UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional

André Luiz Neto

CÓDIGOS CORRETORES DE ERROS: explorando possibilidades interativas no GeoGebra e suas aplicações no ensino de matemática

Teófilo Otoni

2024

André Luiz Neto

CÓDIGOS CORRETORES DE ERROS: explorando possibilidades interativas no GeoGebra e suas aplicações no ensino de matemática

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: **Weversson Dalmaso Sellin**

Teófilo Otoni

2024

Catalogação na fonte - Sisbi/UFVJM

N469c Neto, André Luiz
2024 CÓDIGOS CORRETORES DE ERROS [manuscrito] : explorando possibilidades interativas no GeoGebra e suas aplicações no ensino de matemática / André Luiz Neto. -- Teófilo Otoni, 2024.
121 p. : il.

Orientadora: Prof.ª Weversson Dalmaso Sellin.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teófilo Otoni, 2024.

1. Códigos Corretores de Erros. 2. Educação. 3. Metodologia. 4. Matemática. 5. Geogebra. I. Sellin, Weversson Dalmaso. II. Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. III. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFVJM com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Este produto é resultado do trabalho conjunto entre o bibliotecário Rodrigo Martins Cruz/CRB6-2886
e a equipe do setor Portal/Diretoria de Comunicação Social da UFVJM

ANDRé LUIZ NETO

CÓDIGOS CORRETORES DE ERROS: explorando possibilidades interativas no GeoGebra e suas aplicações no ensino de matemática

Dissertação apresentada ao MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL, nível de MESTRADO como parte dos requisitos para obtenção do título de MESTRE EM MATEMÁTICA

Orientador (a): Prof. Dr. Weversson Dalmaso Sellin

Data da aprovação : 25/01/2024

Documento assinado digitalmente
WEVERSSON DALMASO SELLIN
Data: 28/02/2024 15:20:46-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.Dr. WEVERSSON DALMASO SELLIN - UFVJM

Documento assinado digitalmente
ANDERSON LUIZ PEDROSA PORTO
Data: 08/03/2024 20:59:50-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.Dr. ANDERSON LUIZ PEDROSA PORTO - UFVJM

Documento assinado digitalmente
ANDRESSA CESANA
Data: 04/03/2024 18:01:12-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.Dr.ª ANDRESSA CESANA - UFES

TEÓFILO OTONI

À minha esposa, Gabriella, ao meu filho, Bryan, aos meus pais, José e Geralda, e aos meus amigos que me apoiaram ao longo dessa trajetória.

AGRADECIMENTO

Agradeço de coração a Deus pela força e resiliência que me permitiram alcançar este momento, e por todas as bênçãos que têm iluminado o meu caminho.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, e fica aqui registrada a minha gratidão. Expresso também minha profunda gratidão ao Programa de Pós-Graduação, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM) / Campus Teófilo Otoni.

Expresso meus sinceros agradecimentos a todos os professores do PROFMAT, cujas disciplinas tive o privilégio de cursar. Sua dedicação, incentivo e os conhecimentos inestimáveis que compartilharam são muito valorizados por mim. Também agradeço à coordenação e ao pessoal administrativo que possibilitaram e viabilizaram a minha jornada de mestrado.

Quero destacar, em especial, o Prof. Dr. Weversson Dalmaso Sellin, meu orientador. Sua orientação provocou uma série de reflexões profundas sobre a minha atuação como educador. Agradeço pelas correções minuciosas, incentivos constantes, dedicação incansável, sugestões valiosas e, acima de tudo, por sua paciência inabalável. Sinto uma eterna admiração e orgulho por ter a oportunidade de aprender com um educador e ser humano exemplar como o senhor.

Meus agradecimentos também se estendem a todos os colegas de curso, com quem tive a honra de compartilhar conhecimentos e superar desafios.

Não posso deixar de expressar minha profunda gratidão aos colegas e amigos da Escola Estadual Salvelino Fernandes Madeira em Santana do Paraíso–MG.

De maneira extremamente significativa, desejo expressar uma gratidão imensa à minha família, com destaque especial para o meu querido filho Bryan e a minha esposa Gabriella. Ambos compartilharam comigo cada etapa da jornada de ausência física e mental ao longo do mestrado, e por isso lhes sou profundamente grato. Além disso, faço questão de estender minha gratidão a todos os familiares e amigos que, de variadas maneiras, contribuíram para o êxito desta jornada desafiadora. A todos vocês, minha gratidão é eterna.

Desvendando horizontes matemáticos: uma jornada dinâmica no GeoGebra-Book, onde códigos corretores de erros se entrelaçam com a magia dos números, guiando-nos por um universo de aprendizado inovador na Educação Básica.

(Frase elaborada pelo autor)

RESUMO

Este estudo se concentra na exploração interativa dos Códigos Corretores de Erros através do GeoGebraBook, resultando na criação de um livro digital dinâmico. O material aborda conceitos como mudança de bases, matrizes, potências de base dois, mudança de direção, análise combinatória e aritmética modular, todos contextualizados com os Códigos Corretores de Erros, apresentados em uma linguagem acessível ao ensino básico. Detalhes sobre as atividades contidas no livro são minuciosamente descritos, ressaltando os benefícios potenciais para os alunos. Uma reflexão sobre a integração de novas tecnologias na sala de aula é realizada, enfatizando as vantagens das diversas representações possíveis, especialmente ao explorar a representação semiótica. Além disso, há uma análise concisa da relevância desses tópicos na Base Nacional Comum Curricular BNCC (Brasil, 2022). O estudo destaca a importância da inovação pedagógica e do uso de ferramentas digitais para aprimorar o ensino de conceitos matemáticos, fornecendo uma visão crítica sobre a incorporação dessas práticas no cenário educacional.

Para acessar o livro completo, clique no seguinte link: ⟨https://www.geogebra.org/m/w33qbzfp⟩.

Palavras-chave: Códigos Corretores de Erros, Educação, Metodologia, Matemática, GeoGebra.

ABSTRACT

This study focuses on the interactive exploration of Error Correcting Codes through GeoGebraBook, resulting in the creation of a dynamic digital book. The material covers concepts such as base changing, matrices, powers of two bases, direction changing, combinatorial analysis, and modular arithmetic, all contextualized with Error Correcting Codes, presented in a language accessible to elementary education. Details about the activities contained in the book are meticulously described, highlighting the potential benefits for students. A reflection on the integration of new technologies in the classroom is conducted, emphasizing the advantages of various possible representations, especially when exploring semiotic representation. Additionally, there is a concise analysis of the relevance of these topics in the National Common Curricular Base BNCC (Brasil, 2022). The study underscores the importance of pedagogical innovation and the use of digital tools to enhance the teaching of mathematical concepts, providing a critical insight into the incorporation of these practices in the educational landscape.

To access the complete book, click on the following link: ⟨https://www.geogebra.org/m/w33qbzfp⟩.

Keywords: Error-Correcting Codes, Education, Methodology, Mathematics, GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

AICS -Advanced Imaging Communication System

BNCC - Base Nacional Comum Curricular.

CRMG- Currículo Referência de Minas Gerais.

NASA - National Aeronautics and Space Administration

PNLD - Programa Nacional do Livro Didático.

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

RGB - Red, Green and Blue.

TDICs - Tecnologias Digitais da informação e Comunicação.

UFVJM - Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri.

DCN - Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Durante minha trajetória profissional, que se iniciou em 2013 na Escola Estadual Salvelino Fernandes Madeira, em Santana do Paraíso, MG, assumindo duas cadeiras: uma no Ensino Fundamental, lecionando para as turmas do sexto e sétimo anos, e outra no Ensino Médio.

Essa experiência suscitou algumas reflexões, pois, em várias ocasiões, pude observar alunos ingressando no sexto ano cheios de expectativas e entusiasmo em relação à matemática. No entanto, ao chegarem ao Ensino Médio, esse mesmo entusiasmo parecia dissipar-se. Diante dessa realidade, surgiu em mim um desejo de desenvolver um recurso educacional que pudesse, de alguma forma, reinventar a experiência de aprendizado dos alunos, resgatando, se possível, o interesse e a curiosidade pelo estudo da matemática.

O Programa Nacional do Livro Didático PNLD (Brasil, 2023), acessível em : ⟨https://www.gov.br⟩, destaca a importância de temas como matrizes, mudança de bases, análise combinatória e potências no Ensino Médio. No entanto, uma análise crítica dos livros didáticos revela uma abordagem muitas vezes superficial, concentrada em conceitos básicos e exercícios mecânicos, em detrimento da promoção do pensamento crítico e da criatividade dos alunos. Diante desse panorama, torna-se imperativo repensar a abordagem pedagógica, visando não apenas à transferência de conhecimentos, mas também à valorização da formação integral dos estudantes.

Este trabalho propôs-se a transcender os limites convencionais, resultando na criação de um livro digital dinâmico que contextualiza o tema Códigos Corretores de Erros com o ensino de matrizes, mudança de base, aritmética modular, análise combinatória e potências na educação básica. A intenção foi ir além das abordagens tradicionais, incorporando elementos que estimulassem o pensamento crítico e a criatividade dos alunos, alinhando-se com as Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais (DCN) e a Base Nacional Comum Curricular BNCC (Brasil, 2022), acessível em: ⟨http://portal.mec.gov.br⟩ .

A questão que orientou este trabalho foi: como proporcionar uma experiência educacional enriquecedora em Matemática na educação básica, que ultrapasse a simples transmissão de conhecimentos, contribuindo para a formação integral dos alunos? Compreendendo que a resposta a essa questão é subjetiva e depende dos agentes envolvidos no processo educacional, nosso objetivo não foi respondê-la, mas sim oferecer aos professores da educação básica uma possível ferramenta na busca desse ambicioso objetivo.

Exploramos aspectos relacionados ao currículo, à utilização de *softwares* livres e às oportunidades pedagógicas emergentes desse cenário, visando não apenas à transmissão de conceitos, mas também ao desenvolvimento do pensamento crítico e da capacidade criativa dos estudantes. O material resultante busca ser acessível e integrado ao contexto social contemporâneo, proporcionando uma experiência educacional diferenciada.

Além disso, abordamos a importância do elemento lúdico no processo de aprendizagem, destacando o papel das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs) e dos *softwares* educacionais, como o GeoGebra e o GeoGebraBook, como ferramentas complementares no ensino e aprendizagem.

Esta pesquisa não se limitou a abordar a teoria matemática, mas buscou inseri-la em um contexto amplo, considerando a realidade dos alunos e promovendo uma Educação Matemática que os capacite a enfrentar os desafios do mundo contemporâneo.

A contextualização visa ampliar o nível de compreensão científica e tecnológica dos estudantes, transformando os conteúdos em instrumentos para a construção de uma visão crítica e capacitando-os a utilizar o conhecimento como uma ferramenta para compreender e transformar o mundo ao seu redor.

Para concretizar esse propósito, exploramos a Teoria dos Códigos Corretores de Erros, um ramo matemático que pode contribuir para a compreensão dos problemas relacionados à transmissão e à recepção de dados digitais, mas também destacamos a importância de integrar a Matemática de forma significativa na formação dos alunos. Desde sua origem, na década de 1940, essa teoria desempenha um papel crucial em tecnologias presentes em nosso cotidiano, como televisores, *smartphones*, computadores, música digital e *internet*.

Ao abordar os fundamentos e as aplicações dos Códigos Corretores de Erros, almejamos enriquecer não apenas o conteúdo matemático apresentado aos alunos, mas também promover uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos. Essa abordagem não visa apenas transmitir conhecimento, mas inspirar os alunos a explorarem, questionarem e aplicarem conceitos.

A pesquisa está organizada em seis capítulos. No primeiro capítulo, a introdução. O segundo capítulo aborda o Currículo Referência de Minas Gerais e as novas tecnologias, explorando sua relação no cenário educacional. O terceiro capítulo se dedica ao estudo das matrizes, oferecendo uma análise detalhada desse conceito matemático.

No quarto capítulo, são analisados os Códigos Corretores de Erros, ressaltando sua importância e aplicações, especialmente na transmissão e recepção de dados digitais. O quinto capítulo focaliza o Ensino de Matemática na Educação Básica, com destaque para uma Abordagem Interativa com o GeoGebra, apresentando o objeto central desta pesquisa, o livro dinâmico digital desenvolvido.

Por fim, o sexto capítulo apresenta as considerações finais, recapitulando os principais resultados obtidos, discutindo suas implicações e sugerindo direções para pesquisas futuras.

2 CURRÍCULO REFERÊNCIA DE MINAS GERAIS E AS NOVAS TECNOLOGIAS

2.1 Currículo referência de Minas Gerais e a BNCC

A integração entre diferentes disciplinas é uma estratégia didática de grande potencial para o sucesso na aprendizagem. Quando os alunos têm a oportunidade de abordar problemas de várias perspectivas, o processo de aprendizado ocorre de maneira mais orgânica. Essa integração entre áreas distintas de conhecimento possibilita estabelecer conexões com conhecimentos e experiências anteriores, expandi-los, reformulá-los e contextualizar sua aplicação.

No contexto do Currículo Referência de Minas Gerais (CRMG), as competências e as habilidades têm a finalidade de guiar uma aprendizagem motivadora, relevante e interdisciplinar. Portanto, é essencial que a Matemática desempenhe papel integrado e alinhado com as demais áreas do saber. Essa abordagem pedagógica e interdisciplinar entre a Matemática e outras disciplinas é refletida por meio de habilidades específicas, as quais introduzem novos conteúdos a serem explorados pelo professor.

A Base Nacional Comum Curricular do ano de 2022, engloba essa integração entre as áreas por meio das competências e habilidades, bem como através dos Temas Contemporâneos Transversais. No âmbito do CRMG, essa abordagem procura superar a fragmentação dos conteúdos de Matemática no processo de ensino e aprendizagem em relação a outras áreas do conhecimento, contextualizando os conceitos matemáticos com temas como Meio Ambiente, Economia, Ciência e Tecnologia. O objetivo é desenvolver nas(os) estudantes as seguintes competências:

- utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, abrangendo atividades do cotidiano, fatos nas Ciências da Natureza e Humanas, questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgadas por meio de diferentes formas, contribuindo, assim, para uma formação geral;

- empregar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em contextos variados, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, no intuito de construir uma argumentação coerente;

- compreender e utilizar, de maneira flexível e precisa, diferentes formas de representação matemática (algébrica, geométrica, estatística, computacional, etc.) na busca de soluções e na comunicação de resultados de problemas.

As competências mencionadas visam desenvolver habilidades matemáticas e científicas nos alunos, capacitando-os a lidar com medidas, unidades de medida e cálculos em contextos do mundo real. Cada uma dessas habilidades visa diferentes aspectos do entendimento e da aplicação da matemática em situações práticas.

Utilização da notação científica e compreensão de erros

- A competência (EM13MAT313) foca na habilidade dos alunos de utilizarem a notação científica para representar números grandes ou pequenos de forma mais compacta e compreensível. Isso é fundamental para lidar com medidas em diferentes escalas, como na ciência e na engenharia.

Interpretação de textos científicos e mídias

- A competência (EM13MAT103) visa capacitar os alunos a compreenderem e interpretarem informações em textos científicos e em mídias que envolvem unidades de medida. Isso é crucial para podermos tomar decisões controladas em relação a questões científicas e tecnológicas presentes na sociedade.

Aplicação de medidas e cálculos em contextos regionais

- A competência (EM13MAT201) busca desenvolver a capacidade de os alunos aplicarem conceitos matemáticos, como controles de restrição, área, volume, capacidade e massa, em situações do cotidiano, especialmente aquelas relevantes para sua comunidade.

Os alunos são incentivados a proporem ou a participarem de ações que envolvem medições e acompanhamento em projetos e atividades práticas. Isso não apenas fortalece suas habilidades matemáticas, mas também promove o engajamento com a comunidade e o reconhecimento da importância da matemática no contexto real.

Compreender e aplicar conceitos matemáticos em situações reais é fundamental para preparar os estudantes para os desafios do mundo contemporâneo, em que medidas e cálculos são essenciais em diversos campos, desde a ciência até a tecnologia e o engajamento social. Para que os alunos possam alcançar essa compreensão completa, é crucial que eles estabeleçam conexões entre os conceitos matemáticos e suas aplicações em diferentes áreas do conhecimento. A seguir apresentamos alguns conceitos.

- Conceito e procedimentos de geometria métrica, que podem ser aplicados na engenharia civil (projeto de estruturas), em *design* de produtos, arquitetura, topografia, geografia (cálculos de áreas e perímetros de regiões geográficas).

- Funções, representação gráfica e algébrica, que pode ser aplicada na economia (modelagem de demanda e oferta), na física (movimento de partículas), na biologia (taxa de crescimento populacional) e na engenharia (resposta de sistemas dinâmicos).

- Bases de sistemas de contagem, que podem ser aplicadas na ciência da computação (programação binária), na eletrônica (circuitos digitais) e na matemática discreta (teoria dos grafos).

- Unidades de armazenamento de dados e transferência de dados, que podem ser aplicadas na tecnologia da informação (armazenamento e transferência de arquivos), em redes de computadores (velocidade de transferência) e na ciência de dados (tamanhos de *datasets*).

- Funções, fórmulas e expressões algébricas, que podem ser aplicadas na engenharia (modelagem de sistemas), na economia (análise de custos), na física (Lei de Hooke para molas) e na química (equações químicas).

- Grandezas determinadas pela razão ou produto de outras, que podem ser aplicadas na física (velocidade =distância/tempo), na engenharia (potência elétrica) e na demografia (densidade demográfica).

- Conversão entre unidades compostas, que pode ser aplicada na engenharia (conversão de unidades em sistemas de medida), física (conversão de unidades em cálculos de energia) e na medicina (conversão de unidades de dosagem).

A a relação que se estabelece entre esses conceitos matemáticos e suas aplicações em diversas áreas do conhecimento capacita os estudantes a compreenderem como a Matemática está intrinsecamente envolvida em situações do mundo real. Isso não apenas ajuda a solidificar o entendimento dos conceitos, mas também permite que os alunos percebam a relevância da matemática em sua vida cotidiana e na carreira que escolherem seguir.

A capacidade de aplicar esses conhecimentos de forma interdisciplinar é uma habilidade valiosa para os cidadãos do século XXI. Como mencionado anteriormente, BNCC estabelece diretrizes educacionais para a Educação Básica no Brasil, incluindo o estudo de matrizes, parte importante desse currículo, pois desempenha papel fundamental na compreensão e na aplicação de conceitos matemáticos, bem como em diversas áreas da ciência e da tecnologia.

No contexto da Matemática, a BNCC reconhece a importância das matrizes como uma ferramenta essencial para o desenvolvimento do raciocínio lógico e a resolução de problemas em diversas áreas do conhecimento. O estudo de matrizes desempenha papel fundamental no currículo de Matemática da BNCC, contribuindo para a formação de cidadãos críticos e aptos a enfrentar os desafios do mundo contemporâneo.

As matrizes são apresentadas na BNCC como um tópico de estudo relevante dentro da área de Matemática. Elas são abordadas em diferentes níveis de ensino, desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio, conforme a progressão de conteúdos matemáticos definida no documento. O estudo das matrizes visa principalmente desenvolver a capacidade dos alunos de organizar dados, resolver problemas, modelar situações do mundo real e compreender conceitos matemáticos mais abstratos.

A BNCC (Brasil, 2022), estabelece competências e habilidades específicas relacionadas ao estudo de matrizes. Alguns exemplos incluem:

1. **reconhecer e representar matrizes:** os alunos aprendem a identificar matrizes,

compreendendo sua estrutura e propriedades. Eles são capazes de representar matrizes em notação matricial;

2. **realizar operações com matrizes:** os estudantes desenvolvem a capacidade de realizar operações de soma, subtração e multiplicação de matrizes, compreendendo as regras e propriedades envolvidas;

3. **resolver sistemas lineares:** matrizes são utilizadas para resolver sistemas lineares, o que tem aplicação direta em problemas do cotidiano e em diversas áreas da engenharia, ciências naturais e sociais;

4. **aplicar matrizes em contextos reais:** os alunos são incentivados a aplicarem o conhecimento sobre matrizes em contextos da vida real, como estatística, transformações geométricas e otimização.

O estudo de matrizes desempenha papel crucial no currículo de Matemática da BNCC, contribuindo para o desenvolvimento de competências e habilidades matemáticas dos alunos. Além disso, as matrizes têm aplicações em diversas áreas do conhecimento, preparando os estudantes para desafios acadêmicos e profissionais. Portanto, o ensino de matrizes, conforme as diretrizes da BNCC, é essencial para a formação de cidadãos capacitados a compreenderem e transformarem o mundo em que vivemos.

2.2 As novas tecnologias como ferramentas de ensino

A evolução das novas tecnologias está transformando radicalmente a maneira como vivemos, interagimos e aprendemos. Especificamente, na área da Matemática, essas mudanças oferecem oportunidades valiosas para aprimorar o ensino e a compreensão dos conceitos matemáticos, além de permitir uma conexão mais profunda entre a Matemática e o mundo que nos rodeia. Aqui estão algumas reflexões sobre o impacto das tecnologias na educação matemática e na sociedade em geral segundo os trabalho de (BORBA; LACERDA, 2015, p. 493).

Contextualização e aplicação dos conceitos matemáticos

1. As tecnologias oferecem a capacidade de trazer exemplos da realidade para a sala de

aula, tornando os conceitos matemáticos mais tangíveis e relevantes para os alunos.

2. O uso de simulações, visualizações interativas e modelos computacionais permite que os estudantes explorem relações matemáticas complexas de maneira concreta.

Acesso a informações e conhecimento global

1. A *internet* e os recursos digitais proporcionam acesso a uma vasta gama de informações e conhecimentos matemáticos de diferentes culturas e perspectivas.

2. Os alunos podem explorar além dos limites do currículo tradicional, enriquecendo sua compreensão da matemática como uma disciplina global.

Aprendizagem personalizada e ativa

1. As tecnologias permitem que os alunos escolham seu próprio ritmo de aprendizado e explorem tópicos de seu interesse, promovendo um ambiente de aprendizado personalizado.

2. Ferramentas interativas e plataformas de aprendizado *online* incentivam a participação ativa dos alunos e a resolução de problemas práticos.

Mudança no papel do professor

1. Os educadores agora atuam como facilitadores do aprendizado, orientando os alunos a explorarem e aplicarem conceitos matemáticos usando tecnologias.

2. Os professores podem concentrar mais tempo em atividades colaborativas, discussões e resolução de problemas, em vez de apenas darem palestras expositivas.

> O papel do professor deixa de ser o de "entregador" da informação, para ser o de facilitador do processo de aprendizagem. O aluno deixa de ser passivo, de ser o receptáculo das informações, para ser ativo aprendiz, construtor do seu conhecimento. Portanto, a ênfase da educação deixa de ser a memorização da informação transmitida pelo professor e passa a ser a construção do conhecimento realizada pelo aluno de maneira significativa, sendo o professor o facilitador desse processo de construção (VALENTE et al., 1999, p. 8).

Preparação para um futuro tecnológico

1. À medida que a sociedade se torna mais dependente da tecnologia, é essencial que os alunos desenvolvam habilidades digitais e matemáticas para ter sucesso em suas vidas profissionais e pessoais.

2. A educação matemática atualizada e voltada para a tecnologia ajuda a formar cidadãos mais capacitados para enfrentar os desafios modernos.

Quebra de barreiras geográficas e sociais

1. As tecnologias permitem a conexão entre alunos de diferentes partes do mundo, promovendo a troca de ideias e culturas matemáticas.

2. O acesso a recursos *online* ajuda a superar barreiras socioeconômicas, proporcionando oportunidades iguais de aprendizado.

Transformação da sala de aula tradicional

1. A educação matemática está evoluindo de salas de aula tradicionais para ambientes digitais mais flexíveis, onde a aprendizagem pode ocorrer em qualquer lugar e a qualquer momento.

Desenvolvimento de habilidades do século XXI

1. O uso de tecnologias na educação matemática contribui para o desenvolvimento de habilidades como pensamento crítico, resolução de problemas, colaboração e comunicação.

A integração das tecnologias no ensino da Matemática tem o potencial de revolucionar como os alunos aprendem, tornando o processo de aprendizagem mais envolvente, prático e relevante. Isso não apenas prepara os alunos para um futuro tecnológico, mas também contribui para uma compreensão mais profunda e significativa dos conceitos matemáticos e sua aplicação no mundo real.

Diante do poder e do fascínio que as novas tecnologias podem promover no ensino da Matemática, levando o aluno a um conhecimento rápido, fácil, interativo e acompanhado de um raciocínio lógico, é que tanto o professor como o aluno precisam acompanhar essa evolução tecnológica e, assim, inserir-se nesse mundo cada vez mais digital, sob pena de ser excluído do sistema social:

> O uso das tecnologias na sala de aula vem se tornando uma ferramenta de grande importância, pois consegue auxiliar tanto o professor quanto o aluno na explicação e na compreensão dos conteúdos. Com a tecnologia na aula os alunos sentem-se mais motivados a aprender e a partir disso o docente consegue ensinar de forma mais dinâmica e criativa (SOARES, 2023, p. 10).

Atualmente, os professores, não apenas os de Matemática, mas todos em geral, desempenham papel crucial de mediadores do conhecimento. Isso significa que são responsáveis por orientarem os alunos na busca pelo conhecimento, promovendo o desenvolvimento da capacidade de autoeducação. Eles também auxiliam na construção dos próprios conceitos pelos alunos, capacitando-os com a autonomia necessária para enfrentarem desafios e resolverem problemas e, assim, participarem ativamente na sociedade em que estão inseridos.

A Educação Matemática tem o propósito de transformar o ensino em um processo lógico por meio do estímulo ao raciocínio. Para isso, é essencial que ela proporcione uma aprendizagem centrada nas inovações tecnológicas e na interdisciplinaridade. Isso garantirá a formação de indivíduos capazes e preparados para lidar com um mundo cada vez mais complexo, em que as mudanças e as evoluções ocorrem de forma rápida e constante.

2.3 A matemática e as novas tecnologias

As instituições escolares precisam progredir e se adaptar ao desenvolvimento social do país, no qual as novas tecnologias da informação estão cada vez mais presentes, trazendo transformações significativas na comunicação, no trabalho, nas tomadas de decisão e nos padrões de pensamento das pessoas.

Não podemos mais subestimar a importância do ensino da Matemática na contemporaneidade e na vida de cada indivíduo. No entanto, é inegável que a disciplina de Matemática sempre foi um desafio para muitos estudantes ao longo de sua trajetória educacional.

> Estudar Matemática, na maioria das escolas, é considerado um desafio pelos estudantes. Enquanto alguns se destacam, muitos têm dificuldades para compreender determinados tópicos e desenvolver habilidades necessárias para a resolução de problemas, à medida que esses vão ficando mais complexos e exigindo mais do estudante. Assim, o principal objetivo de incorporar as tecnologias de informação, nesse processo, é minimizar as dificuldades proporcionando o entendimento dos temas apresentados com ferramentas alternativas (PEREIRA et al., 2012, p. 7).

É fundamental que as inovações tecnológicas sejam incorporadas de maneira a aprimorar o processo de ensino e aprendizagem. Tais avanços não devem ser encarados com desaprovação ou desdém. Mudanças devem ser acolhidas com otimismo e, acima de tudo, integradas ao ambiente escolar para promover uma verdadeira educação em prol do bem comum, visando construir um futuro mais promissor e uma sociedade mais justa e equitativa.

Como cidadãos, temos a responsabilidade de contribuir para a modernização geral do nosso país, no âmbito da educação e, principalmente, estarmos dispostos a abraçar essa evolução, que é uma ação irreversível em pleno desenvolvimento e expansão.

É relevante ressaltar que, no geral, o computador e outras tecnologias digitais estão amplamente integrados ao cenário educacional em muitos países ao redor do mundo, e oferecem uma oportunidade para a criação e o desenvolvimento de novas abordagens no ensino, visando aprimorar os resultados na aprendizagem da disciplina de Matemática.

Vale a pena destacar também, que não é somente uma máquina que possibilitará a uma criança com habilidades intelectuais aprender certos conceitos matemáticos. A verdadeira transformação ocorre ao estimular um raciocínio por meio do qual a criança possa formular conjecturas e abstrair suas ideias, transformando-as em conhecimento formal com o auxílio do computador.

A Revolução Tecnológica iniciou-se no século XXI como defendido nos trabalhos de (SIQUEIRA; FREIRE, 2019, p. 26), trouxe consigo uma dependência cada vez maior do uso dessas ferramentas em nossa vida cotidiana. Essa tendência é inegável para a humanidade na totalidade. No ambiente escolar não poderia ser diferente, considerando a facilidade de acesso à informação proporcionada pelas tecnologias. Portanto, é essencial estar preparado para enfrentar os novos desafios e aproveitar as Novas Tecnologias para promover um ensino de alta qualidade, tanto para os educadores quanto para os alunos. Nesse contexto, é crucial estar atualizado sobre as transformações tecnológicas e esforçarse para compreendê-las devidamente.

