



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ – UECE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA – PRPGPq
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

BRUNO DE SENA PINHEIRO

**LOGARITMOS: UMA APRESENTAÇÃO
CONTEXTUALIZADA PARA EDUCAÇÃO BÁSICA**

**Fortaleza – Ceará
2013**



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ – UECE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA – PRPGPq
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT**

BRUNO DE SENA PINHEIRO

**LOGARITMOS: UMA APRESENTAÇÃO
CONTEXTUALIZADA PARA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Professor Dr. João Montenegro de Miranda

**Fortaleza – Ceará
2013**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Biblioteca Central Prof. Antônio Martins Filho
Bibliotecário (a) Leila Cavalcante Sátiro – CRB-3 / 544

P654l Pinheiro, Bruno de Sena.

Logaritmos: uma apresentação contextualizada para educação básica/Bruno de Sena Pinheiro. — 2013.

CD-ROM 46f. : il. (algumas color.) ; 4 ¾ pol.

“CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico, acondicionado em caixa de DVD Slin (19 x 14 cm x 7 mm)”.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2013.

Área de Concentração: Matemática.

Orientação: Prof. Dr. João Montenegro de Miranda.

1. Contextualização. 2. Ensino contextualização. 3. Logaritmos. 4. Logaritmo natural. I. Título.

CDD: 510

BRUNO DE SENA PINHEIRO

**LOGARITMOS: UMA APRESENTAÇÃO CONTEXTUALIZADA PARA
EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Centro de Ciências e Tecnologias da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática.

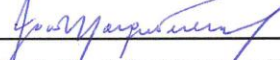
Aprovada em: 29/08/2013.

BANCA EXAMINADORA




Prof. Dr. João Montenegro de Miranda (Orientador)

Universidade Estadual do Ceará – UECE



Prof. Dr. João Marques Pereira

Universidade Estadual do Ceará - UECE



Prof. Dr. José Robério Rogério

Universidade Federal do Ceará - UFC

À minha esposa Rosângela e à minha mãe
Maria Antônia

Agradecimentos

Cada etapa de nossas vidas é repleta de alegrias e dificuldades, com o período compreendido nestes dois anos de mestrado não foi diferente. A alegria necessária para apreciar cada aula assistida foi amplamente demonstrada por meus colegas e professores, e graças a eles o aprendizado obtido foi grandioso, me fazendo superar todas as dificuldades que inoportunamente apareceram em meu caminho.

Agradeço primeiramente a Deus que me permitiu chegar onde estou de maneira saudável e com tantas experiências para compartilhar.

À minha esposa, Rosângela Nobre da Silva, que me apoiou todos os dias desde que a conheci e compreendeu as constantes necessidades de estudos extras durante nossos fins de semanas.

Aos meus colegas e professores, que me acompanharam de maneira tão agradável durante todos os momentos em que estivemos unidos em sala de aula, debatendo e discutindo sobre a maravilhosa ciência dos números.

À Luiza Maria Morais Lima que me acompanhou até mesmo nos estudos fatídicos no meio da semana, entre uma aula e outra da escola em que lecionamos e durante as horas de almoço.

À minha mãe, Maria Antônia de Sena Pinheiro, cuja dedicação à criação dos filhos foi, e sempre será, uma prioridade notável e admirada por todos que a conhecem.

Aos Professores João Marques, Cleiton Vasconcelos e Othon Lopes, por dividirem comigo o seu conhecimento.

Ao coordenador do mestrado, Professor Guilherme Ellery cuja empolgação e empenho em fazer o PROFMAT ser um sucesso cativou profundamente a todos nós.

Ao meu orientador, Professor João Montenegro, sem o qual eu não teria conseguido realizar este trabalho.

“Não há nenhum ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia ser aplicado a fenômenos do mundo real”.

(Nikolai Lobachevsky)

Resumo

Destacamos o uso da contextualização no ensino de matemática como forma de incentivar a aprendizagem dos conteúdos. Para isto, estudamos as principais características do ensino contextualizado e o aplicamos à teoria dos logaritmos, dando ênfase às necessidades que estimularam sua criação e às suas atuais utilizações nas ciências. Apresentamos características importantes dos logaritmos para o conhecimento do professor que pode reforçar sua confiança em sala de aula, tornando-a mais agradável a seus alunos.

Palavras-chave: Contextualização, Ensino contextualizado, Logaritmos, Logaritmo Natural.

Abstract

We emphasize the use of situated learning mathematics as a way of encouraging the learning of content. For this, we study the main characteristics of situated learning and apply the theory of logarithms, emphasizing the needs that prompted its creation and its current uses in science. We present key features of logarithms for teacher knowledge that can strengthen your confidence in the classroom, making it more enjoyable to their students.

Keywords: Contextualization, contextualized education, Logarithms, Natural Logarithm.

Sumário

LISTA DE FIGURAS	10
LISTA DE TABELAS	11
INTRODUÇÃO.....	12
1. SITUAÇÃO ATUAL DO ENSINO DE MATEMÁTICA.....	14
1.1. Contextualização do conteúdo.....	15
1.2. Procedimentos Pré-aula.....	17
2. ESTUDO CONTEXTUALIZADO DE LOGARÍTMOS	19
2.1. Considerações iniciais	19
2.2. Potência de um número real.....	19
2.2.1. Números irracionais.....	21
2.3. História da criação do logaritmo	22
2.3.1. Antes do logaritmo	23
2.3.2. Surgimento.....	24
2.3.3. A lógica para criação do logaritmo de Napier e Briggs.....	25
2.3. Definição e Propriedades dos logaritmos	27
2.4. Mudança de base	30
2.5. Função logarítmica	30
2.5.1. Teorema de Caracterização das Funções Logarítmicas	31
2.6. Aplicações dos logaritmos nas ciências.....	33
2.6.1 Escalas Logarítmicas	33
2.6.1.1. Escalas Richter e Escala de Magnitude de Momento (MMS).....	34
2.6.1.2. Escala de pH	36
3. LOGARITMO NATURAL	38
3.1 Número e	41
3.2. Aplicações do Logaritmo Natural	43
4. CONSIDERAÇÕES FINAIS	45
REFERÊNCIAS	46

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Definição geométrica do Logaritmo.....	27
Figura 2: Esboços do gráfico para uma função logarítmica.....	32
Figura 3: Região H_a^b	39
Figura 4: Polígonos retangulares sob o gráfico da hipérbole $y = 1/x$	40
Figura 5: Áreas conjugadas sob o gráfico da hipérbole $y = 1/x$	41
Figura 6: Área equivalente a unidade sob o gráfico da hipérbole $y = 1/x$	42

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Exemplo de relação entre P.A. e P.G.....	26
Tabela 2: Sequências de logaritmos de Napier.....	27
Tabela 3: Logaritmos decimais.....	28
Tabela 4: Referência para o estudo de abalos sísmicos.....	37

INTRODUÇÃO

Durante os primeiros anos como docente no ensino médio pude notar a dificuldade de muitos alunos acerca de determinados assuntos do conteúdo de matemática. Estes assuntos geralmente causam um profundo desconforto nos estudantes cujas habilidades matemáticas não estão totalmente desenvolvidas.

Quando aluno, adorava o brilhante jogo lógico proporcionado pelas aulas de matemática e física. No entanto, concordava com meus colegas que achavam alguns conteúdos lecionados inúteis para vida prática futura. Logaritmo, Trigonometria e Números Complexos são exemplos de assuntos que me divertiam ao propor exercícios desafiantes, mas que ao mesmo tempo não se enquadravam na minha ideia de indispensáveis para o ensino básico de matemática.

Ao me tornar professor, pude conhecer mais profundamente os assuntos citados e entender a revolução que proporcionaram ao serem descobertos. O avanço científico causado nos mais variados campos das ciências quando, por exemplo, surgiu o logaritmo é fascinante. E esta fascinação iria ser apresentada sempre que o assunto fosse tratado por mim em sala de aula.

Ingressando no ensino público percebi uma pressão considerável feita pela escola para com seu corpo docente, na tentativa de construir um método de ensino mais contextualizado que fugisse do que já estava tão tradicionalmente enraizado dentro das salas de aulas. Este ensino contextualizado, no entanto, me foi apresentado de uma maneira notadamente equivocada, na qual cada conteúdo que fosse lecionado deveria estar diretamente relacionado ao cotidiano do discente. A criação de exercícios com textos gigantescos era um modo de “contextualizar” muito praticado até então na escola e isto me deixou profundamente chocado.

Ficou evidente também, nos anos em que trabalhei nesta escola, que os professores pouco sabiam sobre a história da matéria que lecionavam e tinham profundo descontentamento ao se verem obrigados a modificar sua metodologia em prol da “contextualização” que acreditavam ser uma aplicação infrutífera da difícil tarefa de lecionar

matemática.

