Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ

Campus Alto Paraopeba - CAP

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Francismara Fernandes Guerra

CARACTERIZAÇÃO DOS ANÉIS DE GRUPO JORDAN NILPOTENTES DE ÍNDICES 2 E 3

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Campus Alto Paraopeba da Universidade Federal de São João del-Rei como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Matemática.

Banca Examinadora:

Profa. Mariana Garabini Cornelissen Hoyos - UFSJ (Orientadora)

Profa. Viviane Ribeiro Tomaz da Silva - (UFSJ)

Prof. Rodrigo Lucas Rodrigues - Universidade Federal do Ceará (UFC)

Ouro Branco
Julho de 2024

Sumário

CARACTERIZAÇÃO DOS ANÉIS DE GRUPO JORDAN NILPOTENTES DE ÍNDICES 2 E 3

Francismara Fernandes Guerra[1]
Mariana Garabini Cornelissen Hoyos[2]

Resumo: A teoria das álgebras de Jordan teve sua origem em 1934 com o trabalho de Jordan, Neumann e Wigner(1993), cujo interesse era descobrir um novo sistema algébrico para formalizar a mecânica quântica. Hoje em dia, as álgebras de Jordan possuem conexões com as álgebras de Lie e aplicações importantes em diversas áreas, tais como, física, matemática e até em genética (MCCRIMMON, 2004). Uma álgebra é dita uma álgebra de Jordan se valem as seguintes identidades para a multiplicação: $xy = yx$ e $(x^2y)x = x^2(yx)$ (essa última é conhecida como identidade de Jordan). Uma álgebra de Jordan é nilpotente se, para algum inteiro positivo $n \geq 2$, o produto de quaisquer n elementos dessa álgebra, em uma certa ordem, é nulo. O menor n para o qual a álgebra é Jordan nilpotente é dito índice de nilpotência da álgebra. Neste trabalho estamos interessados em caracterizar quando os anéis de grupo RG com G um grupo qualquer e R um anel comutativo com identidade é Jordan nilpotente de índices 2 e 3.
Palavras-chave: Álgebra de Jordan; Jordan nilpotência; Anel de grupo.

Abstract: Jordan algebra theory starts in 1934 with the works of Jordan, Neumann and Wigner (1993), whose interest was to discover a new algebraic system to formalize quantum mechanics. Today, Jordan algebras have connections with Lie algebras and important applications in several areas, such as physics, mathematics and even genetics (MCCRIMMON, 2004). An algebra is a Jordan algebra if the following identities are verified by the multiplication: $xy = yx$ and $(x^2y)x = x^2(yx)$ (this last one is known as the Jordan identity). A Jordan algebra is nilpotent if, for some positive integer $n \geq 2$, the product of any n elements of that algebra, for a certain order, is zero. The smallest n for which the algebra is Jordan nilpotent is said to be the nilpotent index of the algebra. In this work we are interested in characterizing when the group rings RG with G any group and R a commutative ring with identity is Jordan nilpotent with indexes 2 and 3.
Key words: Jordan algebra; Jordan nilpotency; Group ring.

[1]Aluna de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2022
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - Campus Alto Paraopeba - CAP/UFSJ
E-mail: francismara.guerra@ifmg.edu.br
[2]Orientadora do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Estatística, Física e Matemática - DEFIM, CAP/UFSJ
E-mail: mariana@ufsj.edu.br

Introdução

O conceito de álgebra de Jordan foi introduzido pela primeira vez em 1934 no trabalho desenvolvido por Jordan, Neumann e Wigner (1993). O objetivo desses pesquisadores na época era descobrir um novo sistema algébrico capaz de representar a mecânica quântica. Até então, o sistema algébrico utilizado para formalizar a mecânica quântica era a álgebra de matrizes, com as operações usuais de matrizes que conhecemos. Ou seja, uma álgebra associativa mas não comutativa. Entretanto, os autores verificaram que as propriedades estatísticas das medições de um sistema de mecânica quântica se tornam mais simples quando expressas em termos de uma certa álgebra hipercomplexa comutativa mas não associativa. Surge então o conceito das álgebras de Jordan.

Hoje em dia, as álgebras de Jordan possuem conexões com as álgebras de Lie e aplicações importantes em diversas áreas da matemática: álgebra, equações diferenciais, geometria algébrica, geometria diferencial, dentre outras e também em outras áreas como física, estatística, probabilidade e até em genética (MCCRIMMON, 2004).

Neste trabalho estamos interessados em estudar a Jordan nilpotência dos anéis de grupo. Para tanto, na próxima seção, apresentamos algumas definições importantes para o entendimento desse trabalho, como os conceitos de álgebra e álgebra de Jordan. Já na Seção 2 definimos a álgebra de Jordan com a qual iremos trabalhar que são os anéis de grupo. E, finalmente, na seção seguinte apresentamos a propriedade específica que estamos interessados em estudar nestas álgebras que é a sua Jordan nilpotência e discorremos sobre os resultados já obtidos em dois casos: índice 2 e índice 3.

1 Algumas definições

Nesta seção apresentamos algumas definições necessárias para o entendimento desse trabalho. Supomos do leitor um conhecimento básico sobre a teoria de anéis e de grupos. O leitor interessado pode consultar Gallian (2021).

Iniciaremos com a definição do que é uma álgebra.

Definição 1.1 *Sejam A e R anéis com identidade. Dizemos que $(A, +, .)$ é uma R-álgebra se para todos os elementos $r \in R$ e $a \in A$ temos o produto $ra \in A$ que satisfaz:*

(i) $(r_1 + r_2)a = r_1a + r_2a$

(ii) $r(a + b) = ra + rb$

(iii) $r_1(r_2a) = (r_1r_2)a$

(iv) $1_Ra = a$

(v) $r(ab) = (ra)b = a(rb)$

para todos $r, r_1, r_2 \in R$ e $a, b \in A$.

Exemplo 1.1 *O conjunto dos inteiros $(\mathbb{Z}, +, .)$ é uma $\mathbb{Z}$-álgebra, assim como o conjunto dos números reais, $(\mathbb{R}, +, .)$, é uma $\mathbb{R}$-álgebra.*

Exemplo 1.2 *O conjunto das matrizes quadradas de ordem n com entradas reais, denotado por $M_n(\mathbb{R}, +, .)$, é uma $\mathbb{R}$-álgebra associativa mas não comutativa com as operações usuais de soma, multiplicação e multiplicação por escalar (real).*

Daqui em diante chamaremos uma R-álgebra apenas por álgebra. Abaixo, apresentamos a definição dada por Jordan, Neumann e Wigner (1993) do que é uma álgebra de Jordan.

Definição 1.2 *Uma álgebra de Jordan consiste de uma álgebra $(A, +, \circ)$ munida de um produto $\circ : A \times A \to A$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $x \circ y = y \circ x$ *(comutatividade)*

(ii) $(x \circ y) \circ (x \circ x) = x \circ (y \circ (x \circ x))$ *(identidade de Jordan)*

para todos $x, y \in A$.

Observe que as álgebras de Jordan são, por definição, comutativas. Elas não precisam ser, em geral, associativas, mas, devem satisfazer a identidade de Jordan. Como exemplos de álgebras de Jordan, podemos citar:

Exemplo 1.3 *Todas as álgebras comutativas e associativas são álgebras de Jordan, como por exemplo, $(\mathbb{Z}, +, .), (\mathbb{R}, +, .), (\mathbb{C}, +, .)$ com as operações usuais.*

Exemplo 1.4 *Considere a álgebra $M_n(\mathbb{R}, +, \circ)$ definida no Exemplo 1.2, munida agora do seguinte produto:*

$$A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA)$$

onde AB e BA significam o produto usual de matrizes.

Vamos mostrar que o conjunto acima definido com esse produto é uma álgebra de Jordan.

Proposição 1.1 $(M_n(\mathbb{R}), +, \circ)$ *é uma álgebra de Jordan.*

Demonstração: Já sabemos que $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra associativa e não comutativa com a soma e multiplicação de matrizes usuais que conhecemos. Note que, dados A e $B \in M_n(\mathbb{R})$, temos:

$$\begin{aligned} A \circ B &= \frac{1}{2}(AB + BA) \\ &= \frac{1}{2}(BA + AB) = B \circ A \end{aligned}$$

o que prova que $(M_n(\mathbb{R}), +, \circ)$ é uma álgebra comutativa com o produto $\circ$. Agora, mostremos a identidade de Jordan:

$$\begin{aligned}(A \circ B) \circ (A \circ A) &= \frac{1}{2}(AB + BA) \circ \frac{1}{2}(A^2 + A^2)\\ &= \frac{1}{2}[(AB + BA) \circ A^2]\\ &= \frac{1}{4}[(AB + BA)A^2 + A^2(AB + BA)]\\ &= \frac{1}{4}[ABA^2 + BA^3 + A^3B + A^2BA]\\ &= \frac{1}{2}[A\frac{1}{2}(BA^2 + A^2B) + \frac{1}{2}(BA^2 + A^2B)A]\\ &= A \circ \frac{1}{2}(BA^2 + A^2B)\\ &= A \circ (B \circ A^2) = A \circ (B \circ \frac{1}{2}(A^2 + A^2))\\ &= A \circ (B \circ (A \circ A)).\end{aligned}$$

Portanto, segue que $(M_n(\mathbb{R}), +, \circ)$ é uma álgebra de Jordan. $\square$

Vale ressaltar que o conjunto das matrizes munido com o produto de Jordan é comutativo, mas não associativo.

