, ângulo reto, retas paralelas, diagonal, ponto médio, paralelogramo, trapézio, congruente, cateto etc. Não foi raro verificar que alguns alunos não conheciam muitas das palavras elencadas, outros tinham a ideia fundamentada de forma incorreta. Por exemplo, alguns alunos definiram triângulo como sendo "uma figura de três lados iguais", outros como "uma figura que tem uma parte reta e outras duas inclinadas". Essas respostas deixam claro que os conceitos, em especial os geométricos, estavam mal alicerçados nos alunos, e que era de fundamental importância que essas lacunas e inconsistências fossem sanadas, caso contrário seria um agente impeditivo para a apropriação e entendimento de outros conceitos mais profundos.

Ao final de todas as etapas do trabalho foi possível perceber uma mudança em relação à postura dos alunos, sejam elas no campo afetivo ou no campo cognitivo. Foi percebida uma mudança de atitude significativa, de modo positivo, em relação ao aumento da responsabilidade e pró-atividade por parte dos alunos. Podemos citar como exemplo a própria organização da sala para as atividades, no início do processo era morosa e desgastante, mas que foi assimilado e, nas últimas atividades, ao chegar à sala, a mesma já estava com os grupos de modo organizado, aguardando a tarefa do dia. Outro aspecto positivo observado foi em relação ao aumento do respeito mútuo, entre os alunos, nos momentos de falar e ouvir os colegas. Os alunos começaram também a desenvolver o hábito de registrar aquilo que estava sendo verificado, ainda que fosse um registro informal. Manifestando também neles, a iniciativa de apresentar as respostas a partir da linguagem oral, explicando aquilo que foi e de que modo que foi pensado.

Refletindo sobre o objetivo principal a que se destina esta Dissertação, ou seja, a apropriação dos conceitos de área e perímetro de figuras planas, é perceptível a evolução atingida. Tomando como ponto de partida a avaliação diagnóstica, de modo geral, os alunos tiveram considerável avanço. Passaram a compreender tais conceitos, fato este percebido na linguagem deles, por exemplo, ao notarem algum exercício com certa imagem que fosse poligonal não convexa, logo diziam que para calcular a área eles iriam "dividir" ou "recortar" a figura, para formar outra que fosse retangular ou triangular. Havendo, entretanto, algumas lacunas que precisaram ser fechadas em relação ao perímetro.

O Tangram foi também um aliado importante para a compreensão a respeito dos números irracionais, bem como a sua aproximação para um número racional. No início do processo, os alunos tiveram a tendência de relacionar a medida da hipotenusa do TP com um número racional. A partir da aferição e utilização do teorema de Pitágoras, nos triângulos do Tangram, eles foram percebendo que se tratava de um número irracional, e que até seria possível usar uma aproximação, mas sem perder de vista a diferença entre "ser" um número racional e ser a "aproximação" de um número racional. A consolidação do conceito de número irracional, bem como operação de adição entre eles, pôde ser fortalecida nas atividades propostas.

Em relação à dissociação de uma figura geométrica com sua imagem pictórica, também se percebe enorme progresso, haja vista que, no início do processo, os alunos mudavam de opinião a respeito de uma figura pelo simples fato da rotação da mesma, citando como exemplo, um quadrado que automaticamente virava um "losango" a partir do momento que era apresentada uma rotação de 45º do mesmo. A manipulação do material eles foram notando e perceberam que uma figura não deixa de ser a mesma pela simples rotação ou translação. Foi possível assegurar que, por exemplo, a classificação de algum quadrilátero, estará atrelada às suas características e propriedades; e que as rotações, e translações não deformam esta figura, e por consequência não altera sua forma original, nem tão pouco sua nomenclatura.

De modo geral, acreditamos que houve mais vantagens do que desvantagens em todo o processo analisado. Apesar de todos os obstáculos, principalmente no início da experiência, foi observada, pela autora, uma evolução da maior parte dos alunos analisados, validando assim com a tese de que jogos, em especial o Tangram, utilizado em sala de aula como meio de promover a aprendizagem, se apresentando eficiente, neste grupo analisado.