Este trabalho visa levantar ideias para criação de uma metodologia de ensino que aplique uma forma de contextualizar matemática levando em conta sua vasta história e as atuais aplicações de cada conteúdo.

Apresentamos ainda um exemplo de ensino contextualizado aplicado ao estudo dos logaritmos. Mostramos as principais noções que um professor necessita para contextualizar o logaritmo e motivar os alunos a se esforçarem na aprendizagem deste assunto.

1. SITUAÇÃO ATUAL DO ENSINO DE MATEMÁTICA

O ensino de matemática passou por diversas transformações ao longo de sua história recente. As atuais buscas por uma prática eficiente que consiga um aprendizado real dos conhecimentos matemáticos abordados em cada ano da educação básica são frutos da insatisfação com a educação que prevalece nos cursos de licenciatura em matemática dentro das instituições de ensino superior, sejam elas públicas ou privadas.

Encontramos em nossas escolas dificuldades que se apresentam de diversas formas, e que podem ser apontadas como fatores para a grave situação no aprendizado, não só de matemática. Esta situação é também responsável pela falta de ânimo que atinge os professores dia após dia.

Aliado a todos os fatores pessoais e estruturais que permeiam a situação de nossos estudantes, temos ainda um grave problema a ser solucionado no campo de nossa tão amada ciência matemática. Problema este que está muito mais ligado ao costume e comodismo do que a um estudo sério que vise melhorar o ensino da disciplina. A docência em Matemática vista nas escolas brasileiras ainda é considerada extremamente tradicional, principalmente no contexto do Ensino Médio, baseada prioritariamente na transmissão dos métodos e conhecimentos específicos a cada conteúdo sem uma relação evidenciada entre os vários saberes matemáticos. Como é dito por D'Ambrosio (1986):

Tradicionalmente, o ensino de matemática é feito pelo acúmulo de conteúdo. O que se faz é acumular conteúdos e um jovem que entra num 1º ano universitário faz disciplinas que não diferem essencialmente do que se fazia há cem anos atrás. (D'Ambrosio, 1986, p. 22)

O comentário do autor se faz em relação aos cursos superiores para o magistério em Matemática, mas é claro que podemos aplicar a observação a todos os níveis de ensino. Se os professores possuem uma formação tradicional é de se esperar que tenham a tendência de colocar este método em prática durante sua docência, que será marcada por um grande formalismo aliado a um rigor na correção das respostas dadas pelos alunos.

Tendo como base essa realidade, vemos a necessidade da criação de estratégias para um melhor desenvolvimento matemático dos nossos alunos. Com foco na melhoria do ensino através da superação do pensamento tradicional temos a criação de Parâmetros

Curriculares Nacionais, os PCN's, que colocam diretamente para os docentes a urgência na mudança desta visão de rigor tendo como base os números tão ruins obtidos nas avaliações nacionais e regionais a respeito da disciplina de matemática na formação básica.

[...] não basta revermos a forma ou metodologia de ensino, se mantivermos o conhecimento matemático restrito à informação, com as definições e os exemplos, assim como a exercitação, ou seja, exercícios de aplicação ou fixação. Pois, se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as idéias isoladas e desconectadas umas das outras. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir as múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidas nos diversos conteúdos; no entanto, o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos frente à Matemática mostram claramente que isso não é verdade. (PCN – Ensino Médio)

Nesta perspectiva de procura por um modo mais convincente de ensino da matemática foram feitas muitas pesquisas e análises por diversos segmentos da educação. É claro que nesta busca por novas maneiras de ensinar ocorreu a criação de muitas teorias que serviram, apenas, para deixar a comunidade docente mais confusa.

1.1. Contextualização do conteúdo

Levando em conta o que está escrito no PCN de matemática para o ensino médio, podemos perceber que, independente da metodologia criada para o ensino de matemática, ela deve ser contextualizada e interdisciplinar.

O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. (PCN – Ensino Médio)

No entanto a ideia de contextualização não é bem compreendida pela grande maioria dos professores de matemática. É comum vermos a criação de aplicações forçadas para a maioria dos conteúdos vistos na educação básica, visando trazer os mecanismos do objeto de estudo para a realidade cotidiana dos estudantes.

É justamente o foco em ensinar a matemática do dia a dia vivido pelo aluno que dificulta a vida profissional dos professores de matemática dispostos a contextualizar sua metodologia. Estes docentes tendem a dar pouca importância aos conteúdos cuja aplicação não está ligada diretamente a vida comum.

O erro dado a essa visão de contextualização está na grande necessidade de

aplicação do conhecimento sem a criação de um método de generalização que permita ao aluno sair daquele exemplo aplicado para outros exemplos que se encaixem no conteúdo estudado. Dessa forma voltamos à ideia de uma massiva memorização de questões como era feita na perspectiva tradicional do ensino da matemática, só que agora, essas questões terão enunciados maiores forçando a aparência de utilidade imediata em nossas vidas.

Para a criação de uma metodologia baseada na contextualização, é preciso definir o que é contexto. Tomando a definição dada por Roseira (2010):

O termo contexto tem origem nas palavras latinas cum (com) e texere (tecer, fabricar) – esta última, palavra que também deu origem aos termos 'texto' e 'tecnologia' –, cuja nova formação – contexere – sugere a ideia de entretecido, de abarcamento e de conexões de coisas.

Vemos que a metodologia com foco na contextualização deve possuir um forte apelo à conexão com outras formas de pensamento, ou mesmo disciplinas. Retomamos assim o que é descrito pelos PCN's.

D'Ambrosio (1986, p. 16) concorda com a ideia de situar a ciência matemática em um contexto integrado, que mesmo podendo retirar parte da autonomia da disciplina, permitirá que seus conceitos sejam mais acessíveis e utilizados em vários níveis.

Como já foi dito, alguns professores encontram dificuldade em relacionar o contexto correto a cada conteúdo resultando na contextualização de parte do currículo enquanto o restante é visto de forma tradicional, retirando-se quase que completamente a interação dos estudantes com o conhecimento que deve ser adquirido, fazendo deles espectadores passivos do aprendizado.

Estes conteúdos, cujas dificuldades de se criarem contextos adequado por parte dos professores, são, em geral, aqueles amplamente considerados como “bichos de sete cabeças” pelos estudantes do ensino médio. Como exemplos podemos citar a trigonometria, as funções logarítmicas e os números complexos.

A dificuldade principal relacionada ao estudo de contextos para estes conteúdos vem da falta de conhecimento histórico da criação de cada um, ressaltando a problemática que eles vieram solucionar, bem como a atual utilização dessas ferramentas para as ciências e avanço tecnológico. Este conhecimento é defendido pelos PCN's como uma forma de integralizar os conteúdos e dar substancial ajuda à ampliação da ligação do aluno com o conhecimento.

Podemos agora idealizar que para a criação de uma metodologia de ensino de

matemática baseada em contextualização do conhecimento devemos primeiramente conhecer o contexto histórico do que será ensinado, dando ênfase às necessidades da época que foram solucionadas com o seu surgimento, transmitir e generalizar os conhecimentos a cerca do objeto estudado desenvolvendo o método a partir do seu contexto histórico, encontrar as relações do objeto com as várias disciplinas da grade curricular de Ciências, e por fim, estar pronto para dizer, questionado ou não pelo aluno, onde o objeto está sendo atualmente aplicado.

Estes procedimentos tendem a trazer mais segurança para o professor em sua prática, e conseqüentemente, repassar de forma mais clara o conteúdo, dando mais motivação para que o discente se interesse em receber e interagir com o conhecimento ministrado, podendo ele próprio criar as relações necessárias para a real aprendizagem.

1.2. Procedimentos Pré-aula

Antes de começar o conteúdo ligado a um determinado assunto da grade curricular de matemática o professor precisa pesquisar o máximo que puder sobre a origem daquele conteúdo. Tentando entender exatamente o que levou aquele assunto a ser abordado pela primeira vez, como se deu esta abordagem e quais as curiosidades por trás da criação.

Para este fim, no mundo atual, temos uma ferramenta de extrema importância a nos ajudar em praticamente todos os momentos de nosso dia. Estou falando, obviamente, da internet e em todos os dispositivos criados para torná-la acessível em todos os locais e instantes que quisermos.

A grande quantidade de informações que circulam pela internet faz dela uma potencial fonte de pesquisa. É claro, no entanto, que devemos ter o discernimento de avaliar criticamente tudo que visualizamos por ela, para não sermos vítimas das pegadinhas pregadas por informações incompletas ou inverídicas.

Portanto, para nós professores, é nas pesquisas *online* que procuramos a forma mais rápida de nos situarmos em uma determinada posição a cerca de um assunto, e posteriormente aguçaremos nossos conhecimentos com os livros a cerca dos assuntos que iremos lecionar.

