UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Fabiano de Almeida Silva Viana

Jogos em Plataformas de Aprendizagem Interativas: um Auxílio na Fixação de Conteúdos Matemáticos

Juiz de Fora
2024

Fabiano de Almeida Silva Viana

Jogos em Plataformas de Aprendizagem Interativas: um Auxílio na Fixação de Conteúdos Matemáticos

Dissertação apresentada ao PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Rogério Casagrande

Juiz de Fora

2024

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

de Almeida Silva Viana, Fabiano.
Jogos em Plataformas de Aprendizagem Interativas: um Auxílio na Fixação de Conteúdos Matemáticos / Fabiano de Almeida Silva Viana. – 2024.
85 f. : il.

Orientador: Rogério Casagrande
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2024.

1. Jogos. 2. Aula interativa. 3. Ludificação. I. Casagrande, Rogério, orient. II. Título.

Fabiano de Almeida Silva Viana

Jogos em Plataformas de Aprendizagem Interativas: um Auxílio na Fixação de Conteúdos Matemáticos

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 27 de março de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rogério Casagrande - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. José Barbosa Gomes

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Marcelo Oliveira Veloso

Universidade Federal de São João del-Rei

Juiz de Fora, 28/02/2024.

Dedico este trabalho ao meu pai que recentente nos deixou e sempre me inspirou e me auxiliou na época da graduação, onde eu trabalhava de madrugada e fazia a faculdade durante o dia. Sempre me incentivando e motivando a vencer os desafios, principalmente de cansaço e desânimo. O senhor sempre foi meu herói e minha inspiração. Dedico também aos meus familiares, minha mãe, minha esposa e filhos, minha irmãs amadas. Sem vocês eu não chegaria nem perto de onde estou e de quem sou hoje.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos professores que durante o curso sempre foram muito atenciosos conosco, com a turma. Em época de pandemia, passávamos várias horas em frente aos computadores, através de um ensino remoto, mas longe de não ter a qualidade de sempre. Vocês são muito mais que mestres, são inspirações. Agradeço ao meu amigo e compadre Diego Gomes, por me incentivar a fazer o curso e que sempre está ao meu lado me incentivando e motivando a ser um profissional cada vez melhor. Agradeço principalmente a minha família, meus pais por sempre acreditarem em mim, minha irmãs por nunca me deixarem desistir, meus filhos por serem minha maior fonte de energia e inspiração e minha esposa por ser um pilar na minha vida, estando sempre a meu lado e me motivando ao máximo. Agradeço também aos colegas de turma que fortemente estivemos juntos e, mesmo que à distância, estivemos em apoio um ao outro. Vocês são demais! E o mais importante de tudo, agradecer à Deus, pois sem Ele, nada seria possível.

O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais.. (BNCC, 2018, p. 265).

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo levantar um tema bem pertinente nos dias atuais, pois é notório que os jovens hoje em dia são muito ligados à tecnologia e aos aparelhos eletrônicos. A ludificação pode e deve ser utilizada como ferramenta de ensino dentro de sala de aula. Viemos através desta pesquisa levantar a possibilidade de professores e profissionais de outras áreas sobre a utilização de aplicativos para ludificar em suas aulas e ou apresentações. Este tipo de recurso faz com que as aulas fiquem muito atrativas e os estudantes, além de se divertirem bastante, aprendem de maneira lúdica e interativa. As possibilidades de acesso a gráficos e informações sobre os jogos e os resultados alcançados pelos alunos é algo muito útil, de bastante exploração.

Palavras-chave: Jogos. Aula interativa. Ludificação.

ABSTRACT

This work aims to raise a very pertinent topic today, as it is clear that young people today are very connected to technology and electronic devices. Gamification can and should be used as a teaching tool within the classroom. Through this research, we came to raise the possibility of teachers and professionals from other areas using applications to gamify their classes and/or presentations. This type of resource makes classes very attractive and students, in addition to having a lot of fun, learn in a playful and interactive way. The possibilities of accessing graphics and information about the games and the results achieved by the students is something very useful, with a lot of exploration.

Keywords: Games. Interactive class. Gamification.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PIN	Número de Identificação Pessoal
GIF	Graphics Interchange Format (Formato de Intercâmbio Gráfico)
QR Code	Código QR - Quick Response (Resposta Rápida)
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
PISM	Programa de Ingresso Seletivo Misto
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
APPLET	Miniaplicativo executado em um aplicativo maior
NTE	Núcleo de Tecnologia Educacional
SRE	Superintendência Regional de Ensino

LISTA DE SÍMBOLOS

$\in$	Pertence
$\neq$	Diferente
Δ	Delta
$<$	Menor que
$>$	Maior que
$\equiv$	Equivalente a
$\Leftrightarrow$	Se, e somente se
$\sim$	Semelhante a
$//$	Paralelo
$\Rightarrow$	Implica que

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Diante das diversas dificuldades que temos enfrentado dentro de nossas salas de aula, principalmente nas escolas públicas, devemos ficar sempre atentos às mudanças tanto no ensino quanto na sociedade. Assim, as novas tecnologias que estão crescendo de forma exponencial, podendo nos direcionar como progredir como profissionais e concomitantemente aos desafios do ensino de matemática, criar estratégias para que nossos alunos estejam sempre atentos e motivados como estudantes.

Este trabalho tem como objetivo levantar uma estratégia para que os professores possam estar não só atualizados como a sociedade está, mas que ao mesmo tempo não percam sua essência em ser um mediador do conhecimento para seus discentes. Os alunos, principalmente ao final da infância e início da adolescência estão cada vez mais inseridos em um mundo tecnológico e em específico, ao uso de jogos eletrônicos. Se não ficarmos atentos, o uso de celulares, principalmente, podem virar vilões dentro de sala. Com isso, a estratégia do uso de jogos eletrônicos no auxílio ao ensino pode ser um bom recurso didático, pois é um recurso que está inserido no cotidiano deles e sempre que é utilizado, os discentes ficam satisfeitos.

Assim sendo, vamos apresentar neste trabalho, o uso de aplicativos de jogos com alunos de 9º ano para levantar suas funcionalidades e recursos que os professores poderão utilizar em suas aulas.

A ludificação é uma ferramenta extremamente poderosa, pois com isso, sempre teremos alguma coisa em “jogo”. As fases da elaboração de uma atividade em formato de jogos deve levar em conta aquilo que o aluno almeja, seja em uma parte pessoal ou em uma parte profissional. Num futuro ele verá que sempre está disputando jogos em sua vida, mesmo que isso pareça acontecer de forma despercebida. Quando ele está prestando um vestibular, ele não está deixando de praticar um jogo, esse por sinal, que vencerá aquele ou aqueles que estiverem mais preparados em seus estudos prévios.

As tarefas que o professor normalmente envia a seus alunos para casa, como forma de estudo, na maioria das vezes pode se tornar uma tarefa um pouco complexa, pois se esse aluno vai para sua casa com dúvidas relativas ao conteúdo abordado pelo professor, possívelmente ele terá dificuldades em resolver tal tarefa. A ludificação, por ser uma atividade mais atrativa, faz com que os alunos se dediquem mais na realização dessas tarefas, pois ali, dentro de sala, tem o "seu nome em jogo". Ele está disputando de uma forma lúdica e participativa, com seus colegas de classe e, além disso, aprendendo de forma mais eficaz. De acordo com (1):

> Assim é que funciona a gamificação, e embora a princípio possa parecer que apenas estamos criando mais um jogo educacional, porém necessitamos lembrar que a gamificação não é construir um

> jogo ou adaptar uma tarefa em formato de jogo, é de fato, utilizar dos elementos do jogo para inseri-los na tarefa proposta, ou seja, não é “transformar a tarefa em jogo” é “transformar o jogo em tarefa”, assim podemos definir a gamificação, quando aplicada à educação formal, como sendo integrar os elementos e estratégias dos jogos a metodologia educacional, a fim de promover o engajamento discente através da motivação pessoal e do envolvimento emocional, para que possam atingir os objetivos de aprendizagem propostos em seu currículo pedagógico. (ILSON MENDONÇA, 2019, p. 5)

Com isso, viemos através desta pesquisa, levantar um tema atual e ajudar de alguma forma, aos professores que buscam se interar dos meios recentes e desafios que são propostos pela Educação recente. Óbvio que em todos os níveis educacionais encontraremos muitos desafios e restrições por motivos de infraestrutura ou não adesão total do corpo pedagógico inserido. Porém, fica posto aqui que a prática da ludificação é uma prática cada vez mais atuante dentro das salas de aula.

Este trabalho será mais bem elucidado diante dos capítulos seguintes. O primeiro capítulo terá uma abordagem teórica acerca dos assuntos discutidos e trabalhados no tema da pesquisa, a ludificação. Serão levantados temas como Equações Biquadradas, Equações do 2º grau, Semelhança de Triângulos, os casos de semelhança, Relações e Funções e Função Afim. Esses assuntos citados, foram trabalhados com duas turmas de 9º ano do ensino fundamental em mesmo dia e mesma carga horária disponibilizada.

O capítulo que se segue abordará acerca do recurso utilizado na pesquisa, ao qual foi a utilização de plataformas de aprendizagens interativas. Mostraremos como criar os jogos eletrônicos nessas plataformas, exibiremos exemplos de algumas das muitas plataformas existentes hoje em dia, falaremos da proposta a ser trabalhada em sala de aula, de como foi o experimento e também um levantamento de opiniões dos próprios alunos participantes do trabalho em questão.

Finalizando, temos como um apêndice, imagens de todas as questões elaboradas para o trabalho apresentado aqui, bem como uma proposta para professores que gostariam de utilizar o recurso em suas aulas.

2 RESUMO TEÓRICO

Neste capítulo, faremos uma abordagem teórica acerca dos assuntos trabalhados dentro do tema de pesquisa com as ferramentas interativas educacionais escolhidas. As figuras contidas nesse capítulo foram elaboradas a partir do site GeoGebra (2) e do aplicativo Inkodo (3).

2.1 EQUAÇÕES BIQUADRADAS

2.1.1 Equações do 2º grau

Antes de darmos total ênfase às equações biquadradas, vamos falar um pouco sobre as equações do 2º grau, que são utilizadas como ferramentas de apoio para resolver equações biquadradas.

Diante do nível dos estudantes abordados no tema da pesquisa, trabalharemos apenas com o conjunto $\mathbb{R}$, o conjunto dos números reais.

Para esta seção, iremos nos apoiar em (4).

Uma equação do 2º grau é uma equação do tipo

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde a, b e $c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Na equação, as letras a, b e c citadas na forma (acima) dita cacônica de uma equação são denominadas coeficientes. Como exemplo, podemos citar a equação

$$2x^2 + x - 3 = 0,$$

onde o coeficiente $a = 2$, o coeficiente $b = 1$ e o coeficiente $c = -3$.

Como nosso objetivo é chegar ao desenvolvimento de equações biquadradas, devemos lembrar em como se calcula a(s) raíz(es) de uma equação do 2º grau. Lembremos que a **raiz de uma equação** é aquele valor que ao substituirmos a variável x por ele, efeturamos as operações corretamente, torna a sentença verdadeira.

Para a equação mencionada acima, vemos que o valor $x = 1$ é uma raiz da equação pois

$$2.1^2 + 1.1 - 3 = 2.1 + 1.1 - 3 = 2 + 1 - 3 = 0.$$

Verificamos ainda, que para a mesma equação, o valor $x = \frac{-3}{2}$ também é raiz da equação, pois:

$$2.(\frac{-3}{2})^2 + 1.(\frac{-3}{2}) - 3 = 2.\frac{9}{4} + 1.(\frac{-3}{2}) - 3 = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 3 = \frac{6}{2} - 3 = 3 - 3 = 0.$$

Esses dois valores juntos formam o **conjunto solução** da equação, que é o conjunto de todos os valores que satisfazem a equação, ou seja, que as tornam verdadeiras.

2.1.2 Equação do Tipo $ax^2 + bx + c = 0$

Para equações do 2º grau desse tipo, ditas equações completas, devemos utilizar uma fórmula resolutiva específica para resolvê-las, comumente chamada aqui no Brasil por fórmula de Bháskara. Toda equação do 2º grau, com coeficientes reais e o coeficiente do termo de maior grau não nulo, possui raízes do tipo:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}.$$

Inicialmente, vamos subtrair c a ambos os membros da igualdade, ficando com:

$$ax^2 + bx = -c.$$

Como $a \neq 0$, vamos dividir todos os termos da igualdade por a, ficando com:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}.$$

Utilizando o método de completar quadrado e alguns artifícios algébricos, teremos o seguinte:

$$x^2 + 2.x.\frac{b}{2.a} + (\frac{b}{2.a})^2 = \frac{-c}{a} + (\frac{b}{2.a})^2.$$

Organizando nossas contas, encontraremos o seguinte:

$$(x + \frac{b}{2.a})^2 = \frac{b^2 - 4.a.c}{4.a^2}.$$

Agora, extraindo a raiz quadrada em ambos os membros da igualdade, ficamos com:

$$\mid x + \frac{b}{2.a} \mid = \frac{\sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2. \mid a \mid}.$$

Assim, utilizando as propriedades de módulo, ficando com:

$$x + \frac{b}{2.a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}.$$

Por fim, subtraindo de ambos os membros da igualdade o termo $\frac{b}{2.a}$ e reduzindo o segundo membro ao mesmo denominador, encontramos a fórmula finalizada em:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}.$$

Os alunos podem dizer que encontrar as raízes de uma equação do 2º grau é um trabalho árduo ou prazeroso, dependendo da identificação que eles têm com o assunto. Esse trabalho tem um grau de dificuldade para cada tipo de equação do 2º grau, pois caso a equação esteja na forma incompleta, que é quando falta o coeficiente b ou o coeficiente c ou ambos os coeficientes, esta tarefa pode se tornar mais fácil.

- **Equação do 2º Grau do Tipo** $ax^2 = 0$

  Equações do tipo $ax^2 = 0$, onde $a \neq 0$, só possuem a solução nula, ou seja, $x = 0$. Dado que, ao dividirmos ambos os membros da igualdade por a, sempre encontraremos $x^2 = 0$, que equivale a dizer $x = 0$, pois o único número real que elevado ao quadrado resulta em zero, é o próprio zero.

- **Equação do Tipo** $ax^2 + bx = 0$

  Equações do tipo $ax^2 + bx = 0$, onde $a \neq 0$ e b é um número real qualquer não nulo, sempre possuem as soluções $x = 0$ e $x = \frac{-b}{a}$.

  Considerando que x é um fator comum nos dois termos do 1º membro da igualdade, podemos colocá-lo em evidência. Daí, encontraremos:

$$x(ax + b) = 0$$

  Como o produto $x.(ax + b)$ está resultando em zero, significa que pelo menos um desses fatores é zero. Ou seja:

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad ax + b = 0.$$

  Se $x = 0$, já temos a primeira raiz. Porém, se $ax + b = 0$, podemos desenvolver a resolução desta equação de 1º grau. Subtraíndo b em ambos os membros da igualdade, ficamos com $ax = -b$ e, como $a \neq 0$, podemos dividir ambos os membros da igualdade por a, ficando assim com $x = \frac{-b}{a}$.

  Encontramos assim o conjunto solução desse tipo de equação.

- **Equação do Tipo** $ax^2 + c = 0$

  Equações do tipo $ax^2 + c = 0$, onde $a \neq 0$ e c é um número real qualquer não nulo, sempre possuem as soluções do tipo $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$, desde que a razão $\frac{-c}{a}$ seja um valor não negativo. De fato, ao subtraírmos c a ambos os membros da igualdade, ficamos com $ax^2 = -c$. Dividindo ambos os membros da igualdade por a (uma vez que a é não nulo), ficamos com $\frac{-c}{a}$. Assim, extraíndo a raiz quadrada em ambos os membros da igualdade ficamos com $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$.

2.1.3 As Equações Biquadradas

As equações biquadradas são aquelas encontradas em seu formato algébrico dado por $ax^4 + bx^2 + c = 0$, com a, b, e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Podemos então definir este tipo de equação como uma equação do 4º grau incompleta, onde aparecem apenas os expoentes naturais de ordem par menores ou iguais a 4, sendo esse, exatamente o de maior grau.

O cálculo das raízes de uma equação biquadrada é feita através de uma mudança de variáveis, $y = x^2$, obtendo uma equação do 2º grau.

Como exemplo, podemos verificar que, para resolvermos a equação $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, basta substituirmos x^2 por y por exemplo e encontramos a seguinte equação: $(x^2)^2 - 5x^2 + 4 = 0$ que equivale a $y^2 - 5y + 4 = 0$ e assim, utiliza-se a fórmula resolutiva (fórmula de Bháskara) para se encontrar as raízes na variável y. Posteriormente, com essas raízes em y, voltamos ao processo inicial e igualamos os valores a x^2 substituído inicialmente.

Vejamos na prática: vamos encontrar as raízes da equação $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Fazendo $x^2 = y$, temos:

$$(x^2)^2 - 5x^2 + 4 = y^2 - 5y + 4.$$

Daí, vamos resolver a equação

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

através da fórmula de Bháskara.

Temos então $a = 1$, $b = -5$, $c = 4$ e

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.1.4 = 25 - 16 = 9.$$

Consequentemente,

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2.1} = \frac{5 \pm 3}{2}.$$

Assim,

$$y_1 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Agora, fazendo $x^2 = y_1 = 1$, temos que $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ e fazendo $x^2 = y_2 = 4$, encontramos $x_3 = -2$ e $x_4 = 2$.

Conseguimos então, encontrar o conjunto solução da equação $\{-2, -1, 1, 2\}$.

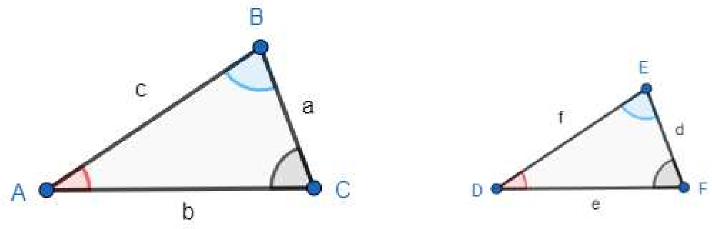
As equações biquadradas possuem a característica de que ao somarmos suas raízes, sempre encontraremos zero como resposta. Este fato se dá pois as raízes encontradas sempre aparecem de forma simétricas, duas a duas.

2.2 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Nesta seção iremos trabalhar com a semelhança entre triângulos e com os seus respectivos casos de semelhança. Como auxílio à organização didática, utilizamos (5).

Dizemos que dois triângulos são semelhantes, quando apresentam os três ângulos internos congruentes e quando seus lados ditos homólogos, que são os lados opostos aos mesmos ângulos congruentes, proporcionais.

Figura 1 – Triângulos Semelhantes



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 1, temos:

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{A} \equiv \widehat{D}, \quad \widehat{B} \equiv \widehat{E}, \quad \widehat{C} \equiv \widehat{F} \quad \text{e} \quad \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}.$$

A razão entre os lados homólogos de dois triângulos é chamada de **razão de semelhança** e comumente se utiliza a letra k pata representar tal razão.

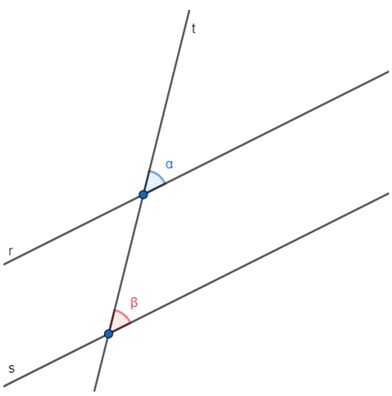
$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k.$$

Quando essa razão k é igual a 1, dizemos que os triângulos são congruentes.

Para estudarmos os casos de semelhanças de triângulos, iremos nos embasar em resultados fundamentais de geometria euclidiana.

Como primeiro resultado, nas notações da Figura 2, temos que as retas r e s são paralelas se, e somente se, os ângulos α e β, chamados correspondentes, são congruentes.

Figura 2 – Ângulos Correspondentes



Fonte: Elaborada pelo autor.

Um outro resultado é o Teorema de Tales, que vem a seguir.

Teorema 2.1 (Teorema de Tales) *Se duas retas transversais são cortadas por um feixe de retas paralelas, então a razão entre quaisquer dois segmentos determinados em uma das transversais é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal.*

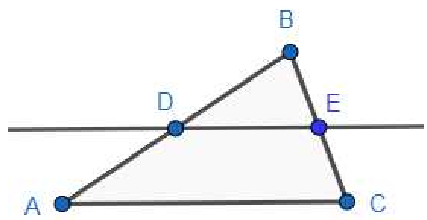
Para a demonstração de cada um desses resultados, veja em (5).

Além disso, outro resultado importante é o Teorema 2.2, **Teorema Fundamental da Semelhança**.