Outro exemplo de álgebra de Jordan que podemos citar é o conjunto de vetores em $\mathbb{R}^2$, como mostrado abaixo.

Exemplo 1.5 *O conjunto* $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ *é uma* $\mathbb{R}$*-álgebra com o produto dado por*

$$(x, y) \circ (a, b) = (xa - yb, xb + ya)$$

e a soma usual de vetores, feita coordenada a coordenada.

Observe que esse produto acima nada mais é que o produto de dois números complexos, após a identificação do par ordenado (x, y) com o número complexo $x + iy$:

$$(x + iy)(a + ib) = (xa - yb) + i(xb + ya).$$

Proposição 1.2 $(\mathbb{R}^2, +, \circ)$ *é uma álgebra de Jordan.*

Demonstração: Mostremos, inicialmente, que $(\mathbb{R}^2, \circ)$ é comutativo. Assim, dados $u = (x, y)$ e $v = (a, b)$, temos que $u \circ v$ é tal que:

$$\begin{aligned}u \circ v &= (x, y) \circ (a, b)\\ &= (xa - yb, xb + ay)\\ &= (ax - by, ay + xb)\\ &= (a, b) \circ (x, y)\\ &= v \circ u\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. Agora, verifiquemos a identidade de Jordan:

$$
\begin{aligned}
(u \circ v) \circ (u \circ u) &= [(x,y) \circ (a,b)] \circ [(x,y) \circ (x,y)] \\
&= (ax - by, xb + ay) \circ (x^2 - y^2, 2xy) \\
&= ((ax - by)(x^2 - y^2) - (bx + ay)2xy, (ax - by)2xy + (x^2 - y^2)(bx + ay)) \\
&= (ax(x^2 - y^2) - 2bx^2y - 2axy^2 - by(x^2 - y^2), 2ax^2y + bx(x^2 - y^2) + ay(x^2 - y^2) - 2bxy^2) \\
&= (x,y) \circ (a(x^2 - y^2) - 2bxy, 2axy + b(x^2 - y^2)) \\
&= (x,y) \circ [(a,b) \circ (x^2 - y^2, 2xy)] \\
&= (x,y) \circ \{(a,b) \circ [(x,y) \circ (x,y)]\} \\
&= u \circ (v \circ (u \circ u)).
\end{aligned}
$$

□

Na próxima seção iremos definir a estrutura algébrica que estamos interessados em estudar neste trabalho, os anéis de grupo.

2 Anel de grupo

Os anéis de grupo são estruturas algébricas muito interessantes que adquiriram grande importância por causa de suas aplicações à teoria de representações de grupos. A estrutura de um anel de grupo tem conexão direta tanto com a teoria de grupos quanto com a teoria de anéis, já que os resultados em anéis de grupo estão obviamente conectados com os resultados provenientes de ambas as teorias.

Definição 2.1 *Sejam G um grupo e R um anel comutativo com identidade. Definimos RG como o conjunto de todas as combinações lineares formais como descrito abaixo:*

$$\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$$

onde $g \in G$ e $a_g \in R$, sendo que a_g são quase todos nulos, exceto para um número finito deles.

Dados dois elementos $\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$ e $\beta = \sum_{g \in G} b_g g$ em RG, definimos a soma desses elementos como:

$$\alpha + \beta = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g$$

e seu produto por:

$$\alpha\beta = \sum_{g,h \in G} a_g b_h gh.$$

Também podemos definir um produto por escalar em RG por elementos de R da seguinte forma:

$$\lambda\alpha = \sum_{g \in G} (\lambda a_g g),$$

onde $\lambda \in R$.

Não é difícil mostrar que o conjunto RG com as operações de soma, produto e produto por escalar acima definidas é uma R-álgebra associativa e, em geral, não comutativa (MILIES e SEHGAL, 2002). Por causa disso, RG também é frequentemente chamado de álgebra de grupo de G sobre R.

Cabe ressaltar que o grupo G pode ser visto com um subconjunto do anel de grupo RG, isto é, $G \subset RG$, pois todo elemento g de G pode ser visto como:

$$g = \sum_{g \in G} a_h h$$

onde $a_h = 1_R$ se $h = g$ e $a_h = 0$, caso contrário. Dessa forma, temos que $g = 1_R g$, para todo $g \in G$. Além disso, observe que o anel de grupo RG também possui elemento identidade dado por:

$$1 = \sum_{g \in G} a_g g$$

onde $a_g = 1_R$ se $g = 1_G$ e $a_g = 0$, caso contrário.

Observe que se R é um anel comutativo e G um grupo abeliano, então RG é comutativo.

Para ilustrar esta estrutura algébrica, exemplificamos a seguir com o caso $R = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, o anel dos inteiros módulo 2, munido com a soma e multiplicação *mod* 2, e $G = C_3$, um grupo cíclico de ordem 3.

Exemplo 2.1 *Sejam o grupo cíclico* $C_3 = \langle g : g^3 = 1 \rangle = \{1, g, g^2\}$ *e o anel* $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$*, o anel dos inteiros módulo 2, munido com a soma e a multiplicação módulo 2. Dessa forma, o anel de grupo* $\mathbb{Z}_2 C_3 = \{a1 + bg + cg^2 | \ a, b, c \in \mathbb{Z}_2\}$ *é o conjunto:*

$$\{0, 1, g, g^2, 1 + g, 1 + g^2, g + g^2, 1 + g + g^2\}$$

com a soma e multiplicação dadas pelas tabelas abaixo.

Tabela 1: Tábua de adição do anel de grupo $\mathbb{Z}_2 C_3$

$+$	0	1	g	g^2
0	0	1	g	g^2
1	1	0	$1+g$	$1+g^2$
g	g	$1+g$	0	$g+g^2$
g^2	g^2	$1+g^2$	$g+g^2$	0
$1+g$	$1+g$	g	1	$1+g+g^2$
$1+g^2$	$1+g^2$	g^2	$1+g+g^2$	1
$g+g^2$	$g+g^2$	$1+g+g^2$	g^2	g
$1+g+g^2$	$1+g+g^2$	$g+g^2$	$1+g^2$	$1+g$

Tabela 2: Tábua de adição do anel de grupo $\mathbb{Z}_2C_3$ (continuação)

$+$	$1+g$	$1+g^2$	$g+g^2$	$1+g+g^2$
0	$1+g$	$1+g^2$	$g+g^2$	$1+g+g^2$
1	g	g^2	$1+g+g^2$	$g+g^2$
g	1	$1+g+g^2$	g^2	$1+g^2$
g^2	$1+g+g^2$	1	g	$1+g$
$1+g$	0	$g+g^2$	$1+g^2$	g^2
$1+g^2$	$g+g^2$	0	$1+g$	g
$g+g^2$	$1+g^2$	$1+g$	0	1
$1+g+g^2$	g^2	g	1	0

Tabela 3: Tábua de multiplicação do anel de grupo $\mathbb{Z}_2C_3$

$.$	0	1	g	g^2	$1+g$	$1+g^2$	$g+g^2$	$1+g+g^2$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	g	g^2	$1+g$	$1+g^2$	$g+g^2$	$1+g+g^2$
g	0	g	g^2	1	$g+g^2$	$1+g$	$1+g^2$	$1+g+g^2$
g^2	0	g^2	1	g	$1+g^2$	$g+g^2$	$1+g$	$1+g+g^2$
$1+g$	0	$1+g$	$g+g^2$	$1+g^2$	$1+g^2$	$g+g^2$	$1+g$	0
$1+g^2$	0	$1+g^2$	$1+g$	$g+g^2$	$g+g^2$	$1+g$	$1+g^2$	0
$g+g^2$	0	$g+g^2$	$1+g^2$	$1+g$	$1+g$	$1+g^2$	$g+g^2$	0
$1+g+g^2$	0	$1+g+g^2$	$1+g+g^2$	$1+g+g^2$	0	0	0	$1+g+g^2$

Podemos ter anéis de grupo finitos, como vimos no exemplo acima, como podemos ter também anéis de grupo com cardinalidade infinita.

Exemplo 2.2 *Considere o grupo* $(\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}, + \ mod\ 3)$ *e o anel dos números complexos* $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$*. Podemos construir o anel de grupo*

$$\mathbb{C}\mathbb{Z}_3 = \{c_0\bar{0} + c_1\bar{1} + c_2\bar{2} \mid c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}.$$

Vamos definir agora um outro produto $\circ$ em RG, denotado por produto de Jordan de RG, dado por:

$$\alpha \circ \beta = \alpha\beta + \beta\alpha$$

onde α e β são elementos de RG e $\alpha\beta$ é o produto usual em RG.