A fim de proporcionar aos alunos um ensino de qualidade diante das novas tecnologias, é absolutamente necessário estarmos adequadamente preparados e capacitados para operar nesse inovador modelo de ensino e aprendizado. Estar imerso nesse novo ambiente implica em utilizar as tecnologias para elaborar atividades pedagógicas eficazes.

Com este avanço tecnológico, a educação passou por uma transformação significativa, e a disciplina de Matemática emerge como pioneira nessa revolução. Ferramentas digitais inovadoras, como o GeoGebraBook, são fornecidas aos alunos com novas perspectivas, oferecendo uma experiência de aprendizagem envolvente e interativa.

Neste contexto, surge a proposta deste trabalho que foi a elaboração de um livro dinâmico digital que adentra no universo dos Códigos Corretores de Erros, entrelaçando-os com o estudo de matrizes. O objetivo do livro dinâmico digital é fornecer uma abordagem realista, na qual os conceitos matemáticos se manifestam em situações do cotidiano.

Por meio de exemplos pragmáticos e desafios instigantes, os estudantes são incentivados a aplicarem os conhecimentos recém-adquiridos em cenários do dia a dia. Acreditamos que esta abordagem não apenas confere maior significado ao aprendizado, mas também o torna diretamente aplicável, capacitando os alunos a enfrentarem com confiança os desafios matemáticos que o porvir reserva.

Posteriormente, iremos detalhar com mais afinco o livro, mas, por enquanto, imagine-se explorando os enigmas dos Códigos Corretores de Erros, desvendando mistérios matemáticos enquanto emergem em situações reais. Este livro dinâmico digital tem o objetivo de não apenas tornar o ensino mais atrativo e envolvente, mas também dotar os alunos com as ferramentas possíveis para superar os obstáculos matemáticos que surgem no caminho, por meio desta jornada educacional, na qual a Matemática se converte em uma aventura e os estudantes se transformam nos protagonistas de seu próprio aprendizado.

2.4 A representação semiótica no ensino de matemática

A matemática, sendo uma linguagem universal, tem a capacidade de desvendar os padrões, as relações e as estruturas inerentes ao nosso mundo. No entanto, muitos estudantes frequentemente enfrentam obstáculos ao se depararem com essa disciplina, muitas vezes devido à abstração e à complexidade dos conceitos.

> Em um mundo onde a compreensão matemática transcende os limites da linguagem escrita, a riqueza das representações semióticas torna-se a chave para desbloquear o verdadeiro significado dos conceitos matemáticos. Assim como a diversidade enriquece a vida, a variedade de representações semióticas enriquece a compreensão matemática, proporcionando uma tapeçaria visual e simbólica que ilumina os caminhos do pensamento matemático (DUVAL; THADEU, 2012, p. 267).

A utilização de registros de representação semiótica, segundo (DUVAL; THADEU, 2012), constitui uma ferramenta fundamental para a compreensão e a comunicação de conceitos matemáticos por parte dos estudantes. Esses registros, que abrangem símbolos, gráficos, palavras e tabelas, buscam perspectivas únicas, enriquecendo a compreensão dos conceitos. O funcionamento cognitivo na compreensão matemática envolve processos complexos, como formação de conceitos, manipulação simbólica e resolução de problemas, explorando como os alunos constroem significados, identificam padrões e aplicam estratégias de resolução.

Conforme apontado pelos trabalhos de (LABURÚ; SILVA, 2011, p. 24), a superação dos obstáculos na aprendizagem da Matemática acontece de maneira eficaz por meio da utilização da representação semiótica. Essa abordagem envolve a exploração de múltiplos símbolos e linguagens para tornar os conceitos matemáticos mais acessíveis e tangíveis.

A representação semiótica abrange a expressão de informações por meio de diferentes sistemas de símbolos, incluindo linguagem natural, gráficos, notações matemáticas, tabelas e diagramas. No contexto da Matemática, essa representação desempenha papel crucial na comunicação e na construção do conhecimento. Por exemplo, a notação algébrica é uma forma de representação semiótica que permite a expressão concisa e precisa das relações entre variáveis e operações. A incorporação da representação semiótica no ensino de matemática oferece várias vantagens significativas, como

- **visualização de conceitos abstratos:** a representação semiótica capacita os estudantes a visualizarem conceitos abstratos, transformando-os em representações tangíveis. Gráficos e diagramas, por exemplo, contribuem para uma melhor compreensão das relações numéricas e geométricas, proporcionando concretude à matemática;

- **adaptação a diferentes estilos de aprendizagem:** os alunos apresentam estilos de aprendizagem diversos. Enquanto alguns preferem a linguagem escrita, outros respondem melhor a informações visuais. A representação semiótica oferece abordagens múltiplas para acessar os conceitos matemáticos, atendendo às variadas necessidades dos estudantes;

- **resolução de problemas:** a habilidade de resolver problemas matemáticos frequentemente exige a tradução de situações do mundo real para representações matemáticas e vice-versa. A competência na interpretação de diferentes formas de representação semiótica capacita os estudantes a abordarem desafios de resolução de problemas de maneira mais eficaz.

Levando em consideração os trabalhos de (MELO, 2020, p. 36), temos que a utilização da representação semiótica no ensino de matemática oferece vantagens significativas, como a visualização de conceitos abstratos e a adaptação a estilos de aprendizagem diversos, possibilitando uma abordagem mais eficaz na resolução de problemas.

Além disso, a abordagem de (DUVAL; THADEU, 2012) ressalta o potencial das estratégias de ensino centradas na representação semiótica. Jogos matemáticos que incorporam gráficos, diagramas e simulações, por exemplo, podem proporcionar uma aprendizagem mais envolvente e prática. A exploração da representação gráfica de funções por meio de atividades interativas permite que os alunos manipulem parâmetros e observem as mudanças resultantes, promovendo uma compreensão mais profunda.

A representação semiótica também transcende as fronteiras disciplinares, permitindo a interligação da Matemática com outras áreas do conhecimento. A criação de diagramas que representam fenômenos interdisciplinares capacita os estudantes a aplicarem conceitos matemáticos de maneira significativa e contextualizada.

Um aspecto importante explorado por (DUVAL; THADEU, 2012) é a evolução das notações matemáticas ao longo da história, demonstrando como diferentes culturas e épocas contribuíram para a construção semiótica dos conceitos matemáticos. Isso enfatiza a importância vital da representação na comunicação de ideias complexas, destacando seu papel contínuo e abrangente na Educação Matemática.

No contexto da representação semiótica, os conceitos de tratamento e conversão desempenham papéis cruciais na interpretação e na comunicação de informações complexas. Tratamento refere-se ao processo de manipulação e transformação de dados, enquanto conversão envolve a tradução de informações de uma forma para outra. Ambos os conceitos são fundamentais para a compreensão e a aplicação de conhecimentos em diversas áreas, como aquelas abordadas na proposta deste trabalho que é o livro dinâmico digital, Códigos Corretores de Erros, acessível em: ⟨https://www.geogebra.org/m/w33qbzfp⟩. O objetivo é explorar os códigos corretos de erros de maneira contextualizada, relacionando-os a alguns conteúdos matemáticos pertinentes à educação básica.

A representação semiótica, que estuda como os símbolos e signos são utilizados para transmitir significados, é essencial para a compreensão de conceitos matemáticos avançados. No contexto desta pesquisa, o tratamento de dados envolve a aplicação de operações matemáticas, como mudança de base, potenciação, análise combinatória, manipulação de matrizes, cálculos de ângulos, aritmética modular e a compreensão da matemática discreta.

A mudança de base, por exemplo, é um processo de conversão de um sistema numérico para outro, fundamental em disciplinas como Ciência da Computação. As potências são utilizadas para representar crescimentos exponenciais, enquanto a análise combinatória lida com a contagem e agrupamento de elementos. As matrizes, por sua vez, são ferramentas poderosas na representação e na manipulação de dados em diversos contextos.

A aritmética modular, que se baseia no conceito de congruência, é essencial em criptografia e teoria dos números. A matemática discreta, por sua vez, trata de estruturas matemáticas que lidam com conjuntos finitos e é fundamental em algoritmos e teoria dos grafos.

A compreensão desses conceitos e a habilidade de realizar tratamento e conversão de dados são cruciais para a solução de problemas complexos e para a aplicação prática desses conhecimentos. O livro dinâmico digital, ao contextualizar esses conceitos e códigos corretores de erros, proporciona uma abordagem prática e interativa, por meio dos *Applets*, facilitando a assimilação e a aplicação desses conceitos em situações do mundo real.

Salientamos que a importância das atividades desenvolvidas no livro dinâmico digital vai além da simples transmissão de informações teóricas. Elas servem como base sólida para a compreensão dos conceitos de tratamento e conversão no âmbito da representação semiótica, capacitando os estudantes a aplicarem esses conhecimentos de forma eficaz em diversos contextos acadêmicos e profissionais.

No próximo capítulo, adentraremos no estudo das matrizes, explorando sua importância e aplicações em diferentes campos do conhecimento. As matrizes, com sua estrutura e propriedades únicas, desempenham um papel fundamental em diversas áreas, desde a matemática até a engenharia e as ciências da computação. Vamos nos aprofundar nesse tema e compreender como as matrizes podem ser uma ferramenta poderosa na resolução de problemas complexos.

3 MATRIZES

As matrizes desempenham um papel fundamental em diversas áreas da Matemática e da Ciência, fornecendo uma estrutura organizada e eficaz para a representação de dados e a resolução de problemas complexos. Neste capítulo, exploramos as propriedades das matrizes, desde suas definições fundamentais até as operações matriciais que servirão de base à aplicação em Códigos Corretores de Erros. Ao compreender as matrizes e suas versatilidades, será possível desbravar um vasto território de conhecimento, que se estende desde a álgebra linear até áreas tão diversas quanto a física, a economia e a computação.

3.1 Matrizes para definir *pixel* de imagens em preto e branco

O estudo de matrizes desempenha um papel crucial em diversas áreas da Matemática, e sua aplicação se estende para além desse campo, alcançando disciplinas científicas e tecnológicas. Matrizes são estruturas Matemáticas que representam uma coleção de números organizados em linhas e colunas, sendo essenciais para a compreensão e manipulação em problemas complexos que envolvem sistemas lineares, transformações geométricas, estatística, otimização, entre outros domínios.

A resolução de sistemas lineares é um dos campos mais significativos nos quais as matrizes são aplicadas, proporcionando uma representação eficaz para modelar e resolver uma variedade de problemas do mundo real. Desde a análise de circuitos elétricos até a simulação de fenômenos físicos complexos, as matrizes desempenham um papel fundamental. Além disso, sua importância se estende para a estatística, sendo empregadas em técnicas como análise de componentes principais e regressão linear.

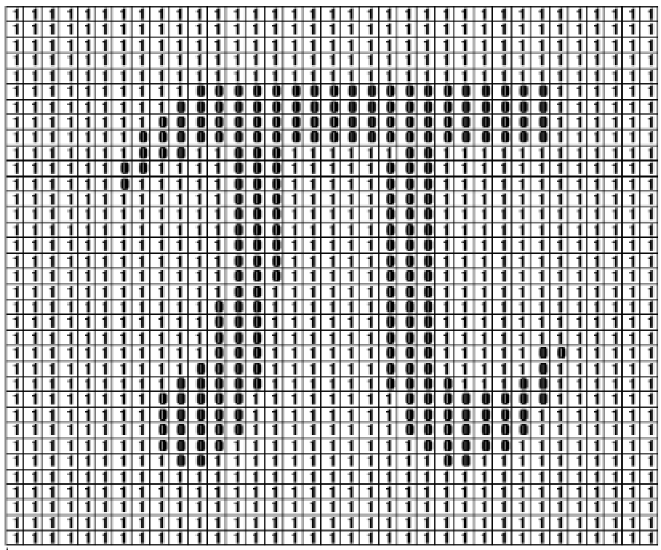
A influência das matrizes na tecnologia moderna é evidente, especialmente em áreas como processamento de imagens, reconhecimento de padrões e aprendizado de máquina. Algoritmos de visão computacional fazem amplo uso de operações de matriz para processar e analisar imagens, contribuindo para avanços significativos em medicina, automação industrial e veículos autônomos.

A aplicabilidade das matrizes não se limita apenas à Teoria Matemática, mas se revela como uma ferramenta poderosa para resolver problemas práticos em diversas disciplinas. Essa versatilidade destaca a importância de dominar o conceito de matrizes, abrindo portas para soluções inovadoras e contribuições significativas nos avanços tecnológicos.

Na sequência, apresentamos um exemplo prático que utiliza a noção de matrizes.

Exemplo 3.1.1. Imagens em uma página na internet ou fotos de uma máquina fotográfica digital, por exemplo, podem ser representadas por matrizes. Uma imagem simples, como a letra Π, pode ser codificada por uma matriz binária de ordem 35×35, onde os elementos 0 e 1 especificam as cores preto e branco, respectivamente dos *pixels*, sendo que estes são o menor elemento em um dispositivo de exibição (por exemplo, um monitor), ao qual é possível atribuir-se uma cor.

Figura 3.1: Matriz binária de ordem 35×35



Fonte: Elaborado pelo autor.

Além disso, imagens em tons de cinza podem ser representadas por matrizes, onde cada elemento define a intensidade do *pixel* correspondente. Este mesmo princípio se aplica a imagens coloridas, representadas por três matrizes no sistema RGB que é a abreviatura de um sistema de cores aditivas em que o Vermelho (Red), o Verde (Green) e o Azul (Blue) são combinados de várias formas de modo a reproduzir um largo espectro cromático, evidenciando a ampla aplicação das matrizes na codificação e processamento de imagens digitais.

Note que anteriormente, surgiram alguns termos importantes, tais como *matriz, elemento, ordem*, entre outros, os quais serão devidamente explorados nas próximas seções deste capítulo. Esses conceitos fundamentais podem ser encontrados em compêndios clássicos de Matemática, tanto na educação básica quanto no ensino superior. Recomendamos consultar algumas referências específicas, como os seguintes livros, que tratam de maneira abrangente sobre a teoria das matrizes:

1. **Álgebra Linear** (ANTON; RORRES, 2012). Este livro faz uma abordagem completa sobre álgebra linear, incluindo matrizes, com uma linguagem acessível aos estudantes da educação básica.

2. **Álgebra Linear e Suas Aplicações** de (STRANG, 2010). Este livro é amplamente utilizado em cursos de álgebra linear e oferece uma visão aplicada, com ênfase em problemas do mundo real.

3. **Álgebra Linear com Aplicações** de (LEON, 2000). Este é um livro que combina a teoria da álgebra linear com diversas aplicações práticas, incluindo aquelas relacionadas a matrizes.

4. **Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas** de (GILAT; SUBRAMANIAM, 2009). Este livro aborda o uso de matrizes em métodos numéricos, com foco em aplicações em engenharias e ciências.

Essas referências podem servir como uma sólida base para leitores interessados em aprofundar seu conhecimento sobre matrizes, oferecendo uma compreensão teórica sólida e aplicada.

3.2 Definição, classificação e lei de formação de matrizes

Como mencionamos no início deste capítulo, matriz é uma estrutura organizada e eficaz para a representação de dados, em geral, valores numéricos. E como se dá essa organização? A resposta a essa pergunta nos leva à seguinte definição.

Obs: Toda vez que nos referirmos ao conjunto dos números naturais estamos considerando o conjunto $\mathbb{N} = (0, 1, 2, 3, 4, ...)$, quando estivermos excluindo o algarismo *0* do conjunto dos números naturais usaremos a seguinte notação $\mathbb{N}^*$.

Definição 3.2.1. Uma matriz real é uma coleção de números reais dispostos em uma tabela, organizados em m linhas e n colunas, onde $(m,n \in \mathbb{N}^*)$. Dessa forma, uma matriz de m linhas e n colunas é composta por um total de $m \times n$ elementos que pertencem ao conjunto dos números reais.

Simbolicamente temos:

- $A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ é uma matriz que possui m linhas e n colunas.
- a_{ij}: é um elemento genérico da matriz A, que está na linha i e coluna j.

  Lembrando que $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Além disso, o número de linhas e colunas da matriz indica sua *ordem* (ou tamanho). Por exemplo, uma matriz de 3 linhas por 4 colunas diz-se ser da ordem 3×4 (Lê-se: 3 por 4).

No que se segue, apresentamos alguns exemplos de matrizes:

Exemplo 3.2.1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ \frac{3}{2} & 7 & \frac{1}{2} & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}_{4\times 4}$

Exemplo 3.2.2. $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 & 11 \\ \frac{-2}{3} & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 4}$

Exemplo 3.2.3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

Algumas matrizes, devido ao seu formato e à natureza de seus elementos, recebem nomes ou classificações especiais. Nos próximos parágrafos serão apresentadas essas classificações e alguns exemplos.

Definição 3.2.2 (**Matriz linha**). É toda matriz da forma $A_{1\times n}$, ou seja, que possui uma única linha.

Exemplo 3.2.4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}_{1\times 5}$

Definição 3.2.3 (**Matriz coluna**). É toda matriz da forma $B_{m\times 1}$, ou seja, que possui uma única coluna.

Exemplo 3.2.5. $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}_{5\times 1}$

Definição 3.2.4 (**Matriz quadrada**). É toda matriz que possui o número de linhas igual ao número de colunas. Simbolicamente, temos:

$A_{n\times n}$: matriz quadrada de ordem n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Em uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n\times n}$, os elementos a_{ij} com $i = j$ formam o que denominamos de **diagonal principal** da matriz. No exemplo abaixo, a diagonal principal está destacada de azul.

Exemplo 3.2.6. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$

Já os elementos a_{ij} de uma matriz quadrada de ordem, onde $i+j=n+1$, formam o que denominamos de **diagonal secundária** da matriz. No exemplo abaixo, destacamos os elementos da diagonal secundária na cor vermelha.

Exemplo 3.2.7. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \iddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$

Definição 3.2.5 (Matriz nula). É uma matriz que possui todos os elementos iguais a zero.

Exemplo 3.2.8. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ são exemplos de matrizes nulas.

Definição 3.2.6 (Matriz identidade). É toda matriz quadrada cujos elementos da diagonal principal são iguais a um e os demais são todos iguais a zero. Quando nos referirmos a uma matriz identidade de índice n vamos utilizar a notação I_n.

Exemplo 3.2.9. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots. \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$

Observe os exemplos e a notação:

Exemplo 3.2.10. $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ são matrizes identidades de ordem 2 e 3, respectivamente.

Em algumas matrizes, os elementos obedecem a certos critérios e/ou lei de formação a partir dos índices que os identificam. Na sequência, apresentamos alguns exemplos dessa situação.

Exemplo 3.2.11. Construa a matriz $A = (a_{ij})_{2\times 3}$, tal que $a_{ij} = i \cdot j$. Note que temos uma matriz A com os elementos a_{ij} dispostos em 2 linhas e 3 colunas, onde o valor de cada elemento é o produto de suas coordenadas (índices).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Logo, utilizando a regra temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.2.12. Construa a matriz $A = (a_{ij})_{3\times 4}$, tal que a_{ij}= $2i - j$. Note que temos uma matriz A com os elementos a_{ij} dispostos em 3 linhas e 4 colunas, onde o valor de cada elemento é o dobro do índice referente a linha menos o índice referente as colunas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Logo, utilizando a regra temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

3.3 Igualdade de Matrizes

Duas matrizes serão iguais quando elas tiverem o mesmo formato (número de linhas e colunas) e apresentarem todos os elementos correspondentes iguais (elementos com índices iguais). Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ de mesma ordem, dizemos que a matriz A é igual a matriz B ou $A = B$, quando $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $i \in \{1,2,3,...,m\}$ e $j \in \{1,2,3,...,n\}$.

Exemplo 3.3.1.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Ou seja:

$$a_{11} = b_{11} \quad a_{12} = b_{12}$$
$$a_{21} = b_{21} \quad a_{22} = b_{22}$$

3.4 Operações entre matrizes

3.4.1 Adição

Seja $\mathbb{M}_{m\times n}$ o conjunto de todas as matrizes de ordem $m\times n$ com m e n fixados, porém arbitrários. Sobre o conjunto $\mathbb{M}_{m\times n}$ introduzimos uma operação interna denominada adição.

$$\begin{array}{rccc} +: & \mathbb{M}_{m\times n}\times\mathbb{M}_{m\times n} & \to & \mathbb{M}_{m\times n} \\ & (A,B) & \mapsto & A+B=C \end{array}$$

onde $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ para todo $i=1,2,\cdots,m$ e $j=1,2,\cdots,n$.

Observação 3.4.1. Note que só faz sentido adicionar duas matrizes se elas possuem a mesma ordem.

Exemplo 3.4.1. Dadas as matrizes:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } B=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine o valor da Matriz X, sabendo que:

$$X=A+B$$

Solução

$$X=\begin{bmatrix} 1+1 & 3+4 \\ -1+0 & -2+3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposição 3.4.1 (Propriedades da adição de matrizes). *Sejam A, B e C matrizes em* $\mathbb{M}_{m\times n}$*, temos:*

I) Propriedade associativa da adição: $A+(B+C)=(A+B)+C$

II) Propriedade comutativa da adição: $A+B=B+A$

III) Elemento Neutro da adição: $A+0=0+A=A$*, onde 0 significa a matriz nula.*

IV) $A+(-A)=A-A=0$*, onde –A representa a matriz oposta de A.*

Demonstração. I) Dadas as matrizes:

$A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ e $C = (c_{ij})_{m\times n}$, temos: $A+(B+C) = (a_{ij})_{m\times n} + [(b_{ij}) + (c_{ij})]_{m\times n} = [(a_{ij}) + (b_{ij})]_{m\times n} + (c_{ij})_{m\times n} = (A+B)+C$ (foi utilizado a associatividade da adição de números reais).

II) Dadas as matrizes A e B, temos:

$A+B = (a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = [(a_{ij}) + (b_{ij})]_{m\times n} = [(b_{ij}) + (a_{ij})]_{m\times n} = (b_{ij})_{m\times n} + (a_{ij})_{m\times n}$ $= B+A$ (foi utilizado a comutatividade da adição de números reais).

III) Dadas as matizes A e O sendo O uma matriz nula, temos:

$A+O = (a_{ij})_{m\times n} + 0 = [(a_{ij}) + 0]_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} =$ A $= [0 + (a_{ij})]_{m\times n} = 0 + (a_{ij})_{m\times n} = O+A$

IV) Dada uma matriz A e $-A$ sua matriz oposta, temos:

$A+(-A) = (a_{ij})_{m\times n} + (-a_{ij})_{m\times n} = [(a_{ij}) + (-a_{ij})]_{m\times n} = [(a_{ij}) - (a_{ij})]_{m\times n} = 0 = [(-a_{ij}) + (a_{ij})]_{m\times n} = (-a_{ij})_{m\times n} + (a_{ij})_{m\times n} = -A+A$

$\square$

3.4.2 Produto de um escalar por uma matriz

Multiplicar uma matriz por um número (escalar) significa obter uma nova matriz com todos os elementos da matriz anterior multiplicados por esse número. Seja $k \in \mathbb{R}$, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, temos $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

$$k \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & \dots & k\cdot a_{1n} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & \dots & k\cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k\cdot a_{n1} & k\cdot a_{n2} & \dots & k\cdot a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.4.2.

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Proposição 3.4.2 (Propriedades do produto de uma matriz por um escalar). *Dadas as matrizes A e B e os escalares reais k_1 e k_2, temos:*

I) $k_1 \cdot (A+B) = k_1 \cdot A + k_1 \cdot B$

II) $(k_1 + k_2) \cdot A = k_1 \cdot A + k_2 \cdot A$

III) $k_1 \cdot (k_2 \cdot A) = (k_1 \cdot k_2) \cdot A$

IV) $1 \cdot A = A$.

Demonstração. I) $k_1 \cdot (A+B) = k_1 \cdot [a_{ij} + b_{ij}] = [k_1 \cdot a_{ij} + k_1 \cdot b_{ij}] = [k_1 \cdot a_{ij}] + [k_1 \cdot b_{ij}] = k_1 \cdot [a_{ij}] + k_1 \cdot [b_{ij}] = k_1 \cdot A + k_1 \cdot B$ (foi utilizado a distributividade da multiplicação em relação à adição de números reais)

II) $(k_1 + k_2) \cdot A = (k_1 + k_2) \cdot [a_{ij}] = [k_1 \cdot a_{ij} + k_2 \cdot a_{ij}] = [k_1 \cdot a_{ij}] + [k_2 \cdot a_{ij}] = k_1 \cdot A + k_2 \cdot B$ (foi utilizado a distributividade da multiplicação em relação à adição de números reais)

III) $k_1 \cdot (k_2 \cdot A) = k_1 \cdot [k_2 \cdot (a_{ij})] = [k_1 \cdot (k_2 \cdot a_{ij})] = (k_1 \cdot k_2) \cdot [a_{ij}] = (k_1 \cdot k_2) \cdot A$ (foi utilizado a associatividade da multiplicação de números reais)

IV) $1 \cdot A = 1 \cdot [a_{ij}] = [a_{ij}] = A$ (foi utilizado que o número 1 é o elemento neutro da multiplicação de números reais)

□

3.4.3 Produto de Matrizes

Na multiplicação de matrizes, é primordial que o número de colunas da primeira matriz seja igual ao número de linhas da segunda matriz.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

O número n de colunas da matriz A é igual ao número n de linhas da matriz B. A matriz C, resultado da multiplicação $A \cdot B$, tem a dimensão m x p, ou seja, o número de linhas da primeira matriz e o número de colunas da segunda.

De modo mais formal temos que: dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{jk})_{n\times t}$, definimos o produto $A\cdot B$ como sendo a matriz $C = (c_{ik})_{m\times t}$, tal que $c_{ik} = \sum_{r=1}^{n}(a_{ir}\cdot b_{rk})$, com $c_{ik} = a_{i1}\cdot b_{1k} + a_{i2}\cdot b_{2k} + \ldots + a_{in}\cdot b_{nk}$.

Exemplo 3.4.3. Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Determine a matriz $C = A\cdot B$.

Solução:

$$\text{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + (-1)\cdot 1 & 2\cdot(-2) + (-1)\cdot 2 & 2\cdot 1 + (-1)\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 1 & 3\cdot(-2) + 1\cdot 2 & 3\cdot 1 + 1\cdot 2 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 2-1 & -4-2 & 2-2 \\ 3+1 & -6+2 & 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Proposição 3.4.3. ***Propriedades da multiplicação de matrizes***

Sejam A, B e C matrizes de mesma ordem, a multiplicação possui as seguintes propriedades:

I) Distributividade da multiplicação em relação a adição:

$A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$

II) Associativa:

$(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$

III) Elemento neutro: Seja A uma matriz quadrada e I a matriz identidade com a mesma ordem que a matriz A. Então

$A\cdot I = A$

Demonstração. I) Dado as matrizes $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$, temos:

$$A\cdot(B+C) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot(b_{kj}+c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\cdot b_{kj} + a_{ik}\cdot c_{kj}) =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot c_{kj}\right) = A\cdot B + A\cdot C.$$

II) Dado as matrizes $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ e $C=[c_{ij}]_{p\times q}$, temos:
$(A\cdot B)\cdot C=[(A\cdot B)\cdot C]_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{p}(A\cdot B)_{ik}\cdot C_{kj}=\sum\limits_{k=1}^{p}\left(\sum\limits_{t=1}^{n}A_{it}\cdot B_{tk}\right)\cdot C_{kj}=\sum\limits_{t=1}^{p}A_{it}\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^{n}B_{tk}\cdot C_{kj}\right)=$
$\sum\limits_{t=1}^{p}A_{it}\cdot(B\cdot C)_{tl}=[A\cdot(B\cdot C)]_{ij}=A\cdot(B\cdot C).$

III) Dado a matriz $A=(a_{ij})_{n\times n}$ e a matriz $(\delta_{ij})_{n\times n}$, temos:

$$A\cdot I=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ ... & ... & ... & ....\\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ....\\ 0 & 0 & ... & 1\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix} a_{11}\cdot 1+a_{12}\cdot 0+...+a_{1n}\cdot 0 & ... & a_{11}\cdot 0+a_{12}\cdot 0+...+a_{1n}\cdot 1\\ ... & ... & ...\\ a_{n1}\cdot 1+a_{n2}\cdot 0+...+a_{nn}\cdot 0 & ... & a_{n1}\cdot 0+a_{n2}\cdot 0+...+a_{nn}\cdot 1\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ ... & ... & ... & ....\\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}\end{bmatrix}=A.$$

□

Note que na demonstração acima foi feita só a ida e omitimos a volta por se tratar de um processo análogo, utilizamos também o delta de Kronecker, assim chamado em honra a Leopold Kronecker, cuja notação é δ_{ij} definida por:

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{se } i=j\\ 0, & \text{se } i\neq j\end{cases}$$

.