Teorema 2.2 *Se uma reta corta dois dos lados de um triângulo em pontos distintos e de forma paralela ao terceiro lado desse triângulo, então o triângulo formado internamente ao triângulo original é semelhante a ele. Nas condições da Figura 3 temos,*

$$\overline{DE}//\overline{AC} \quad \Rightarrow \quad \Delta ABC \sim \Delta BDE$$

Figura 3 – Teorema Fundamental da Semelhança



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para mostrarmos que $\Delta\ ABC$ é semelhante ao $\Delta\ BDE$, precisamos provar que os ângulos são congruentes e que os lados homólogos são proporcionais.

Temos por hipótese que $\overline{DE}\ //\ \overline{AC}$, logo $\hat{A} \equiv \hat{D}$ e $\hat{C} \equiv \hat{E}$, pois são ângulos correspondentes. Como $\hat{B}$ é um ângulo comum aos dois triângulos, mostramos que eles têm os três ângulos congruentes.

Para mostrarmos que os lados homólogos são proporcionais, inicialmente vamos usar que $\overline{DE}//\overline{AC}$ e o Teorema 2.1 (Teorema de Tales) para obter

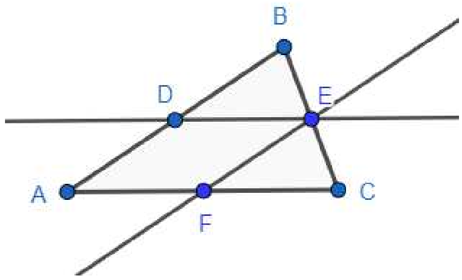
$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}.$$

Agora, tome F pertencente a $\overline{AC}$, de tal forma que $\overline{DE}$ seja igual a $\overline{AF}$ (Figura 4). Como $\overline{DE}$ é paralela a $\overline{AF}$, temos que $ADEF$ é um paralelogramo. Logo, a reta que contém o segmento $\overline{AD}$ é paralela à reta que contém o segmento $\overline{EF}$.

Do Teorema 2.1, temos que

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF}}.$$

Figura 4 – Demonstração do Teorema Fundamental da Semelhança



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como $\overline{AF} \equiv \overline{DE}$, temos que

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DE}}.$$

Portanto,

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DE}}.$$

Concluímos assim que $\Delta\ ABC \sim \Delta\ BDE$.

2.2.1 Casos de Semelhança de Triângulos

De agora em diante, vamos tratar especificamente de cada caso de semelhança de triângulos. Esses casos tratam de características interessantes que nos garantem que dois triângulos são semelhantes de acordo com algumas condições. Para verificarmos a semelhança entre dois triângulos, não será necessário verificar se os três ângulos internos dos triângulos são congruentes e se seus três lados homólogos são proporcionais, basta verificarmos parte dessas condições para garantir a semelhança entre eles.

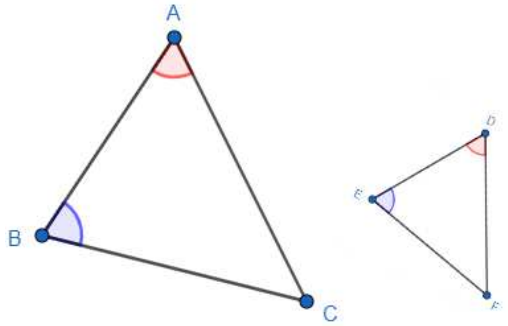
a) Caso AA: Se dois triângulos possuem dois ângulos congruentes, então eles são semelhantes

Consideremos, a partir da Figura 5, dois triângulos ABC e DEF, com dois ângulos congruentes.

Sabemos, da geometria euclidiana, que a soma dos três ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos, ou seja, vale sempre 180 graus. Com isso, $\hat{C} \equiv \hat{F}$. Concluímos então que todos os ângulos são congruentes.

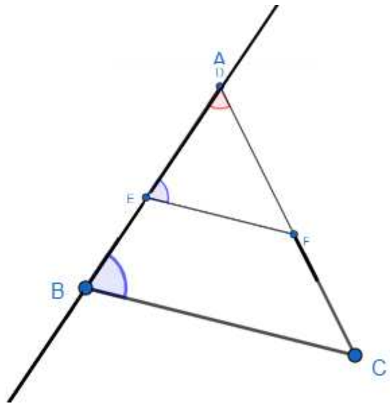
Para verificarmos que os lados homólogos são proporcionais, vamos encaixar os dois triângulos a partir de uma mesmo vértice que tenha um ângulo congruente, e prolongar um dos lados do triângulo, como na Figura 6.

Figura 5 – Caso AA de Semelhança



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 6 – Demonstração do Caso AA de Semelhança



Fonte: Elaborada pelo autor.

Temos que $\hat{A} \equiv \hat{D}$ e, sabemos ainda que $\hat{B} \equiv \hat{E}$, assim vemos que os segmentos de reta $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$ são paralelos. Com isso, pelo Teorema 2.2, temos que

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}.$$

Como $\overline{AE} = \overline{DE}$ e $\overline{AF} = \overline{DF}$, temos,

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}.$$

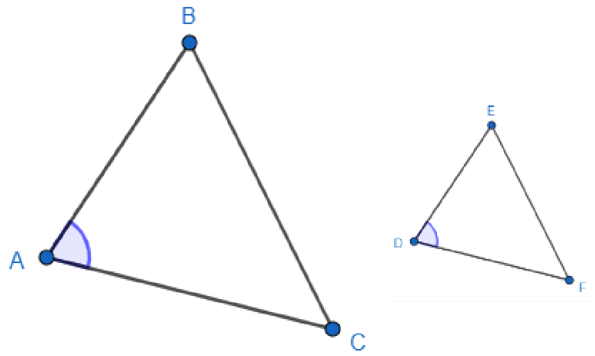
Portanto, os triângulos ABC e DEF são semelantes.

b) **Caso LAL: Se em dois triângulos, dois pares de lados homólogos são proporcionais e os ângulos formados por esses lados são congruentes, então os triângulos são semelhantes**

Consideremos, a partir da Figura 7 a seguir, dois triângulos ABC e DEF, com

$$\hat{A} \equiv \hat{D} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}.$$

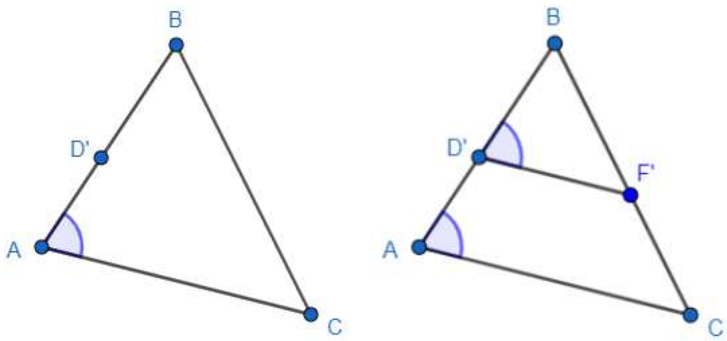
Figura 7 – Demonstração do Caso LAL de Semelhança



Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos então, no Δ ABC, tomar um ponto D' em $\overline{AB}$ tal que $\overline{BD'} = \overline{DE}$. Logo em seguida, vamos traçar um segmento de reta $\overline{D'F'}$, com F' em $\overline{BC}$, de tal forma que o ângulo formado por esse segmento e o lado $\overline{AB}$ seja igual ao ângulo $\hat{A}$. Veja Figura 8.

Figura 8 – Demonstração Caso LAL de Semelhança



Fonte: Elaborada pelo autor.

Com isso, encontramos que $\overline{D'F'}$ // $\overline{AC}$ e, consequentemente os ângulos $\hat{F'}$ e $\hat{C}$ são congruentes. Agora, usando o Teorema 2.2, concluímos que $\Delta ABC \sim \Delta BD'F'$.

Assim,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{D'B}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{D'F'}}.$$

Como $\overline{D'B} = \overline{DE}$, por construção, e $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$, por hipótese, temos

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{D'F'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{D'B}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{D'F'} = \overline{DF}.$$

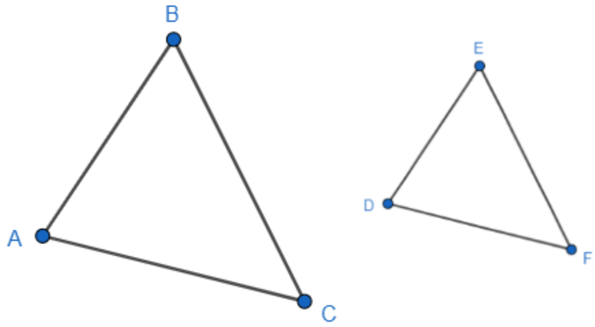
Disso, concluímos que ΔDEF é congruente ao $\Delta BD'F'$ pelo caso LAL de congruência de triângulos, e assim, podemos afirmar que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

c) Caso LLL: Se dois triângulos têm os três lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes

Consideremos, a partir da Figura 9 a seguir, dois triângulos ABC e DEF, com

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}.$$

Figura 9 – Demonstração do Caso LLL de Semelhança

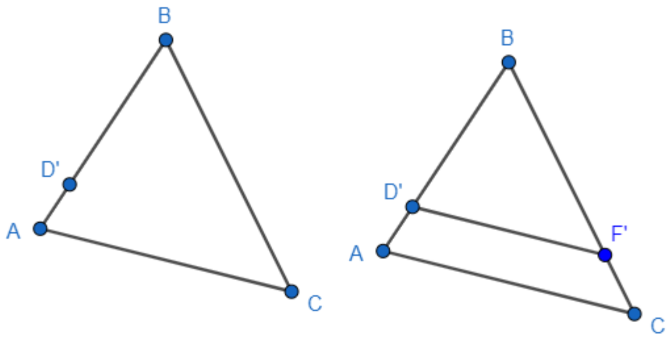


Fonte: Elaborada pelo autor.

De modo análogo à demonstração anterior, vamos marcar um ponto D' sobre $\overline{AB}$, de tal forma que $\overline{BD'} = \overline{DE}$ (Figura 10). Logo em seguida, traçemos um segmento de reta $\overline{D'F'}$, com $F' \in \overline{BC}$, de tal forma que o ângulo formado por ele e o segmento $\overline{AB}$, seja igual ao ângulo $\hat{A}$.

Como analisado anteriormente, temos pelo Teorma 2.2 que $\Delta ABC \sim \Delta BD'F'$. Precisamos mostrar agora que $\Delta\ DEF$ é côngruo $\Delta\ BD'F'$.

Figura 10 – Demonstração Caso LLL de Semelhança



Fonte: Elaborada pelo autor.

Utilizando a hipótese, o fato que $\Delta ABC \sim \Delta BD'F'$ e que $\overline{BD'} = \overline{DE}$, temos

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{D'F'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{D'B}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{D'F'} = \overline{DF}.$$

Da mesma maneira, concluímos que $\overline{BF'} = \overline{EF}$ e, assim, pelo caso LLL, podemos concluir que $\Delta\ DEF$ é congruente ao $\Delta\ BD'F'$ e, consequentemente,

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF.$$

2.3 RELAÇÕES E FUNÇÕES

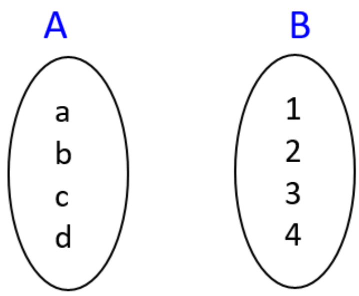
Nesta seção iremos abordar uma ideia inicial de funções, ainda de acordo com o nível em que se encontravam os estudantes participantes do experimento. Essa seção será dedicada aos conceitos de relações entre dois conjuntos, conceitos iniciais de funções, domínio, contradomínio e imagem, forma algébrica de uma função, representação gráfica de funções e função do 1º grau. Para uma abordagem mais interessante, utilizaremos como base didática: (6) e (7).

2.3.1 Relações

Inicialmente, vamos considerar dois conjuntos, digamos A e B. O conjunto formado por todos os pares ordenados (a, b), onde $a \in A$ e $b \in B$ é denominado **produto cartesiano de A em B** e denotado por $A \times B$. A todo subconjunto de $A \times B$, chamamos de **relação de A em B**.

Vamos exemplificar algumas relações. Considere os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Veja Figura 11.

Figura 11 – Conjuntos A e B



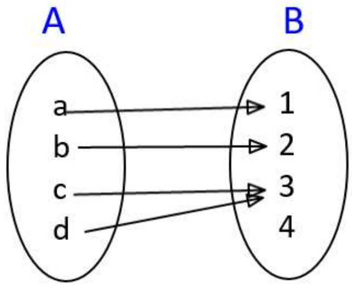
Fonte: Elaborada pelo autor.

Vejamos agora, algumas relações que podem ser encontradas entre estes dois conjuntos.

$$R_1 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 3)\}.$$

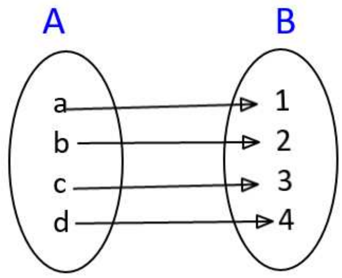
$$R_2 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 4)\}.$$

Figura 12 – Relação R_1 entre os conjuntos A e B



Fonte: Elaborada pelo autor.

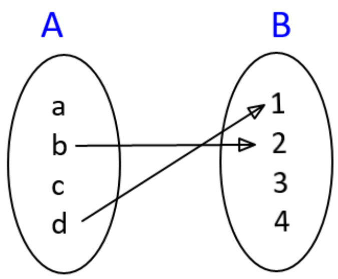
Figura 13 – Relação R_2 entre os conjuntos A e B



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$R_3 = \{(b, 2), (d, 1)\}.$$

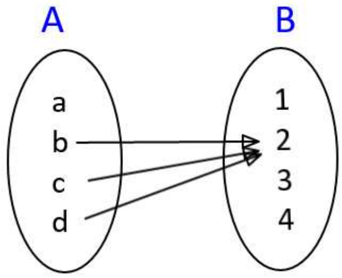
Figura 14 – Relação R_3 entre os conjuntos A e B



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$R_4 = \{(b, 2), (c, 2), (d, 2)\}.$$

Figura 15 – Relação R_4 entre os conjuntos A e B



Fonte: Elaborada pelo autor.

2.3.2 Funções

Dizemos que uma relação, digamos f, entre os conjutos A e B é uma **função entre A e B** se, e somente se, essa satisfaz as seguintes condições:

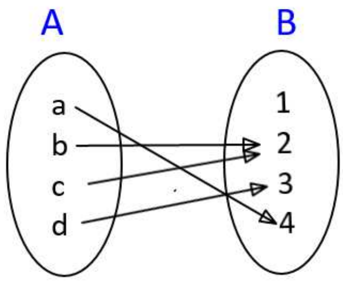
- **Todos os elementos do conjunto A possuem correspondente no conjunto B**, isto é, não se pode sobrar elemento no conjunto A que não tenha relação com elemento do conjunto B.
- **Cada elemento do conjunto A deve se relacionar com um único elemento do conjunto B**, isto é, um elemento do conjunto A não pode se relacionar com dois ou mais elementos do conjunto B ao mesmo tempo.

Essas duas condições juntas podem ser escritas como: **todo elemento do conjunto A tem um, e apenas um, correspondente no conjunto B**.

Vamos exemplificar, através dos conjuntos em diagrama, alguns casos de relações que são funções e não funções.

Exemplo 1: Considere a relação $L_1 = \{(a, 4), (b, 2), (c, 2), (d, 3)\}$ (Figura 16).

Figura 16 – Exemplo 1: Função de A em B

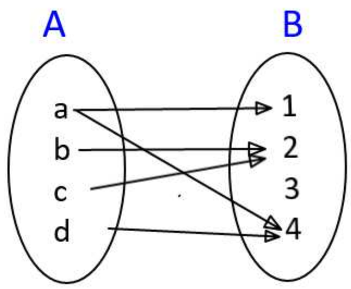


Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que todos os elementos do conjunto A estão se relacionando com apenas um único elemento do conjunto B, logo a relação L_1 é uma **função**, contemplando as duas condições citadas anteriormente.

Exemplo 2: Considere a relação $L_2 = \{(a, 1), (a, 4), (b, 2), (c, 2), (d, 4)\}$ (Figura 17).

Figura 17 – Exemplo 2: Não é Função de A em B

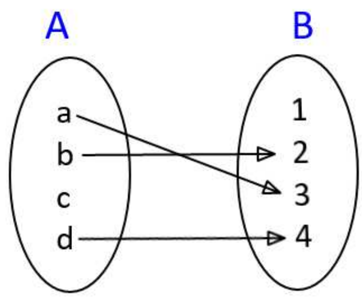


Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que o elemento $a \in A$ está se relacionado com dois elementos distintos do conjunto B. Logo, a relação L_2 não é uma **função**, pois não cumpre a segunda condição citada anteriormente.

Exemplo 3: Considere a relação $L_3 = \{(a, 3), (b, 2), (d, 4)\}$ (Figura 18).

Figura 18 – Exemplo 3: Não é Função de A em B



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que o elemento $c \in A$ não se relaciona com nenhum elemento do conjunto B. Portanto, a relação L_3 não é uma **função**, pois não cumpre a primeira condição citada anteriormente.

Uma observação pertinente é que para analisar se uma relação de A em B é função ou não, nossa preocupação está em como os elementos de A estão relacionados com os elementos de B.

2.3.3 Domínio, Contradomínio e Imagem

Trataremos agora de elementos muito importantes de uma função. Se temos uma função f de A em B, então podemos falar desses elementos. O **domínio** de uma função é o conjunto de partida da função, de onde partem as setinhas, é o conjunto ao qual definimos nossa função. Representamos o **domínio** da função por $D(f)$.

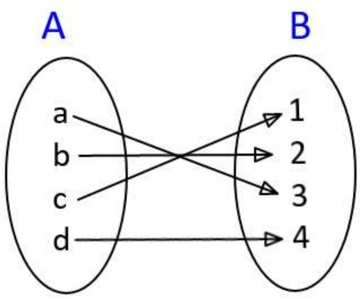
Já o conjunto **contradomínio** da função, é o conjunto de chegada da função, é o conjunto onde chegam as setinhas. Representamos o **contradomínio** da função por $CD(f)$.

O conjunto **imagem** da função f é o conjunto de todos os elementos do contradomínio que se relacionam com algum elemento do domínio da função. O conjunto **imagem** sempre é um subconjunto do contradomínio. Representamos o conjunto **imagem** por $Im(f)$.

Visulamente, podemos identificar estes conjuntos através dos diagramas de Venn como a seguir.

Seja $f : A \to B$ dada pela relação $R_f = \{(a, 3), (b, 2), (c, 1), (d, 4)\}$ (Figura 19).

Figura 19 – Função f de A em B



Fonte: Elaborada pelo autor.

Temos que:

$$D(f) = A = \{a, b, c, d\}.$$

$$CD(f) = B = \{1, 2, 3, 4\}.$$

$$Im(f) = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Seja $g : A \to B$ dada pela relação $R_g = \{(a, 3), (b, 2), (c, 3), (d, 4)\}$ (Figura 20).

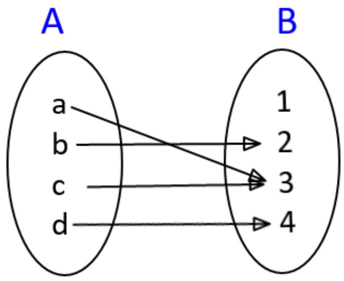
Observamos que:

$$D(g) = A = \{a, b, c, d\}.$$

$$CD(g) = B = \{1, 2, 3, 4\}.$$

$$Im(g) = \{2, 3, 4\}.$$

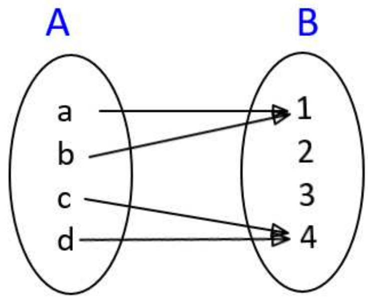
Figura 20 – Função g de A em B



Fonte: Elaborada pelo autor.

Seja $h : A \to B$ dada pela relação $R_h = \{(a,1),(b,1),(c,4),(d,4)\}$ (Figura 21).

Figura 21 – Função h de A em B



Fonte: Elaborada pelo autor.

Temos que:

$$D(h) = A = \{a,b,c,d\}.$$

$$CD(h) = B = \{1,2,3,4\}.$$

$$Im(h) = \{1,4\}.$$

Vale destacar que a cada função. podemos dar um nome com as letras $f, g, h, ...$ de tal forma a identificá-las com mais facilidade e assim diferenciar com mais clareza uma das outras.