Proposição 2.1 $(RG, +, \circ)$ *é uma álgebra de Jordan.*

Demonstração: Para mostrar que $(RG, +, \circ)$ é uma álgebra de Jordan, precisamos mostrar que esse produto é comutativo e que cumpre a identidade de Jordan. A primeira propriedade decorre da comutatividade da soma em anéis de grupo:

$$\alpha \circ \beta = \alpha\beta + \beta\alpha = \beta\alpha + \alpha\beta = \beta \circ \alpha.$$

Já a segunda propriedade é verificada, pois:

$$\begin{aligned}(\alpha \circ \beta) \circ (\alpha \circ \alpha) &= (\alpha\beta + \beta\alpha) \circ (\alpha^2 + \alpha^2) \\ &= (\alpha\beta + \beta\alpha) \circ 2\alpha^2 \\ &= (\alpha\beta + \beta\alpha)2\alpha^2 + 2\alpha^2(\alpha\beta + \beta\alpha) \\ &= 2\alpha\beta\alpha^2 + 2\beta\alpha^3 + 2\alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta\alpha \\ &= \alpha(2\beta\alpha^2 + 2\alpha^2\beta) + (2\beta\alpha^2 + 2\alpha^2\beta)\alpha \\ &= \alpha \circ (2\beta\alpha^2 + 2\alpha^2\beta) \\ &= \alpha \circ (\beta \circ 2\alpha^2) = \alpha \circ (\beta \circ (\alpha^2 + \alpha^2)) \\ &= \alpha \circ (\beta \circ (\alpha \circ \alpha))\end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que $(RG, +, \circ)$ é uma álgebra de Jordan. $\square$

Abaixo apresentamos um resultado sobre anéis de grupo que será utilizado posteriormente.

Proposição 2.2 *Se* $(g \circ h) \circ k = 0$ *para todo* $g, h, k \in G$ *então* $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = 0$ *para todo* $\alpha, \beta, \gamma \in RG$.

Demonstração: Suponha primeiramente que α, β e γ, pertencentes à RG, tenham apenas dois coeficientes (em R) não nulos cada, isto é, suponha que $\alpha = a_1g_1 + a_2g_2, \beta = b_1h_1 + b_2h_2$ e $\gamma = c_1k_1 + c_2k_2$ com $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in R$ e $g_1, g_2, h_1, h_2, k_1, k_2 \in G$. Agora, observe que:

$$\alpha \circ \beta = \alpha\beta + \beta\alpha = (a_1g_1 + a_2g_2)(b_1h_1 + b_2h_2) + (b_1h_1 + b_2h_2)(a_1g_1 + a_2g_2).$$

Como R é comutativo, temos que:

$$\alpha \circ \beta = a_1b_1(g_1h_1 + h_1g_1) + a_1b_2(g_1h_2 + h_2g_1) + a_2b_1(g_2h_1 + h_1g_2) + a_2b_2(g_2h_2 + h_2g_2)$$

ou seja,

$$\alpha \circ \beta = a_1b_1(g_1 \circ h_1) + a_1b_2(g_1 \circ h_2) + a_2b_1(g_2 \circ h_1) + a_2b_2(g_2 \circ h_2).$$

Fazendo agora $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma$, chegamos em:

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = a_1b_1c_1(g_1 \circ h_1) \circ k_1 + a_1b_1c_2(g_1 \circ h_1) \circ k_2 + a_1b_2c_1(g_1 \circ h_2) \circ k_1 + a_1b_2c_2(g_1 \circ h_2) \circ k_2 +$$

$$+ a_2b_1c_1(g_2 \circ h_1) \circ k_1 + a_2b_1c_2(g_2 \circ h_1) \circ k_2 + a_2b_2c_1(g_1 \circ h_2) \circ k_2 + a_2b_2c_2(g_2 \circ h_2) \circ k_2.$$

Como, por hipótese, $(g \circ h) \circ k = 0$ para todo $g, h, k \in G$ então $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = 0$.

Genericamente, podemos mostrar que se $(G \circ G) \circ G = 0$ então $(RG \circ RG) \circ RG = 0$ para quaisquer três elementos em RG. $\square$

Note que, pela Proposição 2.2, se $(\cdots((g_1 \circ g_2) \circ g_3) \cdots) \circ g_n = 0$, para qualquer $g_i \in G, i = 1, 2, \ldots, n$, podemos generalizar e obter $(\cdots((\alpha_1 \circ \alpha_2) \circ \alpha_3) \ldots) \circ \alpha_n = 0$, para todo $\alpha_i \in RG, i = 1, 2, \cdots, n$.

3 Jordan nilpotência

Esta seção é dedicada à propriedade específica que queremos estudar dos anéis de grupo: a Jordan nilpotência.

Definição 3.1 *Seja $(A, +, \circ)$ uma álgebra de Jordan. Dizemos que A é Jordan nilpotente se*

$$(\cdots((a_1 \circ a_2) \circ a_3) \cdots) \circ a_n = 0$$

para todo $a_i \in A$. O menor natural n tal que A é Jordan nilpotente é denominado o índice de nilpotência de A.

Neste trabalho queremos caracterizar o anel R e o grupo G para que RG seja Jordan nilpotente de índice 2 e 3.

3.1 Caso: índice 2

Estudar a Jordan nilpotência de índice 2 de uma álgebra equivale a estudar quando o produto de Jordan de dois elementos é trivial nesta álgebra. Faremos isso agora para RG, ou seja, veremos quando o produto de Jordan em RG definido por $\alpha \circ \beta = \alpha\beta + \beta\alpha$ é trivial.

Teorema 3.1 *$(RG, +, \circ)$ é uma álgebra de Jordan nilpotente de índice 2 se, e somente se, a característica de R é 2 e G é abeliano.*

Demonstração: Inicialmente, mostremos a ida. Se $(RG, +, \circ)$ é uma álgebra de Jordan nilpotente de índice 2 então $\alpha \circ \beta = 0$ para todos $\alpha, \beta \in RG$. Em particular, vemos que:

$$0 = 1 \circ 1 = 1.1 + 1.1 = 1 + 1 = 2.$$

Portanto, como $2 = 0$ segue que a característica de R é 2. Fazendo agora o produto $g \circ h$ para quaisquer $g, h \in G \subset RG$, temos:

$$0 = g \circ h = gh + hg \Rightarrow gh = -hg.$$

Como em característica 2 temos que $-1 = 1$ segue que $gh = hg$ para todos $g, h \in G$, o que implica que G é abeliano.
Agora, mostremos a volta. Se G é abeliano e sabendo que R é comutativo, então RG é comutativo, isto é, dados $\alpha, \beta \in RG$ temos que $\alpha\beta = \beta\alpha$. Daí:

$$\alpha \circ \beta = \alpha\beta + \beta\alpha = \alpha\beta + \alpha\beta = 2\alpha\beta.$$

Como a característica de R é 2, concluímos que $\alpha \circ \beta = 0$ para todos $\alpha, \beta \in RG$. Portanto, $(RG, +, \circ)$ é uma álgebra de Jordan nilpotente de índice 2. $\square$

Exemplo 3.1 *Vimos no Exemplo 2.1 que $\mathbb{Z}_2C_3 = \{0, 1, g, g^2, 1+g, 1+g^2, g+g^2, 1+g+g^2\}$ é um anel de grupo. Pelo Teorema 3.1, como o grupo $C_3 = \langle g : g^3 = 1_{C_3} \rangle$ é abeliano e o anel $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ tem característica 2, segue que o anel de grupo $(\mathbb{Z}_2C_3, +, \circ)$ é Jordan nilpotente de índice 2.*

Vamos agora caracterizar os anéis R e os grupos G tais que os anéis de grupo RG sejam Jordan Nilpotentes de índice 3 como feito por Goodaire e Milies (2014).

3.2 Caso: índice 3

Antes de darmos a caracterização dos anéis de grupo Jordan Nilpotentes de índice 3, precisamos de mais algumas definições e resultados.

Definição 3.2 *Dados g, h em um grupo G, o comutador de g e h é o elemento $s = com(g, h) = g^{-1}h^{-1}gh \in G$. Em outras palavras, $s \in G$ é tal que $gh = hgs$.*

Note que, em grupos abelianos, temos que $com(g, h) = 1$ para todos $g, h \in G$.

Definição 3.3 *Dizemos que um grupo G, não abeliano, tem a Propriedade (C) se para todos $g, h, k \in G$ com $com(g, h) \neq 1$ e $com(g, k) \neq 1$, tivermos $com(g, h) = com(g, k)$.*

Mais à frente, apresentaremos uma caracterização e exemplos de grupos que satisfazem a Propriedade (C). Agora, veremos alguns comportamentos dos grupos que possuem essa propriedade.

Proposição 3.1 *Em um grupo com a Propriedade (C), os quadrados são centrais.*

Demonstração: Sejam G um grupo com a Propriedade (C) e $g, h \in G$. Note que, se $gh = hg$ então

$$ggh = ghg = hgg \Rightarrow g^2h = hg^2.$$

Portanto, se $g^2h \neq hg^2$, isto é, se $com(h, g^2) \neq 1$ então $gh \neq hg$, ou seja, $com(h, g) \neq 1$. Como G satisfaz a Propriedade (C), segue que $com(h, g) = com(h, g^2)$, o que nos dá:

$$h^{-1}g^{-1}hg = h^{-1}g^{-2}hg^2 = h^{-1}g^{-1}(g^{-1}hg)g$$

logo,

$$h = g^{-1}hg \Rightarrow gh = gg^{-1}hg \Rightarrow gh = hg.$$

Absurdo, pois $com(h, g) \neq 1$. Portanto, quadrados são centrais em um grupo com a Propriedade (C). □

Na próxima proposição, veremos que todos os comutadores se escrevem como produtos de quadrados. Portanto, se em um grupo os quadrados são centrais, os comutadores também serão centrais e, além disso, os comutadores terão ordem 2.

