

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO - ES



MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT



PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA DE MATEMÁTICA
PARA O NIVELAMENTO DE ALUNOS
INGRESSANTES NO ENSINO MÉDIO

UBIRATAN SILVA CASTRO

Vitória - ES

17 DE JULHO DE 2024

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA DE MATEMÁTICA PARA O NIVELAMENTO DE ALUNOS INGRESSANTES NO ENSINO MÉDIO

UBIRATAN SILVA CASTRO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática - Mestrado Profissional em Rede Nacional do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Florêncio F. Guimarães Filho.

Co-orientador:

Vitória - Espírito Santo

Maio de 2024

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

- S586s Silva Castro, Ubiratan, 1975-
Uma sequência didática de matemática para o nivelamento
de alunos ingressantes no ensino médio / Ubiratan Silva Castro.
- 2024.
107 f. : il.
- Orientador: Florêncio Ferreira Guimarães Filho.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de
Ciências Exatas.
1. Sequência didática. 2. Aritmética básica. 3. Conjuntos
numéricos e operações. 4. Nivelamento em matemática. 5.
Matemática do ensino fundamental. I. Ferreira Guimarães
Filho, Florêncio. II. Universidade Federal do Espírito Santo.
Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

**“Uma sequência didática de matemática para o nivelamento
de alunos ingressantes no ensino médio”**

Ubiratan Silva Castro

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 28/05/2024 por:

Prof.(a) Dr.(a) Florêncio Ferreira Guimarães Filho
Orientador(a) – UFES

Prof.(a) Dr.(a) Valmecir Antonio dos Santos Bayer
Membro interno – UFES

Prof.(a) Dr.(a) José de Arimatéia Fernandes
Membro Externo – UFCG





Folha de Assinaturas Ubiratan Silva Castro

Data e Hora de Criação: 24/05/2024 às 09:05:29

Documentos que originaram esse envelope:

- Folha de Assinaturas Ubiratan Silva Castro.pdf (Arquivo PDF) - 1 página(s)



Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: e6856030387329a15ebe4c87144ac6d13dac163e2e89cb517bc94262070d3550

[SHA512]: 5ad0e58b31624298869fe2da4347d48a1484f05f8181cbd1b5bef80c7eec4c31988f38726ca321ab034ba1d02cc5af82559406413cace1c39e2e49285a17816f

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope



ASSINADO - José de Arimatéia Fernandes (arimat.ufcg@gmail.com)

Data/Hora: 28/05/2024 - 16:45:49, IP: 179.136.175.29, Geolocalização: [-7.2370323, -35.882770]

[SHA256]: 0c7e8905919a470779e6e1db60108eabb3d4fe4ae75c3a4aaa9b3f444b9333ae



ASSINADO - Valmecir Antonio dos Santos Bayer (bayervalmecir@gmail.com)

Data/Hora: 29/05/2024 - 12:02:53, IP: 200.137.65.100, Geolocalização: [41.068285, 28.864804]

[SHA256]: fbd3eea38262de8a02e229fceb42d977ba2864d5ce158decddb59e39a98eeeb



ASSINADO - Florêncio Ferreira Guimarães Filho (florencio.guimaraes@ufes.br)

Data/Hora: 28/05/2024 - 17:44:42, IP: 187.36.169.214

[SHA256]: 26ea6699a6b1f2fc9bde0f0b1eca85aad74c4171379957e1fced1722d400b18a

Histórico de eventos registrados neste envelope

29/05/2024 12:02:53 - Envelope finalizado por bayervalmecir@gmail.com, IP 200.137.65.100

29/05/2024 12:02:53 - Assinatura realizada por bayervalmecir@gmail.com, IP 200.137.65.100

29/05/2024 12:02:24 - Envelope visualizado por bayervalmecir@gmail.com, IP 200.137.65.100

28/05/2024 17:44:42 - Assinatura realizada por florencio.guimaraes@ufes.br, IP 187.36.169.214

28/05/2024 17:44:33 - Envelope visualizado por florencio.guimaraes@ufes.br, IP 187.36.169.214

28/05/2024 16:45:49 - Assinatura realizada por arimat.ufcg@gmail.com, IP 179.136.175.29

28/05/2024 16:45:14 - Envelope visualizado por arimat.ufcg@gmail.com, IP 179.136.175.29

28/05/2024 08:00:09 - Envelope registrado na Blockchain por notificacao@astenassinatura.com.br

28/05/2024 08:00:08 - Envelope encaminhado para assinaturas por notificacao@astenassinatura.com.br

24/05/2024 09:05:30 - Envelope criado por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.109

A Deus por todo o seu poder e glória infinita

Agradecimentos

A Deus pelo dom da vida.

À Tereza Cristina Zardini Jantorno (In Memoriam)

pelo exemplo ímpar de ser humano.

*À Luciana Matos Vital pelo apoio incondicional nesta
caminhada.*

*Ao meu orientador e professores pelos conhecimentos a
mim proporcionados e orientação.*

A todos que me ajudaram e que acreditaram em mim.

Resumo

Esta dissertação aborda os conteúdos de aritmética básica aplicados nas aulas de matemática nos anos finais do ensino fundamental que, por sua vez, deverão servir de material de apoio para professores e para o nivelamento de alunos ingressantes no ensino médio. Abordamos aqui os conteúdos de matemática desde o surgimento do número, os sistemas de numerações e bases, a construção dos conjuntos numéricos: Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais, Reais e suas propriedades e operações fundamentais. A sequência didática se apresenta com grau de dificuldade de forma progressiva e construtiva. Uma atenção especial está voltada para o estudo e compreensão do conjunto dos números racionais, principalmente nas operações de adição e subtração desses, nas formas fracionária e decimal. No conjunto dos números racionais aborda-se ainda as dízimas periódicas com vistas a uma introdução ao conjunto dos números irracionais, passando ainda pelas razões, proporções e regras de três simples e composta. É feita também uma relação entre as diversas linguagens dentro do conjunto dos números racionais, sejam elas nas formas: fracionárias, representativa, forma decimal e forma percentual, uma vez que muitos alunos não conseguem assimilar estas relações. Na parte final é feita uma explanação dos estudos de potenciação e suas propriedades, notação científica, radiciação e suas propriedades, finalizando com o tópico de racionalização de denominadores irracionais. Em cada assunto abordado são apresentadas e resolvidas questões da OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, níveis 1 e 2 (ensino fundamental).

Palavras-chave: Sequência Didática. Aritmética Básica. Conjuntos Numéricos e Operações. Nivelamento em Matemática. Matemática do Ensino Fundamental.

Abstract

This thesis addresses the contents of basic arithmetic applied in mathematics classes in the final years of elementary school, which, in turn, should serve as support material for teachers and for the leveling of students entering high school. We report here the contents of mathematics since the emergence of number, the systems of numberings and bases, the construction of numerical sets: Natural, Integer, Rational, Irrational, Real and their fundamental operations and properties. The didactic sequence presents itself with a degree of difficulty in a progressive and constructive way. Special attention is focused on the study and understanding of the set of rational numbers, especially in the operations of addition and subtraction of these, in fractional and decimal forms. In the set of rational numbers is also approached the circulating decimal in order to introduce the set of irrational numbers, also going through the ratios, proportions and rules of three simple and compound. A relationship is also made between the various languages within the set of rational numbers, whether in the forms: fractional, representative, decimal form and percentage form, since many students are not able to assimilate these relations. In the final part there is an explanation of the studies of potentiation and its properties, scientific notation, radication and its properties, ending with the topic of rationalization of irrational denominators. In each subject addressed, questions of the OBMEP - Brazilian Public School Mathematics Olympiad, levels 1 and 2 (elementary school) are presented and resolved.

Keywords: Didactic Sequence. Basic Arithmetic. Numerical Sets and Operations. Leveling in Mathematics. Elementary School Mathematics.

Sumário

0.1	Introdução	1
0.2	Justificativa	1
0.3	Objetivos	1
0.3.1	Objetivos gerais	1
0.3.2	Objetivos específicos	2
0.3.3	Sequência didática	2
1	Conjuntos	3
1.1	Conjuntos especiais	4
1.1.1	Conjunto vazio:	4
1.1.2	Conjunto unitário:	4
1.2	Símbolos	4
1.2.1	Símbolos de pertinência	4
1.2.2	Símbolos de inclusão	4
1.2.3	Outros símbolos	5
1.3	Igualdade de conjuntos	6
1.4	Conjunto complementar	6
1.5	Conjunto Universo	7
1.6	Relação entre conjuntos	7
1.6.1	Correspondência biunívoca	7
1.6.2	Função	8
1.6.3	Classificação das funções	9
2	Números naturais	12
2.1	Sistemas de numeração	13
2.1.1	Sistema de numeração egípcio	13
2.1.2	Sistema de numeração babilônico	13
2.1.3	Sistema de numeração chinês	14
2.1.4	Sistema de numeração maia	15
2.1.5	Sistema de numeração romano	15

2.1.6	Sistema de numeração indo-arábico	16
2.2	Conjunto dos números naturais	17
2.3	As quatro operações fundamentais em $\mathbb{N}$	19
2.3.1	Adição	19
2.3.2	Subtração	20
2.3.3	Multiplicação	21
2.3.4	Divisão	22
2.4	Propriedades do conjunto dos números naturais	24
2.4.1	Propriedade associativa	24
2.4.2	Propriedade comutativa da adição	25
2.4.3	Propriedade distributiva	26
2.4.4	Propriedade comutativa da multiplicação	27
2.4.5	Elemento neutro da multiplicação	28
2.5	Subconjuntos de $\mathbb{N}$	30
2.5.1	Números pares	30
2.5.2	Números ímpares	30
2.5.3	Conjunto dos múltiplos de $\mathbb{N}$	30
2.5.4	Os números primos	32
3	Conjunto dos números inteiros	37
3.1	Subconjuntos de $\mathbb{Z}$	37
3.1.1	Subconjunto dos números inteiros, com exceção do zero	37
3.1.2	Subconjunto dos números inteiros não negativos	38
3.1.3	Subconjunto dos números inteiros não negativos, com exceção do zero	38
3.1.4	Subconjunto dos números inteiros não positivos	38
3.1.5	Subconjunto dos números inteiros não positivos, com exceção do zero	38
3.1.6	Subtração	40
4	Conjunto dos números racionais	45
4.1	Frações	46
4.2	Fração de numerador 1	46
4.3	Fração com qualquer numerador	47
4.4	Tipos de frações	49
4.4.1	Fração própria	49
4.4.2	Fração imprópria	50
4.4.3	Fração aparente	50
4.4.4	Número misto	50
4.5	História das frações	53

4.6	Divisores	53
4.6.1	Divisão euclidiana	53
4.6.2	Critérios de divisibilidade	54
4.6.3	Divisores comuns	55
4.6.4	Máximo divisor comum - MDC	55
4.7	Operações com frações	57
4.7.1	Adição e subtração	57
4.7.2	Multiplicação de frações	59
4.7.3	Divisão de frações	60
4.8	Números decimais	62
4.8.1	Adição e subtração de números decimais	62
4.8.2	Multiplicação de números decimais	63
4.8.3	Divisão de números decimais	63
4.9	Dízimas periódicas	65
4.9.1	Fração geratriz de uma dízima periódica	66
5	Conjunto dos números irracionais	69
6	Razão e proporção	72
6.1	Razão	72
6.1.1	Razões inversas	72
6.1.2	Razões iguais	72
6.2	Proporção	73
6.2.1	Propriedades das proporções	73
6.3	Regra de três	77
6.3.1	Grandezas diretamente proporcionais	77
6.3.2	Grandezas inversamente proporcionais	78
6.4	Regra de três simples	79
6.5	Regra de três composta	81
7	Potenciação	83
7.1	Propriedades da potenciação	84
7.2	Produtos notáveis	88
7.3	Notação científica	91
8	Radiciação	93
8.1	Propriedades da radiciação	94
8.2	Operações com radicais	99
8.2.1	Adição e subtração de radicais	99

8.2.2	Multiplicação de radicais	100
8.2.3	Divisão de radicais	101
8.3	Racionalização	101
8.3.1	Expressão irracional	101
8.3.2	Racionalizando denominadores	102
CONSIDERAÇÕES FINAIS		108
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		109
APÊNDICES		109

Lista de Figuras

1.1	Diagrama de Venn	3
2.1	Sistema de numeração egípcio	13
2.2	Sistema de numeração babilônico	14
2.3	Sistema de numeração chinês	14
2.4	Representação no sistema de numeração chinês	14
2.5	Sistema de numeração maia	15
2.6	Sistema de numeração romano	15
2.7	Sistema de numeração romano	16
2.8	Sistema de numeração romano	16
2.9	Sistema de numeração indo-arábico	16
2.10	Sistema de numeração decimal - classes e ordens	17
2.11	Adição.	19
2.12	Algoritmo da adição e nomenclatura.	20
2.13	Subtração.	20
2.14	Subtração entre conjuntos.	21
2.15	Algoritmo da subtração e nomenclatura.	21
2.16	Algoritmo da multiplicação e nomenclatura.	22
2.17	Algoritmo da divisão e nomenclatura.	22
2.18	Decomposição em fatores primos.	33
2.19	Cálculo do MMC.	34
4.1	Frações egípcias	46
4.2	Conjuntos	49
4.3	Fração própria	49
4.4	Fração imprópria	50
4.5	Fração aparente	50
4.6	Fração número misto	51
4.7	Algoritmo de Euclides	51
4.8	Frações equivalentes	52

4.9	Adição de frações com denominadores iguais	57
4.10	Cálculo do MMC	59

0.1 Introdução

0.2 Justificativa

Este trabalho é direcionado a professores de Matemática e alunos do ensino médio, na tentativa de facilitar o entendimento e compreensão do ensino de matemática desde os sistemas de numeração, conjunto dos números naturais, conjunto dos números inteiros e conjunto dos números racionais, as operações fundamentais em cada um desses conjuntos, fazendo ainda uma abordagem sobre potenciação, radiciação e racionalização de denominadores. Na abordagem sobre números racionais busca-se mostrar as relações através das quais estes se apresentam, desde as representações (figuras), formas fracionárias, decimais e dízimas periódicas. A aplicação desta metodologia tem por objetivo apresentar ao educando as relações existentes as várias formas de se representar um número racional. A abordagem do conjunto dos números racionais visa estreitar as dificuldades que boa parte dos alunos tem de interpretar, representar e operar com números racionais. O fato de algumas operações com números racionais serem um pouco mais complexas, principalmente a adição e subtração de frações com denominadores diferentes, onde inicialmente é preciso encontrar as frações equivalentes de cada fração da operação, utilizando o cálculo do M.M.C., faz com que boa parte dos alunos apresentem dificuldade em operar com este conjunto. A maioria dos alunos ingressantes no ensino médio apresentam defasagem de aprendizado nos conteúdos do ensino fundamental, principalmente no que diz respeito às operações fundamentais que, nesta sequência didática é apresentada de forma gradativa e demonstradas para melhor entendimento dos alunos e professores. A abordagem sobre potências, raízes e suas propriedades, acrescido da racionalização de denominadores visa oferecer ao aluno uma solidez na compreensão e resolução de expressões numéricas mais complexas. Ao iniciar os estudos de equações e funções muitos alunos até conseguem substituir as variáveis, porém apresentam dificuldade em resolver a expressão numérica encontrada.

0.3 Objetivos

0.3.1 Objetivos gerais

- Possibilitar ao aluno o estudo dos conteúdos fundamentais da matemática, de forma gradativa, promovendo o desenvolvimento de sua aprendizagem de uma forma mais construtiva e concreta, estimulando o raciocínio lógico-matemático, possibilitando ampliação no conhecimento e no desenvolvimento dos alunos das séries finais do

ensino fundamental e também do ensino médio.

0.3.2 Objetivos específicos

- Fazer conjecturas para a solução e generalização de problemas matemáticos através de deduções e construção de seus algoritmos;
- Trabalhar técnicas e estratégias de resolução de problemas através de sequência didática de conteúdos.
- Entender os conteúdos de matemática de forma gradativa e conexa.

0.3.3 Sequência didática

A geração atual de discentes é imediatista, o que explica, em parte, a evidente insatisfação com as aulas ditas "tradicionais", ou seja, aulas expositivas nas quais são utilizados apenas o quadro e o giz. Eles julgam esse tipo de aula como sendo pouco dinâmica. Na verdade muitos deles ficam horas nas redes sociais, mas não tem paciência de ficar uma hora estudando Matemática. Neste contexto, cabe ao professor alertar seus alunos que a Matemática não se aprende num único dia. O conhecimento deve ser construído gradativamente. Deve-se estudar um pouco a cada dia para fixar o aprendido e também agregar novos conhecimentos ao que já se sabe. Ninguém aprende violão hoje e amanhã começa a tocar numa banda de sucesso. Um dos motivos para o fracasso dos alunos nas avaliações internas e externas é o fato de estudarem, apenas, às vésperas das provas. Eles aprendem o que acham necessário para si, e para eles a matéria da prova só é necessária quando a avaliação se aproxima. Na verdade, nosso objetivo aqui não é discutir o fracasso escolar, mas vale lembrar o que diz Alicia Fernández: "... A aprendizagem acontece em um vínculo, se ela é um processo que ocorre entre subjetividade, nunca uma única pessoa pode ser culpada. A culpa, o considerar-se culpado, em geral, está no nosso imaginário..." (2001, p.321). Quadros et al (2015) em *Causas e consequências do fracasso escolar: no início da escolaridade*, destaca a motivação do alunos como um dos seis fatores determinantes para o fracasso escolar: o contexto econômico e social, o contexto familiar, o contexto educacional, os professores, o fracasso no interior da escola e a motivação do aluno. Assim o aprender por aprender não existe: os alunos precisam saber para que e por que precisam saber determinado assunto. Atualmente os alunos motivam-se apenas com a típica aprendizagem utilitária, isto é, só se aprende se for útil, necessário para entrar no mercado de trabalho, visando ao retorno financeiro.

1 Conjuntos

Um grupo de objetos, pessoas, animais ou até mesmo um único desses componentes, sugere a ideia de conjunto. Cada uma das pessoas desse grupo ou cada animal é chamado de elemento do conjunto. Conjunto e elemento não se definem, sendo portanto conceitos primitivos. Um conjunto normalmente é indicado por uma letra **maiúscula** e pode ser representado de várias maneiras, sendo as três principais:

1. **Colocando seus elementos entre chaves.**

Exemplo 1.1:

$$C = \{ \textit{verde}; \textit{amarela}; \textit{azul}; \textit{branca} \}$$

2. **Através de uma propriedade.**

Exemplo 1.2:

$$C = \{ x / x \text{ é cor da bandeira do Brasil} \}$$

3. **Através do diagrama de Venn** ¹

Exemplo 1.3:

Figura 1.1: Diagrama de Venn



¹John Venn (Kingston Upon Hull, 4 de agosto de 1834 - Cambridge, 4 de abril de 1923) foi um matemático inglês, foi professor de ciência moral na Universidade de Cambridge, estudou e ensinou lógica e teoria de probabilidades.

1.1 Conjuntos especiais

Alguns conjuntos apresentam particularidades em relação a quantidade de seus elementos, são eles:

1.1.1 Conjunto vazio:

É aquele que não tem elemento, indicado por $\emptyset$ ou $\{\}$.

Exemplo 1.4: Mês do ano que começa com letra "R".

1.1.2 Conjunto unitário:

É aquele que tem um só elemento.

Exemplo 1.5: Conjunto do mês do ano que começa com letra "F".

1.2 Símbolos

1.2.1 Símbolos de pertinência

São símbolos utilizados quando relacionamos elementos com conjuntos.

$\in$ – Pertence $\notin$ – Não pertence

Exemplo 1.6:

Seja o conjunto $A = \{-3; 0; 2\}$, podemos afirmar que $-3 \in A$, e que $1 \notin A$.

1.2.2 Símbolos de inclusão

São símbolos utilizados quando relacionamos subconjuntos ou conjuntos com conjuntos.

$\subset$ - Está contido $\not\subset$ - Não está contido
 $\supset$ - Contém $\not\supset$ - Não contém

Exemplo 1.7: Sejam os conjuntos: $A = \{-5, -3, 0, 2, 3, 4\}$ e $B = \{-5, 0, 3\}$

Podemos afirmar que o conjunto B está contido no conjunto A , pois os elementos $-5, 0$ e 3 estão contidos no conjunto B e também pertencem ao conjunto A . Representamos da seguinte forma: $B \subset A$, ou ainda, que o conjunto A contém o conjunto B , representando da seguinte forma: $A \supset B$. Podemos dizer ainda que o conjunto $\{-3\}$ não está contido no conjunto B , representando da seguinte forma: $\{-3\} \not\subset B$.

Deve-se ficar muito atento quanto à utilização correta dos símbolos de pertinência e inclusão, é comum para o caso do exemplo $\{-3\} \not\subset B$ utilizar o símbolo de pertinência $\notin$ (não pertence), o que estaria errado, neste caso trata-se de um conjunto, pois o elemento está entre chaves.

Relação de inclusão - Propriedades fundamentais

Dados quaisquer conjuntos A , B e C , tem-se:

Reflexividade: $A \subset A$;

Isso quer dizer que qualquer conjunto é subconjunto de si próprio.

Anti-simetria: se $A \subset B$ e $B \subset A$ então $A = B$;

A propriedade anti-simétrica contém em si a condição de igualdade de dois conjuntos, ou seja, se todo elemento de um conjunto A pertence a um conjunto B e se todo elemento de um conjunto B pertence a um conjunto A , então estes conjuntos são iguais.

Transitividade: se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$.

A propriedade de transitividade, por sua vez, é a base do raciocínio dedutivo.

Exemplo 1.8:

Sejam os conjuntos A , B e C :

$A = \{ \text{quadrado, retângulo, trapézio} \}$

$B = \text{conjunto de todos os quadriláteros}$

$C = \text{conjunto de todos os polígonos}$

É possível observar que $A \subset B$ e $B \subset C$, ou seja, o conjunto A é formado por quadriláteros e todo quadrilátero é um polígono, logo, quadrado, retângulo e trapézio são polígonos, então $A \subset C$.