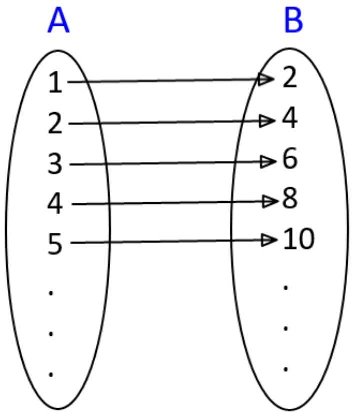
Na simbologia $h : A \to B$ por exemplo, estamos dizendo que a função h está definida de A em B, ou seja, o domínio da função é o conjutno A e o contradomínio da função é conjunto B.

2.3.4 Forma Algébrica de uma Função

Daremos início agora a uma outra representação das funções, que não apenas os diagramas. Vamos falar da forma algébrica das funções.

Considere a função $f : A \to B$ como na Figura 22.

Figura 22 – Função f de A em B



Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos observar que o conjunto A é formado pelo infinitos números inteiros positivos, e que o conjunto B é formado pelos infinitos números inteiros positivos pares. Notamos que a relação que estabelece a função f de A em B é dada pela relação dos elementos de B serem o dobro dos elementos de A. Algebricamente, todos os pares ordenados (x, y), onde $x \in A$ e $y \in B$ pode ser representado por $y = f(x) = 2x$.

Note que:

$$D(f) = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

$$CD(f) = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$$

$$Im(f) = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$$

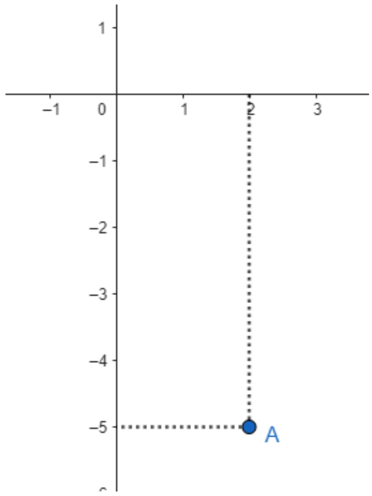
Para os elementos do contradomínio que são imagens de elementos do domínio de f, podemos usar a seguinte simbologia: Note que temos o par $(1, 2)$, donde 2 é imagem de 1. Podemos assim escrever que $f(1) = 2$. Temos também, o par ordenado $(2, 4)$, sendo 4 imagem do 2. Podemos então escrever que $f(2) = 4$. Por sucessão de pensamento, podemos escrever que $f(3) = 6$, $f(4) = 8$, $f(5) = 10$, etc. Concluímos assim, que o símbolo $f(x)$ está associado à imagem da função.

Por observação, podemos dizer que, se numa determinada função não foi especificado o domínio dela, podemos aceitar que seu domínio é real, ou seja, o domínio da função é o conjunto dos números reais.

2.3.5 Representação Gráfica de uma Função

Para trabalharmos com a representação gráfica de uma função, inicialmente devemos lembrar de como se representa um par ordenado no plano cartesiano xOy. Para melhor visualização, apresentamos aqui a representação do par ordenado $(2, -5)$ (Figura 23).

Figura 23 – Exemplo: Par Ordenado (2, -5)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesse exemplo, o par ordenado $(2, -5)$, a primeira coordenada 2, é chamada abscissa, enquanto que a segunda coordenada -5 é chamada ordenada.

Dados dois conjuntos $A, B \in \mathbb{R}$, o **gráfico** de uma função $f : A \to B$ é a representação no plano cartesiano de todos os pares ordenados $(x, y) \in A \times B$, onde $y = f(x)$.

Exemplo: Consideremos a função f, dada por $f(x) = 3x - 1$, sendo x um número inteiro qualquer. Observe a Tabela 1 com alguns valores de f:

Tabela 1 – Encontrando pares ordenados para $f(x) = 3x - 1$

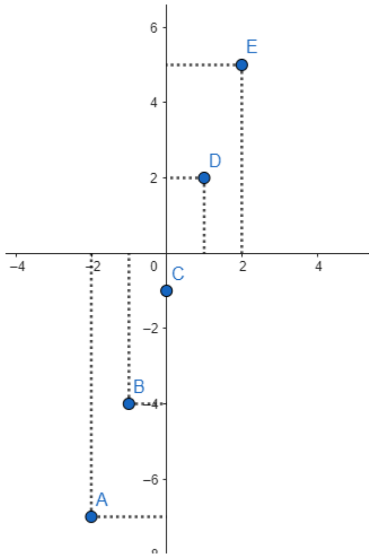
x	**y = 3x - 1**	**(x, y)**
-2	y = 3(-2) - 1	(-2, -7)
-1	y = 3(-1) - 1	(-1, -4)
0	y = 3(0) - 1	(0, -1)
1	y = 3(1) - 1	(1, 2)
2	y = 3(2) - 1	(2, 5)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para construírmos o gráfico da função f, vamos plotar os pontos encontrados na Tabela 1 no plano cartesiano xOy. Veja Figura 24

Note que, os pontos marcados na Figura 24, são apenas alguns dos infinitos pontos, pois existem infinitos números inteiros para que possamos fazer os cálculos. Ainda, os pontos encontrados, estão alinhados, e assim, existe uma reta que os une.

Figura 24 – Pares Ordenados no Plano Cartesiano



Fonte: Elaborada pelo autor.

2.4 FUNÇÕES DO 1º GRAU

Nesta seção, iremos falar especificamente das funções de 1º grau, suas definições, variações e gráficos.

2.4.1 Função Afim

Definimos uma **função afim** como uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que associa cada número real x ao número real $ax + b$.

$$x \to ax + b$$

$$f(x) = ax + b$$

$$y = ax + b$$

Os valores contidos na sentença, a e b, são chamados **coeficientes** da função. O coeficiente a é chamado **coeficiente angular** e o coeficiente b é chamado **coeficiente linear**. O gráfico de f é uma reta no palo cartesiano xOy. O coeficiente angular recebe este nome pois tem ligação direta com o ângulo que a reta que contém os pontos gerados pelos pares ordenados da função faz com o eixo das abscissas, o eixo x. Já o coeficiente linear tem ligação direta com o ponto de interseção entre esta reta e o eixo das ordenadas, o eixo y.

Exemplos:

- $f(x) = 5x - 2$, com $a = 5$ e $b = -2$
- $g(x) = -x + 3$, com $a = -1$ e $b = 3$

- $h(x) = -2x - 7$, com $a = -2$ e $b = -7$

Vamos mostrar agora, a representação gráfica de uma função afim, digamos

$$f(x) = 3x + 4.$$

Inicialmente, vamos encontrar alguns pontos dessa função. Veja a Tabela 2.

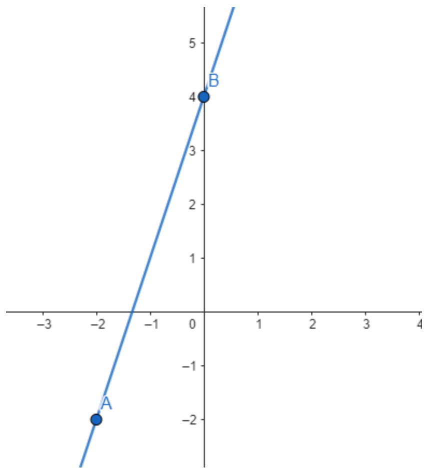
Tabela 2 – Encontrando pares ordenados para $f(x) = 3x + 4$

x	**y = 3x + 4**	**(x, y)**
-2	y = 3(-2) + 4	(-2, -2)
0	y = 3(0) + 4	(0, 4)
1	y = 3(1) + 4	(1, 7)
4	y = 3(4) + 4	(2, 16)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tomando dois pontos distintos da Tabela 2, construímos o gráfico da função $f(x) = 3x + 4$ traçando a reta que liga tais pontos (Figura 25).

Figura 25 – Construção do Gráfico da Função Afim $f(x) = 3x + 4$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Lembremos que toda função afim é descrita por uma reta, graficamente. Dependendo dos valores específicos dos coeficientes a e b, essas funções recebem nomes especiais.

Função Linear

Dizemos que uma função de 1º grau é dita **função linear**, sempre que o seu coeficiente linear for igual a zero, isto é, quando $b = 0$.

A função $f(x) = -2x$ ou $y = -2x$ é um exemplo de função linear.

Definimos então uma função afim $f(x) = ax + b$, com $b = 0$ como uma **função linear**.

$$x \to ax$$

$$f(x) = ax$$

$$y = ax$$

Exemplos:

- $f(x) = x$, com $a = 1$ e $b = 0$
- $g(x) = -7x$, com $a = -7$ e $b = 0$
- $h(x) = 8x$, com $a = 8$ e $b = 0$

Vamos mostrar agora, a representação gráfica de uma função linear, digamos

$$f(x) = -2x.$$

Inicialmente, vamos encontrar alguns pontos dessa função. Veja a Tabela 3.

Tabela 3 – Encontrando pares ordenados para $f(x) = -2x$

x	**y = -2x**	**(x, y)**
-1	y = -2(-1)	(-1, 2)
0	y = -2(0)	(0, 0)
2	y = -2(2)	(2, -4)
3	y = -2(3)	(3, -6)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tomando dois pontos distintos da Tabela 3, construímos o gráfico da função $f(x) = -2x$ traçando a reta os liga (Figura 26).

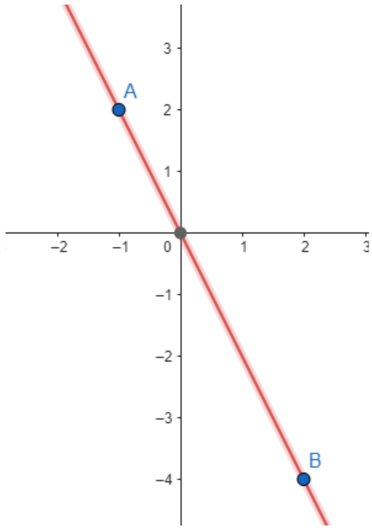
Um detalhe importante, é que todo gráfico de uma função linear passa pela origem do sistema cartesiano.

Função Constante

Dizemos que uma função de 1º grau é dita **função constante**, sempre que o valor de $f(x)$ permanece o mesmo, para qualquer que seja o valor de x. Com isso, seu coeficiente angular é igual a zero, ou seja, $a = 0$. Assim, a inclinação da reta é nula, e ela é paralela ao eixo x.

A função $f(x) = 4$ ou $y = 4$ é um exemplo de função constante.

Figura 26 – Construção do Gráfico da Função Linear $f(x) = -2x$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Definimos então uma função afim $f(x) = ax + b$, com $a = 0$ como uma **função constante**.

$$x \to b$$

$$f(x) = b$$

$$y = b$$

Exemplos:

- $f(x) = 5$, com $a = 0$ e $b = 5$
- $g(x) = -3$, com $a = 0$ e $b = -3$
- $h(x) = 1$, com $a = 0$ e $b = 1$

Vamos mostrar agora, a representação gráfica de uma função constante, digamos

$$f(x) = -2.$$

Inicialmente, vamos encontrar alguns pontos dessa função. Veja a Tabela 4.

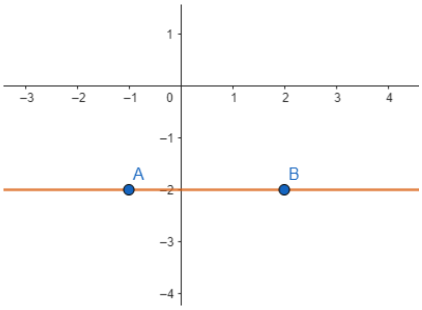
Tabela 4 – Encontrando pares ordenados para $f(x) = -2$

x	**y = -2**	**(x, y)**
-1	y = 0(-1) - 2	(-1, -2)
0	y = 0(0) - 2	(0, -2)
2	y = 0(2) - 2	(2, -2)
3	y = 0(3) - 2	(3, -2)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tomando dois pontos distintos da Tabela 4, construímos o gráfico da função $f(x) = -2$ traçando a reta os liga (Figura 27).

Figura 27 – Construção do Gráfico da Função Constante $f(x) = -2$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Vale observar que sendo o gráfico da função constante uma reta paralela ao eixo x, bastaria tomar um ponto da Tabela 4 e traçar a reta passando por este ponto e paralela ao eixo x.

Função Identidade

Dizemos que uma função de 1º grau é dita **função identidade**, sempre que, dado um valor x qualquer em seu domínio, a imagem associada a ele, é o próprio valor x, ou seja, $f(x) = x$. Com isso, seu coeficiente angular é igual a um, ou seja, $a = 1$ e seu coeficiente linear é igual a zero, ou seja, $b = 0$.

A função $f(x) = x$ ou $y = x$ é a escrita de uma função identidade.

Definimos então uma função afim $f(x) = ax + b$, com $a = 1$ e $b = 0$ como uma **função identidade**.

$$x \to x$$

$$f(x) = x$$

$$y = x$$

Vamos mostrar agora, a representação gráfica da função identidade

$$f(x) = x.$$

Inicialmente, vamos encontrar alguns pontos dessa função. Veja a Tabela 5.

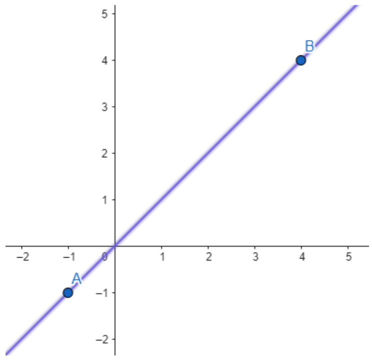
Tabela 5 – Encontrando pares ordenados para $f(x) = x$

x	$\mathbf{y = x + 0}$	**(x, y)**
-3	y = 1(-3) + 0	(-3, -3)
-1	y = 1(-1) + 0	(-1, -1)
2	y = 1(2) + 0	(2, 2)
4	y = 1(4) + 0	(4, 4)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tomando dois pontos distintos da Tabela 5, construímos o gráfico da função $f(x) = x$ traçando a reta os liga (Figura 28).

Figura 28 – Construção do Gráfico da Função Identidade $f(x) = x$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observamos que o gráfico de uma função identidade sempre passará pela origem e ainda, para cada valor de x será associado um valor identicamente numérico para y. O gráfico dessa função corresponde à bissetriz dos quadrantes ímpares.

2.4.2 Zero de uma Função Afim

O zero ou raiz de uma função afim, assim como vimos nas equações, é aquele valor atribuído a x que ao efetivarmos as contas, obtemos zero como resposta. É aquele valor que anula a função. É o valor de x tal que $f(x) = 0$, ou seja, o valor onde o gráfico da função intercecta o eixo x.

O zero de uma função afim sempre será dado pela fórmula

$$x = \frac{-b}{a}.$$

Para validarmos esse resultado, basta fazermos:

$$ax + b = 0.$$

Subtraíndo b em ambos os lados da igualdade, temos:

$$ax = -b.$$

Dividindo ambos os termos por a, uma vez que o coeficiente a é não nulo, ficamos com:

$$x = \frac{-b}{a}.$$

Concluímos assim, que de maneira geral, o zero da função afim é dado por um ponto (x, y) da forma: $(\frac{-b}{a}, 0)$.

2.4.3 Coeficientes de uma Função Afim

Vimos anteriormente que dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$, onde a e b são números reais e a não nulo, esses valores são ditos coeficientes.

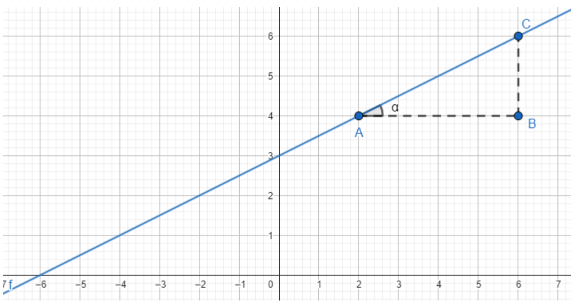
O coeficiente a, como já dissemos, recebe o nome de **coeficiente angular**, mas em muitos exercícios ou textos, ele pode receber os nomes de **valor variável** ou **taxa de variação**.

Já o coeficiente b, chamado de **coeficiente linear**, também pode receber os nomes de **valor inicial** ou **valor fixo**.

O coeficiente a, quando tratado como **taxa de variação**, podemos calculá-lo através de uma fórmula, se conhecemos dois pontos pertencentes ao gráfico da função. Vamos a ela.

Inicialmente, veja a Figura 29:

Figura 29 – Calculando o Coeficiente a



Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que o gráfico em questão é da função $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$, cujo zero é -6 e a reta corta o eixo das ordenadas em $(0, 3)$. Observe, através da malha quadriculada em forma de auxílio, que os pontos $A(2, 4)$ e $B(6, 4)$ estão sobre uma mesma reta paralela ao eixo x. Já os pontos $B(6, 4)$ e $C(6, 6)$ estão sobre uma mesma reta paralela ao eixo y. Assim, o ângulo formado em B é um ângulo reto e, o triângulo consequentemente, retângulo. O ângulo α no vértice A tem sua tangente valendo exatamente $\frac{1}{2}$, após observarmos que a medida do cateto oposto a α vale 2 unidades e a medida do cateto adjacente a α vale 4 unidades. Percebemos então que o coeficiente a tem o mesmo valor da tangente do ângulo que a reta faz com o eixo das abcissas.

Podemos então dizer que:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

onde (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são as coordenadas dos dois pontos conhecidos e que fazem parte do gráfico da função afim f.

3 A LUDIFICAÇÃO NO AUXÍLIO AOS ESTUDOS PARA AS PROVAS

É notório que a tecnologia vem evoluindo e trazendo consigo uma carga de desafios para que os professores acompanhem o desenvolvimento tanto das ferramentas metodológicas, bem como a evolução dos alunos com o uso dessas tecnologias. A ludificação é apenas um dos recursos em que os professores podem se apoiar para auxiliar nos estudos de seus discentes.

Diante do exposto, viemos apresentar uma proposta para utilização de jogos *online* com o auxílio de computadores, *tablets* ou aparelhos de celular que ajudarão aos professores de qualquer componente curricular a preparar seus alunos para as avaliações internas ou externas, bem como utilizar os mesmos jogos como metodologia ativa e avaliativa. Para isto usaremos os aplicativos de referência (8) e (9).

De acordo com Ilson (1)

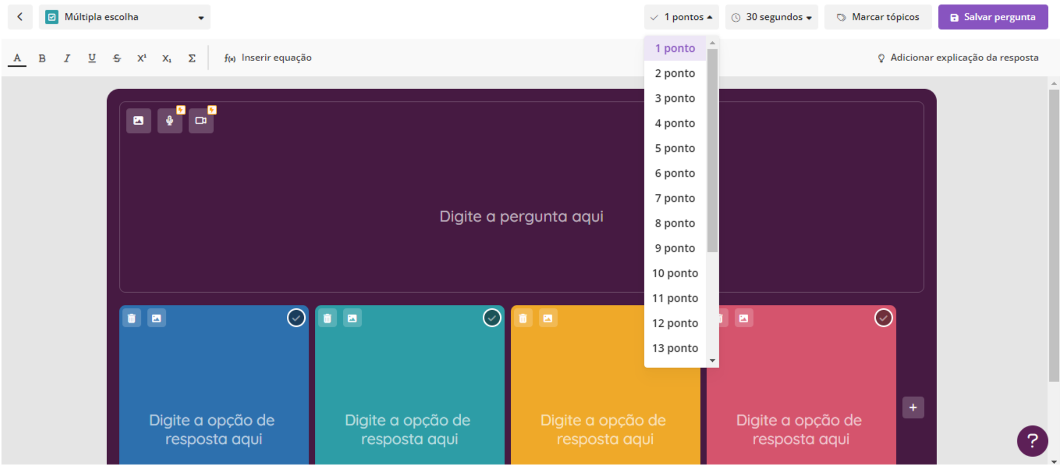
> A difusão e utilização dos dispositivos móveis que permitem a comunicação *online* é cada vez mais comum entre as crianças e os adolescentes, ainda assim, existe uma certa resistência por parte dos autores da educação em fazer uso das tecnologias em prol da própria educação. (ILSON MENDONÇA, 2019, p. 18)

Temos hoje em dia algumas ferramentas muito interessantes que podem ser utilizadas em sala de aula e que fazem com que uma revisão ou um momento de aprendizado fique muito mais interessante, motivador e desafiador. Essas ferramentas possuem um sistema próprio de pontuação em que o aluno, ao ler a pergunta proposta pelo seu professor, terá um tempo pré-estabelecido pelo próprio professor para resposta e, dependendo deste tempo de resposta e da exatidão dela, recebe uma determinada pontuação. Assim, os alunos acompanham seu desempenho e de seus colegas num jogo divertido e disputado.

O professor por sua vez tem a possibilidade de além de propor o exercício à sua escolha, também escolher se quer utilizar um sistema de múltiplas alternativas, sendo apenas uma correta, ou várias corretas, bem como utilizar um sistema de verdadeiro ou falso, ou ainda, a possibilidade de utilizar caixas para que os alunos digitem as repostas, sugerindo para o sistema, algumas opções. Ainda, dentro dessas alternativas, é possível que o professor, elabore as próprias respostas em cada opção. Ele também determina quanto tempo o aluno terá para responder a cada questão e quantos pontos valerá o acerto dela. Em diferentes ferramentas, mas que constituem um mesmo tipo de proposta há a opção de pontuação simples ou pontuação dupla. Numa segunda maneira há uma valoração que varia de 1 a 20 pontos (Figura 30).