Depois de adquirir o conhecimento sobre a origem do assunto a se lecionar é preciso entender as metodologias e procedimentos para a manipulação correta de símbolos e

algoritmos, além de poder definir e apresentar propriedades de maneira clara e objetiva, para que o aluno possa absorver as informações e criar as conexões necessárias com o contexto histórico do assunto.

Por fim, é preciso estar capacitado para mostrar as aplicações do assunto para o progresso da humanidade, sejam estas aplicações simples ou não para os atuais conhecimentos dos estudantes. Se o professor puder passar segurança na utilização prática dos assuntos nos ramos científico e tecnológico, haverá uma maior disposição, por partes dos alunos, em querer obter aquele conhecimento.

2. ESTUDO CONTEXTUALIZADO DE LOGARÍTMOS

2.1. Considerações iniciais

Segundo a Matriz Curricular vigente para o ensino de matemática no estado do Ceará, o conteúdo funções logarítmicas deve ser lecionado aos alunos do 1º ano no decorrer do terceiro bimestre juntamente com funções exponenciais e funções modulares.

Para grande maioria dos alunos, por maior que tenham sido suas dificuldades ao estudar potências de números reais, as funções exponenciais tendem a ser mais bem aceitas em sala de aula do que os logaritmos. Isto se dá, provavelmente, por ser o logaritmo algo muito novo na vida dos estudantes, enquanto as funções exponenciais estão ligadas ao estudo de potências causando um sentimento de continuidade de estudos, mesmo que tal estudo tenha sido fragmentado nos anos anteriores.

Esse mal estar por ver algo tão novo faz com que os logaritmos sejam depreciados pelos alunos, e pouco valorizados já que não é tão fácil visualizar sua importância em relação aos assuntos vistos até então pelos estudantes do 1º ano do ensino médio.

Para tentar minimizar os efeitos negativos nas primeiras impressões com o conteúdo, se faz necessário o uso da história a cerca da criação dos logaritmos, apresentado inicialmente a problemática que seria solucionada com seu surgimento.

2.2. Potência de um número real

Iniciaremos este parágrafo com uma revisão de potências de números reais. Para evitar uma maior fragmentação do conhecimento é importante que o professor tenha familiaridade com os conceitos e procedimentos a se tomar a cerca da potenciação.

Definimos inicialmente a potencia a^n com a um número real e um inteiro $n > 0$ como o produto de n fatores iguais à a .

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

Note que a propriedade $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ é válida para n e m naturais.

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_n \cdot \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_m = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n+m} = a^{n+m}$$

Queremos que as potências gozem da propriedade acima.

Como $a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n$, então é natural que definamos $a^0 = 1$.

Por outro lado, $a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$, então definimos $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Temos assim definidos a potência a^n para todo n inteiro.

Outra propriedade das potências é $(a^n)^p = a^{np}$, para todos n e p inteiros.

O caso $p > 0$ é uma consequência imediata da propriedade citada anteriormente.

$$(a^n)^p = \underbrace{a^n \cdot \dots \cdot a^n}_p = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_n \cdot \dots \cdot \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \cdot p} = a^{n \cdot p}$$

A noção de potência para números inteiros é de fácil compreensão para os estudantes. A surpresa maior ocorre quando ampliamos o conceito para abranger todos os números racionais.

Dado $r \in \mathbb{Q}$, isto é $r = \frac{m}{n}$, com m sendo inteiro e $n \neq 0$ natural.

Temos que:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = \underbrace{a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} \cdot \dots \cdot a^{\frac{m}{n}}}_n = a^{\frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \dots + \frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m$$

Ou seja, $a^{\frac{m}{n}}$ é o número cuja n -ésima potência é a^m , que é definido como o radical $\sqrt[n]{a^m}$.

Sem dúvida a relação entre potências de expoente fracionário e radicais pode ser perturbadora para quem a percebe pela primeira vez. E infelizmente, ainda é possível encontrar alunos que não tenham se deparado com esta noção de potência de expoente

racional durante o ensino fundamental. É imprescindível que o professor teste estes conhecimentos antes de iniciar o estudo de funções exponenciais e posteriormente logarítmicas, e se necessário tente aguçar a intuição dos alunos para que aceitem o fato de maneira ampla e possam manipular potências e radicais como sendo elementos similares.

2.2.1. Números irracionais

Até este momento vimos definições, de certa forma simples, para as potências de um número real com expoente racional. No entanto, se faz necessário saber como funcionará uma potência caso seu expoente seja real e não racional.

Os números irracionais causaram uma grande reviravolta quando foram descobertos. Os chamados números incomensuráveis¹ foram uma pedra no sapato dos matemáticos gregos, com destaque para os pitagóricos.

Para definirmos potência de expoente irracional usaremos um fato muito importante relativo aos números reais:

Teorema: Qualquer intervalo de números reais que possua mais de um elemento contém números racionais e irracionais.

Demonstração: Dado um intervalo de números reais I , certamente haverá nele números irracionais, pois do contrário seria enumerável. Para provar que I contém números racionais tomamos $[a, b] \subset I$, onde $a < b$ podem ser supostos irracionais. Fixemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < b - a$. Os intervalos $I_m = [m/n, (m+1)/n]$, $m \in \mathbb{Z}$, cobrem a reta real, isto é, $\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} I_m$. Portanto existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $a \in I_m$. Como a é irracional, temos $m/n < a < (m+1)/n$. Sendo o comprimento $1/n$ do intervalo I_m menor do que $b - a$, segue-se que $(m+1)/n < b$. Logo o número racional $(m+1)/n$ pertence ao intervalo $[a, b]$, e portanto ao intervalo I .

Assim sendo dois números irracionais diferentes são extremos de um intervalo que contém vários racionais². Com base nisso podemos dizer que se dois números irracionais

¹ Números que não podem ser obtidos como múltiplos de um mesmo valor padrão.

² A demonstração deste fato pode ser encontrada em Análise Real volume 1, pág 19.

possuem as mesmas aproximações, por números racionais, então estes números são iguais, pois se p, q são números irracionais tais que $p < q$ então o intervalo $[p, q]$ possui algum número racional r tal que $p < r < q$ mostrando que as aproximações por racionais de p e q são diferentes.

Usando a ideia acima teremos que o número a^p com p irracional e $a \in \mathbb{R}^+$ será o valor que possui aproximações por excesso e falta iguais à a^r e a^s com $r, s \in \mathbb{Q}$.

Por fim é preciso mostrar que $a^p = a^q$ com $p, q \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^+$, sendo $a \neq 1$, é verdadeiro se, e somente se, $p = q$. Para isso, é necessário usar um teorema demonstrado no livro *Logaritmos* da coleção *Fundamentos de Matemática Elementar* (Iezzi, 1993, p. 28, 29, 30, 31 e 32):

Dado $p, q \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^+$ teremos:

$$\text{Caso } a > 1 \quad a^p > a^q \Leftrightarrow p > q$$

$$\text{Caso } 0 < a < 1 \quad a^p > a^q \Leftrightarrow p < q$$

Desta forma fica claro que $a^p = a^q \Leftrightarrow p = q$, pois de outra forma entraríamos em uma das condições do teorema acima o que contradiria a hipótese.

2.3. História da criação do logaritmo

O estudo da história de cada assunto a ser lecionado deve ser feito de maneira a mostrar primeiramente o problema que os cientistas e técnicos possuíam antes da criação de tal elemento, dando assim uma importância relevante àquilo que será ensinado.

Ao lecionarmos um conteúdo matemático pela primeira vez, está técnica visa diminuir bastante as possíveis barreiras que possam surgir nas conexões do que será estudado com o que já foi visto até então na formação de cada aluno. A partir de um problema real, enfrentado pela ciência, fica mais fácil compreender a necessidade de se estudar o conteúdo proposto.

Continuando o apanhado histórico, deve-se apresentar como surgiu a ideia, quem é seu possível criador (ou criadores), por quais melhorias esta técnica passou e quem se beneficiou com seu surgimento.