1.2.3 Outros símbolos

Existem símbolos que são utilizados nas operações entre conjuntos, são eles:

$\cup$ - União

$\cap$ - Interseção

Exemplo 1.9:

Sejam os conjuntos: $A = \{2; 3; 5; 6\}$ e $B = \{1; 3; 5\}$.

$A \cup B = \{1; 2; 3; 5; 6\}$ é formado pelos elementos que estão nos conjuntos **A ou B**.

$A \cap B = \{3; 5\}$ é formado pelos elementos que estão nos conjuntos **A e B**, ao mesmo tempo.

$\exists$ - Existe

$|$ - Tal que, de modo que

$\iff$ - Se e somente se

$\Rightarrow$ - Implica

$\forall$ - Para todo

∞ - Infinito

$=$ - Igual

$\neq$ - Diferente

1.3 Igualdade de conjuntos

Dois conjuntos, A e B , são iguais se, e somente se, são formados pelos mesmos elementos, não interessando a ordem ou a forma como são representados. Escreve-se $A = B$.

Exemplo 1.10:

$A = \{a; b; b; c\}$ e $B = \{a; c; b\}$ são conjuntos iguais.

1.4 Conjunto complementar

Dados dois conjuntos A e B , $B \subset A$, chama-se complementar de B em relação a A , o conjunto $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$, ou seja, tomamos os elementos de A e retiramos os elementos de B contidos em A . Indica-se o complementar de um conjunto B da forma B^c .

Exemplo 1.11:

Sejam os conjuntos:

$$A = \{3; 5; 6; 7; 10; 12\}$$

$$B = \{3; 6; 7; 12\}$$

Podemos observar que $B \subset A$, logo, o complementar do conjunto B em relação ao conjunto A é $A - B = B^c = \{5; 10\}$.

1.5 Conjunto Universo

Conjunto universo é o conjunto dos quais todos os conjuntos em estudo são subconjuntos. Denotamos o conjunto universo pelo símbolo U .

Exemplo 1.12:

Sejam os conjuntos $A = \{-3, -1, 2\}$ e $B = \{-2, 0, 3, 5\}$, veja que todos eles são compostos por números inteiros. Neste caso, o conjunto dos números inteiros seria o conjunto universo.

Regras operatórias referentes ao complementar de conjuntos

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer e U o conjunto Universo:

1. Para todo conjunto $A \subset U$, tem-se $(A^c)^c = A$. (Todo conjunto é complementar do seu conjunto complementar).
2. Se $A \subset B$ então $B^c \subset A^c$. (Se um conjunto está contido em outro conjunto, seu conjunto complementar contém o conjunto complementar desse outro conjunto).
3. $A \subset B \iff B^c \subset A^c$. (Um conjunto está contido em outro conjunto, se e somente se, seu conjunto complementar contém o conjunto complementar desse outro conjunto).

1.6 Relação entre conjuntos

1.6.1 Correspondência biunívoca

Dados dois conjuntos A e B , dizemos que eles estão em correspondência biunívoca quando a cada elemento de A corresponde um único elemento de B e reciprocamente.

Exemplo 1.13:

Sejam os conjuntos N das notas musicais e D dos dias da semana:

$$N = \{do, re, mi, fa, sol, la, si\}$$

$$D = \{segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado, domingo\}$$

Podemos considerar a regra:

do $\longleftrightarrow$ segunda
 re $\longleftrightarrow$ terça
 mi $\longleftrightarrow$ quarta
 fa $\longleftrightarrow$ quinta
 sol $\longleftrightarrow$ sexta
 la $\longleftrightarrow$ sábado
 si $\longleftrightarrow$ domingo

É possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre esses dois conjuntos, pois ambos tem 7 elementos, ou seja, a mesma quantidade de elementos.

Contagem é uma correspondência biunívoca entre o conjunto $I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ e um conjunto finito X .

Exemplo 1.14:

Podemos considerar a regra de contagem:

do $\longleftrightarrow$ 1
 re $\longleftrightarrow$ 2
 mi $\longleftrightarrow$ 3
 fa $\longleftrightarrow$ 4
 sol $\longleftrightarrow$ 5
 la $\longleftrightarrow$ 6
 si $\longleftrightarrow$ 7

Número de elementos n do conjunto I_n .

No exemplo acima, 7 é o número de elementos do conjunto $N = \{do; re; mi; fa; sol; la; si\}$. Se dois conjuntos finitos estiverem em correspondência biunívoca, então eles terão a mesma quantidades de elementos.

A relação de correspondência biunívoca será utilizada na compreensão do conceito de função.

1.6.2 Função

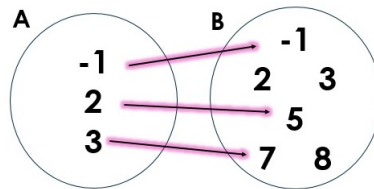
Considere dois conjuntos A e B não vazios. Uma função $f : A \longrightarrow B$ é uma regra que associa a cada elemento x pertencente ao conjunto A um único elemento y pertencente ao conjunto B . Dizemos que y é a imagem de x pela função f e escrevemos $y = f(x)$. A igualdade $y = f(x)$ significa que a função f associa y ao elemento x .

O conjunto A é chamado de **domínio** e o conjunto B é chamado de **contra-domínio**.

Exemplo 1.15:

Sejam dois conjuntos $A = \{-1, 2, 3\}$ e $B = \{-1, 2, 3, 5, 7, 8\}$ e $f(x) = 2x + 1$ a regra que associa o conjunto A ao conjunto B .

$f(x) = 2x + 1$	$f(x) = 2x + 1$	$f(x) = 2x + 1$
$f(-1) = 2 \cdot (-1) + 1$	$f(2) = 2 \cdot (2) + 1$	$f(3) = 2 \cdot (3) + 1$
$f(-1) = -2 + 1$	$f(2) = 4 + 1$	$f(3) = 6 + 1$
$f(-1) = -1$	$f(2) = 5$	$f(3) = 7$



Neste caso, o domínio é $D = \{-1, 2, 3\}$, o contradomínio é $CD = \{-1, 2, 3, 5, 7, 8\}$ e a imagem é $I = \{-1, 5, 7\}$.

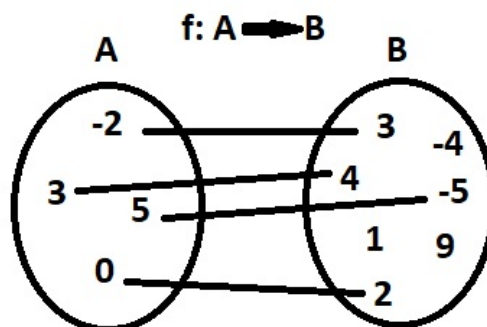
1.6.3 Classificação das funções

Função injetiva

Dados dois conjuntos A e B , uma função $f : A \rightarrow B$ é dita injetiva quando elementos diferentes em A são levados pela função f em elementos diferentes em B , ou seja, para todos $a, b \in A$, com $a \neq b$, então $f(a) \neq f(b)$. Essa condição é equivalente a $f(a) = f(b) \rightarrow a = b$.

Essa é muitas vezes a forma de trabalhar função injetiva, pois a relação de igualdade tem mais propriedades do que a relação de $\neq$.

Exemplo 1.16:

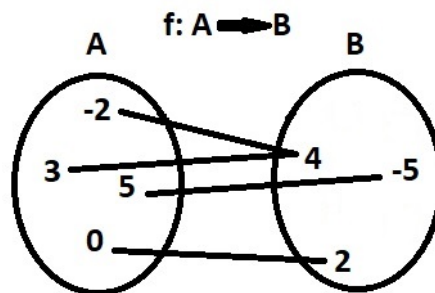


Temos que $f(-2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(5) = -5$, $f(0) = 2$, ou seja, cada elemento do domínio tem imagem diferente dos demais elementos.

Função sobrejetiva

Dados dois conjuntos A e B , $f : A \rightarrow B$ é uma função sobrejetiva quando o contradomínio (CD) é igual ao conjunto imagem (I), ou seja, para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $b = f(a)$.

Exemplo 1.17:

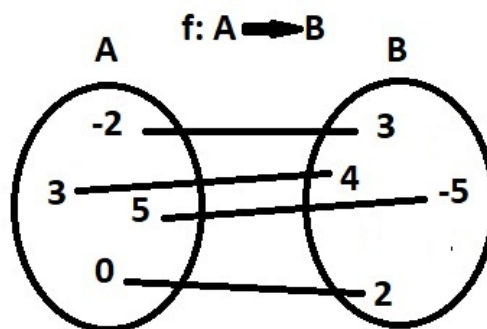


Temos que $f(-2) = 4$, $f(3) = 4$, $f(5) = -5$, $f(0) = 2$ e o conjunto imagem $I = \{ -5, 2, 4 \}$, ou seja, o conjunto imagem é igual ao conjunto contradomínio $CD = \{ -5, 2, 4 \}$.

Função bijetiva

Dados dois conjuntos A e B , $f : A \rightarrow B$ é uma função bijetiva se ela for injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo, ou seja, para todos $a, b \in A$, com $a \neq b$, então $f(a) \neq f(b)$ e, além disso, para todo $d \in B$, existe $c \in A$ tal que $d = f(c)$, ou seja, o contradomínio é também o conjunto imagem.

Exemplo 1.18:



Temos que $f(-2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(5) = -5$, $f(0) = 2$ e o contradomínio $CD = \{-5, 2, 3, 4\}$, a função é injetora pois cada elemento do domínio tem imagem diferente dos demais elementos e o contradomínio é igual ao conjunto imagem, sendo portanto sobrejetiva, logo a função é bijetiva.

2 Números naturais

Os números estão presentes no cotidiano das pessoas, seja ao utilizar o telefone, em senhas, no calendário, etc.... A necessidade de fazer contagens, quantificar, fez com que o homem utilizasse os números naturais. Uma história que comumente ouvimos nas escolas é o do processo de contagem através da correspondência um a um que veremos adiante, ou seja, a correspondência biunívoca.

Códigos de pedra

Conta a estória que pastores, ao amanhecer, soltavam suas ovelhas para pastar juntas, controlando-as de forma que, para cada ovelha que era liberada do cercado este retirava de uma sacola uma pedra. Ao fim do dia, para cada ovelha que entrasse no cercado, uma pedra seria colocada de volta na sacola. Se por acaso sobrasse uma pedra, essa corresponderia a uma ovelha que estaria faltando, se tivessem ovelhas para entrar e não houvessem mais pedras era porque aquelas ovelhas seriam de outro pastor. À época a palavra latina Calculus, que assumiu a grafia cálculo, em português, significava “PEDRA”, daí, calcular significava “contar pedras”. Nos dias atuais utiliza-se a expressão “Cálculo renal”, o que significa “Pedra nos rins”. Com o tempo a quantidade de ovelhas ia aumentando tornando-se impraticável o processo de contagem (associação um a um) com as pedras. Foram necessários outros registros, dentre eles: fazer traços em ossos ou madeira, laços em cordas, utilização de objetos, dentre eles o ábaco e a criação de símbolos que representavam grandes quantidades.

Os números naturais surgiram da necessidade que o homem teve de contar, sejam suas ferramentas, seja seu rebanho de ovelhas. Para facilitar a comunicação em relação às quantidades, o homem inventou símbolos e nomes para estes. Inicialmente, por conhecer pequenas quantidades, era possível ao homem dar nome a tais quantidades, porém com o tempo até mesmo registra-las tornou-se difícil. Surgem então os sistemas de numeração que permitiram representar quantidades por meio de símbolos. Estes sistemas foram desenvolvidos por várias civilizações na antiguidade, por volta de 3500 a.C.. Alguns apresentavam características parecidas como por exemplo: ser posicional, ter o princípio aditivo e/ou o princípio multiplicativo, ter uma base.

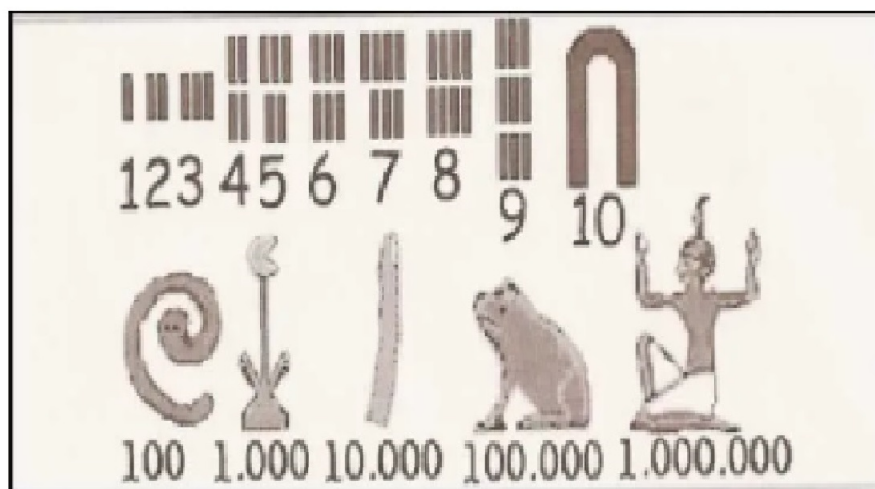
2.1 Sistemas de numeração

Destacam-se entre os principais sistemas de numeração:

2.1.1 Sistema de numeração egípcio

O sistema de numeração egípcio surgiu por volta de 3000 a.C., era aditivo, decimal, não posicional e utilizava 7 símbolos, conforme figura abaixo:

Figura 2.1: Sistema de numeração egípcio

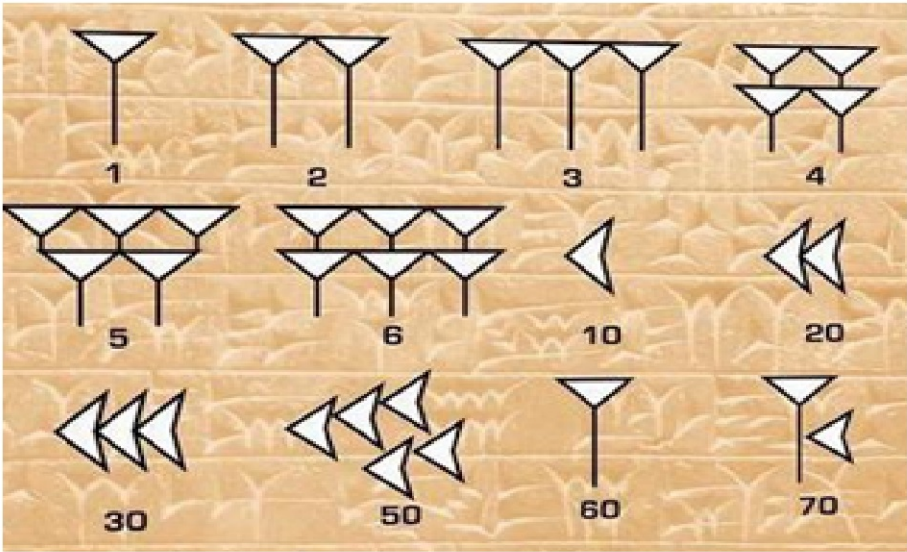


- Um traço vertical representava 1;
- Um calcanhar invertido representava 10;
- Um laço representava 100;
- Uma flor de lótus representava 1.000;
- Um dedo dobrado representava 10.000;
- Um girino representava 100.000;
- Um homem ajoelhado representava 1.000.000.

2.1.2 Sistema de numeração babilônico

O sistema de numeração babilônico foi desenvolvido pelos sumérios por volta de 3.400 a.C. e utilizavam a escrita cuneiforme, que eram marcas feitas na argila em forma de cunha. Era um sistema posicional de bases decimal e sexagesimal. Cada cunha pequena escrita na vertical representava uma unidade e na horizontal representava a dezena. Uma cunha escrita na vertical, espaçada de outro símbolo, representava um grupo de 60.

Figura 2.2: Sistema de numeração babilônico



2.1.3 Sistema de numeração chinês

Por volta do século XI a.C. a matemática começa a ser desenvolvida na China com os números decimais, a álgebra, a geometria e a trigonometria. O sistema de numeração chinês surgiu por volta do século IV a.C., era um sistema decimal de valor posicional e binário, utilizava apenas barras ou varetas na posição vertical e/ou horizontal.

Figura 2.3: Sistema de numeração chinês

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Figura 2.4: Representação no sistema de numeração chinês

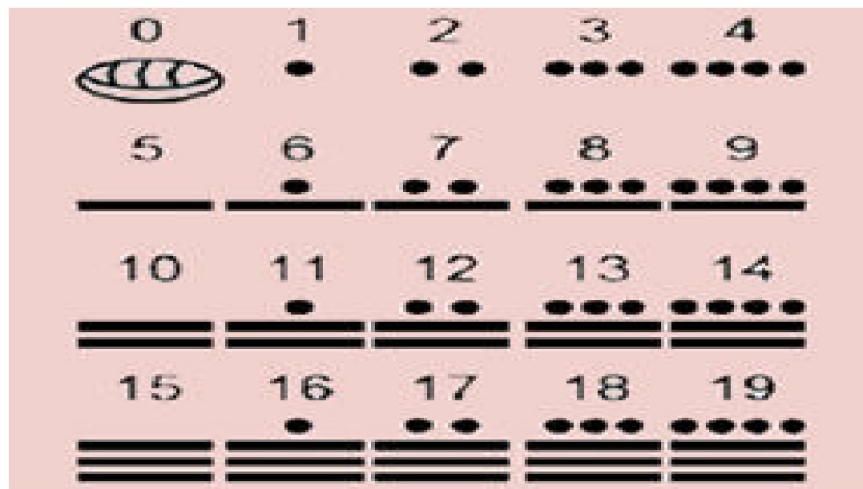


Representação do número 90582

2.1.4 Sistema de numeração maia

O sistema de numeração maia surgiu no período pré-colombiano, na América, e era composto de dois símbolos principais, pontos e barras horizontais, e existia ainda um símbolo parecido com uma concha utilizado para representar o zero, o que não existia nos demais sistemas de numeração conhecidos. Este sistema de numeração era aditivo, multiplicativo e de base vinte.

Figura 2.5: Sistema de numeração maia



2.1.5 Sistema de numeração romano

O sistema de numeração romano surgiu por volta de 500 a.C., era aditivo, posicional e utilizava 7 letras:

Figura 2.6: Sistema de numeração romano

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

- A letra I representava 1;
- A letra V representava 5;
- A letra X representava 10;
- A letra L representava 50;
- A letra C representava 100;
- A letra D representava 500;
- A letra M representava 1000.

Os símbolos I, X, C e M podiam ser repetidos até três vezes, para não repetir o mesmo símbolo quatro vezes, os romanos utilizavam subtração.

Figura 2.7: Sistema de numeração romano

sete	trinta e seis	cento e cinquenta e dois	mil setecentos e onze
VII	XXXVI	CLII	MDCCXI
$5+1+1$	$10+10+10+5+1$	$100+50+1+1$	$1000+500+100+100+10+1$

Figura 2.8: Sistema de numeração romano

quatro	nove	quarenta	quarenta e quatro	novecentos
IV	IX	XL	XLIV	CM
$5-1$	$10-1$	$50-10$	$(50-10)+(5-1)$	$1000-100$

Apesar de ter sido um dos sistemas de numeração mais importantes até a sua época, este se mostrava ineficiente para a realização de operações matemáticas. Uma barra horizontal colocada sobre um determinado símbolo multiplicava este por 1000.

2.1.6 Sistema de numeração indo-arábico

O sistema de numeração Indo-Árábico é utilizado no mundo inteiro e foi criado pelos Hindus e aperfeiçoado pelos árabes. Este sistema tem como vantagens a facilidade na realização de operações básicas e na escrita. Ele também é conhecido como sistema de numeração decimal ou sistema decimal posicional, ele é de base dez e possui 10 símbolos para representar qualquer quantidade e cuja escrita foi evoluindo ao longo de anos, conforme ilustração abaixo:

Figura 2.9: Sistema de numeração indo-arábico

HINDU 300 a.C.	-	=	≡	୩	୪	୫	୬	୭	୮	୯	
HINDU 500 d.C.	୭	୮	୯	୦	୧	୨	୩	୪	୫	୬	୭
ÁRABE 900 d.C.	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠	
ÁRABE (ESPANHOLA) 1000 d.C.	1	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠	
ITALIANO 1400 d.C.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
ATUAL	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	

Neste sistema de numeração a posição com que os numerais são inscritos é importante, ou seja, além de representar diferentes quantidades, um número escrito à esquerda de outro vale 10 vezes este, onde, da direita para a esquerda temos as ordens das unidades, dezenas e centenas. Estas três ordens repetem-se em classes conhecidas por: unidades simples, milhares, milhões, bilhões, trilhões, etc..., conforme ilustração a seguir:

Figura 2.10: Sistema de numeração decimal - classes e ordens

CLASSE DOS BILHÕES			CLASSE DOS MILHÕES			CLASSE DOS MILHARES			CLASSE DAS UNIDADES SIMPLES		
12 ^a	11 ^a	10 ^a	9 ^a	8 ^a	7 ^a	6 ^a	5 ^a	4 ^a	3 ^a	2 ^a	1 ^a
ORDEM	ORDEM	ORDEM	ORDEM	ORDEM	ORDEM	ORDEM	ORDEM	ORDEM	ORDEM	ORDEM	ORDEM
CENTENAS DE BILHÕES	DEZENAS DE BILHÕES	UNIDADES DE BILHÕES	CENTENAS DE MILHÕES	DEZENAS DE MILHÕES	UNIDADES DE MILHÕES	CENTENAS DE MILHAR	DEZENAS DE MILHAR	UNIDADES DE MILHAR	CENTENAS	DEZENAS	UNIDADES

2.2 Conjunto dos números naturais

Existe um conjunto chamado de conjunto dos números naturais, indicado pelo símbolo $\mathbb{N}$, no qual existe a noção de sucessor de um número natural.

$$\mathbb{N} = \{ 1; 2; 3; 4; 5; \dots \}$$

Axiomas de Peano¹.

