UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS

BENJAMIM JOSE ESTEVES

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA MÉTRICA ESPACIAL

LAVRAS – MG

2013

BENJAMIM JOSE ESTEVES

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA MÉTRICA ESPACIAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, área de concentração em Matemática, para a obtenção do título de Mestre.

Orientadora
Dra. Ana Cláudia Pereira

LAVRAS – MG
2013

Ficha Catalográfica Elaborada pela Coordenadoria de Produtos e Serviços da Biblioteca Universitária da UFLA

Esteves, Benjamim José.
Uma proposta para o ensino de geometria métrica espacial / Benjamim José Esteves. – Lavras : UFLA, 2013.
55 p. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2013.
Orientador: Ana Cláudia Pereira.
Mestrado Profissional em Matemática.
Bibliografia.

1. Livros didáticos – Análise. 2. Geometria métrica espacial – Ensino e aprendizagem. 3. Princípio de Cavalieri. 4. Cálculo de áreas e volumes. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD – 373.133

BENJAMIM JOSE ESTEVES

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA MÉTRICA ESPACIAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, área de concentração em Matemática, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADO em 09 de setembro de 2013.

Prof. Ricardo Edem Ferreira	UFLA
Prof. Ricardo Menezes Salgado	UNIFAL

Dra. Ana Cláudia Pereira
Orientadora

LAVRAS – MG

2013

Dedico a Deus e aos meus pais, que sempre me apoiaram e incentivaram a estudar. Dedico a minha namorada Christianne que me deu apoio durante o curso. E dedico aos meus amigos Wemerson, Marcelo e Marcos.

DEDICO

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, a minha namorada Christianne que me ajudou muito durante o curso, ao meu amigo e professor Dr Marcelo Lemos de Medeiros que muito me ajudou e incentivou. Agradeço aos meus amigos Wemerson e Marcos, companheiros de infância que sempre estiveram presentes nos momentos marcantes. Agradeço também aos meus irmãos e em especial, a minha mãe e a minha namorada por suportarem alguns momentos de estresse. E não menos importante, agradeço à minha orientadora Ana Claudia e ao coordenador do curso Osnel Broche, e também à CAPES através do projeto PROFMAT com a colaboração de bolsas de estudos aos alunos.

RESUMO

Este trabalho aborda algumas transformações na organização do programa de matemática nos últimos anos no Brasil baseando-se na LDB, PCNs e CBC de Minas Gerais. E tem como objetivo principal expor uma maneira de trabalhar volumes de corpos redondos a partir de conceitos de prisma e pirâmide, utilizando o Princípio de Cavalieri e consequentemente a idéia intuitiva de limite. Neste trabalho a idéia intuitiva de limite também é usada para calcular a área da superfície esférica.

Palavras-chave: Geometria métrica espacial. Análise de livros didáticos. Princípio de Cavalieri. Cálculo de áreas e volumes.

ABSTRACT

His paper discusses some changes in the organization of the mathematics program in recent years in Brazil based on LDB, PCNs and CBC Minas Gerais. And has as main objective to expose a way to work round bodies volumes from concepts prism and pyramid, using the Cavalieri Principle and consequently the intuitive idea of limit. In this work the intuitive idea of limit is also used to calculate the area of the spherical surface.

Keywords: Geometry metric space. Analysis of textbooks. Cavalieri Principle. Calculation of areas and volumes.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), as finalidades do ensino de matemática apresentam caráter formativo, e o desenvolvimento de capacidades específicas. No aspecto instrumental, suas aplicações na realidade e nas ciências; em seu status como ciência, apresentam-se os métodos próprios de pesquisa e validação, bem como sua organização. Assinalam-se ainda as relações entre Matemática e tecnologia: a primeira como instrumento para ingresso no universo tecnológico; a última como fonte de transformações na educação Matemática.

Sempre acreditei que o professor necessita se preparar para enfrentar os problemas que interferem no processo de ensino e aprendizagem, entendendo suas causas e aprendendo a intervir através da prática pedagógica.

Para Tufano e Fazenda (2004) a pretensão é formar indivíduos que se realizem como pessoas, cidadãos e profissionais, exigindo da escola muito mais do que a simples transmissão e acúmulo de informações, exigindo também, experiências concretas e diversificadas, transpostas da vida cotidiana para as situações de aprendizagem.

Assim como os Parâmetros Curriculares Nacionais, estabelecidos pelo MEC, o Currículo Básico Comum, CBC, busca oferecer às escolas estaduais mineiras uma base curricular comum que permita aos alunos ter acesso a conhecimentos necessários ao exercício da cidadania. Enquanto os PCNs apontam o caminho a ser seguido pelas escolas, o CBC se propõe a ir mais além e detalha o trabalho que pode ser realizado pelo professor com seus alunos.

Para atingir uma melhor aprendizagem em matemática, é preciso ir além da simples transmissão de regras, fórmulas e teorias que nem sempre possibilitam reflexão e entendimento. Muitas vezes o professor abandona o ensino de alguns conteúdos, seja por pressão de uma lista enorme para se cumprir, falta de tempo, gosto ou, até mesmo, segurança para o ensino.

A Geometria, por exemplo, tem sido ao longo dos anos abandonada, ou na melhor hipótese, relegada a segundo plano, apesar de sua importância em várias áreas do conhecimento. O abandono do ensino da Geometria, que já foi objeto de estudo em muitas pesquisas como a de Pavanello (1993), é um tema atual e pode ser observado em muitas escolas públicas e particulares de Ensino Fundamental e Médio.

A Geometria é fundamental para a compreensão do mundo e participação efetiva do ser humano na sociedade, pois além de facilitar a resolução de problemas de diversas áreas do conhecimento, desenvolve o raciocínio visual. Está presente no cotidiano como nas embalagens dos produtos, na arquitetura das casas e prédios, na planta de terrenos para construção, nos campos de futebol e quadras, no artesanato e até na dança.

Sobre a importância da Geometria, Lorenzato (1995) diz que esta tem função essencial na formação dos indivíduos, pois possibilita uma interpretação mais completa do mundo, uma comunicação mais abrangente de ideias e uma visão mais equilibrada da Matemática.

Segundo Fainguelernt (1995), a Geometria desempenha um papel fundamental no ensino porque ativa as estruturas mentais na passagem de dados concretos e experimentais para os processos de abstração e generalização; é tema integrador entre as diversas partes da Matemática, sendo a intuição, o formalismo, a abstração e a dedução constituintes de sua essência.

A proposta dessa pesquisa é salientar a importância de se avaliar os aspectos do ensino de qualidade da Geometria para um melhor aprendizado, analisar os livros didáticos e perceber a abordagem conceitual do cálculo de áreas e volumes de corpos redondos e mostrar que o uso do Princípio de

Cavalieri favorece a percepção da obtenção de uma fórmula do volume dos sólidos.

Este trabalho está estruturado em 4 capítulos. O capítulo 1apresenta, no estudo da LDB, PCNs e CBC, a importância de se avaliar os aspectos do ensino de qualidade da geometria métrica espacial para um melhor aprendizado da disciplina; no capítulo 2 analisamos os livros didáticos de Matemática do Ensino Médio adotados nas escolas públicas de Minas Gerais enfocando a abordagem conceitual nos tópicos relacionados ao Princípio de Cavalieri, cálculo de áreas e volumes de corpos redondos, cilindro e cone.

Ainda no capítulo 2 foram expostas duas formas de abordar o volume da esfera: uma usando o caminho formal com o auxílio de limite e integral e outra, em nível de Ensino Médio, valorizando o Princípio de Cavalieri. No capítulo 3 abordou-se a superfície esférica de duas maneiras: uma como aparece na maioria dos livros didáticos e outra menos conhecida, mas ambas levam consequentemente à ideia intuitiva de limite. Já no capítulo 4 apresentou-se uma proposta para ser desenvolvida em sala de aula com os alunos.

2 A ESTRUTURAÇÃO DO ENSINO NO BRASIL

A Lei de Diretrizes e Bases (Lei 9394/96) - LDB - é a lei orgânica e geral da educação brasileira. Ela surgiu para normatizar e padronizar a educação brasileira, pois é de suma importância para qualquer país a evolução do seu desenvolvimento nacional através de inovações e profissionais diferenciados. Mas as escolas e instituições de ensino não são afetadas em sua forma e técnica, o que deixa uma liberdade para uma educação mais dinâmica e interativa entre professores e alunos. Segundo o ex-ministro Paulo Renato Souza,

> o mais interessante da LDB é que ela foge do que é, infelizmente o mais comum na legislação brasileira: ser muito detalhista. A LDB não é detalhista, ela dá muita liberdade para as escolas, para os sistemas de ensino dos municípios e dos estados, fixando normas gerais. Acho que é realmente uma lei exemplar (SCUARCIALUPI, 2011).