2.3.1. Antes do logaritmo

Durante o século XVII, campos como astronomia, navegação e engenharia necessitavam constantemente de cálculos numéricos, que na maioria das vezes, demandavam muito tempo e esforço para serem efetuados. Era de extrema importância que os mecanismos utilizados para produzir os resultados exigidos em cada campo de conhecimento fossem simplificados. De acordo com Eves (1995) e Boyer (1974) uma ferramenta comum para cálculos da época era a utilização de uma tábua de cosseno e o uso da fórmula $2 \cdot \cos A \cdot \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$. Note que, adequando-se os números, é possível transformar, com a ajuda dessa expressão trigonométrica, o produto de dois valores na metade da soma de outros dois valores obtidos através dos cossenos da soma e diferença dos ângulos determinados com o uso da tábua. Eves (1995) usa como exemplo a determinação do produto 437,64 por 27,327. Em sua obra, no entanto, o autor apenas ilustra os procedimentos para encontrar o produto que hoje calculamos facilmente com o auxílio de uma calculadora: $437,64 \times 27,327 = 11959,38828$. Pelo procedimento da época deveríamos encontrar A e B , tais que: $\cos A = 0,27327$ e $\cos B = 0,43764$ para então calcular a soma dos cossenos de $(A+B)$ e $(A-B)$, extrair sua metade e obtendo assim o resultado do produto que deverá ser multiplicado por 100.000 e assim corrigir os ajustes iniciais. Com o uso de uma calculadora obteremos os valores:

Para $\cos A = 0,27327$ (note que foi necessário dividir 27,327 por 100 para utilizá-lo)

$$A = 74,1410560^\circ \text{ (Aproximadamente)}$$

Para $\cos B = 0,43764$ (Dessa vez dividi-se 437,64 por 1.000)

$$B = 64,0465994^\circ \text{ (Aproximadamente)}$$

Utilizando estas informações:

$$\cos(A+B) = \cos 138,1876554^\circ = -0,7453323$$

$$\cos(A-B) = \cos 10,0944566^\circ = 0,9845201$$

$$\frac{\cos(A+B) + \cos(A-B)}{2} = \frac{-0,7453323 + 0,9845201}{2} = \frac{0,2391878}{2} = 0,1195939$$

Multiplicando o resultado por 100.000 para ajustá-lo ao produto inicial e encontraremos 11959,39.

Observando os resultados podemos visualizar um erro de cálculo menor que 0,01. Poderíamos amenizar ainda mais o erro da operação com a ampliação da quantidade de casas decimais, no entanto segundo os autores estudados, o criador dos logaritmos possuía apenas tábuas trigonométricas com precisão de 7 casa decimais quando criou sua teoria.

É importante que os alunos façam esses procedimentos, mesmo com uma calculadora, para que entendam a dificuldade do cálculo no método apresentado. Vendo a dificuldade para obter-se o resultado com o uso de uma calculadora científica eles poderão ter uma noção da dificuldade que seria fazer esse procedimento procurando os valores em relações gigantescas de cossenos em que muitas vezes seria necessário usar valores aproximados, pois os valores exatos dificilmente estariam presentes.

2.3.2. Surgimento

John Napier (1550 – 1617) é considerado nos livros que tratam do assunto como o descobridor da metodologia para criação dos logaritmos, apesar de haver relatos de obra contemporânea com metodologia similar criada por Jobst Bürgi (1552-1632), esta fora publicada posteriormente à obra de Napier. A tábua de logaritmos possuía uma grande eficiência na redução do tempo necessário para se calcular produtos, razões, radicais e potências diversas. Sua metodologia foi amplamente divulgada e se tornou ferramenta de grande importância na aplicação da matemática, substituindo a abordagem trigonométrica vista anteriormente.

A maravilhosa invenção de Napier foi entusiasticamente adotada por toda Europa. Na astronomia em particular, já estava passando da hora para ser descoberta; pois como afirmou Laplace, a invenção dos logaritmos “ao diminuir o trabalho, dobrou a vida dos astrônomos”. (Eves, 1995, p. 346)

O trabalho de Napier foi publicado com o título de *Mirifici logarithmorum cononis descriptio* (Descrição da Maravilhosa Lei dos Logaritmos).

A Descriptio despertou interesse imediato e amplo, sendo que no ano seguinte à sua publicação, Henry Briggs (1561 – 1631), professor de geometria do Gresham College de Londres e posteriormente professor de Oxford, viajou até Edimburgo para dar o tributo de seu reconhecimento ao grande inventor dos logaritmos. (Eves, 1995, p. 345)

Foi através de Briggs que Napier percebeu a importância que seu trabalho teria caso modificasse a construção de sua tábua para um valor bem mais conveniente levando em conta o sistema decimal. Assim é creditada a Briggs a construção do logaritmo como conhecemos hoje.

2.3.3. A lógica para criação do logaritmo de Napier e Briggs

A ideia de Napier veio de associar uma progressão geométrica formada por potência do primeiro elemento a uma progressão aritmética de razão e termo inicial iguais a 1, transformando assim uma multiplicação de termos na primeira progressão em uma soma dos termos correspondentes na segunda. Uma tábua construída com estas duas progressões aceleraria consideravelmente os cálculos de um produto ou quociente, pois este seria um resultado, presente na tabela, obtido através de uma soma ou diferença simples.

Como exemplo vejamos a teoria aplicada a uma progressão geométrica de potências de base 2.

Tabela 1: Exemplo de relação entre P.A. e P.G.

P.A.	1	2	3	4	5	...	10	11	12	...	17	18	19	20
P.G.	2	4	8	16	32	...	1024	2048	4096	...	131072	262144	524288	1048576

Para calcularmos um produto ou quociente qualquer dos valores da P.G. basta somarmos ou subtrairmos respectivamente os termos correspondentes na P.A. e vemos o elemento da P.G. relacionado ao resultado. Para efetuar o produto 32×4096 observemos que 32 e 4096 estão associados a 5 e 12 respectivamente, podemos encontrar a solução do produto através da soma de $5 + 12 = 17$. Consultando a tabela veremos que o número 17 está associado ao número 131072, portanto $32 \times 4096 = 131072$.

Para manter os valores suficientemente próximos uns dos outros em sua tabela a ponto de poder utilizar interpolação para preencher as lacunas entre termos correspondentes Napier escolheu um valor próximo a 1, no caso $1 - \frac{1}{10^7} = 0,9999999$. No entanto, para evitar trabalhar com casas decimais, ele multiplicava cada potência por 10^7 . Dessa forma teremos a

expressão $N = 10^7 (1 - \frac{1}{10^7})^L$ cujo valor L era chamado de “logaritmo” do número N .

Tabela 2: Sequências de logaritmos de Napier.

L	1	2	3	4	5	...	200	201	...
N	9999999	9999998	9999997	9999996	9999995	...	9999800	9999799	...

O trabalho publicado por Napier continha uma definição baseada em termos geométricos.

Sejam dados um segmento de reta AB e uma semi-reta CDE [...]. Suponhamos que um ponto P parte de A e se move ao longo de AB com velocidade variável decrescendo em proporção com sua distância a B ; durante o mesmo tempo, suponhamos que um ponto Q parte de C e se move ao longo de CDE ... com velocidade uniforme igual à velocidade inicial de P . Napier chamava a distância CQ o logaritmo da distância PB . (Boyer, 1974, p.229)

A Figura 1 abaixo ilustra o pensamento dado pelo autor em sua obra:

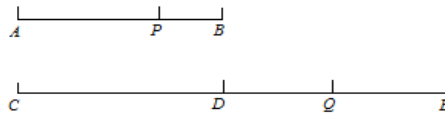


Figura 1: Definição geométrica do Logaritmo

O logaritmo descrito por Napier não era definido da mesma forma que o atual tendo, por exemplo, a falta da ideia de base, e a grande falha de não possibilitar que o logaritmo de um produto, ou quociente de dois valores seja igual à soma, ou diferença dos logaritmos de cada valor.

[...] Napier e Briggs concordaram que as tábuas seriam mais úteis se fossem alteradas de modo que o logaritmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse uma potência conveniente de 10, nascendo assim os logaritmos briggsianos ou comuns, os logaritmos de hoje. (Eves, 1995, p.347)

O novo método utilizado por Briggs foi calcular $\log 10 = 1$ e a partir desse ponto encontrar outros logaritmos fundamentais utilizando raízes sucessivas de 10. Como exemplo, Boyer (1993) coloca $\sqrt{10} = 3,162277$ e com isso $\log 3,162277 = 0,5000000$, aplicando-se

novamente a raiz teremos $\sqrt[4]{10} = \sqrt{3,162277} = 1,778279$ o que nos dá $\log 1,778279 = 0,250000$ e assim teremos um método para a construção de tabelas que possuem as mesmas regras usadas atualmente para o cálculo dos logaritmos.

Ainda de acordo com Boyer, foi Briggs que em sua obra de 1624 criou as palavras “mantissa” e “característica” ainda usadas atualmente para designar a parte decimal e inteira, respectivamente, dos valores do logaritmo.

Geraldo Ávila, em 1994 escreveu para a RPM26 o artigo *Como se Constrói uma Tábua de Logaritmos*, no qual ele mostra a metodologia de Briggs para a obtenção de seus logaritmos. Contendo inclusive a tabela abaixo que ilustra o método de maneira modesta, pois Briggs alcançou o valor $10^{1/2^{54}}$, extraíndo cada raiz quadrada com aproximadamente 30 casas decimais.