As ferramentas utilizadas nos dão um ótimo suporte de funcionalidades e recursos de forma totalmente gratuita. O professor tem totais condições de realizar ótimos trabalhos avaliativos ou de fixação de conteúdos com os seus discentes dentro de sala de aula de

Figura 30 – Painel de criação (8)



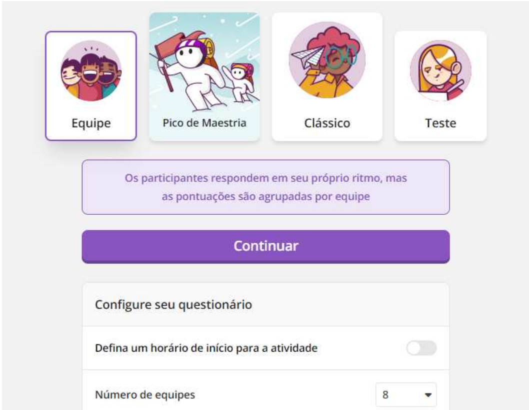
Fonte: Elaborada pelo autor.

forma totalmente lúdica, interativa e atrativa. De fato, os alunos irão se divertir bastante com a proposta. Caso o professor queira utilizar de recursos extras das ferramentas, ele pode optar pelas versões pagas, como por exemplo de (8) ou (9), que habilitam novas ferramentas um pouco mais evoluídas.

Devemos destacar também um modo muito interessante de se trabalhar com a ferramenta que é o modo equipe, onde os alunos podem fazer um trabalho colaborativo, de suporte um ao outro e, ainda assim, manter a competitividade e o prazer em fazer a atividade. Utilizamos duas ferramentas dentre muitas disponíveis, que foram testadas nos experimentos. Uma dá a possibilidade de se formar até 5 equipes, num total de 40 alunos ao mesmo tempo, enquanto que a outra dá a possibilidade de se formar 2 equipes com um total de até 20 alunos participando. A entrada dos alunos nas equipes se dá de acordo com a ordem de inserção do PIN fornecido pelo jogo que foi programado pelo professor e exposto em imagem projetada no quadro, mas que na falta de um aparelho para tal, pode ser escrito no quadro para que os seus alunos possam acessar ao jogo. No modo equipe, o jogo contabiliza, além das pontuações individuais, a pontuação por equipe. O detalhe é que os alunos não podem nomear suas equipes, o próprio jogo faz esse papel (Figura 31).

Ainda de importante destaque, falaremos do relatório produzido pelo jogo, que é uma funcionalidade que o professor pode explorar ao máximo para verificar a eficácia da atividade proposta, bem como um método de avaliação. Os relatórios gerados pelos jogos são muito bons e temos a opção de escolher como queremos acessar esse relatório. Podemos verificar quantos alunos acertaram determinada questão e quantos não acertaram. Ainda podemos ir além, podemos verificar quais alunos acertaram e quais alunos não acertaram esta determinada questão. Podemos também analisar o desempenho de um aluno em específico, clicando sobre o nome dele, abrimos o relatório individual e vemos quais foram as questões em que ele acertou e quais foram as que não acertou, mostrando

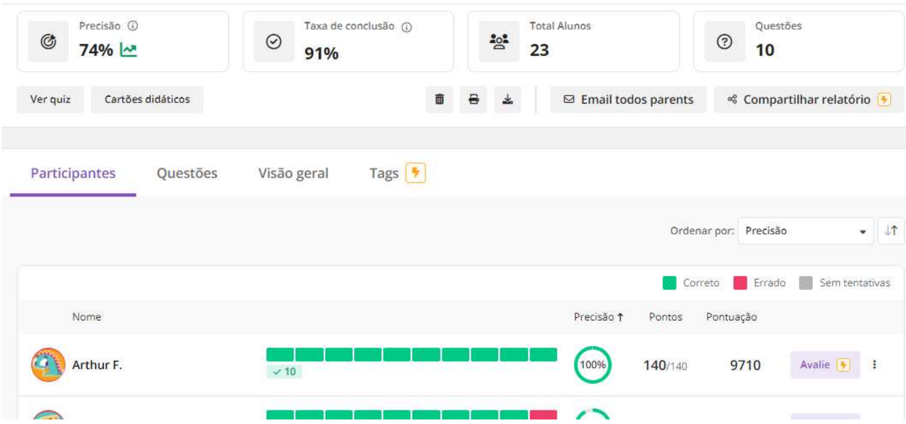
Figura 31 – Modos de Jogo (8)



Fonte: Elaborada pelo autor.

ainda um percentual e um gráfico desse desempenho. Temos também uma visão geral do jogo, mostrando graficamente e através de uma porcentagem, qual foi o rendimento da turma como um todo. Vemos na página principal do relatório, quantos jogadores participaram do jogo e quanto tempo eles levaram para finalizar o jogo (Figura 32).

Figura 32 – Exemplo de Relatório (8)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Enfim, essa funcionalidade pode e deve ser muito explorada pelo professor que propôs a atividade.

3.1 COMO COMEÇAR A CRIAR SEU PRÓPRIO JOGO?

Para que o professor possa criar seu próprio jogo de perguntas e respostas nas ferramentas utilizadas, ele deve primeiro criar uma conta, informando um endereço eletrônico e criando uma senha no aplicativo à sua escolha. Ele tem a opção também de baixar o aplicativo em seu aparelho de celular. Após fazer o acesso, o professor deverá fazer a escolha de tipo de usuário que será seu perfil, informando que sua conta será de um professor. Com seu acesso permitido ele já pode começar a criar seus jogos.

Dentro do aplicativo já existem vários jogos prontos feitos por outros professores, onde se pode fazer uma busca por assunto ou por componente curricular. Os jogos que o professor criar, poderão ou não ficar à vista dos outros usuários, dependendo da configuração em que esse jogo foi criado (Figura 33).

Figura 33 – Criando um Jogo (9)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Dentro da criação do jogo, o professor pode ir adicionando quantas questões ele quiser, não há limite para a quantidade de questões a serem utilizadas. Das duas opções de ferramentas testadas, há sim, em uma delas, um limite de caracteres que podem ser utilizados na elaboração da pergunta e da resposta. Numa outra, a quantidade é livre, podendo se digitar textos maiores e com mais detalhes. Temos a opção de anexar imagens em formato jpg que, previamente deve estar salva no dispositivo que está sendo utilizado para a programação do jogo. O professor precisa, uma a uma, ir digitando as perguntas e as respostas, bem como marcar como certa(s) a(s) resposta(s) da questão.

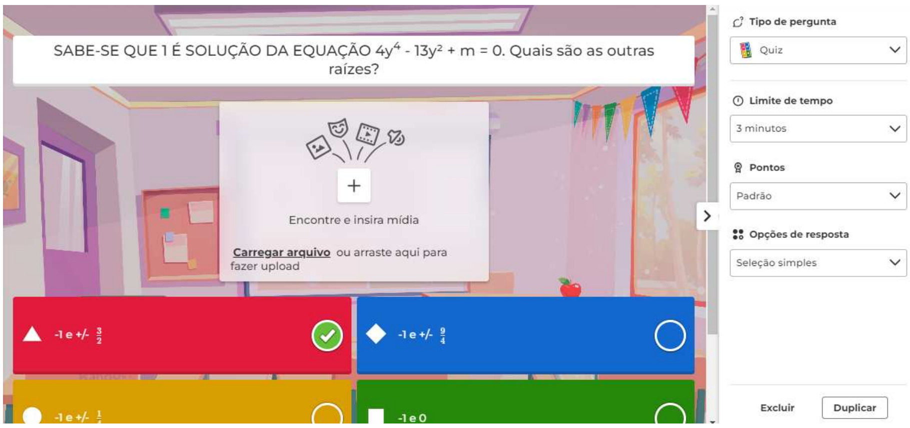
3.2 O APLICATIVO K

Diante das possibilidades e propostas, vamos apresentar aqui o aplicativo K (9), sendo esse o motivador para a pesquisa, uma vez que tal ferramenta já era utilizada em minhas práticas docentes e de grande potencial de fixação de conteúdos e aceitação por quase maioria dos alunos.

Em sua versão gratuita, o aplicativo K (9) possui algumas limitações na confecção dos jogos, e sua proposta é, ao decorrer do jogo, o controle de apresentação das questões estão no comando do aplicador do jogo. Ao se iniciar uma programação de jogo neste aplicativo, o professor irá se deparar com o limite de 120 caracteres digitados para sua pergunta. Caso precise enunciar um texto maior, terá que fazê-lo como uma imagem e anexar ao texto inicial como se fosse uma foto. Caso isso aconteça, não será possível anexar uma outra imagem ilustrativa na questão, a não ser que sejam na mesma imagem, o texto e a ilustração. Porém não seria ideal, pois a imagem ficaria um pouco grande e na tela do celular ou do computador do aluno, ficaria em tamanho reduzido, sendo sua leitura um pouco dificultada. O aplicativo furnece uma caixa de texto matemático para auxiliar na produção de questões que envolvam símbolos matemáticos.

Para a pontuação do aluno nas respostas, este aplicativo dá a possibilidade de valorar a questão como *pontuação padrão* ou *pontuação dupla*. Com sua escolha de resposta, o aluno pode receber de 0 a 1000 pontos, caso a questão seja de pontuação padrão ou de 0 a 2000 pontos, caso a questão seja de pontuação dobrada. Quanto ao limite de tempo, o professor pode escolher entre as opções de 5, 10, 20 ou 30 segundos, 1, 2, 3 ou 4 minutos, ou a opção de 1 minuto e 30 segundos. Com relação ao tipo de pergunta, pode-se optar pelo quiz, que é uma múltipla escolha de 2 a 4 respostas ou verdadeiro ou falso (Figura 34).

Figura 34 – Edição de Questões (9)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Caso o professor opte por inserir uma mídia na questão, ele tem as opções de inserir uma imagem dentre as disponíveis ou alguma imagem que esteja salva no seu dispositivo. Ele pode inserir GIFs, videos originários do YouTube ou Vimeo, e ele também pode inserir um áudio. Na programação do jogo, entre uma questão e outra, o professor ainda tem a possibilidade de ao invés de colocar uma pergunta com respostas, inserir um dispositivo para projeção explicativo com uma teoria (Figura 35).

As respostas das perguntas (que são de 2 a 4) são separadas por cor, associadas a uma forma geométrica. A resposta vermelha é associada a um triângulo, a resposta amarela a um círculo, a resposta azul a um losango e a resposta verde a um quadrado. Com isso, as questões ficam desassociadas às tradicionais letras a, b, c, d, etc.

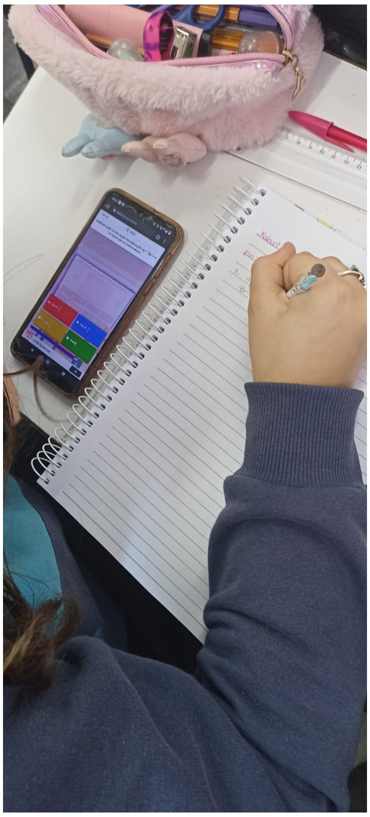
Ao iniciar o jogo, o próprio aplicaivo gerará um código PIN e um QR Code para que os alunos possam entrar na sala do jogo e participarem. Após entrarem na sala, eles deverão digitar um apelido pelo qual o professor o verá em sua tela (é importante que o

Figura 35 – Utilização do Recurso como Dispositivo para Projeção (9)

Fonte: Elaborada pelo autor.

professor cobre que o aluno coloque um nome que ele consiga reconhecer após o término do jogo, caso queira usar os recursos do relatório). Quando todos alunos participantes estiverem conectados e com seus respectivos nomes listados na tela do professor, o jogo poderá ser iniciado (Figura 36).

Figura 36 – Aluno com Acesso ao Jogo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Cada aluno terá acesso à mesma pergunta e terá o mesmo tempo de resposta para marcar sua opção. A contagem do tempo é feita de forma regressiva e fica exposta na tela para todos acompanharem. Ao finalizar o tempo, nenhum aluno conseguirá mais responder àquela questão. Não necessariamente precisaremos aguardar o tempo total estabelecido para a questão. Se todos os alunos responderem antes do tempo finalizar, o próprio aplicativo se encarrega de dar como finalizada a questão e o professor pode corrigir (caso seja sua proposta) na hora ou pode passar para a próxima pergunta e fazer uma análise ao término de todas as questões.

A proposta a ser utilizada vai variar de acordo com o professor organizador, mas no momento de transição de uma questão para a outra, o aplicativo fornece uma ordem de classificação dos alunos que possuem as melhores pontuações até o término daquela determinada questão. Há registros de quais alunos estão em maior evolução e quais alunos estão há mais tempo sem errar uma pergunta.

O modo *equipe* é uma variação de aplicação do jogo e também é muito divertida e atraente para os alunos. Nesse modo, dentro do aplicativo K (9), as equipes são limitadas a um número de 5 e os alunos a um número de 40. Os nomes das equipes são aleatórios e são fornecidos pelo próprio aplicativo. A escolha dos alunos que participarão de cada equipe é feita por ordem de acesso à sala do jogo. À medida em que os alunos vão digitando o PIN ou acessando via QR Code, eles são distribuídos um por um aos grupos existentes. A quantidade de grupos é escolhida pelo professor. Os participantes têm acesso sempre à mesma pergunta e ao mesmo tempo. Antes do tempo de resposta estabelecido pelo professor para a questão, os alunos têm um tempo para dialogarem entre si sobre qual resposta escolherem. Só após o término desse tempo é que o tempo estabelecido pelo professor é iniciado. As pontuações são contadas em grupo e individuais. O posicionamento classificatório é para a equipe, mas acessando o relatório, o professor tem controle também do rendimento individual.

Ao acessar a aba *biblioteca*, o professor tem acesso a todos os jogos por ele produzidos, organizados pela mais recente produção. Ele tem acesso aos rascunhos que por ventura estejam em construção, bem como aos favoritos que são aqueles em que o professor utilizou e que não foi de sua autoria, mas utilizou e gostou. Nessa mesma aba, ela ainda pode visualizar os jogos compartilhados com ele por outros professores ou até mesmo alunos. Já na aba relatórios, o professor terá acesso a todos os jogos que ele utilizou com seus alunos. Ao abrir um dos jogos, ele terá acesso às diversas informações que o próprio aplicativo fornece, tais como: qual a data e o horário em que foi aplicado o jogo, um resumo estatístico de cada jogador ou de cada questão, o tempo utilizado pelos alunos para realizarem o jogo, qual a formação final do pódio desse jogo, o percentual de respostas corretas da turma e a opção de relatórios avançados. Dentro do relatório de cada pergunta, o professor tem acesso a quantos alunos marcaram quais alternativas e quantos alunos não responderam àquela questão, ele tem um panorama geral de acertos (em porcentagem), o tempo médio gasto para resposta e quantos alunos responderam. Ele ainda verá qual a resposta que cada aluno marcou, em quanto tempo e qual a pontuação de cada um deles.

No relatório por aluno, os mesmos aparecem organizados por pontuação, classificados em ordem crescentes, do 1º ao último. Ao lado da classificação de cada aluno, aparece um gráfico com a porcentagem de respostas corretas e incorretas, o número de questões não respondidas por esse aluno e a pontuação final dele no jogo. Ao clicar no nome do aluno, o professor verá qual questão ele acertou e qual ele errou, bem como o tempo gasto para responder cada pergunta e a pontuação alcançada nessa pergunta.

3.3 O APLICATIVO Q

Com relação à nossa segunda possibilidade, o aplicativo Q (8) não impõe limite de caracteres digitados em sua pergunta, o que é uma enorme vantagem, pois podemos enunciar textos mais explicativos e até textos modelo PISM ou ENEM, caso seja do interesse do professor. Outra diferença bem significativa é que, utilizando este aplicativo, o professor não precisa esperar que todos os alunos respondam à primeira pergunta para só depois dar o comando para que eles passem à segunda pergunta, por exemplo. Os alunos vão respondendo às questões no seu tempo, e o algoritmo do jogo vai pontuando cada aluno de acordo com os critérios de acerto e tempo utilizados. As perguntas aparecem de forma aleatória para os alunos. Enquanto a primeira questão de um aluno é a de número 1, a de outro pode ser a de número 7, por exemplo.

Ao criar um jogo neste aplicativo, inicialmente o professor deverá escolher qual o tipo de questão que quer enunciar, se é múltipla escolha (onde pode configurar um verdadeiro ou falso) ou se é preencher um espaço em branco. Essas são as opções para a versão gratuita. Ao escolher a opção de múltipla escolha, ele irá encontrar uma caixa para a digitação do texto a ser enunciado e tem ainda a opção de anexar uma imagem do próprio dispositivo ou inserir um atalho da imagem. Tem a opção ainda de enunciar de 2 a 5 respostas, sendo uma correta ou várias corretas. Dentro de cada opção de resposta, também há a possibilidade de se anexar uma imagem ilustrativa. No editor de texto do aplicativo também tem funções matemáticas para auxiliar nas confecções desses enunciados. Nesse aplicativo, cada questão pode valer de 1 a 20 pontos, sendo à escolha do professor e, o tempo para resposta das mesmas varia de de 5 segundos a 15 minutos, sendo as opções: 5, 10, 20, 30 ou 45 segundos e 1, 2, 3, 5, 10 ou 15 minutos, além da opção de 1 minuto e 30 segundos.

Ao iniciar um jogo, o professor deverá primeiramente escolher qual o modo de jogo que ele deseja realizar, se é no modo clássico (onde os alunos respondem ao seu tempo), se é no modo teste (nesse modo, para avaliações, o aluno necessita fazer um acesso com cadastro), ou se é no modo equipe, onde o professor escolhe se quer que o jogo tenha de 2 a 8 equipes. Isso pode variar de acordo com o número de alunos em sala e com o número de alunos em cada equipe desejado pelo professor. De qualquer forma que seja, ao escolher o modo de jogo e iniciar, um código PIN será gerado para que os alunos entrem na sala do jogo para participarem. Os alunos digitam um apelido para participarem (fica a cargo do professor exigir ou não o nome como apelido) e escolherão um emoji para representá-los.

As demais funcionalidades são bem parecidas com as do primeiro aplicativo enunciadas aqui no texto, pois a proposta de ambos é basicamente a mesma, a utilização de questões teóricas ludificadas. Variando apenas no modelo estrutural de cada um.

Os jogos que o professor for criando, vão sendo guardados na "minha biblioteca"e poderão ser utilizados por outros professores, caso a opção de visualização pública seja ativada.

Os relatórios deste aplicativo são bem parecidos com os relatórios do primeiro, informando: precisão e taxa de conclusão, em porcentagem, total de alunos que participaram do jogo. Analisando o relatório por aluno, teremos uma barra verde e vermelha, representando questões certas e erradas, com o número de questões corretas e erradas logo abaixo dessa barra. Ao lado da barra vemos uma porcentagem de precisão no jogo, mais a frente quantos pontos o aluno conseguiu no total e a pontuação do jogo, que é diferente dos pontos alcançados. Sendo classificados de 1º ao último lugar. Analisando o relatório por questões, vemos uma barra verde indicando quantos alunos acertaram, uma barra vermelha com o número de alunos que erraram e uma barra cinza, com a quantidade de alunos que não responderam. Tem um gráfico mostrando a precisão de acerto geral da turma (em porcentagem) e o tempo médio de resposta dos alunos. Além de podermos visualizar quantos alunos marcaram as alternativas propostas. Se clicarmos nas barras de questões acertadas e erradas, veremos de fato qual aluno acertou e qual aluno errou essa questão, bem como quanto tempo ele usou para responder, podendo o professor verificar se o aluno de fato pensou e fez os cálculos para responder ou se simplesmente chutou a questão.