A primeira Lei de Diretrizes e Bases foi criada em 1961. Uma nova versão foi aprovada em 1971 e a terceira, ainda vigente no Brasil, foi sancionada em 1996. Um exemplo de que a LDB está em constante transformação, adaptação são as correções, acréscimos e reformulações como o caso desta última alteração, na data 04/04/2013 sobre a formação de profissionais da educação. Ela incentiva os alunos ao ingresso nos cursos de licenciatura e/ ou sua permanência. São mudanças para um melhor desempenho na educação tornando o ensino acessível para todos. É o privilégio a uma educação que busca por um maior acesso e permanência na escola principalmente para os mais desprovidos.

De acordo com o Portal do MEC (BRASIL, 2013), o Conselho Nacional de Educação é um órgão colegiado integrante da estrutura de administração direta do MEC e foi criado nos termos da Lei 9.131, de 24 de novembro de

1995. O Conselho Nacional de Educação é um órgão independente, com funções consultivas, cuja presidente foi eleita pela Assembleia da República. Tem a finalidade de colaborar na formulação da Política Nacional de Educação e exercer atribuições normativas, deliberativas e de assessoramento ao Ministro da Educação.

Ao CNE compete emitir opiniões, pareceres e recomendações sobre todas as questões educativas, por iniciativa própria ou em resposta a solicitações que lhe sejam apresentadas pela Assembleia da República e pelo Governo. O CNE promove a participação das várias forças sociais, culturais e econômicas.

Ainda baseado nas informações do portal do MEC (BRASIL, 2013), os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) são o resultado de meses de trabalho e de discussão realizados por especialistas e educadores de todo o país. Foram feitos para auxiliar as equipes escolares na execução de seus trabalhos. Servirão de estímulo e apoio à reflexão sobre a prática diária, ao planejamento de aulas e, sobretudo ao desenvolvimento do currículo da escola, contribuindo ainda para a atualização profissional. O objetivo do PCN é garantir a todas as crianças e jovens brasileiros, mesmo em locais com condições socioeconômicas desfavoráveis, o direito de usufruir do conjunto de conhecimentos reconhecidos como necessários para o exercício da cidadania. Não possuem caráter de obrigatoriedade e, portanto, pressupõe-se que serão adaptados às peculiaridades locais.

Os PCNs pretendem ser referência para a transformação de conteúdos, objetivos e didática de ensino. As propostas curriculares de matemática para os ensinos Fundamental e Médio prevêem um trabalho usando o desenvolvimento da criatividade dos alunos, colocando em evidência o caráter dinâmico do conhecimento matemático. De acordo com os PCNs

> Entender a matemática como um conhecimento científico em construção, propicia ao aluno o reconhecimento das contribuições dessa disciplina e a importância de sua aquisição para a compreensão e atuação consciente na sociedade. O objetivo é levar o aluno a raciocinar e expressar-se matematicamente, ou seja, reconhecer situações que podem ser descritas em linguagem matemática e ser capaz de aplicar métodos matemáticos (operações, equações, diagramas, fatos da geometria) para resolvê-las (BRASIL, 1998, p. 111).

> O CBC não é uma revolução curricular e não introduz novos conteúdos. É uma afirmação da necessidade indispensável do mínimo que a escola deve ensinar e que os alunos devem aprender. Não é possível que os estudantes cheguem ao final do Ensino Fundamental e do Ensino Médio sem saber pelo menos esses conteúdos (FILOCRE, 2005, p. 2).

O CBC, assim como os Parâmetros Curriculares Nacionais, busca oferecer às escolas estaduais mineiras uma base curricular comum que permita aos alunos ter acesso ao conjunto de conhecimentos socialmente elaborados e reconhecidos como necessários ao exercício da cidadania. Enquanto os PCNs apontam o caminho a ser seguido pelas escolas, o CBC se propõe a ir mais além e detalha o trabalho que pode ser realizado pelo professor com seus alunos.

Cada uma das publicações do CBC para Ensino Fundamental atual (6º ao 9º ano) e Ensino Médio traz as diretrizes norteadoras das diferentes disciplinas, os critérios que foram adotados para a seleção dos conteúdos, os tópicos que devem ser trabalhados, as competências e as habilidades seguidas de orientações e sugestões de atividades para serem realizadas com os alunos.

Os tópicos que foram listados representam apenas um norte para que cada escola possa caminhar da forma mais adequada aos seus objetivos e de modo coerente com o seu projeto pedagógico.

Os PCNs (BRASIL, 1997) mencionam a importância da utilização do livro didático dentro das escolas brasileiras. O uso dessa ferramenta faz parte da realidade e é preciso ter cuidado na hora de utilizá-lo. O próprio documento alerta:

> O livro didático é um material de forte influência na prática de ensino brasileira. É preciso que os professores estejam atentos à qualidade, à coerência e a eventuais restrições que apresentem em relação aos objetivos educacionais propostos. Além disso, é importante considerar que o livro didático não deve ser o único material a ser utilizado, pois a variedade de fontes de informação é que contribuirá para o aluno ter uma visão ampla do conhecimento (BRASIL, 1998, p. 67).

O livro didático funciona como uma importante fonte de informações para a elaboração de um tipo específico de conhecimento.

Admitindo que o professor define que metodologias usar, o livro didático não determina, e sim contribui para as estratégias de ensino. As orientações contidas no livro didático são reproduzidas, muitas vezes, em sala de aula. Daí, percebe-se o poder de influência exercido por ele na definição das atividades. Por isso, é importante ter um professor facilitador para que o livro didático de Matemática exerça a função de integração entre situações significativas e outras áreas do conhecimento.

Lajolo (1996) acredita que no Brasil, por sua precária situação educacional, o livro didático acabe determinando conteúdos e condicionando estratégias de ensino, marcando, pois, de forma decisiva, o que se ensina e como se ensina. Por isso a importância de sua análise.

Para facilitar o processo de escolha dos livros didáticos, o guia do PNLD (BRASIL, 2004) que fica disponível nas escolas para consulta presta uma grande ajuda, pois apresenta uma resenha de cada coleção. O Guia vai para as escolas como um instrumento de apoio aos professores no momento da escolha, e pode ser utilizado por todos ficando disponível na página do MEC para qualquer pessoa consultar.

Nas escolas públicas, a escolha dos livros didáticos que atendam às necessidades ocorre a cada três anos, não necessariamente ao mesmo tempo em todos os estabelecimentos de ensino, o que acarreta diferenças quanto aos itens eleitos entre as coleções que o MEC pré seleciona. Por isso é importante escolher bem, pois afinal é o livro didático que vai apoiar o trabalho do professor e de seus alunos durante o ano letivo por no mínimo três anos.

A pesquisa realizada em escolas públicas estaduais na cidade de Divinópolis referente à adoção do livro didático de matemática do último ciclo mostrou que os livros adotados eram volume único. O livro mais usado pelas escolas foi o Dante (2005), das 20 escolas que oferecem o ensino médio, 15 delas adotaram esse livro, duas delas o livro do Iezzi (2004) e três o livro do Barreto e Xavier (2000).

3 OS LIVROS DIDÁTICOS E A ABORDAGEM SOBRE CORPOS REDONDOS

Os livros avaliados para a abordagem do tema geometria métrica espacial são os livros do atual ciclo, ou seja, os livros que o MEC pré selecionou para as escolas públicas. Segue abaixo os livros selecionados pelo MEC em 2010:

a) BARROSO, J. M. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2010. v. 2, 440 p.
b) DANTE, L. R. **Matemática:** contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2010. v. 2, 432 p.
c) PAIVA, M. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2009. v. 2, 576 p.
d) RIBEIRO, J. **Matemática:** ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2010. v. 3, 360 p.
e) SMOLE, K. C. S. **Matemática:** ensino médio. São Paulo: Saraiva, 2010. v. 2, 448 p.
f) SOUZA, J. R. de. **Novo olhar matemática**. São Paulo: FTD, 2010. v. 3, 320 p.
g) DANTE, L. R. **Matemática:** volume único. São Paulo: Ática, 2005. 504 p.