Tabela 3: Logaritmos decimais

x	$\log x$
$10^{1/2} = 3,16228$	0,50000
$10^{1/4} = 1,77828$	0,25000
$10^{1/8} = 1,33521$	0,12500
$10^{1/16} = 1,15478$	0,06250
$10^{1/32} = 1,07461$	0,03125
$10^{1/64} = 1,03663$	0,01563
$10^{1/128} = 1,01815$	0,00781
$10^{1/256} = 1,00907$	0,00391

2.3. Definição e Propriedades dos logaritmos

Depois de situar a problemática que deu base à criação dos logaritmos e entender como ele foi gerado, chega a hora de definir o logaritmo atual de forma clara e objetiva. Após o entendimento correto da definição é possível mostrar as propriedades que facilitaram bastante o uso do logaritmo atual em detrimento daquele criado inicialmente por Napier.

Os logaritmos de Briggs são chamados de decimais, já que levam em conta a base 10 para serem criados. O uso atual de logaritmos utiliza principalmente a base decimal e a

base e , sendo este último denominado logaritmo natural.

Briggs já havia percebido que a soma dos logaritmos de dois valores em sua tabela resultava no logaritmo do produto destes dois valores, o que facilitou bastante a criação de sua tábua para os logaritmos decimais. Esta propriedade está presente na noção de logaritmo atual e foi estendida para outras bases.

A atual definição de logaritmos pode ser escrita do seguinte modo:

Dado um número real positivo $a \neq 1$, o logaritmo de um número $x > 0$ na base a é o expoente y a que se deve elevar a de tal modo que $a^y = x$. Escreve-se $y = \log_a x$.

De imediato é possível notar que $\log_a 1 = 0$ e $\log_a a = 1$, tendo em vista que $a^0 = 1$ e $a^1 = a$ para todo $a > 0$. Esta afirmação é de extrema importância, pois torna válidas as propriedades gerais dos logaritmos.

De posse da definição podemos enunciar a propriedade fundamental dos logaritmos já conhecida por Briggs:

O logaritmo do produto de dois números reais positivos b e c em uma base positiva $a \neq 1$ é igual à soma dos logaritmos de b e c nesta mesma base a .

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Para demonstrar esta afirmação escrevemos $u = \log_a b$ e $v = \log_a c$, e obtemos com ajuda da definição de logaritmo que $b = a^u$ e $c = a^v$. Temos com isso $b \cdot c = a^u \cdot a^v = a^{u+v}$. Utilizando novamente a definição temos que $u + v = \log_a (b \cdot c)$, isto é, que $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.

É preciso ainda mostrar que: *o logaritmo de um produto com mais de dois fatores resulta na soma dos logaritmos de cada fator separadamente.*

$$\log_a (b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \log_a b_3 + \dots + \log_a b_n$$

como:

$$\log_a b_1 \cdot (b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot \dots \cdot b_n) = \log_a b_1 + \log_a (b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot \dots \cdot b_n)$$

e

$$\log_a b_2 \cdot (b_3 \cdot b_4 \cdot \dots \cdot b_n) = \log_a b_2 + \log_a (b_3 \cdot b_4 \cdot \dots \cdot b_n)$$

Percebemos intuitivamente que $\log_a (b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \log_a b_3 + \dots + \log_a b_n$. A demonstração formal deste fato deve ser feita por indução.

Fazemos a afirmação válida para algum $n > 1$. Para $n = 2$ temos a propriedade fundamental. Agora, definindo que a afirmação é válida para $n = p$ devemos mostrar que ela também será válida para $n = p + 1$.

Basta ver que:

$$\log_a (b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_p \cdot b_{p+1}) = \log_a (b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_p) \cdot b_{p+1} = \log_a (b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_p) + \log_a b_{p+1}$$

Como a afirmação é válida para $n = p$ temos a afirmação demonstrada, pois:

$$\log_a (b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_p \cdot b_{p+1}) = (\log_a b_1 + \log_a b_2 + \log_a b_3 + \dots + \log_a b_p) + \log_a b_{p+1}$$

Usando a propriedade anterior é possível demonstrar facilmente as outras propriedades dos logaritmos:

I. Logaritmo do inverso:

$$\log_a \left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b$$

II. Logaritmo do quociente:

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

III. Logaritmo da potência:

$$\log_a (b^t) = t \cdot \log_a b \text{ (em particular } \log_a (a^t) = t, \forall t \in \mathbb{R} \text{)}$$

IV. Logaritmo como expoente de sua base:

$$a^{\log_a x} = x$$

2.4. Mudança de base

Dado $\log_a x$ é possível encontrar o valor de $\log_b x$ se soubermos o valor de $\log_a b$. Para isso devemos utilizar a expressão para mudança de base:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Para demonstrar a veracidade desta expressão consideremos $\log_a x = A$, $\log_a b = B$ e $\log_b x = C$, com a e b diferentes de 1. Como $b \neq 1$ temos que $B \neq 0$. Assim sendo, $x = a^A$, $b = a^B$ e $x = b^C$, e como $(a^B)^C = b^C = x = a^A$ teremos:

$$B \cdot C = A \Leftrightarrow C = \frac{A}{B} \Leftrightarrow \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Podemos escrever a expressão para mudança de base como sendo:

$$\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b$$

2.5. Função logarítmica

Uma função possui inversa quando cada elemento de seu contradomínio é imagem de um único elemento do seu domínio. A função composta de funções inversas entre si é a função identidade.

Como vimos anteriormente, caso dois valores reais $x_1 < x_2$, teremos que $a^{x_1} < a^{x_2}$, quando $a > 1$ e $a^{x_1} > a^{x_2}$, quando $0 < a < 1$. Sendo a positivo teremos como imagem os todos os valores reais positivos. Dessa forma teremos as condições necessárias para que a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ / g(x) = a^x$ possua inversa.

Pela definição de logaritmo percebemos que a função $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \log_a x$ é inversa à função exponencial definida por $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ / g(x) = a^x$ com $a \neq 1$ sendo um

número real positivo. Para que isto fique bem claro basta vermos que $f(g(x)) = g(f(x)) = x$.

$$f(g(x)) = \log_a a^x = x \text{ (pela propriedade III.)}$$

$$g(f(x)) = a^{\log_a x} = x \text{ (pela propriedade IV.)}$$

A função $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é crescente quando $a > 1$, com $\log_a x$ sendo positivo para $x > 1$ e negativo para $0 < x < 1$, e decrescente quando $0 < a < 1$, com $\log_a x$ sendo negativo para $x > 1$ e positivo para $0 < x < 1$.

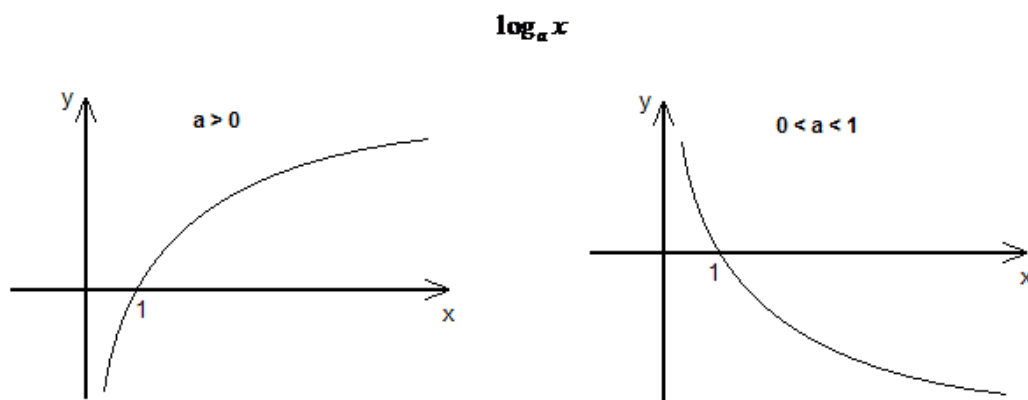


Figura 2: Esboços do gráfico para uma função logarítmica.

2.5.1. Teorema de Caracterização das Funções Logarítmicas

Existe um teorema de extrema importância para conhecimento do professor de matemática, pois ele garante que a propriedade fundamental das funções logarítmica é restrita, dentre todas as funções estritamente monótonas (que não alternam entre crescente e decrescente), ou seja, se uma função é monótona e possui a propriedade fundamental dos logaritmos então ela será obrigatoriamente uma função logarítmica. Em notação matemática dizemos:

Teorema: Seja $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente monótona tal que $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Demonstração¹:

Temos $f(1) = f(1) + f(1)$, logo $f(1) = 0$. Admitamos f crescente e que exista $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(a) = 1$, dessa forma teremos $a > 1$, de acordo com o que foi visto anteriormente. Para todo $m \in \mathbb{N}$ vale:

$$f(a^m) = f(a \cdot a \cdot \dots \cdot a) = f(a) + f(a) + \dots + f(a)$$

$$f(a^m) = 1 + 1 + \dots + 1 = m,$$

$$0 = f(1) = f(a^m \cdot a^{-m}) = f(a^m) + f(a^{-m}) = m + f(a^{-m})$$

Logo $f(a^{-m}) = -m$.