3.4 A PROPOSTA

A proposta de nosso trabalho é a utilização das questões ludificadas no auxílio aos estudos para as provas. Os experimentos foram feitos em duas turmas de 9º ano da escola em que o autor desta dissertação trabalha. As turmas são bem diferentes e estão localizadas em unidades distintas da mesma escola. As atividades foram realizadas sempre às sextas feiras que são os dias em que tenho exatamente duas aulas seguidas em cada turma (140 minutos). As atividades foram propostas para duas provas diferentes que essas turmas fariam. Vale salientar que como as unidades fazem parte de uma rede de ensino, as turmas fazem as provas no mesmo dia e no mesmo horário, não podendo nenhuma das turmas ser favorecida. Os conteúdos cobrados nas provas foram divididos nas confecções dos jogos de acordo com o nível de dificuldade dos mesmos e a quantidade de conteúdo cobrada na prova (Figura 37).

Para a primeira prova foi utilizado o aplicativo K (9) e, foram feitos dois jogos

Figura 37 – Jogos Elaborados Para a Pesquisa (9)

Fonte: Elaborada pelo autor.

em duas sextas-feiras distintas, nas duas turmas. O primeiro jogo foi feito para revisar os conteúdos de Equações Biquadradas, Equações Irracionais e Sistemas de Equações do Segundo Grau e o segundo para revisar o conteúdo de Semelhança de Triângulos. Já para a segunda prova, foi utilizado o aplicativo Q (8) e também seriam feitos dois jogos em duas sextas distintas, porém, por motivo pessoal de extrema tristeza, só foi aplicado na primeira sexta programada. O primeiro jogo, na primeira sexta feira, foi utilizado para revisar os conteúdos de relações e funções, mais especificamente, funções do 1º grau. Para a segunda sexta feira programada, o qual não foi aplicado o jogo, seriam revisados os conteúdos de Teorema de Pitágoras, Relações Métricas no Triângulo Retângulo e Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo.

3.5 O EXPERIMENTO

A primeira das quatro atividades programadas para realizarmos os jogos foi realizada no dia 11 de agosto de 2023. Esta etapa foi para mostrar que os imprevistos acontecem, que o professor tem que estar atento às possibilidades que a utilização de um aplicativo conectado a internet pode apresentar. A primeira das duas turmas fica num prédio onde a sala se encontra no 3º andar do mesmo. Talvez por isso, o sinal da rede de internet chegue com menos intensidade. Com isso, perdeu-se de 15 a 20 minutos da aula tentando fazer a conexão dos computadores do professor e dos dispositivos dos alunos. Após a conexão, a internet continuou instável durante todo o tempo de aplicação do jogo e oscilava muito entre desconexão e conexão tanto dos alunos quanto do professor. O fato do jogo ser conectado é um complicador. Devemos sempre aguardar a reconexão automática do jogo, para que não percamos a evolução de todos. O próprio aplicativo deixa essa mensagem quando há uma instabilidade de sinal.

A atividade foi proposta com 10 questões acerca dos assuntos Equações Biquadradas, Equações Irracionais e Sistemas de Equações do Segundo Grau e, talvez por ser um assunto muito denso, onde todas as questões requerem um tempo de resolução maior e com muitas contas a serem feitas por parte dos alunos e unido à instabilidade da internet neste dia, não conseguimos chegar ao final das 10 questões. O fato do jogo propor uma competitividade, mas também um momento de aprendizado, deixa nítido que este percalço desestimula a participação dos alunos. Nessa primeira turma conseguimos alcançar até a questão de número 7, tendo que finalizar a atividade pois finalizara o tempo das duas aulas. Partindo para a segunda turma, na segunda unidade, encontramos outras adversidades. Além de no mesmo dia a internet também apresentar instabilidade, o cabo hdmi utilizado para ligar o computador ao projetor estava danificado e, nesta turma, não foi feita a projeção da tela no quadro branco, tendo os alunos que verificarem as questões e as imagens ilustrativas apenas em seus dispositivos. O bom de se ter a tela projetada no quadro branco é que os alunos podem ver as imagens um pouco maiores e com um pouco mais de detalhe. Por muita coincidência, e também por conta dos empecilhos encontrados no dia, a segunda turma só conseguiu chegar à 7ª questão respondida. Além da instabilidade da internet, um outro fator que determinou a não realização das 10 questões no tempo programado foi o assunto denso ao qual estávamos revisando.

A segunda das quatro atividades programadas foi realizada no dia 18 de agosto de 2023. Também utilizando o aplicativo K (9), o conteúdo a ser revisado foi Semelhança de triângulo e utilizamos 8 questões. Nesse dia tudo funcionou perfeitamente, a internet estava totalmente estável, não havendo nenhum momento de desconexão e com isso, o jogo fluiu naturalmente e as 8 questões foram realizadas em tempo hábil e ainda terminamos antes do tempo previsto. Isso nas duas turmas deste dia. No contexto do assunto, temos algumas questões teóricas, que não dependiam de contas e muito tempo de raciocínio por parte dos alunos. Também, o desenvolvimento de questões de Semelhança de Triângulos são mais diretos e objetivos, onde os alunos gastam bem menos tempo que em uma equação biquadrada por exemplo, ou numa equação irracional. Sendo assim, o assunto a ser abordado durante o jogo é determinante para a quantidade de questões escolhidas durante o período de tempo disponível para a aplicação do jogo.

A terceira das quatro atividades programadas foi realizada no dia 22 de setembro de 2023. Essa atividade foi realizada utilizando-se o aplicativo Q (8), diferentemente das duas primeiras. O assunto revisado neste dia foi sobre Relações e Função do 1º grau. Tudo ocorreu perfeitamente como planejado, sem problemas relativos à conexão com internet (por parte do computador do professor) e realizado dentro do tempo programado. Alguns alunos perderam sua conectividade durante o jogo. O fato de termos algumas questões teóricas, envolvendo diagramas e representações gráficas facilitou no desenvolvimento da atividade e as questões em que eram necessárias a utilização de cálculos, tiveram mais tempo para resolução e consequentemente não interferiu na realização da atividade como um todo.

Para as duas primeiras atividades, onde utilizamos o aplicativo K (9), o objetivo era, a cada questão proposta, os alunos teriam um tempo pré estabelecido para resolvê-la e, após terminado esse tempo, faríamos uma explicação da mesma para toda a turma, podendo ao mesmo tempo, diante da sua resolução e da resolução do professor, fazerem perguntas e tirarem suas dúvidas que por ventura apareçam (Figura 38).

Figura 38 – Explicação aos Alunos no Quadro

Fonte: Elaborada pelo autor.

Mesmo naquela questão em que houve alto índice de acerto, por ser uma questão de baixa proficiência, fazíamos a explicação sobre ela e isso era previsto antes do início da atividade. Sendo assim fizemos a aplicação e correção das 7 primeiras questões da primeira atividade e das 8 questões da segunda atividade, nesse formato.

Com os problemas técnicos e com a densa matéria abordada na primeira atividade, os relatórios apontam 12 % de eficácia para a primeira turma e 25 % de eficácia para a segunda turma, medida em termos de acertos. Mas apesar dessa baixa eficiência no contexto geral, obtivemos bons resultados em questões classificadas como difíceis pelo próprio aplicativo. Essa classificação da questão com respeito à dificuldade da questão é feita de acordo com o tempo programado para sua resposta. Quanto maior o tempo programado para a resposta da questão, mais difícil é classificada essa questão. Acredito que esse baixo desempenho se deu por conta da instabilidade da conexão da internet da escola no dia, pois para o segundo dia de experimento, tivemos 37 % de eficácia para a primera turma e os mesmos 37 % de eficácia para a segunda turma. Percebemos excelentes resultados individuais nas duas turmas, com 2 alunos realizando com 100 % de eficácia as 8 questões e 5 alunos realizando com 88 % de eficácia as 8 questões, acertando um total de 7 delas.

Na terceira atividade, o modelo utilizado pelo aplicativo Q (8) permite que os alunos façam todas as questões em seu tempo e só após o término das resoluções de todos eles é que o professor faz suas ponderações sobre o assunto cobrado no jogo. Durante a realização da atividade na primeira turma, alguns alunos tiveram problemas com a conexão da internet, perdendo a evolução dentro do jogo no meio do caminho. Um dos problemas dos dois aplicativos utilizados durante o experimento é, que ao perder sua conexão total, o aluno não consegue retornar ao jogo durante sua realização. Os relatórios mostram uma eficiência de 33 % para a primeira turma e 61 % para a segunda. Com esse aplicativo, os alunos que por ventura terminem antes dos colegas, podem fazer uma segunda tentativa ou até terceira enquanto o jogo não foi finalizado pelo professor. Portanto, mesmo com a proficiência de 33 % da primeira turma, obtivemos resultados individuais de 84, 96 e até 100 %. Para a segunda turma, que é bem mais reduzida, quase a metade dos alunos da primeira, dos 61 % coletivos, observamos resultados individuais de 79, 91 e vários 100 %. Alguns alunos utilizando 2ª tentativa.

Independente de qual dos dois aplicativos o professor deseje utilizar, o importante a salientar é que ele conseguirá efetuar uma ótima atividade, seja avaliativa ou um revisional, em que os alunos se sintam motivados, interessados e engajados na proposta do professor. A utilização de meios eletrônicos é cada dia mais presente dentro de sala de aula e devemos estar sempre atentos a essas evoluções que nos permeiam.

3.6 A OPINIÃO DE PROFESSORES E ALUNOS

Com o objetivo de levantar opiniões de professores de escolas públicas, fizemos uma consulta tanto interna, na escola estadual onde o autor desta dissertação atua em um cargo efetivo, quanto em escolas em que outros professores atuam, acerca das ferramentas utilizadas na pesquisa deste trabalho. Talvez por uma aquisição relativamente recente das escolas em ativar laboratórios de informática, os colegas ainda desconhecem de tais ferramentas e nunca utilizaram em suas aulas ou tarefas. Isso nos mostra que com a recente informatização nas escolas, os processos educacionais e pedagógicos ainda caminham a passos lentos nesse sentido, mesmo com a utilização constante, ainda que para outros fins, de dispositivos eletrônicos, por parte dos alunos.

A utilização de tais ferramentas deve se apoiar principalmente em uma boa conexão de internet. Há locais em que os laboratórios não possuem computadores suficientes para acolher uma turma inteira de alunos. Ainda que isso ocorra, na maioria das vezes, deverá ser uma atividade executada em boa parte, por computadores compartilhados em duplas ou trios de alunos.

No entanto, de acordo com dados do NTE (Núcleo de Tecnologia Educacional) da SRE Juiz de Fora, temos hoje um cenário em que aproximadamente 88 % das escolas estaduais da cidade têm um laboratório funcional. Nossa SRE conta com 95 escolas estaduais (incluindo o Conservatório Estadual de Música) e, dessas, 93 escolas receberam computadores para laboratórios e, além disso, 84 escolas já estão com seus laboratórios funcionando. Outras 9 escolas estão com os equipamentos, porém o laboratório não está montado por problemas de reformas em rede física, elétrica ou lógica.

Embora desconheçam as ferramentas, os colegas professores ficaram curiosos em utilizar a ferramenta em seus processos de aprendizagens e, acreditamos que esta pesquisa irá os ajudar na introduzação de tais atividades.

De acordo com relatos de colegas professores que também atuam na rede pública de educação, temos escolas em que o laboratório é totalmente utilizável, e que os professores da escola em questão disputam muito o espaço. A rede de internet é ótima e disponível para professores e alunos. Porém também temos relatos em que os laboratórios são pouco utilizados por conta de uma rede de internet não tão confiável e que, o quantitativo de computadores não é satisfatório.

Agora, com o objetivo de elucidarmos um pouco da opinião dos alunos, mostraremos uma pesquisa em que realizamos em caráter anônimo, pedindo aos alunos que respondessem a um questionário impresso em folha A4 e que respondessem de forma mais sincera possível, com o objetivo de colaborar com o projeto de pesquisa do trabalho aqui apresentado. O título da pesquisa para os alunos foi: "Pesquisa Sobre o Uso de *Games* no Ensino de Matemática"e foi apresentado como um documento auxiliar ao trabalho de pesquisa para o Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT - UFJF). Nessa pesquisa, realizamos três perguntas sobre a utilização dos aplicativos acima citados, as quais foram:

1. Em sua opinião, a utilização de *games* como o Kahoot (9) e Quizizz (8) ajudam no aprendizado e são úteis como ferramentas para revisões de provas?

2. Das propostas de cada ferramenta, Kahoot (9) onde o professor determina o avanço das questões à medida que todos os alunos vão terminando ou o Quizizz (8) onde você faz as questões no seu ritmo e sem interrupções, qual sua preferência? Explique por favor.

3. É mais proveitoso para você a participação nos jogos de forma individual ou em equipe? Como cada uma dessas formas pode te ajudar no aprendizado e por quê?

Sobre as perguntas, levantaremos aqui, algumas respostas que julgamos interessantes e poderão nortear professores que se interetessem em utilizar esses jogos em suas aulas. Para a primeira pergunta, vamos mencionar algumas respostas a favor do uso dos *games* em aula e algumas respostas aversas ao uso deles. As respostas a favor que vamos mencionar são:

1. "Em minha opinião eu acho que sim, e acho que depende bastante da pessoa. Tem pessoa que é mais no caderno, de fazer exercícios. Tem pessoa que gosta de assistir videos no youtube. Mas eu acho que pelo aprendizado e os jogos digitais, acho que dá motivação de até chegar ao ranking, como no conhecimento. E para as revisões também acho ótimo".

2. "O kahhot e o Quizizz são excelentes formas de auxílio de ensino, principalmente quando o professor corrige as questões ao longo do quiz".

3. "Os jogos em formato de quiz ajudam na consolidação das ideias do que foi passado em sala de aula e funcionam como revisões descontraídas".

4. "Eu acho bem legal esse uso do kahoot e do quizizz, é muito bom para fazer revisões pois é um jogo que todo mundo gosta, então fica mais fácil de aprender".

5. "Sim, pois além desta nova forma de aprendizagem, nos divertimos fora e dentro de sala".

6. Sim, muito. É uma ferramenta divertida de aprender, descobrir dificuldades, melhorar o tempo que fazemos os cálculos".

7. "Sim, pois é um método diferente e é uma ótima ferramenta para revisão."

Já as respostas aversas ao uso dos *games* são:

1. "Em minha opinião, o uso dos jogos acabam não sendo um bom recurso para revisões, já que as partidas acabam deixando os alunos ansiosos e querendo responder o mais rápido possível. Porém os jogos são muito divertidos e deixam as aulas mais legais".

2. "Em minha opinião, o kahoot é uma boa ferramenta de aprendizado, maneiro. Esse jogo incentiva o aluno a aprender e a competir de uma forma saudável. Porém como revisão é horrível (com todo respeito), pois ninguém consegue aprender direito por conta da alta competitividade, todos querem ganhar. Por isso não é bom usar o kahoot como ferramenta de revisão".

Uma resposta que nos chamou a atenção na primeira pergunta foi: "Ajudam sim, mas não é a maneira mais efetiva, pois os alunos só ficam interessados em ficar em primeiro lugar e acabam nem ligando para a revisão. Às vezes passam as respostas entre si só para ficar no pódio. Porém é um método divertido, basta o interesse de todos".

Para a segunda pergunta, a respeito das preferências acerca dos dois aplicativos pesquisados, vamos enumerar algumas respostas interessantes:

1. "Eu tenho preferência com o kahoot pois acho que por ser a mesma pergunta para todos é melhor, pois o professor explica melhor a pergunta".

2. "Eu não tenho nenhuma preferência, já que o kahoot exige um pensamento rápido e é mais intenso, faz com que nos acostumemos com esta pressão. Em relação ao quizizz, é uma boa plataforma, ela permite ao aluno se concentrar mais, além de ser divertida".

3. "Eu prefiro o quizziz pois permite uma melhor execução. O kahoot nos insita a fazer rápido, o que pode gerar confusão. O quizziz te recompensa pelas vitórias consecutivas".

4. "Possuo o quizizz como preferido, já que o avanço nas questões com meu próprio ritmo e a chance das colas acontecerem é reduzida".

5. "O kahoot é melhor pois as questões são a mesma para todos, ficando mais fácil de discutir sobre."

6. "Eu prefiro o quizizz, pois, como disse acima, quando há tempo limitado, a vontade de vencer e ser o mais rápido é mais forte que a de aprender."

7. "O quizizz é mais divertido de fazer, pois consigo fazer com calma e sem pressão."

Para finalizar a pesquisa de opinião dos alunos participantes da pesquisa, mostraremos as respostas mais interessantes sobre a preferência de participação nos jogos de forma individual ou em equipe:

1. "Para mim, se mostrou mais proveitoso fazer em equipe, devido ao fato que se um aluno mostrar dificuldadeem alguma questão, os parceiros do time irão ajudá-lo para obter um número maior de pontos".

2. "Para mim a participação tem que ser individual se a pessoa quiser ver seu desempenho, erros e acertos, tempo em particular. A equipe, por outro lado, permite que a interação entre os integrantes possibilite outros caminhos de resolução e raciocínios mais rápidos".

3. "A forma de equipe é interessante quando todos estão na mesma questão, agora em questões diferentes gera bagunça. Acho o individual a melhor maneira".

4. "É mais proveitoso para mim os games ser feito individualmente. A forma individual "ajuda"por passar exercícios e em grupo ajuda o trabalho em equipe."

5. "Na minha opinião é mais proveitoso realizar atividades assim em grupo, pois todos do grupo podem compartilhar seu conhecimento e aprender mais do que se estivessem sozinhas."

6. "Gosto mais de fazer em equipe, pois tem alguém que conseguisse me ajudar em alguma questão que eu não saiba ou esteja em dúvida."

7. "Em equipe, pois dividimos e tiramos nossas dúvidas em conjunto."

Com essas infomrações, acho que o professor que se interessar em utilizar os *games* pesquisados em suas aulas, já terão uma boa gama de opiniões para saber qual utilizar em suas aulas.

4 CONCLUSÃO

Diante das enormes dificuldades encontradas em sala de aula com relação ao uso do celular, visto que em alguns municípios já se têm leis para proibição dos aparelhos dentro da escola, vemos que o recursos apresentado na pesquisa é um alento aos estudantes para minimizar a vontade de estar com esses aparelhos em mãos.

O recurso deve ser sim utilizado como forma de auxílio na fixação dos conteúdos trabalhados em sala, mas isso deve ser feito de forma programada, em concordância com a coordenação do segmento escolar e com suporte para que os estudantes possam aproveitar ao máximo esta experiência.

Numa situação onde os estudantes não tenham aparelhos conectados a dados móveis ou à uma rede de conexão, não é possível se ter esta experiência em sala. O recurso de utilizar uma sala de informática também é válido. Porém vemos que os laboratórios de informática das escolas públicas ainda apresentam muitos problemas, tais como quantidades insuficientes de computadores para acolher uma turma inteira de estudantes, bem como uma instabilidade de rede de dados, que é um agravante neste tipo de atividade. Os alunos devem levar seus cadernos para uma melhor experiência e desenvolvimento das atividades.

Caso seja necessário, sugerimos aos professores que por ventura queiram utilizar a ferramenta de pesquisa aqui apresentada, que utilizem os laboratórios de informática de forma que os computadores possam ser utilizados de forma compartilhada pelos alunos, formando duplas ou trios.

O recurso sempre será bem visto pelos alunos, cabendo ao professor elaborar o jogo da melhor forma possível e com a maior dedicação, para que fique algo bem interessante aos estudantes.

Percebemos, durante o experimento, que alguns poucos alunos não são adeptos ao uso desse tipo de atividade, mas o fato se explica por terem dificuldades visíveis em matemática e, com isso, ficam com vergonha de não acertarem as questões propostas e o nome delas aparecerem no posicionamento classificatório dos alunos sem acertos às questões. Porém, quando o jogo é proposto em equipes, estes mesmos alunos já se mostram mais à vontade em participar, pois os colegas de equipe os ajudarão e eles conseguirão “competir” sem que seu medo de não acertar as questões seja algo que os incomode.

Portanto, acredito que tanto os professores que pretendam utilizar o recurso quanto seus discentes estarão diante de uma proposta inovadora, atual e motivadora a desafios e interações aluno-professor e aluno-aluno.

A proposta apresentada, inspirada em trabalhos realizados pelo próprio autor em sua atividade docente, se faz muito prazerosa e até mesmo divertida, sendo muito recomendada sua utilização até mesmo em ambientes que não sejam sala de aula, como empresas e/ou reuniões.

REFERÊNCIAS

1 PRAZERES, Ilson Mendonça Soares. Gamificação no Ensino de Matemática: aprendizagem do campo multiplicativo. Maceió, 2019. Disponível em: https://www.repositorio.ufal.br/bitstream/riufal/5789/1/Gamifica. Acesso em: 04 mar. 2024.