3.5 Transposta de uma matriz

Dada uma matriz $A=(a_{ij})_{m\times n}$, definimos a matriz transposta de A, omo sendo a matriz $A^t=(b_{ji})_{n\times m}$, tal que $b_{ji}=a_{ij}$, para todo, $i\in\{1,2,3,...,n\}$ e todo $j\in\{1,2,3,...,m\}$. A grosso modo, isso significa que, para obtermos a transposta de uma matriz, basta transformar ordenadamente linhas em respectivas colunas ou vice-versa.

Exemplo 3.5.1. Determine a matriz transposta da matriz A:

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}_{1\times 3} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$

   Observação 3.5.1. Ao obtermos a transposta de uma matriz quadrada, os elementos da diagonal principal não mudam.

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

Proposição 3.5.1. *Propriedades da transposição de matrizes*

I) $(A^t)^t = A$

II) $(A+B)^t = A^t + B^t$

III) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

IV) $k \in \mathbb{R}$*, então* $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$

Demonstração. I) Seja $(A^t)^t = [(A^t)^t]_{ij} = [A^t]_{ji} = [A]_{ij} = A$.

II) Sejam as matrizes A e B de mesma ordem, temos que:

$(A+B)^t = [(A+B)^t]_{ij} = (A+B)_{ji} = A_{ji} + B_{ji} = A^t_{ij} + B^t_{ij} = A^t + B^t$.

III) Seja $A \cdot B = C = (c_{ik})_{m\times p}$, temos que $(A \cdot B)^t = C^t = (c^t_{ki})_{p\times m}$, logo $c^t_{ki} = c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} b^t_{kj} \cdot a^t_{ji} = B^t \cdot A^t$.

IV) Seja A uma matriz de ordem $m \times n$ e k um número real. Temos que:

$[(k \cdot A)^t] = [(k \cdot A)^t]_{ij} = [(k \cdot A)]_{ji} = k \cdot A_{ji} = k \cdot A^t_{ij} = k \cdot A^t$

$\square$

3.5.1 Matriz simétrica

Chama-se matriz simétrica toda matriz quadrada A, de ordem $n \times n$, tal que $A^t = A$. Note que se $A = (a_{ij})$ é simétrica, então $A^t = (a_{ji}) = (a_{ij}) = A$, portanto os elementos simétricos com relação a diagonal principal da matriz A são iguais.

Exemplo 3.5.2. Dadas as matrizes A e B, mostre que ambas são matrizes simétricas. Pela definição acima basta verificar que $A = A^t$ e $B = B^t$. De fato, temos

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = A^t$
- $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} = B^t$

No próximo capítulo, apresentaremos a teoria dos códigos corretos de erros. Exploraremos os fundamentos por trás desses códigos e como eles são essenciais para detectar e corrigir erros em transmissões de dados. Ao compreender essa teoria, os leitores serão capacitados a entender e implementar estratégias eficazes para garantir a integridade das informações em sistemas de comunicação e armazenamento de dados.

4 CÓDIGOS CORRETORES DE ERROS

4.1 Contexto histórico

A teoria dos Códigos Corretores de Erros é um campo de pesquisa altamente ativo em diversas áreas do conhecimento, incluindo Matemática, Computação, Engenharia Elétrica e Estatística, entre outras.

Na transmissão de dados na vida real, frequentemente, enfrentamos problemas como interferências eletromagnéticas ou erros humanos, como digitação incorreta ou "ruído". Esse ruído faz com que a mensagem recebida seja diferente da originalmente enviada. O objetivo da teoria é desenvolver métodos para detectar e corrigir esses erros.

O início dessa teoria remonta à década de 1940, quando os computadores eram dispositivos extremamente caros, acessíveis apenas as instituições de grande porte, como ao governo e às universidades. Esses computadores eram utilizados para realizar tarefas numéricas complexas, como o cálculo da órbita precisa de Marte ou a avaliação estatística de um censo.

Richard W. Hamming trabalhava com esses computadores no Laboratório Bell de Tecnologia, em 1947, embora seu acesso fosse restrito aos fins de semana. Naquela época, os programas eram armazenados em cartões perfurados, cuja leitura pelo computador permitia a detecção de erros de digitação. Se um erro fosse detectado, a leitura era interrompida e o computador passava automaticamente para o programa do próximo usuário. Hamming relembra que:

> Em dois finais de semana consecutivos, eu fui e descobri que todas as minhas coisas tinham sido descarregadas e nada tinha sido feito. Eu estava realmente aborrecido e irritado porque queria essas respostas e tinha perdido dois finais de semana. E então eu me disse 'Maldição, se as máquinas podem detectar um erro, por que não podemos localizar a posição do erro e corrigi-lo'? (HAMMING, 1950, p. 149).

A partir dessas perdas, Hamming propôs investigar a correção de erros e, em 1950, apresentou o algoritmo conhecido como **Código de Hamming**, que ainda é amplamente utilizado no campo da informática. Nos três anos seguintes à criação desse código e à publicação de seu trabalho, Hamming apresentou vários artigos internos no Laboratório Bell, atualizando os avanços de sua pesquisa, surgindo assim o questionamento sobre a possibilidade de se criar códigos mais eficientes do que os propostos inicialmente. Uma resposta indireta a essa pergunta foi colocada em 1948, por Claude Elwood Shannon em seu artigo “A mathematical theory of communication”, que marcou o início da nova teoria de códigos (juntamente com o trabalho de Hamming) e da Teoria da Informação, dando origem a dois novos campos de pesquisas matemáticas. Isso impulsionou investigações posteriores avançando para Teoria de Códigos de Erros. Essa questão foi crucial para o desenvolvimento dos Códigos Corretores de Erros.

Hamming desenvolveu um código capaz de detectar até dois erros e corrigir um erro, desde que fosse o único erro presente. Seu trabalho só foi publicado em abril de 1950, no “The Bell System Technical Journal”, devido ao pedido de patente desses códigos feito pelo Laboratório Bell. Posteriormente, Marcel J. E. Golay, que trabalhava nos Laboratórios de Engenharia do Signal Corps, em Fort Monmouth, Nova Jersey, leu a descrição do chamado código (7, 4) de Hamming no artigo de Shannon, de 1948, e expandiu esse resultado para criar um código corretor de erros de comprimento primo $\boldsymbol{P}$. Seu trabalho foi publicado em julho de 1949, nos “Proceedings of the I.R.E. (I.E.E.E.)”, sob o título “Notes on digital coding”.

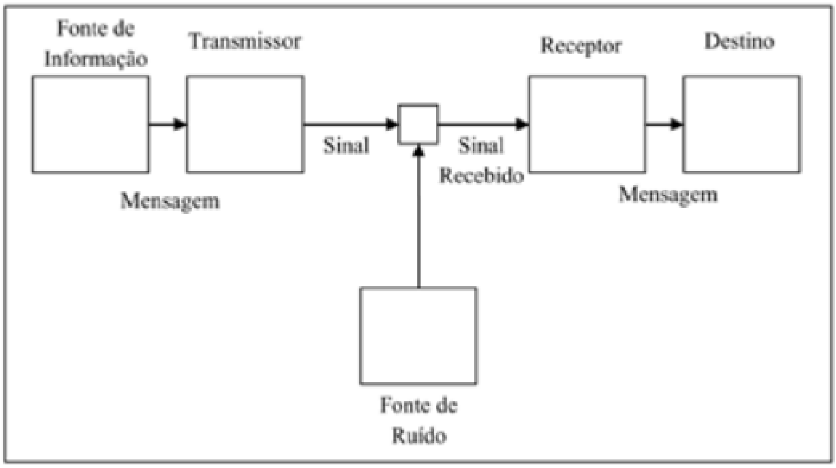
Baseado nesse artigo, Golay desenvolveu os conhecidos códigos (23,12) e (11,6) de Golay. Mais tarde, ele criou o código (24, 4096, 8) de Golay, que foi usado pela espaçonave Voyager para transmitir fotografias coloridas de Júpiter e Saturno. O primeiro artigo de Golay consiste em apenas uma página, mas é um dos mais importantes na teoria de códigos.

Golay, Hamming e Shannon foram os grandes pioneiros que iniciaram o trabalho nesse campo e contribuíram com ideias e pesquisas que continuam a ser fundamentais em nossa vida cotidiana, influenciando áreas como comunicações móveis, armazenamento de dados, comunicações via satélite, processamento de imagens digitais, *internet* e rádio, entre outras aplicações.

4.2 Conceitos básicos

Os Códigos Corretores de Erros estão intimamente relacionados à Teoria da Informação e foram desenvolvidos pelo matemático estadunidense Claude Elwood Shannon (1916-2001), em seu influente trabalho “A mathematical theory of communication"(SHANNON, 1948). Nessa obra, Shannon propôs-se a resolver o desafio fundamental da comunicação, qual seja, "reproduzir, em um local remoto, uma mensagem selecionada de maneira precisa ou aproximada"(NOBREGA, 2018, p. 18). Para alcançar esse objetivo, Shannon definiu o **bit** (abreviatura de "dígito binário") como a unidade de medida da informação e desenvolveu um sistema de comunicação que consiste em cinco elementos essenciais, sendo uma fonte de informação, um transmissor, um canal, um receptor e um destinatário.

Figura 4.1: Sistema de transmissão de informação.



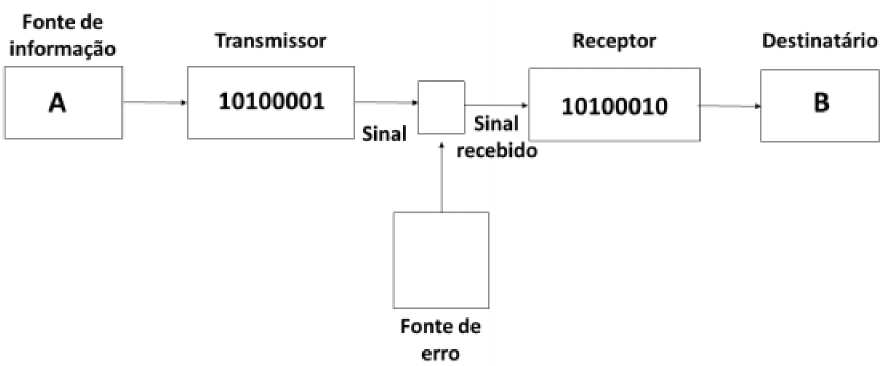
Fonte: Shannon (1948, p. 2).

Um ponto significativo no desenvolvimento da teoria foi a adoção do bit como unidade de medida de informação. Essa escolha proporcionou uma abordagem científica ao estudo da informação, semelhante à forma como outras grandezas são tratadas na física. Outra questão crucial foi a formalização do processo avançado de comunicação, o que facilitou uma compreensão mais profunda de como os erros poderiam afetar esse processo. Shannon também localizou, como indicado pelos trabalhos de (DANTAS et al., 2018, p. 36), que existe um limite fundamental na quantidade de informações que um canal de comunicação pode transportar. A partir dessa noção, os pesquisadores estudaram o desenvolvimento de métodos e códigos específicos para transmitir informações de maneira confiável em diversas formas.

Em relação ao impacto dos erros na comunicação, a (Figura 4.2) ilustra como interferências ou ruídos surgem entre a transmissão e a recepção de uma mensagem, resultando na modificação da mensagem original e em um erro. Reconhecendo essa possibilidade de ruído durante a transmissão de mensagens, Shannon e outros pesquisadores se propuseram a encontrar soluções para mitigar esse problema. Como resultado, foram desenvolvidos os Códigos Corretores de Erros, específicos para evitar distorções na mensagem original por meio da correção de erros após a transmissão.

Um exemplo ilustrativo é o impacto do erro na transmissão de um símbolo do código ASCII de 8 bits. Nesse cenário, a letra 'A' é codificada como o símbolo 01000001, enquanto a letra 'B' é representada como 01000010. No entanto, se ocorrer um erro durante a transmissão que troque os dois últimos dígitos do símbolo, a letra 'B' será interpretada incorretamente como a letra 'A'. Certamente, podemos considerar que a construção de códigos é inspirada em um dos sistemas de códigos mais comuns utilizados pelos seres humanos, ou seja, os idiomas. Na língua portuguesa, por exemplo, usamos um alfabeto de 26 letras e as palavras consistem em sequências dessas letras. No entanto, é importante observar que nem todas as modificações possíveis de letras fazem parte do idioma.

Figura 4.2: Erro no processo de transmissão da informação.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Portanto, os elementos básicos para construir um código estão descritos a seguir.

Definição 4.2.1. *Seja A um conjunto finito e não vazio, denominado alfabeto, com $|A|$ representando o seu número de elementos. Um Código Corretor de Erros C é definido como qualquer subconjunto próprio de A^n, para algum n natural. Um elemento $c \in C$ é referido como um símbolo do código.*

Da definição apresentada, podemos concluir que, dado um conjunto finito não vazio A, é possível derivar tantos Códigos Corretores de Erros quanto desejarmos, estando essa construção limitada apenas pela nossa criatividade e disposição. Por exemplo, ao escolhermos o alfabeto $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, em que $|A| = 10$ que representa o número de elementos de A, temos por exemplo que o número de registro de uma carteira de identidade, que é uma sequência de 9 algarismos pertencentes ao alfabeto A, torna-se um símbolo do conjunto $C \subset A^9$, onde C é um Código Corretor de Erros. Da mesma forma, se o conjunto A escolhido for o nosso alfabeto, então o conjunto $C \subset A^{46}$, formado por todas as palavras do nosso idioma, também constitui um Código Corretor de Erros. Além disso, os códigos de barras dos produtos que adquirimos, o Padrão Internacional de Numeração de Livro, conhecido pela sigla em inglês ISBN e o número do nosso CPF são todos exemplos de Códigos Corretores de Erros, cujo alfabeto também é $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, e cujos símbolos estão em A^{13} para os dois primeiros, e A^{11} para o último.

Uma questão que naturalmente surge após esses exemplos é a seguinte: como corrigir os erros nesses códigos? Essa pergunta não tem uma resposta única. Nos casos dos números de identidade e das palavras do nosso idioma, a repetição de um símbolo ao transmiti-lo é um procedimento que permite a correção de erros, embora a repetição nem sempre seja o método mais eficaz. Já para os códigos de barras, o ISBN e o CPF, existem procedimentos matemáticos um pouco mais sofisticados para a detecção e a correção dos erros eventuais. Para uma compreensão mais aprofundada sobre esses procedimentos, recomenda-se a leitura de (MILIES, 2009, p. 22).

Portanto, surge a necessidade de buscar procedimentos mais eficazes para a detecção e a correção de erros, tarefa que nem sempre é simples, especialmente, quando trabalhamos com alfabetos contendo muitos símbolos, como nos exemplos mencionados. Para lidar e prevenir esse tipo de problema, Hamming optou por trabalhar com códigos cujos símbolos são compostos por sequências numéricas contendo apenas zeros (0) e uns (1) em seus dígitos. Alguns desses dígitos são utilizados para transmitir a informação desejada, enquanto outros são empregados para a detecção e a correção de eventuais erros. Essa escolha nos conduz à próxima definição.

Definição 4.2.2. *Seja C um Código Corretor de Erros, e n, m, e k números naturais com*

$n > m$. Definimos C como sendo sistemático quando cada símbolo de C consiste precisamente em n dígitos binários. Dentre esses dígitos, m estão associados à informação transmitida, enquanto os $k = n - m$ dígitos restantes são destinados à detecção e a correção de erros.

Ao optarmos por utilizar códigos sistemáticos, nos deparamos com a seguinte indagação: dados dois códigos sistemáticos, C e C_0, como determinar qual deles é mais eficiente? Neste contexto, eficiência refere-se à capacidade de transmitir a maior quantidade de informação, representada por m, considerando um determinado comprimento de símbolos n. Equivalentemente, busca-se o código que seja capaz de transmitir uma quantidade específica m de informação com o menor valor possível de n. Para abordar essa questão, Hamming introduziu a seguinte definição:

Definição 4.2.3. *Seja C um código e n e m números naturais. A redundância R do código C é definida como a razão entre o número de dígitos binários utilizados e o número mínimo necessário para transmitir a mesma informação, ou seja, $R = \frac{n}{m}$. É importante observar que a redundância é um número maior do que ou igual a 1.*

É relevante ressaltar que é sempre possível obter tais códigos, denominados códigos de redundância mínima. Isso ocorre, como será discutido posteriormente, devido à clareza nas definições de m e n. Além disso, a menos que seja especificado de outra forma, utilizaremos sempre $A = \{0, 1\}$.

Na primeira parte de seu artigo, Hamming introduz a construção de códigos de redundância mínima em três casos específicos, a saber:

1. códigos detectores de um único erro;

2. códigos corretores de um único erro;

3. códigos corretores de um único erro, com capacidade de detecção de erros duplos.

Em resumo, ao mencionarmos os códigos referentes aos casos (1) e (2), estamos nos referindo às seguintes definições:

Definição 4.2.4. *Um código C é considerado detector de um único erro quando, durante a transmissão de um símbolo $c \in C$, há ocorrência de um único erro em apenas uma de suas posições pode ser identificada.*

Definição 4.2.5. *Um código C é denominado corretor de um único erro quando, durante a transmissão de um símbolo $c \in C$, a detecção de um único erro ocorrido em apenas uma de suas posições é possível, e, adicionalmente, esse erro pode ser corrigido mediante a troca de 0 por 1, ou vice-versa.*

4.3 Códigos detectores de um único erro

Os códigos detectores de um único erro são empregados para identificar a presença de um único erro em uma mensagem ou símbolo transmitido, sem a capacidade de corrigir o erro. Um exemplo simples é o código de paridade, em que um bit adicional (bit de paridade) é adicionado à mensagem original de forma que a soma de todos os bits, incluindo o bit de paridade, seja sempre par ou ímpar. Isso permite detectar a ocorrência de um erro durante a transmissão, mas não identifica qual bit está incorreto.

Para uma mensagem com sete dígitos de informação, o 8º bit (bit de paridade) é adicionado para garantir que a quantidade total de 1 na mensagem seja par. Por exemplo, se uma mensagem original para "1000110", o bit de paridade adicionado resultaria em "10001101". Se houver um erro na transmissão, a soma de uns (1) será ímpar, determinando a presença de um erro. No entanto, esse tipo de código não consegue corrigir o erro, apenas detectá-lo.

Algoritmo 1. *Nas primeiras $n-1$ posições, colocamos $n-1$ dígitos de informação. Na n-ésima posição, inserimos outro 0 ou 1, de modo que as n posições completas contenham um número par de uns (1).*

Note que o algoritmo é claramente um código detector de um único erro, uma vez que um único erro na transmissão deve resultar em um número ímpar de uns (1) nos símbolos do código. Isso nos permitirá concluir imediatamente que houve de fato um erro na transmissão. Esse código é denotado por $C(n,n-1)$ ou $C(n,m)$ onde n é a quantidade de posições dos símbolos do código e m é a quantidade de posições que contêm a informação.

Exemplo 4.3.1. Considerando a Tabela 4.1, observe que, em relação aos sete dígitos de informação, as duas primeiras linhas da tabela contêm um número ímpar de uns (1). Portanto, antes de transmitir os símbolos 1000110 e 0010110 presentes nessas linhas, devemos adicionar, na 8ª posição, o dígito 1, para que a quantidade de 1 seja par. Isso resulta nos símbolos codificados 10001101 e 00101101. Por outro lado, os símbolos nas duas últimas linhas contêm um número par de uns (1) nas sete posições de informação. Assim, antes de transmitir os símbolos 0111010 e 1010011 presentes nestas linhas, devemos adicionar, na 8ª posição, o dígito 0, para que a quantidade de uns (1) seja par. Isso resulta nos símbolos codificados 01110100 e 10100110. Dessa forma, se, durante a transmissão, o receptor receber um símbolo com um número ímpar de uns (1), ele pode concluir que ocorreu um erro na transmissão.

Tabela 4.1: Codificação usando código de paridade

Símbolo original	Símbolo codificado
1000110	10001101
0010110	00101101
0111010	01110100
1010011	10100110

Fonte: Elaborado pelo autor.

Encerramos esta seção com uma análise das técnicas de detecção de erros, destacando sua importância na garantia da integridade e confiabilidade dos dados. Agora, adentraremos no universo dos códigos corretores de um único erro, uma classe especial de códigos que se destacam pela sua capacidade de identificar e corrigir precisamente um erro em um dado. Esses códigos, com sua capacidade de detecção e correção, desempenham um papel crucial em diversas aplicações, desde a transmissão de dados em redes de comunicação até o armazenamento seguro de informações críticas. Vamos explorar sua estrutura, funcionamento e aplicações em detalhes, aprofundando nosso entendimento sobre essa importante área da teoria da informação.

4.4 Códigos corretores de um único erro

No caso dos códigos corretores de um único erro, Hamming desenvolveu dois algoritmos. Um deles é utilizado para a confirmação, enquanto o outro é utilizado na detecção, correção e decodificação de um erro em uma sequência binária de n posições. Dessas, m são reservadas para conter informações, enquanto as outras k posições (em que $k = n - m$) são utilizadas para verificação de paridade. A relação entre n, m e k é apresentada na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Relação entre n,m e k dos códigos de Hamming

n	m	k **correspondente**
1	0	1
2	0	2
3	1	2
4	1	3
5	2	3
6	3	3
7	4	3
8	4	4
9	5	4
10	6	4
11	7	4
12	8	4
13	9	4
14	10	4
15	11	4
16	11	5

Fonte: Elaborado pelo autor.

Exemplo 4.4.1. Considere um robô que se move em um tabuleiro quadriculado, em que os comandos (Leste, Oeste, Norte ou Sul) fazem o robô se deslocar do centro de uma célula para o centro de uma célula adjacente indicada pelo comando. Se definirmos esses comandos como: Leste $\rightarrow$ 00, Oeste $\rightarrow$ 01, Norte $\rightarrow$ 10 e Sul $\rightarrow$ 11, na Tabela 4.2 observa-se que, com dois dígitos de informação ($m = 2$), precisamos de três dígitos de verificação ($k = 3$), resultando em símbolos codificados de cinco posições ($n = 5$). Portanto, uma cópia para esses comandos seria a seguinte:

- 00 $\rightarrow$ 00**000**
- 01 $\rightarrow$ 10**011**
- 10 $\rightarrow$ 11**100**
- 11 $\rightarrow$ 01**111**

Os dígitos em negrito (informações) representam os comandos originais do robô antes da codificação, enquanto os outros dígitos sem negrito (redundância) ocupam posições correspondentes a potências de 2. Embora esta não seja a única forma de codificar os comandos do robô, é uma que permite a detecção e correção de um único erro, tornando-o mais robusto durante a transmissão. Num primeiro momento, pode parecer que a escolha dessa decisão foi arbitrária, mas, na verdade, ela segue um algoritmo definido por Hamming (1950).

No algoritmo de codificação proposto por Hamming, ele destaca que as posições de verificação devem estar localizadas em potências de 2. Portanto, essas posições serão a 1ª, a 2ª e a 4ª. Para facilitar a compreensão, denominaremos essas posições como v_1, v_2 v_4, e os símbolos 00, 01, 10, 11. Ao serem codificados, esses símbolos serão representados como $v_1v_2d_3v_4d_5$, sendo que d_3 e d_5 são os dígitos originais.

A determinação de v_1, v_2 e v_4, segue o seguinte algoritmo:

- para a codificação do símbolo **00** em $v_1v_2d_3v_4d_5$, v_1 é escolhido de forma que a soma $v_1 + 0 + 0$ seja par; v_2, de forma que a soma $v_2 + 0$ seja par; e v_4, de forma que a soma $v_4 + 0$ seja par. Assim, temos $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ e $v_4 = 0$, resultando no símbolo codificado 00**000**;
- para a codificação do símbolo **01** em $v_1v_2d_3v_4d_5$, v_1 é escolhido de forma que a soma $v_1 + 0 + 1$ seja par; v_2, de forma que a soma $v_2 + 0$ seja par; e v_4, de forma que

a soma $v_4 + 1$ seja par. Portanto, temos $v_1 = 1$, $v_2 = 0$ e $v_4 = 1$, gerando o símbolo codificado 10**011**;

- para a codificação do símbolo **10** em $v_1v_2d_3v_4d_5$, v_1 é escolhido de forma que a soma $v_1 + 1 + 0$ seja par; v_2, de forma que a soma $v_2 + 1$ seja par; e v_4, de forma que a soma $v_4 + 0$ seja par. Dessa maneira, obtemos $v_1 = 1$, $v_2 = 1$ e $v_4 = 0$, resultando no símbolo codificado 11**10**0;

- para a codificação do símbolo **11** em $v_1v_2d_3v_4d_5$, v_1 é escolhido de forma que a soma $v_1 + 1 + 1$ seja par; v_2, de forma que a soma $v_2 + 1$ seja par; e v_4, de forma que a soma $v_4 + 1$ seja par. Logo, temos $v_1 = 0$, $v_2 = 1$ e $v_4 = 1$, gerando o símbolo codificado 01**111**.

Dessa forma, obtêm-se os símbolos codificados. Agora, analisemos o caso geral para um símbolo $v_1v_2d_3v_4d_5d_6d_7v_8\ldots$ codificado a partir do símbolo $d_3d_5d_6d_7\ldots$.

Algoritmo 2. (Codificação) *Para determinar v_1, some os valores dos dígitos nas posições $1,3,5,7,\ldots$, de forma que a soma seja par. Em outras palavras, "escolha"um dígito e "pule"um dígito a partir da 1ª posição. Para determinar v_2, some os valores dos dígitos nas posições 2, 3, 6, 7, 10, 11, ..., de forma que a soma seja par. Isto é, "escolha"dois dígitos e "pule"dois dígitos a partir da 2ª posição. Para determinar v_4, some os valores dos dígitos nas posições 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, ..., de forma que a soma seja par. Em resumo, "escolha"quatro dígitos e "pule"quatro dígitos a partir da 4ª posição. Este algoritmo continua até que todas as posições nas potências de 2 do símbolo sejam percorridas, sempre "escolhendo"e "pulando"dígitos nas potências de dois.*

Ao nos depararmos com um erro na transmissão do comando para o robô se movimentar para o Norte, onde, em vez do símbolo esperado 11100, foi transmitido o símbolo 11000 com um erro na terceira posição, podemos empregar um algoritmo proposto por Hamming para verificar e corrigir essa discrepância.

A pergunta natural que surge nesse momento é a seguinte: por que esses algoritmos de codificação, decodificação e correção funcionam? A resposta para essa pergunta pode ser encontrada na relação existente entre os números escritos nas bases 2 e 10. Para entender melhor essa afirmação, consideremos o teorema a seguir e o seu corolário mais adiante, cujas demonstrações podem ser encontradas em (HEFEZ; VILLELA, 2008, p. 29, p. 29).

Teorema 4.4.1. *Sejam dados os números inteiros a e b, com $a > 0$ e $b > 1$. Existem números inteiros $n > 0$ e $0 \leq r_0, r_1, \ldots, r_n < b$, com $r_n \neq 0$, univocamente determinados, tais que $a = r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + \ldots + r_n b^n$.*

Note que esse teorema garante que podemos escrever um número a dado na base $b > 1$ que preferirmos. Em particular, quando $b = 10$, dizemos que o número a está escrito na base 10 ou em sua expansão decimal e escrevemos $(a)_{10}$, enquanto, quando $b = 2$, dizemos que o número a está escrito na base 2 ou em sua expansão binária e escrevemos $(a)_2$. O corolário a seguir nos permite relacionar um número em sua representação na base 10 com a sua respectiva representação na base 2 e vice-versa. Tal relação, embora não tenha sido explicitada, está no cerne dos algoritmos de codificação, decodificação e detecção de erro desenvolvidos por Hamming.

Corolário 4.4.1. *Todo número natural a escreve-se de modo único como soma de potências distintas de 2, a saber, $a = r_n \times 2^n + r_{n-1} \times 2^{n-1} + \ldots + r_1 \times 2^1 + r_0 \times 2^0$, com $r_i \in \{0, 1\}$.*

Exemplo 4.4.2. Segundo o corolário anterior, consideremos o número $(482)_{10}$. Utilizando apenas potências de 2, podemos escrevê-lo como $1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$. De forma mais sucinta, $(482)_{10} = (111100010)_2$.

Para encerrar, vejamos como foi realizada a escolha dos valores de n, m, e k presentes na Tabela 4.2. Para isso, considere a seguinte proposição que relaciona o número de verificação com os valores de n, m, e k:

Proposição 4.4.1. *Sejam $C \in A^n$, um código corretor de erros, e $n, m, k \in \mathbb{N}$, tais que m é o número de posições de informação, k é o número de posições de verificação dos símbolos do código e $n = m + k$, vale a seguinte relação entre n e m:*

$$2^n(n+1) > 2^m. \tag{4.1}$$

Demonstração. De fato, note que o número de verificação deve descrever $m + k + 1$ possibilidades diferentes, a saber, $n = m + k$ posições que dizem respeito a um erro em qualquer posição no símbolo, mais uma possibilidade no caso da não existência de erro. Isso implica na necessidade de ser $2^k > m+k+1$, uma vez que 2^k é o número de sequências com k posições contendo apenas 0 e 1. Utilizando o fato de que $n = m+k$, obtemos $2^{n-m} > n+1 \Rightarrow 2^n 2^{-m} > n+1 \Rightarrow 2^n(n+1) > 2^m$, o que prova o resultado.