- i) Todo número natural n tem um único sucessor, indicado por $S(n)$;
- ii) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
- iii) Existe um único número natural, designado por 1, que não é sucessor de nenhum número natural;
- iv) Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de cada elemento de X ainda pertence a X , então $X = \mathbb{N}$.

¹Giuseppe Peano (Piemonte, 27 de agosto de 1858 - Turim, 20 de abril de 1923) foi um matemático e filósofo italiano e professor da Universidade de Turim. Contribuiu para avanços nas áreas de análise, fundamentos e lógica matemática e distinguiu-se na lógica formal e álgebra vetorial.

O quarto axioma de Peano é também conhecido como axioma de indução, utilizado na demonstração de várias proposições matemáticas referentes aos números naturais, formulada da seguinte maneira:

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa a um número natural n e seja $n + 1$ o sucessor de n . Suponhamos que:

- i) $P(1)$ é válida;
- ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validade de $P(n)$ implica a validade de $P(n + 1)$. Então $P(n)$ é válida para qualquer número natural.

A essência da caracterização de $\mathbb{N}$ reside na palavra "sucessor". Intuitivamente, quando $n, n+1 \in \mathbb{N}$, dizer que $n+1$ é o sucessor de n significa de $n+1$ vem logo depois de n .

Relação de ordem em $\mathbb{N}$

De acordo com o axioma *iii*, como o número 1 não é sucessor de nenhum outro número natural, temos que 1 é o menor número natural, que é menor do que 2, que por sua vez é menor do que 3, e assim sucessivamente.

Na sequência dos números naturais, se um número a aparece à esquerda de um número b , dizemos que a é menor do que b , $a < b$, ou ainda, que b é maior do que a , $b > a$.

Lei da tricotomia

A ordem do conjunto dos números naturais é total, sendo verificada apenas uma das 3 possibilidades: Dados dois números naturais a e b , apenas uma das relações é verdadeira:

$a < b$, a é menor do que b ;

$a = b$, a é igual a b ;

$a > b$, a é maior do que b .

Usamos o símbolo $\leq$ para denotar que, dados dois números a e b , $a \leq b$ significa a é menor ou igual a b .

Usamos o símbolo $\geq$ para denotar que, dados dois números a e b , $a \geq b$ significa a é maior ou igual a b .

Intervalos

Sejam dois números naturais a e b , com $a < b$, podemos definir os seguintes conjuntos:

$[a, b]$ é o conjunto dos números naturais x tais que $a \leq x \leq b$, chamado intervalo fechado;

(a, b) é o conjunto dos números naturais x tais que $a < x < b$, chamado intervalo aberto;

$[a, b)$ é o conjunto dos números naturais x tais que $a \leq x < b$, chamado intervalo semia-berto ou semifechado;

$(a, b]$ é o conjunto dos números naturais x tais que $a < x \leq b$, chamado intervalo semia-berto ou semifechado.

Princípio da boa ordenação

Todo subconjunto, não vazio, do conjunto dos números naturais possui um menor elemento, ou seja, dado um subconjunto A não vazio, $A \subset \mathbb{N}$, existe um elemento $a \in A$ tal que $a < b$, para todo elemento $b \in A$.

2.3 As quatro operações fundamentais em $\mathbb{N}$

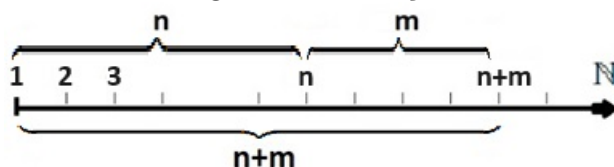
As quatro operações fundamentais no conjunto dos números naturais são: a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão, sendo que a adição e a multiplicação são operações fechadas em $\mathbb{N}$, ou seja, dados $a, b \in \mathbb{N}$ temos que:

- i) Para todos $a, b \in \mathbb{N}$, $a + b \in \mathbb{N}$;
- ii) Para todos $a, b \in \mathbb{N}$, $a \cdot b \in \mathbb{N}$.

2.3.1 Adição

O axioma de Peano garante que todo número natural n tem um sucessor denotado por $n + 1$ e, $n + 1$ tem $n + 2$ como sucessor, de modo que dados dois números naturais m e n , podemos deslocar n de m posições para a direita, obtendo o número $n + m$. Essa operação é conhecida como soma ou adição de $n + m$.

Figura 2.11: Adição.



Algoritmo da adição

Na operação de adição cada termo é chamado de "parcela" e o resultado é chamado de "soma ou total". Cada parcela é colocada uma sobre a outra e somada da direita para a esquerda começando pelos algarismos das unidades, depois das dezenas e por fim das centenas, dentro de cada classe, começando pelas unidades simples, depois unidades de milhares e assim sucessivamente. Quando a soma dos algarismos em uma mesma ordem ultrapassar nove unidades, registra-se no resultado da respectiva ordem o algarismo da unidade e os algarismos da ordem seguinte será convertido para ser somado com os algarismos da ordem seguinte da operação, ou seja, segue-se o critério de que cada dez unidades valem uma dezena, cada dez dezenas valem uma centena, e assim por diante.

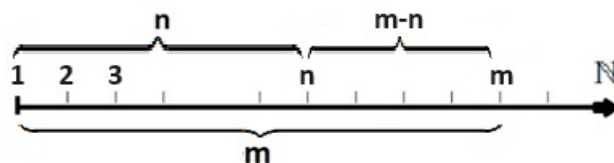
Figura 2.12: Algoritmo da adição e nomenclatura.

$$\begin{array}{r}
 \textbf{ADIÇÃO} \\
 + \quad 23 \text{ Parcela} \\
 145 \text{ Parcela} \\
 + \quad 7 \text{ Parcela} \\
 \hline
 175 \text{ Soma} \\
 \text{ou Total}
 \end{array}$$

2.3.2 Subtração

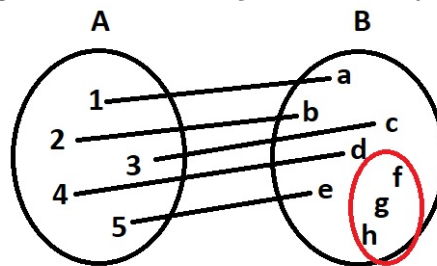
Dados dois números naturais m e n , com $n < m$, a quantidade de deslocamentos unitários de n até m será denotado por $m - n$ e será chamado de diferença entre m e n .

Figura 2.13: Subtração.



O número 5 somado com 3 dá 8, nesse caso, dizemos que 5 é menor do que 8, ou ainda, um conjunto com 8 elementos tem 3 elementos a mais que um conjunto com 5 elementos. Há uma correspondência biunívoca do conjunto de 5 elementos com um subconjunto do conjunto de 8 elementos que, neste caso, tem 3 elementos a mais, conforme exemplo abaixo.

Figura 2.14: Subtração entre conjuntos.



Algoritmo da subtração

Assim como na adição, na subtração cada número é colocado sobre o outro, sendo o maior em cima e o menor embaixo, sendo o de cima chamado de "minuendo" e o de baixo chamado de "subtraendo". A operação é feita subtraindo da direita para a esquerda, iniciando-se pelos algarismos das unidades, depois das dezenas e depois das centenas, obedecendo a ordem das classes das unidades simples, depois milhares e assim sucessivamente. O resultado final da operação de subtração é chamado de "diferença" ou "resto". Quando o algarismo do minuendo for menor que o algarismo do subtraendo, na mesma ordem, diminui-se em uma unidade o algarismo da ordem seguinte e o converte para a ordem do algarismo insuficiente, somando-o com este.

Figura 2.15: Algoritmo da subtração e nomenclatura.

$$\begin{array}{r}
 \textbf{SUBTRAÇÃO} \\
 \hline
 \textbf{274 Minuendo} \\
 - \textbf{127 Subtraendo} \\
 \hline
 \textbf{147 Diferença} \\
 \textbf{ou Resto}
 \end{array}$$

2.3.3 Multiplicação

Dado $n \in \mathbb{N}$, podemos considerar os múltiplos de n como: $n \times 1$, $n \times 2$, $n \times 3$, etc..., obtendo assim a sequência: $n \times 1 = n$, $n \times 2 = n + n$, $n \times 3 = n + n + n$, ou seja, a multiplicação é a adição de números iguais. Tomar múltiplos de n define a multiplicação no conjunto dos números naturais, onde $m \times n$, que se lê: " m vezes n ", representa o múltiplo " m vezes n " de n . O número $m \times n$ será chamado produto de m por n , que também pode ser representado por $m \cdot n$ ou ainda mn .

Figura 2.16: Algoritmo da multiplicação e nomenclatura.

MULTIPLICAÇÃO	
216	Fator
x 23	Fator
648	Parcela
+ 432	Parcela
4968	Produto

2.3.4 Divisão

Dados dois números naturais d e a , dizemos que d divide a e escrevemos $d \mid a$ ou que d é um divisor de a ou ainda que a é um múltiplo de d se existir $q \in \mathbb{N}$ tal que $a = q \cdot d$. Caso contrário, escrevemos d não divide a , escrevendo $d \nmid a$. Por exemplo, temos que $3 \mid 9$ mas $9 \nmid 3$. Podemos definir a divisão de m por n , indicando por $m \div n$, como a quantidade de partes n que necessitamos para alcançarmos m partindo da unidade.

Figura 2.17: Algoritmo da divisão e nomenclatura.

DIVISÃO	
Dividendo	Divisor
851	37
74	23
111	Quociente
111	
000	Resto

Proposições 2.1

Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$, então:

1. **Se $a \mid b$ e $b \mid c$ então $a \mid c$** - (transitividade);

Demonstração:

Se $a \mid b$ e $b \mid c$, então podemos escrever:

(I) $b = a \cdot q_1$ e (II) $c = b \cdot q_2$, com $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$. Substituindo I em II, temos:

$$c = b \cdot q_2$$

$$c = (a \cdot q_1) \cdot q_2$$

$$c = a \cdot (q_1 \cdot q_2)$$

$$c = a \cdot q, \text{ onde } q = q_1 \cdot q_2 \in \mathbb{N}, \text{ logo, } a|c.$$

2. Se $a|b$ e $a|c$ então $a|(b+c)$ e $a|(b-c)$;

Demonstração:

Se $a|b$ e $a|c$, então podemos escrever $b = a \cdot q_1$ e $c = a \cdot q_2$, com $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$.
somando b com c , temos:

$$b + c = a \cdot q_1 + a \cdot q_2, \text{ colocando } a \text{ em evidência, temos,}$$

$$b + c = a \cdot (q_1 + q_2), q = (q_1 + q_2) \in \mathbb{N},$$

$$b + c = a \cdot q$$

$$\text{logo, } a|(b+c).$$

De modo análogo mostramos que $a|(b-c)$.

3. Se $a, b \in \mathbb{N}$ e $a|b$ então $0 < a \leq b$;

Demonstração:

Se $a|b$ então $b = aq$, $q \in \mathbb{N}$, ou seja,

$q \geq 1$, multiplicando ambos os lados da igualdade por a , temos,

$$a \cdot q \geq a > 0, \text{ onde,}$$

$$b = a \cdot q \geq a > 0, \text{ logo, } 0 < a \leq b.$$

4. Se $a|b$ e $b|a$ então $a = b$.

Demonstração:

Se $a|b$ então $a \leq b$ e se $b|a$ então $b \leq a$, ou seja, $a \leq b \leq a$. Logo, $a = b$.

Propriedades da divisibilidade

Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Temos:

1. (d divide) Se $d|a$ e $d|b$, então $d|a \cdot x + b \cdot y$ para qualquer combinação linear $a \cdot x + b \cdot y$ de a e b com coeficientes $x, y \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

Se $d|a$ e $d|b$, então podemos escrever $a = d \cdot q_1$ e $b = d \cdot q_2$, com $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$, logo $a \cdot x + b \cdot y = d \cdot (q_1 \cdot x + q_2 \cdot y)$. Como $q_1 \cdot x + q_2 \cdot y \in \mathbb{N}$, temos $d|(a \cdot x + b \cdot y)$.

2. (Limitação) Se $d|a$, então $a = 0$ ou $|d| \leq |a|$.

Demonstração:

Suponha que $d|a$ e $a \neq 0$. Neste caso, $a = d \cdot q$ com $q \neq 0$, assim $|q| \geq 1$ e $|a| = |d| \cdot |q| \geq |d|$. Logo,

$$|a| \geq |d|.$$

2.4 Propriedades do conjunto dos números naturais

2.4.1 Propriedade associativa

Dados $a, b, c \in \mathbb{N}$, temos que:

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Demonstração.

Faremos a demonstração por indução.

Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$, usaremos indução em c . Fazendo $c = 1$, temos:

$$a + (b + c) = a + (b + 1)$$

$a + (b + 1) = (a + b) + 1$, que vem da definição de adição, logo,

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1$$

Supondo o resultado verdadeiro para um certo c , temos:

$$\begin{aligned}
a + [b + (c + 1)] &= a + [(b + c) + 1] \\
a + [(b + c) + 1] &= [a + (b + c)] + 1 \\
[a + (b + c)] + 1 &= [(a + b) + c] + 1 \\
[(a + b) + c] + 1 &= (a + b) + (c + 1), \text{ temos então que:}
\end{aligned}$$

$$a + [b + (c + 1)] = (a + b) + (c + 1)$$

Logo, temos que $a + (b + c) = (a + b) + c$ é válida para todo $c \in \mathbb{N}$. □

2.4.2 Propriedade comutativa da adição

Dados $a, b \in \mathbb{N}$, temos que:

$$a + b = b + a.$$

Demonstração:

Sejam $a \in \mathbb{N}$, vamos provar que $a + b = b + a$ para qualquer $b \in \mathbb{N}$, usaremos indução em b .

i) Seja $b = 1$.

A igualdade $a + 1 = 1 + a$ será provada por indução em a . Ela é óbvia para $a = 1$.

Supondo-a verdadeira para a . temos:

$$\begin{aligned}
(a + 1) + 1 &= (1 + a) + 1 \\
(1 + a) + 1 &= 1 + (a + 1),
\end{aligned}$$

Onde a primeira igualdade vale pela hipótese de indução e a segunda pela associatividade acima provada. Assim, $1 + a = a + 1$ para todo $a \in \mathbb{N}$.

ii) Supondo agora que se tem $a + b = b + a$ para algum b , vemos que:

$$\begin{aligned}
a + (b + 1) &= (a + b) + 1 \\
(a + b) + 1 &= (b + a) + 1 \\
(b + a) + 1 &= 1 + (b + a) \\
1 + (b + a) &= (1 + b) + a \\
(1 + b) + a &= (b + 1) + a
\end{aligned}$$

Onde a igualdade 1 vem da definição da adição, a igualdade 2 vem da hipótese de indução, as igualdades 3 e 5 veem do caso particular $a + 1 = 1 + a$, já provado, e a igualdade 4 vem da associatividade, vista anteriormente. Temos então que:

$$a + (b + 1) = (b + 1) + a$$

Logo, temos que $a + b = b + a$ é válida para todo $b \in \mathbb{N}$.

2.4.3 Propriedade distributiva

Dados $a, b, c \in \mathbb{N}$, temos que:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Demonstração: Provaremos por indução

Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, vamos provar por indução em c que a igualdade é válida para todo $c \in \mathbb{N}$.

i, Seja $c = 1$. Temos:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot (b + 1).$$

$$a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a \cdot 1.$$

$$a \cdot b + a \cdot 1 = a \cdot b + a, \text{ o que é verdadeira pela definição de multiplicação.}$$

ii, Supondo $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ válida para algum c , temos:

$$a \cdot [b + (c + 1)] = a \cdot [(b + c) + 1]$$

$$a \cdot [(b + c) + 1] = a \cdot (b + c) + a$$

$$a \cdot (b + c) + a = (a \cdot b) + (a \cdot c) + a$$

$$(a \cdot b) + (a \cdot c) + a = a \cdot b + (a \cdot c + a)$$

$$a \cdot b + (a \cdot c + a) = a \cdot b + a \cdot (c + 1)$$

A igualdade 1 vem da definição de adição, as igualdades 2 e 5 veem da definição de multiplicação, a igualdade 3 vem da hipótese de indução e a igualdade 4 vem da associatividade da adição. Temos então que:

$$a \cdot [b + (c + 1)] = a \cdot b + a \cdot (c + 1)$$

Logo, temos que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ é válida para todo $c \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.1 - OBMEP

OBMEP 2005 - 2ª FASE - NÍVEL 2

QUESTÃO 2

A caminhonete de Beremiz pode carregar até 2 000 quilos. Ele aceita um serviço para transportar uma carga de 150 sacas de açúcar de 60 quilos cada e 100 sacas de milho de 25 quilos cada.

- A) Beremiz conseguirá fazer o serviço em cinco viagens? Por quê?
 B) Descreva uma maneira de fazer o serviço em seis viagens.

Solução: Item A

Temos que a carga total a ser transportada será:

$$150 \cdot 60 + 100 \cdot 25 = 9000 + 2500 = 11500 \text{ quilos.}$$

Como a capacidade máxima da caminhonete é de 2000 quilos, não será possível transportar toda a carga em 5 viagens, pois $11500 : 2000 = 5,75$ viagens.

Solução: Item B

Uma maneira de fazer o serviço é realizar 5 viagens de 2000 quilos e uma de 1500 quilos, da seguinte forma:

Cada viagem de 2000 quilos será transportando 30 sacas de açúcar e 8 sacas de milho.

$$30 \cdot 60 + 8 \cdot 25 = 1800 + 200 = 2000 \text{ quilos} \cdot 5 = 10000 \text{ quilos.}$$

Então restará para a última viagem 60 sacas de milho.

$$60 \cdot 25 = 1500 \text{ quilos.}$$

2.4.4 Propriedade comutativa da multiplicação

Dados $a, b, c \in \mathbb{N}$, temos que:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Demonstração: Provaremos por indução. Seja $a \in \mathbb{N}$,

i, Para $b = 1$, usaremos indução a fim de provar que vale $a \cdot 1 = 1 \cdot a$ seja qual for $a \in \mathbb{N}$. Como sabemos que $a \cdot 1 = a$, devemos mostrar que $1 \cdot a = a$. Isto é claro quando $a = 1$ e, se for verdadeiro para um certo a , teremos:

$$1 \cdot (a + 1) = 1 \cdot a + 1$$

$$1 \cdot a + 1 = a + 1, \text{ pela definição de multiplicação.}$$

ii, Suponha que $a \cdot b = b \cdot a$ e vamos provar que $a \cdot (b + 1) = (b + 1) \cdot a$, temos que:

$$a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a \cdot 1$$

$$a \cdot b + a \cdot 1 = b \cdot a + a \cdot 1$$

$$b \cdot a + a \cdot 1 = (b + 1) \cdot a$$

Onde a igualdade 1 é a definição de multiplicação, a igualdade 2 é a hipótese de indução e a igualdade 3 é propriedade distributiva. Temos então que:

$$a \cdot (b + 1) = (b + 1) \cdot a$$

Logo, temos que $a \cdot b = b \cdot a$ é válida para todo $c \in \mathbb{N}$.

2.4.5 Elemento neutro da multiplicação

O número 1 é o elemento neutro da multiplicação.

Dado $m \in \mathbb{N}$, $m \cdot 1 = m$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Vamos demonstrar por indução em $\mathbb{N}$.

i, Para $m = 1$ temos: $1 \cdot 1 = 1$

ii, Supondo $1 \cdot m = m$ verdadeiro vamos mostrar que é verdadeiro para $m + 1$.

Temos que:

$$1 \cdot (m + 1) = 1 \cdot m + 1$$

$$1 \cdot m + 1 = m + 1$$

Logo, $m \cdot 1 = m$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Lei do corte

Dados $a, b, c \in \mathbb{N}$ e $a + c = b + c$, então $a = b$.

Demonstração: Faremos por indução em c .

i) Para $c = 1$ temos que $a + 1 = b + 1$, então $a = b$ pois números que tem o mesmo sucessor são iguais (axioma de Peano).

ii) Suponha $a + c = b + c$ para algum c , temos:

$$a + (c + 1) = (a + c) + 1$$

$$(a + c) + 1 = a + (c + 1) \text{ e}$$

$$b + (c + 1) = (b + c) + 1$$

$$(b + c) + 1 = b + (c + 1), \text{ onde}$$

$$a + (c + 1) = b + (c + 1)$$

Temos $a + c = b + c$ (mesmo sucessor), onde $a = b$ (hipótese de indução).

Monotonicidade

Dados $a, b \in \mathbb{N}$, tais que $a < b$, então $a + c < b + c$ e $a \cdot c < b \cdot c$, $\forall c \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

$a < b \Rightarrow b = a + d$ para algum $d \in \mathbb{N}$, logo, somando-se $c \in \mathbb{N}$ em ambos os lados da igualdade temos, $b + c = a + c + d$, logo,

$$a + c < b + c.$$

Em relação a multiplicação temos que:

$$b = a + d \Rightarrow b \cdot c = a \cdot c + d \cdot c, \text{ logo, } a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c.$$

Lei do Corte para desigualdades

Dados $a, b \in \mathbb{N}$, se $a + c < b + c$ ou $a \cdot c < b \cdot c$ então $a < b$, para todo $c \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

Pela tricotomia, temos que $a = b$, $b < a$ ou $a < b$. As duas primeiras alternativas, em virtude da monotonicidade, são incompatíveis com a hipótese, logo $a < b$.

2.5 Subconjuntos de $\mathbb{N}$

2.5.1 Números pares

O conjunto dos números pares é formado por números que dividem por 2, ou seja, que terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8. Seja P o conjunto dos números pares, temos então:

$$P = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots \}$$

Dado $a \in \mathbb{N}$, podemos escrever um número par da forma $2 \cdot a$.

2.5.2 Números ímpares

O conjunto dos números ímpares é formado por números que não dividem por 2, ou seja, terminam em 1, 3, 5, 7 ou 9. Seja I o conjunto dos números ímpares, temos então:

$$I = \{ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots \}$$

Dado $a \in \mathbb{N}$, podemos escrever um número ímpar da forma $2 \cdot a + 1$.

