Universidade Federal do Cariri
Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Desigualdades Matemáticas: Aspectos Históricos e Aplicações Olímpicas

Raul Albuquerque Moura e Braga

Juazeiro do Norte

2024

Raul Albuquerque Moura e Braga

Desigualdades Matemáticas: Aspectos Históricos e Aplicações Olímpicas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Leandro da Silva Tavares

Juazeiro do Norte

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

B813d Braga, Raul Albuquerque Moura e
Desigualdades matemáticas: aspectos históricos e aplicações olímpicas/ Raul Albuquerque Moura e Braga – 2024.
50 f. il. color.; 30 cm.
(Inclui bibliografia, p.48-50).

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2024.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. Leandro da Silva Tavares.

1. Desigualdade de Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky. 2. Desigualdade das médias. 3. Desigualdade de Nesbitt. 4. Desigualdade de Schur. I. Tavares, Leandro da Silva - orientador. II. Título.

CDD 510.7

Bibliotecário: João Bosco Dumont do Nascimento – CRB 3/1355

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO - MEC
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI - UFCA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Desigualdades Matemáticas: Aspectos Históricos e Aplicações Olímpicas

RAUL ALBUQUERQUE MOURA E BRAGA

Dissertação de Mestrado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática na Educação Básica.

Aprovada em 10 de maio de 2024.

Banca Examinadora

Documento assinado digitalmente
gov.br LEANDRO DA SILVA TAVARES
Data: 18/05/2024 16:43:17-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Leandro da Silva Tavares
Orientador

Documento assinado digitalmente
gov.br VALDIR FERREIRA DE PAULA JUNIOR
Data: 13/05/2024 15:34:13-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Valdir Ferreira de Paula Junior
UFCA

Documento assinado digitalmente
gov.br ANDRE AMARANTE LUIZ
Data: 14/05/2024 10:39:32-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. André Amarante Luiz
UNESP

Documento assinado digitalmente
gov.br RICARDO LIMA ALVES
Data: 14/05/2024 15:02:39-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Ricardo Lima Alves
UFAC

Dedico ao meu pai Jorge Roberto (in memoriam), minha mãe Marciana de Mora, meu irmão Renato Albuquerque, minha irmã Maria Albuquerque (in memoriam) e a minha esposa Luíza Ferreira

Agradecimentos

Agradeço a minha família que me ensinou, desde sempre, o papel fundamental da educação, e cujo amor carrego sempre comigo. Obrigado pai Jorge Roberto (in memoriam), mãe Marciana de Moura, meu querido irmão Renato Albuquerque, e Maria Albuquerque (in memoriam), sem vocês eu nada seria, espero retribuir o amor, carinho e dedicação despendidas para mim.

A minha querida, e bela, esposa Luíza Ferreira, cuja dedicação e esforço foram imprescindíveis para essa conquista.

Aos meus colegas de turma, cuja união e as reuniões via meet, foram fatores decisivos para a aprovação do tão famigerado ENQ.

Agradeço ainda a todos os professores, que sempre buscaram compartilhar seus conhecimentos, em particular ao professor Leandro, que desde o início se mostrou disposto para me ajudar tanto na escrita pelo Tex, quanto buscando sempre enriquecer a bibliografia do artigo a seguir.

"Os filósofos limitaram-se a interpretar o mundo de diversas maneiras; o que importa é modificá-lo."
(Karl Marx)

Resumo

Este trabalho, o qual é baseado integralmente em [15], consiste em abordar diversas desigualdades matemáticas clássicas. Isso será feito através de duas maneiras, sendo a primeira via o estudo do desenvolvimento histórico dessas desigualdades, e a segunda pelo estudo de demonstrações não convencionais e aplicações nas olimpíadas de Matemática ao redor do mundo. O público alvo consiste nos leitores que buscam um material de apoio para competições matemática e os que possuem altas habilidades com interesse pela temática do trabalho.

Palavras-chave: Desigualdade de Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky; Desigualdade das médias; Desigualdade de Nesbitt, Desigualdade de Schur.

Abstract

The goal of this work, which is based on [15], is to address various classical mathematical inequalities. This is achieved through two approaches: firstly, by studying the historical development of these inequalities, exploring unconventional proofs, and examining their applications in mathematics Olympiads worldwide. The work is focused on readers seeking support material for preparation for mathematical competitions, as well as those with advanced skills and interest in the theme of the work.

Keywords: Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky Inequality; AM-GM Inequality; Nesbitt's Inequality; Schur's Inequality; Jensen's Inequality.

Lista de Figuras

Conteúdo

1 INTRODUÇÃO

A história da matemática é um relato da evolução humana no que diz respeito ao domínio dos números, formas e relações abstratas. Ao longo do tempo, tem-se estudado uma vasta quantidade de desafios, desde os mais básicos até os mais complexos. Entre esses desafios, destacam-se as desigualdades matemáticas, que desafiaram a habilidade, perspicácia e criatividade dos mesmos.

O objetivo deste trabalho consiste em estudar desigualdades matemáticas clássicas que surgiram ao longo de séculos, assim como os aspectos históricos referentes a elas. Objetivamos não somente compreender o contexto em que essas desigualdades surgiram, mas também reconhecer seus impactos e sua relevância contínua na ciência. E, em um contexto tecnológico tem-se mais do que nunca, resgatar as memórias diversas vezes esquecidas dos que alicerçaram a matemática que conhecemos hoje. Mais especificamente, para esse fim, consideraremos a história dos primeiros símbolos utilizados para desigualdades e após adentrarmos mais especificamente nas desigualdades as desigualdades de Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky, das Médias, de Nesbitt, Schur e Jensen.

Este trabalho possui como foco o leitor com interesse em se preparar para competições olímpicas de matemática, assim como os estudantes de altas habilidades com interesse nos tópicos descritos anteriormente. Sendo assim, um dos objetivos deste trabalho é buscar a aplicação das desigualdades abordadas em problemas de matemática de nível olímpico. As Olimpíadas de Matemática representam um evento no qual as habilidades matemáticas dos competidores são postas à prova, desafiando-os a resolver problemas complexos e a pensar de forma criativa. Nesse sentido, o estudo e compreensão do conteúdo deste trabalho não só enriquecem o repertório do estudante em preparação para olímpiadas, como também os capacitam a aplicarem as técnicas aqui estudadas no cenário olímpico. Mais ainda, o estudo do tópico aqui considerado é imprescindível para qualquer estudante em preparação para olímpiadas internacionais de matemática, devido a alta recorrência de questões envolvendo desigualdades em tais competições.

Por fim, destacamos que o presente trabalho aspira portanto servir como um recurso educacional para aqueles que buscam explorar as desigualdades matemáticas, tanto na parte histórica quanto na técnica. Esta última para os alunos com objetivo em competir em olimpíadas de matemática e os que possuem altas habilidades com interesse nos tópicos abordados. Assim sendo ao fornecer uma visão histórica e técnica dessas desigualdades, esperamos que os leitores não só aprimorem suas habilidades matemáticas, mas também cultivem uma apreciação pelo poder e beleza dessa ciência.

2 ORIGENS DA SIMBOLOGIA PARA DESIGUALDADES

De acordo com Cajori [3], surpreendentemente, as expressões relacionadas a desigualdades matemáticas eram expressas verbalmente devido à falta de uma simbologia definida para tais propósitos. Apenas posteriormente é que os símbolos que conhecemos hoje para demonstrar as desigualdades foram introduzidos.

Sem a intenção de apresentar o desenvolvimento histórico completo das notações para desigualdades, destacaremos os primeiros símbolos a serem utilizados na literatura matemática para tal tarefa. Por exemplo, os símbolos $<$ e $>$, os quais são lidos respectivamente como "menor que" e "maior que", surgiram pela primeira vez na literatura no livro [10] intitulado "Artis Analyticae Praxis ad Aequationes Algebraicas Resolvendas", cuja tradução livre é "Aplicações das Artes Analíticas na resolução de equações algébricas". Este livro foi publicado postumamente no ano de 1631 pelo astrônomo e matemático Thomas Harriot (1560-1621), nascido em Oxford, Inglaterra, e falecido em Londres, também na Inglaterra.

Os símbolos criados por Harriot consistiam primordialmente na utilização de triângulos. Entretanto, o editor de seu livro modificou os mesmos, transformando-os nos símbolos mencionados inicialmente. Harriot descreve em seu livro: "O símbolo de maioria (signum majoritatis), denotado por $a > b$, significa que a é maior que b, e o símbolo de minoria (signum minoritatis), $a < b$, significa que a é menor que b."