□

Com essa proposição, concluímos que atribuindo valores para n, ou seja, escolhendo a quantidade de posições que os símbolos de C terão, a inequação acima nos fornece o maior valor possível para m, ou seja, a maior quantidade de posições de informação que os símbolos de C terão. Por outro lado, feita a escolha de m, a mesma inequação nos fornece o menor valor para n, ou seja, os símbolos com menor tamanho para o código C contendo certa quantidade de informação. Dessa forma, a inequação acima nos permite escrever o código que carregue a maior quantidade de informação possível com a maior economia possível.

Note que, se no lugar de considerarmos a inequação $2^k > m+k+1$, como fizemos anteriormente, considerarmos apenas a igualdade $2^k = m+k+1$, ou seja, se o número de verificação nos der exatamente $m+k+1$ posições diferentes, e sabendo que $n = m+k$, segue que $m = 2^k - k - 1$ e $n = 2^k - 1$. Logo, ao representarmos um código de Hamming na forma $C(n,m)$, o mesmo será descrito por $C(2^k-1, 2^k-k-1)$ e é justamente para essa família de códigos que daremos uma abordagem matricial na próxima subseção. Códigos que satisfazem a essa condição são ditos perfeitos.

4.4.1 O código $C(7,4)$ e a família de códigos $C(2^k-1, 2^k-k-1)$

Após uma análise aprofundada da formulação original do código de Hamming, apresentamos uma abordagem mais recente utilizando ferramentas da Teoria das Matrizes. Essa abordagem permitiu a construção do nosso livro dinâmico digital, incorporando conceitos do Ensino Médio, como multiplicação de matrizes e transposição.

Neste momento, exploraremos os códigos $C(2^k-1, 2^k-k-1)$ de maneira geral, e concentraremos nossa atenção no código $C(7,4)$, em que $m = 4$ e $k = 3$. Este código é capaz de codificar todas as sequências binárias de quatro elementos (16 símbolos), variando de 0000 a 1111.

Diferentemente da abordagem clássica de Hamming (HAMMING, 1950), apresentaremos uma variação em que os dígitos de verificação não são colocados nas potências de 2, mas em posições específicas no final do símbolo.

Alinhando nossa exposição com trabalhos recentes, tais como, (CARVALHO, 2014, p. 115) e (DANTAS et al., 2018, p. 36) detalhamos o papel do conjunto Z_2 na construção desses códigos, com base na ideia de congruência módulo 2, em que $a \equiv b \pmod{m}$ denota que a e b deixam o mesmo resto na divisão por m.

Considerando $Z_2 = \{0,1\}$, ilustraremos a codificação, a decodificação e a correção utilizando o símbolo $x = 0101$. Os cálculos dos dígitos de verificação $v5, v6$ e $v7$ são dados por $v5 = d1 + d2 + d4$, $v6 = d1 + d3 + d4$, e $v7 = d2 + d3 + d4$. A codificação resulta em $x_0 = 0101010$.

A codificação $d1d2d3d4v5v6v7$ é equivalente à codificação da subseção anterior $v1v2d3v4d5d6d7$, com $v5 \leftrightarrow v1$, $v6 \leftrightarrow v2$, $v7 \leftrightarrow v4$, e $d1, d2, d3, d4 \leftrightarrow d3, d5, d6, d7$.

Apresentamos um algoritmo prático para codificar símbolos do $C(7,4)$, em que a codificação é realizada somando-se as colunas apropriadas.

Exemplo 4.4.3. Vamos determinar a codificação do símbolo $y = 0111$ utilizando a tabela específica para o código $C(7,4)$. O esquema a seguir constante na Tabela 4.3 resume o processo de codificação.

Tabela 4.3: Esquema para a codificação de um símbolo de $C(7,4)$

$d1$	$d2$	$d3$	$d4$	$v5$	$v6$	$v7$
$1 \cdot d1$	$0 \cdot d1$	$0 \cdot d1$	$0 \cdot d1$	$1 \cdot d1$	$1 \cdot d1$	$0 \cdot d1$
$0 \cdot d2$	$1 \cdot d2$	$0 \cdot d2$	$0 \cdot d2$	$1 \cdot d2$	$0 \cdot d2$	$1 \cdot d2$
$0 \cdot d3$	$0 \cdot d3$	$1 \cdot d3$	$0 \cdot d3$	$0 \cdot d3$	$1 \cdot d3$	$1 \cdot d3$
$0 \cdot d4$	$0 \cdot d4$	$0 \cdot d4$	$1 \cdot d4$	$1 \cdot d4$	$1 \cdot d4$	$1 \cdot d4$

Fonte: Elaborada pelo autor

Substituindo os valores de d_1, d_2, d_3 e d_4, temos o esquema exposto na Tabela 4.4.

Tabela 4.4: Codificação de $y = 0111$ para $C(7,4)$

$d1$	$d2$	$d3$	$d4$	$v5$	$v6$	$v7$
$1 \cdot 0$	$0 \cdot 1$	$0 \cdot 1$	$0 \cdot 1$	$1 \cdot 0$	$1 \cdot 0$	$0 \cdot 1$
$0 \cdot 1$	$1 \cdot 1$	$0 \cdot 1$	$0 \cdot 1$	$1 \cdot 1$	$0 \cdot 1$	$1 \cdot 1$
$0 \cdot 1$	$0 \cdot 1$	$1 \cdot 1$	$0 \cdot 1$	$0 \cdot 1$	$1 \cdot 1$	$1 \cdot 1$
$0 \cdot 1$	$0 \cdot 1$	$0 \cdot 1$	$1 \cdot 1$	$1 \cdot 1$	$1 \cdot 1$	$1 \cdot 1$

Tabela 4.5: Fonte: Elaborada pelo autor

Agora, somamos as colunas correspondentes para obter a codificação final, em que uma soma da coluna sendo par contribui com um 0 e soma ímpar contribui com o 1 no símbolo codificado. Temos que $d_1 = 0+0+0+0 = 0$, $d_2 = 0+1+0+0 = 1$, $d_3 = 0+0+1+0 = 1$, $d_4 = 0+0+0+1 = 1$, $v_5 = 0+1+0+1 = 2 \equiv 0$, $v_6 = 0+0+1+1 = 2 \equiv 0$ e $V_7 = 0+1+1+1 = 3 \equiv 1$. Portanto, para $y = 0111$, a codificação resultante é $y_0 = 0111001$.

A próxima questão a ser abordada é: como decodificar e corrigir um erro nesse código? Exploramos métodos para detectar a existência de um erro, identificar sua posição e corrigi-lo, trocando 0 por 1 ou vice-versa.

Algoritmo 3. (Detecção e correção de erros) *Para detectar um possível erro, calculamos os dígitos de verificação do símbolo recebido, denotados por* $w5$, $w6$, *e* $w7$. *Em seguida, comparamos esses valores com os respectivos dígitos de verificação do símbolo original. As possibilidades são as seguintes:*

1. $v5 = w5$, $v6 = w6$, e $v7 = w7$: Nesse caso, o símbolo foi enviado sem erro.

2. $v5 \neq w5$ e $v6 \neq w6$: O erro está na primeira posição.

3. $v5 \neq w5$ e $v7 \neq w7$: O erro está na segunda posição.

4. $v6 \neq w6$ e $v7 \neq w7$: O erro está na terceira posição.

5. $v5 \neq w5$, $v6 \neq w6$, e $v7 \neq w7$: O erro está na quarta posição.

6. $v5 \neq w5$: O erro está na quinta posição.

7. $v6 \neq w6$: O erro está na sexta posição.

8. $v7 \neq w7$: O erro está na sétima posição.

Explicamos agora, caso a caso, o funcionamento desse algoritmo:

1. No caso 1, todas as verificações de paridade coincidem, indicando que o símbolo foi recebido sem erro.

2. No caso 2, ao notar $v5 \neq w5$ e $v6 \neq w6$, concluímos que $v7 = w7$. Como $v7 = d2 + d3 + d4$, o erro só pode estar em $d1$, pois a discrepância nesse dígito resulta em $v5 \neq w5$ e $v6 \neq w6$.

3. No caso 3, ao notar $v5 \neq w5$ e $v7 \neq w7$, concluímos que $v6 = w6$. Como $v6 = d1 + d3 + d4$, o erro só pode estar em $d2$, pois a discrepância nesse dígito resulta em $v5 \neq w5$ e $v7 \neq w7$.

4. No caso 4, ao notar $v6 \neq w6$ e $v7 \neq w7$, concluímos que $v5 = w5$. Como $v5 = d1 + d2 + d4$, o erro só pode estar em $d3$, pois a discrepância nesse dígito resulta em $v6 \neq w6$ e $v7 \neq w7$.

5. No caso 5, ao notar $v5 \neq w5$, $v6 \neq w6$, e $v7 \neq w7$, concluímos que o erro só pode estar em $d4$, pois a discrepância nesse dígito resulta em $v5 \neq w5$, $v6 \neq w6$, e $v7 \neq w7$.

6. Nos casos 6, 7 e 8, ao notar $v5 \neq w5$, $v6 \neq w6$, e $v7 \neq w7$, respectivamente, concluímos que o erro ocorreu nas posições $v5$, $v6$ ou $v7$, respectivamente.

Agora, vejamos um exemplo prático para ilustrar como esse procedimento funciona na correção de um único erro em um símbolo.

Exemplo 4.4.4. Suponha que o símbolo $x_1 = 0101010$ tenha sido transmitido com um erro na quinta posição, ou seja, o símbolo recebido foi $x_2 = 0101110$. Aplicando o Algoritmo anterior ao símbolo recebido, temos que $w_5 = d_1 + d_2 + d_4 = 0 + 1 + 1 = 0$,

$w_6 = d_1 + d_3 + d_4 = 0+0+1 = 1$ e $w_7 = d_2 + d_3 + d_4 = 1+0+1 = 0$. Comparando com $v_5 = 1$, $v_6 = 1$ e $v_7 = 0$ fica fácil ver que $v_5 \neq w_5$, logo, o erro está na quinta posição, como já era de se esperar. Para corrigir o erro, basta modificar o símbolo da quinta posição, trocando o 1 por 0 e, para decodificar o símbolo, basta considerar as quatro primeiras posições.

Com os algoritmos anteriores, podemos codificar, decodificar e corrigir um único erro de qualquer um dos 16 símbolos do código $C(7,4)$. Entretanto, existe uma maneira mais prática de se codificar, decodificar e corrigir um único erro nesse código, que pode ser generalizada para a família de códigos $C(2^k - 1, 2^k - k - 1)$.

Considerando a Tabela 4.3, observamos que os coeficientes de $d_1, \ldots, v_7$ presentes em suas entradas são os mesmos da matriz

$$G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

a qual é chamada de matriz geradora do código $C(7,4)$, visto que qualquer símbolo X desse código é codificado no símbolo X_0 por meio da sua multiplicação com a matriz geradora, ou seja, $X_0 = XG_3$. O índice 3 designa o número de dígitos de verificação do código que, como já vimos anteriormente, nesse caso são 3.

Exemplo 4.4.5. Para codificar o símbolo $x = 0111$ novamente, basta realizar a multiplicação em Z_2 das matrizes

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

obtendo a matriz

$$XG_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a qual representa o símbolo codificado $x_0 = 0111001$. Note que obtemos o mesmo símbolo codificado anteriormente.

Para o caso geral da matriz geradora de um código $C(2^k - 1, 2^k - k - 1)$, temos a seguinte definição:

Definição 4.4.1. A matriz geradora, denotada por G_k, é uma matriz de dimensão $(2^k - k - 1) \times (2^k - 1)$ com coeficientes em Z_2, tal que todos os elementos codificados do código C sejam obtidos por meio da sua multiplicação pela matriz geradora.

Outra matriz que tem destaque no código de Hamming é a chamada matriz de controle ou matriz de paridade H_k. Para o código $C(7,4)$, temos que:

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E para o caso geral, temos que a matriz de paridade de um código $C(2^k - 1, 2^k - k - 1)$ é definida como segue.

Definição 4.4.2. A matriz de paridade, denotada por H_k, é uma matriz de dimensão $k \times (2^k - 1)$ com coeficientes em Z_2, tal que $G_k H_k^t = 0$, na qual H_k^t denota a matriz transposta de H_k e 0 representa a matriz nula.

Observa-se que as matrizes G_3 e H_3 do código $C(7,4)$ podem ser expressas como $G_3 = [I_4 A]$ e $H_3 = [B I_3]$, em que A e B são matrizes que satisfazem a condição $A^t = B$, e I_3 e I_4 representam as matrizes identidade de dimensão 3 e 4, respectivamente.

Além disso, ao representar as matrizes G_3 e H_3 nessa configuração, afirmamos que estão em sua forma padrão. A generalização desse princípio constitui o cerne do próximo teorema, o qual nos possibilitará alcançar G_k em sua forma padrão, sempre que definirmos H_k também dessa maneira e vice-versa. A demonstração desse teorema não será incluída neste documento, uma vez que envolve conceitos que ultrapassam a abrangência deste trabalho.

Teorema 4.4.2. *Sejam $G_k = [I_{2^k-k-1} A]$ e $H_k = [B I_k]$. H_k será a matriz de verificação de paridade associada à matriz geradora G_k se, e somente se, $A^t = B$. Além disso, o código binário correspondente $C(2^k-1, 2^k-k-1)$ será corretor de um único erro se, e somente se, as colunas de H_k forem não nulas e distintas.*

Dado o contexto apresentado no teorema anterior, pode surgir a indagação: seriam as matrizes G_k e H_k as únicas que caracterizam um código da forma $C(2^k-1, 2^k-k-1)$? A resposta a essa questão é negativa. Ademais, a definição a seguir estabelece as condições para a elaboração de outras matrizes geradoras e de paridade, conhecidas como matrizes equivalentes.

Definição 4.4.3. Duas matrizes G_k e G'_k geram o mesmo código C, ou seja, são equivalentes, se uma pode ser transformada na outra por meio de uma sequência finita de operações do seguinte tipo:

- L_1 permutação de duas linhas;
- L_2 adição de uma linha a outra;
- C_1 permutação de duas colunas.

É fácil ver que a matriz geradora do código de Hamming é igual a

$$G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a qual, por sua vez, é equivalente à matriz geradora do código de Hamming que definimos nesta seção

$$G'_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

pois podemos obter uma da outra por meio de aplicações sucessivas das operações acima definidas.

Proposição 4.4.2. *Dado um código C com matriz geradora G_k, existe um código equivalente C_0 com matriz geradora G'_k na forma padrão.*

Dessa forma, ao considerarmos a matriz geradora G_k, a codificação de um símbolo u pertencente ao código $C(2^k-1, 2^k-k-1)$ é realizada de maneira direta pela multiplicação de u por G_k, resultando no símbolo codificado $v = uG_k$. Em outras palavras, o processo de codificação é simplesmente uma multiplicação de matrizes com coeficientes em Z_2.

Quando se trata da decodificação e correção, existem dois cenários a serem considerados que são

- o símbolo foi transmitido sem erro;
- o símbolo foi transmitido com um único erro.

Para o primeiro caso, se o símbolo codificado v foi transmitido sem erro, então ele é anulado pela matriz de paridade. Ou seja, $vH_k^t = (uG_k)H_k^t = u(G_kH_k^t) = u_0 = 0$. Assim, sempre que o produto vH_k^t resultar na matriz nula, podemos concluir que o símbolo foi transmitido sem erro.

Para o segundo caso, consideremos v como um símbolo do código $C(2^k-1, 2^k-k-1)$ (sem erro) e $v^{(i)}$ como o símbolo obtido pela adição, em Z_2, de 1 ao i-ésimo dígito de v. Portanto, $v^{(i)}$ é um símbolo codificado transmitido com um erro no i-ésimo dígito. Podemos expressar $v^{(i)} = v + (0\ldots0|\underbrace{\quad 0 \quad}_{\text{i-ésimo dígito}}|0\ldots0)$, a partir do qual temos:

$$v^{(i)}H_k^t = vH_k^t|\underbrace{\quad 0 \quad}_{\text{posição } i} + \begin{bmatrix}0\ldots0 & 1 & 0\ldots0\end{bmatrix} H_k^t = \begin{bmatrix}0\ldots0 & 1 & 0\ldots0\end{bmatrix} H_k^t.$$

Observamos que $v^{(i)}H_k^t$ representa a i-ésima linha de H_k^t e consequentemente, a i-ésima coluna de H_k. Assim, um erro ocorrido na i-ésima posição da mensagem transmitida é equivalente a modificar o dígito do símbolo recebido na posição correspondente à i-ésima coluna da matriz de paridade H_k.

A seguir, apresentamos uma ilustração do procedimento de correção para um símbolo no código $C(7,4)$, que corresponde a $k=3$ no código $C(2^k-1, 2^k-k-1)$.

Exemplo 4.4.6. Considere novamente o símbolo $x = 0111$ que, conforme visto nos exemplos anteriores, ao ser codificado torna-se $x' = 0111001$. No entanto, para demonstração, introduziremos um erro na quinta posição, resultando em $x'' = 0111101$. Para corrigir esse erro, multiplicaremos o símbolo x'' pela transposta da matriz de paridade para este código, H_3^t, obtendo

$$x\text{"}H_3^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para descobrir a posição do erro, basta escrever o número $(101)_2$ na base 10. Para isso temos que $(101)_2$= $1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$= 5. Logo o erro se encontra na quinta linha de H_3^t e, consequentemente, na quinta coluna de H_3. Logo, o erro está na quinta posição do símbolo x'', conforme esperado.

O código de Hamming se destacou como um marco significativo na Teoria dos Códigos Corretores de Erros. Os desenvolvimentos subsequentes, em grande medida, foram viabilizados graças ao trabalho pioneiro desse código. Portanto, a exploração do código de Hamming na Educação Básica não apenas é merecida, mas também pode constituir uma forma interessante de introduzir o tema para as novas gerações de futuros engenheiros, matemáticos e pesquisadores de diversas áreas da ciência.

No próximo capítulo, apresentamos o nosso livro dinâmico digital, cujo objetivo é possibilitar que os discentes e os docentes da Educação Básica ingressem no mundo da teoria dos Códigos Corretores de Erros, de maneira prática e objetiva. O livro visa oferecer uma abordagem envolvente e acessível para explorar os conceitos e aplicações dos Códigos Corretores de Erros, promovendo o entendimento e o interesse no campo da Teoria dos Códigos.

5 ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA ABORDAGEM INTERATIVA COM O GEOGEBRA

Neste capítulo abordamos, de forma sucinta, na primeira seção, o *software* GeoGebra, a plataforma *online* do GeoGebra e a ferramenta GeoGebraBook. Na sequência, apresentamos de forma mais detalhada o produto principal deste trabalho, que é o livro interativo produzido no formato de um GeoGebraBook.

5.1 O GeoGebra e a ferramenta GeoGebraBook

O GeoGebra é um *software* de geometria dinâmica utilizado na realização de atividades que irão compor o produto deste trabalho.

Analisando informações do site do Instituto GeoGebra da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), o GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, planilha de cálculo, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um pacote fácil de usar (DUARTE, 2021, p. 17).

Criado em 2001 como resultado da tese de Markus Hohenwarter, na Universidade de Salzburg, na Áustria, o GeoGebra já é utilizado em pelo menos 190 países e foi traduzido para 55 idiomas. São mais de 300.000 *downloads* mensais e 62 Institutos GeoGebra em 44 países para dar suporte ao seu uso.

Esse *software* apresenta algumas características importantes, como:

1. gráficos, álgebra e tabelas estão interligados e apresentam características dinâmicas;
2. interface amigável, com vários recursos sofisticados;
3. ferramenta de produção de aplicativos interativos em páginas *web*;
4. disponível em vários idiomas para milhões de usuários em todo o mundo;
5. *software* gratuito e de código aberto.

O *software* GeoGebra, por ser livre e dinâmico, vem sendo atualizado desde a sua criação, sendo um programa computacional que podemos classificar como *software* de matemática dinâmica. Pode ser utilizado em dispositivos como computadores, *notebooks* ou *smartphones*, em ambientes virtuais ou não, nos quais é possível escrever, ver e ministrar aulas como no quadro-negro, introduzir planilhas eletrônicas e cálculo, como nas calculadoras.

O GeoGebraBook é uma ferramenta disponível na plataforma *online* do GeoGebra, acessível em: ⟨https://www.geogebra.org/⟩ que permite criar um livro online interativo, sendo possível aos usuários acessá-lo diretamente na plataforma *online* do GeoGebra ou baixá-lo e utilizar os materiais no modo *offline*. Na primeira opção, não há necessidade de o usuário instalar qualquer aplicativo. Já optando por fazer *download* das atividades ou do livro, os usuários precisam instalar o *software* do GeoGebra (alguma das versões disponíveis na página) no seu dispositivo, seja ele computador, notebook, *tablet*, etc.

A criação do GeoGebraBook implica no aceite em publicá-lo segundo a licença Creative Commons: Attribution Share Alike, o que significa que é possível a qualquer pessoa remixar, copiar e transformar o material que você publicou, mas precisa distribuí-lo sob a mesma licença do original ⟨ttp://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0⟩. Além disso, no momento da criação de um GeoGebraBook, é preciso escolher como o material será compartilhado com outras pessoas, informando se o acesso ao material será **público**, ou seja, outros usuários podem encontrar e visualizar este livro, **compartilhado com o *link***, somente usuários que possuam o *link* poderão visualizar este livro e ele não aparecerá nos resultados de pesquisa de outros usuários. O acesso também pode ser **particular**, isto é, outros usuários não poderão visualizar este livro GeoGebra e ele não aparecerá nos resultados de pesquisa de outros usuários.

A ferramenta do GeoGebraBook permite que o livro seja organizado em capítulos e seções, possibilitando a inclusão de *Applets*, arquivos em pdf, imagens, *links*, questões abertas e de múltipla escolha (com possibilidade de *feedback*), textos e vídeos.

Para acessar as funcionalidades da plataforma *online* do Geogebra é necessário a criar de uma conta no site ⟨https://www.geogebra.org/⟩, a qual é gratuita. Para isso, o usuário pode criar um novo perfil com usuário e senha (Figura 5.1) ou utilizar uma conta já existente do *Google*, do *Facebook*, etc.

Figura 5.1: Login na plataforma do GeoGebra

Fonte: Elaborado pelo autor.

Neste trabalho, apresentamos como produto educacional um livro em formato digital, o GeoGebraBook, produzido na plataforma ⟨https://www.geogebra.org/user/signin⟩. O objetivo é contextualizar o tema "Códigos corretores de erros"e "Matrizes", bem como explorar sua relação com a mudança de base, números binários e análise combinatória. Esses conteúdos específicos fazem parte do Currículo de Matemática da Educação Básica no Brasil, conforme estabelecido pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

5.2 GEOGEBRABOOK: códigos corretores de erros

No contexto educacional contemporâneo, a tecnologia desempenha papel crucial na facilitação do processo de aprendizagem, oferecendo aos educadores novas abordagens e recursos. Um exemplo notável desse desenvolvimento é o conceito inovador do Livro Dinâmico Digital, objeto central deste estudo.

O Livro Dinâmico Digital destaca-se ao proporcionar uma experiência de aprendizagem contextualizada, estabelecendo conexões entre o conteúdo abordado e as situações do cotidiano dos alunos. Por meio de exemplos práticos e exercícios relevantes, os estudantes têm a oportunidade de visualizar a aplicação concreta de conceitos, como no caso das matrizes, em diversos contextos, o que pode tornar o processo de aprendizado mais significativo e envolvente.

Uma das características mais inovadoras deste recurso educacional é a possibilidade de contextualizar o tema **Códigos Corretos de Erro**, com conteúdos matemáticos. Essa funcionalidade permite que os alunos identifiquem e corrijam equívocos de forma interativa, promovendo uma abordagem mais autônoma e reflexiva na resolução de problemas relacionados a matrizes. Dessa forma, o Livro Dinâmico Digital não apenas fornece informações, mas também desenvolve habilidades de análise crítica e raciocínio lógico.

Por meio de simulações e exercícios interativos presentes no livro, pretendemos proporcionar um ambiente adequado para a exploração das operações fundamentais com matrizes, como adição, subtração e multiplicação. Os alunos têm a oportunidade de experimentar e visualizar as transformações que ocorrem nos conjuntos de dados, consolidando sua compreensão de forma prática e intuitiva.

Uma das temáticas mais desafiadoras no Currículo Referência de Minas Gerais (CRMG) é a mudança de base, em especial a transição da base decimal para a base binária. O Livro Dinâmico Digital aborda esse tópico de maneira gradual e interativa, fornecendo ferramentas visuais e exercícios que auxiliam os alunos na assimilação desse conceito complexo. Essa abordagem facilita a compreensão da relação entre as diferentes bases numéricas e a aplicação prática dessa conversão em contextos reais.

O Livro Dinâmico Digital, presente na plataforma GeoGebraBook é dedicado à exploração de temas relevantes para a educação básica, tem a pretensão de contribuir no campo da educação matemática. Este recurso está alinhado com as demandas do cenário educacional contemporâneo, em que a tecnologia desempenha papel crucial no processo de aprendizado.

Diferenciando-se de meros transmissores de conhecimento matricial, esta ferramenta vai além ao contextualizar o tema, códigos corretores de erros, explorando operações fundamentais e simplificando a transição da base decimal para a base binária. Ao proporcionar uma aprendizagem contextualizada, o livro permite que os alunos conectem o conteúdo a situações do cotidiano, tornando o aprendizado mais envolvente e significativo. A integração de códigos corretores de erros pode promover a autonomia e o pensamento crítico, habilidades essenciais para resolver problemas relacionados a matrizes.

As simulações e os exercícios interativos pretendem facilitar a compreensão das operações matriciais, enquanto a abordagem gradual da mudança de base torna esse tópico complexo mais acessível. Em última análise, o Livro Dinâmico Digital produzido com a ferramenta GeoGebraBook não apenas capacita os alunos com conhecimento matemático sólido, mas também os prepara para aplicar esses conceitos de maneira inovadora e contextualizada em suas vidas cotidianas. Essa abordagem progressista da educação matemática é crucial para formar indivíduos mais aptos a enfrentar desafios matemáticos com confiança e domínio. É uma ferramenta valiosa que pode contribuir para uma educação mais dinâmica e relevante, alinhada com a realidade e as necessidades dos alunos no mundo moderno.

Destacamos que a leitura deste capítulo deve ser conduzida, simultaneamente, à exploração do livro digital. Essa abordagem permitirá uma visualização mais eficaz das atividades propostas, assim como das diversas possibilidades que estas apresentam. Para ter acesso ao livro, basta clicar em GeoGebraBook: Códigos corretores de erros ou copiar e colar no navegador (*browser*) o link ⟨https://www.geogebra.org/m/w33qbzfp⟩. Da mesma forma, em cada atividade que apresentamos na sequência, deixamos o link clicável e também o endereço URL para que o leitor possa copiar e colar no navegador.

O livro está dividido em seis capítulos, dos quais o primeiro capítulo é a "Apresentação". No segundo capítulo, aborda-se o "Problema Motivador", no terceiro capítulo trata-se das "Noções Iniciais", no quarto capítulo explora-se os "Códigos Detectores de Erros", no quinto capítulo discute-se os "Códigos Corretores de Erros"e, por fim, no sexto capítulo, trata-se dos "Códigos de Hamming". Posteriormente, detalhamos cada um dos capítulos, incluindo as atividades presentes em cada um deles.

5.3 Capítulo I: Apresentação

Como apresentado na (Figura 5.2), iniciamos com a apresentação dos autores e disponibilizamos um e-mail para contato, visando esclarecer dúvidas e receber sugestões. Adicionalmente, introduzimos o livro, delineando seus conteúdos, objetivos e os desafios enfrentados durante a sua elaboração. Em seguida, apresentam-se as orientações aos docentes, destacando o uso do Livro Dinâmico Digital na plataforma *online* do GeoGebra e sua relação com o ensino de matrizes, como uma estratégia valiosa para tornar o aprendizado mais eficaz e envolvente para os alunos. O material abrange, de maneira diversificada, habilidades referenciadas na Base Nacional Comum Curricular e no Currículo Referência de Minas Gerais.

Antes de implementar o Livro Dinâmico Digital em suas aulas, é crucial que os docentes se familiarizem completamente com a ferramenta. É importante explorar todos os recursos disponíveis, como exemplos de matrizes, exercícios interativos e códigos de correção de erros. Esta prática será fundamental para prepará-los para orientar os alunos de maneira eficaz. Ademais, a ferramenta permite a criação de uma sala de aula virtual, facilitando a organização dos estudantes em grupos.

Para tornar o aprendizado mais significativo e relevante, pode-se utilizar o Livro Dinâmico Digital para contextualizar o ensino de matrizes, conectando o conteúdo a situações do mundo real ou aos problemas cotidianos dos alunos. Incentivá-los a explorar os códigos de correção de erros incorporados no livro, proporciona uma oportunidade valiosa para identificar e corrigir seus próprios erros, promovendo a autonomia e o pensamento crítico.