2.5.3 Conjunto dos múltiplos de $\mathbb{N}$

Como foi visto na seção 2.3.3, os múltiplos de a são obtidos multiplicando a pelos números naturais, ou seja, $a \times 1$, $a \times 2$, $a \times 3$, etc..., obtendo assim a sequência: a , $2a$, $3a$, etc.... Denotaremos por M_a o conjunto dos múltiplos de um número natural a .

Exemplo 2.2: Seja $a = 3$, o conjunto dos múltiplos de 3 será:

$$M_3 = \{ 3 \times 1, 3 \times 2, 3 \times 3, 3 \times 4, 3 \times 5, 3 \times 6, \dots \} = \{ 3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots \}.$$

Exemplos 2.3:

$$M_6 = \{ 6, 12, 18, 24, 30, 36, \dots \}$$

$$M_7 = \{ 7, 14, 21, 28, 35, 42, \dots \}$$

Exemplo 2.4 - OBMEP

OBMEP 2010 - 1ª FASE - NÍVEL 2

12. Os algarismos 2, 3, 4, 5, 6 e 7 foram usados na multiplicação indicada ao lado, em que cada letra da sigla **OBMEP** representa um algarismo diferente. Qual é o algarismo representado pela letra **O**?

- A) 2
- B) 3
- C) 4
- D) 5
- E) 7

$$\begin{array}{r} \text{O B} \\ \times \quad 6 \\ \hline \text{M E P} \end{array}$$

Solução:

Como 6 é um múltiplo de 2, temos que 6 é par e, portanto, 6 multiplicado por qualquer número resulta em um número par, logo, dentre as alternativas 2, 3, 4, 5, 6 e 7, $P = 2$ ou $P = 4$. Porém, para P ser igual a 4, B , dentre as opções acima, deveria ser igual a 4 também, logo, $P = 2$. Como $P = 2$, $B = 7$, pois é a única opção cujo resultado do produto por 6 tem o algarismo da unidade igual a 2, ou seja, 42. O produto de 6 por O também deve ser par e como foram 4 unidades para ordem das dezenas, $E = 4$ e o produto de 6 por O resulta em um número que termina em 0, tendo o 5 como única opção, logo, $O = 5$, restando apenas o número 3, logo, $M = 3$. Temos então:

$O = 5$, $B = 7$, $P = 2$, $E = 4$ e $M = 3$, alternativa D.

Múltiplos comuns

Um número c é múltiplo comum de dois números inteiros a e b se, $a|c$ e $b|c$ e denotaremos por $MC(a, b) = c$.

Exemplo 2.5: Vamos determinar os múltiplos comuns de 3 e 6.

Temos:

$$M_3 = \{ 3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots \}.$$

$$M_6 = \{ 6, 12, 18, 24, 30, 36, \dots \}$$

$$\text{Onde } MC_{3,6} = \{ 6, 12, 18, 24, 30, \dots \}.$$

Mínimo múltiplo comum - M.M.C.

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, temos que $M_a \cap M_b \neq \emptyset$, pois $|a \cdot b| \in M_a \cap M_b$. Tendo em vista que o conjunto $\mathbb{N}$ é bem ordenado, $M_a \cap M_b$ possui um elemento mínimo, chamado de mínimo múltiplo comum (m.m.c.) de a e b , o qual denotaremos por $MMC_{a,b}$ ou ainda $[a, b]$.

Exemplo 2.6: Vamos encontrar o $MMC_{3,6}$.

Inicialmente encontramos os múltiplos comuns de 3 e 6.

Onde $MC_{3,6} = \{ 6, 12, 18, 24, 30, \dots \}$, onde:

$$MMC_{3,6} = [3, 6] = 6$$

2.5.4 Os números primos

Um número p que não admita outro divisor a não ser ele próprio e a unidade é dito primo se ele for um número natural maior do que 1. Em outras palavras, um número primo só é divisível por si e pela unidade. Assim, por exemplo, o número 5 é um número primo, pois só é divisível por 5 e por 1. O número 2 é o único número par que é primo. Pode se provar que o conjunto dos números primos é infinito.

São números primos: $\{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots \}$

Os números primos não podem ser decompostos em um produto de fatores menores do que eles.

Teorema fundamental da aritmética

Todo número natural que não é primo é composto, ou seja, pode ser decomposto em um produto de fatores primos.

Exemplos 2.7:

1. $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$
2. $135 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
3. $300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$

Decomposição em fatores primos ou fatoração

Para decompor um número em fatores primos, o dividimos sucessivamente por números primos, do menor para o maior, até obter o quociente igual a 1.

Exemplo 2.8:

Vamos decompor 600 em fatores primos.

Normalmente separamos por uma barra vertical o número a ser decomposto dos números primos que serão obtidos nas sucessivas divisões.

Figura 2.18: Decomposição em fatores primos.

600	 	2	
300	 	2	
150	 	2	
75	 	3	
25	 	5	
5	 	5	Logo,
1	 		$600 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$
			$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$

Uma outra forma de calcular o MMC entre dois números a e b é fazer a decomposição simultânea de a e b .

Exemplo 2.9: Vamos calcular o $MMC_{(12,18)}$.

Figura 2.19: Cálculo do MMC.

$$\begin{array}{r|l}
 12, 18 & 2 \\
 6 & 2 \\
 3 & 3 \\
 1 & 3 \\
 1 & 3 \\
 \hline
 & 36
 \end{array}
 \quad \text{logo, o MMC}_{(12,18)} = 36.$$

$\uparrow$
 $2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$

Considerações finais sobre o conjunto $\mathbb{N}$

O conjunto dos números naturais e alguns de seus subconjuntos: pares, ímpares e dos múltiplos de um número ajudam na compreensão de Progressão Aritmética (P. A.).

Exemplo 2.10:

1. O conjunto dos números naturais é uma P. A. de razão $r = 1$ e $a_1 = 1$;
2. O conjunto dos números ímpares é uma P. A. de razão $r = 2$ e $a_1 = 1$;
3. O conjunto dos números pares é uma P. A. de razão $r = 2$ e $a_1 = 2$;
4. O conjunto dos múltiplos de 3 é uma P. A. de razão $r = 3$ e $a_1 = 3$.

As operações de subtração e divisão não são fechadas no conjunto dos $\mathbb{N}$, ou seja:

Dados $a, b \in \mathbb{N}$, com $b > a$, temos que $\exists c, d$ tal que:

- i) $a - b = c$, onde $c \notin \mathbb{N}$;
- ii) $a : b = d$, onde $d \notin \mathbb{N}$.

Exemplos 2.11:

- 1) $5 - (+8) = -3$, observe que $-3 \notin \mathbb{N}$.
- 2) $3 : 5 = 0,6$, observe que $0,6 \notin \mathbb{N}$.

O fato da subtração e da divisão não serem operações fechadas em $\mathbb{N}$, deu surgimento a outros dois conjuntos, o Conjunto dos Números Inteiros e o Conjunto dos Números Racionais.

O hotel de Hilbert

O hotel de Hilbert é um hotel hipotético com infinitos quartos, com infinitos hóspedes, isto é, todos os quartos contêm um hóspede.

1) Suponha que um novo hóspede chega e gostaria de se acomodar no hotel.

Se o hotel tivesse um número finito de quartos, então não teria vaga para o novo hóspede, mas como o hotel possui um número infinito de quartos.

O gerente comunica aos hóspedes que mudem para o quarto cujo número seja uma unidade a mais do número do quarto em que se encontram, desta forma, move-se o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, o hóspede do quarto 2 para o quarto 3 e assim por diante (simultaneamente), movendo o hóspede do quarto n para o quarto $n + 1$, ou seja, de um quarto para o quarto cujo número seja o seu sucessor e, como o número 1 não é sucessor de nenhum número natural, podemos acomodar o novo hóspede no quarto 1, que agora está vago.

2) Suponha a chegada um grupo de n pessoas para se hospedar no hotel.

O gerente comunica aos hóspedes que mudem para o quarto cujo número seja n unidades a mais do quarto em que se encontram, desta forma move-se o hóspede do quarto 1 para o quarto $n + 1$, o hóspede do quarto 2 para o quarto $n + 2$ e assim por diante (simultaneamente), podemos acomodar os novos n hóspedes nos quartos de 1 a n , que agora estão vagos.

3) Suponha a chegada de um ônibus com infinitos assentos e com infinitos passageiros para se hospedar no hotel.

O gerente deverá, inicialmente, desocupar os quartos para que os infinitos passageiros do ônibus ocupem seus lugares no hotel. O gerente comunica aos hóspedes que mudem para o quarto cujo número seja o dobro do número dos quartos que estão ocupando, ou seja, os quartos da forma $2n$, logo, ficarão ocupados apenas os quartos pares, desta forma move-se o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, o hóspede do quarto 2 para o quarto 4 e assim por diante (simultaneamente), podemos acomodar os novos n hóspedes nos quartos ímpares, bastando solicitar que os passageiros do ônibus ocupem os quartos da forma $2n - 1$ ou $2n + 1$, onde n é o número do assento de cada passageiro.

4) Suponha a chegada de um número infinito de ônibus com infinitos passageiros para se hospedar no hotel.

O gerente primeiro esvaziará os quartos ímpares como acima, então irá colocar os

passageiros do primeiro ônibus nos quartos 3^n para $n = 1, 2, 3, \dots$, desta forma, o passageiro do 1º assento do 1º ônibus irá ocupar o quarto de número $3^1 = 3$, o 2º passageiro irá ocupar o quarto de número $3^2 = 9$, e assim por diante; Os passageiros do segundo ônibus serão colocados nos quartos 5^n para $n = 1, 2, \dots$ e assim por diante; Para o ônibus de número i usamos os quartos de número p^n onde p é o $(i + 1)$ – ésimo número primo.

Não existe a possibilidade de 2 passageiros irem para o mesmo quarto. Vamos supor, por absurdo que exista essa possibilidade.

Consideremos um passageiro qualquer do 1º ônibus, temos este irá o quarto cujo número é da forma 3^n e consideremos um passageiro qualquer do 2º ônibus, que irá ocupar um quarto cujo número será da forma 5^m , se estes ocuparem o mesmo quarto teremos que $3^n = 5^m$, como 3^n é divisível por 3 então 5^m seria divisível por 3 e 5 seria divisível por 3, o que é uma contradição.

O problema do hotel de Hilbert aborda uma grande quantidade de conteúdos de matemática, dentre eles:

Conjunto dos números naturais, conjuntos finitos e infinitos, números pares e números ímpares, números primos, fatoração, teorema fundamental da aritmética, múltiplos e divisores de um número, potências, funções, sequências e progressões, além das quatro operações fundamentais.

3 Conjunto dos números inteiros

O desenvolvimento das atividades mercantis no final da idade média na Europa, resultou na necessidade de operar com números inteiros negativos, outrora visto com desconfiança pelos matemáticos. Surgiam então as operações com números negativos. O conjunto dos números inteiros tem como símbolo a letra $\mathbb{Z}$ e compreende os números negativos, o zero (considerado neutro) e os números positivos que por sua vez são os números naturais, de onde podemos afirmar que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Dado o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$, para todo número natural $n \neq 0$, consideramos o símbolo $-n$. Definimos: Para todo número natural $n \neq 0$, o número $-n$ é denominado oposto de n .

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \dots \}$$

Para tornar possível a operação do tipo 3-3 foi criado um novo número, que é o zero. Assim, diante de cada nova impossibilidade de operar, criam-se novos números. Já sabemos fazer a subtração 5-3, mas a subtração 3-5 não sabemos fazer ainda, ou, em outras palavras, no conjunto dos inteiros não negativos a operação 3-5 não tem significado. Examinemos o significado de 5-3, tal diferença é igual a 2 porque $5 = 3+2$. Em outras palavras, efetuar a diferença é procurar um outro número que somado com três dê cinco. Se fizermos o mesmo raciocínio para 3-5, diremos que devemos procurar um número que somado com 5 dê 3. Como no conjunto $\mathbb{Z}_+$ não existe nenhum número nessas condições, sentimos a necessidade de criação de novos números, que são conhecidos por "números inteiros negativos".

3.1 Subconjuntos de $\mathbb{Z}$

3.1.1 Subconjunto dos números inteiros, com exceção do zero

$$\mathbb{Z}^* = \{ \dots, -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; \dots \}$$

3.1.2 Subconjunto dos números inteiros não negativos

$$\mathbb{Z}_+ = \{ 0; 1; 2; 3; 4; \dots \}$$

3.1.3 Subconjunto dos números inteiros não negativos, com exceção do zero

$$\mathbb{Z}_+^* = \{ 1; 2; 3; 4; \dots \}$$

3.1.4 Subconjunto dos números inteiros não positivos

$$\mathbb{Z}_- = \{ \dots, -4, -3, -2, -1, 0 \}$$

3.1.5 Subconjunto dos números inteiros não positivos, com exceção do zero

$$\mathbb{Z}_-^* = \{ \dots, -4, -3, -2, -1 \}$$

Família de diferenças

Uma noção que intervém na criação dos "inteiros negativos" é a de família de diferenças, que veremos a seguir.

As diferenças 5-3, 4-2 e 7-5 ... etc. fornecem o mesmo resultado, que é o número 2. Então diremos que tais diferenças formam uma mesma família. Para indicar uma família de diferenças usaremos um de seus membros colocado entre colchetes. Assim, com [5-3] estamos representando não somente 5-3, mas sim, todas as iguais a ela. Assim, com $[a-b]$ estamos representando a família de todas as diferenças iguais a $a-b$. Por exemplo, 7-3 à família de [5-1] porque $5+3 = 7+1$.

De uma maneira geral, a diferença $y-x$ pertence a família $[a-b]$ se $a+x = b+y$.

A cada par de família $[a-b]$ e $[c-d]$ iremos definir a adição da seguinte maneira:

$$[a-b] + [c-d] = [(a+c) - (b+d)],$$

Assim, $[5-3] + [7-1] = [(5+7) - (3+1)] = [12-4]$.

Famílias do tipo $[a - 0]$

Vejamos o comportamento de $[a - 0]$ e $[b - 0]$ em relação às operações de adição:
 $[a - 0] + [b - 0] = [(a + b) - (0 + 0)] = [(a + b) - 0]$

Notamos que $[a - 0]$ faz o papel de a e $[b - 0]$ faz o papel de b , ou seja $[a - 0] \iff a$.

Todo número que pertence a família $[a - 0]$ recebe o nome de inteiro positivo. De maneira geral, $a - b$ é um número inteiro positivo quando $a > b$.

Famílias do tipo $[a - a]$

Um caso particular é a família do tipo $[a - a]$. Todo elemento x desta família desempenha o papel do número zero. Com efeito:

$$[c - d] + [a - a] = [(c + a) - (d + a)] = [c - d]$$

Como vemos, a família do tipo $[a - a]$ corresponde ao número $(a - a)$, que é o elemento neutro da adição, $[a - a] \iff 0$.

Famílias do tipo $[0 - a]$

Um elemento pertencente a família do tipo $[0 - a]$ tem um comportamento totalmente novo. Com efeito, façamos a adição de $[a - 0]$ com $[0 - a]$,

$$[a - 0] + [0 - a] = [(a + 0) - (0 + a)] = [a - a]$$

Como $a - a$ é o elemento neutro da adição concluímos que $[0 - a]$ é o inverso de $[a - 0]$ com relação a adição.

Sendo a número natural, a todo elemento da família $[0 - a]$ chamaremos de **número negativo**, que indicaremos por $-a$, $[0 - a] \iff -a$.

De uma maneira geral, se $[a - b]$ é uma família de números inteiros positivos, a família $[b - a]$ será chamada de família de inteiros negativos, pois

$$[a - b] + [b - a] = [(a + b) - (b + a)] = \text{elemento neutro da adição.}$$

Simétrico

Seja $x = (a - b)$ um número inteiro.

Chamamos de simétrico de x e indicamos por x' o número $(b - a)$.

Exemplos 3.1:

1º) O simétrico de $x = (5 - 0)$ é $x' = (0 - 5)$

2º) Se $y = (2 - 3)$, $y' = (3 - 2)$

O simétrico de x é o seu elemento inverso com relação à adição de números inteiros.

Realmente: $x + x' = (a - b) + (b - a) = [a + b] - (a + b) = (0 - 0)$.

3.1.6 Subtração

A subtração pode ser definida como a operação inversa da adição.

Sejam $x = (a - b)$ e $y = (c - d)$, inteiros quaisquer, chamaremos de diferença entre x e y e indicamos por $x - y$ a soma de x com o simétrico de y , isto é,

$$x - y = x + y' = (a - b) + (d - c)$$

ou

$$(a - b) - (c - d) = (a + d) - (b + c)$$

Consequência: A subtração de dois números inteiros existe mesmo quando o minuendo seja maior do que o subtraendo.

Exemplo 3.2:

a) $3 - 5 =$

Seja $3 = [3 - 0]$ e $5 = [8 - 3]$, pela definição de subtração temos:

$$3 - 5 = [(3 - 0) - (8 - 3)]$$

$$3 - 5 = [(3 - 0) - (5 + 3 - 3)]$$

$$3 - 5 = [(3 - 0) - (5 - 3 + 3)]$$

$$3 - 5 = [(3 - 0) - (2 + 3)]$$

$$3 - 5 = (3 - 3) + (-0 - 2)$$

$$3 - 5 = 0 + (-2)$$

$$3 - 5 = -2$$

Desta forma podemos subtrair dois números inteiros colocando o maior deles no minuendo e o menor deles no subtraendo, sem levar em conta o sinal, prevalecendo no resultado o sinal do minuendo.

Exemplo 3.3:

$$a) 235 - 596 =$$

$$\begin{array}{r} 596 \\ - 235 \\ \hline - 361 \end{array}$$

O comportamento do zero - Elemento neutro

O zero com relação a adição e a multiplicação se comporta segundo às seguintes regras:

$$1. a + 0 = 0 + a = a$$

Qualquer $a \in \mathbb{Z}$ adicionado ao zero é igual a próprio número a .

$$2. 0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$$

Qualquer $a \in \mathbb{Z}$ multiplicado por zero é igual a zero.

As operações de adição e subtração são bem definidas no conjunto dos números inteiros e tem como propriedades:

1) Propriedade Comutativa:

Para todos $a, b \in \mathbb{Z}$, $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$.

2) Propriedade Associativa:

Para todos $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$ e $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

3) Propriedade Distributiva:

Para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tem-se, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

4) Elemento Neutro:

Para todo $a \in \mathbb{Z}$, $a + 0 = a$ e $a \cdot 1 = a$.

5) Elementos Simétricos:

Para todo $a \in \mathbb{Z}$, existe um único $b \in \mathbb{Z}$ tal que $a + b = 0$.

Demonstração:

Seja: $b = (-a)$, somando-se (a) em ambos os lados da igualdade,

temos: $b + a = -a + a$

Onde: $b + a = 0$

Temos como consequência desse axioma que: $a \cdot 0 = 0$ para todo a .

Demonstração:

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0)$$

$a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$, somando $a \cdot 0$ em ambos os lados da igualdade temos:

$$-(a \cdot 0) + a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0 - (a \cdot 0)$$

$$0 = a \cdot 0.$$

Vimos no capítulo sobre números naturais que a soma e o produto de dois números naturais é um número natural, ou seja, a soma e o produto de dois números positivos resulta sempre um número positivo. No conjunto dos números inteiros veremos que o produto de dois números negativos e o produto de um número negativo por um número positivo obedecem às chamadas "regras de sinais".

Regra de sinais

1. O produto de dois números positivos é sempre positivo;

Consequência do conjunto dos números naturais.

2. O produto de um número positivo por um número negativo é sempre negativo;

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.

Demonstração:

Vamos inicialmente mostrar que: $(-a) = (-1) \cdot a$

Temos que: $a + (-a) = 0$

Onde: $a + (-a) = 0 \cdot a$

Fazendo: $a + (-a) = ((-1) + 1) \cdot a$

Temos: $a + (-a) = (-1) \cdot a + a$, somando-se $-a$ em ambos os lados da igualdade, temos: $-a + a + (-a) = (-1) \cdot a + a - a$

logo: $(-a) = (-1) \cdot a$

Agora que sabemos que $(-a) = (-1) \cdot a$, vamos multiplicar ambos os lados da igualdade por b , onde: $(-a) \cdot b = ((-1) \cdot a) \cdot b$

Daí temos: $(-a) \cdot b = (-1) \cdot (a \cdot b)$

Logo: $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

3. O produto de dois números negativos é sempre positivo;

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Demonstração:

Vamos inicialmente mostrar que: $(-1) \cdot (-1) = 1$

Temos que: $1 + (-1) = 0$

Multiplicando-se ambos os lados da igualdade por -1 ,

Temos: $(-1) \cdot (1 + (-1)) = 0 \cdot (-1)$

onde: $(-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 0$

Como $(-1) \cdot 1 = -1$, temos: $-1 + (-1) \cdot (-1) = 0$

Somando-se $+1$ em ambos os lados da igualdade,

Temos: $+1 - 1 + (-1) \cdot (-1) = 0 + 1$

Logo: $(-1) \cdot (-1) = 1$

Temos que: $(-a) = (-1) \cdot a$

Vamos multiplicar ambos os lados da igualdade por $-b$

Onde: $(-a) \cdot (-b) = (-1) \cdot a \cdot (-b)$

Sabemos que $(-b) = (-1) \cdot b$, logo: $(-a) \cdot (-b) = (-1) \cdot a \cdot (-1) \cdot b$

Onde: $(-a) \cdot (-b) = (-1) \cdot (-1) \cdot a \cdot b$

logo, como $(-1) \cdot (-1) = 1$, temos que: $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Exemplo 3.4 - OBMEP

OBMEP 2017 - 1ª FASE - NÍVEL 2

4. Na sequência 1, 5, 4, -1, -5, ... cada termo, a partir do segundo, é igual à soma de seus dois vizinhos; por exemplo: $5 = 1 + 4$, $4 = 5 + (-1)$ e $-1 = 4 + (-5)$. Qual é a soma dos 1000 primeiros termos dessa sequência?