Se $r = \frac{m}{n}$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ então $rn = m$, portanto:

$$m = f(a^m) = f(a^{rn}) = f((a^r)^n) = n \cdot f(a^r) \Rightarrow f(a^r) = \frac{m}{n}$$

Se $x \in \mathbb{R}$ irracional então, para r, s racionais tem-se:

$$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s \Rightarrow f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) \Rightarrow r < f(a^x) < s$$

Portanto todo número racional r , menor do que x , é também menor do que $f(a^x)$ e todo número racional s maior do que x é também maior do que $f(a^x)$. Segue-se que $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto $f(y) = \log_a y$ para todo $y > 0$.

Caso f seja decrescente a demonstração seguirá o mesmo padrão.

Na demonstração acima, foi aceito a existência de $a \in \mathbb{R}^+$. Agora poderemos demonstrar que este a pode ser obtido para todos os casos em que o teorema se aplica. Para isso consideremos o caso geral, com a função crescente $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$g(xy) = g(x) + g(y)$$

Teremos que $g(1) = 0$, e como $1 < 2$, devemos ter $g(2) = b > 0$. Podemos agora criar uma função crescente $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, definida como $f(x) = \frac{g(x)}{b}$, e que transforma somas em produtos cumprindo a condição $f(2) = 1$. Logo, pela primeira parte da demonstração, tem-se $f(x) = \log_2 x$ para todo $x > 0$.

Usando a definição de logaritmo teremos que:

$$x = 2^{f(x)} = 2^{g(x)/b} = \left(2^{1/b}\right)^{g(x)} = a^{g(x)}, \text{ com } a = 2^{1/b}$$

Assim teremos que $g(x) = \log_a x$, e mostramos que sempre poderemos encontrar a base a utilizada no início da demonstração.

2.6. Aplicações dos logaritmos nas ciências.

Como foi descrito no capítulo anterior, é nas aplicações que a maior confusão a respeito da contextualização no ensino de matemática se potencializa. A necessidade de aplicar o logaritmo na vida cotidiana dos alunos é uma tarefa impossível na maioria das situações. A relevância do estudo de logaritmos está na sua importância para as ciências, em especial no uso do logaritmo natural para o Cálculo.

As aplicações que serão dadas a seguir são de fácil entendimento para sala de aula e devem ser visadas para criação de exercícios. Claro que questões mais teóricas que mostrem a utilização das propriedades não devem ser abolidas. Mas enfatizar nos estudantes a ideia de que logaritmo só serve para desenvolver o pensamento lógico acerca de algumas poucas propriedades tratando-as como se fossem regras de um jogo puramente teórico, irá provocar um sentimento de perda de tempo e esforço.

Portanto a criatividade para elaboração de questões por parte do professor deve seguir um caminho que eleve a importância daquilo que está sendo ensinado. Quanto maior for a importância dada, pelo aluno, ao conhecimento, maior será a vontade de absorvê-lo.

2.6.1 Escalas Logarítmicas

Alguns fenômenos físicos e químicos possuem uma amplitude de valores tão grande que se tornam difíceis de serem trabalhados através das unidades usuais. Para analisar estes dados, possibilitando um entendimento mais efetivo da situação e conseqüentemente uma melhor manipulação, foram criadas as chamadas escalas logarítmicas.

A ideia por trás dessas escalas é utilizar o logaritmo para relacionar os valores reduzindo suas amplitudes e tomando assim um intervalo menor de possíveis valores a serem apresentados nos estudos. A grande quantidade de escalas logarítmicas existentes mostra como é difícil para o ser humano trabalhar com valores muito grandes no estudo de um fenômeno. O logaritmo então, para a criação de cada escala, funciona como ferramenta de facilitação e foi imprescindível para tornar tão famosas algumas destas escalas.

2.6.1.1. Escalas Richter e Escala de Magnitude de Momento (MMS)³

A intensidade de um terremoto pode ser medida através de sua potência ou da energia que é liberada durante sua ação. Em ambos os casos o valor é muito grande, e nem sempre representam uma ideia fiel de sua magnitude, pois um abalo sísmico com potência entre 1 e 1000 kWh, provavelmente não será sentido enquanto que um tremor de 1.000.000 kWh não representa um perigo iminente.

Em 1935 os abalos sísmicos já eram registrados por sismógrafos, e utilizando-os em seus estudos ao sul da Califórnia Charles Francis Richter e Beno Gutenberg, ambos eram membros do California Institute of Technology (Caltech), colheram dados para criação de um sistema que calcule a magnitude das ondas obtidas. Do trabalho de Richter e Gutenberg surgiu uma escala que recebeu o nome de apenas um dos seus criadores e utiliza logaritmos de base 10 para ser composta. A sistemática utilizada foi definir um abalo padrão para o cálculo dos demais, que seriam obtidos através do logaritmo decimal do quociente entre o registro de um novo abalo e o padrão adotado. Assim teremos que todos os registros da escala nada mais são que um expoente para a potência de 10 que indica o quociente entre o abalo real e o abalo padrão.

A Escala Richter foi amplamente usada para estudar a magnitude de terremotos em termos de energia liberada. No entanto, apesar da larga utilização da escala na mídia até os dias de hoje, a escala utilizada atualmente funciona de maneira parecida e recebe o nome de Escala de Magnitude de Momento (MMS – a sigla representa Magnitude de Momento Sísmico). Criada por Thomas C. Haks e Hiroo Kanamori em 1975, a Escala MMS manteve os valores para magnitudes de sismos semelhantes a sua antecessora.

Apesar da Escala MMS ser confeccionada utilizando o logaritmo decimal ela se difere bastante em seu modo de obtenção de dados, quando relacionada à Escala Richter. A principal diferença está no fato de que a Escala MMS não necessita de um abalo padrão para ser construída, utilizando apenas o Momento Sísmico (M_0), para o sismo que deve ser analisado. O Momento Sísmico é uma quantidade usada pelos sismólogos para medir a magnitude de um terremoto. Combina a área de ruptura e a compensação da falha geológica com uma medida da resistência das rochas e o módulo de cisalhamento μ .

³ Informações obtidas principalmente no sítio https://pt.wikipedia.org/wiki/Escala_de_Richter dia 10/07/2013 as 16:23

É definida pela fórmula:

$$M_0 = \mu SD$$

onde:

μ = módulo de cisalhamento das rochas envolvidas no terremoto. Usualmente é de 30 gigapascal (GPa).

S = área de ruptura ao longo da falha geológica onde ocorreu o terremoto

D = deslocamento médio de S

O Momento Sísmico (M_0) é medido em $\text{dyn} \times \text{cm}$.

As fórmulas usadas nas duas escalas, aqui apresentadas, são definidas da seguinte forma:

Escala Richter:

$$M_l = \log \frac{A}{A_0} = \log A - \log A_0$$

Com M_l sendo a magnitude local, A a amplitude máxima medida no sismógrafo e A_0 uma amplitude de referência.

Escala MMS:

$$M_w = \frac{2}{3} \log M_0 - 10,7$$

Com M_w sendo o momento para o trabalho realizado.

Existem outras escalas usadas para medir terremotos tais como a *Shindo* (usada no Japão), Escala Macrossísmica Europeia, e Escala Mercalli.

A utilização dos conceitos destas escala pode engrandecer a criação de exercícios que visem o treinamento para a manipulação correta das propriedades dos logaritmos.

Tabela 4: Referência para o estudo de abalos sísmicos⁴

Descrição	Magnitude	Efeitos	Frequência
Micro	< 2,0	Micro tremor de terra, normalmente não é sentido.	~8000 por dia
Muito pequeno	2,0 – 2,9	Geralmente não se sente, mas é detectado/registrado.	~1000 por dia
Pequeno	3,0 – 3,9	Frequentemente sentido, mas raramente causa danos.	~49000 por ano
Ligeiro	4,0 – 4,9	Tremor notório de objetos no interior de habitações, ruídos de choque entre objetos. Danos importantes pouco comuns.	~6200 por ano
Moderado	5,0 – 5,9	Podem causar danos maiores em edifícios mal concebidos em zonas restritas. Provoca danos ligeiros nos edifícios bem construídos.	800 por ano
Forte	6,0 – 6,9	Podem ser destruidor em zonas num raio de até 180 quilómetros em áreas habitadas.	120 por ano
Grande	7,0 – 7,9	Podem provocar danos graves em zonas mais vastas.	18 por ano
Importante	8,0 – 8,9	Podem causar danos sérios em zonas num raio de centenas de quilómetros.	1 por ano
Excepcional	9,0 – 9,9	Devastam zonas num raio de milhares de quilómetros.	1 a cada 20 anos
Extremo	>10,0	Nunca registrado.	Extremamente raro (Desconhecido)

2.6.1.2. Escala de pH⁵

Há muitos anos o ser humano usa a manipulação de substâncias para desenvolver medicamentos, cosméticos e produtos comestíveis não perecíveis. O estudo destas misturas resultou em um vasto conhecimento sobre as características das várias substâncias presentes

⁴ Informações obtidas principalmente no sítio http://pt.wikipedia.org/wiki/Escala_de_Richter no dia 10/07/2013 as 18:34

⁵ Informações obtidas principalmente no sítio <https://pt.wikipedia.org/wiki/Ph> no dia 10/07/2013 as 18:34

no nosso cotidiano. Uma destas características é chamada de Potencial Hidrogeniônico ou Potencial de Hidrogênio (pH), que está presente em soluções aquosas e indica se elas serão classificadas em ácidas, neutras ou alcalinas.