Proposição 3.2 *Em um grupo G, não abeliano, com quadrados centrais, qualquer comutador é central e os comutadores diferentes da identidade tem ordem 2.*

Demonstração: Sejam G um grupo e $s = com(g, h) = g^{-1}h^{-1}gh$ o comutador de $g, h \in G$. Observe que:

$$g^{-1}h^{-1}gh = g^{-2}(gh^{-1})^2h^2$$

portanto, como todo quadrado é central, qualquer comutador também é central. Por fim, dado que o comutador s é tal que $hg = ghs$, então temos que:

$$g^2h = hg^2 = (hg)g = ghsg = g(hg)s = gghss = g^2hs^2.$$

Portanto, como $g^2h = g^2hs^2$, concluímos que $s^2 = 1$, isto é, s tem ordem 2. □

A próxima proposição mostra algumas particularidades da Propriedade (C).

Proposição 3.3 *Para um grupo G, não abeliano, com a Propriedade (C), valem:*

(i) $com(g,h) = com(h,g)$

(ii) se $com(g,h) = com(g,x)$ *e* $com(x,g) = com(x,y)$ *então* $com(g,h) = com(x,y)$

para todos $g, h, x, y \in G$.

Demonstração: Sejam G um grupo com a Propriedade (C) e $s = com(g,h)$. Segue, pelas Proposições 3.1 e 3.2, que todo comutador tem ordem 2, logo, $s^2 = 1$. Daí:

$$ss^{-1} = 1 = s^2 \Rightarrow s = s^{-1}.$$

Em outras palavras:

$$\begin{aligned} com(g,h) &= g^{-1}h^{-1}gh \\ &= (g^{-1}h^{-1}gh)^{-1} \\ &= h^{-1}g^{-1}hg \\ &= com(h,g). \end{aligned}$$

Portanto, provamos que $com(g,h) = com(h,g)$. Desse resultado, segue que $com(g,x) = com(x,g)$. Assim, se $com(g,h) = com(g,x)$ e $com(x,g) = com(x,y)$, temos que:

$$com(g,h) = com(g,x) = com(x,g) = com(x,y).$$

Portanto, provamos também que se $com(g,h) = com(g,x)$ e $com(x,g) = com(x,y)$ então $com(g,h) = com(x,y)$. $\square$

Dessa forma, pelo item (i) da Proposição 3.3, podemos ver que a Propriedade (C) também pode ser escrita como: se $com(g,h) \neq 1$ e $com(x,h) \neq 1$ então $com(g,h) = com(x,h)$.

O próximo resultado apresenta uma caracterização para os grupos que satisfazem a Propriedade (C).

Proposição 3.4 *Um grupo não abeliano tem a Propriedade (C) se, e somente se, possui apenas um único comutador diferente da identidade.*

Demonstração: Observe que a volta é trivial. Para provarmos a ida, seja G um grupo que satisfaz a Propriedade (C) e sejam $com(g,h)$ e $com(x,y)$ dois comutadores em G diferentes da identidade. Queremos mostrar que $com(g,h) = com(x,y)$ para todos $g, h, x, y \in G$.

Vamos dividir a demonstração em dois casos. O primeiro caso no qual há, pelo menos, um outro comutador diferente da identidade entre os elementos $g, h, x, y \in G$, e o segundo caso no qual os demais comutadores de $g, h, x, y \in G$ são todos iguais a identidade.

Suponhamos que g e x não comutem entre si, ou seja, $com(g,x) \neq 1$. Pela Proposição 3.3, item (i), sabemos que:

$$com(x,g) = com(g,x) \neq 1.$$

Assim, segue por hipótese (G satisfaz a propriedade C) que:

$$com(g,h) = com(g,x) \text{ e } com(x,g) = com(x,y).$$

Consequentemente, $com(g,h) = com(x,y)$. Agora, suponhamos que g e h comutem com x e y. Dessa forma:

$$\begin{aligned} com(g,xh) &= g^{-1}(xh)^{-1}gxh \\ &= g^{-1}h^{-1}x^{-1}gxh \\ &= g^{-1}h^{-1}x^{-1}xgh \\ &= g^{-1}h^{-1}gh = com(g,h). \end{aligned}$$

Logo, $com(g,xh) = com(g,h) \neq 1$. Pela Proposição 3.3, segue que $com(g,xh) = com(xh,g) \neq 1$, então, por hipótese, temos que $com(xh,g) = com(g,h)$. Analogamente, podemos mostrar que:

$$com(xh,y) = com(x,y) \neq 1.$$

Portanto, como $com(xh,g) \neq 1$ e $com(xh,y) \neq 1$, então $com(xh,g) = com(xh,y)$. Logo, $com(g,h) = com(x,y)$, para todos $g,h,x,y \in G$. Portanto, G possui apenas um comutador diferente da identidade, como queríamos mostrar. □

Com a caracterização dada acima para os grupos com a Propriedade (C) fica fácil de apresentarmos exemplos desse tipo de grupo. Basta considerarmos grupos não abelianos que possuem um único comutador, além da identidade.

Exemplo 3.2 *(Quatérnios de ordem 8) O conjunto dos quatérnios de ordem 8, denotado por $\mathbb{H}_8$, é o conjunto dos 8 elementos*

$$\mathbb{H}_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$$

munido com a operação de multiplicação, dada pela tabela a seguir:

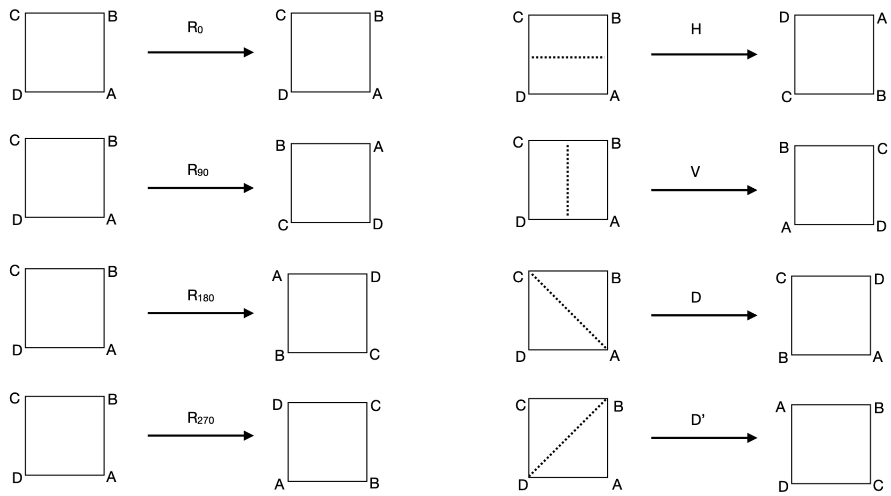
Tabela 4: Tábua de multiplicação de $\mathbb{H}_8$ quatérnios de ordem 8

$.$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

É fácil ver que esse conjunto $(\mathbb{H}_8, .)$, munido com essa operação . é um grupo não abeliano, mas possui um único comutador diferente da identidade que é o elemento -1.

Exemplo 3.3 *(Diedral de ordem 8) O próximo conjunto descreve as possíveis permutações dos vértices de um quadrado resultantes de rotações e reflexões.*

Convenientemente, marcamos com as letras A, B, C e D cada vértice do quadrado e consideramos iguais os movimentos que produzem o mesmo efeito em cada vértice, como por exemplo, uma rotação de 90^0 e um rotação de 450^0, no mesmo sentido. Portanto, qualquer movimento do quadrado é equivalente a um dos 8 movimentos abaixo, que são exatamente as 8 posições finais distintas de cada vértice:



Podemos ver que os 8 movimentos $\{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}, H, V, D, D'\}$, junto com a operação de composição de função, formam um grupo, chamado grupo diedral de ordem 8 e é denotado por D_4. Abaixo descrevemos a tabela de multiplicação desse grupo.

Tabela 5: Tábua de multiplicação do D_4 grupo diedral de ordem 8

.	R_0	R_{90}	R_{180}	R_{270}	H	V	D	D'
R_0	R_0	R_{90}	R_{180}	R_{270}	H	V	D	D'
R_{90}	R_{90}	R_{180}	R_{270}	R_0	D'	D	H	V
R_{180}	R_{180}	R_{270}	R_0	R_{90}	V	H	D'	D
R_{270}	R_{270}	R_0	R_{90}	R_{180}	D	D'	V	H
H	H	D	V	D'	R_0	R_{180}	R_{90}	R_{270}
V	V	D'	H	D	R_{180}	R_0	R_{270}	R_{90}
D	D	V	D'	H	R_{270}	R_{90}	R_0	R_{180}
D'	D'	H	D	V	R_{90}	R_{270}	R_{180}	R_0

Note que o grupo D_4 não é abeliano, mas possui R_{180} como único comutador diferente da identidade. De fato,

$$\begin{array}{ll}
R_{90}H = D' = DR_{180} = (HR_{90})R_{180} & R_{270}H = D = D'R_{180} = (HR_{270})R_{180} \\
R_{90}V = D = D'R_{180} = (VR_{90})R_{180} & R_{270}V = D' = DR_{180} = (VR_{270})R_{180} \\
R_{90}D = H = VR_{180} = (DR_{90})R_{180} & R_{270}D = V = HR_{180} = (DR_{270})R_{180} \\
R_{90}D' = V = HR_{180} = (D'R_{90})R_{180} & R_{270}D' = H = VR_{180} = (D'R_{270})R_{180}
\end{array}$$

$$\begin{aligned} HD &= R_{90} = R_{270}R_{180} = (DH)R_{180} \\ HD' &= R_{270} = R_{90}R_{180} = (D'H)R_{180} \\ VD &= R_{270} = R_{90}R_{180} = (DV)R_{180} \\ VD' &= R_{90} = R_{270}R_{180} = (D'V)R_{180}. \end{aligned}$$

Finalmente, estamos prontos para entender a classificação dos anéis de grupo Jordan nilpotentes de índice 3 apresentada por Goodaire e Milies (2014).