- A) 0
- B) 1
- C) 4
- D) 9
- E) 10

Solução:

Os 6 primeiros termos da sequência se repetem e sua soma é sempre igual a zero:

$$1 + 5 + 4 + (-1) + (-5) + (-4) = 0$$

Como são 1000 termos, estes se repetirão $1000 : 6 = 166$ vezes, totalizando 996 termos, repetindo ainda uma vez a sequência 1, 5, 4, -1, que somados resulta:

$$1 + 5 + 4 + (-1) = 9, \text{ alternativa D.}$$

4 Conjunto dos números racionais

No Egito antigo o imposto era cobrado sobre a porção inteira do terreno que era cedido para ser utilizado para plantações ou criação de animais. Porém as cheias do Rio Nilo inundavam parte do terreno e o imposto passava a ser cobrado sobre a parte do terreno não inundada. Se o tamanho da parte inundada fosse igual ao tamanho da parte não inundada, cada uma dessas partes é o que chamamos de metade do terreno. Neste caso o imposto que era pago era dividido em 2 partes de valores iguais e cada parte chama-se metade do imposto. Esta parte do terreno inundada é chamada de uma fração do terreno igual a fração metade, ou fração $\frac{1}{2}$.

Por exemplo, se a área do terreno é $300m^2$ e teve a metade inundado, se o proprietário pagasse um valor equivalente hoje a 20 reais, ele passava a pagar 10 reais. Indicamos este por $\frac{1}{2}$, lê-se metade ou um meio, ou ainda, 1 dividido por 2.

Da mesma forma, o terreno tendo 2 partes inundadas e 1 parte não inundada, indicamos neste caso por $\frac{1}{3}$, lê-se a terça parte de um inteiro ou um terço, ou ainda, 1 dividido por 3.

Os egípcios, há mais de três mil anos atrás, utilizavam frações somente com numerador 1, que era representado, conforme o sistema de numeração da época:

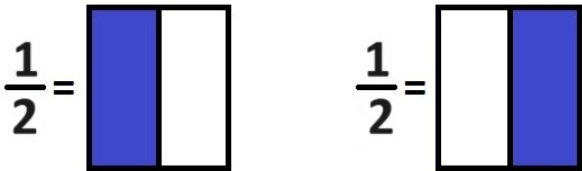
Figura 4.1: Frações egípcias

ESCRITA EGÍPCIA	NOSSA ESCRITA
	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{12}$
	$\frac{1}{21}$

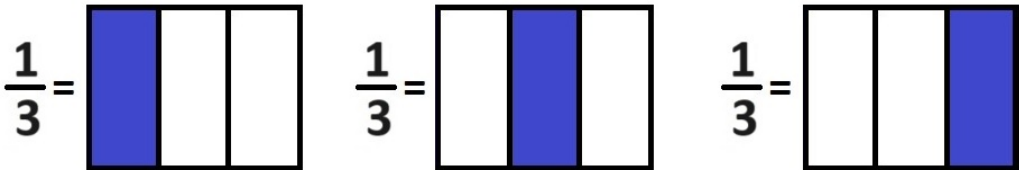
4.1 Frações

4.2 Fração de numerador 1

Exemplo 4.1:



Exemplo 4.2:



Exemplo 4.3:



Em geral podemos ter:

$$\frac{1}{n} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{blue} & & & \dots & & & \\ \hline \end{array}$$

← n partes →

4.3 Fração com qualquer numerador

Exemplo 4.4:

$$\frac{2}{3} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{blue} & \text{blue} & \\ \hline \end{array}$$

$\frac{2}{3}$ é o mesmo que 2 partes de $\frac{1}{3}$, ou ainda escrevemos $\frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3}$

Exemplo 4.5:

A figura abaixo representa um retângulo dividido em 5 partes iguais. Cada parte representa $\frac{1}{5}$ do retângulo. A parte pintada representa 2 partes de $\frac{1}{5}$. Indicamos por $\frac{2}{5}$, assim $\frac{2}{5} = 2$ partes de $\frac{1}{5}$, ou seja, $\frac{2}{5} = 2 \cdot \frac{1}{5}$.

$$\frac{2}{5} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \text{blue} & \text{blue} & & & \\ \hline \end{array}$$

$\frac{1}{5} \quad \frac{1}{5}$

Os egípcios, para representar, por exemplo, $\frac{3}{5}$, faziam:

$\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{5}$, ou seja, $\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 3 \cdot \frac{1}{5}$.

Como faziam para representar $\frac{7}{12}$?

Primeiro descobriam quais eram os divisores do denominador, neste caso 12, que são 1, 2, 3, 4, 6 e 12, depois escreviam o numerador como a combinação desses divisores, ou seja: $7 = 6 + 1$. Depois colocavam o mesmo denominador da fração em cada um dos

números da combinação, ficando:

$$\frac{7}{12} = \frac{6}{12} + \frac{1}{12}, \text{ ou seja: } \frac{7}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}.$$

Como faziam para representar $\frac{5}{3}$?

Primeiro descobriam quais eram os divisores do denominador, neste caso 3, que são 1 e 3, depois escreviam o numerador como a combinação desses divisores, ou seja:

$$5 = 1 + 1 + 3$$

Depois colocavam o mesmo denominador da fração em cada um dos números da combinação, ficando:

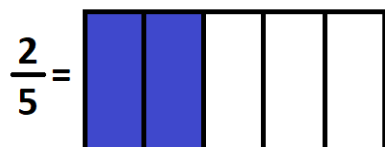
$$\frac{5}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{3}{3}.$$

O Conjunto dos números racionais, denotado por $\mathbb{Q}$, é formado por números que podem ser representados na forma de uma divisão entre dois números inteiros, conhecida como: “forma fracionária”. O primeiro destes números, chamado de numerador, representa a quantidade a ser considerada em relação a quantidade total que é o segundo número, chamado de denominador, conforme notação abaixo:

$$\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\}, \text{ onde } a \text{ e } b \text{ são primos entre si.}$$

O número $\frac{2}{5}$ é a razão entre os números 2 e 5 e também pode ser indicado por 2:5 ou 2/5. As frações hoje em dia, além de ter uma escrita mais fácil, podem ser representadas por meio de desenhos.

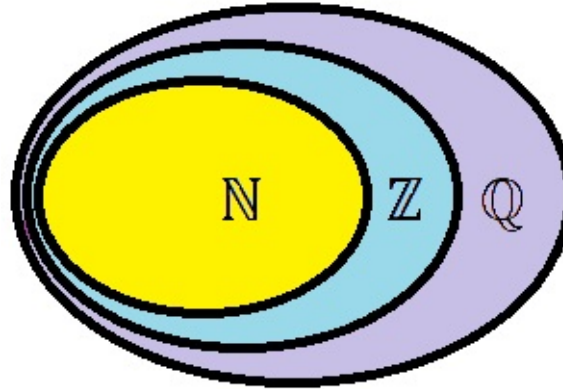
Exemplo:



O denominador 5 indica a quantidade de partes em que a figura foi dividida e o numerador 2 indica a quantidade de partes da figura pintada, neste caso, de azul.

O conjunto dos números inteiros está contido no conjunto dos números racionais. Vimos anteriormente que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, logo temos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Figura 4.2: Conjuntos



Exemplos 4.6:

a) $3 = \frac{6}{2}$, $3 \in \mathbb{N}$ e pode ser representado pela fração $\frac{6}{2}$, logo, $3 \in \mathbb{Q}$;

b) $-5 = \frac{-15}{3}$, $-5 \in \mathbb{Z}$ e pode ser representado pela fração $\frac{-15}{3}$, logo, $-5 \in \mathbb{Q}$.

4.4 Tipos de frações

As frações podem ser classificadas em Própria, Imprópria ou Aparente.

4.4.1 Fração própria

Uma fração $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ é dita fração própria se $a < b$, ou seja, o numerador é menor do que o denominador.

Exemplo 4.7:

$\frac{1}{3}$ é uma fração própria, pois o numerador (1) é menor do que denominador (3).

Figura 4.3: Fração própria



4.4.2 Fração imprópria

Uma fração $\frac{a}{b}$ é dita fração imprópria se $a > b$, ou seja, o numerador é maior do que o denominador.

Exemplo 4.8:

$\frac{7}{4}$ é uma fração imprópria, pois o numerador (7) é maior do que denominador (4).

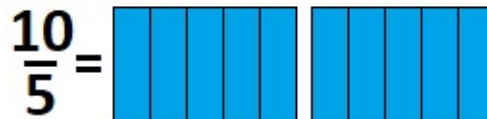
Figura 4.4: Fração imprópria



4.4.3 Fração aparente

Uma fração $\frac{a}{b}$ é dita fração aparente se $\frac{a}{b} = c$, onde c é um número inteiro, ou seja, o numerador é múltiplo do denominador. Exemplo: $\frac{10}{5} = 2$.

Figura 4.5: Fração aparente



4.4.4 Número misto

Uma fração também pode ser representada de uma forma chamada "NÚMERO MISTO", onde pode ser representada por um número inteiro e outra fração própria, isso acontece com as frações impróprias:

Exemplo 4.9:

$$\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$$

Figura 4.6: Fração número misto

$$\frac{5}{3} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \text{blue} & \text{blue} & \text{blue} & \text{blue} & \text{white} \\ \hline \end{array} = 1 + \frac{2}{3}$$

A representação pode ser feita da seguinte forma: $\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$.

Para escrever uma fração imprópria na forma de número misto basta fazermos a divisão utilizando o algoritmo da divisão de Euclides. No caso do exemplo acima teríamos:

Figura 4.7: Algoritmo de Euclides

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 3} \\ \underline{-3} \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \textbf{Algoritmo de Euclides} \\ D = d.q + r \\ 5 = 3.1 + 2 \\ \boxed{\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}} \end{array}$$

Simplificação de frações

Simplificar uma fração consiste em dividir, simultaneamente, o numerador e o denominador por um mesmo número.

Exemplos 4.10:

- 1) $\frac{6^2}{4^2} = \frac{3}{2}$, neste caso, o numerador e o denominador foram divididos por 2.
- 2) $\frac{12^3}{18^3} = \frac{4}{6}$, neste caso, o numerador e o denominador foram divididos por 3.

Fração irredutível

Uma fração é irredutível quando o seu numerador e o seu denominador não tem fatores comuns, ou seja, quando não é mais possível simplificá-la.

Exemplos 4.11:

- 1) $\frac{3}{5}$ é uma fração irredutível, pois 3 e 5 não possuem fatores em comum;
- 2) $\frac{7}{2}$ é uma fração irredutível, pois 7 e 2 não possuem fatores em comum.

Frações equivalentes

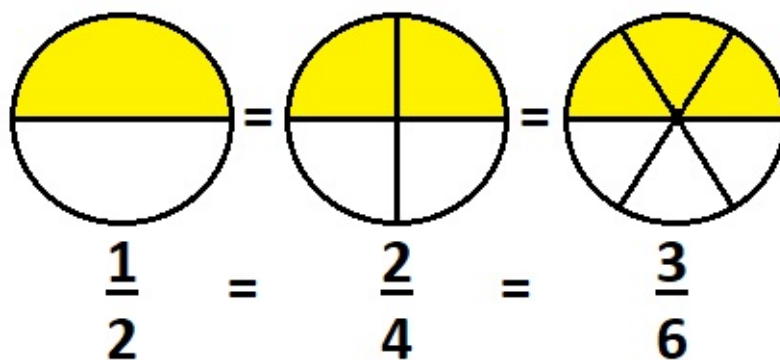
São frações que tem a mesma fração irredutível, ou ainda, que representam a mesma parte do inteiro.

Exemplo 4.12:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

O exemplo acima pode ser interpretado como o de 3 pessoas: João, Maria e Pedro que vão a uma pizzeria e pedem cada uma pizza de tamanhos iguais porém, cortadas de formas diferentes. João come $\frac{1}{2}$ da sua pizza, Maria come $\frac{2}{4}$ da sua pizza e Pedro come $\frac{3}{6}$ da sua pizza. Apesar das frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{6}$ serem diferentes, estas representam a mesma quantidade, ou seja, cada um comeu metade de suas pizzas, conforme ilustração abaixo.

Figura 4.8: Frações equivalentes



Um número racional pode também ter, em sua representação, a presença da vírgula (,) com uma quantidade finita de algarismos, chamado de número decimal e com uma quantidade infinita, chamada de dízima periódica. Para o caso de caso de dízima periódica é necessário que o número tenha uma periodicidade no(s) último(s) algarismo(s), ou seja, um comportamento repetitivo.

4.5 História das frações

O conhecimento das frações remonta a antiguidade, por volta de 3000 a.C.. Segundo a estória, o faraó Sesóstris, no Egito, distribuiu terra para famílias que tinham condições para utilizá-las, principalmente, para fins de plantio e criação de animais, porém, as periódicas cheias do Rio Nilo alagavam os terrenos em sua margem, comprometendo assim a sua utilização ou parte dela, apesar de sua fertilização, o que não justificava o pagamento de impostos ao faraó em troca da cessão destes terrenos. Pensou então em medir o tamanho destes terrenos com a utilização de cordas e, de acordo com essa medida, o pagamento do imposto devido a parte que podia ser utilizada. Adotou à época uma medida padrão da corta que, por sua vez, era colocada uma quantidade de vezes ao redor de cada terreno, possibilitando assim a sua medição, porém haviam terrenos que sobravam uma parte a ser medida que tinha medida inferior a da corda utilizada na época. Existia aí um problema de medida, pensou-se então em, utilizando esta corda, medir esse pedaço e depois comparar quantas dessas partes constituiriam essa corda inteira, daí essa mediada era representada pela unidade, que era a medida de uma corda e por um outro número que era a quantidade de vezes que o tamanho encontrado era necessário para cobrir toda a corda ou ainda, o tamanho insuficiente para cobrir a corda.

A notação atual das frações foi criada pelos hindus e aperfeiçoada pelos árabes, introduzindo uma barra horizontal entre os dois números da fração.

Há também registros do uso de frações pelos babilônicos que, pelo do sistema de base 60, utilizavam frações com denominadores iguais a 60, onde eram utilizados principalmente na medidas de tempo: segundos e minutos, o qual utilizamos no dias atuais.

4.6 Divisores

4.6.1 Divisão euclidiana

Sejam a e b dois números inteiros com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que:

$$a = b \cdot q + r, \text{ com } 0 \leq r < b.$$

A expressão acima é conhecida como algoritmo da divisão, como foi visto no algoritmo da divisão no conjunto dos números naturais a é chamado de dividendo, b é chamado de divisor e q e r são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de a por b .

Exemplo 4.13:

Na divisão de 17 por 5 temos:

$$17 = 5 \cdot 3 + 2, \text{ observe que } 2 \text{ é o resto e } 0 \leq 2 < 5.$$

Se a e b são números inteiros, então, b é divisor de a sempre que a for múltiplo de b . O conjunto dos divisores de a é formado pelos números inteiros que dividem a e cuja divisão seja exata, indicaremos aqui por D_a esse conjunto.

Exemplo 4.14:

Seja $a = 8$, o conjunto dos divisores de 8 será:

$$D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$$

Dica: Sabendo que um número é divisor de si próprio, na ordem crescente dos divisores de um número, o seu penúltimo divisor será, no máximo, a sua metade.

4.6.2 Critérios de divisibilidade

Seja a um número representado no sistema decimal, onde $a = (a_n \cdot 10^n) + (a_{n-1} \cdot 10^{n-1}) + \dots + (a_1 \cdot 10) + a_0$, ou seja, $a = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \in \mathbb{N}$, onde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ e a_0 são dígitos de a , então,

1. a é divisível por 2, se e somente se, a for um número par;
2. a é divisível por 4, se e somente se, a_1 e a_0 forem iguais a 0 ou $a_1 a_0$ for divisível por 4;
3. a é divisível por 8, se e somente se, a_2, a_1 e a_0 forem iguais a 0 ou se $a_2 a_1 a_0$ for divisível por 8;
4. a é divisível por 3, se e somente se, $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ for divisível por 3, ou seja, a soma dos seus dígitos for divisível por 3;
5. a é divisível por 9, se e somente se, $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ for divisível por 9, ou seja, a soma dos seus dígitos for divisível por 9;
6. a é divisível por 5, se e somente se, a_0 for igual a zero ou 5;
7. a é divisível por 6, quando a for divisível por 2 e 3.

As demonstrações dos critérios de divisibilidade podem ser encontradas no livro **Elementos de Aritmética**, de Abramo Hefez.

4.6.3 Divisores comuns

Sejam dados dois números inteiros a e b . Um número inteiro d será dito um divisor comum de a e b se $d|a$ e $d|b$. Vamos indicar por $DC_{(a,b)}$ o conjunto dos divisores comuns de a e b .

Exemplo 4.15:

Quais são os divisores comuns dos números 8 e 12?

Inicialmente iremos encontrar o conjunto dos divisores de 8 e depois o conjunto dos divisores de 12.

$$D_8 = \{2, 4, 8\}$$

$$D_{12} = \{2, 3, 4, 6, 12\}, \text{ logo:}$$

$$DC_{(8,12)} = \{2, 4\}$$

4.6.4 Máximo divisor comum - MDC

Diremos que um número inteiro $d \geq 0$ é um máximo divisor comum (mdc) de a e b , se possuir as seguintes propriedades:

- i) d é um divisor comum de a e b , e
- ii) d é divisível por todo divisor comum de a e b .

A condição ii acima pode ser enunciada da seguinte maneira: Se c é um divisor comum de a e b , então $c|d$. O mdc de dois números a e b será denotado por (a, b) .

Temos então que $(8, 12) = 4$.

Proposição 4.1

1. Se a é múltiplo de b , então $(a, b) = b$.

Demonstração:

Como a é múltiplo de b , todo divisor de b também é divisor de a , onde, o conjunto de divisores comuns de a e b é igual, e como b é o maior divisor dele mesmo, teremos que $(a, b) = b$.

Teorema de Bachet-Bézout

Se d é o mdc de a e b , então existem números inteiros x_0 e y_0 tais que $d = (a, b) = a \cdot x_0 + b \cdot y_0$.

Demonstração:

Considere o conjunto $C_{ab} = (a \cdot x + b \cdot y)$, $x, y \in \mathbb{Z}$ que percorre todos os números inteiros, inclusive o 0. Seja $m = a \cdot x_0 + b \cdot y_0$ o menor número inteiro pertencente a C_{ab} (princípio da boa ordenação). Vamos mostrar que $m|a$ e que $m|b$. Utilizaremos o método da redução ao absurdo, vamos supor que $m \nmid a$.

Pela divisão euclidiana, temos,

$$a = m \cdot q + r, \quad m, r \in \mathbb{Z}, \text{ com } 0 < r < m, \text{ onde temos,}$$

$$r = a - m \cdot q$$

$$r = a - (ax_0 + by_0) \cdot q$$

$$r = a - q \cdot ax_0 - q \cdot by_0$$

$$r = a \cdot (1 - qx_0) - b \cdot (qy_0)$$

Desta forma $r \in C_{a,b}$, o que contradiz a hipótese de m ser o menor elemento positivo do conjunto $C_{a,b}$, logo, $m|a$. De modo análogo $m|b$. Vamos provar agora que $m = d$. Com efeito, desde que $d = (a, b)$, podemos escrever $a = d \cdot a_1$, $b = d \cdot b_1$ e

$$m = a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = d \cdot (a_1 \cdot x_0 + b_1 \cdot y_0).$$

Assim, $d|m$, concluímos que $d \leq m$, porém $d < m$ é impossível pois $d = \text{mdc}(a, b)$, e portanto $d = m = a \cdot x_0 + b \cdot y_0$.

Proposições 4.2

1. Se $d|a$ e $d|b$, então $d|(a, b)$;

2. O mdc (a, b) é o menor valor positivo de $a \cdot x + b \cdot y$, onde x e y percorrem todos os números inteiros;
3. $(ma, mb) = m(a, b)$;
4. Se $d|a$ e $d|b$, então $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{1}{d} \cdot (a, b)$. Consequentemente, $\left(\frac{a}{(a, b)}, \frac{b}{(a, b)}\right) = 1$;
5. Se $(a, c) = (b, c) = 1$, então $(ab, c) = 1$;
6. Se $c|ab$ e $(b, c) = 1$, então $c|a$.

4.7 Operações com frações

4.7.1 Adição e subtração

Na adição e subtração de frações temos dois casos:

1. Denominadores iguais

Vamos representar a fração $\frac{5}{2}$. Sabemos que $\frac{5}{2}$ é igual a 5 vezes de $\frac{1}{2}$.

Figura 4.9: Adição de frações com denominadores iguais



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

O denominador 2 se manteve enquanto o numerador 5 é o resultado da soma dos numeradores das frações da adição. Podemos concluir então que, na adição e/ou subtração de frações com numeradores iguais resolve-se o numerador, somando ou subtraindo, conforme o caso, e repete-se o denominador.

Exemplos 4.16:

$$\text{a) } \frac{7}{3} + \frac{4}{3} = 7 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} = (7 + 4) \cdot \frac{1}{3} = 11 \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$

$$\text{b) } \frac{5}{6} - \frac{4}{6} = 5 \cdot \frac{1}{6} - 4 \cdot \frac{1}{6} = (5 - 4) \cdot \frac{1}{6} = 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\text{c) } \frac{7}{5} + \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = 7 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5} - 4 \cdot \frac{1}{5} = (7 + 1 - 4) \cdot \frac{1}{5} = 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Assim, chegamos a regra:

Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, temos que:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}.$$

2. Denominadores diferentes

Na adição e/ou subtração de frações com denominadores diferentes devemos inicialmente substituí-las pelas respectivas frações equivalentes que tenham o mesmo denominador.