As simulações e os exercícios interativos do livro podem ser aproveitados para explorar as operações fundamentais com matrizes. Sugerimos encorajar os alunos a experimentarem essas operações e visualizar como afetam conjuntos de dados, solidificando assim a compreensão desses conceitos matriciais. A abordagem gradual e interativa da transição da base decimal para a base binária, utilizando ferramentas visuais disponíveis no livro, contribui para uma compreensão mais profunda.

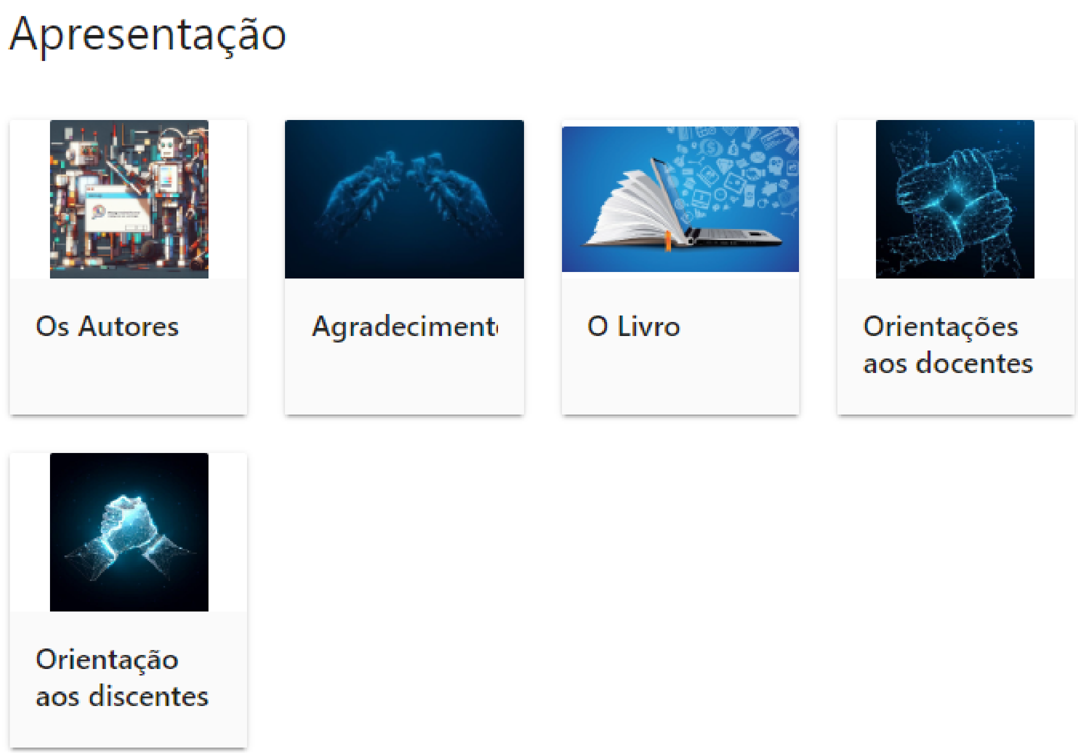
As avaliações incorporadas no Livro Dinâmico Digital podem ser empregadas para verificar o progresso dos alunos e fornecer *feedback* regular para orientá-los em seu aprendizado. Estimular a prática regular com essas ferramentas promove a autonomia e o pensamento crítico.

Ao seguir essas orientações, os professores estarão proporcionando uma experiência de aprendizado mais enriquecedora e alinhada com as demandas do mundo contemporâneo. Deve-se estar atento ao progresso dos alunos ao longo do tempo, ajustando sua abordagem de ensino conforme as necessidades individuais e coletivas de aprendizado. Os alunos devem ser encorajados a aplicar seus conhecimentos matriciais de maneira criativa, resolvendo problemas do mundo real que envolvam matrizes, demonstrando, assim, a relevância do conteúdo para situações práticas.

Além disso, são fornecidas algumas sugestões de utilização e orientações aos alunos. Ao explorar esta ferramenta, os alunos encontrarão um mundo de possibilidades, tornando seu aprendizado mais prazeroso e significativo. Incentiva-los a explorar todas as partes do livro, desde o índice até as atividades interativas, possibilitará que eles se familiarizem com menus e opções disponíveis para facilitar a navegação pelo conteúdo.

Ao explorar todas as funcionalidades do Livro Dinâmico Digital, professores e alunos estarão enriquecendo suas compreensões das matrizes, promovendo uma jornada de aprendizado mais prazerosa e eficaz.

Figura 5.2: Capítulo I: Apresentação.



Fonte: Elaborado pelo autor.

5.4 Capítulo II: Problema motivador

A matemática é muito mais do que apenas números e fórmulas. Ela é uma linguagem que descreve e interpreta o mundo ao nosso redor. No entanto, para muitos estudantes, a matemática pode parecer abstrata e desafiadora, deixando-os desmotivados e desconectados do seu verdadeiro potencial.

É aqui que entra o papel crucial de um Problema motivador, acessível em: ⟨https://www.geogebra.org/m/ajdcj4at⟩. Esse tipo de problema é mais do que uma questão simples a ser resolvida; é um enigma intrigante que captura a atenção e desperta a curiosidade dos estudantes. Um problema motivador desafia a mente, estimula a criatividade e convida os alunos a explorarem conceitos matemáticos de forma prática e envolvente.

Ao apresentar um problema que tenha relevância e aplicação no mundo real, os estudantes conseguem entender como a matemática está intrinsecamente ligada às situações cotidianas. Isso ajuda a quebrar a barreira entre a teoria e a prática, permitindo que os alunos visualizem a utilidade e a aplicabilidade direta da matemática em suas vidas.

Além disso, um problema motivador instiga o pensamento crítico e a resolução de problemas. Os estudantes são encorajados a buscarem diferentes abordagens, a testarem hipóteses e a trabalharem em equipe para encontrar soluções. Isso não apenas fortalece suas habilidades matemáticas, mas também promove o desenvolvimento de habilidades essenciais para a vida, como resiliência e colaboração.

Ao enfrentar um problema motivador, os alunos se tornam protagonistas do seu próprio aprendizado. Eles se envolveram na descoberta e na construção do conhecimento, tornando a experiência muito mais significativa e gratificante. Isso cria uma sensação de empoderamento e confiança, incentivando-os a explorarem ainda mais o vasto mundo da matemática.

Com base no que foi exposto, é apresentado ao aluno o seguinte Problema motivador, acessível em: ⟨https://www.geogebra.org/m/ajdcj4at⟩. Ele deverá navegar no *Applet* da (Figura 5.3), clicando em “Iniciar”e analisando se o robô tartaruga realiza os movimentos corretos conforme as orientações abaixo do menu iniciar. Para auxiliá-lo, o aluno pode se orientar pela rosa dos ventos ao lado. Posteriormente, o aluno deverá responder às seguintes perguntas:

1. Quantos movimentos o robô tartaruga realizou?

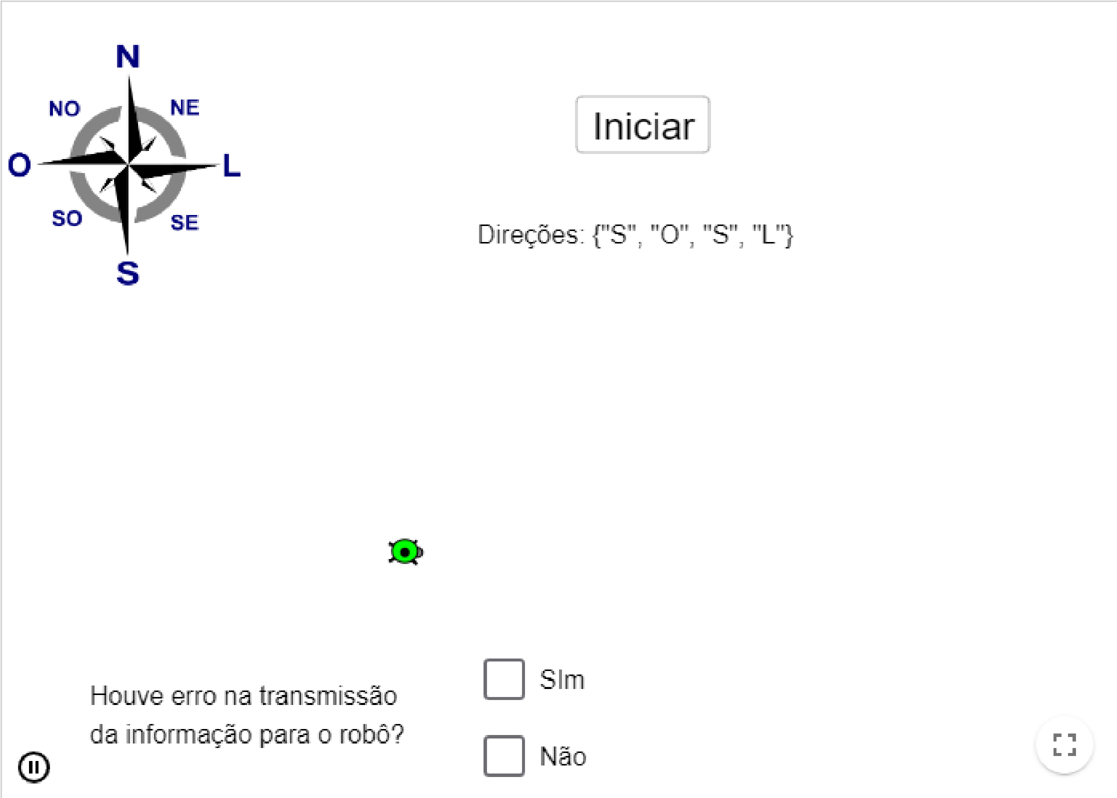
2. De quantas maneiras distintas o robô tartaruga pode realizar a sequência de movimentos?

3. Das opções abaixo, qual representa os possíveis pontos de chegada do robô?

Ao realizar novas tentativas, é possível observar que, frequentemente, o robô tartaruga não está se movendo conforme os comandos transmitidos. Em outras palavras, estão ocorrendo falhas no processo de transmissão dos comandos de movimento. Posteriormente, os alunos são questionados da seguinte forma: você sabe ou consegue imaginar uma maneira matemática de detectar e corrigir esses erros na transmissão dessas informações? Se sim, descreva com suas palavras.

A ideia é possibilitar a verificação do grau de consolidação das habilidades pertinentes ao tema de ângulos e mudança de direção por parte do aluno. Além disso, pretende-se instigar o aluno a formular hipóteses sobre as possíveis causas dos movimentos incorretos do robô tartaruga, estimulando, assim, sua criatividade e seu raciocínio lógico-dedutivo. Essas capacidades são fundamentais para o desenvolvimento do conhecimento matemático ao longo de sua vida acadêmica, não apenas na área de matemática, mas também em diversas outras áreas do conhecimento, como engenharia, física, química, ciências e muito mais.

Figura 5.3: Capítulo II: Problema motivador.



Fonte: Elaborado pelo autor.

No âmbito dos registros de representação semiótica, conforme discutido (vide Seção 2.4), a análise do problema motivador destacado no *Applet* (Figura 5.3) revela uma dinâmica identificada como uma conversão entre registros. Nesse contexto, a instrução verbal para guiar a movimentação do robô é expressa de maneira geométrica ao usuário, proporcionando-lhe a capacidade de inferir se houve alguma discrepância na execução da movimentação do robô. Essa abordagem, ao integrar diferentes modalidades de representação, amplia a compreensão e a detecção de eventuais erros durante a interação com o sistema.

5.5 Capítulo III: Noções inicias

Neste capítulo, abordamos as noções iniciais fundamentais que servirão como alicerces para a compreensão dos temas subsequentes. Exploramos cinco conceitos essenciais: o estudo de paridade, a mudança de base, a arte fascinante da mágica com mudança de base, bem como as matrizes e suas operações, conforme apresentado na (Figura 5.4). Embora esses tópicos sejam brevemente introduzidos nesta seção, é importante destacar que serão adequadamente aprofundados ao longo do capítulo.

A compreensão desses conceitos é crucial para aprofundar nosso conhecimento matemático. Ao aprender essas noções iniciais, estaremos cumprindo parte dos requisitos da (BNCC) e nos preparando para explorar aplicações mais complexas e superar desafios.

Posteriormente, apresentamos cada uma das seções, juntamente com as atividades propostas em cada uma delas.

Figura 5.4: Capítulo III: Noções iniciais.

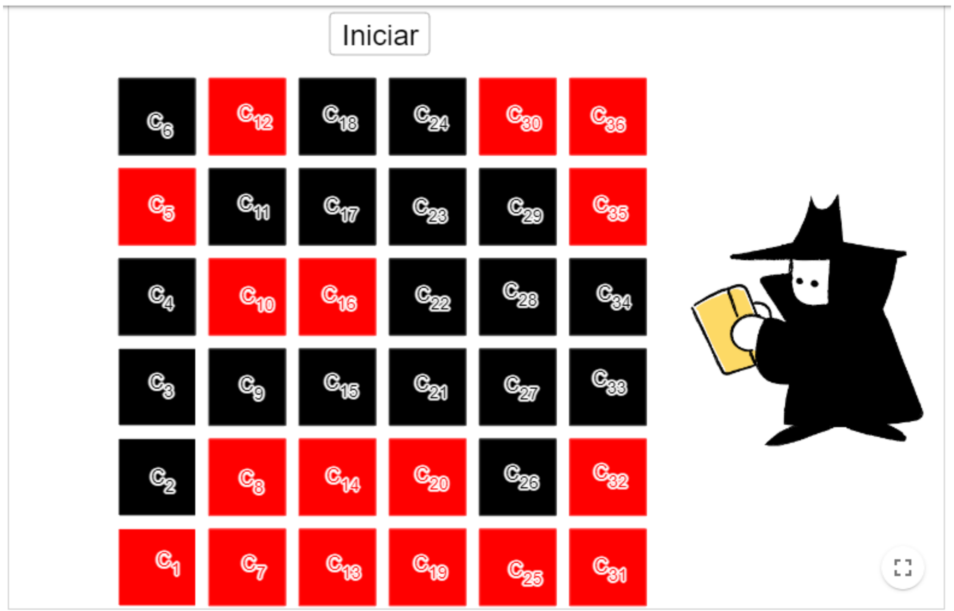
Fonte: Elaborado pelo autor.

5.5.1 Estudo de paridade

Nesta subseção, apresentamos ao aluno o seguinte problema: no *Applet* da (Figura 5.5) Mágica de virar cartas, acessível em: ⟨https://www.geogebra.org/m/zusmbgns⟩, os cartões têm duas cores, vermelha e preta, em cada um dos seus lados. No entanto, ao organizar os cartões, foi cometido um erro, não respeitando as condições de construção das linhas e colunas. O desafio é analisar o *Applet* e formular uma hipótese para identificar o cartão incorreto. Após fazer isso, basta clicar no cartão que considera incorreto e o *Applet* fornecerá um retorno para verificar se sua hipótese é válida. Encorajamos você a explorar o *Applet* e a formular novas hipóteses. Para criar novas configurações de cartas, o aluno deverá clicar em iniciar. Depois dessa etapa, o aluno é instigado a formular hipóteses sobre como funciona a mágica e a responder a cinco questões. Finalmente, apresentamos a solução do "Truque de Mágica".

O segredo para descobrir o quadrado que está com a cor errada no *Applet* da (Figura 5.5), consiste em analisar qual a linha e a coluna cuja quantidade de quadrados vermelhos e quadrados pretos não é de quantidades pares. O quadrado com a cor errada é a interseção dessa linha e dessa coluna, levando em consideração as propriedades dos números pares e ímpares.

Figura 5.5: Mágica de virar cartas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

No *Applet* da (Figura 5.5), é concedida ao discente a oportunidade de transitar entre a representação geométrica, realizando inferências numéricas para discutir paridades, por meio dos conceitos da representação semiótica. Este recurso oferece uma abordagem interativa que permite ao estudante explorar e compreender os princípios geométricos enquanto utiliza inferências numéricas para analisar e discutir aspectos relacionados às paridades. A representação semiótica nesse contexto desempenha papel crucial, proporcionando uma ponte conceitual entre a linguagem simbólica e os fenômenos geométricos, enriquecendo, assim, a experiência de aprendizado do discente.

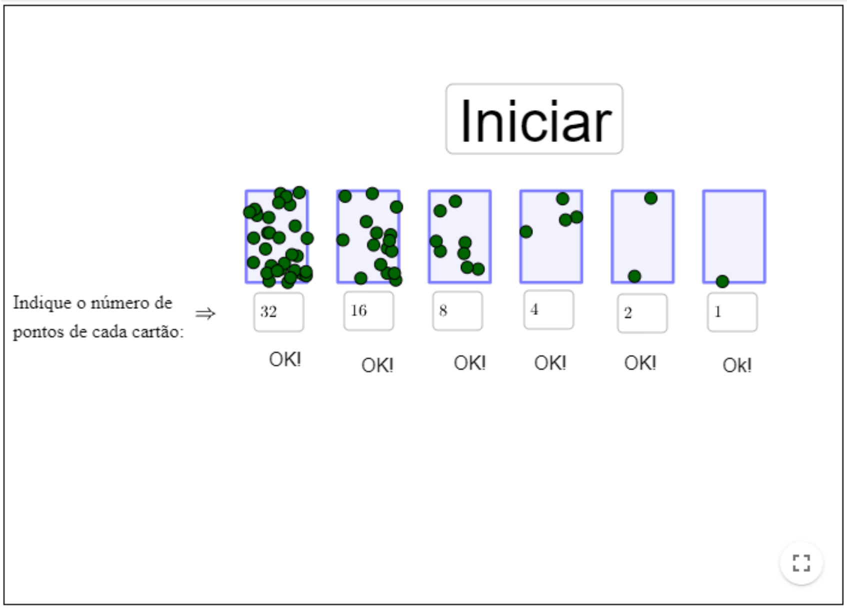
5.5.2 Mudança de base

Nesta subseção, trabalhamos com o aluno a mudança de base. Ao final, espera-se que o aluno seja capaz de realizar a conversão de um número escrito na base dez para a base dois. No *Applet* da (Figura 5.6), vamos revisitar um conceito que desempenhará papel fundamental nesse processo: as potências de base dois, tema pertinente a (BNCC) e ao (CRMG). Para acessar os *Applets* desta subseção basta acessar: Potências de base dois, acessível em: ⟨https://www.geogebra.org/m/ubrmqhh6⟩.

Neste *Applet*, será sorteado um determinado número de cartões, e cada cartão exibirá uma quantidade distinta de pontos. O aluno deverá indicar o número de pontos presentes em cada cartão. Após explorar e utilizar as várias configurações possíveis, espera-se que o aluno consiga formular uma hipótese para o número de pontos em cada cartão. Isso será verificado quando o aluno responder à seguinte questão: “o que você observou em relação ao número de pontos em cada um dos cartões?”

Caso o professor julgue necessário, ele poderá fazer as intervenções que considerar pertinentes. Esta subseção sobre mudança de base, mesmo que o livro tenha sido elaborado para o ensino médio, é uma atividade que pode ser trabalhada com alunos do 6º ano do ensino fundamental, especialmente quando se está abordando as potências de números naturais.

Figura 5.6: Potências de base dois.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma vez que já revisitamos as potências de base dois, vamos passar para a mudança de base. Inicialmente, vamos utilizar o *Applet* da (Figura 5.7) para realizar a conversão da base dois para a base dez. Ao clicar em "Iniciar", é sorteado um determinado número de cartões, e o aluno deverá seguir as instruções contidas no *Applet* para responder às perguntas. Espera-se que o aluno consiga responder às perguntas e que isso aguce sua curiosidade sobre os números binários.

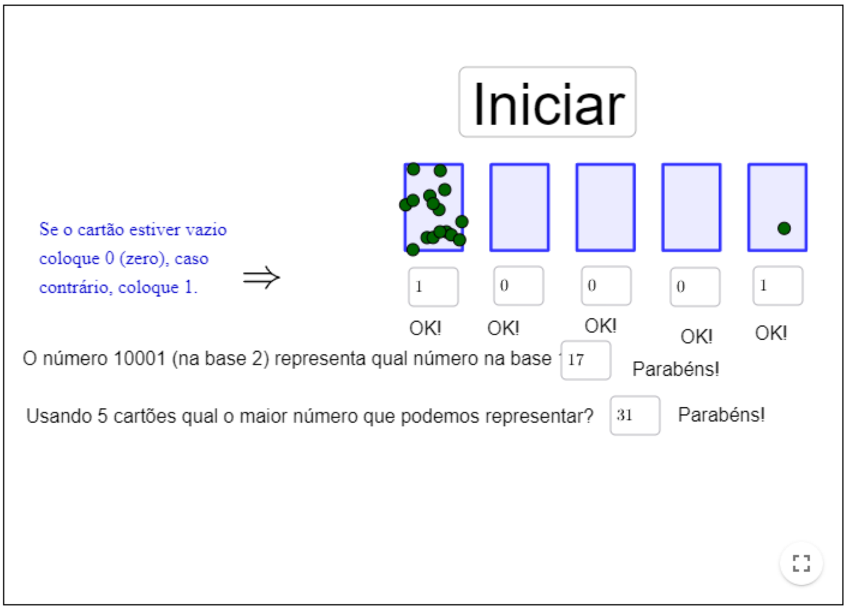
A ideia é que o aluno seja levado a questionar como se dá o processo de transmissão das informações e se é possível identificar e corrigir erros durante esse processo. Eles são instigados a pensar sobre como um computador entende comandos, recebendo-os apenas no formato de 0 e 1. Por exemplo, quando você pressiona a tecla "M", o computador recebe o número "01001101"para entender a sua ordem. Este enfoque na linguagem binária na informática é uma introdução à conexão entre a curiosidade inicial sobre a transmissão de informações e o conceito de **Linguagem Binária**.

A partir de agora, vamos aprofundar nosso entendimento da linguagem binária, estabelecendo uma conexão entre a curiosidade inicial sobre o processo de transmissão de informações e a introdução ao conceito de linguagem binária na informática. No *Applet* da (Figura 5.7), é proporcionado ao aluno, de maneira prática e intuitiva, a oportunidade de realizar a conversão da linguagem gráfica para a linguagem alfanumérica, assim como a mudança de números escritos na base binária para a base decimal e vice-versa.

Além disso, o *Applet* oferece uma abordagem interativa, permitindo que o aluno experimente diretamente os conceitos teóricos apresentados. Ao praticar a conversão entre sistemas numéricos e compreender a linguagem binária de forma direta, os alunos podem consolidar seu conhecimento de maneira mais eficaz.

Este recurso não apenas fortalece a compreensão teórica, mas também destaca a aplicabilidade prática da linguagem binária na informática. Por meio dessa experiência interativa, os alunos podem desenvolver uma apreciação mais profunda da importância da linguagem binária no processamento de informações e na computação em geral.

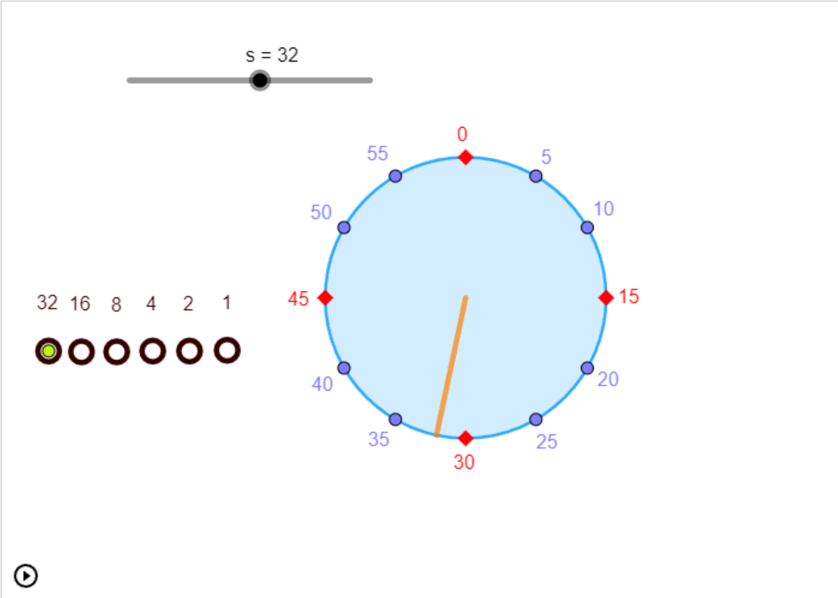
Figura 5.7: Mudança da base binária para base decimal



Fonte: Elaborado pelo autor.

Continuando, exploramos agora a mudança da base decimal para a base binária, utilizando o *Applet* da (Figura 5.8). O aluno deve fazer as mudanças de base dos números de 1 a 59 escritos na base decimal para a base binária. Observando a sequência de lâmpadas acesas e apagadas, espera-se que o aluno compreenda a representação binária.

Figura 5.8: Relógio de mudança de base: base decimal para base binária.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para finalizar a subseção, no *Applet* da (Figura 5.9), utilizando os conceitos empregados no *Applet* da (Figura 5.8), os alunos realizam a conversão da base binária para a base decimal. Espera-se que, ao final desta subseção, os alunos tenham assimilado os conceitos de mudança de base, tanto na conversão da base decimal para a base binária quanto o contrário. Além disso, espera-se que compreendam o processo de transmissão de informações e a linguagem binária.

Figura 5.9: Lâmpadas para mudança de base: base binária para base decimal.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nos *Applets* acima é explorada a conversão da linguagem gráfica para a linguagem matemática, destacando a transformação da representação semiótica. Essa abordagem revela-se fundamental para o aprendizado dos alunos, pois proporciona ganhos significativos em sua compreensão conceitual e habilidades práticas.

Ao utilizar esses *Applets*, os alunos não apenas visualizam conceitos abstratos de forma concreta, mas também desenvolvem uma apreciação mais profunda das relações entre as expressões visuais e suas representações matemáticas correspondentes. Essa integração prática promove um ambiente de aprendizado mais dinâmico e envolvente, estimulando o raciocínio lógico e a resolução de problemas.

Além disso, a exploração da conversão da linguagem gráfica para a linguagem matemática proporciona aos alunos uma perspectiva mais holística, permitindo-lhes perceberem a matemática como uma linguagem viva e aplicável. Essa abordagem prática não apenas fortalece o entendimento dos conceitos, mas também instiga o pensamento crítico, incentivando os alunos a questionarem, analisarem e aplicarem o conhecimento de maneiras inovadoras.

Assim, o uso desses *Applets* não apenas pode facilitar a transição entre as linguagens visual e matemática, mas também enriquecer a experiência de aprendizado, proporcionando aos alunos ganhos valiosos no desenvolvimento de suas habilidades cognitivas e na compreensão aprofundada dos conceitos matemáticos.

5.5.3 Mágica com mudança de base

É incrível como a "magia" pode ser uma ferramenta poderosa para explorar conceitos matemáticos, como a mudança de base. Ao envolver os alunos em atividades interativas e desafiadoras, estamos proporcionando uma oportunidade única para que eles experimentem a matemática de uma forma completamente nova e envolvente.

No *Applet* da (Figura 5.10) Mágica com mudança de base, acessível em: ⟨https://www.geogebra.org/m/snp2qden⟩, os alunos têm a oportunidade de escolher um número natural de 1 a 15 e marcar os cartões que contenham o número escolhido. A partir daí, eles serão surpreendidos com uma mágica incrível, em que o sistema adivinhará o número escolhido.

Esse momento deixará certamente os alunos intrigados e curiosos sobre como o truque funciona. Por hora, não será apresentada uma explicação do funcionamento do truque de mágica, deixando a cargo dos alunos conjecturarem possíveis soluções.

No *Applet* da (Figura 5.11), a dinâmica se inverte, e agora os alunos se tornam os mágicos. O sistema escolherá um número e é tarefa dos alunos descobrirem qual é esse número. Esse desafio promove a aplicação prática dos conceitos de mudança de base, incentivando-os a colocarem em prática o que aprenderam.