Observa-se que o livro, referente ao item g foi analisado pois foi o livro mais adotado no ciclo anterior nas escolas públicas da região da 12ª Superintendência Regional de Ensino.

De acordo com o Centro Virtual de Referência ao Professor do Estado de Minas Gerais CRV os tópicos e habilidades do 2º ano do ensino médio relacionados a geometria são os do quadro abaixo:

Tópicos do CBC para o 2º Ano Conteúdos de Aprofundamento

TÓPICOS	HABILIDADES
30. Prismas e cilindros	30.1. Identificar os vértices, as arestas e as faces de um prisma. 30.2. Resolver problemas que envolvam o cálculo da diagonal de um paralelepípedo retângulo. 30.3. Identificar as seções feitas por planos paralelos à base de um prisma ou de um cilindro.
31. Pirâmides e cones	31.1. Identificar os elementos de uma pirâmide e de um cone. 31.2. Identificar as seções feitas por planos paralelos à base de uma pirâmide ou um cone.
32. Esferas e bolas	32.1. Identificar os elementos de uma esfera e de uma bola. 32.2. Identificar as interseções entre planos e esferas.
33. Planificações de figuras tridimensionais	33.1. Reconhecer a planificação de figuras tridimensionais usuais: cubo, paralelepípedo retangular, prismas retos, pirâmide, cilindro e cone.
34. Posição relativa entre retas e planos no espaço	34.1. Reconhecer posições relativas entre retas: paralelas, concorrentes, perpendiculares e reversas. 34.2. Reconhecer posições relativas entre retas e planos: concorrentes, perpendiculares e paralelos. 34.3. Reconhecer posições relativas entre planos: paralelos, perpendiculares e concorrentes.
35. Áreas laterais e totais de figuras tridimensionais	35.1. Resolver problemas que envolvam o cálculo da área lateral ou total de figuras tridimensionais.
36. Volumes de sólidos	36.1. Resolver problemas que envolvam o cálculo de volume de sólidos.

Quadro 1 conteúdos de geometria do CBC

E os tópicos do 3º ano do ensino médio relacionados à geometria são:

Sugestões de Tópicos Complementares para o 3º Ano

TÓPICOS	HABILIDADES
46. Lugares geométricos	46.1. Reconhecer a mediatriz, a bissetriz e a circunferência como lugares geométricos. 46.2. Reconhecer a parábola como um lugar geométrico.
50. Seções planas de figuras tridimensionais usuais	50.1. Reconhecer seções planas obtidas paralelas ou perpendiculares aos eixos de simetria de um prisma, de um cilindro, de uma pirâmide, de um cone e de uma esfera.
51. Princípio de Cavalieri	51.1. Utilizar o Princípio de Cavalieri para calcular volumes de sólidos.

Quadro 2 Tópicos de geometria do 3º ano do Ensino Médio

Sobre os livros analisados e o tema Princípio de Cavalieri, os autores enunciam o teorema e dão um exemplo com pilhas de moedas, folhas ou placas.

Com respeito ao volume do cilindro das sete coleções analisadas, a autora Smole (2010, p. 303), apenas cita a frase: “Usando o Princípio de Cavalieri podemos verificar que o volume de um cilindro de raio r e altura h, é”: (apresenta a fórmula e exercícios). Já os outros autores mostram os sólidos sendo seccionados por planos paralelos, comentam sobre a ilustração e sobre o Princípio de Cavalieri. É da forma que está apresentado no próximo capítulo.

Em relação ao volume do cone, a abordagem é feita de forma semelhante à do cilindro, apenas a autora Smole (2010), não ilustra e usa novamente a frase citada acima.

Já no volume da esfera, a autora Barroso (2010), apresenta o sólido, as fórmulas e exercícios. Não faz nenhum comentário sobre a fórmula do volume.

A autora Smole (2010) não usa o Princípio de Cavalieri, mas fala que o volume da esfera é quatro vezes a do cone de raio r e altura r, sendo a esfera de raio r. Os outros autores usam o Princípio de Cavalieri de forma semelhante ao que será apresentado abaixo.

De acordo com o CBC (MINAS GERAIS, 2013), o Princípio de Cavalieri é a ferramenta elementar para a obtenção de expressões do volume de sólidos. Ele é utilizado, por exemplo, na dedução da expressão do volume de cones e de esferas. Além disso, ele permite o cálculo de volume de sólidos não regulares. Assim, pela sua importância, o Princípio de Cavalieri, como afirma o CBC, deve ser ensinado no Ensino Médio.

O Princípio de Cavalieri deve-se a **Francesco Bonaventura Cavalieri,** que foi um matemático e astrônomo italiano, nascido em 1958 na cidade de Milão. É conhecido principalmente pelo *Princípio de Cavalieri*, que auxilia no cálculo de volumes de sólidos.

Professor da Universidade de Bologna inventou o método dos indivisíveis (1635), iniciando uma nova era para a geometria e abrindo o caminho para a introdução do cálculo integral. Entrou para a ordem jesuíta em

Milão (1615) e transferiu-se para o monastério de Pisa (1616), onde se interessou por matemática após conhecer Galileu, por meio do Cardeal Federico Borromeo.

Em 1621, tornou-se assistente do Cardeal Federico Borromeo no monastério de Milão. Depois de ensinar teologia, tornou-se prior de São Pedro, em Lodi (1623). Após três anos em Lodi, foi para o monastério de Parma, sendo nomeado para cadeira de matemática em Bologna (1629), quando já estava desenvolvendo a famosa teoria dos indivisíveis, que apresentou na sua obra *Geometria indivisibilis continuorum* (1635).

Também foi responsável na Itália pela introdução do logaritmo de funções trigonométricas para cálculos em astronomia, com o livro *Directorium Generale Uranometricum*. Também escreveu sobre seções cônicas, trigonometria, ótica, astronomia e astrologia.

Manteve contato com muitos matemáticos da época, como Galileu, Mersènne, Renieri, Rocca, Torricelli e Viviani. Seu último livro foi *Trattato della ruota planetária perpetua* (1646). Faleceu em Bologna no ano de 1647.

3.1 Princípio de Cavalieri

Dados dois sólidos e um plano, se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm o mesmo volume.

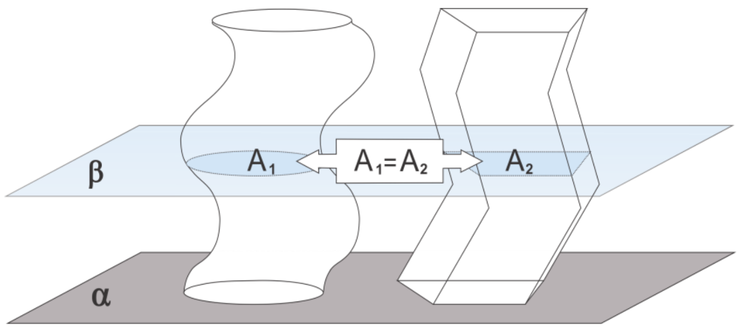

Figura 1 Ilustração esquemática do Princípio de Cavalieri

Um exemplo comum nos livros didáticos é o das pilhas de moeda, onde o aluno percebe que mesmo com a deformação da pilha o volume não se altera.

Figura 2 Ilustração de pilhas de moedas

Fonte: União dos Blogs de Matemática (2013)

A figura facilita a visualização do aluno, pois comparando as alturas percebe-se que nas duas pilhas as quantidades são iguais, logo os volumes são iguais.

Segundo Lima et al. (2006), no livro *A matemática do ensino médio volume 2*, no Ensino Médio o professor não precisa fazer demonstrações para provar um teorema, mas deve dar argumentos que convença os alunos, ou seja, enunciar o Princípio de Cavalieri e mostrar como surge a ideia dos volumes de cilindro, cone e esfera. O professor deve comentar que essa demonstração é feita no cálculo integral que os alunos terão a oportunidade de conhecer nos cursos de exatas, mas deve argumentar e mostrar com exemplos que intuitivamente funcionam para facilitar o entendimento dos educandos.

3.2 Volume do cilindro

Nessa seção será utilizado o Princípio de Cavalieri para calcular o volume do cilindro. Considere já estudado e conhecido o volume do prisma, e ainda considere um cilindro de altura h e com área da base B contida em um plano α e um paralelepípedo retângulo também de altura h e com área de base B contida em α.

Cada plano β, paralelo a α, que secciona um dos sólidos também secciona o outro, e as secções determinadas por β em cada um deles têm a mesma área de suas bases.