Exemplos 4.17:

$$a) \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = ?$$

a fração $\frac{1}{2}$ é equivalente a $\frac{2}{4}$, logo,

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$$

$$b) \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{14}{6} = ?$$

A fração $\frac{2}{3}$ é equivalente a $\frac{4}{6}$

A fração $\frac{1}{2}$ é equivalente a $\frac{3}{6}$, logo,

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{14}{6} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} - \frac{14}{6} = \frac{4 - 3 - 14}{6} = -\frac{13}{6}$$

Os denominadores do exemplo 2 eram 3, 2 e 6 e passaram todos para 6, 6 e 6. Esse processo se chama redução ao mesmo denominador. 6 é múltiplo de 2, 3 e 6 e é, nesse caso, o menor múltiplo comum. Esse método sempre pode ser feito através do cálculo do mínimo múltiplo comum (MMC) dos denominadores.

Definimos então a adição/subtração de frações com denominadores diferentes como:

Dados $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ e $d \neq 0$, temos que:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

A demonstração desta definição pode ser encontrada no livro **Elementos de Aritmética**, de Abramo Hefez.

Exemplo 4.18:

$$a) \frac{3}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3 \cdot 6}{2 \cdot 6} - \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 6} = \frac{18}{12} - \frac{2}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

Figura 4.10: Cálculo do MMC

2, 6	2	}	x	Fatorando os denominadores 2 e 6, temos 6 como o menor múltiplo comum (MMC) de 2 e 6.
1, 3	3			
1, 1	6			

Substituímos agora cada uma das frações pelas suas respectivas frações equivalentes com denominador, neste caso, igual a 6. Em seguida dividimos 6 (MMC) pelos denominadores para saber o fator de equivalência para cada fração, depois multiplicamos este fator pelo numerador e resolve-se como frações de denominadores iguais.

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{6} = \frac{9}{6} - \frac{1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{6} = \frac{9}{6} - \frac{1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

4.7.2 Multiplicação de frações

A multiplicação de frações é considerada uma das operações mais simples de ser feita. Basta apenas fazer o produto dos numeradores e depois dos denominadores.

Caso 1 - Dados $b, d \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ e $d \neq 0$, temos que:

$$\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d} = \frac{1}{bd}$$

Exemplo 4.19:

$$a) \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}$$

Caso 2 - Dados $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ e $d \neq 0$, temos que:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left(a \cdot \frac{1}{b} \right) \cdot \left(c \cdot \frac{1}{d} \right) = a \cdot c \cdot \frac{1}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$$

Exemplo 4.20:

$$b) \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = 15 \cdot \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 2} = 15 \cdot \frac{1}{8} = \frac{15 \cdot 1}{8} = \frac{15}{8}$$

4.7.3 Divisão de frações

Considerando que a divisão entre dois números consiste em multiplicar o primeiro número pelo inverso do segundo, de modo análogo efetuamos a divisão de frações, ou seja, para dividirmos uma fração pela outra basta multiplicarmos a primeira pelo inverso da segunda.

Dados $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ e $d \neq 0$, temos que:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Exemplos 4.21:

$$a) \frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$$

$$b) \frac{3}{5} : 4 = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$$

Exemplo 4.22 - OBMEP

OBMEP 2008 - 1ª FASE - NÍVEL 2

19. Um ônibus transporta 31 estudantes, baianos e mineiros, para um encontro de participantes da OBMEP. Entre os baianos, $\frac{2}{5}$ são homens e, entre os mineiros, $\frac{3}{7}$ são mulheres.

Entre todos os estudantes quantas são as mulheres?

- (A) 12
- (B) 14
- (C) 15
- (D) 18
- (E) 21



Solução:

A quantidade de homens baianos é $\frac{2}{5}$, a de mulheres baianas será de $= \frac{3}{5}$, e como a quantidade de mulheres mineiras é $\frac{3}{7}$ temos que as quantidades de estudantes baianos (B) e mineiros (M) são múltiplos de 5 e 7, respectivamente, ou seja:

As possibilidades são $B = \{ 5, 10, 15, 20, 25, 30 \}$. Nesse caso, respectivamente teremos $M = \{ 26, 21, 16, 11, 6, 1 \}$, como M é múltiplo de 7 então $M = 21$.

$$B + M = 31 \text{ estudantes, onde } B = 10 \text{ e } M = 21, B, M \in \mathbb{N}.$$

Logo temos que $\frac{3}{5} \cdot 10 = 6$ estudantes baianas e $\frac{3}{7} \cdot 21 = 9$ estudantes mineiras, ou seja, temos um total de $6 + 9 = 15$ mulheres, alternativa C.

Exemplo 4.23 - OBMEP

OBMEP 2010 - 1ª FASE - NÍVEL 2

2. Qual é o valor de $1 + \frac{1}{1 - \frac{2}{3}}$?

- A) $\frac{1}{3}$
- B) $\frac{3}{2}$
- C) $\frac{4}{3}$
- D) 2
- E) 4

Solução:

Na expressão $1 + \frac{1}{1 - \frac{2}{3}}$, calculamos inicialmente a fração número misto $1 - \frac{2}{3}$.

$$\text{Temos que: } 1 - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = 3 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3} = (3 - 2) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Onde: } 1 + \frac{1}{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{3}} = 1 + 1 \cdot \frac{3}{1} = 1 + 3 = 4, \text{ alternativa E.}$$

4.8 Números decimais

O número decimal é uma forma de representar um número racional com a utilização da vírgula, onde a parte à esquerda da vírgula representa a parte inteira e a parte à direita da vírgula representa a parte decimal.

Exemplo 4.24:

	PARTE	PARTE
	INTEIRA	DECIMAL
	25,438	
DEZENA	UNIDADE	DÉCIMOS CENTÉSIMOS MILÉSIMOS

Lê-se: vinte e cinco inteiros e quatrocentos e trinta e oito milésimos.

Operações com números na forma decimal finita - Números decimais

Podemos somar, subtrair, multiplicar ou dividir os números racionais na forma decimal, seguindo algumas regra básicas.

4.8.1 Adição e subtração de números decimais

Para somar ou subtrair números decimais, podemos somar separadamente os números positivos dos negativos e subtrair o maior total do menor, como nas operações com números inteiros, prevalecendo o sinal do maior total, em módulo. Para isso, utilizando os algoritmos da adição e/ou subtração, escrevendo os números de forma que as vírgulas fiquem uma abaixo da outra.

Exemplo 4.25:

a) $-4,53 + 11,24 + 12 - 6,945 - 8,7 =$

$ \begin{array}{r} + 11,24 \\ + 12,00 \\ \hline + 23,24 \end{array} $	$ \begin{array}{r} + 4,530 \\ + 6,945 \\ + 8,700 \\ \hline - 20,175 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 23,240 \\ - 20,175 \\ \hline \boxed{+ 3,065} \end{array} $
--	---	--

Exemplo 4.26:

$$b) 3,2 - 15,768 + 5,14 - 2,27 =$$

$$\begin{array}{r} + 3,20 \\ + 5,14 \\ \hline 8,34 \end{array} \quad \begin{array}{r} + 15,768 \\ + 2,270 \\ \hline - 18,038 \end{array} \quad \begin{array}{r} - 18,038 \\ - 8,340 \\ \hline \boxed{- 9,698} \end{array}$$

4.8.2 Multiplicação de números decimais

Considere a multiplicação $3,45 \times 2,7$,

temos que $3,45$ é $\frac{345}{100}$ e $2,7$ é $\frac{27}{10}$,

$$\text{logo, } 3,45 \times 2,7 = \frac{345}{100} \cdot \frac{27}{10} = \frac{345 \cdot 27}{100 \cdot 10} = \frac{345 \cdot 27}{1000} = \frac{9315}{1000} = 9,315.$$

Exemplo 4.27:

$$\begin{array}{r} 3,45 \\ \times 2,7 \\ \hline + 2415 \\ + 690 \\ \hline 9,315 \end{array}$$

Para multiplicar números decimais multiplicamos sem a vírgula, como números inteiros, o resultado terá tantas casas decimais quanto a soma da quantidade de casas decimais dos fatores.

4.8.3 Divisão de números decimais

Considere a divisão $10,488 : 2,3$.

temos que $10,488 = 10488 : 1000$ e $2,3 = 2,300 = 2300 : 1000$,

$$\text{logo, } 10,488 : 2,3 = \frac{10488}{1000} : \frac{2300}{1000} = \frac{10488}{1000} \cdot \frac{1000}{2300} = \frac{10488}{2300}$$

Para dividir números decimais igualamos inicialmente as quantidades de casas decimais do dividendo e do divisor, completando com algarismos zero, depois divide-se normalmente, sem a vírgula.

Exemplo 4.28:

$$\begin{array}{r}
 10,488 : 2,3 = \quad \quad \quad \begin{array}{r} 10488 \quad | \quad 2300 \\ - \quad 9200 \quad \quad 4,56 \\ \hline 12880 \\ - \quad 11500 \\ \hline 13800 \\ - \quad 13800 \\ \hline 00000 \end{array} \\
 10,488 : 2,300 =
 \end{array}$$

Exemplo 4.29 - OBMEP

OBMEP 2015 - 1ª FASE - NÍVEL 2

2. Rita tem R\$ 13,37 em moedas de 1 centavo, de 5 centavos, de 10 centavos, de 25 centavos, de 50 centavos e de 1 real. Ela tem a mesma quantidade de moedas de cada valor. Quantas moedas ela tem no total?

- A) 24
- B) 30
- C) 36
- D) 42
- E) 48

Solução:

Como a quantidade de moedas de cada valor é igual, vamos chamar essa quantidade de x , onde teremos:

$$0,01 \cdot x + 0,05 \cdot x + 0,10 \cdot x + 0,25 \cdot x + 0,50 \cdot x + 1 \cdot x = 13,37$$

Colocando x em evidência, temos:

$$x \cdot (0,01 + 0,05 + 0,10 + 0,25 + 0,50 + 1) = 13,37$$

$$x \cdot 1,91 = 13,37$$

$$x = \frac{13,37}{1,91}$$

$$x = \frac{1337}{100} : \frac{191}{100}$$

$$x = \frac{1337}{100} \cdot \frac{100}{191}$$

$$x = \frac{1337}{191}$$

$x = 7$ moedas de cada valor.

Como são 6 tipos diferentes de valores de moedas, teremos um total de $6 \cdot 7 = 42$ moedas.

4.9 Dízimas periódicas

Assim como os números decimais finitos, existem os números decimais infinitos, periódicos ou não. Um número na forma decimal infinita, periódica, é chamado de dízima periódica e pertence ao conjunto dos números racionais, podendo ser, portanto, escrito na forma de uma fração, neste caso chamado de fração geratriz. Os números decimais infinitos não periódicos não podem ser escritos na forma de uma fração, onde o numerador e o denominador são números inteiros, portanto, não pertencem ao conjunto dos números racionais, passando a fazer parte do conjunto dos números irracionais, que será abordado posteriormente.

As dízimas periódicas podem ser simples ou compostas:

1 - Dízimas periódicas simples são aquelas que apresentam, após a vírgula, um trecho de algarismos que se repetem, chamado de período.

Exemplos 4.30:

1. 23,678678... , neste caso 678 é o período;
2. 5,33... , neste caso 3 é o período.

2 - Dízimas periódicas compostas são aquelas que apresentam, após a vírgula, um trecho inicial seguido do período que se repete.

1. 18,52323... , neste caso 23 é o período e 5 é a parte que não se repete;
2. 4,1955... , neste caso 5 é o período e 19 é a parte que não se repete.

4.9.1 Fração geratriz de uma dízima periódica

Para encontrar a fração geratriz de uma dízima periódica seguimos os seguintes passos:

1. igualamos a dízima periódica a uma incógnita X ;
2. multiplicamos ambos os lados da igualdade por uma potência de 10, de acordo com a quantidade de casas decimais que a vírgula precisa para se deslocar até o período;
3. subtraímos a equação atual da equação inicial;
4. o valor de X encontrado será a fração geratriz da dízima periódica.

Exemplo 4.31:

a) $6,2828\dots$

Inicialmente igualamos a dízima periódica a X ;

$$X = 6,2828\dots$$

Neste caso multiplicamos os dois lados da igualdade por 100, pois a vírgula precisa deslocar 2 casas para chegar até o período,

$$100X = 100 \cdot 6,2828\dots$$

Subtraímos agora esta equação da equação inicial, onde,

$$100X - X = 628,28\dots - 6,2828\dots, \text{ daí temos,}$$

$$99X = 622, \text{ logo:}$$

$$X = \frac{622}{99}.$$

Exemplo 4.32:

b) $34,53636\dots$

Neste caso temos uma dízima periódica composta, devemos primeiro transformá-la em uma dízima periódica simples e neste caso multiplicaremos ambos os lados da igualdade por 10;

$$10X = 345,3636\dots$$

Neste caso multiplicamos os dois lados da igualdade por 100, pois a vírgula precisa deslocar 2 casas para chegar até o período,

$$100 \cdot 10X = 100 \cdot 345,3636\dots$$

$$1000X = 34536,36\dots$$

Subtraímos agora esta equação da equação inicial, onde,

$$1000X - 10X = 34536,36\dots - 345,3636\dots, \text{ daí temos,}$$

$$990X = 34191, \text{ logo: } X = \frac{34191}{990}.$$

Uma outra forma de determinar a fração geratriz de uma dízima periódica é utilizando o método de múltiplos, através da soma dos termos de uma progressão geométrica (P.G.) infinita, que é dada por:

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Exemplo 4.33:

c) $4,222\dots$

$$\text{Temos que } 4,222\dots = 4 + \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \dots$$

Separamos a parte inteira e trabalharemos somente com a parte fracionária. Temos que o primeiro termo (a_1) da P.G. infinita é:

$$a_1 = \frac{2}{10}$$

E a razão desta P.G. é:

$$q = \frac{1}{10}$$

Substituindo os valores na fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita temos:

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{2}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{9}.$$

Agora somamos o resultado com a parte inteira:

$$4 + \frac{2}{9} = \frac{38}{9}.$$

Daí temos que:

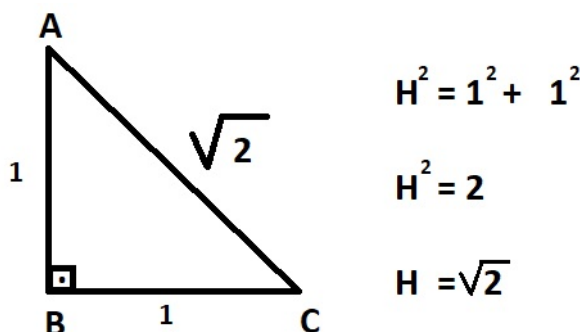
$$4,222... = \frac{38}{9}.$$

5 Conjunto dos números irracionais

Um número é irracional quando a sua representação decimal é uma dízima não periódica, ou seja, não é possível representá-lo na forma de uma fração, cujo numerador e denominador são números inteiros.

O estudo dos números irracionais se deu, principalmente, em virtude de problemas que envolviam o teorema de Pitágoras, onde encontrava-se dízimas não periódicas nas raízes não exatas.

Os pitagóricos se viram diante do desafio de calcular a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos mediam uma unidade, encontrando como resposta $\sqrt{2}$, que não podia ser representado na forma de uma fração, surgindo aí o conjunto dos números irracionais.



Temos então que $\sqrt{2}$ é um número.

Vamos mostrar que $\sqrt{2}$ não pode ser representado como uma fração da forma $\frac{m}{n}$, onde m e n são inteiros com $n \neq 0$.

Demonstração:

Vamos supor que $\sqrt{2}$ é racional, logo:

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$, onde p e q não tem fatores em comum, ou seja, $\frac{p}{q}$ é uma fração irredutível.

Vamos elevar ao quadrado os dois lados de:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \text{ daí,}$$

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}, \quad p^2 = 2 \cdot q^2, \text{ logo } p^2 \text{ é um número par, conseqüentemente } p \text{ é par.}$$

Assim $p = 2 \cdot k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Substituindo na mesma igualdade,

$$(2k)^2 = 2q^2$$

$q^2 = 2k^2$. Portanto q^2 é par, q é par. Assim p e q são pares, um absurdo.

O número $\pi = 3,1415926535\dots$ (razão entre comprimento e o diâmetro de uma circunferência) e o número de ouro $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,618033\dots$, que é encontrado em problemas envolvendo a proporção áurea, são irracionais.

Operações com números irracionais

As operações de adição e subtração são abertas no conjunto dos números irracionais, ou seja, a soma ou a subtração de um número irracional tem como resultado um número irracional.

Exemplo 5.1:

$$\text{a) } \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

As operações de multiplicação e divisão são abertas no conjunto dos números irracionais.

Exemplos 5.2:

$$\text{a) } \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4.$$

$$\text{b) } \sqrt{18} : \sqrt{2} = \sqrt{9} = 3.$$

Observe que $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ e $\sqrt{18}$ são irracionais, porém o resultado é inteiro.

Adição e subtração de números irracionais

Somar ou subtrair números irracionais só é possível quando utilizamos uma aproximação destes números.

Exemplo 5.3: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

Temos que $\sqrt{2} \cong 1,414213562373095\dots$ e $\sqrt{3} \cong 1,732050807568877\dots$,

Daí temos que: $\sqrt{2} + \sqrt{3} \cong 3,146\dots$

6 Razão e proporção

6.1 Razão

Razão de duas grandezas é o quociente dos números que expressam essas grandezas. A razão entre dois números a e b ($b \neq 0$) indica-se por $a : b$ ou $\frac{a}{b}$ ou ainda a/b , onde a é o antecedente e b o conseqüente.

Exemplos 6.1:

1. A razão de 8 para 2 é igual a 4, pois $\frac{8}{2} = 4$.
2. A razão de $\frac{2}{5}$ para $\frac{3}{7}$ é igual a $\frac{14}{15}$, pois $\frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{15}$.

6.1.1 Razões inversas

Duas razões são inversas quando seu produto é igual a um.

$\frac{a}{b}$ e $\frac{b}{a}$, ($a \neq 0$ e $b \neq 0$) são razões inversas, pois, $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

6.1.2 Razões iguais

Duas razões são iguais quando são representadas por frações equivalentes.

Exemplos 6.2:

1. $\frac{3}{2} = 1,5$ e $\frac{6}{4} = 1,5$, logo, $\frac{3}{2}$ e $\frac{6}{4}$ são razões iguais, ou seja: $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$.
2. $\frac{2x}{5} = 0,4x$ e $\frac{6x}{15} = 0,4x$, logo $\frac{2x}{5}$ e $\frac{6x}{15}$, são razões iguais, ou seja: $\frac{2x}{5} = \frac{6x}{15}$.

6.2 Proporção

Proporção é uma igualdade de duas razões equivalentes. $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ formam uma proporção se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, com a, b, c , e $d \neq 0$. Em uma proporção a e d são chamados de extremos e b e c são chamados de meios.

Exemplo 6.3:

$\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ é uma proporção, pois $\frac{3}{5}$ e $\frac{6}{10}$ são razões iguais.

6.2.1 Propriedades das proporções

1. Numa proporção o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Dados $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, a, b, c , e $d \neq 0$,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \underbrace{a \cdot d}_{\text{extremos}} = \underbrace{b \cdot c}_{\text{meios}}.$$

Exemplo 6.4:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \iff 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4.$$

Exemplo 6.5 - OBMEP

OBMEP 2006 - 1ª FASE - NÍVEL 2

12. Se $\frac{1}{a+11} = \frac{37}{73}$, então $\frac{1}{a+13}$ é igual a
- (A) $\frac{37}{78}$
- (B) $\frac{42}{78}$
- (C) $\frac{37}{98}$
- (D) $\frac{37}{75}$
- (E) $\frac{37}{147}$

Solução 1: Temos a proporção:

$\frac{1}{a+11} = \frac{37}{73}$, aplicando a propriedade temos que:

$$37 \cdot (a + 11) = 1 \cdot 73$$

$$37 \cdot a + 407 = 73$$

$$37 \cdot a = 73 - 407$$

$$37 \cdot a = -334$$

$$a = \frac{-334}{37}.$$

Substituindo a em $\frac{1}{a+13}$, temos: $\frac{1}{\frac{-334}{37} + 13}$

Resolvendo a fração na forma número misto, do denominador, temos: $\frac{1}{\frac{147}{37}}$

Aplicando a divisão de frações temos que: $\frac{1}{a+13} = \frac{37}{147}$, alternativa E.

Solução 2: Vamos achar o valor do termo $a + 13$, a resposta será o seu inverso.

Vamos inicialmente inverter as razões: $\frac{1}{a+11} = \frac{37}{73}$, onde teremos:

$\frac{a+11}{1} = \frac{73}{37}$, somando 2 em ambos os lados da igualdade, temos:

$$a + 13 = \frac{73}{37} + 2, \text{ logo } a + 13 = \frac{147}{37}.$$

Como o inverso de $\frac{147}{37}$ é igual a $\frac{37}{147}$, temos que $\frac{1}{a+13} = \frac{37}{147}$, alternativa E.

2. Uma proporção não se altera quando trocamos seus extremos, ou seus meios, ou quando invertemos suas razões.

Dados a, b, c e $d \in \mathbb{Z}$, a, b, c e d diferentes de zero, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ (troca dos meios).}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \text{ (troca dos extremos).}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \text{ (inversão das razões).}$$

Pois em todos os casos vale a propriedade fundamental da proporção, $a \cdot d = b \cdot c$.

Exemplo 6.6:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

- (a) $\frac{3}{6} = \frac{4}{8}$ (troca dos meios).
- (b) $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$ (troca dos extremos).
- (c) $\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$ (inversão das razões).

3. Em toda proporção, a soma dos dois primeiros termos está para o primeiro (ou segundo), assim como a soma dos dois últimos está para o terceiro (ou quarto).

Dados a, b, c e $d \in \mathbb{Z}$, a, b, c e d diferentes de zero, temos:

- (a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$.
- (b) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

Exemplo 6.7:

$$\frac{3}{7} = \frac{6}{14} \Rightarrow \frac{3+7}{3} = \frac{6+14}{6} \quad \text{e} \quad \frac{3}{7} = \frac{6}{14} \Rightarrow \frac{3+7}{7} = \frac{6+14}{14}.$$

4. Em toda proporção, a diferença dos dois primeiros termos está para o primeiro (ou segundo), assim como a diferença dos dois últimos está para o terceiro (ou quarto).