Os símbolos $\leqq$ e $\geqq$, que são lidos como " menor ou igual que" e "maior ou igual que", respectivamente, foram introduzidos em 1734 pelo matemático, geofísico e astrônomo francês Pierre Bouguer (1698–1758), o qual nasceu em Le Croisic, França, e faleceu em Paris, França.

O matemático inglês John Wallis (1616-1703), nascido em Ashford, Inglaterra, e falecido em Oxford, considerou nos anos de 1670 uma variação dos símbolos de Pierre Bouger. A variação utilizada por ele consistia em retirar uma das barras horizontais dos símbolos de Bouger.

É interessante apontar também que símbolos não usuais para desigualdades surgiram na literatura, como por exemplo "$\not>$" e "$\not<$", os quais significam respectivamente "não maior que" e "não menor que". Esses símbolos, em conjunto com grande parte da simbologia matemática da atualidade, foram criados pelo matemático, físico e astrônomo Leonhard Euler (1707–1783), que nasceu em Basel, na Suíça, e faleceu em São

Petesburgo, no Império Russo (atual Rússia).

Os símbolos que apresentamos foram os inaugurais a serem utilizados com o fim de representar desigualdades, os quais sofreram variações e modificações ao longo do tempo, culminando na simbologia de conhecimento comum. Para uma exposição mais detalhada e completa do desenvolvimento desses símbolos, recomendamos a referência [3].

3 DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARZ-BUNYAKOVSKY

Uma pergunta intrínseca ao estudo das desigualdades matemáticas é a seguinte: qual delas se apresenta como o melhor ponto de partida?

A resposta para essa pergunta veio através de uma passagem do livro *Secrets in Inequalities* [9].

> Qual é a desigualdade básica? A resposta comum é: MA-MG. Mas qual é a mais original das desigualdades básicas? Inclino-me a responder à desigualdade de Cauchy-Schwarz. Por que? Porque Cauchy-Schwarz é muito eficaz em provar desigualdades simétricas, especialmente desigualdades em três variáveis. [9, p. 34].

Um ponto importante sobre a desigualdade, tema deste capítulo, é que embora em diversos locais do mundo a desigualdade seja atribuída a Cauchy e Schwarz, outro matemático de sobrenome Bunyakovsky possui o maior mérito em relação à obtenção da desigualdade, fato que será explicado na Seção 3.3.

Apresentamos a seguir a famosa Desigualdade de Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky.

Teorema 1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky)**.** *Sejam $a_1, \cdots, a_n$ e $b_1, \cdots, b_n$ números reais. A desigualdade*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \tag{1}$$

é verdadeira, ocorrendo a igualdade se, e somente se, existir uma constante α tal que: $a_k = \alpha b_k$ para todo $k = 1, 2, ..., n$.

Em consonância com o que nos diz Hung, é pela desigualdade de Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky que iniciaremos este trabalho. Mas antes de apresentarmos a desigualdade e uma demonstração para a mesma, apresentaremos alguns comentários acerca da vida e obra dos dois matemáticos que dão nome à desigualdade.

3.1 BIOGRAFIA DE CAUCHY

Segundo Belhost [1], Augustin Louis Cauchy (1789-1857) foi um matemático francês que nasceu em Paris em 21 de agosto de 1789, pouco mais de um mês após a queda da Bastilha (14 de julho de 1789), evento que teve grande repercussão em sua vida, haja vista que seu pai, Louis-François Cauchy, foi o principal comissário do Tenente General de Polícia de Paris.

Tal evento, segundo O'Connor (1997) [19], fez com que Cauchy e sua família se mudassem para Arcueil e só voltassem em 1794, quando o jovem Cauchy ingressou na École Centrale du Panthéon para estudar linguagens, a pedido do renomado matemático italiano Lagrange (1736-1813), conhecido de sua família.

No que concerne a parte científica, Cauchy foi conhecido pelo rigor científico em sua prolífica carreira acadêmica, na qual abrangeu diversas áreas: Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística, Mecânica, Análise Real e Complexa e Física Matemática. A famosa desigualdade obtida por Cauchy, fato ocorrido no ano de 1821, foi publicada em seu livro clássico [6]. Para os detalhes mencionados e diversos outros, recomendamos a referência Steele [27].

3.2 BIOGRAFIA DE SCHWARZ

Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) foi um matemático alemão. No que se refere às referências bibliográficas, Cauchy e Schwarz em muito se diferem. Enquanto o primeiro é contemplado com uma ampla gama de biografias, o segundo é marcado por uma ausência delas.

Carathéodory em [4], aponta: Schwarz, após formar-se no Ginásio de Dortmund em 1860 e estudar química no Instituto Industrial de Berlim (que passou a se chamar Universidade Técnica de Charlottenburg) sofreu logo cedo influência de seus professores Kummer e Weiestrass, mudando sua área de estudo para a matemática. Concluiu seu doutorado em agosto de 1864 na Universidade de Berlim defendendo sua tese acerca das superfícies desenvolvíveis.

Segundo Connor [21], Schwarz concentrou suas pesquisas em Aplicações Conformes definidas sobre Superfícies Poliédricas que atuam em Superfícies Esféricas e em problemas de Superfícies Mínimas. A desigualdade considerada nesta seção é uma consequência dos resultados obtidos por Schwarz.

3.3 BIOGRAFIA DE BUNYAKOVSKY

Segundo O'Connor em [23], Viktor Yakovlevich Bunyakovsky, ou simplesmente Bunyakovsky, nasceu em 1804, no antigo Império Russo, onde hoje fica a Ucrânia. Durante os primeiros anos de vida, estudou sob o regime de homeschooling, mas em seguida fez seu doutorado em Paris em 1825, após trabalhar com Cauchy.

Em 1825, voltou a São Petersburgo, onde lecionou e estudou durante muitos anos em instituições como o Primeiro Corpo de Cadetes, a Academia de Comunicações e a Academia Naval, oferecendo cursos em matemática e mecânica. Também foi professor na Universidade de São Petersburgo de 1846 a 1880. Porém, o seu trabalho de investigação científica foi realizado na Academia de Ciências de São Petersburgo, tendo ocupado o cargo de vice-presidente da instituição até a sua morte, em 1889. Dentre as suas grandes contribuições para o mundo acadêmico, destaca-se o trabalho em teoria dos números (onde apresentou uma nova prova da lei da reciprocidade quadrática de Gauss), geometria e matemática aplicada. Em 1853, analisou o quinto postulado de Euclides, fazendo um relato crítico das tentativas anteriores de prová-lo. Mas, certamente, sua maior contribuição está em descobrir, 25 anos antes, a desigualdade de Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky, publicada em uma monografia em 1859 sobre desigualdades entre integrais. Por essa razão, em alguns países, e no presente trabalho, seu nome é acrescido à desigualdade junto aos autores previamente biografados.

3.4 DEMONSTRAÇÃO

A seguir apresentamos a demonstração da desigualdade que foi extraída de Wu [29].

Demonstração. Quando $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) = 0$, ou $\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) = 0$ temos que (1) é uma identidade.
Assim sendo, podemos assumir que $A_n = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \neq 0, B_n = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \neq 0.$
Defina

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt{A_n}}, y_i = \frac{b_i}{\sqrt{B_n}}, i = 1, \cdots, n.$$

Observe que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{a_1^2}{A_n} + \frac{a_2^2}{A_n} + \cdots + \frac{a_n^2}{A_n} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{A_n} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = 1.$$

Com o mesmo raciocínio acima obtemos $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$.

Logo

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1.$$

Afirmamos que a desigualdade (1) é equivalente a

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \leq 1. \tag{2}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) &\geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \iff \\
\sqrt{A_nB_n} &\geq \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \iff \\
1 &\geq \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{\sqrt{A_nB_n}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{a_1b_1}{\sqrt{A_nB_n}} + \frac{a_2b_2}{\sqrt{A_nB_n}} + \cdots + \frac{a_nb_n}{\sqrt{A_nB_n}} &\leq 1 \iff \\
x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n &\leq 1,
\end{aligned}$$

como queríamos.

Admitindo que a desigualdade (2) é válida, temos:

$$\begin{aligned}
x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n &\leq 1 \iff \\
2(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) &\leq 1 + 1 \iff \\
2(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) &\leq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2). \qquad (3)
\end{aligned}$$

Note que a última desigualdade acima é equivalente à desigualdade

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 \geq 0.$$

Como a última desigualdade é sempre verdadeira, segue que (1) é válida, provando assim a primeira parte do Teorema 2.