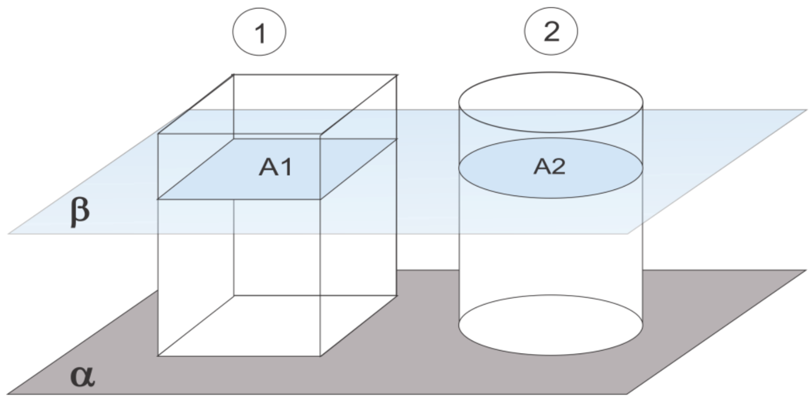

Figura 3 Ilustração esquemática de um prisma e um cilindro seccionados por planos paralelos

A figura (3) tem como objetivo mostrar ao aluno que a cada plano paralelo a base α, formam-se figuras retangulares e circulares que possuem áreas iguais, tendo assim uma intuição para perceber que os volumes também são iguais.

Observa-se que a secção A_1 é congruente à secção da base do paralelepípedo retângulo e que a secção A_2 é congruente à secção da base do cilindro.

Como a área de A_1 é igual a área A_2, para qualquer plano horizontal β, então pelo Princípio de Cavalieri concluímos que o volume do cilindro é igual o volume do paralelepípedo retângulo. Como o volume do paralelepípedo retângulo é dado pela área da base vezes a altura, segue que o volume do cilindro também será dado pela área da base vezes a altura, ou seja:

$V = \pi R^2.h$ onde R é o raio da base e h a altura do cilindro.

A sugestão acima já existe e é feita nos livros analisados no capítulo 2 exceto no livro da autora Smole (2010), salvo algumas observações, vários outros autores também abordam o tema Corpos Redondos, como exemplo citamos o livro *Fundamentos de Matemática Elementar* dos autores Osvaldo Dolce e José Nicolau (2005). Portanto, só estamos reforçando que se deve usar o Princípio de Cavalieri para que o aluno visualize, pois segundo o CBC essa visualização facilita o entendimento do conteúdo. E vimos que alguns autores não o fazem.

3.3 Volume do cone

Usando novamente o Principio de Cavalieri, aborda-se o volume do cone. Mas antes considere já definido o volume da pirâmide. Dado um cone C qualquer com a base contida num plano α, consideremos uma pirâmide P, também com a base contida em α, cuja área da base A seja igual à área da base do cone e cuja altura, H, seja igual à do cone. Será mostrado a seguir que cada plano horizontal β que secciona os dois sólidos determina secções planas de mesma área (proporcionais às bases nas mesmas proporções).

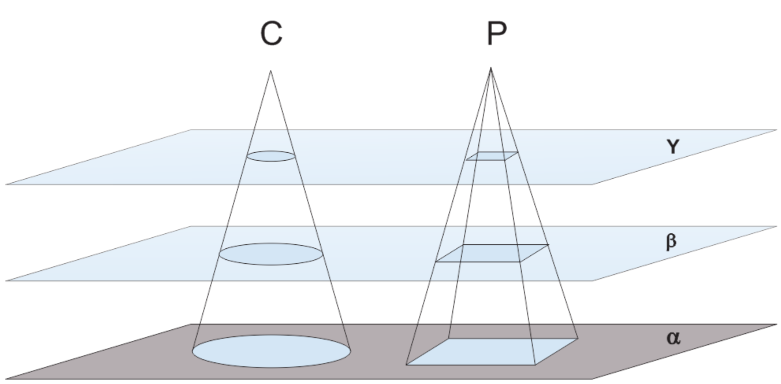

Figura 4 Cone reto e pirâmide seccionados por planos paralelos

Suponha que o plano β intercepte C e P a uma altura H – h, formando assim um novo cone C_1 e uma nova pirâmide $P_{1,}$ ambos com altura h e áreas da base A_{c1} e $A_{p1,}$ respectivamente.

Observe que a intersecção de β com C gera um círculo, de raio r como ilustrado na figura 5.

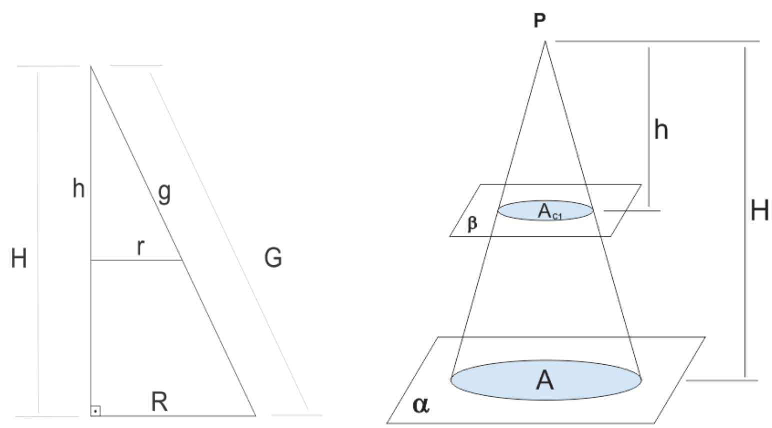

Figura 5 Componentes do cone e a secção vertical a partir do vértice

Por semelhança de triângulos tem-se que:

$$\frac{r}{R} = \frac{h}{H} \quad \text{e} \quad \frac{A_{c1}}{A} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

Se a pirâmide tem base retangular de dimensões x e y, e $\beta \cap P$ é um retângulo com dimensões x_1 e y_1 então:

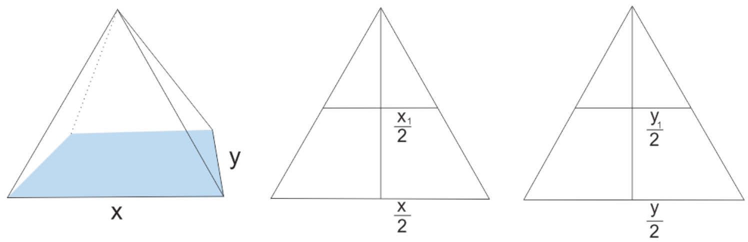

Figura 6 Pirâmide de base retangular e cortes perpendiculares a partir do vértice e paralelo às arestas x e y

Por semelhança de triângulos

$$\frac{\frac{x}{2}}{H} = \frac{\frac{x_1}{2}}{h} \Rightarrow \frac{h}{H} = \frac{\frac{x_1}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{x_1}{x} \text{ e analogamente } \frac{h}{H} = \frac{y_1}{y}\text{. Assim,}$$

$$\frac{A_{p1}}{A} = \frac{x_1 y_1}{xy} = \frac{h}{H}.\frac{h}{H} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{A_{c1}}{A}$$

Portanto

$$A_{p1} = A_{c1}$$

Observe que cada plano paralelo à base gera figuras semelhantes e com áreas diferentes às das bases, mas os cortes nos dois sólidos geram figuras com áreas iguais.

Assim, pelo Princípio de Cavalieri o volume do cone é igual ao volume da pirâmide. Denotando por V_P o volume da pirâmide e por V_C o volume do cone, temos que

$$V_C = V_P = \frac{AH}{3} = \frac{\pi R^2 H}{3}$$

A demonstração acima segue a mesma ideia do cilindro e os autores analisados neste capítulo fazem uma abordagem semelhante ao que foi apresentado, exceto a autora Smole (2010) que enuncia o sólido, apresenta as fórmulas e os exercícios.

3.4 Volume da esfera

Será apresentado nesse capítulo o volume da esfera em dois níveis: um envolvendo cálculo diferencial e integral e, outro, em nível médio, com uso do Princípio de Cavalieri, mas, ambos rigorosamente convergentes em resultado.

De acordo com a descrição histórica de Howard Anton, George Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866) foi um conhecido matemático alemão filho de um ministro protestante que recebeu de seu pai a educação elementar e com pouca idade mostrou talento em aritmética. Em 1846 entrou na universidade de Gottingen para estudar Teologia e Filosofia, mas logo transferiu-se para Matemática. Estudou Física com W.E. Weber e Matemática com Carl Friedrich Gauss, considerado por alguns o maior matemático de todos os tempos. Em 1851 recebeu seu PHD sob orientação de Gauss e permaneceu em Gottingen para lecionar. Em 1862 sofreu um ataque de pleurisia e permaneceu doente até 1866 quando morreu de tuberculose aos 39 anos.