2 GEOGEBRA. Disponível em: <https://geogebra.org>. Acesso em: 04 mar. 2024.

3 INKODO. Disponível em: <https://apps.microsoft.com/detail/9nblggh4s50q?hl=en-USgl=US>. Acesso em: 04 mar. 2024.

4 JÚNIOR, José Ruy Giovanni. CASTRUCCI, Benedicto **A Conquista da Matemática**. São Paulo: FTD, 2018.

5 DOLCE, Osvaldo. POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar**: geometria plana. São Paulo: Atual, 2005.

6 SOUZA, Joamir. GARCIA, Jacqueline. **Contato Matemática**: volume 1. São Paulo: FTD, 2016.

7 LIMA, Elon Lages. CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. WAGNER, Eduardo. MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio**: Volume 1. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

8 QUIZIZZ. Quizizz: Play to Learn. Disponível em: <https://quizziz.com>. Acesso em: 04 mar. 2024.

9 KAHOOT!. Kahoot: Learning games. Disponível em: <https://kahoot.com>. Acesso em: 04 mar. 2024.

10 SILVA, Mônica Ribeiro da. **A BNCC da reforma do ensino médio**: o resgate de um discurso empoeirado. Educação em revista , v. e214130, 2018.

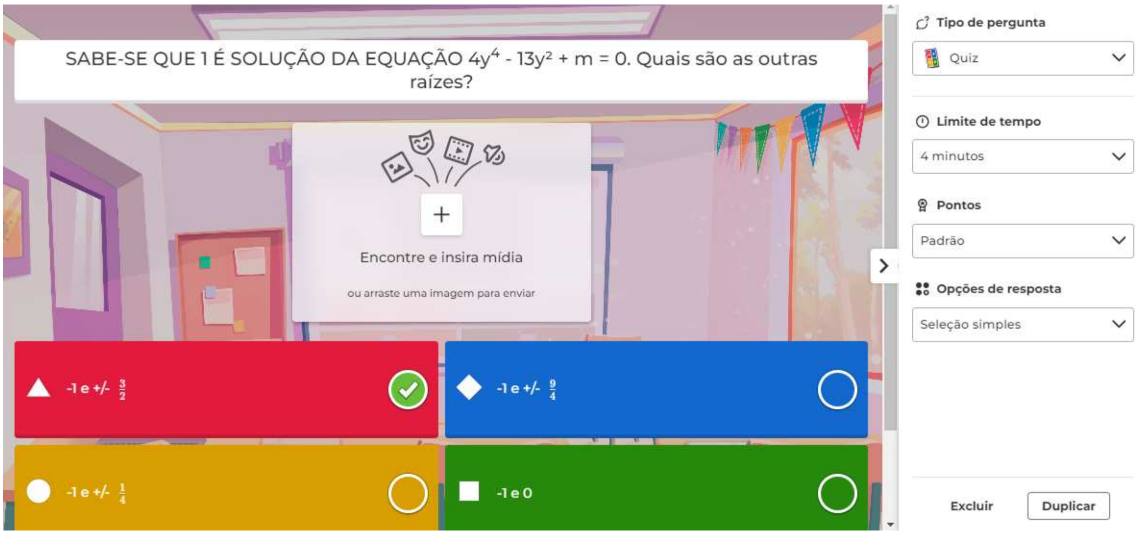
APÊNDICE A – EXERCÍCIOS APRESENTADOS NAS ATIVIDADES

Nesta seção, iremos deixar expostos os exercícios apresentados em cada dia da nossa pesquisa.

No primeiro dia, trabalhamos questões sobre equações biquadradas, equações irracionais e sistemas de equações do 2º grau. No segundo dia da pesquisa, trabalhamos questões referentes a semelhança de triângulos. Já no terceiro dia foram trabalhadas questões sobre relações e funções.

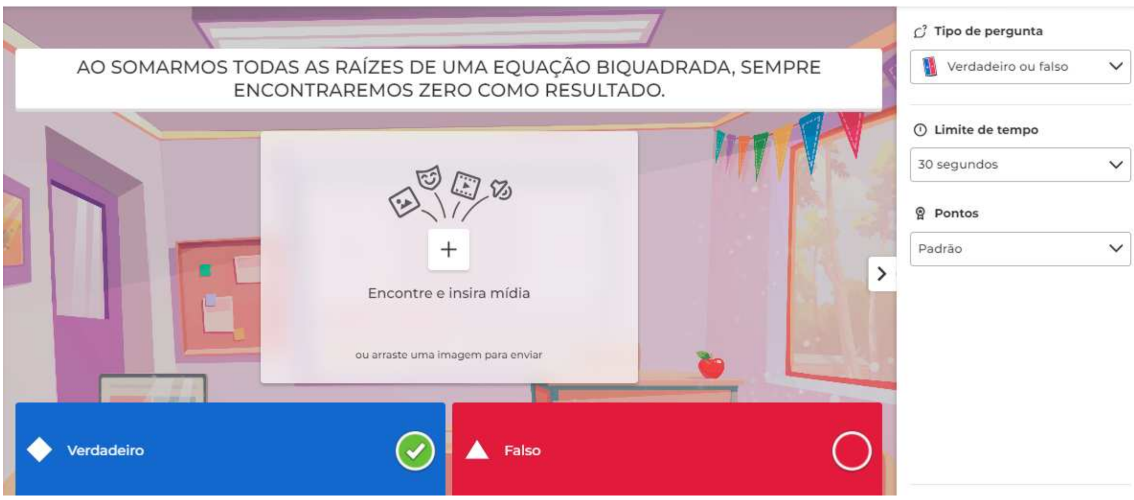
São elas:

Figura 39 – Questão 1 - 1º dia



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 40 – Questão 2 - 1º dia

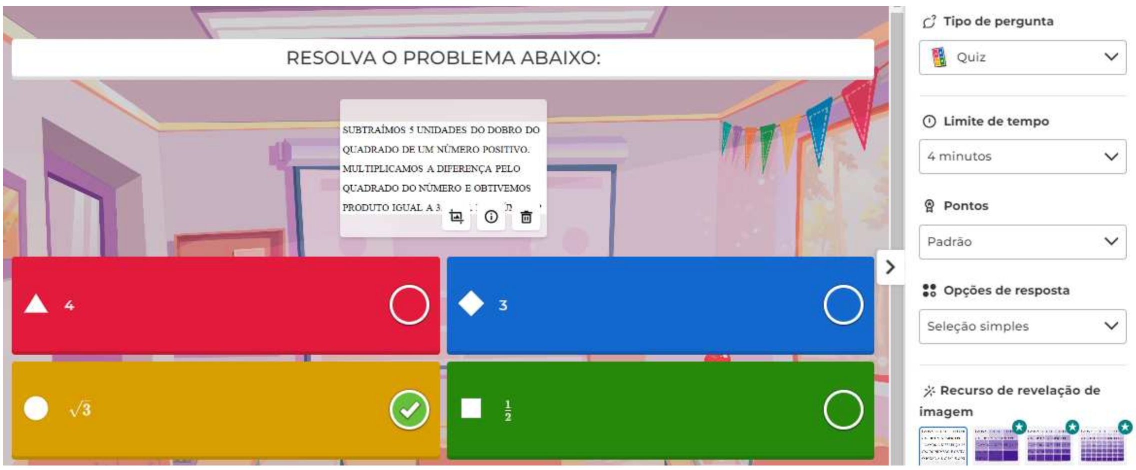


Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 41 – Questão 3 - 1º dia

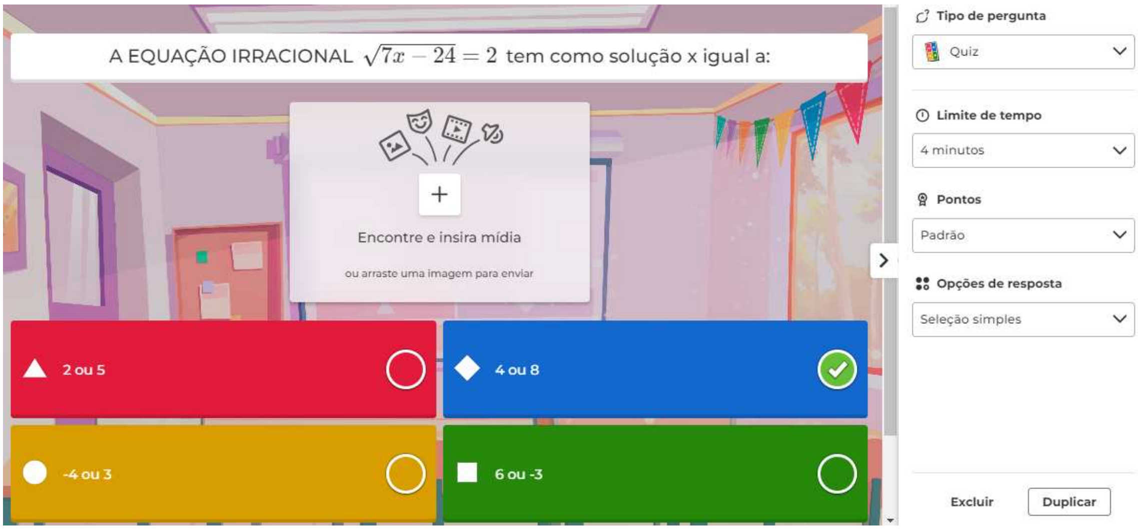
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 42 – Questão 4 - 1º dia



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 43 – Questão 5 - 1º dia



Fonte: Elaborada pelo autor.

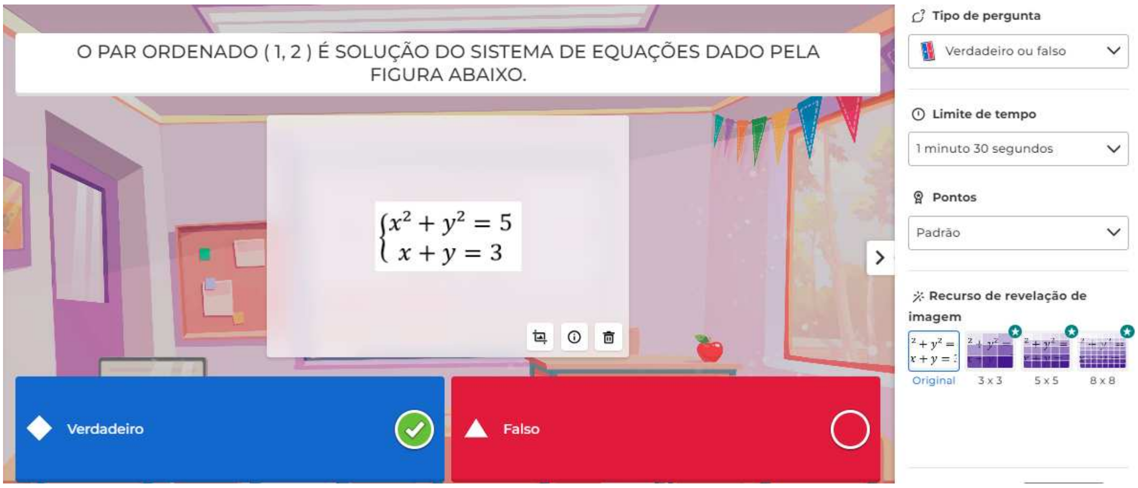
Figura 44 – Questão 6 - 1º dia

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 45 – Questão 7 - 1º dia

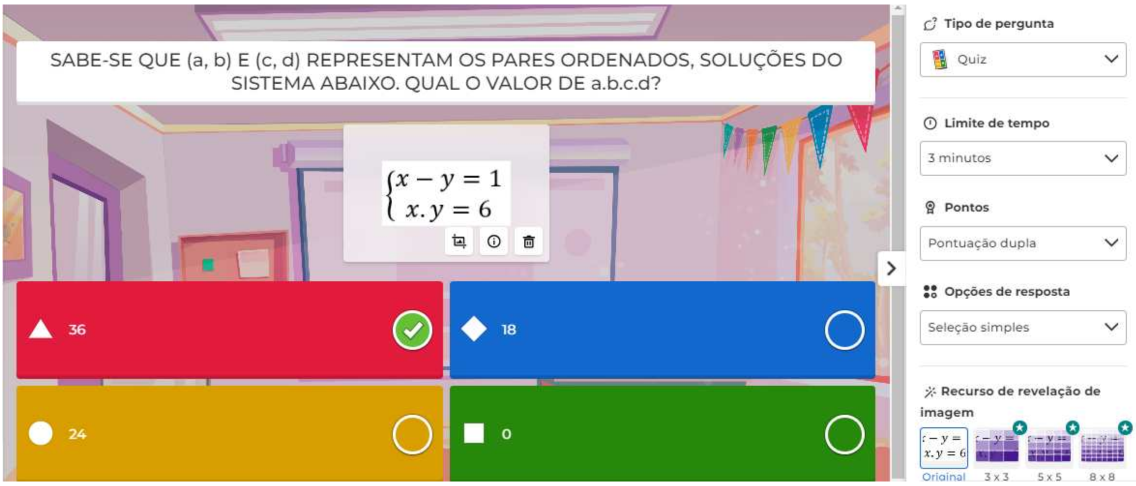
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 46 – Questão 8 - 1º dia



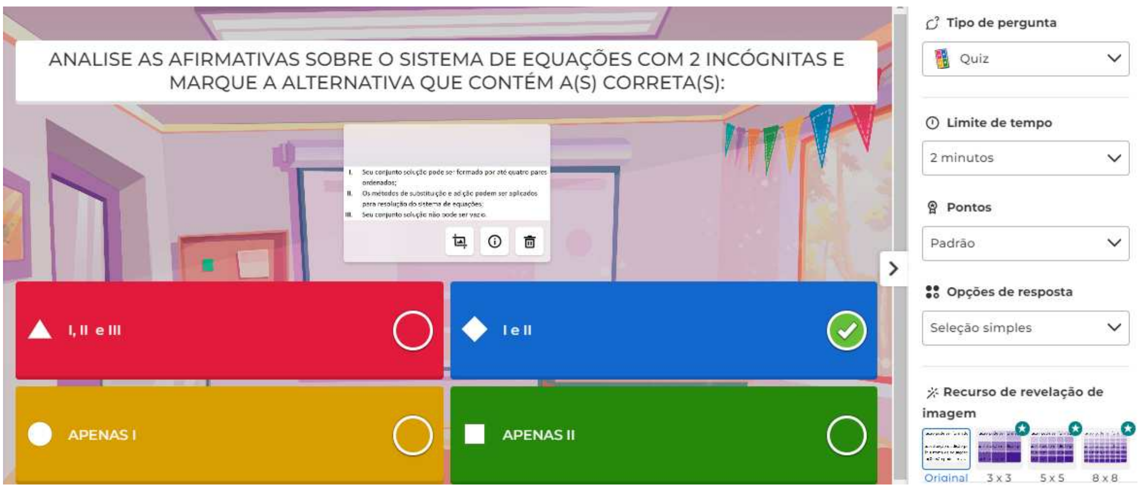
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 47 – Questão 9 - 1º dia



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 48 – Questão 10 - 1º dia



Fonte: Elaborada pelo autor.

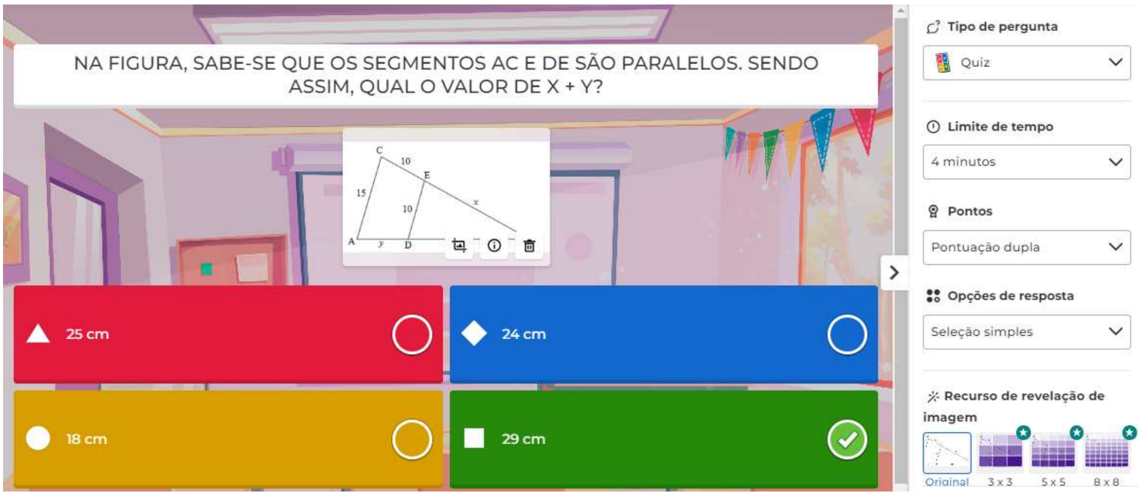
Figura 49 – Questão 1 - 2º dia

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 50 – Questão 2 - 2º dia

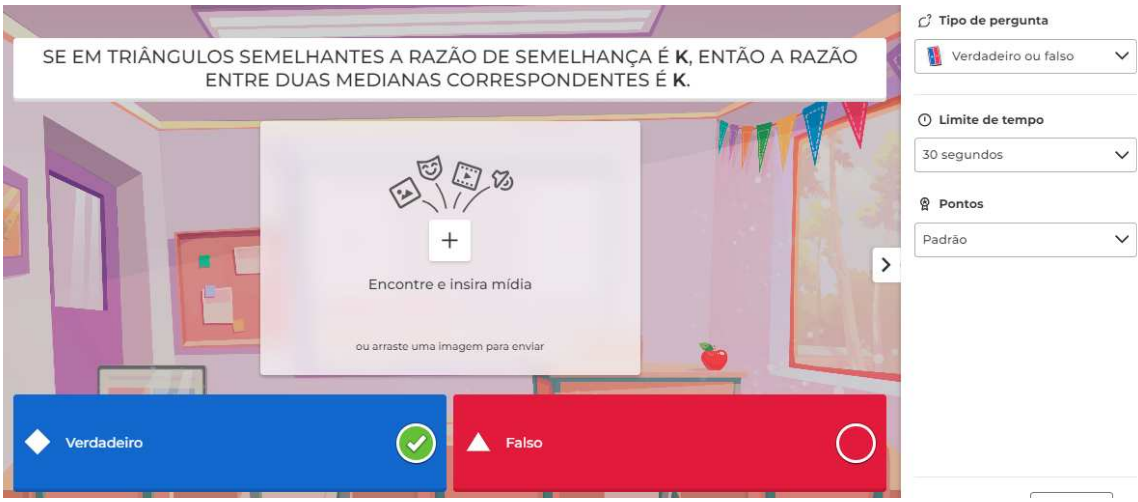
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 51 – Questão 3 - 2º dia



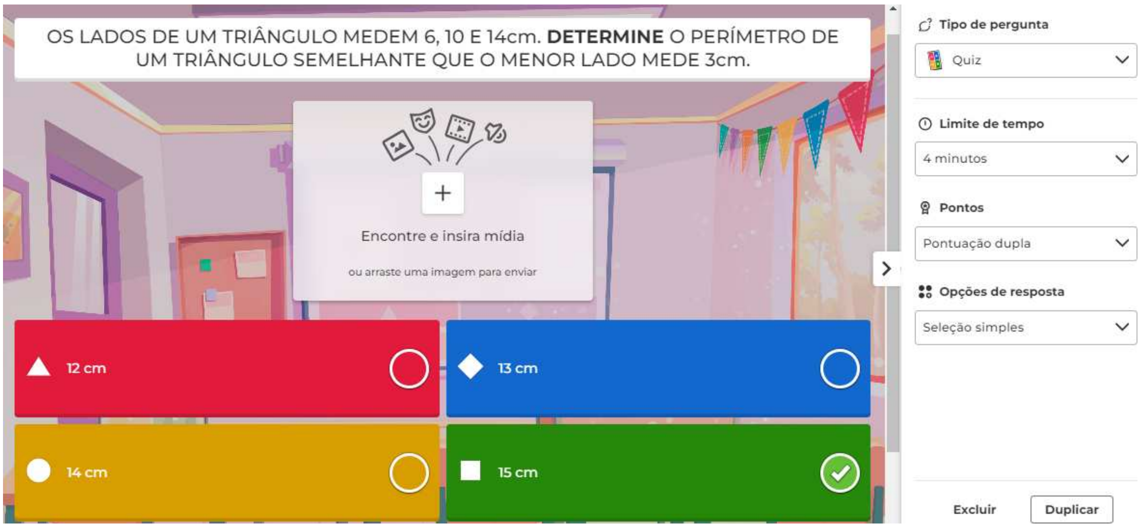
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 52 – Questão 4 - 2º dia