Para a segunda parte, note que a igualdade em (1) é equivalente a

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 = 0,$$

a qual ocorre se, e somente se, $x_k = y_k, k = 1, 2, ..., n$. Portanto

$$\frac{a_k}{\sqrt{A_n}} = \frac{b_k}{\sqrt{B_n}} k = 1, 2, \cdots, n,$$

o que implica $a_k = \left(\frac{\sqrt{A_n}}{\sqrt{B_n}}\right) b_k$, justificando a segunda parte do resultado. $\square$

3.5 PROBLEMAS

Problema 1 (Iran MO 1998): Sejam x, y, z números reais maiores que zero tais que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2,$$

prove que

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \leq \sqrt{x+y+z}.$$

Solução: A solução a seguir pode ser encontrada em [14, p. 169]. Nossa hipótese implica que

$$1 - \frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{y} + 1 - \frac{1}{z} = 1,$$

o que acarreta

$$\frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z} = 1. \tag{4}$$

Defina $a_1 = \sqrt{x}, a_2 = \sqrt{y}, a_3 = \sqrt{z}, b_1 = \sqrt{\frac{x-1}{x}}, b_2 = \sqrt{\frac{y-1}{y}}$ e $b_3 = \sqrt{\frac{z-1}{z}}$. Logo temos $a_1b_1 = \sqrt{x-1}, a_2b_2 = \sqrt{y-1}, a_3b_3 = \sqrt{z-1}$. Segue de (4) que $\sum_{i=1}^{3} b_i^2 = 1$. Pelo Teorema 1, temos

$$\left(\sum_{i=1}^{3} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{3} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{3} a_i b_i\right)^2.$$

Usando que $\sum_{i=1}^{3} b_i^2 = 1$ temos

$$\sum_{i=1}^{3} a_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{3} a_i b_i\right)^2.$$

Portanto

$$x + y + z \geq \left[\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}\right]^2,$$

o que implica

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1},$$

como desejávamos. □

Problema 2 (IMO 1981): P é um ponto interior de um triângulo ΔABC dado. D, E, F são os pés das perpendiculares partindo de P para as linhas BC, CA, AB, respectivamente. Encontre qual é o ponto P, interno ao ΔABC, tal que a soma

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

seja mínima.

Solução: A solução descrita a seguir se encontra em [14, p. 157]. Sejam a, b, c, x, y, z os comprimentos dos segmentos AB, BC, CA, PD, PF, PE respectivamente. Devemos mostrar que a soma $\frac{b}{x} + \frac{c}{z} + \frac{a}{y}$ seja mínima.

Note que $bx + cz + ay = 2\Delta ABC$ em que ΔABC denota a área do triângulo de vértices A, B e C. Defina os números

$$a_1 = \sqrt{\frac{b}{x}}, a_2 = \sqrt{\frac{c}{z}}, a_3 = \sqrt{\frac{a}{y}}$$

e

$$b_1 = \sqrt{bx}, b_2 = \sqrt{cz}, b_3 = \sqrt{ay}.$$

Temos

$$\sum_{i=1}^{3} a_i^2 = \frac{b}{x} + \frac{c}{z} + \frac{a}{y}, \sum_{i=1}^{3} b_i^2 = bx + cz + ay \text{ e } \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = b + c + a.$$

Logo, pelo Teorema 1 temos

$$\begin{aligned}(bx+cz+ay)\left(\frac{b}{x}+\frac{c}{z}+\frac{a}{y}\right) &\geq (a+b+c)^2 \iff \\ \frac{b}{x}+\frac{c}{z}+\frac{a}{y} &\geq \frac{(b+c+a)^2}{2\Delta(ABC)},\end{aligned}$$

em que a igualdade ocorre se, e somente se, existir $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sqrt{\frac{b}{x}} = \alpha\sqrt{bx}, \sqrt{\frac{c}{z}} = \alpha\sqrt{cz}, \sqrt{\frac{a}{y}} = \alpha\sqrt{ay},$$

o que ocorre se, e somente se, $x = y = z$, ou seja, no incentro do triângulo ΔABC.

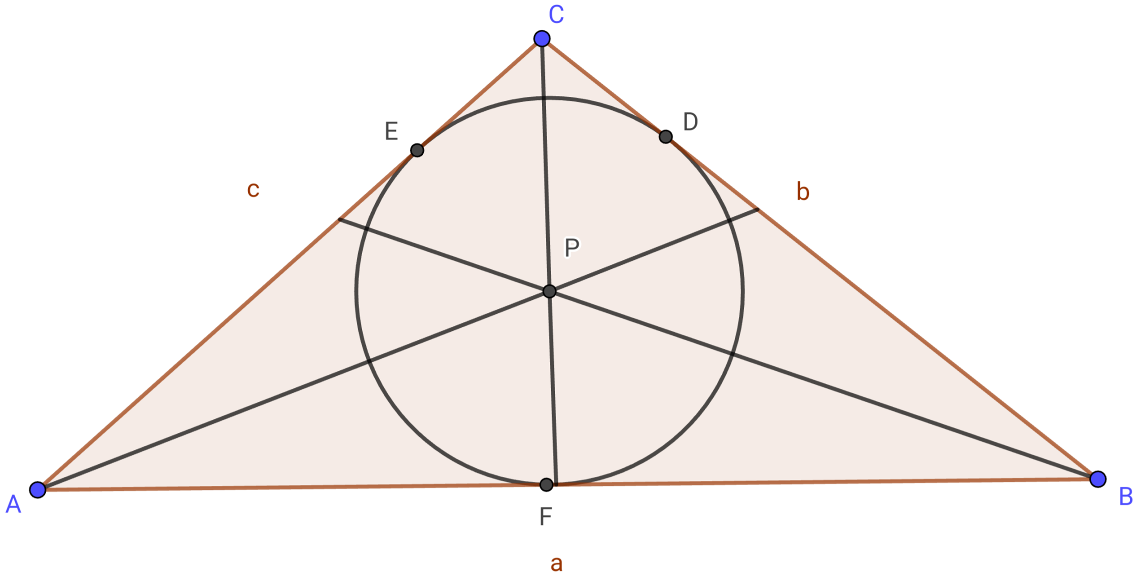

Figura 1: Visualização geométrica do Problema 2

$\square$

4 DESIGUALDADE DAS MÉDIAS

Nessa seção, apresentaremos a clássica desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, a qual será descrita precisamente a seguir. Observe que a notação utilizada para descrever a média artmética será: A_n já média geométrica, por sua vez, será representada por G_n

Teorema 2 (Desigualdade das médias aritmética e geométrica)**.** *Considere*

$$A_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \text{ e } G_n = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}},$$

em que $a_1, ..., a_n$ são números reais positivos, a média aritmética e geométrica de tais números respectivamente. Então, $A_n \geq G_n$ com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Considerando a_1 e a_2 números reais positivos, um círculo de raio $\dfrac{a_1 + a_2}{2}$ e as relações métricas de um triângulo retângulo, podemos interpretar geometricamente o Teorema 2 conforme a figura abaixo.

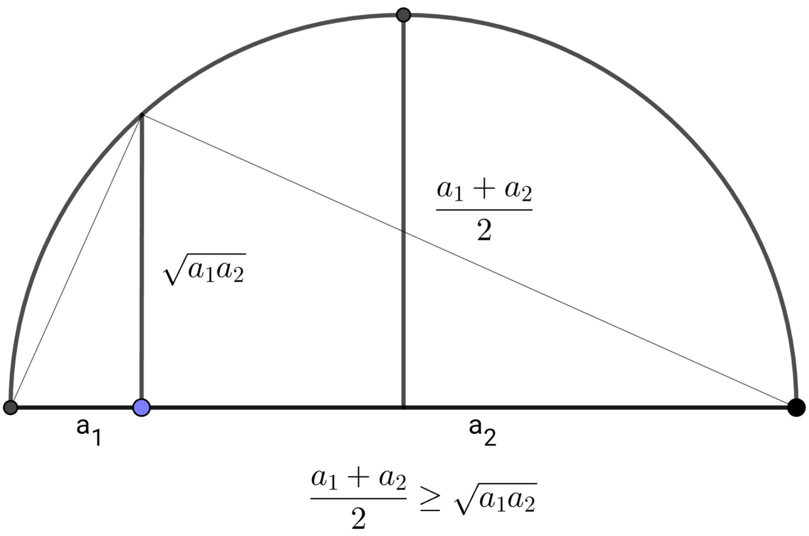

Figura 2: Interpretação geométrica do Teorema 2

4.1 HISTÓRIA

A história da desigualdade entre as médias remonta à Grécia Antiga, um período de grande desenvolvimento da Matemática e da Filosofia. A referida desigualdade possui registros desde os tempos do famoso matemático Euclides de Alexandria, cujos intensos esforços contribuíram de maneira imensurável para o desenvolvimento da Matemática. Euclides é considerado pelos matemáticos como o pai da Geometria, o qual se destaca como uma figura central na história da disciplina. Suas contribuições na área não se limitaram apenas ao avanço da Geometria, mas também na organização lógica da mesma o que o fez escrever o mais importante tratado de Geometria "Os Elementos". Para mais os detalhes mencionados aqui e outros, veja por exemplo [2].