Seu trabalho em fundamentos da Geometria foi importante para que Einstein, cerca de 50 anos depois, desenvolvesse a teoria da relatividade. Além dos fundamentos da Geometria, Riemann fez grandes contribuições para a teoria das funções complexas e à Física Matemática. Graças a Riemann e seus estudos dedicados ao cálculo diferencial e integral usa-se a fórmula abaixo.

É conhecido que fórmulas para volumes de sólidos podem ser obtidas calculando-se a integral definida de uma função A(x) que determina a área da secção transversal do sólido para cada valor de x fixo.

Se f é uma função contínua definida em $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo [a, b] em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = (b - a)/n$. A sequência x_0, x_1, x_2, ..., x_n em que $x_0 = a$ e $x_n = b$ são as extremidades desses subintervalos e x_i^* é um elemento arbitrário no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. A integral definida de f de a até b é dada por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

desde que o limite exista e independa da partição.

Se um sólido S está entre x = a e x = b, e a área da secção transversal de S no ponto P_x, passando por x e perpendicular ao eixo x, é A(x), onde A é uma função contínua, então o volume de S é:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x = \int_a^b A(x)dx$$

Esse método é conhecido como Método do Fatiamento onde A(x) é a área da secção transversal móvel, obtida fatiando em x, perpendicularmente ao eixo x.

Vejamos como utilizar o Método do Fatiamento para obter o volume da esfera de centro (0,0,0) e raio r.

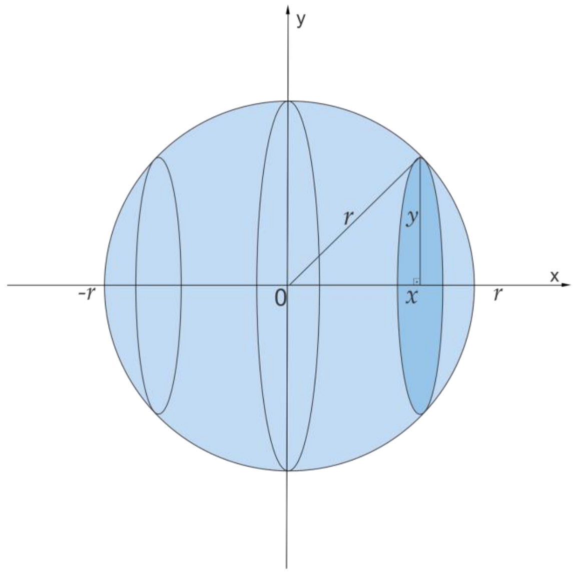

Figura 7 Representação de uma esfera no plano cartesiano e os elementos necessários para calcular o volume por integral

Note que para cada x a área da secção transversal é A(x) = πy^2 = $(r^2 - x^2)\,\pi$ e portanto, pelo Método do Fatiamento,

$$V = \int_{-r}^{r} A(x)dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)dx = 2\pi\int_{0}^{r}(r^2 - x^2)dx$$

$$2\pi\left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Provando que o volume da esfera é $\frac{4\pi r^3}{3}$.

Agora com o objetivo de determinar o volume da esfera usando o Princípio de Cavalieri, considere apoiados num plano α, um cilindro equilátero de raio R com dois cones retos de raio R inscritos, unidos pelo vértice e também outro cilindro equilátero com uma esfera inscrita, como mostra a figura 7

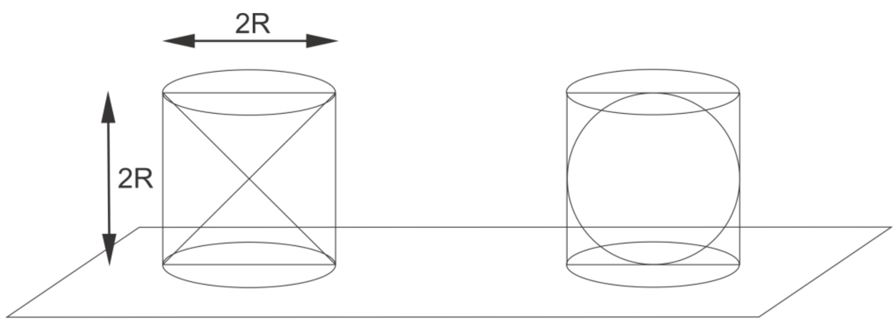

Figura 8 Ilustração esquemática de dois cones inscritos no cilindro equilátero formando assim a anticlépsidra e também de uma esfera de raio R inscrita num cilindro

A anticlépsidra é o sólido restante ao se retirar os cones inscritos no cilindro como descrito acima.

A figura abaixo é uma complementação da figura 8 onde os planos paralelos α e β seccionam os cilindros formando a coroa circular e a circunferência que serão explicados a seguir.

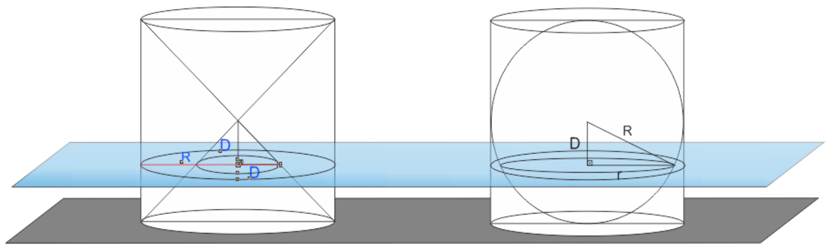

Figura 9 Cilindros seccionados pelos planos α e β

Observando a figura 10 que é uma parte da figura 9 onde o plano β secciona o primeiro cilindro formando assim a coroa circular.

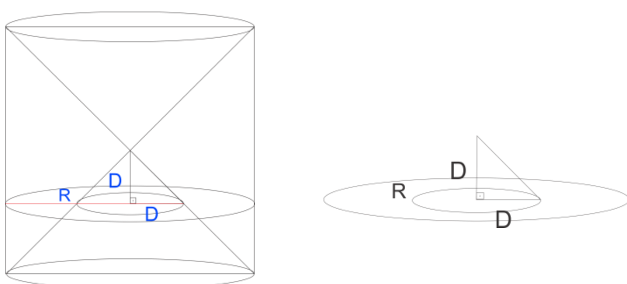

Figura 10 Ilustração da anticlepsidra seccionada por um plano formando assim uma coroa circular

A anticlepsidra será denotada aqui por S.

Seja D a distância do plano β ao centro de S, observa-se por semelhança de triângulos que D é também o raio menor da coroa formada pela intersecção do plano β com o cilindro que contém o sólido S. Nota-se que o triângulo retângulo formado é isósceles e a área da coroa circular é $A_1 = \pi(R^2 - D^2)$.

Por outro lado ao interceptar a esfera inscrita no cilindro que também é uma parte da figura 8, pelo plano β, este último determina uma circunferência de raio r, como ilustrado abaixo.

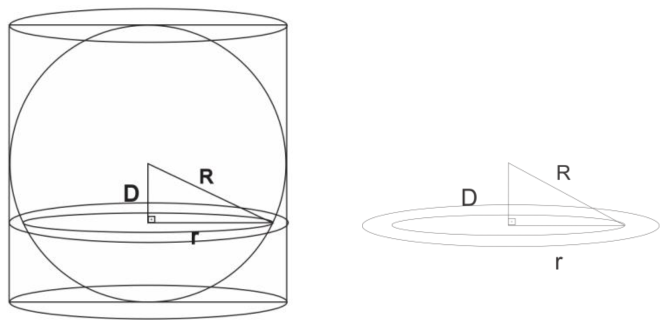

Figura 11 Ilustração esquemática de uma esfera inscrita seccionada por um plano formando assim uma circunferência

Sendo assim, a distância do plano β ao centro da circunferência é também igual a D. Assim pelo Teorema de Pitágoras tem-se que $R^2 = D^2 + r^2$ e portanto, a área do círculo obtida é $A_2 = \pi(R^2 - D^2)$, a qual coincide com a área da coroa circular obtida ao interceptar a anticlepsidra com plano β.

Denote por V_S o volume da anticlepsidra.