Dados a, b, c e $d \in \mathbb{Z}$, a, b, c e d diferentes de zero, temos:

- (a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$.
- (b) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.

Exemplo 6.8:

$$\frac{3}{7} = \frac{6}{14} \Rightarrow \frac{3-7}{3} = \frac{6-14}{6} \quad \text{e} \quad \frac{3}{7} = \frac{6}{14} \Rightarrow \frac{3-7}{7} = \frac{6-14}{14}.$$

5. Em toda proporção, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como qualquer antecedente está para o respectivo consequente.

Dados a, b, c e $d \in \mathbb{Z}$, $b, d \neq 0$, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Demonstração:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{c} + 1 = \frac{b}{d} + 1$$

$$\frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d}$$

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}.$$

Exemplo 6.9:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{2+4}{3+6} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

6. Em toda proporção, a diferença dos antecedentes está para a diferença dos consequentes, assim como qualquer antecedente está para o respectivo consequente.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Demonstração:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{c} - 1 = \frac{b}{d} - 1$$

$$\frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d}$$

$$\frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}.$$

Exemplo 6.10:

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{4-2}{6-3} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}.$$

6.3 Regra de três

6.3.1 Grandezas diretamente proporcionais

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando, aumentando-se uma delas, a outra também aumenta na mesma razão da primeira.

Exemplo 6.11:

Dona Maria comprou 2 quilogramas de feijão no supermercado e pagou R\$ 18,00. Se comprasse 5 quilogramas do mesmo feijão pagaria R\$ 45,00.

Neste exemplo temos 2 grandezas:

Grandeza 1 - Peso (quilogramas);

Grandeza 2 - Preço (reais).

Peso (kg)	Preço (R\$)
2	18
5	45

As grandezas peso e preço são diretamente proporcionais pois, se o peso duplica o preço também duplica. Se o peso triplica o preço também triplica, e assim por diante.

A razão $\frac{\text{preço}}{\text{peso}}$ se chama preço por quilo.

Exemplo 6.12:

Quando viaja de carro para seu sítio, no interior, Seu Antônio costuma manter a velocidade de 60km/h, por questão de segurança.

Por definição, $\text{velocidade} = \frac{\text{espaco percorrido}}{\text{tempo transcorrido}}$.

De modo análogo, $\text{Espaço percorrido} = \text{velocidade} \times \text{tempo transcorrido}$.

Como a velocidade do carro é constante, segue que as grandezas espaço e tempo são diretamente proporcionais. Duplicando o tempo, duplica o espaço (e vice-versa).

Neste exemplo temos 2 grandezas:

Grandeza 1 - Distância (km);

Grandeza 2 - Tempo (horas).

Distância (km)	Tempo (horas)
60	1
180	3

As grandezas distância e tempo são diretamente proporcionais pois, se a distância duplica o tempo também duplica. Se a distância triplica o tempo também triplica, e assim por diante.

6.3.2 Grandezas inversamente proporcionais

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, aumentando-se uma delas, a outra diminui na mesma razão da primeira.

Exemplo 6.13:

João gasta 4 horas para percorrer a distância entre duas cidades viajando com velocidade média de 100 km por hora. Se diminuir a velocidade para 80 km por hora gastará 5 horas para percorrer a mesma distância.

Neste exemplo temos 2 grandezas:

Grandeza 1 - Velocidade (kmh);

Grandeza 2 - Tempo (horas).

Velocidade (kmh)	Tempo (horas)
100	4
80	5

As grandezas velocidade e tempo são inversamente proporcionais pois, se a velocidade duplica o se reduz a metade. Se a velocidade triplica o tempo se reduz a terça parte, e assim por diante.

6.4 Regra de três simples

A regra de três simples é um processo prático para resolver problemas através de proporções, envolvendo duas grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.

Roteiro para a resolução de problemas de regra de três simples.

1. Colocar as grandezas de mesma espécie numa mesma coluna;
2. Indicar duas grandezas diretamente proporcionais com flechas de mesmo sentido.
Indicar duas grandezas inversamente proporcionais com flechas de sentido contrário;
3. Armar a proporção e resolvê-la.

Exemplo 6.14:

8 pedreiros constroem um muro em 6 dias. Quantos pedreiros são necessários para construir o mesmo muro em 4 dias?

Resolução:

1. Colocamos as grandezas de mesma espécie numa mesma coluna;
2. As grandezas de espécies diferentes que se correspondem aparecem numa mesma linha;

PEDREIROS	DIAS
8	6
X	4

3. Devemos analisar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais;

Como a quantidade de dias para construir o muro irá diminuir, a quantidade pedreiros deverá aumentar, logo as setas terão sentidos opostos.

PEDREIROS	DIAS
 8	6 
X	4

Como as grandezas são inversamente proporcionais, devemos inverter a grandeza pedreiros.

PEDREIROS	DIAS
 X	6 
8	4

Onde,

$$\frac{X}{8} = \frac{6}{4}$$

logo, teremos

$$X = 12 \text{ pedreiros.}$$

Observe que o produto das duas grandezas, Pedreiro $\times$ Dia = 48 é constante.

Exemplo 6.15 - OBMEP

OBMEP 2008 - 1ª FASE - NÍVEL 2

3. Para encher uma caixa d'água são necessários 2000 baldes ou 2400 latas de água. Se já foram colocados 1500 baldes na caixa, quantas latas serão necessárias para acabar de enchê-la?

- (A) 600
- (B) 900
- (C) 960
- (D) 1080
- (E) 1200

Solução: Temos um problema de regra de três simples, com as grandezas: quantidade de baldes de água e latas de água, onde:

baldes	latas
2000	2400
1500	X

Como a quantidade de baldes diminuiu, a quantidade de latas também irá diminuir, logo as setas terão o mesmo sentido, sendo portanto grandezas diretamente proporcionais.

 baldes	 latas
2000	2400
1500	X

Onde,

$$\frac{2000}{1500} = \frac{2400}{X}$$

logo, teremos

$$X = 1800 \text{ latas de água.}$$

6.5 Regra de três composta

A regra de três composta é um processo prático para resolver problemas que envolvem mais de duas grandezas.

Exemplo 6.16:

Quatro homens constroem 4 metros de muro em 3 dias. Quantos homens são necessários para construir 8 metros de muro em 2 dias?

Resolução:

1. Colocamos as grandezas de mesma espécie numa mesma coluna;

HOMENS	METROS	DIAS
4	4	3
X	8	2

Para colocar as flechas, comparamos cada grandeza com aquela que contém a incógnita X. A grandeza será mantida como está caso seja diretamente proporcional a grandeza que contém a incógnita X e será invertida quando for inversamente proporcional a que contém a incógnita X. Como a quantidade de metros de muro a ser construído irá aumentar, a quantidade de homens também deverá aumentar.

HOMENS	METROS	DIAS
 4	 4	3
X	8	2

Como a quantidade de dias para construir o muro irá diminuir, serão necessários mais pedreiros.

HOMENS	METROS	DIAS
 4	4	3 
X	8	2

Como as grandezas homens e dias são inversamente proporcionais, devemos inverter a grandeza dias.

HOMENS	METROS	DIAS
4	4	2
X	8	3

Quando uma grandeza variável é proporcional a duas (ou mais) outras, essa variação é proporcional ao produto da variação das duas (ou mais) outras.

Onde,
$$\frac{4}{X} = \frac{4}{8} \cdot \frac{2}{3}$$

logo, teremos
$$X = 12 \text{ pedreiros.}$$

7 Potenciação

Potência é o resultado da multiplicação de fatores iguais.

Sejam $a \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Temos que:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ vezes}} = p$$

a é chamado de base - indica o número que será repetido;

n é chamado de expoente - indica a quantidade de vezes que a base será repetida;

p é chamado de potência - é o resultado do produto da base por ela mesma.

Exemplo 7.1:

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

3 é a base, 4 é o expoente e 81 é a potência.

Lê-se: "três elevado a quarta potência".

Quando os expoentes são os números 2 ou 3, pronunciamos: quadrado e cubo, respectivamente.

Exemplos 7.2:

5^2 — lê-se "cinco ao quadrado". 7^3 — lê-se "sete ao cubo".

Exemplos 7.3:

$$a) (-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$$

$$b) \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \left(\frac{7}{3}\right) \cdot \left(\frac{7}{3}\right) = \frac{49}{9}$$

$$c) \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \left(\frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{5}{4}\right) = \frac{125}{64}$$

$$d) (2,5)^2 = 2,5 \cdot 2,5 = 6,25$$

7.1 Propriedades da potenciação

Dados a , $n \in \mathbb{N}$ temos por definição que:

1. Todo número elevado a 1 é igual a ele mesmo.

$$a^1 = a.$$

2. Todo número elevado a zero é igual

$$a^0 = 1.$$

3. Quando o expoente for negativo, inverte-se a base e coloca-se o expoente positivo, ou ainda, ao inverter a base o sinal do expoente muda.

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Demais propriedades

4. Na multiplicação de potências de bases iguais, repete-se a base e somam-se os expoentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Demonstração:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ vezes}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ vezes}}$$

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ vezes}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{(m+n) \text{ vezes}}$$

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{(m+n) \text{ vezes}} = a^{m+n}$$

Logo,

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Exemplos 7.4:

$$a) \quad 2^3 \cdot 2 \cdot 2^5 = 2^{(3+1+5)} = 2^9.$$

$$b) \quad \left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^8 = \left(\frac{5}{3}\right)^{(2-4+8)} = \left(\frac{5}{3}\right)^6.$$

5. Na divisão de potências de bases iguais, repete-se a base e subtrai os expoentes.

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \quad m > n.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} a^m : a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ vezes}} : \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ vezes}} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ vezes}} : \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{(m-n) \text{ vezes}} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{(m-n) \text{ vezes}} = a^{m-n} \end{aligned}$$

Logo,

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Exemplos 7.5:

$$a) \quad 5^9 : 5^3 = 5^{(9-3)} = 5^6.$$

$$b) \quad \left(\frac{1}{3}\right)^5 : \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{[5-(-2)]} = \left(\frac{1}{3}\right)^7.$$

Lembrete: A expressão 0^0 é indeterminada, ou seja, não se define.

6. No caso de potência de potência, conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}, \quad a, \quad m, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração:

Temos, da definição de potência, que:

$$\begin{aligned} (a^m)^n &= \underbrace{(a^m) \cdot (a^m) \cdot \dots \cdot (a^m)}_{n \text{ vezes}} \\ &= \underbrace{(a^m) \cdot (a^m) \cdot \dots \cdot (a^m)}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \cdot n \text{ vezes}} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \cdot n \text{ vezes}} = a^{m \cdot n} \end{aligned}$$

Logo,

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Exemplo 7.6:

$$\begin{aligned}
 (a^5)^3 &= \underbrace{(a^5) \cdot (a^5) \cdot (a^5)}_{3 \text{ vezes}} \\
 (a^5)^3 &= \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a)}_{3 \text{ vezes}} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{5 \text{ vezes}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{5 \text{ vezes}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{5 \text{ vezes}} \\
 (a^5)^3 &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{5 \cdot 3 \text{ vezes}} \\
 (a^5)^3 &= a^{15}.
 \end{aligned}$$

Esta propriedade também é válida para duas ou mais potências, desde que estejam multiplicando ou dividindo.

7. Na potência de um produto de potências, conservam-se as bases e multiplica-se o expoente pelos expoentes das potências.

$$(a^m \cdot b^n)^p = a^{m \cdot p} \cdot b^{n \cdot p}, \quad a, b, p, m, n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 (a^m \cdot b^n)^p &= \underbrace{(a^m \cdot b^n) \cdot (a^m \cdot b^n) \cdot \dots \cdot (a^m \cdot b^n)}_{p \text{ vezes}} \\
 &= \underbrace{(a^m \cdot b^n) \cdot (a^m \cdot b^n) \cdot \dots \cdot (a^m \cdot b^n)}_{p \text{ vezes}} = \underbrace{(a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m)}_{p \text{ vezes}} \cdot \underbrace{(b^n \cdot b^n \cdot \dots \cdot b^n)}_{p \text{ vezes}} \\
 &= \underbrace{(a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m)}_{p \text{ vezes}} \cdot \underbrace{(b^n \cdot b^n \cdot \dots \cdot b^n)}_{p \text{ vezes}} = a^{m \cdot p} \cdot b^{n \cdot p}
 \end{aligned}$$

logo,

$$(a^m \cdot b^n)^p = a^{m \cdot p} \cdot b^{n \cdot p}$$

Exemplo 7.7:

$$(2^3 \cdot 5^7)^2 = 2^{(3 \cdot 2)} \cdot 5^{(7 \cdot 2)} = 2^6 \cdot 5^{14}.$$

8. Na potência de um quociente de potências, conservam-se as bases e multiplica-se o expoente pelos expoentes das potências.

$$\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^p = \frac{a^{m \cdot p}}{b^{n \cdot p}}, \quad a, b, p, m, n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a^m}{b^n}\right)^p &= \underbrace{\left(\frac{a^m}{b^n} \cdot \frac{a^m}{b^n} \cdot \dots \cdot \frac{a^m}{b^n}\right)}_{p \text{ vezes}} \\ &= \frac{\overbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}^{p \text{ vezes}}}{\underbrace{b^n \cdot b^n \cdot \dots \cdot b^n}_{p \text{ vezes}}} \\ &= \frac{\overbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}^{p \text{ vezes}}}{\underbrace{b^n \cdot b^n \cdot \dots \cdot b^n}_{p \text{ vezes}}} = \frac{a^{m \cdot p}}{b^{n \cdot p}} \end{aligned}$$

Logo,

$$\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^p = \frac{a^{m \cdot p}}{b^{n \cdot p}}.$$

Exemplo 7.8:

$$\left(\frac{3^2}{7^3}\right)^5 = \frac{3^{(2 \cdot 5)}}{7^{(3 \cdot 5)}} = \frac{3^{10}}{7^{15}}.$$

9. Quando o expoente for um número racional, transforma-se a potência em uma raiz, onde o numerador da fração passa a ser expoente do radicando e o denominador passa a ser índice do radical.

Temos, por definição, que para a , $n \in \mathbb{N}$, $a \geq 0$,

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Daí temos que,

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Exemplo 7.9:

$$a^{\frac{2}{3}} = (a^{\frac{1}{3}})^2 = (\sqrt[3]{a})^2.$$

Resolução de uma expressão numérica com propriedades da potenciação

$$\left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \left[(2)^{-1}\right]^{-2} + \left[\left(\frac{-3}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{-7}{3}\right)^2\right] + (4)^{\frac{1}{2}} =$$

Como todo número elevado a zero é igual a 1, temos que $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$;

Potência de potência conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes.

Temos que $\left[(2)^{-1}\right]^{-2} = 2^{(-1) \cdot (-2)} = 2^2 = 4$;

Quando o expoente for um número racional transforma-se a potência em uma raiz, temos que $(4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$, onde:

$$1 \cdot 4 + \left[\left(\frac{-3}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{-7}{3}\right)^2\right] + 2 =$$

$$4 + \left[\frac{3^3}{2^3} \cdot \frac{7^2}{3^2}\right] + 2 =$$

$$6 + \left[\frac{3^3}{2^3} \cdot \frac{7^2}{3^2}\right] =$$

$$6 + \left[\frac{27}{8} \cdot \frac{49}{9}\right] =$$

$$6 + \frac{1323}{72} =$$

$$= \frac{1755}{72}.$$

7.2 Produtos notáveis

Dados $a, b, c, n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$1. (a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Demonstração:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b)$$

$$(a + b) \cdot (a + b) = a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2$$

$$a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Logo,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

$$2. (a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Demonstração:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b)$$

$$(a - b) \cdot (a - b) = a^2 - a \cdot b - a \cdot b + b^2$$

$$a^2 - a \cdot b - a \cdot b + b^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Logo,

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

$$3. (a + b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$$

Demonstração:

$$(a + b)^3 = (a + b) \cdot (a + b)^2$$

$$(a + b) \cdot (a + b)^2 = (a + b) \cdot (a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2)$$

$$(a + b) \cdot (a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2) = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$$

Logo,

$$(a + b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3.$$

$$4. (a - b)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3$$

Demonstração:

$$(a - b)^3 = (a - b) \cdot (a - b)^2$$

$$(a - b) \cdot (a - b)^2 = (a - b) \cdot (a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2)$$

$$(a - b) \cdot (a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2) = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3$$

Logo,

$$(a - b)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3.$$

$$5. (a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Demonstração:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 + a \cdot b - a \cdot b - b^2$$

$$a^2 + a \cdot b - a \cdot b - b^2 = a^2 - b^2$$

Logo,

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2.$$

$$6. (a - 1) \cdot (1 + a + a^n + \dots + a^{n-1}) = a^n - 1$$

Demonstração:

$$a \cdot (1 + a + a^n + \dots + a^{n-1}) = a + a^n + \dots + a^{n-1} + a^n$$

$$(-1) \cdot (1 + a + a^n + \dots + a^{n-1}) = -1 - a - a^n - \dots - a^{n-1}$$

Somando ambos os lados das igualdades acima temos:

$$[a + (-1)] \cdot (1 + a + a^n + \dots + a^{n-1}) = -1 + a^n$$

Logo,

$$(a - 1) \cdot (1 + a + a^n + \dots + a^{n-1}) = a^n - 1.$$

$$7. \left(\frac{b}{c} - 1\right) \cdot \left(1 + \frac{b}{c} + \frac{b^2}{c^2} + \dots + \frac{b^{n-1}}{c^{n-1}}\right) = \frac{a^n}{b^n} - 1$$

Demonstração:

$$\frac{b}{c} \cdot \left(1 + \frac{b}{c} + \frac{b^2}{c^2} + \dots + \frac{b^{n-1}}{c^{n-1}}\right) = \left(\frac{b}{c} + \frac{b^2}{c^2} + \dots + \frac{b^{n-1}}{c^{n-1}} + \frac{b^n}{c^n}\right)$$

$$(-1) \cdot \left(1 + \frac{b}{c} + \frac{b^2}{c^2} + \dots + \frac{b^{n-1}}{c^{n-1}}\right) = \left(-1 - \frac{b}{c} - \frac{b^2}{c^2} - \dots - \frac{b^{n-1}}{c^{n-1}}\right)$$

Somando ambos os lados das igualdades acima temos:

$$\left(\frac{b}{c} + (-1)\right) \cdot \left(1 + \frac{b}{c} + \frac{b^2}{c^2} + \dots + \frac{b^{n-1}}{c^{n-1}}\right) = -1 + \frac{b^n}{c^n}$$

Logo,

$$\left(\frac{b}{c} - 1\right) \cdot \left(1 + \frac{b}{c} + \frac{b^2}{c^2} + \dots + \frac{b^{n-1}}{c^{n-1}}\right) = \frac{b^n}{c^n} - 1.$$

$$8. (a - b) \cdot (b^{n-1} + a \cdot b^{n-2} + a^2 \cdot b^{n-3} + \dots + a^{n-1}) = a^n - b^n$$

Demonstração:

$$a \cdot (b^{n-1} + a \cdot b^{n-2} + a^2 \cdot b^{n-3} + \dots + a^{n-1}) = (a \cdot b^{n-1} + a^2 \cdot b^{n-2} + \dots + a^{n-1} + a^n)$$

$$(-b) \cdot (b^{n-1} + a \cdot b^{n-2} + a^2 \cdot b^{n-3} + \dots + a^{n-1}) = (-b^n - a \cdot b^{n-1} - \dots - a^{n-1}b)$$

Somando ambos os lados das igualdades acima temos:

$$[a + (-b)] \cdot (b^{n-1} + a \cdot b^{n-2} + a^2 \cdot b^{n-3} + \dots + a^{n-1}) = -b^n + a^n$$

Logo,

$$(a - b) \cdot (b^{n-1} + a \cdot b^{n-2} + a^2 \cdot b^{n-3} + \dots + a^{n-1}) = a^n - b^n.$$

Corolário 7.1

$$a^n = b^n \iff a = b;$$

$$a^n > b^n \iff a > b;$$

$$a^n < b^n \iff a < b.$$

7.3 Notação científica

Notação científica é a forma utilizada para escrever números que representam quantidades muito grandes ou muito pequenas.

Quando multiplicamos um número inteiro por uma potência de 10, basta acrescentarmos neste tantos zeros, ao final, quanto o expoente da potência. Quando o número multiplicado é um número racional, na forma decimal finita, a vírgula é deslocada para direita tantas casas decimais quanto o expoente, seguindo os mesmos critérios anteriores, e quando dividida por uma potência de dez a vírgula será deslocada para a direita.

Exemplos 7.10:

$$a) 3 \cdot 100 = 3 \cdot 10^2 = 300$$

$$b) 648 \cdot 10 = 648 \cdot 10^1 = 6480$$

$$c) 5,726 \cdot 100 = 5,726 \cdot 10^2 = 572,6$$

$$d) 0,0542 \cdot 1000 = 0,0542 \cdot 10^3 = 54,2$$

$$e) 154,36 : 10 = 154,36 : 10^1 = 15,436$$

$$f) 5,436 : 100 = 5,436 : 10^2 = 0,05436$$

Na forma de notação científica representamos um número com apenas um algarismo na parte inteira, multiplicando por uma potência de 10, onde o expoente indicará a quantidade de casas decimais que a vírgula percorreu. Este expoente será positiva se a vírgula se deslocar para esquerda e será negativa se a vírgula se deslocar para a direita.