No que tange o surgimento da primeira demonstração matemática da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica atribuída a Colin Maclaurin (1698-1746), matemático escocês, em 1729. É oportuno mencionar também que Cauchy, em seu trabalho clássico "Cours d'Analyse", apresenta uma bela demonstração para a desigualdade que permanece famosa até os dias atuais.

4.2 DEMONSTRAÇÃO

Iniciaremos a demonstração do Teorema 2, na qual seguiremos o que está descrito no artigo [16].

O lema a seguir terá um papel importante na demonstração do Teorema 2.

Lema 1. *Sejam $a_1, ..., a_{2^n}, n \in \mathbb{N}$ números reais positivos e considere*

$$A_{2^n} = \frac{\sum_{i=1}^{2^n} a_i}{2^n} \text{ e } G_{2^n} = \left(\prod_{i=1}^{2^n} a_i\right)^{\frac{1}{2^n}}.$$

Então $A_{2^n} \geq G_{2^n}$ com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $a_1 = a_2 = ... = a_{2^n}$.

Demonstração. Provemos o lema, por indução. Para $n = 1$, temos que demonstrar que

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} \tag{5}$$

que é equivalente a $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$, o que sempre ocorre com a igualdade sendo verdadeira se, e somente se, $a_1 = a_2$.

Suponha que a desigualdade desejada é válida para $n = k$, isto é,

$$A_{2^k} \geq G_{2^k} \tag{6}$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $a_1 = a_2 = ... = a_{2^k}$. O objetivo será demonstrar que $A_{2^{k+1}} \geq G_{2^{k+1}}$.

Observe que

$$\begin{aligned} A_{2^{k+1}} &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k}}{2^k} + \frac{a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^k}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Logo, pela hipótese de indução (6) aplicada em (7) temos

$$A_{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdots a_{2^k}} + \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}}}\right). \tag{8}$$

E, mais ainda, por (5), aplicada em (8) temos

$$\begin{aligned} A_{2^{k+1}} &\geq \sqrt{\sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdots a_{2^k} a_{2^k+1} \cdots a_{2^{k+1}}}} \\ &= \sqrt[2^{k+1}]{a_1 a_2 \cdots a_{2^k} a_{2^k+1} \cdots a_{2^{k+1}}} \\ &= G_{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

Logo, por indução, provamos a desigualdade desejada. Claramente a igualdade ocorre se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_{2^{k+1}}$. □

Agora estamos prontos para demonstrar o Teorema 2.

Demonstração do Teorema 2. Quando aplicamos o Lema 1 em 2^n números reais positivos $a_1, a_2, \cdots, a_n, \underbrace{G_n, ..., G_n}_{2^n - n\ termos}$, em que $G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + \cdots + a_n + \underbrace{G_n + \cdots + G_n}_{2^n - n\ termos}}{2^n} &\geq \sqrt[2^n]{a_1 a_2 \cdots a_n (G_n)^{2^n - n}} \\ &= \sqrt[2^n]{(G_n)^n (G_n)^{2^n - n}} \\ &= G_n. \end{aligned} \tag{9}$$

Agora, observe que

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = nA_n. \tag{10}$$

Substituindo (10) em (9) temos

$$\frac{nA_n + (2^n - n)(G_n)}{2^n} \geq G_n.$$

Multiplicando ambos os lados da última desigualdade por 2^n temos

$$nA_n + (2^n - n)(G_n) \geq 2^n G_n,$$

na qual ao subtrairmos $(2^n - n)(G_n)$ tem-se

$$nA_n \geq 2^n G_n - (2^n - n)(G_n),$$

o que resulta em

$$nA_n \geq nG_n.$$

Ao multiplicarmos ambos os lados da útima desigualdade por $\frac{1}{n}$, obtemos

$$A_n \geq G_n,$$

como queríamos. Pelo Lema 1, observe ainda que na desigualdade (9) a igualdade ocorre se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = G_n$, mas isso ocorre se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. □

4.3 PROBLEMAS

Problema 3 (Russian MO 2004) Sejam a, b, c números reais positivos, cuja soma é 3. Prove que

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca \tag{11}$$

Solução: A solução apresentada para esta questão pode ser encontrada em [9, p. 18]. Sejam $x_1 = a, x_2 = b$ e $x_3 = c$, logo (11) pode ser reescrita como

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} \geq x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1,$$

ou ainda,

$$2(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}) \geq 2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) \tag{12}$$

Vamos encontrar uma expressão equivalente para o lado direito de (12). Observe que

$$\begin{aligned} (x_1+x_2+x_3)^2 &= (x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) \Longleftrightarrow \\ 2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) &= (x_1+x_2+x_3)^2-(x_1^2+x_2^2+x_3^2) \Longleftrightarrow \\ 2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) &= 9-(x_1^2+x_2^2+x_3^2), \end{aligned} \tag{13}$$

onde na última igualdade usamos a hipótese $x_1+x_2+x_3=3$. Segue de (12) e da igualdade anterior que a desigualdade em (11) é equivalente a

$$\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+2\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}\right) \geq 9. \tag{14}$$

Demonstremos (14). Pelo Teorema 2 e a hipótese $x_1+x_2+x_3=3$ temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3}\left(x_i^2+\sqrt{x_i}+\sqrt{x_i}\right) &\geq 3\left(\sum_{i=1}^{3}\sqrt[3]{{x_i}^2\sqrt{x_i}\sqrt{x_i}}\right) \\ &= 3\left(\sum_{i=1}^{3}\sqrt[3]{{x_i}^3}\right) \\ &= 3\left(\sum_{i=1}^{3}x_i\right) \\ &= 9, \end{aligned}$$

o que justifica (14), finalizando a resolução do problema. □

Problema 4 (SKMO 2005) Prove que

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4},$$

em que a, b, c são números reais positivos com $abc=1$.

Solução: No que segue apresentaremos a solução oficial disponível em [30]. Note que

$$\begin{aligned}
\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)} &\geq \frac{3}{4} \Longleftrightarrow \\
\frac{a(c+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}+\frac{b(a+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}+\frac{c(b+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)} &\geq \frac{3}{4} \Longleftrightarrow \\
4a(c+1)+4b(a+1)+4c(b+1) \geq 3(a+1)(b+1)(c+1) &\Longleftrightarrow \\
4(ab+ac+bc+a+b+c) \geq 3(abc+ab+ac+bc+a+b+c+1) &\Longleftrightarrow \\
ab+ac+bc+a+b+c \geq 3(abc+1)&.
\end{aligned}$$

A hipótese $abc = 1$ nos permite escrever a equivalência

$$ab+ac+bc+a+b+c \geq 3(abc+1) \Longleftrightarrow ab+ac+bc+a+b+c \geq 6.$$

Logo, precisamos demonstrar que o lado direito da desigualdade anterior seja verdadeiro. Para demonstrar tal desigualdade, note que pelo Teorema 2 e o fato de $abc = 1$, tem-se

$$\begin{aligned}
ab+ac+bc+a+b+c &\geq 6\sqrt[6]{ab\cdot ac\cdot bc\cdot a\cdot b\cdot c} \\
&= 6\sqrt{abc} \\
&= 6.
\end{aligned}$$

Portanto a desigualdade proposta no problema é verdadeira. □

5 DESIGUALDADE DE NESBITT

No que segue, apresentamos a Desigualdade de Nesbitt. Esta desigualdade não costuma ser discutida no ensino básico entretanto, sua demonstração é perfeitamente acessível para este nível de ensino e é frequentemente empregada em competições de Matemática.