Conforme a metodologia da Engenharia Didática, a pesquisa não se encerra aqui. Temos um processo contínuo, sendo assim, tomaremos como ponto de partida as análises "*a posteriori*" e faremos novas hipóteses, tornado a pesquisa este "ciclo sem fim”. Nossa proposta é confeccionar um material didático, voltado para professores da Educação Básica: Ensino Fundamental Anos Finais e Ensino Médio, com atividades que possam ser aplicadas em sala de aula, nos diferentes anos e séries, nos diversos ciclos. Deste modo, será possível abordar diferentes conteúdos programáticos e também diferentes níveis de dificuldades. E assim conseguir atingir mais crianças e jovens, para que possam ver a Matemática além das fórmulas, atraindo maior interesse e reduzindo o medo e a ansiedade que a disciplina desperta na maioria deles.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. **Engenharia Didáctica.** In: BRUN, J. (org). Didática das Matemáticas. Tradução de: Maria Jose Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap. 4, p. 193-217.

BARROS, J. J. P. **Além da Geometria – O Tangram como ferramenta didática para a Matemática doEnsino Fundamental.** 2016. 73p. (Trabalho de Conclusão de Curso – Mestrado PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística UNIRIO, Rio de Janeiro, 2016.

BERENGUER, M. I. S. **Aplicação da Engenharia Didática no ensino das ciências exatas**. 2010. Disponível em: <http://www.avm.edu.br/docpdf/monografias_publicadas/t205982.pdf>. Acesso em 27 jun. 2023.

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas**: uma estratégia para as aulas de Matemática. 3ª edição. São Paulo: IME/USP, 1998.

BORTONI-RICARDO, S. M. **O professor pesquisador –** Introdução à pesquisa qualitativa. São Paulo: Editora Afiliada, 2015.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Ministério da Educação. Brasília. 2018.

_______ **Divulgados dados sobre impacto da pandemia na educação**. Disponível em:<https://www.gov.br/inep/pt-br/assuntos/noticias/censo-escolar/divulgados-dados-sobre-impacto-da-pandemia-na-educacao>. Acesso em: 03 set. 2023.

_______ **Impactos da pandemia na educação no Brasil**. Dispoível em: <https://www12.senado.leg.br/institucional/datasenado/materias/pesquisas/impactos-da-pandemia-na-educacao-no-brasil>. Acesso em: 03 dez. 2023.

_______**Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional.** *Diário oficial [da] República Federativa do Brasil,* Brasília, DF, 23 de dez. 1996. Seção 1. P.27.833.

______**Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática./Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília, 1997.

CIRÍACO, F.L. **Utilizando jogos para ensinar Matemática**. Revista Educação Pública, Rio de Janeiro, v.22, nº 34, 13 de setembro de 2022. Disponível em: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/22/34/utilizando-jogos-para-ensinar-matematica>. Acesso em: 13 nov. 2023.

COUTINHO, C Q.S. **Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos.** (artigo programa de pós graduados em Educação Matemática PUC/SP). Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2008v3n1p62>. Acesso em: 25 jul. 2023.

ESPAÇO EDUCAR. Disponível em: **Tipos de Tangram: Quais os tipos de Tangram existentes?** Disponível em: <https://www.espacoeducar.net/2016/05/tipos-de-tangram-quais-os-tipos-de>. Acesso em: 29 abr. 2023.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia – Saberes necessários à prática educativa.** 22ª edição. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

______ **Professora sim, tia não –** Cartas a quem ousa ensinar. 13ª edição. São Paulo: Olho D'Água, 1999.

FONSECA, M. C.; LOPES, M. P.; BARBOSA, M. G. G.; GOMES, M. L. M.; DAYRELL, M. M. M. **O Ensino de Geometria na Escola Fundamental –** Três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. 3ª edição. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

KISHIMOTO, T. M. (org.). **Jogos, Brinquedos, Brincadeiras e Educação.** 8ª edição. Cortez Editora.

MALDANER, A. **Educação Matemática – Fundamentos teórico-práticos para professores dos anos iniciais.** 2ª edição. Porto Alegre: Editora Mediação, 2012.

MENEZES, J. E. **Conhecimento, Interdisciplinaridade e atividades de ensino com jogos matemáticos:** uma proposta metodológica**.** Série Contexto Matemático v.5. Recife, 2008.

PARÁ, T. e JOHNSTON-WILDER, S.. **Addressing Mathematics Anxiety: A Case Study in a High School in Brazil**. Creative Education, 2023, vol 14, 377-399. Disponível em: <https://www.scirp.org/journal/paperinformation?paperid=123458.> Acesso em 01 mai.2024.

PIAGET, J. ; INHENDE, B. **A Psicologia da Criança**. 18ª edição. Bertrand Brasil, 1998.