Uma vez que qualquer plano β, paralelo a α determina secções planas de mesma área nos dois sólidos, pode-se inferir pelo Princípio de Cavalieri que o volume do sólido V_S é igual ao volume da esfera V_E. Mas V_S é o resultado da diferença entre o volume do cilindro e dos dois cones inscritos a esse cilindro. Assim,

$$V_E = V_S = \pi R^2.2R - 2.\frac{\pi R^2.R}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Ainda de acordo com a ideia inicial deste capítulo, os autores analisados: Dante (2005, 2010), Paiva (2009), Ribeiro (2010) e Souza (2010) abordam da maneira acima, mas temos casos em que as apresentações constam do sólido, fórmulas e exercícios, como os livros analisados das autoras Barroso (2010) e Smole (2010). Novamente reforçamos que com o Princípio de Cavalieri o aluno visualiza e entende como surgiu a fórmula do volume do sólido.

4 ÁREA DA SUPERFÍCIE DA ESFERA

Segundo Lima (2009), no livro *Medida e Forma em Geometria*, para a superfície da esfera não se pode usar o mesmo método dos demais sólidos, ou seja, planificá-los, dobrá-los ou recortá-los. Pois a superfície da esfera não é desenvolvível, ou seja, não se pode fazer cortes e depois aplicar sobre um plano sem dobrar ou esticar.

Qualquer método que se imagina em algum momento precisa do uso de limite. Mas se pode dar justificativas para convencer o aluno do Ensino Médio que a área é 4πR². No método que aparece nos livros analisados: Dante (2005, 2010), Paiva (2009), Ribeiro (2010) e Souza (2010) em os autores levam o aluno a imaginar a seguinte situação: imagine a esfera sendo formada por pirâmides de bases hexagonais onde a área dessa base é S,e vértice no centro da esfera. Como a altura de cada pirâmide é R, raio da esfera, temos que a soma de todos os volumes das pirâmides aproxima-se cada vez mais do volume da esfera, à medida que o número de pirâmides aumenta.

Lembrando que o volume da pirâmide é $V = \frac{SR}{3}$, e denotando por S_i a área da base de cada pirâmide Pi, espera-se obter $S_1 + S_2 + ... + S_n + ... = A$, onde A denota a área da superfície esférica. Deste modo:

$$V = \frac{1}{3}S_1R + \frac{1}{3}S_2R + \ldots + \frac{1}{3}S_nR + \ldots = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots)R = \frac{1}{3}AR$$

Ou seja

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}A\ R \Rightarrow A = 4\pi R^2$$

Logo, a área da superfície esférica de raio R é $A = 4\pi R^2$.

Deve-se observar que esses cálculos não demonstram, mas apenas sugerem uma dedução da fórmula de área da superfície esférica. Mas no Ensino Médio esse tipo de atitude é aceitável, pois nem sempre se pode fazer a demonstração e esse é um caso em que se necessita do cálculo integral.

Vejamos agora um método alternativo que não aparece em nenhum dos livros analisados:

Dado um número positivo H, e uma esfera de raio R, considere também outra esfera de mesmo centro porém de raio R + H. A região compreendida entre essas duas esferas concêntricas é uma reunião de segmentos de reta com comprimento H (diferença entre os raios). Cada um desses segmentos é perpendicular a ambas as esferas. Logo é intuitivamente aceitável que, para valores pequenos de H, o volume dessa "casca" seja aproximadamente igual a S x H, onde S é a superfície esférica de raio R. Usando a fórmula do volume da esfera e usando o símbolo $\cong$ para significar "aproximadamente igual a", temos:

$$\mathrm{S \times H} \cong \mathrm{V} = \frac{4\pi}{3}(R+H)^3 - \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{4\pi \mathrm{H}}{3}\left[3\mathrm{R}^2 + 3\mathrm{R}H + H^2\right]$$

Assim, para valores pequenos de H, temos

$$\mathrm{S} \cong \frac{4\pi}{3}\left[3\mathrm{R}^2 + 3\mathrm{R}H + H^2\right]$$

Ora, se H é realmente pequeno, as parcelas 3RH e H são insignificantes, logo

$$S = \frac{4}{3}\pi.3R^2 = 4\pi R^2$$

Podemos então concluir que a área da superfície da esfera de raio R é igual a $4\pi R^2$.

O argumento acima também, não constitui uma demonstração. A demonstração pode ser encontrada nos livros de cálculo como aplicação da integral. Mas é de suma importância que seja dado pelo menos um desses argumentos. Assim o aluno vai despertando o interesse para descobrir, no futuro, o método mais específico e adequado.

5 ATIVIDADE EM SALA, PROPOSTAS DE ENSINO

As atividades propostas destinam-se a alunos do Ensino Médio. Alguns conhecimentos são pré-requisitos para que essas atividades sejam desenvolvidas. Os alunos no Ensino Médio, de um modo geral, apresentam dificuldades no cálculo de volume de sólidos geométricos, por isso a apresentação do conteúdo será feita por atividades que proporcionem a visualização desses sólidos. As atividades 1, 2 e 3 foram aplicadas em uma turma do 2º ano com 30 alunos.

5.1 Dobraduras e amplitudes

a) Proposta de atividade 1

Objetivos

Mostrar a importância dos sólidos e seus volumes e mostrar também a importância de medições usando régua.

Pré - requisito

Para o desenvolvimento dessa atividade, os alunos deverão saber calcular áreas e volumes.

Público alvo

No final do ano para turmas do 2º ano do Ensino Médio ou no início do ano para turmas do 3º ano do Ensino Médio.

Tempo previsto

O tempo previsto para a realização dessa atividade foi de uma hora/aula para recortar, colorir e colar o sólido, duas horas/aula para ampliá-los em cartolina e mais duas horas/aula para encher os sólidos com areia, calcular os volumes e comparar os resultados.

Metodologia

Os alunos construíram os sólidos com as planificações que se encontravam no final do livro de Paiva (2009). Ampliaram seu tamanho em cartolina, mediram suas arestas, altura e calcularam áreas e volumes. Depois encheram esses sólidos com areia e compararam os volumes com o de um cilindro graduado do laboratório de ciências. Os sólidos feitos em cartolina permitiram esse processo, pois apresentaram uma certa rigidez em relação às folhas A4 comum.

Algumas considerações sobre a atividade 1: no final do livro de Paiva (2009) existem figuras para recortar, dobrar e colar de alguns sólidos conhecidos como cubo, paralelepípedo, prismas de bases quadrangulares e triangulares, pirâmides de bases triangulares e quadrangulares, cilindro, cone, dodecaedros, octaedros e icosaedro.

Como os sólidos planificados são em folhas menores que uma folha A4, os sólidos construídos são pequenos, então foi sugerida uma exposição ao público dos trabalhos em uma festa típica junina da escola. Resolvemos apresentar esses sólidos colados como as bandeirinhas de São João pois eram todos coloridos. Alguns deles foram feitos com cartolina tendo um tamanho relativamente maior apresentando uma maior rigidez e possibilitando medir de forma mais precisa suas arestas e calcular o volume, áreas laterais, etc...

Em alguns deles foi feito um pequeno furo para encher com areia e provar que o volume é bem aproximado do esperado.

Alguns alunos questionaram sobre construir a esfera mas foi pedido que tentassem e eles observaram que ao dobrar o papel não formava uma esfera, sempre ficava torto, deformado, amassado.

Ao discutir o conteúdo com os alunos, eles puderam ver e entender que a esfera não pode ser planificada, mas ao mostrar o dodecaedro e o icosaedro, eles puderam perceber que o icosaedro se parece mais com a esfera do que o dodecaedro e deduziram que quanto mais faces o sólido tiver mais “esférico” vai ficando. Daí foi mostrado uma ilustração de um sólido Icositetraedro deltoidal de 24 faces e outro com 30 faces, apresentando uma grande semelhança com a esfera.

Alguns dos sólidos que foram preenchidos com areia foram: cubo, paralelepípedo, prisma de base triangular, pirâmide de base triangular e quadrangular, cilindro e cone. Como padrão de medida foi usado um cilindro graduado do laboratório de ciências. Os alunos perceberam que nas pirâmides a altura não era a aresta lateral e nem o apótema da pirâmide, pois alguns só entenderam os principais elementos ao visualizar o sólido e medir seus componentes (elementos).

5.2 Aplicação do Princípio de Cavalieri

a) Proposta de atividade 2

Objetivo

Mostrar a aplicação do Princípio de Cavalieri.

Pré requisitos

O aluno deverá saber calcular áreas, volumes e semelhanças de triângulos.

Público alvo

Turmas do 2 ou 3 anos do Ensino Médio.