Exemplos 7.11:

Escreva na forma de notação científica os números abaixo:

a) $2343000 =$, quando um número não apresenta vírgula, subentende-se que ela está no final do número. Neste caso, como o algarismo 2 será a parte inteira, a vírgula irá deslocar 6 casas para a esquerda, logo teremos:

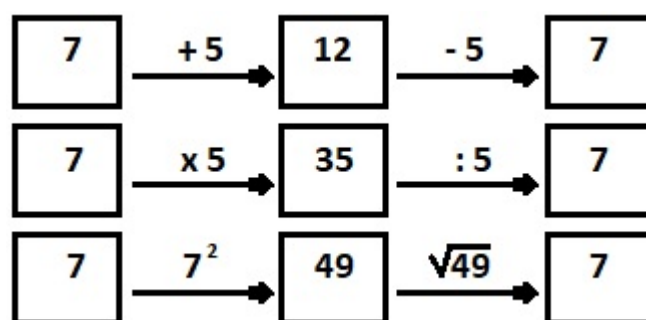
a) $2343000 = 2,343 \cdot 10^6$

b) $0,007387 =$, quando um número não apresenta vírgula, subentende-se que ela está no final do número. Neste caso, como o algarismo 7 será a parte inteira, a vírgula irá deslocar 3 casas para a direita, logo teremos:

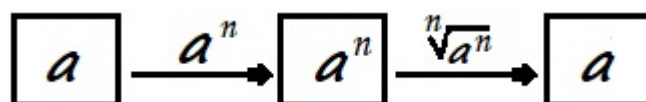
b) $0,007387 = 7,387 \cdot 10^{-3}$

8 Radiciação

Como foi visto em capítulos anteriores, as operações de adição e subtração são inversas entre si, assim como as operações de multiplicação e divisão.



A última operação é chamada de radiciação, que é a inversa da potenciação. Em geral temos:



Dados a , $n \in \mathbb{N}$ temos que:

$$\sqrt[n]{a} = x \iff x^n = a, \quad x \geq 0.$$

$\sqrt[n]{a}$ é um fator que multiplicado n vezes é igual a a .

$$\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ vezes}} = a$$

Onde:

a é chamado de radicando;

$\sqrt{}$ é chamado de radical;

n é chamado de índice do radical;

x é chamado de raiz.

Exemplos 8.1:

$$\sqrt{49} = 7 \iff 7^2 = 49.$$

$$\sqrt{144} = 12 \iff 12^2 = 144.$$

Definição: Dados $a, n \in \mathbb{N}$, $a \geq 0$ e $n \geq 0$,

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

A ausência de índice no radical indica que esse é igual a dois. Por exemplo $\sqrt{2}$ lê-se: "raiz quadrada de dois", $\sqrt[3]{2}$ lê-se "raiz cúbica de 2" e nos demais casos, $\sqrt[n]{2}$ lê-se: "raiz n-ésima de 2".

Não existe raiz com índice par de número negativo no conjunto dos números reais. Por exemplo, $\sqrt{-9}$ é improvável nos reais, pois, não existe x tal que $x^2 = -9$. Essa igualdade é improvável no conjunto dos números reais.

8.1 Propriedades da radiciação

$$1. \sqrt[n]{a^n} = a$$

A raiz n-ésima da n-ésima potência de um número é igual ao próprio número.

Demonstração: Sejam $a, n \in \mathbb{N}$, $a \geq 0$, temos que:

$$\sqrt[n]{a} = x \iff x^n = a, \quad x \geq 0.$$

De modo análogo temos que:

$$\sqrt[n]{a^n} = x \iff x^n = a^n, \quad x \geq 0.$$

Pela propriedade (h) e pelo corolário 1 de produtos notáveis temos que:

$$a^n = x^n \iff a = x$$

Logo,

$$\sqrt[n]{a^n} = a.$$

Exemplos 8.2:

$$\sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\sqrt[4]{5^4} = \sqrt[4]{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \sqrt[4]{625} = 5$$

$$2. \left(\sqrt[n]{a} \right)^n = a$$

A raiz n-ésima de um número, elevado a n-ésima potência é igual ao próprio número.

Demonstração: Sejam $a, n \in \mathbb{N}$, $a \geq 0$, temos que:

$$\sqrt[n]{a} = x \iff x^n = a, \quad x \geq 0.$$

Substituindo $x = \sqrt[n]{a}$ na segunda igualdade, temos,

$$\left(\sqrt[n]{a} \right)^n = a$$

$$3. \sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{a} \right)^n$$

A raiz n-ésima da n-ésima potência de um número é igual a n-ésima potência da raiz n-ésima do próprio número.

Temos da propriedade 1 que:

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

Temos da propriedade 2 que:

$$\left(\sqrt[n]{a} \right)^n = a$$

Logo temos que:

$$\sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{a} \right)^n$$

Exemplo 8.3:

$$\left(\sqrt[3]{2} \right)^3 = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2$$

$$\sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\text{Logo, } \left(\sqrt[3]{2} \right)^3 = \sqrt[3]{2^3}$$

$$4. \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

A raiz n-ésima do produto de dois números é igual ao produto de suas raízes n-ésimas.

Demonstração: Sejam $a, b, n \in \mathbb{N}$, temos que $\sqrt[n]{a \cdot b}$ é o número real positivo cuja potência n -ésima é igual a $a \cdot b$, ou seja,

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = x \iff x^n = a \cdot b, \quad x \geq 0.$$

Se $x = \sqrt[n]{a \cdot b}$, então $x^n = a \cdot b$.

Pela propriedade 2 acima, temos que $a = (\sqrt[n]{a})^n$ e $b = (\sqrt[n]{b})^n$ logo,

$$x^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n$$

Pela propriedade (d) de potenciação,

$$x^n = (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n$$

$$x = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Logo, substituindo x na primeira igualdade temos:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Exemplos 8.4:

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = 2 \cdot \sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt{180} = \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 6 \cdot \sqrt{5}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

$$5. \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

A raiz n -ésima do quociente de dois números é igual ao quociente de suas raízes n -ésimas.

Demonstração: Sejam $a, b, n \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, temos que $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ é o número real positivo cuja potência n -ésima é igual a $\frac{a}{b}$, ou seja,

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = x \iff x^n = \frac{a}{b}, \quad x \geq 0.$$

$$x^n = \frac{a}{b}$$

$$x^n = \frac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{b^n}}$$

$$x^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}$$

$$x^n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \right)^n$$

$$x = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Logo, substituindo x na primeira igualdade temos:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Exemplo 8.5:

$$\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{2^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{3 \cdot 3 \cdot 3}}{\sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Logo, } \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}}.$$

$$6. \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Demonstração: Temos da definição de potência que,

$$(\sqrt[n]{a})^m = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}_{m \text{ vezes}}$$

Temos da propriedade 4 de radiciação que,

$$\underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}_{m \text{ vezes}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ vezes}}}$$

$$\sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ vezes}}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Concluimos que,

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

$$7. \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

A raiz m da raiz n de um número a é igual a raiz $m \cdot n$ de a .

Demonstração: Sejam $a, m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \neq 0$, temos que $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ é o número real positivo cuja potência m -ésima é igual a $\sqrt[n]{a}$, ou seja,

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = x \iff x^m = \sqrt[n]{a}.$$

$$x^m = \sqrt[n]{a}$$

$$x^m = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[m]{x^m} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}}$$

$$x = (\sqrt[n]{a})^{\frac{1}{n}}$$

$$x = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{n}}$$

$$x = (a)^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}$$

$$x = a^{\frac{1}{m \cdot n}}$$

$$x = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Logo,

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Exemplo 8.6:

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[4 \cdot 3]{2} = \sqrt[12]{2}$$

Exemplo 8.7 - OBMEP

OBMEP 2007 - 1ª FASE - NÍVEL 2

5. Qual dos números a seguir está mais próximo de

$$\frac{60,12 \times (0,99)^2}{\sqrt{401}} \quad ?$$

- A) 0,03
- B) 0,3
- C) 3
- D) 30
- E) 300

Solução:

Temos que: $\sqrt{400} = 20$, logo $\sqrt{401} \approx 20$

$60,12 \approx 60$ e $0,99 \approx 1$ e $1^n = 1$, onde temos: $\frac{60 \cdot 1}{20} \approx 3$, alternativa C.

8.2 Operações com radicais

É possível operar com radicais, somando, subtraindo, multiplicando ou dividindo, desde que os radicais sejam semelhantes e aplicando, em alguns casos, propriedades da potenciação e radiciação.

Radicais semelhantes são aqueles que têm o mesmo índice e o mesmo radicando.

8.2.1 Adição e subtração de radicais

Para somar ou subtrair radicais é preciso reduzir os termos semelhantes.

Exemplos 8.8:

$$(a) \quad 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 7\sqrt{3} =$$

$$(2 - 5 + 7) \cdot \sqrt{3} =$$

$$4\sqrt{3}$$

$$(b) \quad -3\sqrt{27} + 2\sqrt{48} =$$

$$-3\sqrt{9 \cdot 3} + 2\sqrt{16 \cdot 3} =$$

$$-3 \cdot 3\sqrt{3} + 2 \cdot 4\sqrt{3} =$$

$$-9\sqrt{3} + 8\sqrt{3} =$$

$$(-9 + 8) \cdot \sqrt{3} =$$

$$-\sqrt{3}$$

8.2.2 Multiplicação de radicais

Para multiplicar radicais aplicam-se algumas propriedades de radiciação e reduz os termos semelhantes, conforme o caso.

Exemplos 8.9:

$$(a) \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} =$$

$$\sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{10}$$

$$(b) \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} =$$

$$\sqrt{2 \cdot 8} =$$

$$\sqrt{16} = 4$$

$$(c) \sqrt{2} \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{10}) =$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{10} =$$

$$\sqrt{2 \cdot 6} + \sqrt{2 \cdot 10} =$$

$$\sqrt{12} + \sqrt{20} =$$

$$\sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{4 \cdot 5} =$$

$$2\sqrt{3} + 2\sqrt{5}$$

8.2.3 Divisão de radicais

Para dividir radicais aplicam-se algumas propriedades de radiciação e reduz os termos semelhantes, conforme o caso.

Exemplos 8.10:

$$(a) \quad \sqrt{8} : \sqrt{2} =$$

$$\sqrt{8 : 2} =$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$(b) \quad \frac{\sqrt{3xy}}{\sqrt{27x^3y}} =$$

$$\sqrt{\frac{3xy}{27x^3y}} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{9x^2}} = \frac{1}{3x}$$

8.3 Racionalização

8.3.1 Expressão irracional

Expressão irracional é aquela que contém um radical irredutível, ou seja, aquele em que o radicando, um número inteiro, não tem raiz inteira.

Exemplos 8.11:

$$\sqrt{5}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{-2}{\sqrt{7}}, \sqrt{3} - 4.$$

8.3.2 Racionalizando denominadores

Quando temos o quociente $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, podemos multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt{2}$ e fica:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3 \cdot 2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

O processo de transformar o quociente $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ em $\frac{\sqrt{6}}{2}$ é conhecido como racionalização.

Na racionalização de um quociente o denominador se transforma em um número racional.

1º Caso: O denominador é um radical quadrático.

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, onde $\sqrt{b}$ é irracional e seja a expressão irracional $\frac{a}{\sqrt{b}}$.

Para tornar o denominador um número racional devemos multiplica-lo por si próprio.

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$$

Observe que o quociente não foi alterado, pois $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = 1$.

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}.$$

Exemplo 8.12:

Racionalize $\frac{6}{\sqrt{3}}$.

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}$$

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = 2 \cdot \sqrt{3}$$

2º Caso: O denominador é um radical n-ésimo.

Sejam $a, b, m, n \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, $n > 0$, onde $\sqrt[n]{b^m}$ é irracional e seja a expressão irracional $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$.

Para tornar o denominador um número racional devemos multiplica-lo por si próprio com o expoente do radicando sendo subtraído do índice do radical.

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}}$$

Observe que o quociente não foi alterado, pois $\frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}} = 1$.

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m} \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}$$

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m} \cdot b^{n-m}}$$

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{m+n-m}}}$$

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}}$$

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

Exemplo 8.13:

Racionalize $\frac{6}{\sqrt[7]{2^3}}$.

$$\frac{6}{\sqrt[7]{2^3}} = \frac{6}{\sqrt[7]{2^3}} \cdot \frac{\sqrt[7]{2^{7-3}}}{\sqrt[7]{2^{7-3}}}$$

$$\frac{6}{\sqrt[7]{2^3}} = \frac{6 \cdot \sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^3} \cdot \sqrt[7]{2^4}}$$

$$\frac{6}{\sqrt[7]{2^3}} = \frac{6 \cdot \sqrt[7]{16}}{\sqrt[7]{2^3} \cdot 2^4}$$

$$\frac{6}{\sqrt[7]{2^3}} = \frac{6 \cdot \sqrt[7]{16}}{\sqrt[7]{2^7}}$$

$$\frac{6}{\sqrt[7]{2^3}} = \frac{6 \cdot \sqrt[7]{16}}{2}$$

$$\frac{6}{\sqrt[7]{2^3}} = 3 \cdot \sqrt[7]{16}$$

3º Caso: O denominador é a soma ou a diferença de dois radicais quadráticos.

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ e $c > 0$, onde $\sqrt{b}$ ou $\sqrt{c}$ são irracionais e seja a expressão irracional $\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$.

Para tornar o denominador um número racional devemos multiplica-lo por si próprio, porém invertendo o sinal entre os termos do denominador, o que chamamos de conjugado.

$$\frac{a}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})} = \frac{a}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})} \cdot \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{b} - \sqrt{c})}$$

$$\frac{a}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})} = \frac{a \cdot (\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c}) \cdot (\sqrt{b} - \sqrt{c})}$$

$$\frac{a}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})} = \frac{a \cdot (\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2 - (\sqrt{c})^2}$$

$$\frac{a}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})} = \frac{a \cdot (\sqrt{b} - \sqrt{c})}{b - c}$$

$$\frac{a}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})} = \frac{a}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})} \cdot \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{b} - \sqrt{c})}$$

$$\frac{a}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})} = \frac{a \cdot (\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c}) \cdot (\sqrt{b} - \sqrt{c})}$$

$$\frac{a}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})} = \frac{a \cdot (\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2 - (\sqrt{c})^2}$$

$$\frac{a}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})} = \frac{a \cdot (\sqrt{b} - \sqrt{c})}{b - c}$$

Exemplo 8.14:

Racionalize $\frac{2}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})}$.

$$\frac{2}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})}$$

$$\frac{2}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$\frac{2}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})}{5 - 3}$$

$$\frac{2}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2}$$

$$\frac{2}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

4º Caso: O denominador é a soma ou a diferença de dois radicais n-ésimos.

Sejam $a, b, c, n \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ e $c > 0$, onde $\sqrt[n]{b}$ ou $\sqrt[n]{c}$ são irracionais e seja a expressão irracional $\frac{a}{\sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{c}}$.

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{c}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{c}} \cdot \frac{(\sqrt[n]{b^{n-1}} + \sqrt[n]{b^{n-2} \cdot c} + \sqrt[n]{b^{n-3} \cdot c^2} + \dots + \sqrt[n]{b \cdot c^{n-2}} \cdot \sqrt[n]{c^{n-1}})}{(\sqrt[n]{b^{n-1}} + \sqrt[n]{b^{n-2} \cdot c} + \sqrt[n]{b^{n-3} \cdot c^2} + \dots + \sqrt[n]{b \cdot c^{n-2}} \cdot \sqrt[n]{c^{n-1}})}$$

Exemplo 8.15:

Racionalize $\frac{2}{(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3})}$.

$$\frac{2}{(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3})} = \frac{2}{(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3})} \cdot \frac{(\sqrt[3]{5^{(3-1)}} + \sqrt[3]{5^{(3-2)} \cdot 3} + \sqrt[3]{5^{(3-3)} \cdot 3^2})}{(\sqrt[3]{5^{(3-1)}} + \sqrt[3]{5^{(3-2)} \cdot 3} + \sqrt[3]{5^{(3-3)} \cdot 3^2})}$$

$$\frac{2}{(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3})} = \frac{2}{(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3})} \cdot \frac{(\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5 \cdot 3} + \sqrt[3]{5^0 \cdot 3^2})}{(\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5 \cdot 3} + \sqrt[3]{5^0 \cdot 3^2})}$$

$$\frac{2}{(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3})} = \frac{2}{(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3})} \cdot \frac{(\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2})}{(\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2})}$$

$$\frac{2}{(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3})} = \frac{2 \cdot (\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2})}{(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3}) \cdot (\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2})}$$

$$\frac{2}{(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3})} = \frac{2 \cdot (\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9})}{(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3}) \cdot (\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2})}$$

$$\frac{2}{(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3})} = \frac{2 \cdot (\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9})}{\sqrt[3]{5 \cdot 5^2} + (\sqrt[3]{5 \cdot 15}) + (\sqrt[3]{5 \cdot 9}) - (\sqrt[3]{3 \cdot 25}) - (\sqrt[3]{3 \cdot 15}) - (\sqrt[3]{3 \cdot 3^2})}$$

$$\frac{2}{(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3})} = \frac{2 \cdot (\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9})}{\sqrt[3]{5^3} + (\sqrt[3]{75}) + (\sqrt[3]{45}) - (\sqrt[3]{75}) - (\sqrt[3]{45}) - (\sqrt[3]{3^3})}$$

$$\frac{2}{(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3})} = \frac{2 \cdot (\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9})}{5 - 3}$$

$$\frac{2}{(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3})} = \frac{2 \cdot (\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9})}{2}$$

$$\frac{2}{(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3})} = 2 \cdot (\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9})$$

Expressões numéricas

Resolve-se obedecendo:

1 - A ordem das operações:

1º) Potências e raízes;

2º) Multiplicação e divisão;

3º) Adição e subtração.

2 - A ordem dos sinais de associação:

- 1º) Parenteses ();
2º) Colchetes [];
3º) Chaves { }.

Exemplo 8.16 - OBMEP

OBMEP 2008 - 1ª FASE - NÍVEL 2

2. Podemos colocar de várias maneiras um par de parênteses na expressão $20 \div 2 + 3 \times 6$, como, por exemplo, $20 \div (2 + 3 \times 6)$ e $20 \div (2 + 3) \times 6$. Qual é o maior valor que se pode obter desse modo?

- (A) 24
(B) 28
(C) 30
(D) 78
(E) 138



Temos 4 soluções possíveis:

- 1) $20 : 2 + 3 \cdot 6 = 10 + 18 = 28$
- 2) $(20 : 2 + 3) \cdot 6 = (10 + 3) \cdot 6 = 13 \cdot 6 = 78$
- 3) $20 : (2 + 3) \cdot 6 = 20 : 5 \cdot 6 = 4 \cdot 6 = 24$
- 4) $20 : (2 + 3 \cdot 6) = 20 : (2 + 18) = 20 : 20 = 1$

Portanto, o maior valor que se pode obter, colocando um par de parenteses na expressão é 78, alternativa D.

CONCLUSÕES

Esta dissertação não tem a pretensão de ser um fim para o ensino de matemática por meio de uma sequência didática para alunos do ensino básico e uso do professor em sala de aula, uma vez que a realidade das escolas brasileiras, no que diz respeito ao processo de aprendizagem, se dá de forma diferenciada e em diferentes níveis. A abordagem de conjuntos numéricos objetivou localizar o aluno nas diversas formas de representação de quantidades e a forma de operar com estas, auxiliando-o na construção dos algoritmos para a realização de operações elementares em matemática, principalmente no conjunto dos números racionais, considerado o conjunto com maior dificuldade de entendimento pela maior parte dos alunos. De tal forma este conteúdo foi apresentado de forma gradativa e ilustrada com figuras para melhor compreensão das operações básicas, principalmente a adição/subtração de frações com denominadores diferentes. Ainda no conjunto dos números racionais, uma atenção foi dada as operações de multiplicação e divisão de números decimais, onde a localização da vírgula no resultado final, quando esta aparece, normalmente é localizada no lugar errado. Os capítulos sobre potenciação e radiciação e suas propriedades foram apresentados de forma a consolidar os requisitos necessários a resolução de expressões numéricas mais complexas, e ainda, na tentativa de facilitar a resolução de funções onde, após substituídas as variáveis depara-se com as expressões numéricas. O capítulo dedicado a razão, proporção e regra de três simples e composta tem a intenção de oferecer ao aluno suporte para resolução de problemas onde os tópicos acima citados sirvam como uma ferramenta alternativa. Sugere-se ao professor, sempre que necessário, fazer as adaptações que achar pertinente para que esta dissertação seja aproveitada da melhor forma possível no aprendizagem dos alunos.

Referências Bibliográficas

- [1] K. I. M. O. K. I. M. Corcho. *Iniciação à matemática: Um curso com problemas e resoluções*. Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, Rio de Janeiro - RJ, 2010.
- [2] A. HEFEZ. *Elementos da Aritmética*. Coleção Textos Universitários, SBM, Rio de Janeiro - RJ, 2006.
- [3] A. HEFEZ. *Aritmética*. Coleção PROFMAT, SBM, 2014.
- [4] F. Jamil. *A construção dos números*. Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, Rio de Janeiro - RJ, 2010.
- [5] E. L. Lima. *A Matemática do Ensino Médio. Volume 1*. SBM, Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro - RJ, 2004.
- [6] N. C. S. . M. F. B. Moreira, Carlos Gustavo T. de Araujo. *Tópicos de Teoria dos Números*. Coleção PROFMAT, Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, Rio de Janeiro - RJ, 2015.
- [7] D. S. Mori, Iracema. Onaga. *Para Aprender Matemática*. Editora Saraiva, São Paulo - SP, 1992.
- [8] D. Muniz, Amaury Pereira. Freire. *Enciclopédia Orgânica Matemática. 3º volume*. Brasília Editora S/A, Vitória - ES, 1986.
- [9] I. Niven. *Números: Racionais e irracionais*. Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, Rio de Janeiro - RJ, 1984.
- [10] Á. Andrini. *Praticando Matemática, 5ª série*. Editora do Brasil S/A, 1989.
- [11] Á. Andrini. *Praticando Matemática, 6ª série*. Editora do Brasil S/A, 1989.
- [12] Á. Andrini. *Praticando Matemática, 7ª série*. Editora do Brasil S/A, 1989.
- [13] Á. Andrini. *Praticando Matemática, 8ª série*. Editora do Brasil S/A, 1989.