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 53 – Questão 5 - 2º dia

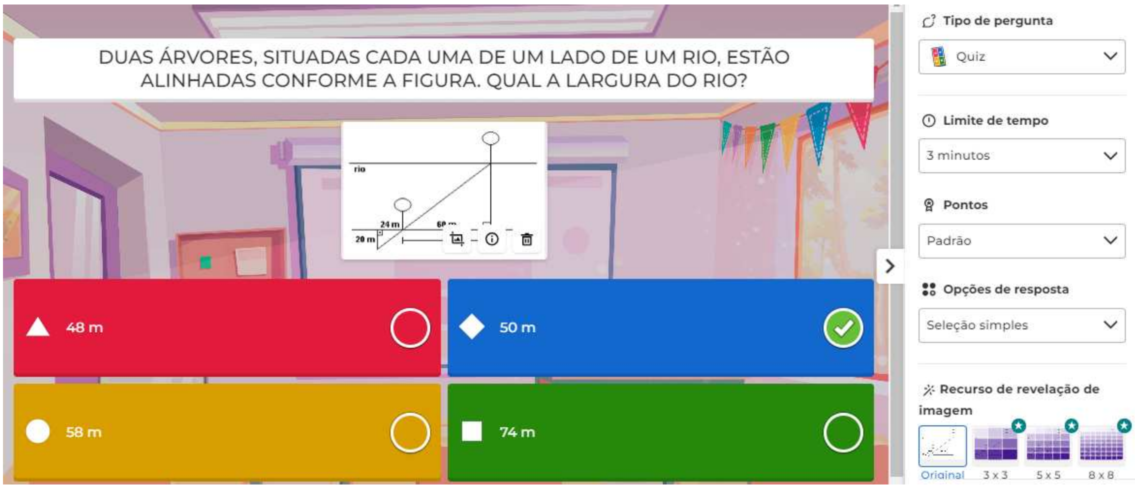


Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 54 – Questão 6 - 2º dia

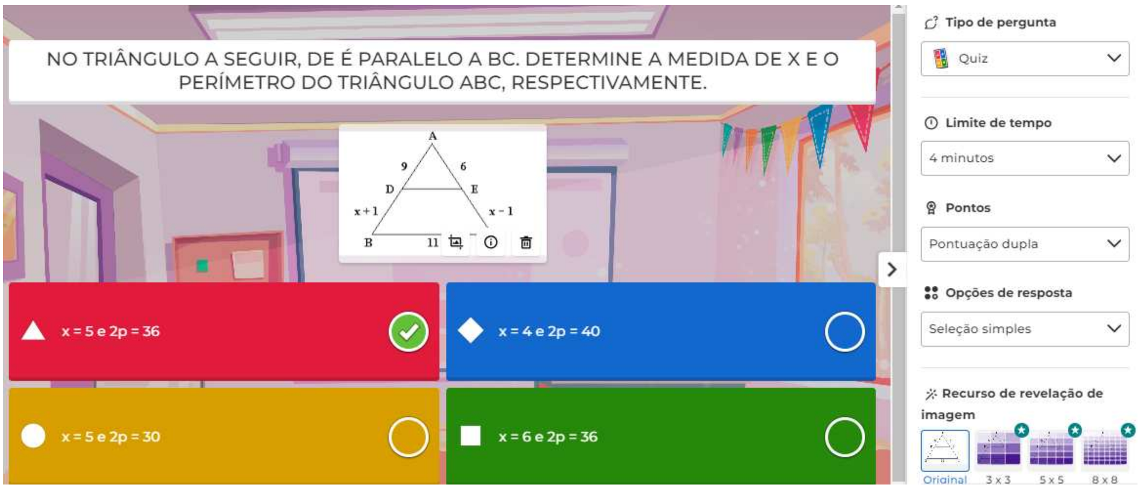
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 55 – Questão 7 - 2º dia



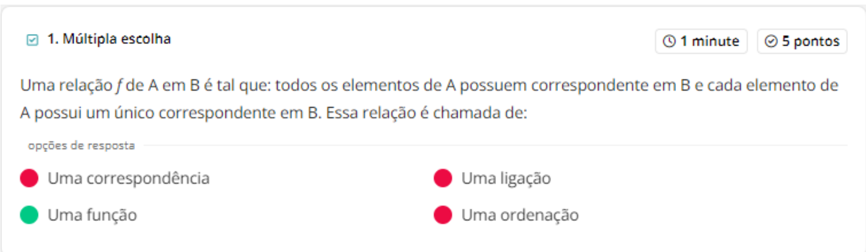
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 56 – Questão 8 - 2º dia



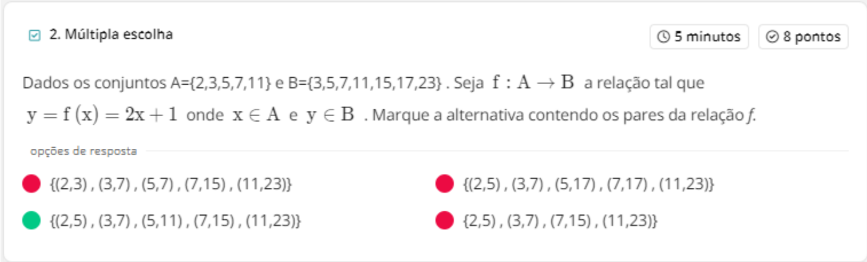
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 57 – Questão 1 - 3º dia



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 58 – Questão 2 - 3º dia



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 59 – Questão 3 - 3º dia

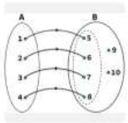
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 60 – Questão 4 - 3º dia

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 61 – Questão 5 - 3º dia

5. Múltipla escolha — 10 minutos — 15 pontos



Qual é a lei de formação para a função representada pelo diagrama abaixo?

opções de resposta

- $f(x) = 2x + 1$
- $f(x) = x + 4$
- $f(x) = 2x + 2$
- $f(x) = 6x - 1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 62 – Questão 6 - 3º dia

6. Múltipla escolha — 10 minutos — 17 pontos

Dada a função $f(x) = 2x^3 - 4$, marque a alternativa INCORRETA:

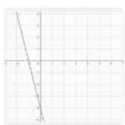
opções de resposta

- $f(1) = -2$
- $f(3) = -50$
- $f(-2) = -20$
- $f(-4) = -132$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 63 – Questão 7 - 3º dia

7. Múltipla escolha — 3 minutos — 10 pontos



Qual dos pontos descritos nas alternativas pertence ao gráfico da função *f* representada na figura?

opções de resposta

- (- 2, 2)
- (- 1, - 1)
- (1, - 3)
- (0, - 4)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 64 – Questão 8 - 3º dia

8. Preencha o espaço em branco — 10 minutos — 20 pontos

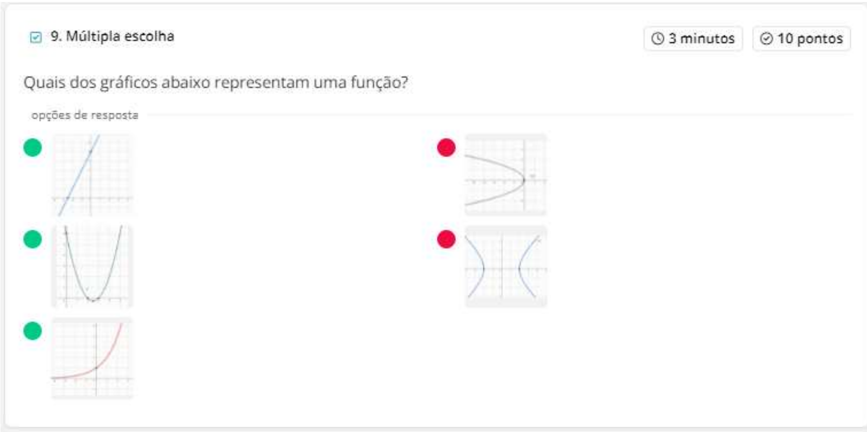
A Itelephônica cobra R$12,50 fixos mais R$0,40 por minuto de ligação. Qual o valor de uma conta com 25 minutos falados?

responda

R$22,50

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 65 – Questão 9 - 3º dia



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 66 – Questão 10 - 3º dia

Fonte: Elaborada pelo autor.

APÊNDICE B – PROPOSTA DE TRABALHO

Com o intuito de ajudar aos professores que por ventura desejem utilizar estas ferramentas em suas aulas, deixaremos aqui uma proposta de trabalho, elaborada a partir do aplicativo (8), para que possam, junto aos seus alunos, trabalharem de uma forma lúdica, divertida e eficaz.

- Sugestão de Plano de Aula

O professor, ao utilizar as ferramentas apresentadas na pesquisa aqui exposta, deverá se atentar aos passos em que seguirá para que possa estar apto a trabalhar com seus alunos. Caso seja o objetivo utilizar a ferramenta como forma de revisão, já ter trabalho os conteúdos de sua disciplina em sala é o principal. A confecção das questões a serem abordadas, de acordo com o conteúdo trabalhado, é o que demandará um tempo maior, principalmente se as questões escolhidas tiverem figuras ou gráficos.

O objetivo principal é que ao final da atividade, o professor possa, além de ter proporcionado um momento de distração para seus alunos, que tenha também proporcionado um momento de grande aprendizagem para os mesmos.

A proposta a ser apresentada se refere aos conceitos de **Teorema de Pitágoras**, **Relações Métricas no Triângulo Retângulo** e **Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo**, para alunos que estejam cursando o 9° ano do Ensino Fundamental. Objetivamos alcançar:

Habilidades BNCC: (EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos; (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes(2018, p.319).

De acordo com a **BNCC** (10):

> Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos. (BNCC, 2018, p. 298)

As atividades a serem preparadas pelo professor, devem seguir de acordo com seu planejamento e com sua disponibilidade de tempo. A proposta aqui apresentada, deve ser, preferencialemte, trabalhada em um período de dois tempos seguidos de 50 minutos cada. Pois como já conversamos, o intuito da atividade é além de trabalhar com uma dinâmica em que os alunos se sintam motivados, fazer um bom trabalho revisional ou de fixação de conteúdo.

A seguir, colocaremos recortes de um jogo acerca dos assuntos mencionados e que é apenas uma sugestão. Cada professor deve elaborar seu próprio jogo, de forma a trabalhar os assuntos lecionados em sala. Em média, para os problemas apresentados, disponibiliza-se um tempo que gira em torno de 3 minutos e a explicação vai demandar um tempo de 5 a 10 minutos, dependendo do assunto e das dúvidas que os discentes apresentem.

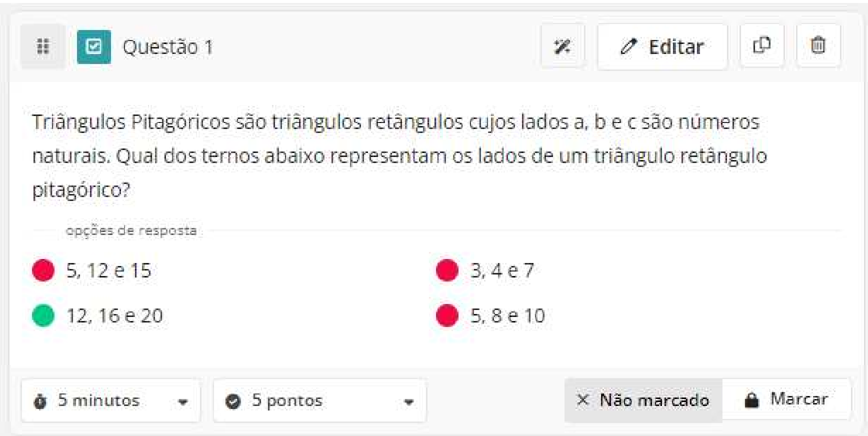
Esperamos que os alunos apresentem diferentes estratégias para as resoluções das questões propostas e que desenvolvam habilidades relacionadas às interpretações geométricas e trigonométricas.

- Sugestão de Atividade

Deixaremos adiante, as questões propostas, juntamente com suas resoluções comentadas.

- QUESTÃO 1

Figura 67 – Sugestão de Atividade: questão 1



Fonte: Elaborada pelo autor.

Resolução: Diante do que foi conversado e explicado em sala, o Teorema de Pitágoras é um "se, e somente se". Portanto, se vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo é retângulo. Além disso, o aluno deve lembrar que a medida da hipotenusa (maior lado do triângulo retângulo) sempre é substituída no primeiro membro da igualdade e que, a medida dos catetos devem ser substituídos no segundo membro, onde temos a soma de dois quadrados. Portanto, o aluno poderia testar as alternativas para verificar qual delas é válida. Ao analisarmos as alternativas, encontramos o terno 12, 16 e 20 como resposta, pois:

$$20^2 = 12^2 + 16^2$$

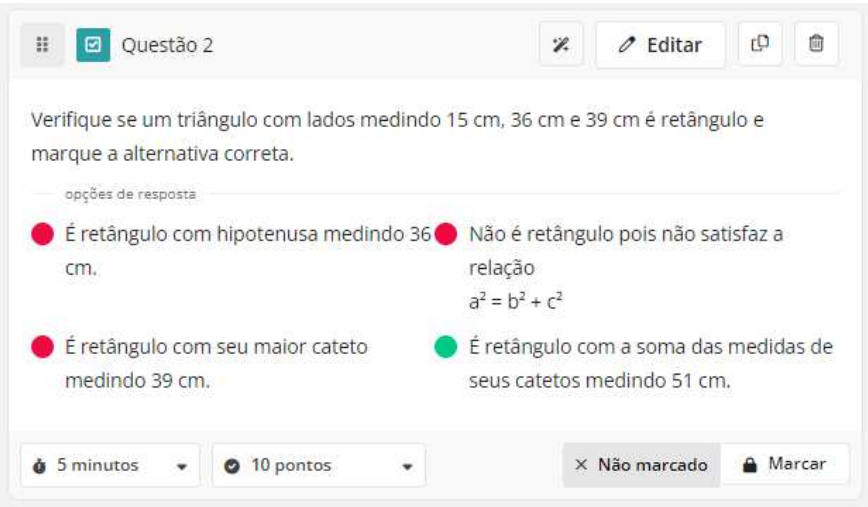
$$400 = 144 + 256$$

$$400 = 400$$

Portanto, uma relação válida.

- QUESTÃO 2

Figura 68 – Sugestão de Atividade: questão 2



Fonte: Elaborada pelo autor.

Resolução: Para verificar se o triângulo é retângulo, o aluno deve verificar se o terno em questão safistaz a relação $a^2 = b^2 + c^2$. Vejamos:

$$39^2 = 15^2 + 36^2$$

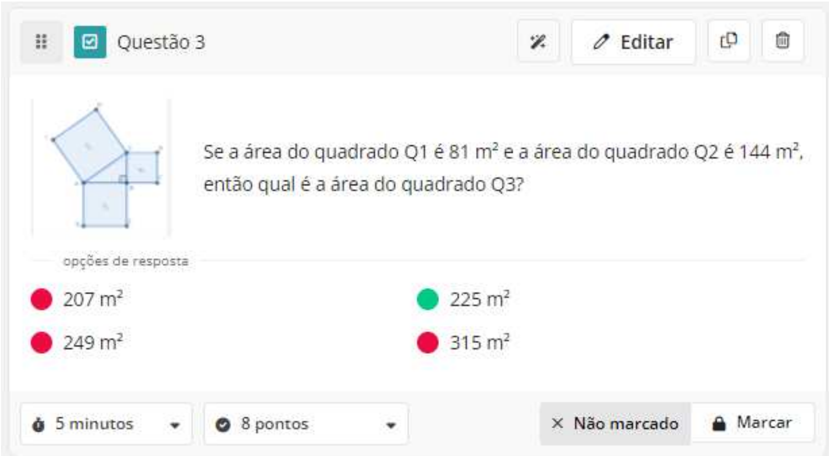
$$1521 = 225 + 1296$$

$$1521 = 1521$$

Portanto, como a relação é válida, o triângulo é retângulo e analisando as alternativas, verificamos que a resposta é que o triângulo é retângulo com a soma das medidas dos seus catetos medindo 15 cm + 35 cm = 51 cm.

- QUESTÃO 3

Figura 69 – Sugestão de Atividade: questão 3



Fonte: Elaborada pelo autor.

Resolução: Como a área de um quadrado é dada pela medida de seu lado, elevado ao quadrado e, ainda, os lados dos quadrados em questão são também lados de um triângulo retângulo, podemos utilizar o Teorema de Pitágoras para relacionar estas medidas. Repare que Q_3 é o quadrado maior, portanto seu lado está sobre a hipotenusa, enquanto que Q_2 e Q_3 são os quadrados em que seus lados estão sobre os catetos. Chamando de L_1 o lado de Q_1, L_2 o lado de Q_2 e L_3 o lado de Q_3, utilizando o Teorema de Pitágoras, temos:

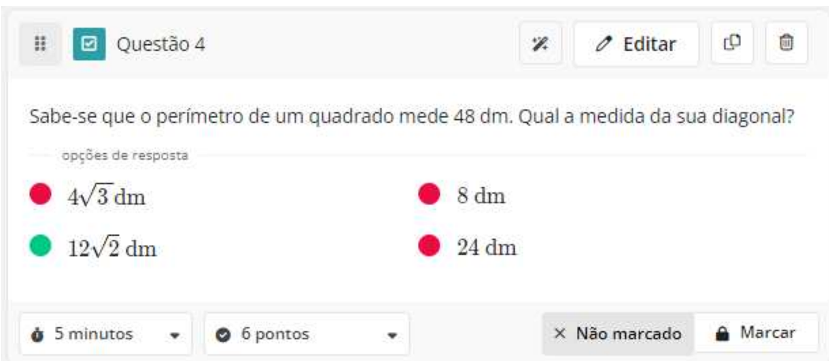
$$(L_3)^2 = (L_2)^2 + (L_1)^2$$

$$(L_3)^2 = 144 + 81 = 225$$

Portanto, percebemos que a área do quadrado Q_3 é de 225 m^2.

- QUESTÃO 4

Figura 70 – Sugestão de Atividade: questão 4

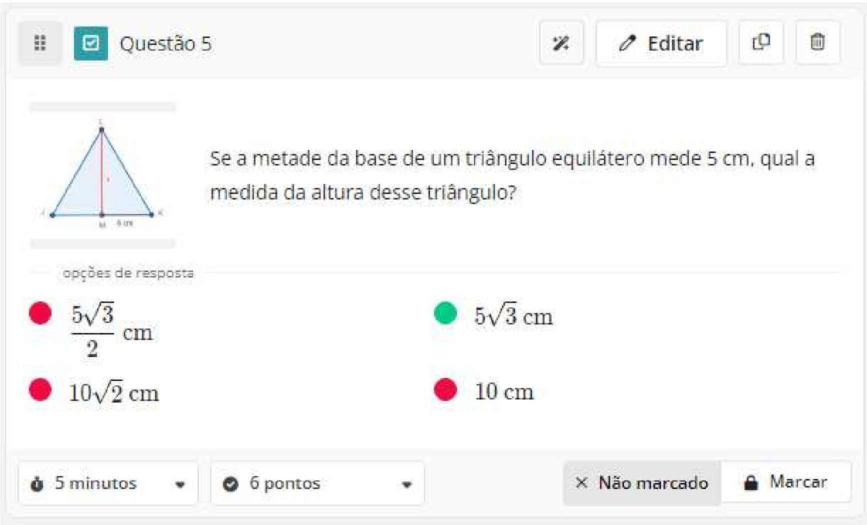


Fonte: Elaborada pelo autor.

Resolução: Para encontrarmos a medida do lado do quadrado a partir de seu perímetro, basta dividir este valor por 4, uma vez que os 4 lados do quadrado têm a mesma medida. Portanto, o lado do quadrado em questão mede $48dm : 4 = 12dm$. A diagonal do quadrado pode ser obtida pela fórmula $d = l\sqrt{2}$, onde l é a medida do lado do quadrado e essa fórmula, é obtida através da divisão do quadrado através de sua diagonal em dois triângulos retângulos congruentes e após se aplicar o Teorema de Pitágoras sobre a hipotenusa que é a diagonal do quadrado. Portanto a resposta da questão é $d = 12\sqrt{2}$, substituíndo l por $12dm$.

- QUESTÃO 5

Figura 71 – Sugestão de Atividade: questão 5



Fonte: Elaborada pelo autor.

Resolução: Como é informado que a metade da base do triângulo equilátero vale $5cm$, então significa que cada lado do triângulo equilátero mede $10cm$, uma vez que todos os lados do triângulo equilátero são de mesma medida. Sabemos que nos triângulos equiláteros, a altura, a mediana, a mediatriz e a bissetriz se coincidem. Assim, a altura divide o triângulo em dois triângulos retângulos congruentes, de catetos medindo $5cm$ e h e hipotenusa medindo $10cm$.

Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras, conseguimos encontrar a medida da altura. Vejamos:

$$l^2 = (\frac{l}{2})^2 + h^2$$

$$10^2 = 5^2 + h^2$$

$$100 = 25 + h^2$$

$$h^2 = 100 - 25$$

$$h^2 = 75$$

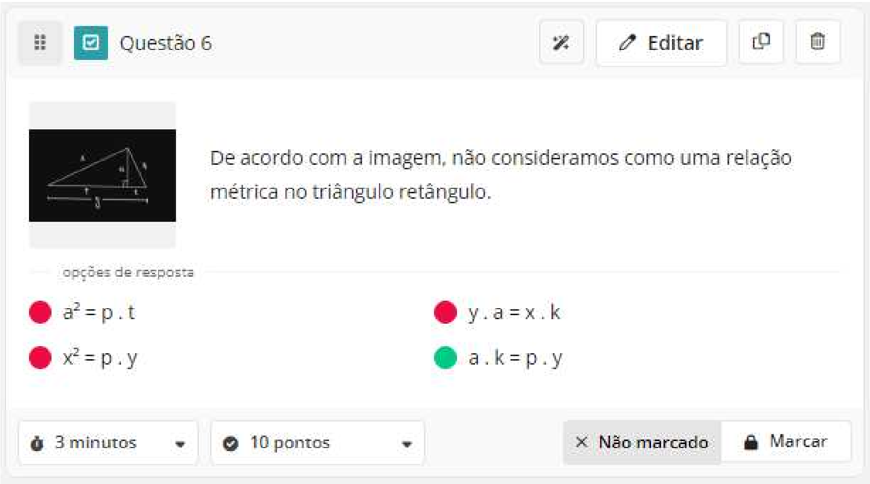
$$h = \sqrt{75}$$

$$h = \sqrt{25.3}$$

$$h = 5.\sqrt{3}cm$$

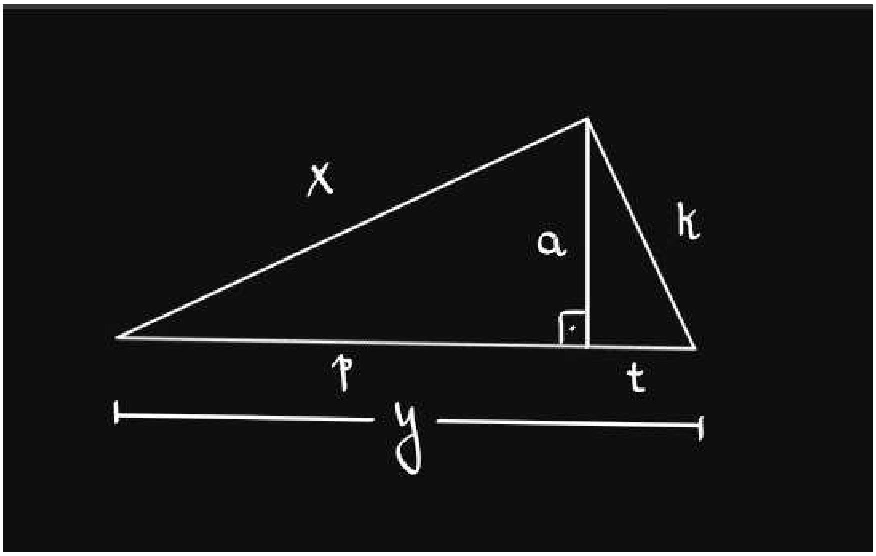
- QUESTÃO 6

Figura 72 – Sugestão de Atividade: questão 6



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 73 – Imagem Ampliada: questão 6



Fonte: Elaborada pelo autor.

Resolução: De acordo com as relações métricas no triângulo retângulo, obtidas através de semelhanças de triângulos e, diante do problema proposto, o aluno deveria se recordar das relações estudadas em sala e verificar qual das relações propostas, não atendia a uma relação verdadeira. Vamos analisar uma por uma:

$$a^2 = p.t$$

Essa relação é válida, pois como visto em sala, "o quadrado da altura é igual ao produto das projeções".

$$x^2 = p.y$$

Essa relação é válida, pois como visto em sala, "o quadrado da medida de um cateto é igual ao produto da sua projeção pela hipotenusa".

$$y.a = x.k$$

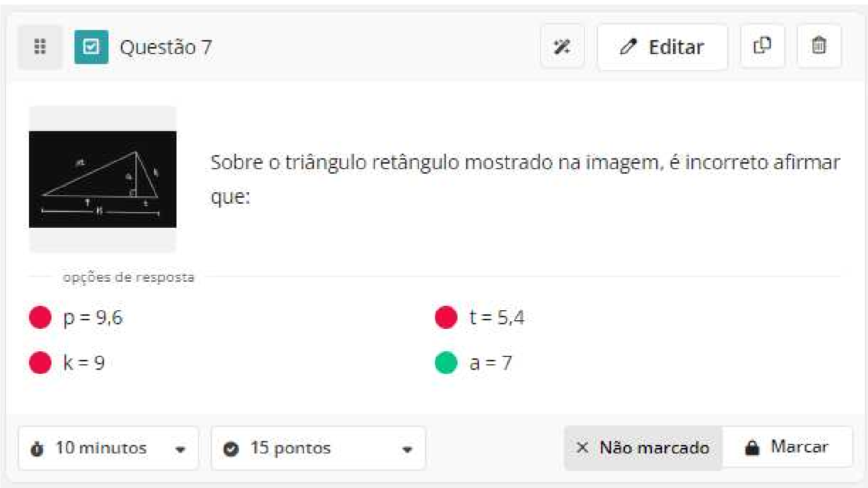
Essa relação é válida, pois como visto em sala, "o produto da medida da hipotenusa pela altura é igual ao produto das medidas dos catetos".

$$a.k = p.y$$

Essa relação não é válida, pois não é verdade que "o produto da altura por um cateto é igual ao produto de uma projeção pela hipotenusa".

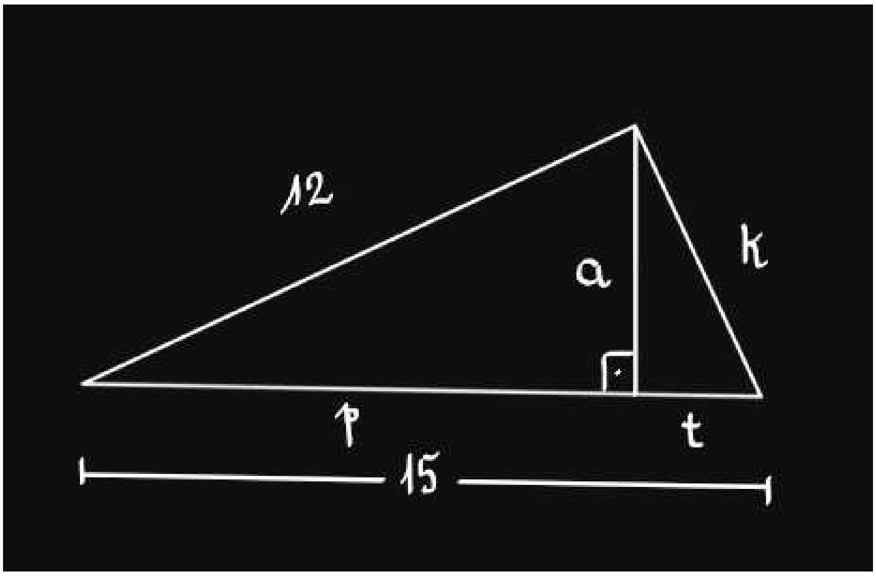
- QUESTÃO 7

Figura 74 – Sugestão de Atividade: questão 7



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 75 – Imagem Ampliada: questão 7



Fonte: Elaborada pelo autor.

Resolução: Após os comentários em sala de aula, os estudantes devem entender que com duas medidas quaisquer no triângulo, é possível encontrar todas as outras. Na questão então, o estudante deve efetuar os cálculos através das relações métricas estudadas, para cada incógnita a ser calculada, e dizer de fato qual é a que está com valor incorreto dentre as alternativas.

Vamos iniciar pela incógnita p:

$$12^2 = p.15$$

$$144 = 15p$$

$$p = \frac{144}{15}$$

$$p = 9,6$$

Portanto o valor de p está correto.

Vejamos a incógnita k, utilizando o Teorema de Pitágoras:

$$15^2 = 12^2 + k^2$$

$$225 = 144 + k^2$$

$$k^2 = 225 - 144$$

$$k^2 = 81$$

$$k = \sqrt{81}$$

$$k = 9$$

Portanto, o valor de k está correto.

Vejamos a incógnita t:

$$k^2 = t.15$$
$$9^2 = 15t$$
$$81 = 15t$$
$$t = \frac{81}{15}$$
$$t = 5,4$$

Portanto, o valor de t está correto.

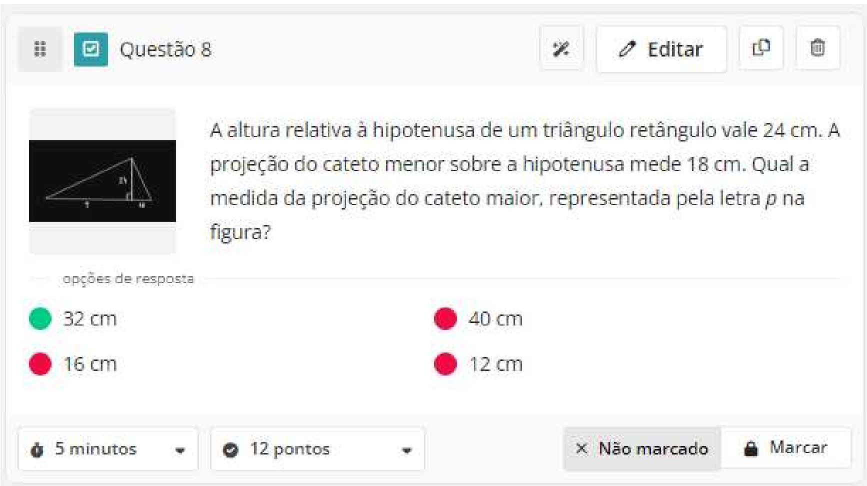
Por fim, vejamos a incógnita a:

$$a^2 = p.t$$
$$a^2 = (9,6)(5,4)$$
$$a^2 = 51,84$$
$$a = \sqrt{51,84}$$
$$a = 7,2$$

Logo, a incógnita que está com o valor incorreto é a incógnita a.

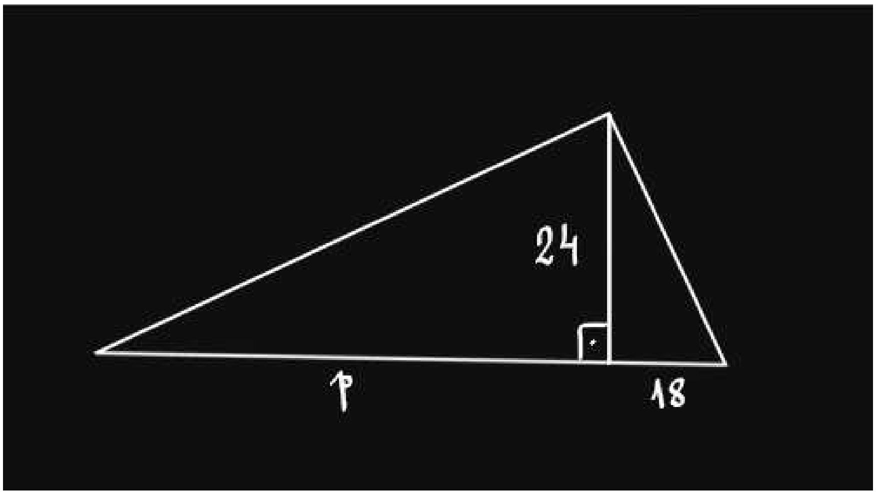
- QUESTÃO 8

Figura 76 – Sugestão de Atividade: questão 8



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 77 – Imagem Ampliada: questão 8



Fonte: Elaborada pelo autor.

Resolução: Para essa questão, o estudante deve aplicar a relação métrica relativa à altura e às projeções:

$$24^2 = p.18$$

$$576 = 18p$$

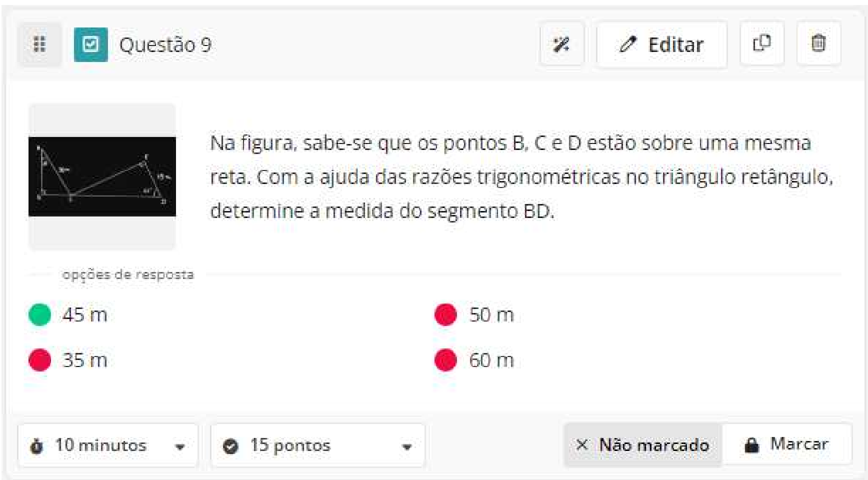
$$p = \frac{576}{18}$$

$$p = 32$$

Portanto, a projeção do cateto maior sobre a hipotenusa, vale $32cm$.

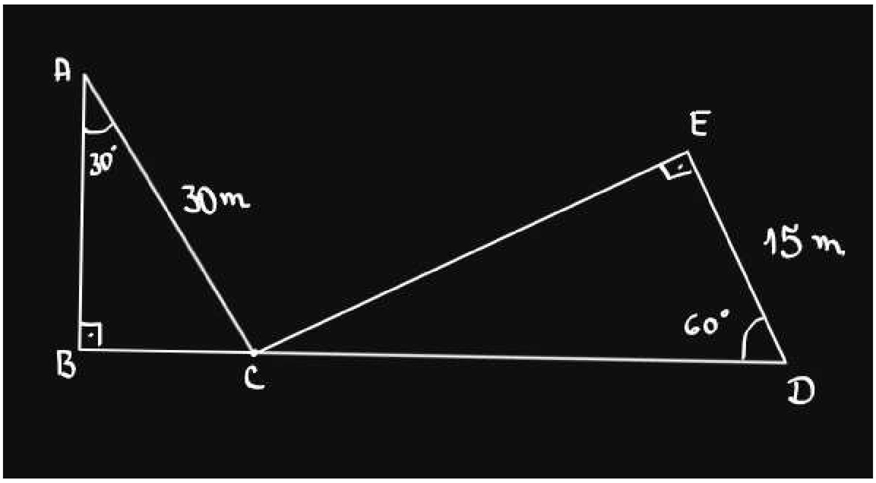
- QUESTÃO 9

Figura 78 – Sugestão de Atividade: questão 9



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 79 – Imagem Ampliada: questão 9



Fonte: Elaborada pelo autor.

Resolução: Para encontrarmos a medida do segmento $\overline{BD}$, devemos primeiro encontrar a medida do segmento $\overline{BC}$ no $\Delta\ ABC$ e posteriormente, a medida do segmento $\overline{CD}$ no triângulo $\Delta\ CDE$. Tudo isso, utilizando-se das razões trigonométricas estudadas em sala de aula. Para finalizar, somamos as medidas de $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ para encontrarmos $\overline{BD}$.

Para calcularmos $\overline{BC}$, utilizaremos a relação de seno no $\Delta\ ABC$, pois o segmento $\overline{BC}$ está oposto ao ângulo de 30° e temos a medida da hipotenusa disponível. Portanto:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\overline{BC}}{30}$$

Substituindo o valor do $\operatorname{sen} 30^\circ$, temos:

$$\frac{1}{2} = \frac{\overline{BC}}{30}$$

Utilizando o Teorema Fundamental das Proporções, encontramos que:

$$\overline{BC} = 15m$$

Para calcularmos a medida de $\overline{CD}$, utilizaremos a relação de cosseno no $\Delta\ CDE$, pois o segmento $\overline{CD}$ é a hipotenusa do triângulo e temos que $\overline{DE}$ é adjacente ao ângulo de 60°. Assim:

$$\cos 60^\circ = \frac{15}{\overline{CD}}$$

Substituíndo o valor do $\cos 60^\circ$, temos:

$$\frac{1}{2} = \frac{15}{\overline{CD}}$$

Multiplicando-se os meios e os extremos, temos:

$$\overline{CD} = 30$$

Assim, como

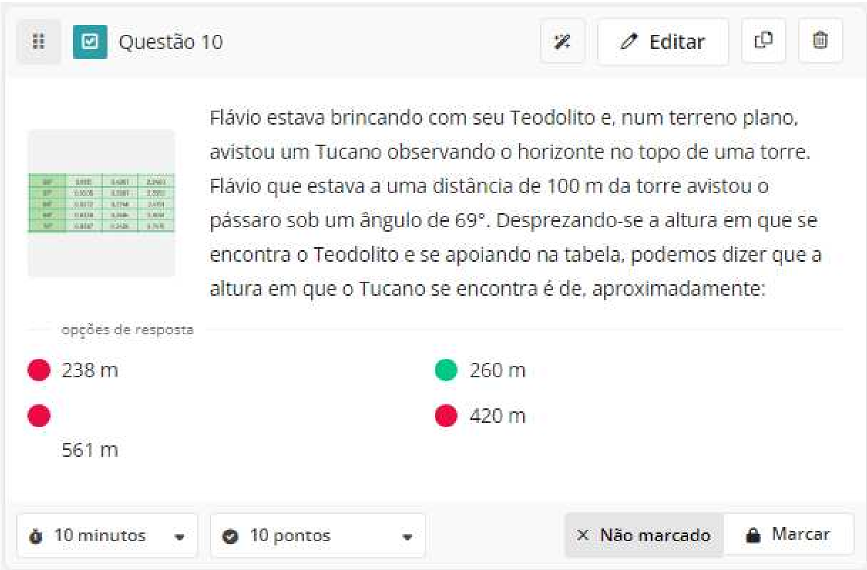
$$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD}$$

Temos que

$$\overline{BD} = 15 + 30 = 45$$

- QUESTÃO 10

Figura 80 – Sugestão de Atividade: questão 10



Fonte: Elaborada pelo autor.

Recorte da tabela encontrada na figura da questão:

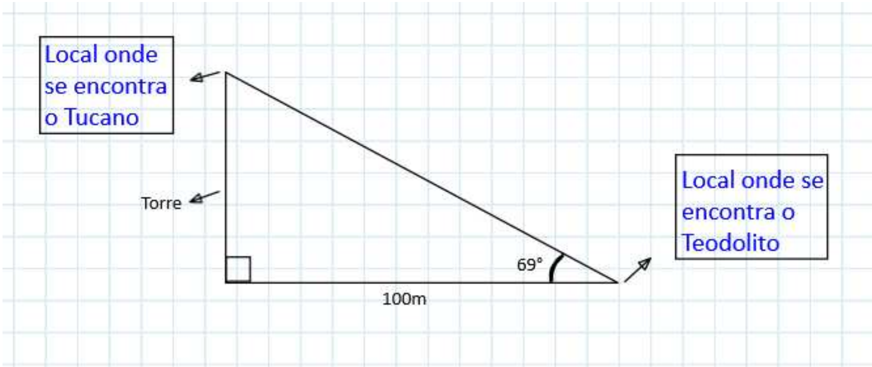
Tabela 6 – Parte da Tabela Trigonométrica de Seno, Cosseno e Tangente

ângulo	**seno**	**cosseno**	**tangente**
66°	0,9135	0,4067	2,2460
67°	0,9205	0,3907	2,3559
68°	0,9272	0,3746	2,4751
69°	0,9336	0,3584	2,6051
70°	0,9397	0,3420	2,7475

Fonte: Elaborada pelo autor.

Resolução: Para efetuar o cálculo de forma correta, o aluno deverá fazer um desenho de apoio, como ilustra a Figura 81.

Figura 81 – Imagem de Apoio: questão 10



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, ele consegue visualizar exatamente qual razão trigonométrica ele deve usar para encontrar a altura da torre. No caso, a torre faz o papel de cateto oposto ao ângulo e a distância em que se encontra o Teodolito faz o papel de cateto adjacente ao ângulo e, portanto, a razão utilizada deve ser a tangente.

Logo:

$$\operatorname{tg} 69^\circ = \frac{h}{100}$$

Substituindo o valor da tangente de 69° pelo valor fornecido pela tabela, temos:

$$2,6051 = \frac{h}{100}$$

Multiplicando por 100 ambos os membros da igualdade, encontramos:

$$h = 260\, m \text{ (aproximadamente)}$$

Lembrando que, parte-se do pressuposto que já se foi apresentado o Teodolito aos estudantes previamente.

Esta proposta serve como um guia para que os professores que queiram utilizar das ferramentas tenham a possibilidade de se apoiar na montagem de suas tarefas avaliativas ou de fixação de conteúdos.

Sugerimos, em movimento alinhado às tarefas ludificadas, no momento em que o professor estiver utilizando as ferramentas neste trabalho apresentadas, que utilize de recursos didáticos favoráveis, de acordo com o conteúdo trabalhado com seus discentes, tais como Geogebra e seus *applets*, planilhas em excel, calculadoras científicas, dentre outras.

O importante é que o professor aproveite ao máximo a experiência em sala e que seus alunos se sintam altamente motivados para o estudo em grupo.