Tempo Previsto

O tempo previsto é de duas horas aula.

Metodologia

O professor desenhou um cone e uma pirâmide, ambos apoiados em um plano α. Considere a base da pirâmide um quadrado de lado $6\sqrt{\pi}$ *cm* e o raio do cone reto *6 cm*, ambos com altura de *12 cm*. Ao passar um plano β paralelo a α na metade da altura, o professor pediu para que os alunos calculassem por semelhança quais eram as medidas do lado da base na nova pirâmide e o raio da base do novo cone, obtendo respectivamente

$$L_{1/2} = 3\sqrt{\pi}\ cm \text{ e } r_{1/2} = 3cm$$

Logo em seguida pediu para que calculassem as respectivas áreas das bases obtendo $\mathrm{A}_{\mathrm{p}1/2} = 9\pi cm^2$ e $A_{\mathrm{C}1/2} = 9\pi cm^2$, onde $\mathrm{A}_{\mathrm{p}1/2}$ é a área da base da pirâmide e $A_{\mathrm{C}1/2}$ a do cone.

Depois passaram-se dois planos paralelos à base na altura $\frac{H}{3}$ e outro na altura $\frac{2H}{3}$, calculou-se novamente a aresta da base das pirâmides e os raios da base dos cones chegando aos resultados $\mathrm{L}_{1/3} = 2\sqrt{\pi}$ e $\mathrm{L}_{2/3} = 4\sqrt{\pi}$ e $r_{1/3} = 2$ e $r_{2/3} = 4$

Calculando novamente as áreas das bases teve-se que

$$A_{P1/3} = 4\pi cm^2 \qquad A_{P2/3} = 16\pi cm^2$$

$$A_{C1/3} = 4\pi cm^2 \qquad A_{C2/3} = 16\pi cm^2$$

Repetindo esse processo mais algumas vezes os alunos puderam perceber que o padrão das áreas nos cortes dos dois sólidos é sempre igual. E pelo Princípio de Cavalieri tem-se que: se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses dois sólidos têm o mesmo volume.

5.3 Construindo paralelepípedos e calculando áreas e volumes

a) Proposta de atividade 3

Objetivo

Calcular áreas, volumes, trabalhar as relações de semelhanças e perceber padrões.

Pré - requisitos

Para o desenvolvimento dessa atividade, os alunos deverão ter conhecimento de cálculo de áreas de figuras planas, cálculo de volumes e unidades de medidas.

Público alvo

Turmas de 2º ano no final do ano letivo e/ou 3º ano do Ensino Médio no início do ano.

Tempo previsto

O tempo previsto para a realização dessa atividade é de quatro horas/aula.

Metodologia

O aluno construiu uma pirâmide reta de base quadrangular de 12 cm de aresta da base e 18 cm de altura. Em seguida, construiu um paralelepípedo de base quadrada de aresta da base 12 cm e altura 9 cm. Usando as relações de semelhança, fez os cálculos para saber qual a aresta da base da pirâmide que surge ao passar um plano paralelo a base na metade da altura da pirâmide. Com isso, ele construiu um paralelepípedo com a aresta da base de mesma dimensão e altura 9 cm. Depois, o aluno calculou o volume da pirâmide e comparou com a soma dos volumes dos dois paralelepípedos.

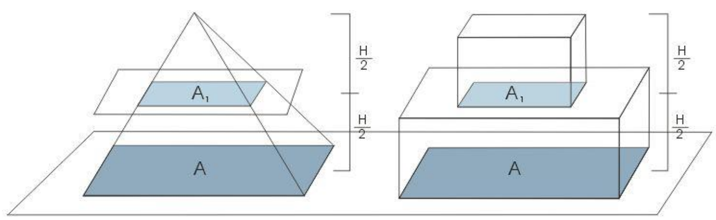

Figura 12 Ilustra dois paralelepípedos empilhados na mesma altura do plano paralelo a base da pirâmide

Calculando a área da secção média da pirâmide o aluno obteve a seguinte relação:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{x_1^2}{x^2} = \left(\frac{x_1}{x}\right)^2 = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \left(\frac{\frac{H}{2}}{H}\right)^2 = \left(\frac{H}{2H}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

onde x_1 e x são arestas da secção média e da base da pirâmide respectivamente.

A relação A1 = $\frac{A}{4}$ foi utilizada no cálculo do volume do sólido formado pelo empilhamento dos paralelepípedos e assim chegou-se ao resultado:

$$\left(A+\frac{A}{4}\right).\frac{H}{2}=\left(\frac{A+4A}{4}\right).\frac{H}{2}=\left(\frac{1^2+2^2}{2^3}\right).AH$$

O próximo passo foi imaginar dois planos paralelos à base da pirâmide dividindo sua altura H em $\frac{H}{3}$ e $\frac{2H}{3}$, calcular as arestas que surgiram para construir paralelepípedos com as mesmas arestas das bases. O que deu três paralelepípedos de altura 6 cm. Logo após, os alunos calcularam o volume de cada um, indicaram a soma. Sempre orientados para tentar enxergar um padrão. Analogamente ao resultado anterior obtido com dois paralelepípedos, a expressão obtida para três paralelepípedos foi:

$$\left(\frac{A}{9}+\frac{4A}{9}+A\right).\frac{H}{3}=\left(\frac{A+4A+9A}{9}\right).\frac{H}{3}=\left(\frac{1^2+2^2+3^2}{3^3}\right).AH$$

A repetição desse processo foi feita com três planos paralelos à base, dividindo a altura H da pirâmide em $\frac{H}{4}$, $\frac{2H}{4}$ e $\frac{3H}{4}$. Os cálculos de semelhança foram feitos para achar as respectivas arestas das bases para construção de paralelepípedos sendo suas alturas 4,5 cm. O volume foi novamente calculado dos quatro paralelepípedos para indicação da soma procurando mostrar sempre o padrão. Sendo assim, a expressão obtida foi:

$$\left(\frac{A}{16}+\frac{A}{4}+\frac{9A}{16}+A\right).\frac{H}{4}=\left(\frac{A+4A+9A+16A}{16}\right).\frac{H}{4}=\left(\frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{4^3}\right).AH$$

Após essas quatro etapas do processo de construção, o professor arguiu os alunos a pensar sobre a consequência de se fazer essa divisão indefinidamente e, assim, induzi-los à ideia de que o novo sólido formado foi uma pirâmide cujo cálculo do volume pode ser aproximado, com n crescendo infinitamente, pela análise da sequência:

$$V_n=\left(\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2}{n^3}\right).AH \qquad (1)$$

O que foi feito na proposta de atividade 3 tem fundamentação teórica e está demonstrado abaixo. Nada mais é do que o cálculo de volume por fatiamento.

Observe que a fórmula (1) é válida, qualquer que seja n Є N.

De fato, particionando a pirâmide n vezes, a alturas $\frac{kH}{n}$, com k = 1, 2, ..., n-1 obtemos secções cujas áreas satisfazem a relação

$$\frac{A_k}{A}=\frac{x_k^2}{x^2}=\left(\frac{x_k}{x}\right)^2=\left(\frac{\frac{kH}{n}}{H}\right)^2=\left(\frac{kH}{nH}\right)^2=\left(\frac{k}{n}\right)^2 \text{. Assim,}$$

$A_k=\left(\frac{k}{n}\right)^2.A$ e portanto a k-ésima pirâmide tem volume

$V_k = A_k.\frac{H}{n} = \left(\frac{k}{n}\right)^2.A.\frac{H}{n} = \frac{k^2}{n^3}.AH$ e o volume das n pirâmides é dado por:

$$\sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^2}{n^3}.AH = AH\left(\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n^3}\right)$$

Com o objetivo de calcular $\lim_{n\to\infty} V_n$, prova-se por indução que para qualquer n Є N

$$1^2+2^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Com efeito, se n = 1 tem-se:

$$1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2.1+1)}{6}$$

Suponha que

$$1^2+2^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\text{, logo}$$

$$1^2+2^2+...+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Provando que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$, para todo n Є N. Deste modo

$$V_n = \frac{AH}{n^3} . \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{AH}{n^3} . \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = AH . \frac{2n^2+3n+1}{6n^2}$$

e tomando o limite de V_n quando $n \to +\infty$ tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} AH\left(\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}\right) = \frac{1}{3} AH$$

ou seja V_n aproxima-se do volume da pirâmide quando $n \to +\infty$.

A mesma dedução pode ser feita usando um cone e cilindros empilhados.