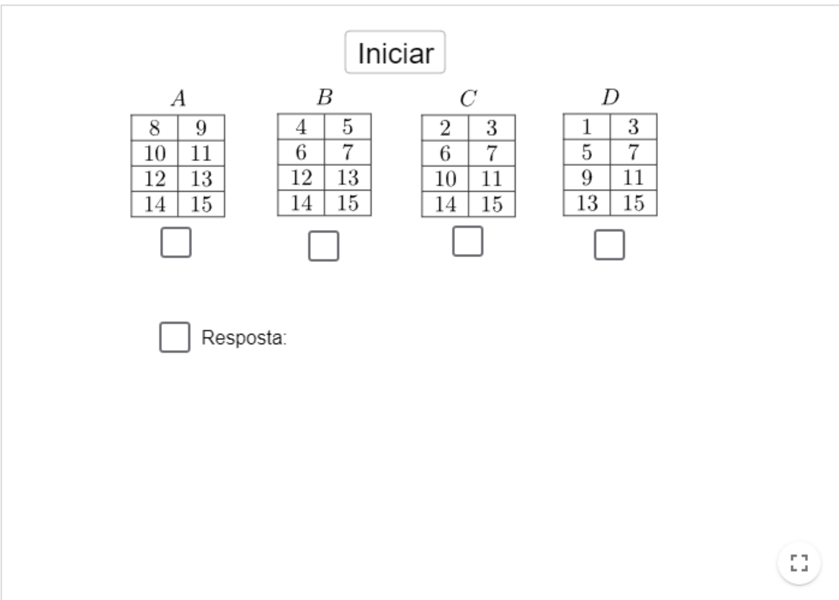
Após explorarem as diferentes configurações dos dois *Applets*, os alunos serão convidados a refletirem sobre como a "mágica" acontece. Esse é o momento em que a curiosidade e a criatividade dos alunos entram em ação, pois serão incentivados a formularem hipóteses e validar suas teorias. A discussão em grupo, se o professor julgar necessário, pode ser uma oportunidade valiosa para fortalecer o trabalho em equipe e a habilidade de lidar com opiniões diferentes.

Por fim, o *link:* ⟨https://www.youtube.com/watch?v=I9yxHpcVRKU⟩ apresenta a solução da "mágica" e proporciona aos alunos uma oportunidade de consolidar o aprendizado e compreender os conceitos matemáticos por trás do truque. Essa experiência, que une o lúdico à aprendizagem, certamente deixará uma marca duradoura no entendimento e na apreciação da matemática por parte dos alunos.

Essa atividade prática é fundamental para consolidar o aprendizado dos alunos, permitindo que eles experimentem diretamente os conceitos abordados. Ao aplicar o que aprenderam no *Applet* da (Figura 5.11), eles terão a oportunidade de testar e verificar por si se a solução apresentada no vídeo é de fato, válida.

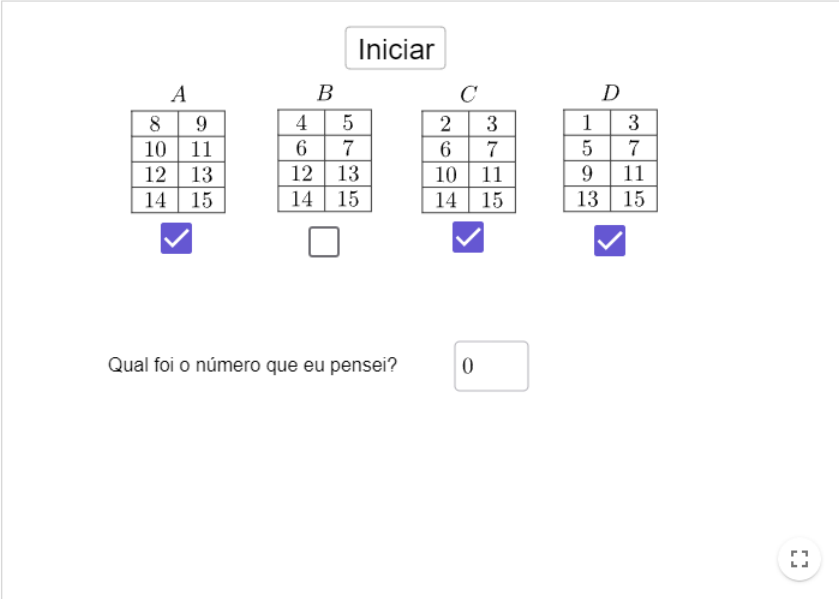
A prática ativa, envolvendo os alunos diretamente na aplicação dos conceitos aprendidos, é uma maneira eficaz de internalizar o conhecimento. Ao experimentarem por si, eles compreendem melhor os detalhes e nuances da solução. Ao final da atividade, não apenas terão assistido ao vídeo, mas também terão aplicado o que aprenderam, fortalecendo sua compreensão e confiança nos conceitos de mudança de base. Essa abordagem prática pode contribuir para um aprendizado mais duradouro e significativo.

Figura 5.10: Mágica com mudança de base



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 5.11: Mágica com mudança de base: agora o mágico é você



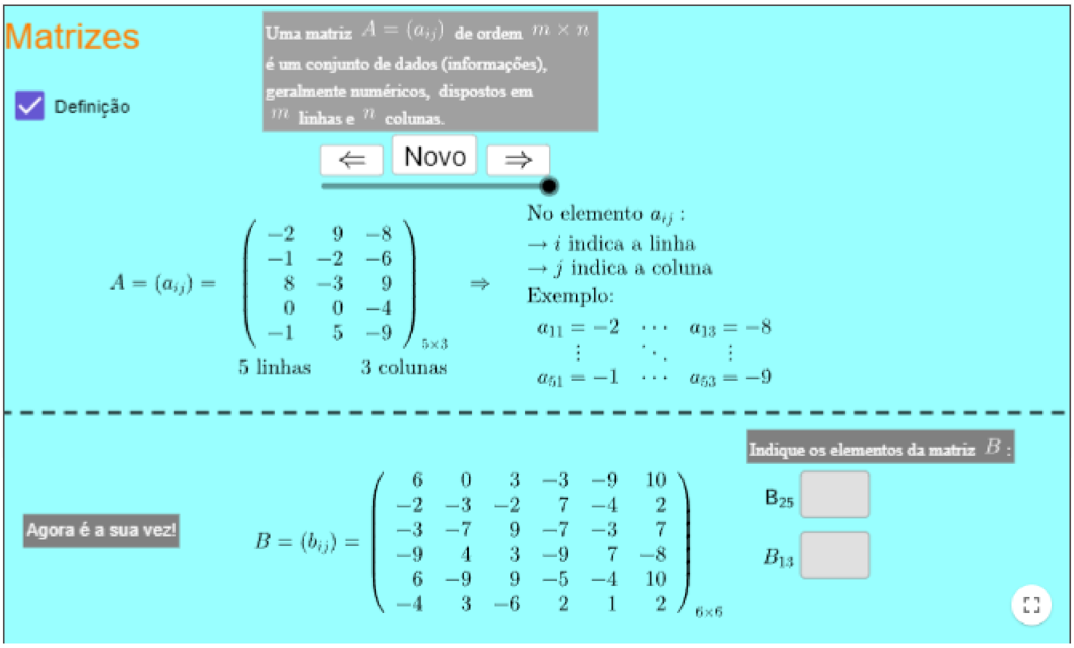
Fonte: Elaborado pelo autor.

Na próxima seção, exploraremos a abordagem detalhada do livro Dinâmico Digital sobre o tema das matrizes. Ao aprofundarmos nesse tópico, esperamos desvendar as complexidades das operações com matrizes.

5.5.4 Matrizes

Nesta seção, é abordado o tema "matriz", em que o aluno é levado ao conceito de matriz, bem como perceber em que situações cotidianas os conhecimentos de matrizes são utilizados. No *Applet* da (Figura 5.12), o aluno pode navegar definindo o que é uma matriz, bem como classificar uma matriz de acordo com seu formato, além de definir o elemento de acordo com sua posição em relação às linhas e colunas, para acessar o *Applet* da (Figura 5.12), acesse Matrizes: definição em: ⟨https://www.geogebra.org/m/shnwxpht⟩.

Figura 5.12: Matrizes: definição

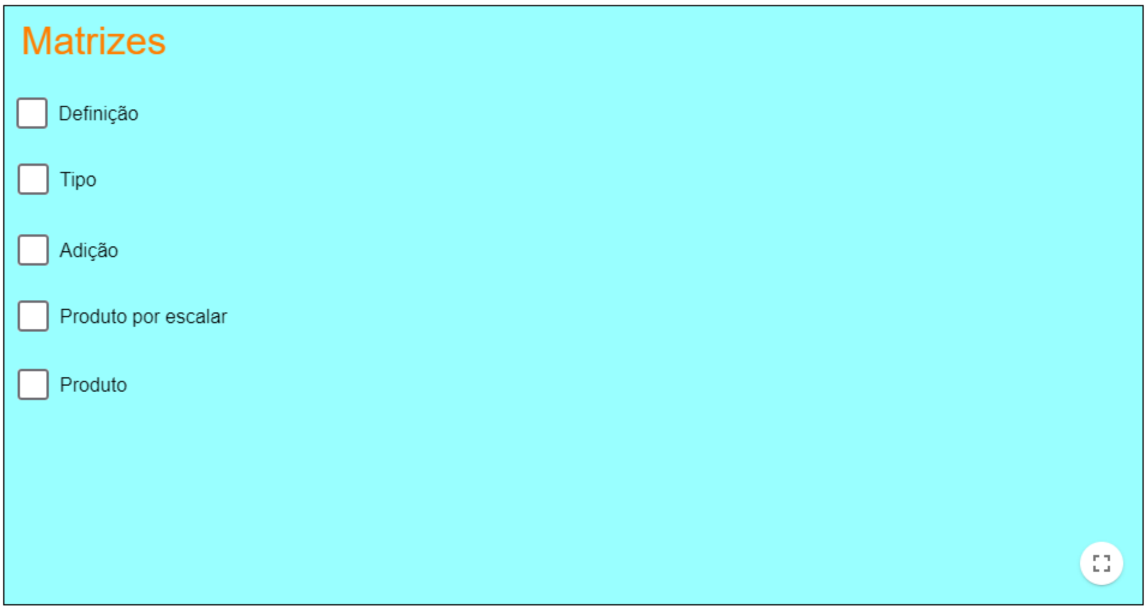


Fonte: Elaborado pelo autor.

No *Applet* da (Figura 5.13), vamos aprofundar ainda mais o tema, proporcionando aos alunos a oportunidade de explorar de maneira abrangente a definição de matrizes e resolver atividades disponíveis nos *Applets*. Eles irão aprender sobre a condição de soma de duas matrizes e como realizar essa operação, assim como o produto de uma matriz por um escalar e o produto de matrizes. Neste *Applet*, é interessante que os alunos explorem todas as configurações possíveis para consolidar os conceitos relevantes ao tema.

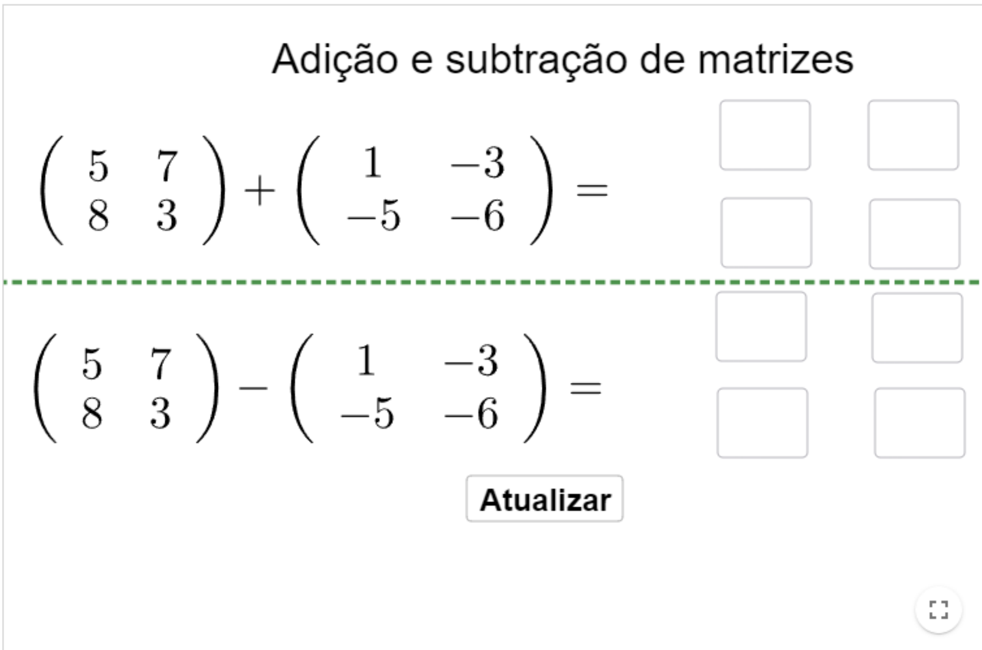
Um aspecto notável deste *Applet* é que ele abrange o estudo de matrizes de maneira integral, explorando todos os tópicos pertinentes ao ensino médio. Isso proporciona uma compreensão mais profunda e abrangente da álgebra matricial, permitindo que os alunos se familiarizem não apenas com as operações básicas, mas também com as propriedades e aplicações mais avançadas das matrizes. Por meio dessa abordagem abrangente, os alunos terão uma visão mais completa e aplicada do papel das matrizes na resolução de problemas matemáticos.

Figura 5.13: Matrizes: definição, adição e produto por escalar



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 5.14: Adição e subtração de matrizes



Fonte: Elaborado pelo autor.

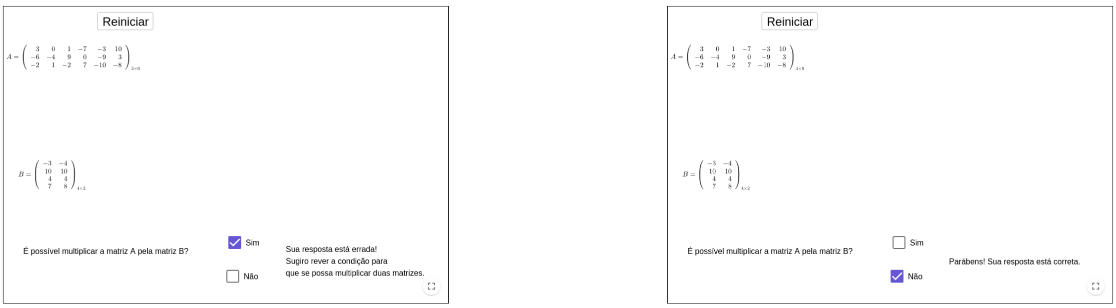
Para concluir esta subseção, os alunos devem navegar no *Applet* da (Figura 5.14), no qual realizarão a adição de matrizes quadradas, consolidando assim seu conhecimento sobre o tema. Em caso de dificuldades, é recomendado que retornem às atividades previamente trabalhadas e aos vídeos propostos para reforçar os conceitos e esclarecer dúvidas. Essa prática adicional contribuirá para a consolidação e aprofundamento do entendimento sobre a adição de matrizes quadradas.

5.5.5 Multiplicação de matrizes

A multiplicação de matrizes é uma operação fundamental na álgebra linear, utilizada em diversas áreas da matemática, física, estatística, e em diversas disciplinas relacionadas. Ela também tem aplicações práticas em computação, gráficos por computador e em muitos campos da ciência e da engenharia.

Nesta subseção, o aluno iniciará seu aprendizado sobre a multiplicação de matrizes. Eles serão direcionados a assistir ao vídeo disponível no *link*:⟨https://youtu.be/eCmv6v53V88?si=p-b-yx7dKBSHhZ5o⟩. Em seguida, utilizando o *Applet* presente na (Figura 5.15), os alunos terão a oportunidade de aplicar o conhecimento adquirido, explorando diversas configurações. Posteriormente, serão abordadas algumas questões que servirão como base para os próximos passos do aprendizado.

Figura 5.15: Condição de multiplicação de matrizes



Fonte: Elaborada pelo autor.

No âmbito educacional contemporâneo, a integração de recursos tecnológicos se torna cada vez mais crucial para potencializar o aprendizado dos alunos. Nesse contexto, os *Applets* incorporados nas páginas do livro digital dinâmico assumem um papel de destaque ao proporcionar uma experiência interativa e enriquecedora.

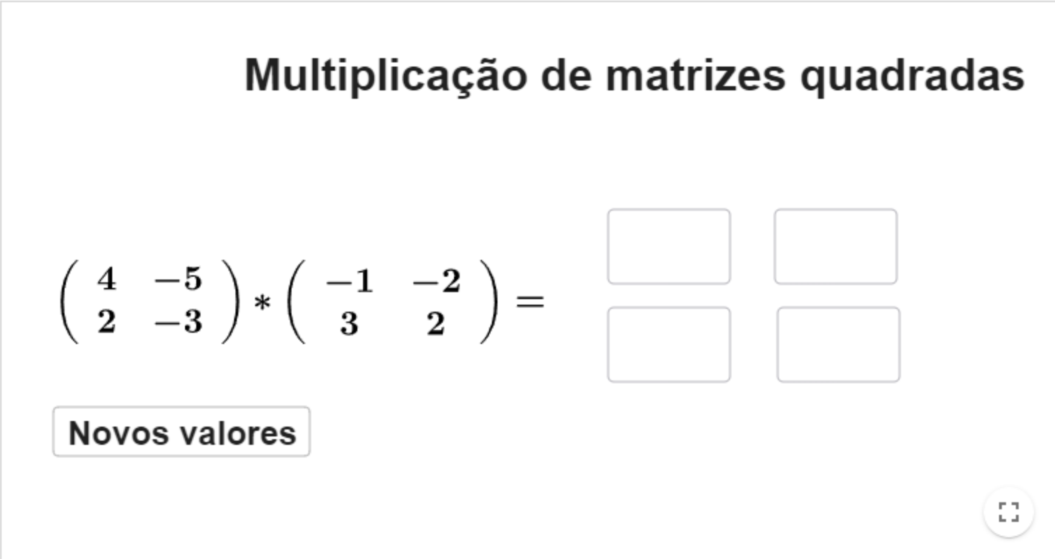
Um dos aspectos mais notáveis dessa abordagem inovadora é a capacidade concedida aos alunos de avaliarem imediatamente a correção de suas respostas. Este é um verdadeiro salto qualitativo, um avanço que empodera os estudantes ao oferecer-lhes um retorno instantâneo sobre seu desempenho. No universo educacional, a prontidão na avaliação é uma ferramenta valiosa para aprimorar o entendimento dos conceitos apresentados.

Ao fornecer esse mecanismo de verificação de respostas, os *Applets* não apenas tornam o processo de aprendizado mais dinâmico, mas também instigam a curiosidade e a participação ativa dos alunos. A capacidade de discernir entre respostas corretas e incorretas de maneira imediata não apenas reforça a compreensão dos conteúdos, mas também estimula uma abordagem proativa na resolução de desafios educacionais.

Essa funcionalidade representa um verdadeiro ganho no panorama educacional, especialmente no contexto do livro digital dinâmico. Por meio dessa interatividade, o aprendizado deixa de ser um processo passivo e se transforma em uma jornada envolvente e personalizada. Os alunos, ao terem a oportunidade de verificar a precisão de suas respostas de forma instantânea, são incentivados a explorarem conceitos com confiança e autenticidade.

Nesta etapa, o aluno já adquiriu os conceitos prévios para multiplicar duas matrizes, bem como a capacidade de verificar se é possível ou não realizar essa operação. No *Applet* da (Figura 5.16), vamos explorar melhor esse tema. Inicialmente, estamos preocupados com o produto de matrizes quadradas de ordem dois. Os alunos deverão navegar no *Applet* e explorar as possibilidades que eles apresentam.

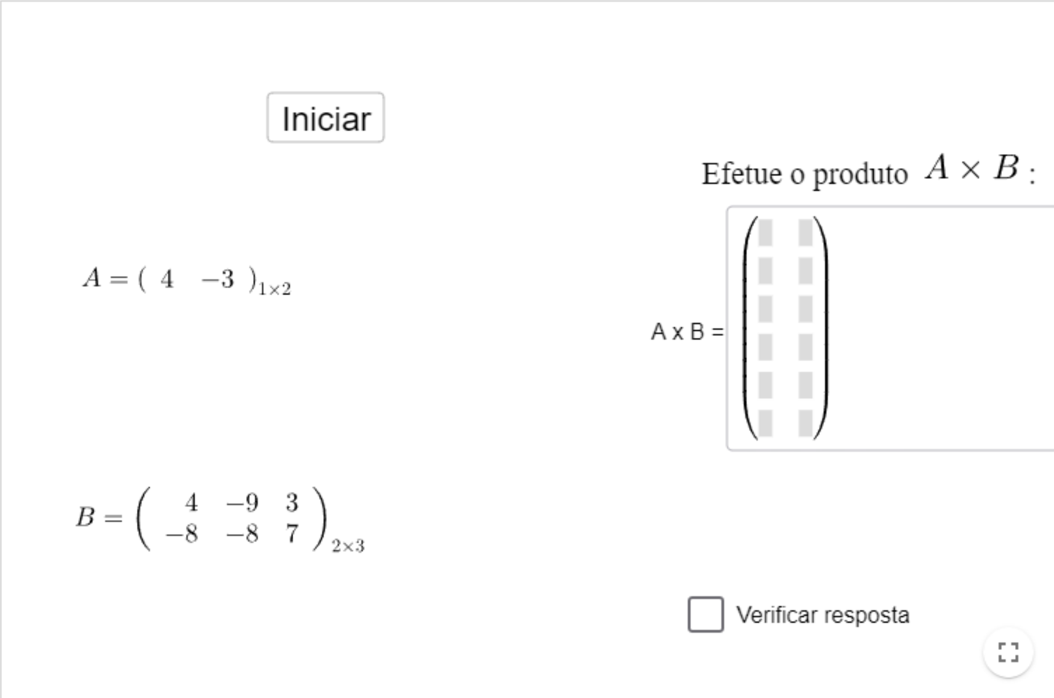
Figura 5.16: Multiplicação de matrizes quadradas



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por fim, no *Applet* apresentado na (Figura 5.17), é demonstrado o produto de matrizes de forma mais abrangente, não se restringindo apenas às matrizes quadradas. Ao concluirmos esta seção, esperamos que os alunos tenham compreendido esses conceitos iniciais, pois serão fundamentais para o desenvolvimento do restante do livro, e abordamos potências de base dois, mudança de bases, sistemas decimais e binários, além de conceitos sobre matrizes e multiplicação de matrizes.

Figura 5.17: Multiplicação de matrizes casos gerais



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com isso, encerramos esta seção na esperança de que os alunos agora tenham uma compreensão sólida desses conceitos essenciais. No próximo capítulo, aprofundamos ainda mais nosso estudo, explorando aplicações práticas e avançadas desses fundamentos matemáticos.

5.6 Capítulo IV: Códigos detectores de erros

Os códigos detectores de erros são uma parte fundamental no campo da comunicação digital e da transmissão de dados. Eles desempenham papel crucial na detecção e, em alguns casos, na correção de erros que podem ocorrer durante a transmissão ou o armazenamento de informações digitais.

Quando transmitimos dados digitalmente, seja por meio de redes de computadores, comunicações sem fio ou armazenamento em dispositivos de memória, existe sempre a possibilidade de que algum tipo de interferência, ruído ou falha ocorra. Esses distúrbios resultam na corrupção de dados, o que pode levar a erros na interpretação das informações recebidas.

Os códigos detectores de erros são específicos para lidar com essa eventualidade. Eles consistem em algoritmos matemáticos que introduzem redundância controlada nos dados transmitidos. Essa redundância é calculada para permitir a detecção de erros quando os dados são recebidos.

Existem diversos tipos de códigos detectores de erros, cada um com suas características e eficácia específicas. Alguns são mais simples, detectando apenas a presença de erros, enquanto outros têm a capacidade de corrigi-los, proporcionando maior robustez na transmissão de dados. Nesta seção, abordamos os códigos detectores de erros, conforme ilustrado na (Figura 5.18). Ao longo desta seção, apresentamos a proposta desenvolvida neste trabalho para abordar o tema com alunos da educação básica.

Iniciamos discutindo os bits e palavras-códigos. Em seguida, os alunos serão guiados a compreender o processo matemático por trás da criação de um CPF válido. Posteriormente, introduzimos uma noção inicial de corpos e anéis, adaptando o conteúdo para atender às necessidades da educação básica. Nesse contexto, exploramos conceitos como restos e um pouco de aritmética modular.

Figura 5.18: Códigos detectores de erros

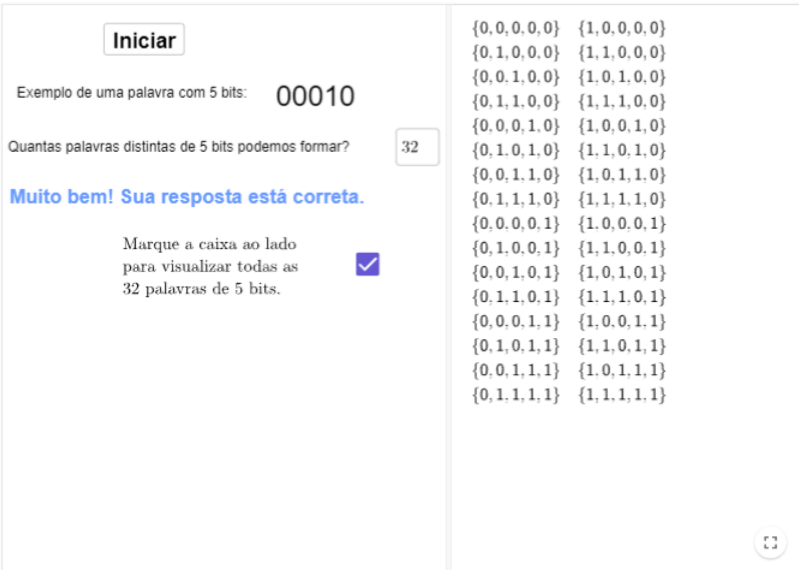
Fonte: Elaborado pelo autor.

Para concluir esta seção, apresentamos uma atividade lúdica, proporcionando aos alunos a oportunidade de descobrir o CPF de seus colegas com base em algumas informações fornecidas. A seguir, detalhamos cada etapa, destacando as atividades específicas em cada uma delas.

5.6.1 Bits e palavras-códigos

Como mencionado na subseção anterior, o **bit** é composto pelos dígitos 0 (zero) e 1 (um). Portanto, neste momento, é importante definir uma **palavra-código** como uma sequência de zeros e uns. No *Applet* da (Figura 5.19) Bits e palavras-códigos, acessível em: ⟨https://www.geogebra.org/m/aym2qhqc⟩, os alunos deverão navegar, analisar e explorar suas diversas configurações. Eles serão questionados sobre a quantidade de palavras-códigos distintas que podem ser formados, uma vez definido o número de bits dessa palavra. É relevante destacar que as noções iniciais exploradas na subseção "Mudança de base" desempenham papel fundamental na resolução dessa questão, bem como o conhecimento do princípio fundamental da contagem, que é um tema relevante conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

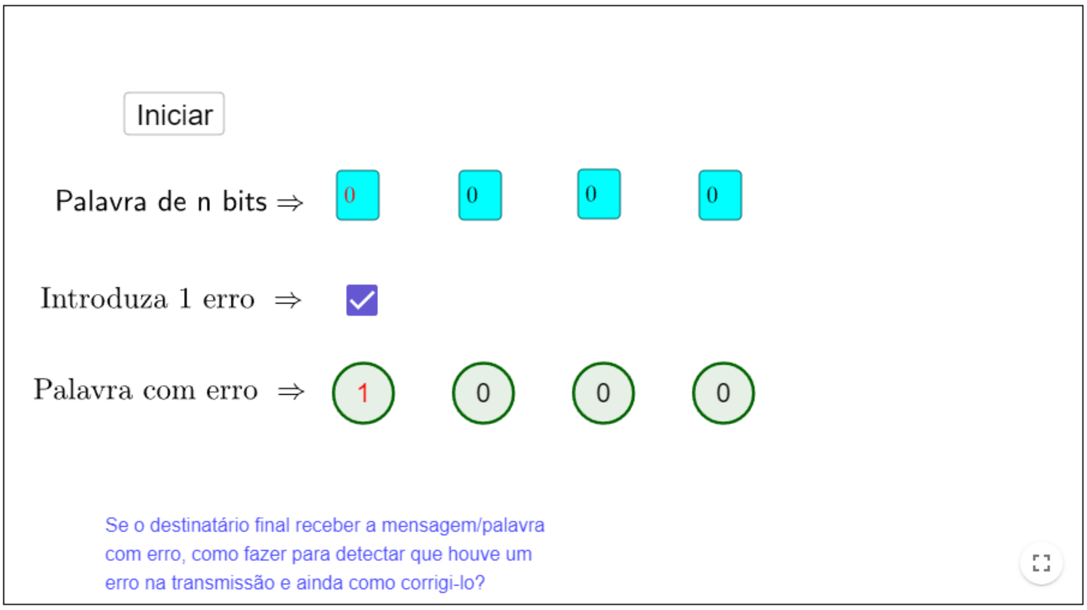
Figura 5.19: Bits e palavras-códigos



Fonte: Elaborado pelo autor.

No *Applet* da (Figura 5.20), os alunos podem introduzir um erro no processo de transmissão das palavras-códigos. O *Applet* e as questões que o seguem procuram estimular os alunos a formularem possíveis hipóteses sobre como verificar se ocorreu um erro, bem como maneiras de corrigi-lo.

Figura 5.20: Inserção de um erro durante o processo de transmissão



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesse momento, recomendamos que o professor retome o problema motivador trabalhado no segundo capítulo do livro. Esperamos que o aluno seja capaz de estabelecer uma relação entre o erro e as possíveis causas dos movimentos incorretos realizados no Problema motivador, acessível em: ⟨https://www.geogebra.org/m/ajdcj4at⟩.