Teorema 3 (Desigualdade de Nesbitt)**.** *Se a, b e c são números reais positivos, então*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

com a igualdade ocorrendo se e somente se, $a = b = c$.

A seguir, apresentaremos uma pequena biografia de Nesbitt. É digno de nota mencionar a escassez de registros sobre sua história na literatura.

5.1 BIOGRAFIA DE NESBITT

Alfred Mortimer Nesbitt (1854-1926), foi um compositor, professor, músico, matemático, crítico musical e jogador de críquete inglês. Nesbitt começou seus estudos na Brace Castle School em Londres. Teve distinta carreira acadêmica na Universidade de Oxford, onde foi bolsista em Matemática. Nesbitt também teve acesso imediato à bolsa Junior University Mathematical Scholarship, e ainda recebeu uma bolsa especial dos fundos da universidade graças a sua habilidade. Em 1877 tornou-se professor de Matemática da Manchester Grammar School, e em 1882 foi escolhido como diretor da mesma, cargo que renunciou para seguir como professor assistente de matemática e filosofia natural no Trinity College em Melbourne. Para os fatos biográficos apresentados aqui e outros, sugerimos [28].

Uma outra faceta, e a que tornou possível este pequeno texto, sobre Nesbitt, foi a sua vertente musical. Mas como, ela não representa o nosso foco principal, passemos então para prova da sua mais importante contribuição para a matemática que é a desigualdade de Nesbitt, originalmente publicada em Nesbitt [17].

5.2 DEMONSTRAÇÃO

A demonstração que consideraremos a seguir do Teorema 3 pode ser encontrada em [14, p. 61], a qual dividiremos em dois lemas auxiliares que implicarão a Desigualdade de Nesbitt.

Lema 2. *Sejam a,b e c reais positivos. Vale a identidade.*

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-3=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \tag{15}$$

Demonstração. Realizaremos a demonstração mediante um cálculo direto. Note que

$$\begin{aligned}(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-3 &= \frac{a}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{a}{c+a}\\
&+\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{c}{c+a}-3\\
&=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{a+b}{a+b}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}-3\\
&=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b},\end{aligned}$$

o que demonstra o resultado.

□

Lema 3. *Se x, y e z são reais positivos, então*

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9. \tag{16}$$

Demonstração. A demonstração apresentada pode ser encontrada em [14, p. 120]. Pelo Teorema 2 temos as desigualdades

$$x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz},$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{x}\frac{1}{y}\frac{1}{z}},$$

as quais multiplicadas fornecem

$$\begin{aligned}(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) &\geq (\sqrt[3]{xyz})\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{x}\frac{1}{y}\frac{1}{z}}\right)\\
&=9,\end{aligned}$$

o que fornece o resultado.

□

Agora estamos prontos para demonstrar a Desigualdade de Nesbitt.

Demonstração do Teorema 3. Pelo Lema 1, temos

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-3$$

Logo,

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{1}{2}\left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-3.$$

Pelo Lema 2, temos

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2},$$

como queríamos.

□

5.3 PROBLEMAS

Curiosamente, a solicitação da demonstração do Teorema 3 surgiu em competições de Matemática, conforme destacaremos no problema a seguir. Resolveremos o problema com uma demonstração distinta em relação à que foi apresentada anteriormente.

Problema 5 (Indian RMO 1990) Sejam a, b e c números reais positivos prove que:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

Solução: A solução a seguir pode ser encontrada em [14, p. 37]. Notemos inicialmente que

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(a+c)}+\frac{c^2}{c(a+b)}. \tag{17}$$

Considere $x=a(b+c), y=b(c+a), z=c(a+b), a_1=\frac{a}{\sqrt{x}}, a_2=\frac{b}{\sqrt{y}}, a_3=\frac{c}{\sqrt{z}}, b_1=\sqrt{x}, b_2=\sqrt{y}$ e $b_3=\sqrt{z}$. Pelo Teorema 1 temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)\geq\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2 &\implies \left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\right)(x+y+z)\geq(a+b+c)^2\\ &\implies \left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\right)\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(x+y+z)}.\end{aligned}$$

Utilizando na última desigualdade que $x+y+z = 2(ab+bc+ca)$ temos

$$\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\right) \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}. \tag{18}$$

Afirmamos que

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \geq 3. \tag{19}$$

De fato, observe que

$$\begin{aligned}\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \geq 3 &\iff (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)\\ &\iff a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geq 3(ab+bc+ca)\\ &\iff a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 0.\end{aligned} \tag{20}$$

Notando que

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca &= \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\\ &\geq 0,\end{aligned}$$

segue das equivalências contidas em (20) que (19) é verdadeira.

Logo de (17), (18) e (19) temos

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} &= \frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(a+c)}+\frac{c^2}{c(a+b)}\\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}\\ &\geq \frac{3}{2},\end{aligned}$$

o que finaliza a resolução.

$\square$

Problema 6 (Zhautykov Olympiad, Kazakhstan 2008) Sejam x, y e z números reais positivos tais que $xyz = 1$. Prove que

$$\frac{1}{yz+z}+\frac{1}{zx+x}+\frac{1}{xy+y} \geq \frac{3}{2}$$

Solução: Apresentaremos a seguir uma solução que pode ser encontrada por exemplo em [14, p. 136]. Reescreva os números x, y e z como $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}$ e $z = \frac{c}{a}$ em que $a = x, b = 1, c = (1/y)$. Note que $xyz = 1$ como requerido pelo problema. Realizando tal substituição na desigualdade do problema, notamos que a mesma é equivalente a nova desigualdade

$$\frac{1}{\frac{bc}{ca} + \frac{c}{a}} + \frac{1}{\frac{ca}{ab} + \frac{a}{b}} + \frac{1}{\frac{ab}{bc} + \frac{b}{c}} \geq \frac{3}{2},$$

o que simplificando se torna a desigualdade

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

a qual é verdadeira devido ao Teorema 3. □

Problema 7 (Korean MO 2000) Sejam a, b, c, x, y, z números reais positivos tais que $a \geq b \geq c > 0$, $x \geq y \geq z > 0$. Prove que

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)} + \frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)} + \frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \geq \frac{3}{4}$$

Solução: No que segue apresentamos a solução de [14, p. 176]. Como $a \geq b \geq c$ e $x \geq y \geq z$, temos $(b-c)(y-z) \geq 0$. Note que

$$\begin{aligned}(b-c)(y-z) \geq 0 &\Rightarrow b(y-z) - c(y-z) \geq 0 \\ &\Rightarrow by - bz - cy + cz \geq 0,\end{aligned}$$

o que acarreta

$$bz + cy \leq by + cz. \tag{21}$$

Pelo Teorema 2 temos $2(by)(cz) \leq (by)^2 + (cz)^2$, o que acarreta a desigualdade

$$\begin{aligned}(by+cz)^2 &= (by)^2 + 2(by)(cz) + (cz)^2 \\ &\leq 2((by)^2 + (cz)^2),\end{aligned}$$

a qual combinada com (21) fornece

$$(by+cz)(bz+cy) \leq (by+cz)^2 \leq 2((by)^2 + (cz)^2). \tag{22}$$

Sejam $k = (ax)^2$, $l = (by)^2$ e $m = (cz)^2$. Segue de (22) que

$$\begin{aligned} \frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)} &\geq \frac{k^2x^2}{(by)^2+(cz)^2} \\ &= \frac{k}{2(l+m)}. \end{aligned} \tag{23}$$

Um argumento similar fornece as desigualdades

$$\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)} \geq \frac{l}{2(m+k)}, \frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \geq \frac{m}{2(k+l)}. \tag{24}$$

Somando as desigualdades (23), (24) e utilizando o Teorema 3 temos

$$\begin{aligned} \frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)} + \frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)} + \frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} &\geq \frac{1}{2}\left(\frac{k}{l+m} + \frac{l}{m+k} + \frac{m}{k+l}\right) \\ &\geq \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

como queríamos. $\square$

6 DESIGUALDADE DE SCHUR

Neste capítulo, consideraremos a Desigualdade de Schur. Assim como a desigualdade apresentada no capítulo anterior, ela não é rotineiramente ensinada no ensino básico, entretanto, pode ser obtida através de argumentos básicos aprendidos no Ensino Médio.