Teorema 3.2 *RG é uma álgebra de Jordan nilpotente de índice 3 se, e somente se, RG apresenta uma das seguintes propriedades:*

(i) característica de R é 4 e *G é abeliano,*

(ii) característica de R é 2 e *G possui um único comutador diferente da identidade.*

Demonstração: Suponhamos que RG é uma álgebra de Jordan nilpotente de índice 3, isto é, $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = 0$ para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in RG$. Particularmente, sabemos que:

$$0 = (1 \circ 1) \circ 1 = (1.1 + 1.1) \circ 1 = 2 \circ 1 = 2.1 + 1.2 = 4.$$

Isso quer dizer que a característica de R divide 4, isto é, $car(R) = 4$ ou $car(R) = 2$. Se $car(R) = 4$ então,

$$\begin{aligned} 0 &= (g \circ h) \circ 1 \\ &= (gh + hg) \circ 1 \\ &= (gh + hg)1 + 1(gh + hg) \\ &= 2(gh + hg) = 2gh + 2hg. \end{aligned}$$

Ou seja, temos que $2gh = -2hg$; como estamos em $car(R) = 4$ então $2gh = -2hg = 2hg$ donde $gh = hg$ e portanto G é abeliano. Se $car(R) = 2$ então temos que G é não abeliano, pois, caso contrário, pelo Teorema 3.1, teríamos RG Jordan nilpotente de índice 2. Para quaisquer $g, h \in G$ temos que:

$$\begin{aligned} 0 &= (g \circ h) \circ g \\ &= (gh + hg) \circ g \\ &= (gh + hg)g + g(gh + hg) \\ &= ghg + hg^2 + g^2h + ghg \\ &= 2ghg + hg^2 + g^2h \\ &= hg^2 + g^2h. \end{aligned}$$

Como $car(R) = 2$, segue que $h^2g = g^2h$, ou seja, os quadrados são centrais em G. Pela Proposição 3.2, podemos afirmar que todo comutador em G é central e possui ordem 2.

Agora, sejam $a, b, c \in G$. Note que:

$$0 = (a \circ b) \circ c = (ab + ba) \circ c = (ab + ba)c + c(ab + ba) = abc + bac + cab + cba.$$

Se $ab \neq ba$ então $abc \neq bac$ e $cab \neq cba$. Logo, pela igualdade acima (lembrando que $car(R) = 2$), segue que:

$$abc = cab \;\; ou \;\; abc = cba. \tag{1}$$

Suponha que $com(a,b) = s_1 \neq 1$ e $com(a,c) = s_2 \neq 1$. Observe que:

$$com(ab,b) = (ab)^{-1}b^{-1}ab.b = b^{-1}a^{-1}b^{-1}ab^2 = b^{-1}a^{-1}b^{-1}b^2a = b^{-1}a^{-1}ba = com(a,b) \neq 1.$$

Portanto, ab e b não comutam. Trocando a por ab em (1) segue que $ab^2c = cab^2$ ou $ab^2c = cbab$.

Se $ab^2c = cab^2$ temos que $ac = ca$ o que é um absurdo já que estamos supondo $com(a,c) = s_2 \neq 1$. Logo,

$$\begin{aligned} ab^2c &= cbab \\ acb^2 &= cbab \\ acb &= cba \\ cba = acb = cabs_2 &= cbas_1s_2 \end{aligned}$$

o que implica que $s_1s_2 = 1$. Como os comutadores, diferentes da identidade, possuem ordem 2, segue que $s_1 = s_2$. Dessa forma, mostramos que $com(a,b) = com(a,c)$ donde concluímos que G possui a Propriedade (C). Pela Proposição 3.4, segue que G possui um único comutador, diferente da identidade, como queríamos mostrar.

Na volta, mostremos que RG é Jordan nilpotente de índice 3 nas duas situações indicadas. Suponha que $car(R) = 4$ e G é abeliano. Dessa forma, temos que RG é comutativo e então, para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in RG$ temos que:

$$\begin{aligned} (\alpha \circ \beta) \circ \gamma &= (\alpha\beta + \beta\alpha) \circ \gamma \\ &= (\alpha\beta + \alpha\beta) \circ \gamma \\ &= (2\alpha\beta) \circ \gamma \\ &= (2\alpha\beta)\gamma + \gamma(2\alpha\beta) \\ &= (2\alpha\beta)\gamma + (2\alpha\beta)\gamma \\ &= 4\alpha\beta\gamma = 0. \end{aligned}$$

Observe que RG não é Jordan nilpotente de índice 2 pois se $\alpha \circ \beta = 2\alpha\beta = 0$ para todo $\alpha, \beta \in RG$ implicaria $car(R) = 2$, sendo que, estamos no caso $car(R) = 4$. Suponhamos, agora, que $car(R) = 2$ e G tem um comutador único diferente da identidade, denotado por s (necessariamente central e com ordem 2). De acordo com a Proposição 2.2, basta mostrar que $(G \circ G) \circ G = 0$. Se g e h comutam, temos que $(g \circ h) \circ k = 0$ para todos $g, h, k \in G$ com $gh = hg$. Portanto, suponha $com(g,h) = s \neq 1$. Logo:

$$(g \circ h) \circ k = (gh + hg) \circ k = (1+s)(gh \circ k).$$

Se gh e k comutarem, então $com(gh,k) = 1$ e $gh \circ k = 0$, pois $car(R) = 2$. Neste caso, $(G \circ G) \circ G = 0$ donde RG é Jordan nilpotente de índice 3. Caso contrário, supondo que gh e k não comutem, temos que $com(gh,k) = s$ uma vez que o comutador é único. Dessa forma, chegamos a:

$$\begin{aligned}(g \circ h) \circ k &= (1+s)gh \circ k \\ &= (1+s)ghk + k(1+s)gh \\ &= (1+s)ghk + (1+s)kgh \\ &= (1+s)ghk + (1+s)sghk \\ &= (1+2s+s^2)ghk \\ &= 2(1+s)ghk = 0.\end{aligned}$$

Consequentemente, $(g \circ h) \circ k = 0$. Portanto, RG é Jordan nilpotente de índice 3 (observe que RG não pode ser Jordan nilpotente de índice 2, senão, pelo Teorema 3.1, G seria abeliano) concluindo, assim, nossa demonstração. □

Para encerrar, apresentamos abaixo dois exemplos de anéis de grupo Jordan nilpotentes de índice 3, utilizando a caracterização dada no Teorema 3.2.

Exemplo 3.4 *Dados o grupo cíclico* $C_4 = \langle g : g^4 = 1_{C_4} \rangle = \{1_{C_4}, g, g^2, g^3\}$ *e o anel dos inteiros módulo 4,* $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$*, definimos o anel de grupo* $\mathbb{Z}_4C_4 = \{r_0 1_{C_4} + r_1 g + r_2 g^2 + r_3 g^3 |\ r_0, r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Z}_4\}$*. Já que* $\mathbb{Z}_4$ *tem característica 4 e* C_4 *é abeliano, podemos concluir, pelo Teorema 3.2, que* $\mathbb{Z}_4C_4$ *é Jordan nilpotente de índice 3.*

Exemplo 3.5 *Dados* $\mathbb{H}_8$ *o grupo dos quatérnios de ordem 8 e* $\mathbb{Z}_2$ *o anel dos inteiros módulo 2, definimos o anel de grupo* $\mathbb{Z}_2\mathbb{H}_8$*. Já que* $\mathbb{Z}_2$ *tem característica 2 e* $\mathbb{H}_8$ *possui um único comutador diferente da identidade, podemos concluir, pelo Teorema 3.2, que* $\mathbb{Z}_2\mathbb{H}_8$ *é Jordan nilpotente de índice 3.*

4 Considerações finais

Neste trabalho, apresentamos a propriedade de nilpotência em anéis de grupo que são álgebras de Jordan com o produto $\circ$, definido por $\alpha \circ \beta = \alpha\beta + \beta\alpha$ para quaisquer elementos dessa estrutura algébrica. Especificamente, para o caso de índice 2, percebemos que a condição necessária e suficiente para se obter o produto nulo é dada quando o anel tem característica 2 e o grupo é abeliano. Já para o caso de índice 3, encontramos duas condições. A primeira ocorre quando o anel tem característica 4 e o grupo é abeliano. E a segunda condição necessita que o grupo tenha como propriedade um comutador único diferente da identidade, além do anel ter característica 2. Para trabalhos futuros, fica como continuidade do presente, a caracterização de anéis de grupo Jordan nilpotentes de índices maiores que 3, ainda em aberto na literatura.

Referências

GALLIAN, Joseph. **Contemporary abstract algebra**. Chapman and Hall/CRC, 2021.