5.6.2 Gerador de CPF válido

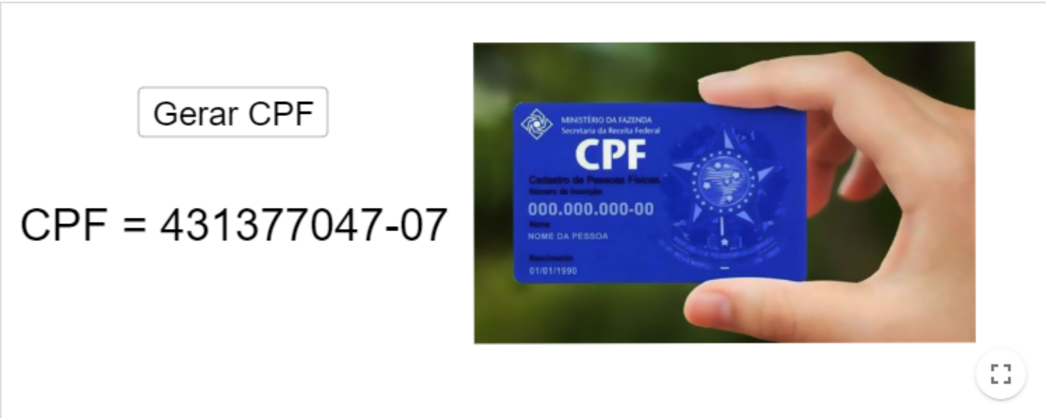
O Cadastro de Pessoa Física (CPF) é um número único associado a cada cidadão do Brasil, essencial para diversas transações e registros no país, composto por uma sequência de dígitos (0, 1, 2, 3, ..., 8 ou 9). O formato padrão é xxx.xxx.xxx-yy, sendo os dois últimos dígitos denominados dígitos verificadores, os quais desempenham papel crucial na verificação da validade de um CPF.

O *Applet* da (Figura 5.21) Gerador de CPF válido, acessível em: ⟨https://www.geogebra.org/m/xjw4rvqx⟩, proporciona aos alunos a oportunidade de gerar CPFs válidos, incentivando o interesse pela aritmética subjacente à criação desse número de identificação. Tal atividade vai além da simples manipulação de números, envolvendo os alunos em uma experiência prática que explora conceitos matemáticos fundamentais.

Ao envolver os estudantes nessa prática, é possível destacar a relevância do aprendizado da aritmética no contexto do mundo real. A compreensão dos processos matemáticos envolvidos na geração de CPFs válidos não apenas estimula a curiosidade, mas também promove uma compreensão mais profunda da importância dos dígitos verificadores na validação de informações.

Além disso, esta atividade prática contribui para o desenvolvimento das habilidades matemáticas, estimulando o raciocínio lógico e a capacidade de aplicar conceitos aprendidos em situações do cotidiano. A abordagem interativa fornecida pelo *Applet* cria um ambiente de aprendizado mais dinâmico e envolvente, possibilitando que os alunos visualizem a aplicação direta da aritmética em um contexto prático e relevante.

Figura 5.21: Gerador de CPF válido



Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, a inclusão desse tipo de atividade em sala de aula não apenas confere um significado mais profundo ao ensino da aritmética, mas também estabelece uma conexão vital entre os conceitos matemáticos e sua aplicação no mundo real. Esta abordagem visa preparar os alunos para uma compreensão mais ampla e prática dos conhecimentos adquiridos.

Ao utilizar o ambiente proporcionado pelo *Applet* da (Figura 5.22), os estudantes têm a oportunidade de validar as modificações em um CPF. Destacamos que a escolha dos algarismos não é arbitrária, mas sim o resultado de um processo específico. Ressaltamos que o propósito dessa metodologia é instigar a reflexão dos alunos sobre a aritmética subjacente à composição de um CPF.

Figura 5.22: Verificador de CPF

Fonte: Elaborado pelo autor.

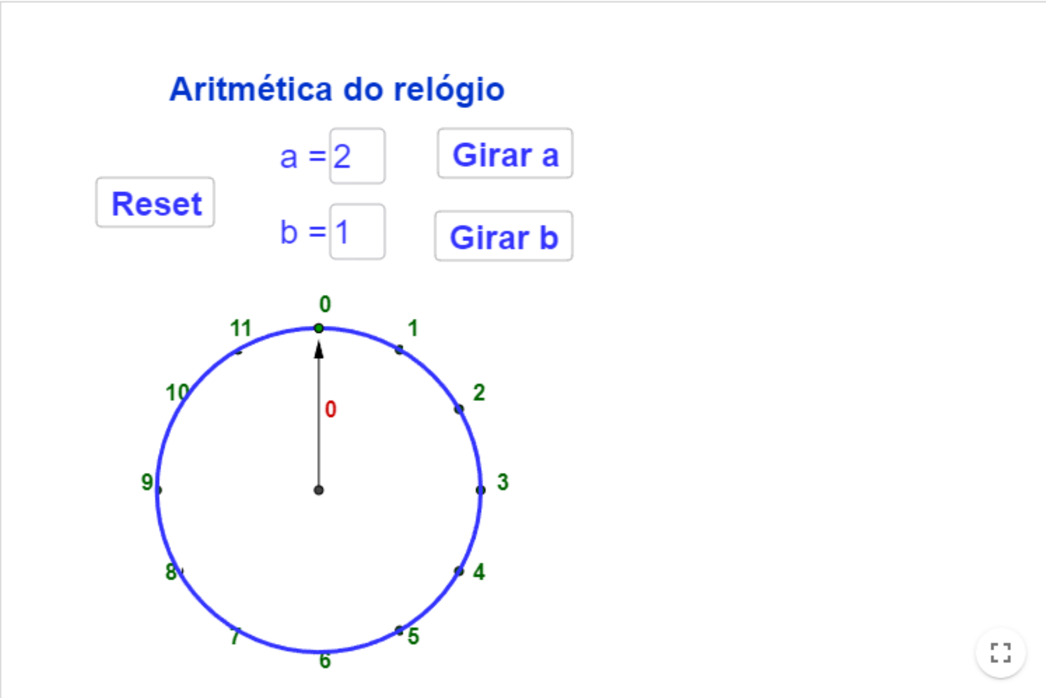
Dessa forma, a implementação dessa estratégia não apenas atribui um maior significado ao ensino da aritmética, mas também fortalece a ligação entre os conceitos matemáticos e sua aplicação prática. Isso contribui para uma compreensão mais abrangente e aplicada dos conhecimentos adquiridos, capacitando os alunos a relacionarem a teoria com situações do cotidiano.

5.6.3 O resto é o que importa

Por meio do *Applet* da (Figura 5.23) Aritmética do relógio, acessível em: ⟨https://www.geogebra.org/m/axjzu97a⟩, convidamos o aluno a se aventurar pela aritmética modular. Mas, afinal, o que é isso? Prepare-se para desvendar os mistérios dos números de maneira incrível e divertida.

A aritmética modular é uma abordagem especial para lidar com números que envolvem restos. Vamos explicar de forma simples: imagine uma caixa cheia de chocolates deliciosos. Ao dividir esses chocolates em grupos de três, o que sobra não é descartado, certo? Esse “resto”é o conceito central aqui.

Figura 5.23: Aritmética do relógio

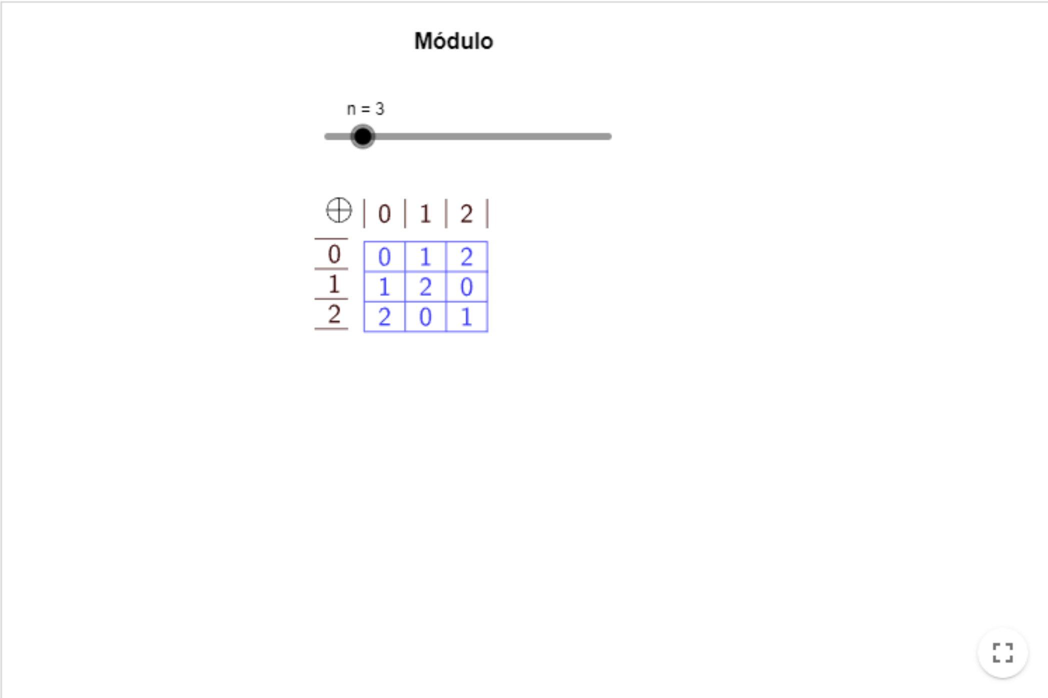


Fonte: Elaborado pelo autor.

Como se pode perceber na (Figura 5.24) Módulo, acessível em: ⟨https://www.geogebra.org/m/axjzu97a⟩, uma característica interessante da aritmética modular é sua capacidade de revelar padrões e ciclos. Por exemplo, ao observarmos os quadrados dos números inteiros (1^2, 2^2, 3^2, ...), percebemos que os resultados se repetem quando consideramos o módulo 5. Isso cria uma dança matemática, em que os números seguem padrões previsíveis.

A aritmética modular é fundamental em criptografia, teoria dos números e algoritmos, proporcionando uma maneira eficaz de lidar com operações em ambientes cíclicos. Ela é aplicada em problemas práticos, como agendamento de tarefas, controle de tráfego e sincronização de sistemas distribuídos.

Figura 5.24: Módulo



Fonte: Elaborado pelo autor.

Além disso, os *Applets* das (Figuras 5.23 e 5.24), oferecem uma experiência interativa que permite aos alunos explorarem e visualizarem esses conceitos de forma prática. Ao manipular os números e observar as mudanças nas operações modulares, os estudantes podem aprimorar sua compreensão e a apreciação dessa área da matemática.

5.6.4 Descobrindo o CPF dos Colegas

O CPF é constituído por 11 dígitos decimais, sendo os oito primeiros atribuídos aleatoriamente no momento da inscrição. O nono (antepenúltimo) dígito indica a região fiscal responsável pela inscrição, enquanto o décimo e o décimo-primeiro são dígitos verificadores calculados conforme um algoritmo definido pela Receita Federal e publicamente conhecido.

Na 10.ª Região Fiscal, o algarismo zero é utilizado como nono dígito. As regiões fiscais são distribuídas entre os estados da Federação da seguinte forma:

1.ª: DF, GO, MT, MS e TO;

2.ª: AC, AP, AM, PA, RO e RR;

3.ª: CE, MA e PI;

4.ª: AL, PB, PE e RN;

5.ª: BA e SE;

6.ª: MG;

7.ª: ES e RJ;

8.ª: SP;

9.ª: PR e SC;

10.ª: RS.

O formato do CPF é estruturado da seguinte maneira: os nove primeiros dígitos são agrupados em três conjuntos de três dígitos separados por ponto, seguidos por um hífen e pelos dois últimos dígitos. Por exemplo, o CPF 12345678909 é apresentado como 123.456.789-09.

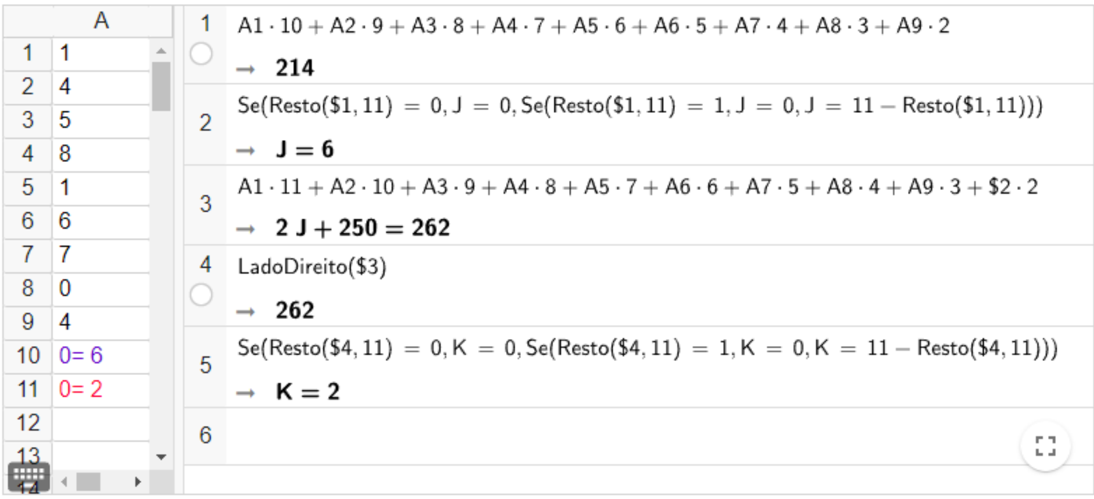
Os dígitos verificadores são calculados por meio de um algoritmo que utiliza a soma ponderada dos dígitos, resultando em um valor dividido por 11, conhecido como "módulo 11". O uso do número primo 11 permite identificar erros na substituição ou transposição de dígitos. Se o cálculo resultar em 10, a Receita Federal determina a substituição por 0 (zero).

Para calcular os dígitos verificadores, representamos um CPF como:
$D = (d_0, d_1, d_2, \ldots, d_{n-1})$, em que d_i é o dígito na posição i, e d_0 é a posição mais à esquerda. Os dígitos verificadores v_1 e v_2 são determinados pelas expressões

$$v_1 = \left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} d_i \times [9 - (i \mod 10)] \right) \mod 11 \right] \mod 10$$

$$v_2 = \left\{ \left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} d_i \times \{9 - [(i+1) \mod 10]\} \right) + (v_1 \times 9) \right] \mod 11 \right\} \mod 10$$

Figura 5.25: Descobrindo o CPF dos colegas



Fonte: Elaborado pelo autor.

Estas expressões garantem que os dígitos verificadores estejam sempre no intervalo de 0 a 9. No *Applet* da (Figura 5.25) Descobrindo o CPF dos Colegas, acessível em: ⟨https://www.geogebra.org/m/v6kq489v⟩, os alunos poderão verificar os CPFs dos colegas.

5.7 Capitulo V: Códigos corretores de erros

Nesta seção, adentramos no campo da teoria dos códigos corretores de erros, explorando também o intrigante universo do alfabeto cifrado, conforme podemos observar na (Figura 5.26).

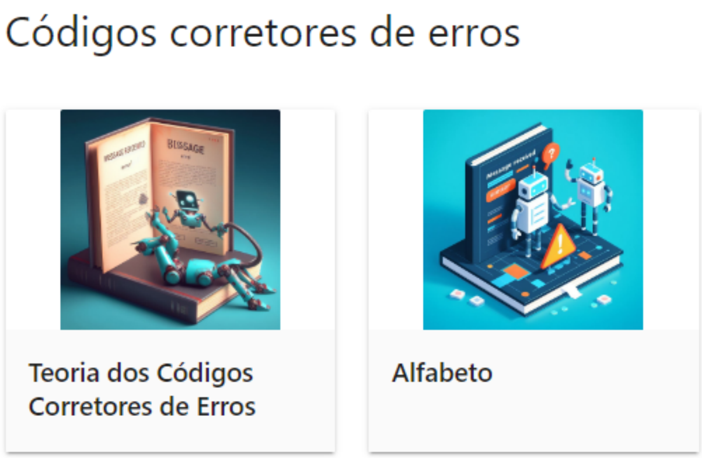
Os códigos corretores de erros desempenham papel crucial na transmissão de informações, garantindo a integridade e a precisão dos dados, mesmo em ambientes sujeitos a interferências. Exploramos os conceitos fundamentais dessa teoria, compreendendo como esses códigos são projetados para detectar e corrigir erros que podem ocorrer durante a transmissão de dados.

Dentro do vasto campo dos códigos, o alfabeto cifrado destaca-se como uma ferramenta milenar para proteger informações sensíveis. Um exemplo notável é o Código de César, uma técnica de criptografia que envolve o deslocamento das letras do alfabeto por um número fixo de posições. Em nossos exercícios práticos, exploramos esse método, desvendando mensagens codificadas por meio do deslocamento de três casas para frente, uma característica distintiva do Código de César.

A melhor maneira de compreender a teoria é aplicá-la na prática. Ao longo desta seção, apresentamos ao aluno exercícios envolvendo o alfabeto de César, convidando-o a decifrar mensagens codificadas e a explorar a lógica por trás desse método de criptografia clássico. Essas atividades práticas oferecem uma oportunidade de aprimorar suas habilidades na manipulação de códigos e entender como a segurança da informação pode ser alcançada por meio de técnicas criativas.

Ao explorarmos a teoria dos códigos corretores de erros e nos aventurarmos pelo mundo do alfabeto cifrado, mergulhamos em conceitos fundamentais para a comunicação segura. Os exercícios práticos com o alfabeto de César proporcionam uma experiência *hands-on*, capacitando-o a aplicar diretamente o conhecimento adquirido. Este é apenas o começo de uma jornada rumo ao entendimento mais profundo das técnicas que sustentam a segurança e a confidencialidade nas comunicações modernas.

Figura 5.26: Códigos corretores de erros



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na introdução desta subseção, é apresentado aos alunos um vídeo cujo link é: ⟨https://youtu.be/DNS6c3aDZ3Q?si=3WAqMhJFU5ZgJHhY⟩. Este vídeo proporciona uma introdução ao universo dos códigos corretores de erros, explorando conceitos essenciais como paridade e palavras-código. Tais elementos desempenham papel crucial na transmissão e recepção de dados, assegurando a integridade das informações em ambientes propensos a erros.

O vídeo começa destacando a importância dos códigos corretores de erros no contexto da transmissão de dados. Esses códigos são projetados para detectar e corrigir erros que podem ocorrer durante a comunicação, garantindo a precisão e confiabilidade das informações trocadas.

A paridade é um conceito fundamental abordado no vídeo, envolvendo a adição de bits extras aos dados transmitidos, de modo que o número total de bits com valor ´´1" seja sempre ímpar (paridade ímpar) ou sempre par (paridade par). Isso permite a detecção de erros, já que qualquer alteração nos dados resultaria em uma discrepância de paridade.

O vídeo explora o conceito de palavras-códigos, que são sequências específicas de bits que representam informações. Essas palavras-códigos são escolhidas de maneira a facilitar a detecção e a correção de erros. A introdução de redundâncias calculadas cuidadosamente permite identificar e corrigir discrepâncias que podem surgir durante a transmissão.

5.8 Capítulo VI: O código de Hamming (7,4)

A comunicação digital é essencial em nosso mundo interconectado, e a integridade dos dados transmitidos desempenha papel crucial nesse contexto. No âmbito da detecção e da correção de erros, o Código de Hamming surge como uma ferramenta poderosa para assegurar a precisão da informação em sistemas de comunicação digitais.

Neste capítulo, exploramos, detalhadamente, o Código de Hamming, uma técnica de detecção e correção de erros que tem desempenhado papel fundamental na confiabilidade das transmissões digitais. Veremos como esse código inteligente permite não apenas identificar erros, mas também corrigi-los de forma eficiente, tornando-se peça fundamental na garantia da integridade dos dados em ambientes propensos a interferências e ruídos.

Ao mergulhar nas nuances do Código de Hamming, descobrimos como ele opera, seus princípios subjacentes e como pode ser implementado em diversas situações. Este capítulo tem por objetivo servir como um guia essencial para aqueles que buscam aprimorar a robustez de seus sistemas de comunicação digital, fornecendo uma compreensão abrangente do funcionamento e da aplicação prática desse código crucial.

Figura 5.27: O código de Hamming (7,4)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Prepare-se para explorar um mundo onde a confiança na comunicação digital é reforçada por uma poderosa camada de detecção e correção de erros. Desejamos desvendar junto com o leitor os mistérios do Código de Hamming e descobrir como ele eleva a qualidade e a confiabilidade das transmissões digitais. Esta seção está dividida, em cinco subseções assim como apresentado na (Figura 5.27) O código de Hamming (7,4), acessível em: ⟨https://www.geogebra.org/m/mnjhfz58⟩.

5.8.1 Algoritmo de codificação

O código de Hamming (7,4) é um tipo específico de código de correção de erro utilizado para detectar e corrigir erros de transmissão em dados. Ele opera em blocos de sete bits, dos quais quatro bits são dados e três bits são bits de paridade. Vamos entender o algoritmo de codificação passo a passo.

Posição dos bits de dados e paridade

1. Os 4 bits de dados são rotulados como D_1, D_2, D_3 e D_4.
2. Os 3 bits de paridade são rotulados como P_1, P_2 e P_4.

Posicionamento dos bits de paridade

1. Os bits de paridade são posicionados nas posições que são potências de base 2 de expoentes inteiros não negativos.
2. Ou seja, P_1 na posição 1, P_2 na posição 2 e P_4 na posição 4 e etc.

Cálculo dos bits de paridade

1. P_1 é calculado como a paridade dos bits nas posições 1, 3, 5 e 7.
2. P_2 é calculado como a paridade dos bits nas posições 2, 3, 6 e 7.
3. P_4 é calculado como a paridade dos bits nas posições 4, 5, 6 e 7.

Inserção dos bits de paridade

1. Os bits de paridade calculados são, então, inseridos nas posições apropriadas no bloco de sete bits.

Bloco de sete bits codificado

1. O bloco de sete bits resultante, agora com os bits de paridade adicionados, é o código de Hamming (7,4) para os quatro bits de dados originais.

Exemplo 5.8.1. Suponha que os bits de dados sejam $D_1 = 1$, $D_2 = 0$, $D_3 = 1$ e $D_4 = 1$.

1. Posicionamento inicial dos bits: $D_1, D_2, D_3, D_4 P_1, P_2, P_4$
2. Cálculo dos bits de paridade

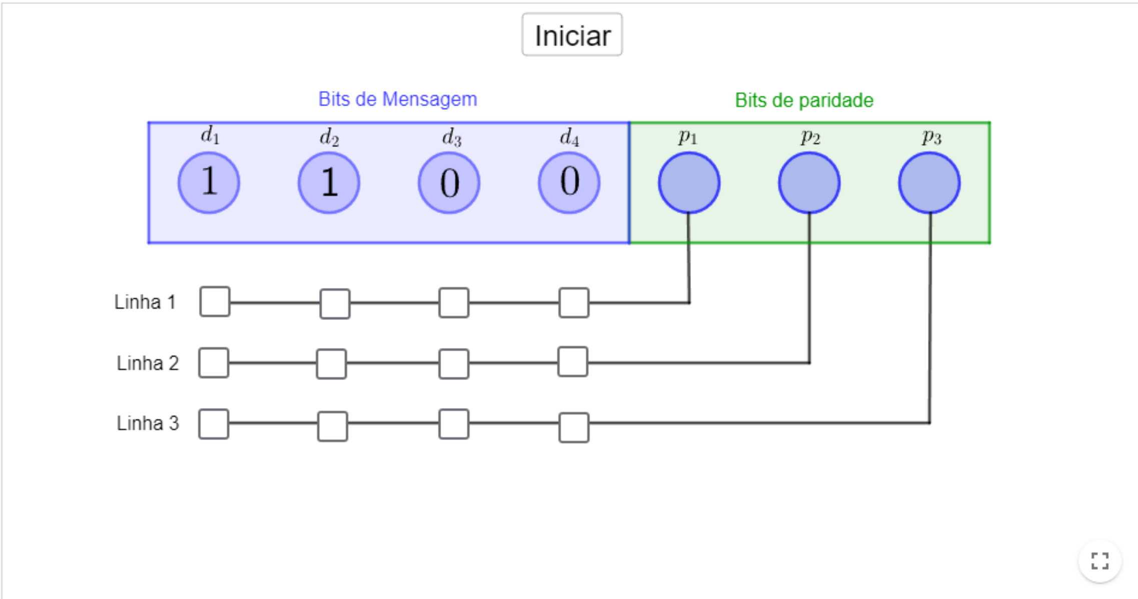
   - $P_1 = D_1 \oplus D_3 \oplus D_5 \oplus D_7 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1$

- $P_2 = D_2 \oplus D_3 \oplus D_6 \oplus D_7 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$
- $P_4 = D_4 \oplus D_5 \oplus D_6 \oplus D_7 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0$

3. Inserção dos bits de paridade:

   Bloco codificado $1,0,1,1,1,0,0$.

Figura 5.28: Algoritmo de codificação



Fonte: Elaborado pelo autor.

Portanto, o código de Hamming (7,4) para os bits de dados $1,0,1,1$ seria $1,0,1,1,1,0,0$. Este processo permite a detecção e a correção de erros de um bit durante a transmissão dos dados. No *Applet* da (Figura 5.28) Algoritmo de Codificação, acessível em: ⟨https://www.geogebra.org/m/mnjhfz58⟩, os alunos têm a oportunidade de realizar a organização de maneira dinâmica, reforçando e consolidando seus conhecimentos matemáticos.

5.8.2 Matriz geradora

O código de Hamming é uma técnica para detecção e correção de erros em dados específicos. Para compreender o funcionamento da matriz geradora desse código é necessário explorar alguns conceitos matemáticos básicos. Como discutido na subseção anterior sobre o código de Hamming, bits de paridade são adicionados a uma sequência original de bits. Esses bits são calculados de maneira cuidadosa para viabilizar a detecção e a correção de erros.

A matriz geradora desempenha papel fundamental na criação dos bits de paridade. Ela é construída com base na ideia de códigos lineares. No contexto do código de Hamming, cada palavra-código pode ser representada como uma sequência de bits.

A construção da matriz geradora é tal que, ao multiplicarmos uma sequência de bits de dados por essa matriz, obtemos uma nova sequência de bits que inclui os bits de paridade. Esses bits são calculados para garantir que a soma de conjuntos específicos de bits resulte em zero, respeitando o algoritmo da subseção anterior, o que é crucial para a detecção e correção de erros.

Exemplo 5.8.2. Suponha que tenhamos uma matriz geradora G para um código de Hamming (7,4), o que significa que a palavra de código tem sete bits, dos quais quatro são bits de dados e três são bits de paridade.

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para obter a palavra de código correspondente a uma sequência de dados $D = [d_1, d_2, d_3, d_4]$, multiplicamos D pela matriz G para obter a palavra de código C.

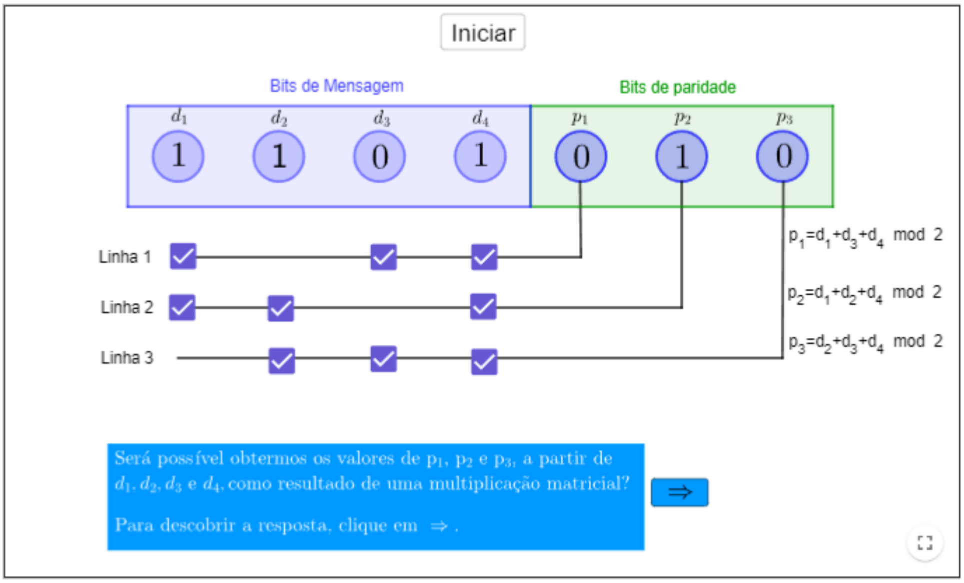
$$C = D \times G$$

A matriz geradora emerge como uma ferramenta matemática eficaz na elaboração de códigos de Hamming, contribuindo de maneira significativa para a detecção e a correção de erros em transmissões de dados. A compreensão dos conceitos fundamentais de operações matriciais e códigos lineares é imperativa para a exploração das aplicações práticas dessas técnicas na comunicação digital. No *Applet* da (Figura 5.29), disponível em Matriz geradora, acessível em: ⟨https://www.geogebra.org/m/ufxkhsta⟩, os alunos têm a oportunidade não apenas de realizar a codificação de palavras-código, mas também de fazê-lo dinamicamente, explorando os diversos aspectos da representação semiótica.