Teorema 4 (Desigualdade de Schur)**.** *Se a, b, c são reais positivos e $n \in \mathbb{N}$, então*

$$a^n(a-b)(a-c) + b^n(b-c)(b-a) + c^n(c-a)(c-b) \geq 0$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $a = b = c$ ou $a = b, c = 0$ ou através das possíveis permutações de tais casos.

6.1 BIOGRAFIA DE SCHUR

Issai Schur (1875-1941) foi um matemático que nasceu em Mahilou, Rússia, e faleceu em Tel Aviv, Israel. A vida de Schur foi marcada por um contexto histórico nada favorável. De acordo com a referência [24], Schur nasceu em uma Rússia ainda sob o regime czarista, com Alexandre II como imperador. Schur não teve condições de manter-se como matemático, o que o levou a mudar-se para a Alemanha, onde obteve o título de doutor em 1901 e, em seguida, tornou-se professor titular na Universidade de Berlim em 1916.

No campo matemático destacou-se no trabalho de Schur, segundo [20], os seus estudos em teoria dos números, combinatória e representação de grupos. Os trabalhos de Schur chegam até mesmo à Física Teórica. Destaca-se em sua obra também a chamada decomposição de Schur.

Ainda segundo Brown [24], um fato interessante da biografia de Schur é que por vezes ele foi referido como I. Schur ou como J. Schur. Segundo a referência mencionada, ocorria uma confusão entre as letras "I" e "J", provavelmente devido à semelhança entre essas letras (quando maiúsculas) na fonte Gothic script, a qual era comumente utilizada na Alemanha durante o século XIX até meados de 1941.

6.2 DEMONSTRAÇÃO

A prova a seguir está contida em Riasat [25].

Demonstração do Teorema 4. Suponha que $a \geq b \geq c$, sendo os demais casos análogos. A desigualdade de Schur pode ser reescrita como

$$(a-b)(a^n(a-c) - b^n(b-c)) + c^n(a-c)(b-c) \geq 0,$$

o que é verdade devido ao fato que $(a-b) \geq 0, (a-c) \geq 0, (b-c) \geq 0$. Note que na desigualdade anterior a igualdade ocorre, se e somente se, $a = b = c$ ou $a = b, c = 0$ ou através das possíveis permutações de tais casos. □

6.3 PROBLEMAS

Problema 8 (IMO 1964) Sejam a, b, c a medida dos lados de um triângulo. Prove que

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc. \tag{25}$$

Solução: No que segue apresentamos a solução descrita em [25, p. 28]. A desigualdade (25) pode ser reescrita como

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2$$

ou ainda,

$$a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0,$$

o que é verdade por ser a desigualdade do Teorema 4.

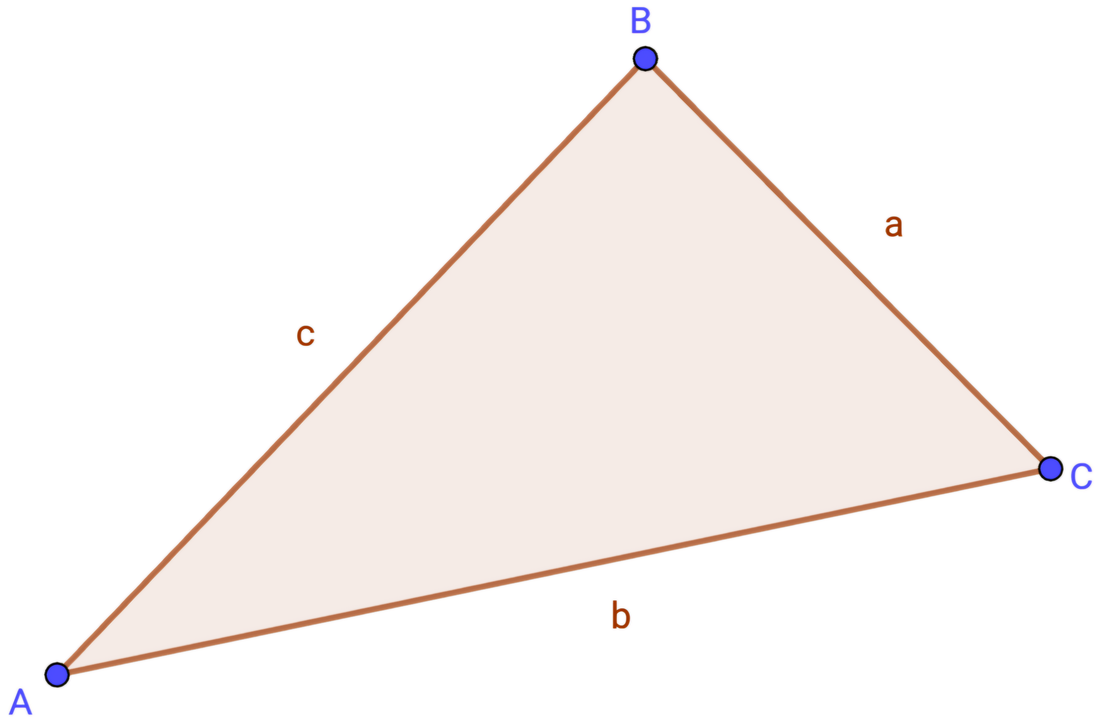

Figura 3: Visualização geométrica do Problema 8

□

Problema 9 (Canadian MO 1992) Sejam $x, y, z \geq 0$, prove que

$$x(x-z)^2 + y(y-z)^2 \geq (x-z)(y-z)(x+y-z) \tag{26}$$

e indique em que casos a igualdade ocorre.

Solução: A solução apresentada a seguir pode ser encontrada na referência [14, p. 128]. Podemos reescrever a desigualdade (26) como

$$x(x-z)^2 + y(y-z)^2 \geq x(x-z)(y-z) + y(x-z)(y-z) - z(x-z)(y-z),$$

ou ainda

$$x(x-z)(x-z-y+z) + y(y-z)(y-z-x+z) + z(x-z)(y-z) \geq 0,$$

ou finalmente

$$x(x-y)(x-z)+y(y-z)(y-x)+z(z-x)(z-y)\geq 0$$

que é a própria desigualdade de Schur. Logo a igualdade ocorre, se e somente se, $x=y=z$ ou $x=y, z=0$ e suas permutações. $\square$

7 DESIGUALDADE DE JENSEN

Este capítulo é dedicado à Desigualdade de Jensen, que será apresentada a seguir. Para compreendê-la, será necessário entender o conceito de função convexa, amplamente utilizado em diversas áreas da Matemática e rico em aplicações. É importante ressaltar que a aplicação da Desigualdade de Jensen muitas vezes requer argumentos básicos do Cálculo Diferencial e Integral. Este último tópico não é ensinado no ensino básico nacional, no entanto, existem países que abordam esse assunto nesse nível de ensino e os estudantes podem aplicá-lo em competições matemáticas de Ensino Médio, o que ocorre com frequência. Portanto, este capítulo oferece um material de apoio para os interessados nas técnicas apresentadas aqui, as quais podem auxiliá-los na resolução de diversos problemas de nível olímpico.

Teorema 5 (Desigualdade de Jensen)**.** *Seja f uma função convexa em um intervalo $(a,b) \subset \mathbb{R}$, e $p_1, p_2, ..., p_n \in (0,1)$ números reais tais que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$. Para $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a,b)$ ocorre*

$$p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \cdots + p_n f(x_n) \geq f(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n).$$

Apresentaremos no que segue uma breve biografia de Jensen, a definição de função convexa, a demonstração da Desigualdade de Jensen e um resultado auxiliar que permite a aplicação desta em diversos cenários.

7.1 BIOGRAFIA DE JENSEN

Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859-1925) nasceu em Nakskov, em 8 de maio de 1859. Apesar de ser de uma família não abastada, completou seus estudos em Copenhague após seu pai regressar à Dinamarca. Em 1876, ingressou na Faculdade de Tecnologia, onde estudou disciplinas científicas, incluindo Física, Química e Matemática, sendo esta última o principal foco de toda a sua carreira. Jensen começou a realizar pesquisas por conta própria enquanto ainda era estudante e não ocupou nenhum cargo acadêmico.

Para conseguir se sustentar e seguir pesquisando, aceitou um emprego na International Bell Telephone Company, que mais tarde passou a se chamar Copenhagen Telephone Company, a qual prosperou devido aos avanços impulsionados por Jensen, que trabalhou para a empresa até 1924 como engenheiro de telecomunicações.

Em razão de trabalhar integralmente na empresa telefônica, Jensen dedicava-se à matemática apenas nas horas vagas, o que não representou um impedimento para que sua genialidade fosse aflorada e reconhecida.