5.4 Questionário e resultado das aplicações das praticas e perguntas realizadas com os alunos

Pergunta 1

Em relação à prática 1 *Amplitude e dobraduras* qual das opções a seguir você acredita que representa o acréscimo no conhecimento dos sólidos e principalmente na visualização desses sólidos?

( ) Muito Pouco ( ) Pouco ( ) Regular
( ) Bom ( ) Excelente

Pergunta 2

Em relação à prática 2 *Princípio de Cavalieri* qual das opções a seguir você acredita que representa a ajuda no seu entendimento sobre semelhanças e cálculo de áreas?

( ) Muito Pouco ( ) Pouco ( ) Regular
( ) Bom ( ) Excelente

Pergunta 3

Em relação à prática 3, *Construindo paralelepípedos*, qual das opções a seguir representa o quanto essa atividade acrescentou em seu conhecimento para calcular áreas e volumes e perceber padrões?

( ) Muito Pouco ( ) Pouco ( ) Regular
( ) Bom ( ) Excelente

Pergunta 4

De um modo geral qual das opções a seguir representa um ganho em sua aprendizagem ao fazer essas práticas além dos exercícios tradicionais dos livros?

( ) Muito Pouco ( ) Pouco ( ) Regular
( ) Bom ( ) Excelente

Como avaliação piloto, as três práticas foram aplicadas numa turma de trinta alunos e os resultados são apresentados na Tabela 1. O teste foi realizado de maneira que o aluno participava da primeira prática e, ao final, respondia à pergunta correspondente a essa prática. Participava da segunda prática e respondia à pergunta correspondente e assim sucessivamente até a terceira prática. E, por fim, após a pergunta da terceira prática havia uma quarta pergunta abordando o conteúdo de forma generalizada.

Tabela 1 Distribuição de frequências das respostas obtidas pela avaliação dos 30 alunos submetidos às práticas de acordo com perguntas que relacionam sua percepção de aprendizado no teste piloto realizado

Perguntas	***Percepção do aprendizado*[1]***			Total
	Pouco ou Regular[2]	**Bom**	**Excelente**	
1	6	18	6	30
2	15	12	3	30
3	8	12	10	30
4	3	15	12	30
Total	32	57	31	**120**

Nota: [1] significativo a 5% de probabilidade pelo teste do Qui-Quadrado de independência (p = 0,007).
[2] agrupamento de respostas efetuado pela baixa frequência de respondentes na opção "***pouco***".

Os resultados obtidos para o teste piloto, mostrados na Tabela 1, mostram que houve associação significativa entre a percepção de aprendizado e as perguntas relacionadas à aplicação das práticas, ou seja, na medida em que as práticas foram desenvolvidas, em geral, houve melhor avaliação na percepção do aprendizado. Esse resultado sugere que, com ajustes na metodologia de execução das práticas, associada a uma amostra maior, podem elucidar resultados mais consistentes.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa pesquisa teve como objetivo mostrar com o estudo da LDB, PCNs e CBC a importância de se avaliar os aspectos do ensino de qualidade da geometria métrica espacial para um melhor aprendizado da disciplina; analisar os livros didáticos de Matemática do ensino médio adotados nas escolas públicas de Minas Gerais enfocando a abordagem conceitual do cálculo de áreas e volumes de corpos redondos.

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), o Princípio de Cavalieri deve ser tomado como ponto de partida para o estudo de volumes de sólidos (cilindro, prisma, pirâmide, cone e esfera), permitindo ao aluno compreender o significado das fórmulas.

O CBC afirma que o Princípio de Cavalieri é muito importante para o cálculo do volume dos sólidos e deve ser ensinado no Ensino Médio (MINAS GERAIS, 2013).

Priorizou-se o uso do Princípio de Cavalieri para apresentar as fórmulas de volume de cilindro, cone e esfera. Essas argumentações facilitam o entendimento do tema bem como ajuda a visualização do Princípio de Cavalieri. Ao tratar esse tema dessa forma, espera-se que a relação de ensino-aprendizagem tenha estreita conexão com o cotidiano e assim, os alunos que prosseguirem os estudos na área de exatas estejam estimulados com melhor fundamentação conceitual e suas consequências.

Foi feito um estudo dos textos oficiais como LDB, PCNs, CBC e PNLD, Ensino de Geometria Espacial, objeto matemático dessa pesquisa. Todos os textos citados são orientações oficiais que regulamentam e orientam a Educação Nacional e são de responsabilidade do Ministério da Educação.

A análise dos livros didáticos teve como finalidade verificar se as propostas para abordar o capítulo de área e volume dos corpos redondos proporcionam e favorecem a construção do conhecimento por parte dos alunos. Concluiu-se que os livros didáticos analisados atendem parcialmente à construção do pensamento geométrico espacial porque os resultados da pesquisa indicaram a pouca exploração por parte dos autores do Princípio de Cavalieri no que tange ao estudo do volume de sólidos. Quando se usa o Princípio de Cavalieri favorece ao aluno perceber os processos que levam ao estabelecimento da fórmula do volume dos sólidos.

Sem conhecer Geometria, a leitura de interpretação do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática distorcida.

REFERÊNCIAS

BARRETO, B.; XAVIER, C. **Matemática ano 2000:** volume único. São Paulo: FTD, 2000. 671 p.

BARROSO, J. M. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2010. v. 2, 440 p.

BRASIL. Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos PNLD 2005:** história. Brasília, 2004. 108 p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio:** ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 2006. v. 2, 137 p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática PCN. Brasília, 1997. 142 p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio**. Brasília, 1998. 141 p.

DANTE, L. R. **Matemática:** contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2010. v. 2, 442 p.

DANTE, L. R. **Matemática:** volume único. São Paulo: Ática, 2005. 504 p.

DOLCE, O.; NICOLAU, J. **Fundamentos de matemática elementar**. 6. ed. São Paulo: Atual, 2005. 440 p.

FAINGUELERNT, E. K. O ensino de geometria no 1º e 2º graus. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 4, p. 45-52, jan./jun. 1995.

FILOCRE, J. Leitores se formam nas escolas em que há sincera afeição pela literatura. **Revista Presença Pedagógica**, Belo Horizonte, v. 11, n. 24, out./set. 2005. Disponível em: <http://crv.educacao.mg.gov.br/aveonline40/banco_objetos_crv%7B13EC2031-2AC4-4EF8-90A1-9BF491FA6825201281514312830%7D.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2013.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar 11**. São Paulo: Atual, 2004. 232 p.

LAJOLO, M. Livro didático: um (quase) manual de usuário. **Em Aberto**, Brasília, v. 16, n. 69, jan./mar. 1996. Disponível em: <http://emaberto.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/view/1033>. Acesso em: 10 mar. 2013.

LIMA, E. L. **Medida e forma em geometria:** comprimento, área, volume e semelhança. Rio de Janeiro: SBM, 2009. 93 p.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 2, 308 p.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 4, p. 3-13, jan./jun. 1995.

MINAS GERAIS. Secretaria da Educação. **Proposta curricular CBC:** matemática: ensinos fundamental e médio. Disponível em: <http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/banco_objetos_crv/%7B4DA513B4-3453-4B47-A322-13CD37811A9C%7D_Matem%C3%A1tica%20final.pdf>. Acesso em: 12 jun. 2013.

PAIVA, M. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2009. v. 2, 576 p.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. **Zetetiké**, Campinas, v. 1, n. 1, p. 7-39, mar. 1993.

RIBEIRO, J. **Matemática:** ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2010. v. 3, 376 p.

SCUARCIALUPI, L. **Por dentro da lei de diretrizes e bases**. São Paulo: Abril, 2011. Disponível em: <http://educarparacrescer.abril.com.br/politica-publica/lei-diretrizes-bases-349321.shtml>. Acesso em: 10 mar. 2013.

SMOLE, K. C. S. **Matemática:** ensino médio. São Paulo: Saraiva, 2010. v. 2, 448 p.

SOUZA, J. R. de. **Novo olhar matemática**. São Paulo: FTD, 2010. v. 3, 320 p.

TUFANO, W.; FAZENDA, I. C. **Contextualização dicionário em construção:** interdisciplinaridade. São Paulo: Cortez, 2004. 272 p.

UNIÃO DOS BLOGS DE MATEMÁTICA. **Pilhas de moedas**. Disponível em: <http://ubmatematica.blogspot.com.br/2011/09/carnaval-da-matematica-da-ubm-n-06.html>. Acesso em: 10 jun. 2013.