O estudo do pH iniciou-se em 1909, pelo bioquímico dinamarquês Søren Peter Lauritz Sørensen, para facilitar cálculos para o controle de qualidade da produção de cervejas. Hoje em dia é comum vermos uma divulgação abundante das informações de acidez de produtos em *sites* de nutrição e bem-estar.

Para a obtenção do pH se faz necessário saber a quantidade de íons H^+ presentes na substância analisada. Com a utilização de um medidor específico (pHmetro) é possível obter este valor e automaticamente é determinado o pH através da expressão:

$$pH = -\log_{10}[H^+]$$

A escala de pH possui valores compreendidos entre 0 e 14, sendo 0 o máximo de acidez para uma substância e 14 o mínimo de acidez possível. Os valores muito próximos de 7 são ditos neutros.

Atualmente um ramo que utiliza bastante os recursos da determinação de pH é o aquarismo (criação de fauna e flora subaquáticas em aquário). Para conservação adequada e saudável de animais e plantas, sejam eles marinhos ou de água doce, é necessário um monitoramento constante dos níveis de pH. Em aquários com grandes variedades de espécies, por exemplo, é indicado um nível de pH neutro possibilitando assim a convivência harmoniosa de animais naturais de diferentes partes do globo

3. LOGARITMO NATURAL

A criação dos logaritmos denominados *naturais* está ligada ao processo de obtenção da área de uma faixa positiva da hipérbole $xy = 1$ ou $y = \frac{1}{x}$. É, portanto, necessário entender o que relaciona a área de uma faixa da hipérbole citada com a ideia já mencionada de logaritmo.

Primeiramente, defini-se a faixa positiva da hipérbole $y = \frac{1}{x}$, com o símbolo H_a^b , como sendo o conjunto dos pontos (x, y) do plano \mathbb{R}^2 tal que $a \leq x \leq b$, com $a, b \in \mathbb{R}^+$, sendo $0 < a < b$ e $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$. Dessa forma é possível observar que H_a^b é uma região do plano limitada pelas retas $x = a$ e $x = b$ nas laterais, pela reta $y = 0$ ao sul e pela hipérbole ao norte.

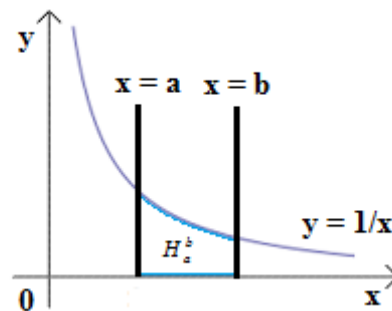


Figura 3: Região H_a^b

Uma característica extremamente importante destas áreas pode ser expressa pelo seguinte:

Teorema: Dado $k \in \mathbb{R}^+$, H_a^b e H_{ka}^{kb} têm a mesma área.

Demonstração: Dado um retângulo qualquer inscrito na faixa da hipérbole $y = \frac{1}{x}$, com base no seguimento $[c, d]$ do eixo das abscissas, devemos mostrar que outro retângulo também inscrito na faixa da hipérbole e com base no seguimento $[kc, kd]$ novamente contido no eixo das abscissas terá mesma área. Temos dessa forma, que a área do primeiro retângulo será igual a $(d - c) \cdot \frac{1}{d} = 1 - \frac{c}{d}$, enquanto a área do segundo será

$$(kd - kc) \cdot \frac{1}{kd} = \frac{k(d-c)}{kd} = 1 - \frac{c}{d}, \text{ o que demonstra que são iguais.}$$

Consideremos agora um polígono retangular P , inscrito em H_a^b . Se multiplicarmos por k cada uma das abscissas dos pontos de subdivisão de $[a, b]$, determinados por P , obteremos subdivisões do intervalo $[ka, kb]$ e, portanto, um polígono retangular P' inscrito em H_{ka}^{kb} . Pelo que já vimos, pode-se afirmar que os retângulos pertencentes a P têm mesma área que seus correspondentes em P' , ou seja, P e P' têm a mesma área.

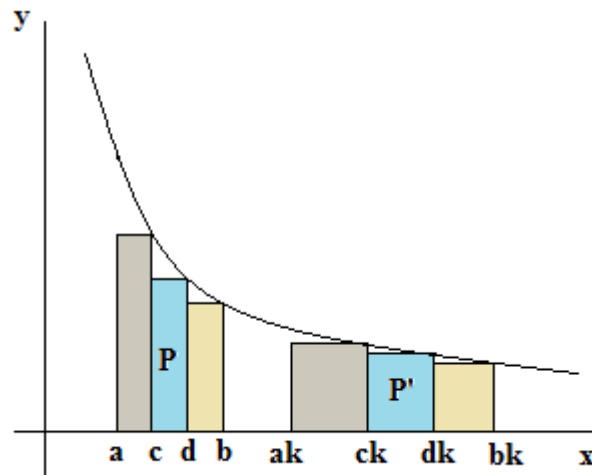


Figura 4: Polígonos retangulares sob o gráfico da hipérbole $y = 1/x$

Concluimos assim que para cada polígono retangular inscrito em H_a^b existirá um inscrito em H_{ka}^{kb} , com mesma área. O caminho inverso é obtido de maneira similar, bastando dividir cada abscissa do polígono inscrito em H_{ka}^{kb} por k e assim obter outro de mesma área em H_a^b .

A afirmação demonstrada acima significa que as áreas destas duas faixas de hipérbole são valores que possuem exatamente as mesmas aproximações inferiores, e, por esse motivo, são iguais.

Notemos agora que:

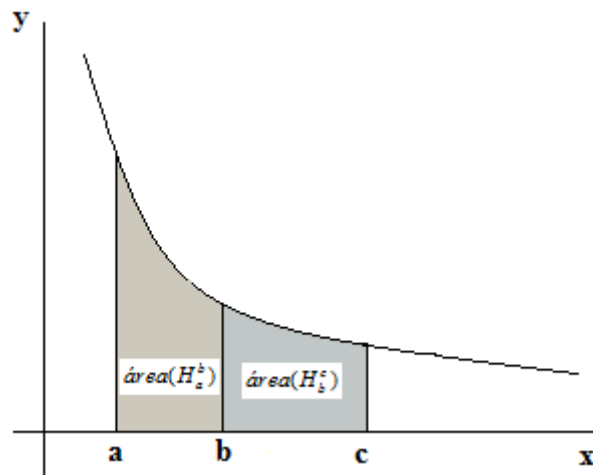


Figura 5: Áreas conjugadas sob o gráfico da hipérbole $y = 1/x$.

$$\text{área}(H_a^b) + \text{área}(H_b^c) = \text{área}(H_a^c)$$

Se restringirmos a equação acima para que $a = 1$, $b = x$ e $c = xy$, com $x, y \in \mathbb{R}^+$ teremos a expressão:

$$\text{área}(H_1^{xy}) = \text{área}(H_1^x) + \text{área}(H_x^{xy})$$

Como já foi demonstrado no teorema acima, $\text{área}(H_x^{xy}) = \text{área}(H_1^y)$. E assim:

$$\text{área}(H_1^{xy}) = \text{área}(H_1^x) + \text{área}(H_1^y)$$

Agora podemos definir o que são os *logaritmos naturais*.

Definição: a função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \text{área}(H_1^x)$ é chamada de *logaritmo natural de x*, sendo $f(x) = \ln x$.

Veja que se $0 < x < 1$ então $\ln x < 0$.

A função logaritmo natural terá todas as propriedades de uma função logarítmica, visto que, é monótona crescente ($\forall x > x'$, com $x, x' \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \text{área}(H_1^x) > \text{área}(H_1^{x'})$) e satisfaz a propriedade geral dos logaritmos descrita no capítulo anterior como restrita a funções deste tipo.

3.1 Número e

Sabendo que $\ln x$ é uma função logarítmica, devemos estabelecer uma base real positiva, que será chamada de e , que satisfaça a propriedade $\ln e = 1$.