GOODAIRE, Edgar G.; MILIES, César Polcino. Jordan nilpotency in group rings. **Journal of Group Theory**, v. 17, n. 4, p. 541-557, 2014.

JORDAN, Pascual; VON NEUMANN, John; WIGNER, Eugene P. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. In: **The Collected Works of Eugene Paul Wigner: Part A: The Scientific Papers**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1993. p. 298-333.

MCCRIMMON, Kevin. **A taste of Jordan algebras**. New York: Springer, 2004.

MILIES, César Polcino; SEHGAL, Sudarshan K. **An introduction to group rings**. Springer Science & Business Media, 2002.

RECURSO EDUCACIONAL: PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA JÚNIOR (PIBIC-Jr)

A proposta de recurso educacional aqui apresentada trata-se de um projeto de iniciação científica júnior (PIBIC-Jr). Esse projeto poderá ser utilizado pelos professores de matemática do Ensino Médio para participarem dos editais de Iniciação Científica Júnior lançado pelas FAP's, CAPES, CNPq ou outras agências de fomento, estimulando assim os professores de matemática a incorporarem em seu cotidiano a pesquisa com estudantes do ensino médio, desenvolvendo o pensamento científico e o espírito questionador em seus alunos, ampliando o conhecimento deles na área de matemática e preparando-os para um futuro desempenho profissional e acadêmico através do enfrentamento e resolução de problemas. Além disso, a iniciação científica júnior também pode ser uma fonte de descobertas de novos talentos para a matemática!

Abaixo apresentamos o projeto com seus principais elementos (Título, Introdução, Objetivos, Metodologia, Plano de Trabalho, Cronograma, Referências e no Apêndice: Material de estudo). O professor deve, se necessário, adaptar o projeto abaixo às condições exigidas pelo edital e colocá-lo também na formatação exigida (tamanho da fonte, margens, espaçamento entre linhas, etc).

CARACTERIZAÇÃO DAS MATRIZES REAIS DE ORDEM 2, NILPOTENTES DE ÍNDICE 2

Francismara Fernandes Guerra[3]
Mariana Garabini Cornelissen Hoyos[4]

Introdução

O conceito de matriz não é importante só em matemática, já que matrizes se destacam por sua ampla aplicabilidade em diversas áreas de conhecimento. Matrizes podem ser vistas como tabelas e hoje em dia usamos tabelas em quase tudo! Desde criptografia, modelos populacionais, teoria de grafos, controle de tráfego terrestre, ciência de dados, inteligência artificial, dentre outras diversas aplicações (KUERTEN, 2001; MIRANDA e CASTELO,

[3]Aluna de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2022
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - Campus Alto Paraopeba - CAP/UFSJ
E-mail: francismara.guerra@ifmg.edu.br
[4]Orientadora do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Estatística, Física e Matemática - DEFIM, CAP/UFSJ
E-mail: mariana@ufsj.edu.br

2021; e LEITE e FELICE, 2016). Daí a importância do seu estudo e conhecimento da teoria de matrizes.

Podemos definir no conjunto das matrizes as operações de soma e multiplicação. Esse conjunto com as operações usuais de soma e multiplicação apresenta diversas propriedades, algumas delas consideradas "estranhas"à primeira vista. Por exemplo, a multiplicação usual de matrizes não é comutativa, isto é, se A e B são matrizes tais que $A.B$ e $B.A$ estão definidos, podemos ter $A.B \neq B.A$. Além disso, podemos ter um produto de matrizes não nulas igual à zero (matriz nula), o que não acontece nos números reais. Outra propriedade do produto usual é que ele é associativo, isto é, $(A.B).C = A.(B.C)$ para todas as matrizes A, B e C desde que os produtos estejam definidos.

Por outro lado, se definirmos um outro produto entre matrizes, dado por:

$$A \circ B = \frac{1}{2}(A.B + B.A)$$

onde $A.B$ e $B.A$ denotam o produto usual de matrizes, podemos mostrar que esse produto é comutativo, mas não associativo. Entretanto, ele satisfaz a seguinte identidade, conhecida como identidade de Jordan:

$$(A \circ B) \circ (A \circ A) = A \circ (B \circ (A \circ A))$$

para todas as matrizes A e B. O produto acima é conhecido como produto de Jordan e foi exatamente esse produto que foi utilizado por Erns Pascual Jordan, em 1934, para formalizar os princípios da mecânica quântica, utilizados até hoje.

Uma matriz quadrada A é dita nilpotente se existe um inteiro positivo k tal que

$$A^k = \underbrace{A.A.\cdots A}_{k-vezes} = \emptyset$$

onde $\emptyset$ é a matriz nula de mesma ordem de A. O menor k satisfazendo tal condição é dito índice de nilpotência de A.

Observe que se A for uma matriz nula, qualquer produto dela por ela mesma resultará em todos seus elementos nulos. Existe alguma outra matriz cujo produto por ela mesma seja nulo? Quando uma matriz real não nula e quadrada é nilpotente de índice 2? É possível caracterizar as entradas dessa matriz?

Neste projeto estamos interessados em estudar as propriedades dos conjuntos das matrizes utilizando as duas formas de produto apresentadas e também em caracterizar as matrizes de ordem 2, nilpotentes de índice 2, com os dois produtos apresentados: produto usual de matrizes e produto de Jordan.

Objetivo geral

Caracterizar as matrizes reais de ordem 2, nilpotentes de índice 2, considerando o produto usual de matrizes e também o produto de Jordan.

Objetivos específicos

- Estudar as propriedades básicas (comutatividade, associatividade, distributividade, elemento neutro, existência de divisores de zero, dentre outras) do conjunto de matrizes com o produto usual de matrizes e com o produto de Jordan;

- Propiciar o desenvolvimento do raciocínio matemático por meio de exercícios que envolvam matrizes reais de ordem 2 e suas propriedades, com operações usuais e não-usuais;
- Proporcionar ao aluno a aprendizagem de rigor matemático, métodos e técnicas de pesquisa em matemática;
- Desenvolver o pensamento científico e o espírito questionador dos alunos.

Metodologia

Ao início do projeto, o aluno recebe o projeto, o material de estudo, orientações sobre a metodologia da pesquisa e o cronograma de trabalho/estudos. A metodologia do projeto consiste em encontros semanais presenciais entre aluno e orientador, com duração de 2 (duas) horas. Em cada encontro, o professor apresenta um seminário no qual descreve um assunto específico, seguindo a sequência do cronograma estabelecido. Em seguida, aluno e orientador discutem o tema e concluem o encontro com a resolução de exercícios.

Além disso, nesses encontros, também são propostos exercícios avaliativos de desempenho, cuja resolução deve ser entregue ao professor no encontro seguinte. Sempre que houver dúvida, o orientando pode solicitar uma reunião ao orientador, ainda que esta não esteja prevista no cronograma. Cada tarefa proposta deve ser referente ao tema discutido nos encontros tidos, e deve ser corrigida pelo professor no encontro seguinte.

Ao final do projeto, o orientando deverá elaborar um pôster para apresentação em evento compatível com a pesquisa desenvolvida, tal como apresentação em semana de iniciação científica, feira de ciências, etc.

Plano de trabalho

Para o desenvolvimento do projeto, sugere-se o estudo da sequência dos seguintes tópicos:

1. *Matrizes: definição, notação, tipos especiais de matrizes (matriz linha, matriz coluna, matriz quadrada, matriz transposta, matriz diagonal, matriz triangular, matriz identidade), traço de uma matriz, operações com matrizes (adição, multiplicação por escalar e produto usual de matrizes).*

   Para o item acima, sugere-se descrever a notação e as operações, especialmente, das matrizes especiais e das matrizes de ordem n, exemplificando cada caso.

2. *Propriedades das operações com matrizes: associatividade, comutatividade, distributividade, elemento neutro, divisores de zero.*

   Para o item acima, sugere-se verificar se as propriedades acima são válidas para qualquer matriz, principalmente as matrizes reais de ordem n com as operações de soma e multiplicação vistas no item anterior. Em caso afirmativo, deve-se apresentar uma prova desse fato; em caso negativo, deve-se apresentar um contra-exemplo.

3. *Determinante de uma matriz: determinante de matrizes de ordem 2 e 3, determinante de uma matriz de ordem maior por cofator e suas propriedades.*

   Para o item acima, sugere encontrar o determinante de qualquer matriz por redução a determinantes de matrizes de menor ordem até se obter matrizes de ordem 2.

4. *Matriz Inversa: operações elementares (troca de linhas, multiplicação de uma linha por escalar, soma de um produto de uma linha a outra), matrizes elementares, escalonamento de matrizes, matriz escada, posto de uma matriz, matrizes inversíveis, cálculo da matriz inversa por meio da identidade*

   Para os itens 1, 2, 3 e 4, sugere-se a leitura do(s) capítulo(s) de Matrizes e Determinantes de um livro didático para o ensino médio aprovado pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), incluindo a coleção adotada pela escola do aluno, bem como as seguintes referências: Santos (2002), Chiapinotto e Lutz (2020), Filho (2011) e Lima (2021). Recomenda-se também a resolução dos exercícios propostos do livro escolhido em consonância com os temas discutidos. Caso o aluno já tenha visto esse conteúdo em sala de aula, pode-se revisa-lo.

5. *Matrizes Nilpotentes: definição e exemplos. Índice de nilpotência.*

   Para este item, sugere-se a leitura do "Apêndice: Material de estudo", sessão "Matrizes nilpotentes", onde também constam exercícios propostos.