Entre as suas maiores contribuições está a Monagrafia sobre função Gama, em 1891, que é apontada até hoje como a melhor representação desta função.

Jensen contribuiu para o avanço nos estudos relacionados a Hipótese de Riemann, provando um teorema que enviou a Mittag-Leffler, que o publicou no ano de 1899.

Em 1906, demonstrou no famoso trabalho [11] uma desigualdade para funções convexas, a qual hoje leva seu nome, que detinha uma série de desigualdades clássicas como casos especiais.

Jensen faleceu em 5 de março de 1925, deixando um legado de investigações matemáticas claras e concisas fazendo-os de modo simples, mas não menos valorosas. Para as informações aqui mencionadas e mais outras, apontamos Connor [22] e Nørlund [18].

7.2 FUNÇÕES CONVEXAS

Iniciamos esta seção com a definição de função convexa, a qual é fornecida a seguir.

Definição 1. *Uma função $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é dita convexa, se para todos $x, y \in (a, b)$ e para todo $\alpha \in (0, 1)$ é válida a desigualdade*

$$\alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \geq f(\alpha x + (1 - \alpha)y).$$

Note que se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é convexa, então todos os pontos $(p, f(p))$ com $x \leq p \leq y$ ficam abaixo do segmento de reta que liga os pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$. Vamos justificar matematicamente, conforme apresentado em [14, p. 21], tal afirmação. A reta que liga os pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ é dada por

$$y - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Longrightarrow y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) \qquad (27)$$

Observe que podemos reescrever cada $x \in (a, b)$ como

$$x = px_1 + (1 - p)x_2, \text{em que } 0 \leq p \leq 1, \qquad (28)$$

em que p_1 e p_2 dependem de x. Devido a definição de função convexa, (28), segue que a equação (27) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} y &= \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}[px_1+(1-p)x_2-x_1]+f(x_1) \\ &= \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}[(1-p)(x_2-x_1)]+f(x_1) \\ &= (f(x_2)-f(x_1))(1-p)+f(x_1) \\ &= pf(x_1)+(1-p)f(x_2) \\ &\geq f(px_1+(1-p)f(x_2)) \\ &= f(x), \end{aligned}$$

o que justifica a afirmação.

Geometricamente, uma função convexa pode ser visualizada como apresentado na figura abaixo.

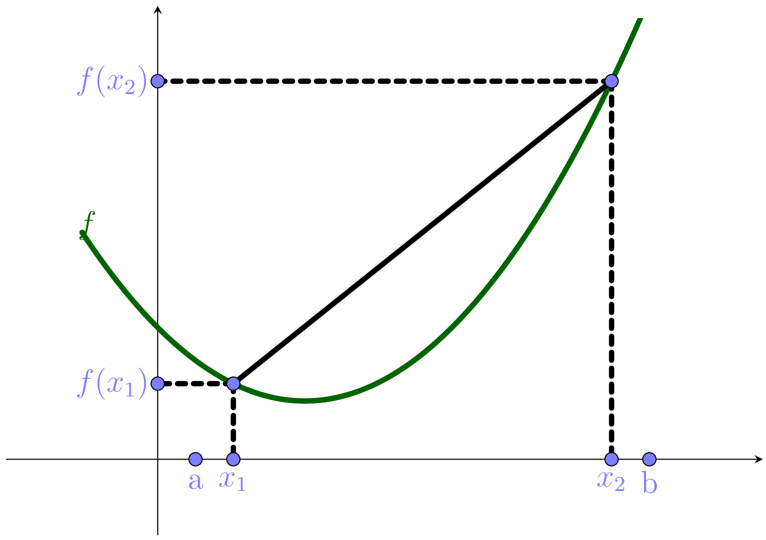

Figura 4: Representação gráfica de uma função convexa

7.3 DEMONSTRAÇÃO

Demonstração do Teorema 5. No que segue, utilizaremos a demonstração de Cover[5]. A mesma será feita por meio de indução.

O caso inicial $n = 2$ decorre da definição de função convexa. Suponha agora que ocorre a hipótese de indução, isto é, a desigualdade

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)$$

é válida em que para quaisquer $x_i \in (a,b), p_i \in (0,1), i = 1, ..., n$ com $p_1 + \cdots + p_n = 1$.

Sejam agora $x_i \in (a,b), p_i \in (0,1), i = 1, ..., n+1$ com $p_1 + \cdots + p_{n+1} = 1$ e defina os números $q_i = \dfrac{p_i}{1 - p_{n+1}}, i = 1, ..., n$, os quais satisfazem $q_1 + \cdots + q_n = 1$.

Precisamos demonstrar que

$$\sum_{i=1}^{n+1} p_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i\right). \tag{29}$$

Pela hipótese de indução temos

$$\sum_{i=1}^{n} q_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i\right).$$

Note que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} p_i f(x_i) &= \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) + p_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&= (1 - p_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} q_i f(x_i) + p_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&\geq (1 - p_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i\right) + p_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&\geq f\left(\sum_{i=1}^{n} (1 - p_{n+1}) q_i x_i + p_{n+1} x_{n+1}\right) \\
&= f\left(\sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i\right),
\end{aligned}$$

em que na penúltima desigualdade foi utilizada a hipótese de indução e na última a definição de função convexa. Portanto está demonstrado (29), o que nos fornece o resultado. □

7.4 PROBLEMAS

Antes de passarmos aos problemas que serão resolvidos nesta seção, apresentamos a seguir um resultado do Cálculo Diferencial e Integral, que pode ser encontrado em Elon [13], o qual é de grande utilidade para demonstrar que uma função é convexa.

Proposição 1. *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável em (a, b). Tem-se que f é convexa se, e somente se, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$.*

Problema 11 (IMOSL 1998) Sejam $r_1, r_2, ..., r_n$ números reais positivos maiores ou iguais a 1. Prove que

$$\frac{1}{r_1+1} + \frac{1}{r_2+1} + \cdots + \frac{1}{r_n+1} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{r_1 r_2 \cdots r_n} + 1} \tag{30}$$

Solução: A solução apresentada pode ser encontrada pelo leitor em [7, p. 636]. Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}, x > 0$. Observe que pela Regra do Quociente temos

$$f'(x) = \frac{1'(1+e^x) - 1(1+e^x)'}{(1+e^x)^2} = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2}.$$

Utilizando a Regra do Quociente e a Regra da Cadeia temos

$$f''(x) = -\frac{(e^x)'(1+e^x)^2 - e^x((1+e^x)^2)'}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(e^x-1)}{(e^x-1)^3} > 0, \text{ para todo } x > 0,$$

pois $e^x - 1 > 0$, qualquer que seja $x > 0$.

Como $f''(x) > 0$, para todo $x > 0$, temos pela Proposição 1 que f é convexa.

Pelo Teorema 5 aplicado para $p_i = \dfrac{1}{n}, x_i = \ln(r_i), i = 1, ..., n$, segue que

$$\frac{f(ln(r_1)) + f(ln(r_2)) + \cdots + f(ln(r_n))}{n} \geq f\left(\frac{ln(r_1) + ln(r_2) \cdots + ln(r_n)}{n}\right)$$

ou ainda,

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+r_1} + \frac{1}{1+r_2} + \cdots \frac{1}{1+r_n}\right) \geq \frac{1}{\sqrt[n]{r_1 r_2 \cdots r_n} + 1}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{1+r_1} + \frac{1}{1+r_2} + \cdots + \frac{1}{1+r_n} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{r_1 r_2 \cdots r_n} + 1},$$

como queríamos. □

Apresentaremos para o problema a seguir uma solução original.