RIO DE JANEIRO, **Resolução Seeduc Nº 5879, Estabelece de forma excepcional normas complementares para organização e reestrutura de oferta dos cursos de ensino fundamental e médio, no ano letivo de 2020 e dá providências**. 13 de outubro de 2020, publicado em D.O. do Estado do Rio de Janeiro, RJ, 14 de outubro.

______ **Resolução Seeduc Nº 6.015, Regula finalização do ano letivo de 2021.** 10 de dezembro de 2021, publicada D.O.E.R.J., RJ, em 14 de dezembro.

______ **Decreto Nº 47.801, Estabelece novas medidas de prevenção e enfrentamento da propagação do novo coronavírus (COVID 19), em decorrência da situação de emergência em saúde e, dá outras providências.** 19 de outubro de 2021, publicada em D.O. E.R.J. 19 de outubro 2021.

SANTOS, A. P. R. A.; ALVES, F. R. V.. **O cálculo de áreas: uma aplicação da engenharia didática no contexto das Olimpíadas de Matemática**. Indagatio Didactica, v. 10, n. 5, p. 199-222, 19 dez. 2018. Disponível em: <https://proa.ua.pt/index.php/id/article/view/11133>. Acesso em 27 nov. 2023.

SILVA, M.A. da; CASTRO FILHO, J.A. de. **Aprendizagem colaborativa para a construção de uma cultura de paz na escola.** IN: MATOS,K.S.A.L. de (org.). Cultura de paz, ética e espiritualidade III. Fortaleza, CE. Edições UFS, 2012. P. 144-156. Disponível em: <https://chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/49595/1/2012_capliv_masilvajacastrofilho.pdf > Acesso em: 22 dez. 2023.

SOARES, T. B. **Mágicas e Matemática.** 2017. 71f. Dissertação (Mestrado Profissional em rede nacional PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

SOARES, E. S. **Ensinar Matemática:** desafios e possibilidades. 1ª edição. Belo Horizonte: Prol Editora Gráfica, 2010.

SOUZA, M. MatheusMáthica: **Tangram oval**. Jequié, BA. 30 dez 2009. Disponível em: <http://matheusmathica.blogspot.com/2009/12/tangram-oval.html#:~:text=A%20hist%C3%B3ria%20do%20nosso%20jogo,gesso%20e%20azeite%20de%20linha%C3%A7a> .Acesso em: 29 jul. 2023.

ANEXO

Este Anexo visa apresentar as habilidades previstas na BNCC que deveriam ter sido adquiridas pelos alunos ao longo do processo educacional. Esta listagem apresenta as principais habilidades especialmente da área de Geometria, bem como o ano escolar a qual cada uma delas deve ser desenvolvida. Os alunos que participam da pesquisa, ou seja, alunos de 9º ano deveriam ter essas habilidades previamente desenvolvidas.

A proposta desta Dissertação era de revisar e/ou desenvolver nos alunos as habilidades que estão elencadas a seguir.

1 Habilidades da BNCC – Ensino Fundamental Anos Iniciais

1.1 1º ANO:

(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos.

1.2 2º ANO:

(EF02MA15) Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos.

1.3 3º ANO:

(EF03MA15) Classificar e comparar figuras planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo) em relação a seus lados (quantidade, posições relativas e comprimento) e vértices.

(EF03MA16) Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais.

(EF03MA17) Reconhecer que o resultado de uma medida depende da unidade de medida utilizada.

1.4 4 º ANO:

(EF04MA18) Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras, esquadros ou softwares de geometria.

(EF04MA19) Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de softwares de geometria.

(EF04MA20) Medir e estimar comprimentos (incluindo perímetros), massas e capacidades, utilizando unidades de medida padronizadas mais usuais, valorizando e respeitando a cultura local.

(EF04MA21) Medir, comparar e estimar área de figuras planas desenhadas em malha quadriculada, pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinho, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área.

1.5 5º ANO:

(EF05MA03) Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso.

(EF05MA04) Identificar frações equivalentes.

(EF05MA17) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.

(EF05MA18) Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais.

(EF05MA19) Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais.

(EF05MA20) Concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes.

2 Habilidades da BNCC – Ensino Fundamental Anos Finais

2.1 6º ANO:

(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.

(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.

(EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.

(EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.

(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.

2.2 7º ANO:

(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.

(EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.

(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.

(EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.

(EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.

2.3 8º ANO:

(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.

(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

2.4 9º ANO:

(EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).

(EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.

(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.