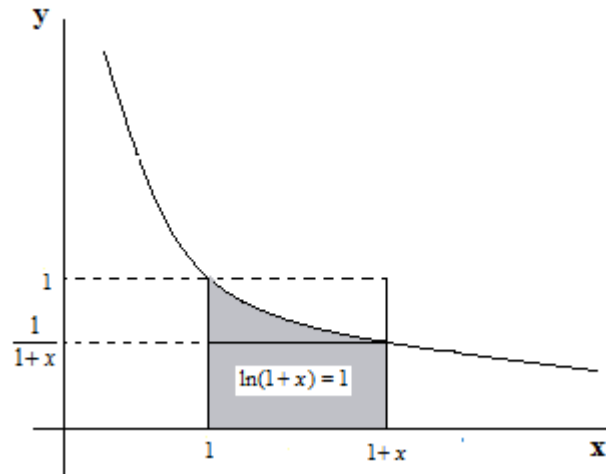


Figura 6: Área equivalente a unidade sob o gráfico da hipérbole $y = 1/x$.

Com base na Figura 6 temos que:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

Dividindo por x :

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$$

Tomando $x = \frac{1}{n}$:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} < \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} < 1$$

$$\frac{1}{n+1} < n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1$$

$$\frac{n}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1$$

Com $n \in \mathbb{N}^*$, vemos que se n cresce indefinidamente, $\frac{n}{n+1}$ se aproxima de 1.

Portanto a expressão $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ fica tão próxima de 1 quanto maior for o valor de n .

É usual escrevermos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1$$

E que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

A expressão pode ser reescrita retomando $x = \frac{1}{n}$ ou $n = \frac{1}{x}$, lembrando que $n \rightarrow \infty$

$\Leftrightarrow x \rightarrow 0$, assumindo dessa forma:

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Os primeiros valores de e em sua representação decimal são 2,71828182845.

Tomemos agora $x = \frac{\alpha}{n}$ e conseqüentemente $\frac{1}{x} = \frac{n}{\alpha}$, dessa forma teremos

novamente que para $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow n \rightarrow \infty$. Analisando agora a expressão:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}} \right]^\alpha$$

Substituindo por x :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[(1+x)^{\frac{1}{x}} \right]^\alpha = e^\alpha$$

Temos assim a igualdade $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha$ que nos permitirá calcular potência do

número e .

3.2. Aplicações do Logaritmo Natural

A grande importância do logaritmo natural vem da sua utilidade em equações diferenciais visto que $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$. No entanto, os primeiros estudos a respeito do número e , que é base para os logaritmos naturais, vieram de situações que surgiram espontaneamente na natureza e em problemas comuns do homem. Daí a classificação de “naturais” para os logaritmos com esta base. Como exemplo desta espontaneidade pode-se citar a desintegração radioativa de substâncias como o rádio e o urânio.

Os átomos de substâncias radioativas possuem a característica natural de se desintegrarem, transformando-se em novas substâncias e emitindo partículas que geralmente têm consequências horríveis para os animais e plantas. Essa desintegração se dá de maneira que a quantidade de substância que se desintegra num dado instante seja proporcional à massa restante da substância naquele momento. Esta constante é única para cada substância radioativa e é calculada levando em base a meia vida do componente radioativo (tempo necessário para que a substância desintegre metade de sua massa original).

Digamos que uma substância radioativa possua massa inicial de M_0 , com taxa de desintegração igual à α . Se a desintegração ocorre a cada instante, de digamos, 1 segundo, decorrido o tempo $t = 1$ s teremos uma desintegração de αM_0 unidades de massa, restando apenas a massa $M(1) = M_0 - \alpha M_0 = M_0(1 - \alpha)$. Para o próximo segundo haverá uma desintegração de $\alpha M_0(1 - \alpha)$ unidades de massa restando desta vez $M(2) = M_0(1 - \alpha) - \alpha M_0(1 - \alpha) = M_0(1 - \alpha)(1 - \alpha) = M_0(1 - \alpha)^2$ da massa inicial. Dessa forma teríamos a massa $M(t) = M_0(1 - \alpha)^t$, para cada t segundos transcorridos desde o início da observação do processo de desintegração.

No entanto a desintegração ocorre continuamente, e não a cada segundo. Para criarmos uma aproximação ideal a este problema dividiremos o tempo, no caso o segundo, em n partes de tal forma que n seja o maior possível. Teremos, por tanto, que para o primeiro segundo restará:

$$M(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_0 \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} M_0 \left(1 + \frac{-\alpha}{n}\right)^n = M_0 \cdot e^{-\alpha}$$

Para calcular a massa resultante da substância para um determinado intervalo de tempo $[0, t]$ será necessário dividir o intervalo em n partes iguais, obtendo a cada intervalo uma desintegração de $M_0 \frac{\alpha t}{n}$. De acordo com o que foi visto acima, a expressão para obter-se a massa restante de uma substância radioativa em desintegração, após serem transcorridos t segundos será:

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\alpha t}$$

É claro que o tempo t não precisa necessariamente ser calculado em segundos. Na prática, t pode ser medido nas várias unidades de tempo existentes. Para os vários isótopos do rádio (substância com grande radioatividade), por exemplo, temos aqueles que devem ser calculado em t dias enquanto outros devem ser calculados para t anos.

Outra aplicação natural para o número e está ligada aos juros compostos, cuja principal expressão foi estudada por Jakob Bernoulli no final do século XVII.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[C_0 \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n \right]$$

Sendo C_0 o capital inicialmente investido a taxa anual de $100\alpha\%$ calculado a cada fração $\frac{1}{n}$ do ano. A expressão dará o resultado para o montante acumulado no final do período de um ano.

Utilizando um raciocínio similar ao que foi feito para desintegração radioativa obtemos o resultado desta expressão, que será o valor $C_0 \cdot e^{\alpha}$. Dessa forma, como exemplo particular, teremos que uma aplicação de R\$ 1,00 calculada no período de um ano, com taxa anual de 100% será transformada no valor e em reais.

Na determinação dos períodos para obter-se um dado valor em ambos os exemplos de aplicação será imprescindível o uso de logaritmos na base e .

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Não é novidade que o ensino de Matemática tem enfrentado dificuldades cada vez maiores nos dias atuais. Metodologias e estudos estão sendo ministrados na busca de novos caminhos que melhorem os baixos rendimentos obtidos pelos alunos desta disciplina.

No mundo de informações rápidas e acessíveis em que vivemos é necessários dar importância a tudo que ensinamos, pois dificilmente alguém se interessará por algo que julgue ineficiente ou sem propósito real. Nossos alunos precisam entender a importância que a matemática obteve no crescimento científico do passado que possibilitou as atuais maravilhas que observamos hoje, e como o avanço da matemática pode trazer um futuro ainda mais grandioso para vida humana.

Contextualizar o ensino de Matemática é uma das possibilidades que nós como docentes podemos utilizar para melhorar o aprendizado de nossas crianças e torna-las peças fundamentais para os avanços tecnológicos que estão por vir.

REFERÊNCIAS

LIMA, Elon Lages. **Logaritmos**. Editora Alterosa, 1980.

JOSÉ MACHADO, Nilson. **Matemática e Realidade**. São Paulo, Cortez Editora, Autores Associados, 1987.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Da Realidade à Ação**. São Paulo, Sannus editorial, 1986.

DIENES, Zoltan Paul. **Aprendizado Moderno da Matemática**. Rio de Janeiro, Zahar Editores, 1970.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo C. P.; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio – Volume 1**. Rio de Janeiro, SBM, 2006.

EVES, Howard Whitley. **Introdução a história da matemática**. Campinas, Editora UNICAMP, 1995.

BOYER, Carl B. **Historia da matemática**. São Paulo, Editora E. Blucher, 1974.

BRASIL, MEC. 1999. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Medio**. Online, <http://www.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>.

FERNANDES, Susana da Silva. **A Contextualização no Ensino de Matemática**. Distrito Federal, 2006.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real – volume 1**, Rio de Janeiro, IMPA, 2008.

ROSEIRA, Nilson Antônio Ferreira. **A Contextualização no Processo de Ensino Aprendizagem da Matemática**, Bahia, 2010.

Ceará, Secretaria de educação. **Metodologias de apoio: matrizes curriculares para o ensino médio**. Fortaleza, SEDUC, 2009

MAOR, Eli. **e: A historia de um número**. Rio de Janeiro, Editora Record, 2003.

ÁVILA, Geraldo Severo de S. **Calculo I: Diferencial e Integral**. Brasília, Editora Universidade de Brasília, 1978.

ÁVILA, Geraldo Severo de S. **COMO SE CONSTRÓI UMA TÁBUA DE LOGARITMOS**. RPM 26, Campinas, SBM, 1994.