Problema 10 (IMO 2001) Sejam a, b, c números reais positivos. Prove que

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1 \tag{31}$$

Solução: A solução apresentada para este problema pode ser encontrada em [14, p. 179]. Considere a função $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}, x>0$. Note que

$$f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}, f''(x)=\frac{3}{4\sqrt{x^5}},$$

o que implica que $f''(x)>0$, para todo $x>0$. Considerando no Teorema 5

$$p_1=\frac{a}{S}, p_2=\frac{b}{S}, p_3=\frac{c}{S},$$

em que $S=a+b+c$,

$$x_1=\frac{a^2}{S^2}+\frac{8bc}{S^2}, x_2=\frac{b^2}{S^2}+\frac{8ac}{S^2}, x_3=\frac{c^2}{S^2}+\frac{8ab}{S^2}$$

e notando que $p_1+p_2+p_3=1$ temos

$$\begin{aligned}\frac{\frac{a}{S}}{\sqrt{\left(\frac{a}{S}\right)^2+\left(\frac{8bc}{S^2}\right)}}+\frac{\frac{b}{S}}{\sqrt{\left(\frac{b}{S}\right)^2+\left(\frac{8ac}{S^2}\right)}}+\frac{\frac{c}{S}}{\sqrt{\left(\frac{c}{S}\right)^2+\left(\frac{8ab}{S^2}\right)}}\geq\\ \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{S}\left(\frac{a^2+8bc}{S^2}\right)+\frac{b}{S}\left(\frac{b^2+8ac}{S^2}\right)+\frac{c}{S}\left(\frac{c^2+8ab}{S^2}\right)}}\\ =\frac{1}{\sqrt{\frac{a^3+b^3+c^3+24abc}{S^3}}}.\end{aligned} \tag{32}$$

Por outro lado temos pelo Teorema 2 que

$$\begin{aligned}
S^3 &= (a+b+c)^3 \\
&= a^3+b^3+c^3+3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+6abc \\
&\geq a^3+b^3+c^3+18\sqrt[6]{a^6b^6c^6}+6abc \\
&= a^3+b^3+c^3+24abc,
\end{aligned}$$

o que implica

$$\frac{a^3+b^3+c^3+24abc}{S^3} \leq 1.$$

A última desigualdade e (32) fornecem

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} = \\
&\frac{\frac{a}{S}}{\sqrt{\left(\frac{a}{S}\right)^2+\left(\frac{8bc}{S^2}\right)}}+\frac{\frac{b}{S}}{\sqrt{\left(\frac{b}{S}\right)^2+\left(\frac{8ac}{S^2}\right)}}+\frac{\frac{c}{S}}{\sqrt{\left(\frac{c}{S}\right)^2+\left(\frac{8ab}{S^2}\right)}} \\
&\geq 1,
\end{aligned}$$

como queríamos.

□

8 CONCLUSÃO

Neste trabalho, foram estudadas as desigualdades matemáticas clássicas de Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky, das Médias, de Nesbitt, Schur e Jensen em relação às suas demonstrações e aplicações olímpicas, assim como as biografias dos matemáticos que as obtiveram e os fatos históricos relacionados a elas.

No que diz respeito à parte histórica, o trabalho apresentado teve como maior desafio encontrar fontes confiáveis para a confecção das biografias. A dificuldade em encontrar fontes primárias ou fontes secundárias confiáveis implicou em grandes desafios, os quais foram contornados e tomaram a maior parte do tempo em relação à pesquisa necessária para a elaboração deste trabalho.

Em relação à parte técnica, foram apresentadas demonstrações não habituais das desigualdades consideradas, e estas foram aplicadas a diversos problemas de olimpíadas internacionais de matemática. Os problemas em questão foram escolhidos meticulosamente, objetivando que o trabalho fosse autocontido para uma melhor compreensão dos alunos. O estudo detalhado e a aplicação das desigualdades demonstraram não somente sua elegância matemática, mas também sua grande aplicabilidade e eficácia na resolução de problemas complexos e desafiadores propostos ao redor do mundo.

Através da abordagem apresentada, buscamos fornecer um recurso educacional útil tanto para os interessados nos aspectos históricos das desigualdades consideradas quanto para estudantes que almejam se preparar para competições matemáticas, assim como para aqueles com altas habilidades e interesse em obter ou aprofundar seus conhecimentos nos tópicos abordados no trabalho.

Referências

[1] BELHOST, B. *Augustin-Louis Cauchy: a Biography,* New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo Hong Kong Barcelona: Springer-Verlag, 1991.

[2] BOYER, C. B. *Historia da Matematica,* traducao: Elza F. Gomide. Sao Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1974.

[3] CAJORI, F. *A History of Mathematical Notations,* Dover Publications, New York, 1993.

[4] CARATHÉODORY, C. *Deutsches biographisches Jahrbuch. III,* Berlim: Deutsche Verlags-Anstalt Stuttgart, 1921.

[5] COVER, T.M. E THOMAS J. A. *Elements of informaion Theory,* New York Chichester Brisbane Toronto Singapore: Wiley, 1991.

[6] CAUCHY, A. *Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique, Première Partie. Analyse algébrique, Debure frères, Paris (1821)(Also in Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy, Série 2, Tome 3,* Gauthier-Villars et Fils, Paris, 1897.)

[7] DJUKIĆ, D., JANKOVIĆ, V., MATIĆ, I., E PETROVIĆ, *N. The IMO Compendium: A Collection of Problems Suggested for The International Mathematical Olympiads: 1959–2004,* Springer, 2006.

[8] FINK, A. M. *An essay on the history of inequalities,* USA: Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 249, n. 1, p. 118-134, 2000.

[9] HUNG, P. K. *Secrets in inequalities (volume 1),* Zălau: Gil, 2007.

[10] HARRIOT, T. *Artis analyticae praxis ad aequationes algebraicas nova, expedita, et generali methodo, resoluendas: tractatus,* edited by Walter Warner, London, 1631.

[11] JENSEN, J. L. W. V. *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes.* Acta Math. 30, 175-193, 1906. SOBRENOME, Nome do autor do vídeo (ou nome do canal). Título do vídeo.

[12] LEE, C. L. *An AM-GM Inequality problem from 2019 Hong Kong Math Olympiad.* Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=dfNArGbueHk. Acesso em: 10 de Maio de 2024.

[13] Lima, E. L. *Análise Real. vol. 1: Funções de uma Variável,* 12ª. ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2018.

[14] Manfrino, R.B., Ortega, J.A.G., Delgado, R.V. *Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach,* Birkhäuser Verlag AG, 2009

[15] Moura e Braga, R. A., Batista, E. B., Júnior. V. L. S., Tavares, L. S. *Desigualdades clássicas: aspectos históricos e aplicações olímpicas* - preprint

[16] Meštrović R. *A new inductive proof of the AM-GM inequality,* The Mathematical Gazette, 107(570), 497-499, 2023.

[17] Nesbit,A. M. *The Educational Times and Journal of the College of Preceptors, v.55 (problem 15114),* London: Francis Hodgson, 1902.

[18] Nørlund N. E. *J. L. W. V. Jensen*, Matematisk Tidsskrift. B, 1926.

[19] O'Connor J. J. e Robertson, E. F. *Augustin Louis Cauchy,* https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cauchy/, Acesso em: 7 de abril de 2024, 1997.

[20] O'Connor J. J. e Robertson, E. F. *Issai Schur,* https: //mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Schur/, Acesso em: 7 de abril de 2024, 1998.

[21] O'Connor, J. J. e Robertson, E. F. *Johan Ludwig William Valdemar Jensen,* https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Jensen/, Acesso em: 7 de abril de 2024, 2000.

[22] O'Connor, J. J. e Robertson, E. F. *Hermann Amandus Schwarz,* https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Schwarz/
Acesso em: 7 de abril de 2024, 2001.

[23] O'Connor, J. J. e Robertson, E. F. *Viktor Yakovlevich Bunyakovsky,* https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bunyakovsky/
Acesso em: 14 de maio de 2024 .

[24] Peter, B., Liu, S. e Sharma D. *Contributions to probability and statistics - aplications and challenges,* New Jersey London Singapore Beijin Shangai Hong Kong Taipei Chennai: World Scientific, 2006.

[25] RIASAT, S. *Basics of Olympiad Inequalities,* https://web.williams.edu/Mathematics/sjmiller/public_html/161/articles/Riasat_BasicsOlympiadInequalities.pdf, Acesso em: 25 de março de 2024 .

[26] Sedrakyan, H., Sedrakyan, N. *Algebraic Inequalities,* Springer: Cham, Switzerland, 2018

[27] STEELE, J. M. *The Cauchy-Schwarz Master Class,* USA: MAA, 2004.

[28] SKINNER G. *A biographical register of Australian colonial musical personnel–N*https://www.sydney.edu.au/paradisec/australharmony/register-N.phpNESBITT-Alfred-Mortimer, Acesso em: 21 de novembro de 2023, 2023.

[29] WU, H. H., WU, S. *Various proofs of the Cauchy-Schwarz inequality,* China: Octogon Mathematical Magazine, v. 17, n. 1, p. 221-229, 2009.

[30] https://skmo.sk/dokument.php?id=244, Acesso em: 23 de maio de 2024.