6. *Produto de Jordan: definição e exemplos.*

   Para esse item, sugere-se a leitura do "Apêndice: Material de estudo", sessão "Produto de Jordan", onde também constam exercícios propostos. Sugere-se ainda verificar se as seguintes propriedades: propriedades das operações com o produto de Jordan: comutatividade, distributividade, elemento neutro, divisores de zero. Em caso afirmativo, deve-se apresentar uma prova desse fato; em caso negativo, deve-se apresentar um contra-exemplo.

7. *Matrizes Jordan Nilpotentes: definição e exemplos.* Para este item, sugere-se a leitura do "Apêndice: Material de estudo", sessão "Matrizes Jordan Nilpotentes", onde também constam exercícios propostos.

8. *Caracterização das Matrizes Reais de Ordem 2, nilpotentes de índice 2.*

   Para esse item, sugere-se a leitura do "Apêndice: Material de estudo", sessão "Matrizes reais de ordem 2 nilpotentes de índice 2", onde também constam exercícios propostos. Encontrar qual deve ser o tipo da matriz A, quadrada, com entradas reais, de ordem 2, tal que $A.A$ é igual à matriz nula de ordem 2. Nesse item, o aluno não terá referências bibliográficas. Ele deverá encontrar a solução do problema com a orientação do seu professor.

9. Propriedades das matrizes reais de ordem 2, nilpotentes de índice 2. Para esse item, sugere-se a leitura do "Apêndice: Material de estudo", sessão "Matrizes reais de ordem 2 nilpotentes de índice 2", onde também constam exercícios propostos.

Cronograma

O plano de trabalho apresentado acima tem a proposta de ser desenvolvido em um período de 12 (doze) meses como segue no cronograma apresentado.

Atividade/Mês	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
Tópico 1	x											
Tópico 2	x											
Tópico 3		x										
Tópico 4		x										
Tópico 5			x	x								
Tópico 6					x	x						
Tópico 7							x					
Tópico 8								x	x			
Tópico 9										x	x	
Escrita do pôster												x

Sugere-se flexibilizar a cronograma levando-se em consideração as férias e os recessos escolares.

Referências

CHIAPINOTTO, Elisia L.; LUTZ, Maurício Ramos. Caderno didático 2. Notas de aula. **Colégio Técnico Industrial de Santa Maria, Universidade Federal de Santa Maria,** 2020. Disponível em: https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/705093/2/2% 20SII% 20Matrizes.pdf. Acesso em 14 de maio de 2024.

FILHO, José Elias dos Santos. Matem atica para o ensino médio iii. Notas de aula. **Centro de Educação Superior a Distância, Universidade Federal de Sergipe,** 2011. Disponível em: https://cesad.ufs.br/ORBI/public/uploadCatalago/17502916022012Matem%C3 %A1tica_ para_o_Ensino_M%C3%A9dio_III_aula_1.pdf. Acesso em 14 de maio de 2024.

KUERTEN, Cristini. Algumas aplicações de matrizes. **Trabalho de conclusão de curso. Florianópolis**, 2001. Disponível em: https://core.ac.uk/download/pdf/30377811.pdf. Acesso em 14 de maio de 2024.

JORDAN, Pascual; VON NEUMANN, John; WIGNER, Eugene P. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. In: **The Collected Works of Eugene Paul Wigner: Part A: The Scientific Papers**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1993. p. 298-333.

LEITE, Hugo Marciano; FELICE, Fernando. APLICAÇÃO DE MATRIZES E SISTEMAS LINEARES À ENGENHARIA ELÉTRICA. **Anais do EVINCI-UniBrasil**, v. 2, n. 1, p. 239-239, 2016.

LIMA, Cesar Goncalves de. Álgebra de matrizes. Notas de aula. **Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, Universidade de S ao Paulo**, 2021. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/7605544/mod_ resource/content/1/Apostila% 20Matrizes%20%282021%29.pdf. Acesso em 14 de maio de 2024.

MIRANDA, D. da S.; CASTELO, P. de C. **Aplicações de matrizes. Universidade Federal do Amapá**, 2021. Disponível em: https://www2.unifap.br/matematica/files/2017/01/ Danilo-da-Silva-Miranda-e-Patr%C3%ADcio-de-Castro-Castelo.pdf. Acesso em 14 de maio de 2024.

SANTOS, Reginaldo J. Um curso de geometria analítica e álgebra linear. **DM-ICEx-UFMG.** Disponível em: http://ninf.org/w/images/c/c5/Sebenta_Algebra_2009.pdf. Acesso em 14 de maio de 2024.

Apêndice: Material de estudo

Como não se encontra material didático específico na literatura existente para os tópicos de 5 a 9, apresentamos neste apêndice uma proposta de estudo com a teoria sobre matrizes nilpotentes e Jordan nilpotentes, incluindo exercícios resolvidos e propostos.

Matrizes nilpotentes

Uma matriz nilpotente é aquela que, quando elevada a alguma potência, resulta em uma matriz nula. Abaixo segue a definição formal.

Definição 4.1 (Matriz nilpotente) *Uma matriz quadrada A é dita nilpotente se existe um inteiro positivo k tal que*

$$A^k = \underbrace{A.A.\cdots A}_{k-vezes} = \emptyset$$

onde $\emptyset$ é a matriz nula de mesma ordem de A. O menor k satisfazendo tal condição é dito índice de nilpotência de A.

Aqui está um exemplo de uma matriz de ordem 2 nilpotente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Neste caso, A é uma matriz nilpotente de índice 2. Como exercício, mostre que $A^2 = \emptyset$.

Considere, agora, a mesma matriz A e façamos A^3. Embora $A^3 = \emptyset$, esta matriz não é nilpotente de índice 3, pois, a menor potência de A que resulta na matriz nula é 2.

Agora, vejamos algumas propriedade de matrizes nilpotentes apresentadas nas proposições a seguir.

Proposição 4.1 *Se A é uma matriz nilpotente, então $det(A) = 0$.*

Demonstração: De fato, seja A é uma matriz nilpotente, isto é, $A^k = \emptyset$ para um inteiro positivo k. Daí, temos que:

$$det(A^k) = det(\emptyset) = 0.$$

Como:

$$det(A^k) = det(\underbrace{A.A\cdots A}_{k-vezes}) = \underbrace{det(A).det(A)\cdots det(A)}_{k-vezes} = (det(A))^k.$$

Assim, concluímos que $(det(A))^k = 0$, portanto $det(A) = 0$. □

Proposição 4.2 *As matrizes nilpotentes não são inversíveis.*

Este resultado decorre do fato de que toda matriz nilpotente possui determinante nulo. Como toda matriz, cujo determinante é nulo, é não inversível, segue que as matrizes nilpotentes são não inversíveis.

Exercícios

1. Calcule A^2 e diga se A é nilpotente índice 2.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix}$

   (e) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$

   (f) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Calcule A^3 para as matrizes da questão anterior e diga se A é nilpotente índice 3.

3. Calcule o determinante das matrizes da questão 1. Dica: use a proposição 1.

4. Calcule A^2, onde $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, e determine a equação de seu determinante.

Produto de Jordan

Abaixo, apresentamos a definição dada por Jordan, Von Neumann e Wigner (1993) do que é o produto de Jordan.

Definição 4.2 (Produto de Jordan) *O produto de Jordan é uma operação, denotada por* $\circ$ *(lê-se bola), que satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $A \circ B = B \circ A$ *(comutatividade)*

(ii) $(A \circ B) \circ (A \circ A) = A \circ (B \circ (A \circ A))$ *(identidade de Jordan)*

para todo $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

Observe que o produto de Jordan é, por definição, comutativo. Não precisa ser, em geral, associativo, mas deve satisfazer a identidade de Jordan.

Agora, apresentamos o produto de Jordan no conjunto das matrizes reais quadradas $M_n(\mathbb{R})$ que é aplicado neste trabalho.

Proposição 4.3 *Considere o seguinte produto:*

$$A \circ B = \frac{1}{2}(A.B + B.A)$$

onde $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, e $A.B$ e $B.A$ significam o produto usual de matrizes. Esta operação é um produto de Jordan.

Demonstração: Vamos mostrar que o produto $\circ$ acima definido é um produto de Jordan. Note que, dados A e $B \in M_n(\mathbb{R})$, temos:

$$\begin{aligned} A \circ B &= \frac{1}{2}(A.B + B.A) \\ &= \frac{1}{2}(B.A + A.B) = B \circ A \end{aligned}$$

o que prova que $M_n(\mathbb{R})$ é comutativo com o produto $\circ$. Agora, mostremos a identidade de Jordan:

$$\begin{aligned} (A \circ B) \circ (A \circ A) &= \frac{1}{2}(A.B + B.A) \circ \frac{1}{2}(A^2 + A^2) \\ &= \frac{1}{2}[(A.B + B.A) \circ A^2] \\ &= \frac{1}{4}[(A.B + B.A)A^2 + A^2(A.B + B.A)] \\ &= \frac{1}{4}[A.B.A^2 + B.A^3 + A^3.B + A^2.B.A] \\ &= \frac{1}{2}[A\frac{1}{2}(B.A^2 + A^2.B) + \frac{1}{2}(B.A^2 + A^2.B)A] \\ &= A \circ \frac{1}{2}(B.A^2 + A^2.B) \\ &= A \circ (B \circ A^2) = A \circ (B \circ \frac{1}{2}(A^2 + A^2)) \\ &= A \circ (B \circ (A \circ A)) \end{aligned}$$

Portanto, segue que $\circ$ é um produto de Jordan no conjunto das matrizes $M_n(\mathbb{R})$. □

Já sabemos que o produto usual do conjunto das matrizes $M_n(\mathbb{R})$ é associativo e não comutativo, entretanto, vale ressaltar que o conjunto das matrizes munido com esse "novo" produto é comutativo, mas é, em geral, não associativo.

De fato, dadas A, B, C matrizes quadradas de mesma ordem, observe que:

$$\begin{aligned}
(A \circ B) \circ C &= \frac{1}{2}(A.B + B.A) \circ C \\
&= \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(A.B + B.A).C + C.\frac{1}{2}(A.B + B.A)] \\
&= \frac{1}{4}A.B.C + \frac{1}{4}B.A.C + \frac{1}{4}C.A.B + \frac{1}{4}C.B.A \\
A \circ (B \circ C) &= A \circ \frac{1}{2}(B.C + C.B) \\
&= \frac{1}{2}[A.\frac{1}{2}(B.C + C.B) + \frac{1}{2}(B.C + C.B).A] \\
&= \frac{1}{4}A.B.C + \frac{1}{4}A.C.B + \frac{1}{4}B.C.A + \frac{1}{4}C.B.A.
\end{aligned}$$

Tomemos, como exemplo, o produto de Jordan das matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

encontramos:

$$(A \circ B) \circ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \circ (B \circ C) = \begin{bmatrix} 0 & -3/4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

o que ilustra a não associatividade do produto de Jordan. O desenvolvimento desse resultado deve ser feito como exercício.

Exercícios

1. Dadas as matrizes abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

   calcule e responda.

   (a) $A.(B.C)$

   (b) $(A.B).C$

   (c) $(A \circ B) \circ C$

   (d) $A \circ (B \circ C)$

   Você encontrou $A.(B.C) = (A.B).C$? E $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$? O que conclui disso?

2. Calcule o determinante das matrizes A, B e C da questão acima.

3. Dados $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ e I a matriz identidade de ordem n, mostre que para o produto:

$$A \circ B = \frac{1}{2}(A.B + B.A)$$

temos que:

(a) a matriz identidade I é o elemento neutro do produto de Jordan, ou seja:

$$I \circ A = A \circ I = A;$$

(b) o produto de Jordan é distributivo com relação a soma pela esquerda, ou seja:

$$(A + B) \circ C = (A \circ C) + (B \circ C);$$

(c) o produto de Jordan é distributivo com relação a soma pela direita, ou seja:

$$A \circ (B + C) = (A \circ B) + (A \circ C).$$

4. Determine as potências para $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, usando o produto de Jordan.

(a) A^2

(b) A^3

(c) A^k, onde k é um número inteiro positivo.

5. Dadas as matrizes diagonais abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

calcule e responda.

(a) $A.B.C$

(b) $A.C.B$

(c) $B.A.C$

(d) $B.C.A$

(e) $C.A.B$

(f) $C.B.A$

Você encontrou $A.B.C = A.C.B = B.A.C = B.C.A = C.A.B = C.B.A$?

6. Para as mesmas matrizes do exercício anterior, calcule e responda.

(a) $(A \circ B) \circ C$

(b) $A \circ (B \circ C)$

Você encontrou $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$? O que conclui sobre matrizes diagonais?

7. Calcule o determinante das matrizes A, B e C da questão 5.

Matrizes Jordan Nilpotentes

Uma matriz Jordan nilpotente é aquela que, quando elevada a alguma potência pelo produto de Jordan, resulta em uma matriz nula. A seguir, apresentamos sua definição formal.

Definição 4.3 (Matriz Jordan nilpotente) *Uma matriz quadrada A é dita Jordan nilpotente se existe um inteiro positivo k tal que*

$$A^k = \underbrace{((A \circ A)...) \circ A}_{k-vezes} = \emptyset$$

onde $\emptyset$ é a matriz nula de mesma ordem de A. O menor k satisfazendo tal condição é dito índice de Jordan nilpotência de A.

Uma matriz Jordan nilpotente de índice 2 é aquela cujo o produto de Jordan dela por ela mesma resulta em uma matriz nula, isto é, A é Jordan nilpotente de índice 2 quando $A \circ A = \emptyset$.

Proposição 4.4 *As matrizes nilpotentes de índice 2 (pela multiplicação usual) são Jordan nilpotentes de índice 2.*

Demonstração: De fato, tomemos A uma matriz nilpotente e teremos:

$$\begin{aligned} A \circ A &= \frac{1}{2}(A.A + A.A) \\ &= \frac{1}{2}(A^2 + A^2) \\ &= \frac{1}{2}(\emptyset + \emptyset) \\ &= \frac{1}{2}\emptyset \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

□

Note que, qualquer matriz B que seja o produto de um escalar real α por uma matriz nilpotente A, não nula, de índice 2 também terá o produto de Jordan $A \circ B$ nulo. realmente, se $A.A = \emptyset$ e $B = \alpha A$, segue que:

$$\begin{aligned} A \circ B &= A.B + B.A \\ &= A.(\alpha A) + (\alpha A).A \\ &= \alpha(A.A + A.A) \\ &= \alpha(\emptyset + \emptyset) \\ &= \alpha\emptyset \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Por exemplo, já vimos que a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é nilpotente índice 2. Dessa forma, se multiplicarmos A por qualquer constante, encontraremos outra matriz nilpotente de índice 2. Ou seja, se multiplicarmos A por -1/2, encontraremos:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que também é nilpotente índice 2. Como exercício, mostre que $B^2 = \emptyset$.

Exercícios

1. Mostre que se B é uma matriz real quadrada tal que $B = \alpha A$, onde α é um número real qualquer e A uma matriz Jordan nilpotente de índice 2, então B também será Jordan nilpotente de índice 2.

2. Calcule $A \circ A$ e diga se A é Jordan nilpotente índice 2.

   (a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

   (e) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$

   (f) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Determine uma matriz B tal que $A \circ B = \emptyset$. Dica: use as questões 1 e 2 acima.

   (a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

   (d) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$

Matrizes reais de ordem 2 nilpotentes de índice 2

O objetivo do trabalho é demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 4.1 *As únicas matrizes reais de ordem 2, não nulas, nilpotentes de índice 2 (com o produto usual de matrizes) são as matrizes abaixo:*

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{-a^2}{b} & -a \end{bmatrix}$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

Demonstração: Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz nilpotente de índice 2, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, isto é $A.A = \emptyset$. Dessa forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix}.$$

Comparando termo a termo, encontramos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a^2 + bc = 0 & (1) \\ b(a + d) = 0 & (2) \\ c(a + d) = 0 & (3) \\ bc + d^2 = 0 & (4) \end{cases}$$

Inicialmente, suponhamos que $b = 0$ e $c = 0$, consequentemente, por (1) e (4) temos que $a^2 = d^2 = 0$, logo $a = d = 0$. Portanto, a matriz encontrada é a matriz nula.
Suponhamos que $b = 0$ e $c \neq 0$, assim, por (1) e (4) temos que $a^2 = d^2 = 0$, logo $a = d = 0$. Portanto, a matriz nilpotente é da forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, suponhamos que $b \neq 0$ e $c = 0$, por (1) e (4) também temos que $a^2 = d^2 = 0$, logo $a = d = 0$. Daí, a matriz nilpotente é da forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por fim, suponhamos que $b \neq 0$ e $c \neq 0$, por (2) e (3) tempos que $a + d = 0$, logo $d = -a$. Substituindo em (1) e (4), encontramos $c = -\frac{a^2}{b}$. Enfim, a matriz nilpotente é da forma:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \frac{-a^2}{b} & -a \end{bmatrix}.$$

Portanto, todas as matrizes nilpotentes de ordem 2 e de índice 2 apresentam as características apresentadas acima. □

Além disso, a partir do teorema acima, podemos concluir o seguinte resultado:

Teorema 4.2 *As únicas matrizes reais de ordem 2, não nulas, Jordan nilpotentes de índice 2 são as matrizes nilpotentes de índice 2 (com o produto usual).*

Demonstração: Seja A uma matriz nilpotente de ordem 2 de índice 2, ou seja, $A \circ A = \emptyset$. Assim, temos o seguinte produto de Jordan:

$$\begin{aligned}
\emptyset &= A \circ A \\
&= \frac{1}{2}(A.A + A.A) \\
&= \frac{1}{2}(A^2 + A^2) \\
&= \frac{1}{2}(2A^2) \\
&= A^2.
\end{aligned}$$

Portanto, se $A^2 = \emptyset$, então A é uma matriz nilpotente de índice 2. $\square$

Podemos concluir que uma matriz Jordan de ordem 2, nilpotente de índice 2 é da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{-a^2}{b} & -a \end{bmatrix}$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, tais como as matrizes nilpotentes de índice 2.

Exercícios

1. Mostre que as matrizes reais de ordem 2, nilpotentes de índice 2, possuem traço nulo.

2. Mostre que as matrizes reais de ordem 2, Jordan nilpotentes de índice 2, possuem determinante igual a zero. Conclua que as mesmas não são inversíveis.