Nesse contexto, a representação semiótica desempenha papel crucial ao oferecer uma abordagem visual e interativa para o entendimento desses conceitos complexos. Ao utilizar o *Applet*, os estudantes podem não apenas compreender os códigos de Hamming e as operações matriciais, mas também visualizar e manipular as representações gráficas associadas. Essa abordagem enriquece a experiência de aprendizado, proporcionando uma compreensão mais profunda e intuitiva dos princípios subjacentes.

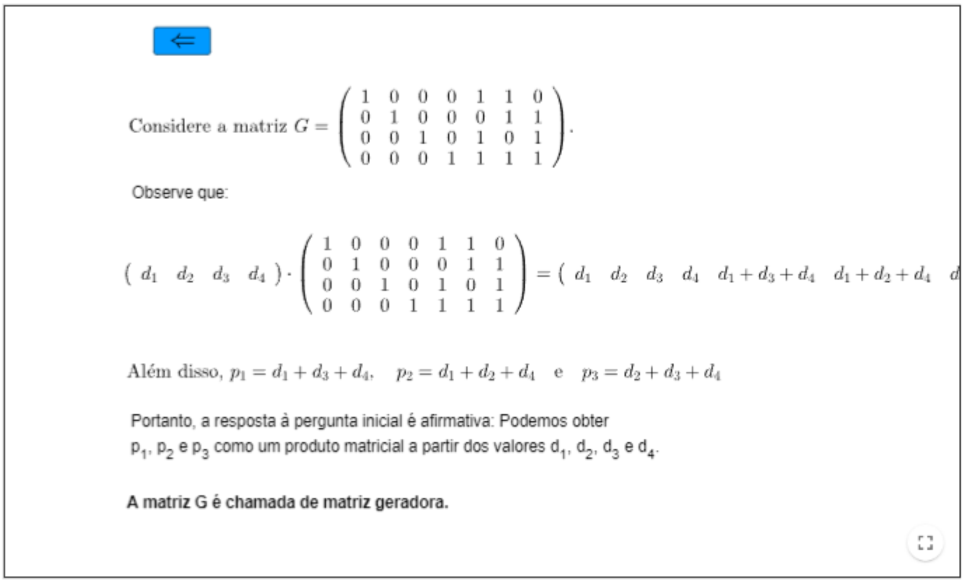
Além disso, a utilização da matriz geradora como recurso educacional apresenta ganhos significativos em sala de aula, proporciona aos alunos uma oportunidade prática de aplicar os conhecimentos teóricos adquiridos, promovendo a consolidação do aprendizado. A abordagem dinâmica e interativa do *Applet* estimula o engajamento dos alunos, tornando o processo de aprendizagem mais envolvente e eficaz.

Figura 5.29: Matriz geradora



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 5.30: Matriz geradora



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em resumo, a matriz geradora não apenas se destaca como uma ferramenta matemática poderosa para a criação de códigos de Hamming, mas também, quando explorada por meio de recursos visuais, como o *Applet*, pode revelar-se uma valiosa aliada no ensino, enriquecendo a compreensão dos alunos e promovendo um aprendizado mais efetivo.

5.8.3 Algoritmo de decodificação e correção

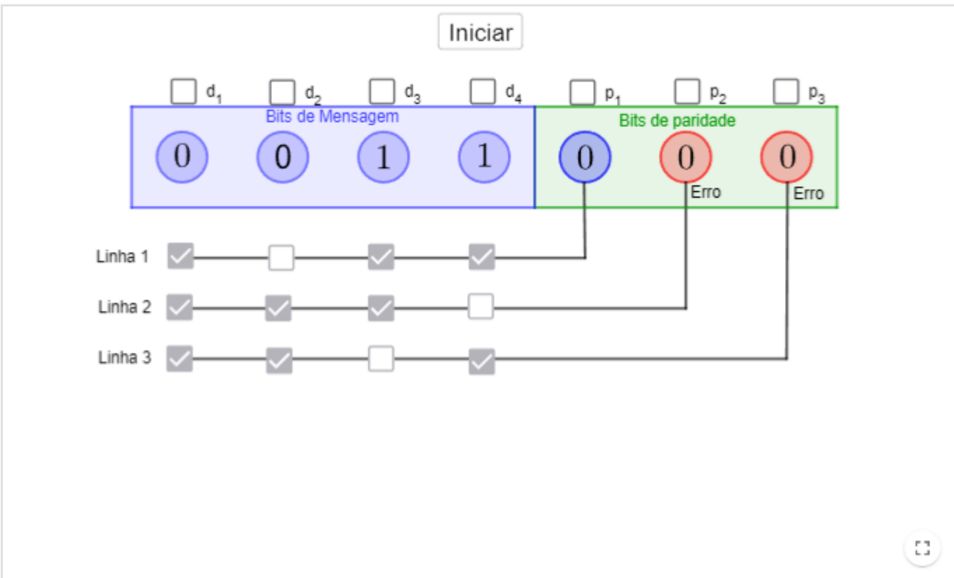
Na seção anterior, exploramos o processo de codificação de uma mensagem ou palavra mediante a introdução de bits de paridade. Agora, ao considerarmos o envio da mensagem codificada por meio de um canal, como por exemplo, via e-mail, há a possibilidade de ocorrer interferência, resultando em exatamente um erro em algum dos bits da mensagem codificada. Surge, então, a seguinte indagação: é viável detectar e corrigir esse erro?

Para abordar essa questão, é imperativo que o aluno se envolva na exploração do *Applet* apresentado na (Figura 5.31), Algoritmo de decodificação e correção, acessível em: ⟨https://www.geogebra.org/m/fkddrgnz⟩. Este *Applet* oferece uma abordagem de aprendizagem baseada nos diversos preceitos da representação semiótica, especialmente dentro do conteúdo matemático. Por meio desta ferramenta interativa, os alunos podem visualizar e compreender os conceitos de decodificação e correção de forma prática e envolvente.

Ao navegar pelo *Applet*, os estudantes têm a oportunidade de aprofundar seus conhecimentos sobre o algoritmo de decodificação e correção. Isso proporciona uma experiência prática, auxiliando na internalização dos conceitos abordados na subseção anterior. Além disso, a representação gráfica e interativa promovida pelo *Applet* contribui para uma compreensão mais efetiva, pois permite que os alunos visualizem as transformações e correções ocorrendo em tempo real.

Dessa forma, ao utilizar esta ferramenta, os alunos não apenas respondem ao questionamento sobre a detecção e correção de erros, mas também consolidam seus conhecimentos por meio de uma abordagem prática e visual, alinhada aos preceitos da representação semiótica. O *Applet* não apenas complementa o aprendizado teórico, mas também pode enriquecer a compreensão dos alunos ao oferecer uma experiência interativa e significativa no contexto da matemática aplicada à codificação de mensagens.

Figura 5.31: Algoritmo de decodificação e correção



Fonte: Elaborado pelo autor.

Destacamos que a abordagem oferecida pelo *Applet* destacado na (Figura 5.31), revela-se como uma ferramenta crucial no processo de aprendizagem dos alunos. Ao explorarem os conceitos de decodificação e correção por meio dessa plataforma interativa, os estudantes não apenas respondem à questão central sobre a viabilidade da detecção e correção de erros, mas também aprimoram seus conhecimentos de maneira prática e envolvente.

Os benefícios derivados do uso desse *Applet* (Figura 5.31), são diversos. Primeiramente, os alunos adquirem uma compreensão mais aprofundada do algoritmo de decodificação e correção, consolidando, assim, os princípios previamente aprendidos. A representação gráfica e interativa facilita a visualização das transformações em tempo real, tornando o aprendizado mais tangível e memorável.

Adicionalmente, a experiência prática proporcionada pelo *Applet* (Figura 5.31), contribui para a aplicação dos conhecimentos adquiridos. Os alunos não apenas compreendem os conceitos teóricos, mas também conseguem relacioná-los a situações práticas, o que é crucial para a internalização efetiva do conteúdo. Essa abordagem alinha-se aos preceitos da representação semiótica, enriquecendo a compreensão matemática por meio de uma perspectiva visual e interativa.

Portanto, ao incorporar esta ferramenta inovadora no processo educacional, os alunos não apenas ampliam seus conhecimentos em decodificação e correção, mas também desenvolvem habilidades transferíveis essenciais. A interatividade proporcionada pelo *Applet* (Figura 5.31), não só complementa o aprendizado teórico, mas também prepara os alunos para enfrentar desafios do mundo real, capacitando-os a aplicar esses princípios em diversas situações.

Assim, a utilização deste *Applet* (Figura 5.31), não apenas enfatiza a importância da abordagem prática no ensino da matemática, mas também resulta em ganhos significativos para os alunos, fornecendo-lhes uma base sólida e habilidades inovadoras para enfrentar os desafios complexos do século XXI. Este recurso não é meramente uma ferramenta educacional, mas sim uma entrada para uma compreensão aprofundada e aplicada da matemática, na prática, preparando os alunos para um futuro cada vez mais exigente e tecnologicamente avançado.

5.8.4 Matriz de paridade

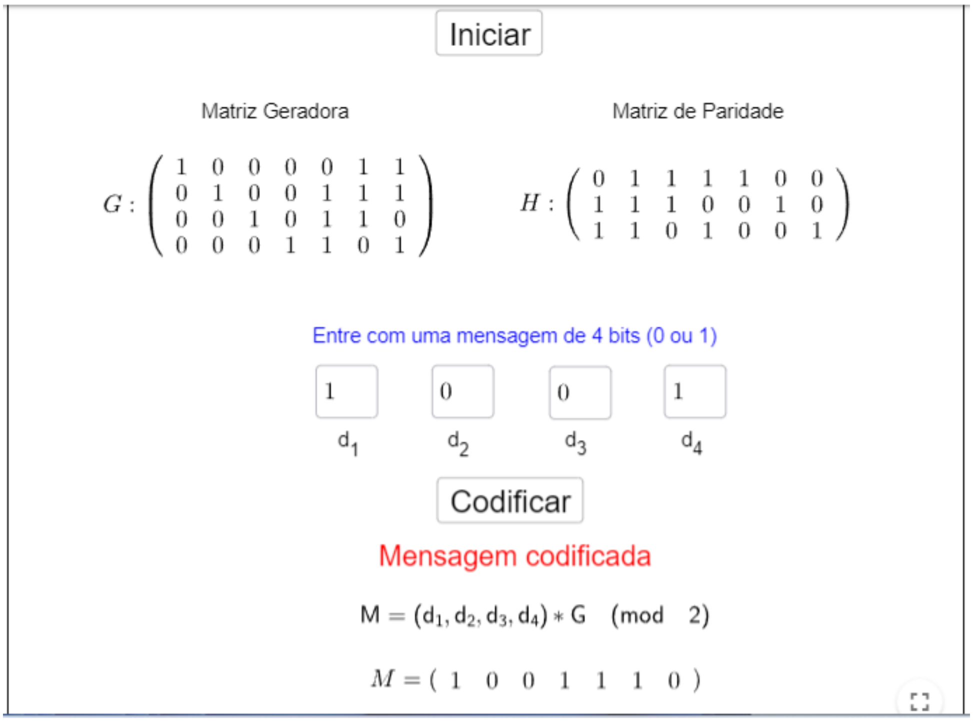
No cenário educacional contemporâneo, a tecnologia desempenha papel crucial na transformação da maneira como aprendemos e compreendemos conceitos complexos. O *Applet* apresentado na (Figura 5.32) amplia os horizontes do aprendizado, especialmente, quando se trata da aritmética por trás da matriz de paridade dos códigos corretores de erros.

A matriz de paridade, frequentemente um conceito desafiador para os alunos, ganha vida de maneira acessível por meio do *Applet* (Figura 5.32). Este recurso interativo não só permite que os alunos explorem a aritmética subjacente, mas também oferece diversas visualizações da representação semiótica desse importante conceito.

Ao utilizar o *Applet* (Figura 5.32), os alunos são imersos em uma experiência de aprendizado relevante. Eles podem manipular variáveis, testar diferentes cenários e observar instantaneamente as mudanças na matriz de paridade. Essa abordagem prática não apenas facilita a compreensão da teoria, mas também estimula o pensamento crítico e a resolução de problemas.

Além disso, as diversas visualizações oferecidas pelo *Applet* proporcionam uma compreensão mais holística da matriz de paridade. A representação semiótica, que abrange símbolos, signos e significados, torna-se tangível e acessível por meio do *Applet*. Os alunos não apenas aprendem a aplicar fórmulas e algoritmos, mas também entendem a lógica por trás desses processos. A visualização semiótica proporciona uma compreensão mais profunda, permitindo que os alunos associem conceitos abstratos a representações concretas.

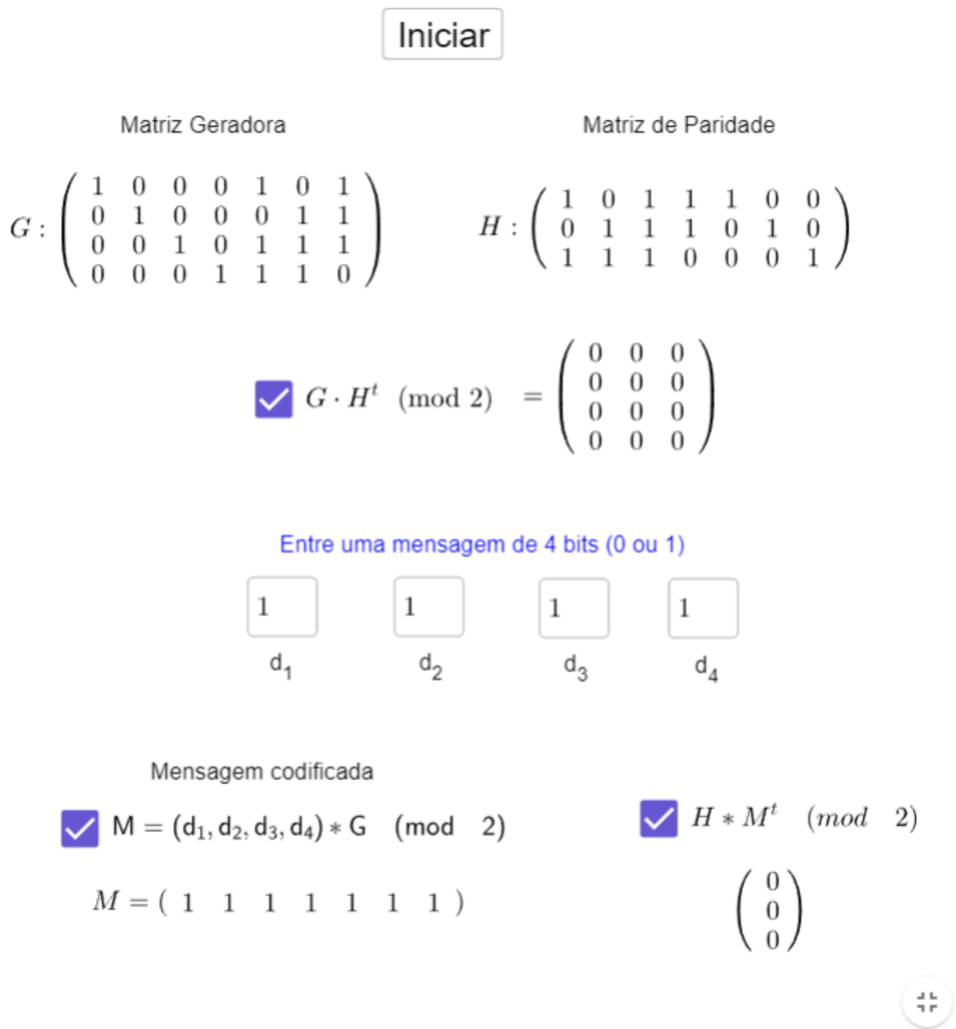
Figura 5.32: Matriz de paridade: mensagem codificada



Fonte: Elaborado pelo autor.

Além disso, a abordagem interativa do *Applet* promove a personalização do aprendizado. Cada aluno pode explorar a matriz de paridade em seu próprio ritmo, adaptando a experiência de aprendizado às suas necessidades específicas. Isso cria um ambiente educacional mais inclusivo e flexível, atendendo às diversas maneiras de aprender de cada estudante.

Figura 5.33: Matriz de paridade: mensagem codificada



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em suma, o *Applet* emerge como uma ferramenta poderosa para explorar a aritmética por trás da matriz de paridade dos Códigos Corretores de Erros. Sua capacidade de oferecer diversas visualizações da representação semiótica não apenas simplifica conceitos complexos, mas também transforma a aprendizagem em uma jornada cujo objetivo é ser envolvente e personalizada. Este avanço tecnológico destaca-se como um catalisador para a excelência no ensino, preparando os alunos para enfrentar os desafios da era digital com confiança e compreensão sólida.

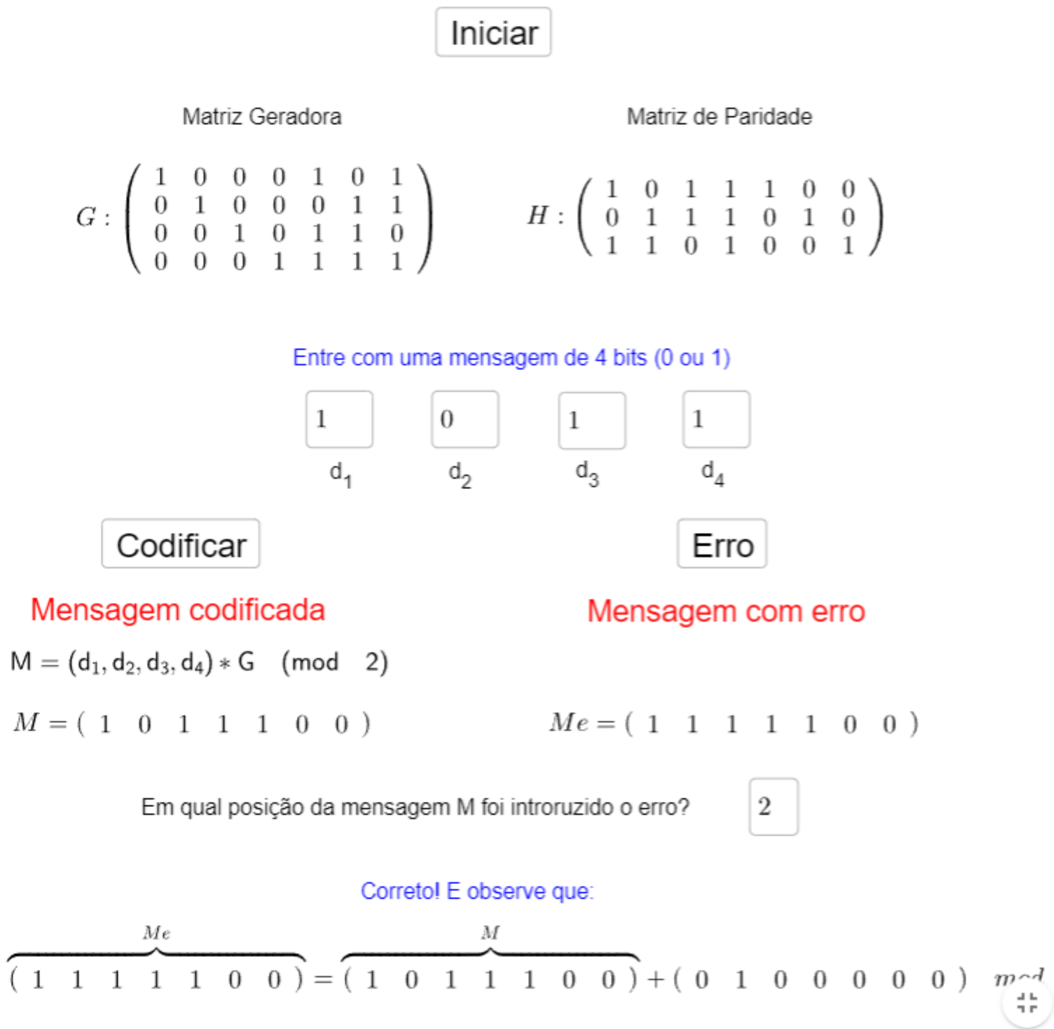
5.8.5 Algoritmo de decodificação e correção matricial

No contexto da decodificação e correção matricial, a tecnologia desempenha papel fundamental na exploração e na compreensão dos intricados processos envolvidos. O algoritmo de decodificação e correção matricial, quando apresentado por meio de uma interface interativa, proporciona uma abordagem inovadora para a assimilação de conceitos complexos, podendo tornar a aprendizagem uma experiência dinâmica e acessível.

O algoritmo de decodificação e correção matricial muitas vezes é encarado como um desafio para os aprendizes, dada a sua natureza abstrata e técnica. No entanto, ao incorporar uma ferramenta interativa, semelhante ao *Applet* da (Figura 5.34), mencionado anteriormente, os alunos podem explorar de maneira prática os princípios subjacentes a esses algoritmos. Essa abordagem não só facilita a compreensão teórica, mas também estimula o pensamento crítico e a resolução de problemas relacionados à decodificação e a correção de matrizes.

Assim como no cenário educacional mencionado anteriormente, a interface interativa permite que os alunos manipulem variáveis, experimentem diferentes cenários e observem instantaneamente as mudanças nas matrizes de decodificação e correção. Esse método prático não apenas simplifica a teoria, mas também proporciona uma compreensão mais profunda dos algoritmos matriciais, promovendo a associação de conceitos abstratos a representações concretas.

Figura 5.34: Algoritmo de decodificação e correção matricial



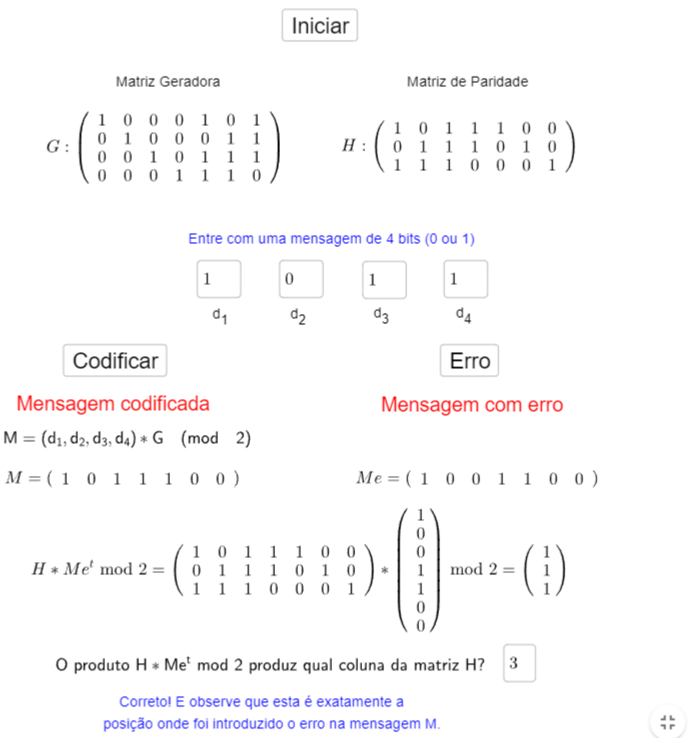
Fonte: Elaborado pelo autor.

A visualização semiótica, compreendendo símbolos, signos e significados, desempenha papel crucial para tornar tangível a lógica por trás dos processos de decodificação e correção matricial. A representação visual oferecida pela ferramenta interativa não apenas ensina a aplicação de fórmulas e algoritmos, mas também permite que os alunos compreendam a lógica subjacente a esses processos, enriquecendo assim sua compreensão e promovendo uma aprendizagem mais completa.

Além disso, uma abordagem interativa possibilita a personalização do aprendizado, permitindo que cada aluno explore os algoritmos de decodificação e correção matricial em seu próprio ritmo. Essa flexibilidade adaptativa proporciona um ambiente educacional inclusivo, atendendo às diferentes formas de aprendizagem de cada estudante.

Em resumo, a incorporação de uma abordagem interativa, semelhante ao *Applet* proposto, revela-se como uma ferramenta poderosa para desvendar os segredos por trás dos algoritmos de decodificação e correção matricial. Sua capacidade de fornecer visualizações dinâmicas e práticas não apenas simplifica conceitos complexos, mas também pode transformar a aprendizagem em uma jornada envolvente e personalizada. Este avanço tecnológico, semelhante ao destacado no cenário educacional contemporâneo, surge como um facilitador para a excelência no ensino, capacitando os alunos para enfrentar os desafios da era digital com confiança e compreensão sólida.

Figura 5.35: Algoritmo de decodificação e correção matricial: matriz de paridade x mensagem erro



Fonte: Elaborado pelo autor.

À medida que os alunos exploram os *Applets* deste livro dinâmico digital e, ao longo deste capítulo, uma característica singular emerge no universo da aprendizagem interativa: a aleatoriedade.

A riqueza deste livro digital reside na imprevisibilidade, na promessa de que cada exploração por seus conteúdos é uma nova jornada de descoberta. Ao contextualizar códigos corretos de erros, matrizes, mudança de base e outras nuances matemáticas complexas, a aleatoriedade não apenas oferece uma variedade infinita de cenários, mas também tem por intenção instigar os leitores a abraçarem a diversidade de desafios que se apresentam. Este livro não só mantém o aprendizado fresco, mas também fomenta a flexibilidade cognitiva, preparando os alunos para enfrentarem problemas do mundo real.

Dessa forma, concluímos este capítulo, celebrando a aleatoriedade como uma aliada valiosa na jornada educacional proporcionada pelo livro dinâmico digital. Cada clique, cada interação, representa uma oportunidade para os alunos se perderem e, ao mesmo tempo, se encontrarem em meio aos desafios estimulantes que este recurso inovador oferece. Que a imprevisibilidade se torne um catalisador para uma compreensão mais profunda e uma apreciação mais rica da matemática e de outros domínios de conhecimento, enquanto os alunos desbravam as páginas deste livro dinâmico.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A integração das tecnologias na educação, conforme discutido previamente, desempenha papel crucial na evolução do processo educacional, sendo destacada por (SILVA; BILESSIMO; MACHADO, 2021, p. 37) como fundamental diante da constante mutabilidade do universo. Em consonância, (SÁ et al., 2023, p. 14) enfatiza a importância da tecnologia educativa para aprimorar a eficácia do processo educacional.

No cerne desse progresso, com esta pesquisa buscou-se realizar uma análise mais aprofundada das potencialidades dos códigos corretos de erros, destacando o GeoGebra como uma ferramenta inovadora no ensino de matemática. Este estudo foi além da simples introdução de tecnologias na educação, buscando compreender como essas ferramentas podem ser aplicadas de maneira específica e transformadora. A abordagem concentrou-se em temas matemáticos fundamentais, tais como matrizes, potências, mudança de base, aritmética modular, ângulos e conceitos básicos, para proporcionar uma compreensão abrangente e contextualizada desses conteúdos.

A estratégia de trabalhar com um livro dinâmico digital, fundamentada nos princípios da representação semiótica propostos por (DUVAL; THADEU, 2012, p. 267), apresenta-se como uma ferramenta educacional que não se limita à mera transmissão de conteúdos, mas representa uma abordagem que contextualiza os conceitos matemáticos na vida cotidiana dos estudantes. Essa contextualização não apenas poderá tornar o aprendizado mais significativo, mas também visa instigar um engajamento mais profundo por parte dos alunos, potencialmente criando uma atmosfera de aprendizado envolvente.

A fusão do GeoGebra como plataforma de ensino e a concepção do livro dinâmico não apenas se destacaram na correção de erros, mas também se mostraram como possíveis instrumentos valiosos na promoção da interatividade e do interesse dos alunos. A aplicação conjunta desses recursos tecnológicos tende a contribuir para a configuração de uma educação mais moderna, alinhada às exigências contemporâneas. Este estudo não se limitou a reconhecer a importância da tecnologia na educação, mas, por meio dele, buscou-se explorar as possibilidades transformadoras dessas ferramentas para moldar o futuro da aprendizagem.

Em virtude de circunstâncias extraordinárias que escaparam ao controle ao longo desta pesquisa, infelizmente, não foi viável concretizar a aplicação do livro dinâmico digital com os alunos da educação básica, conforme inicialmente planejado. A adversidade imposta por essas condições inesperadas destacou-se como um desafio imprevisto, evidenciando a importância da flexibilidade e da adaptabilidade em ambientes educacionais.

A não aplicação do livro dinâmico digital, longe de ser um obstáculo insuperável, é encarada como um ponto de partida para investigações posteriores e refinamentos metodológicos. A análise dos motivos que impediram a aplicação planejada pode abrir caminho para uma compreensão mais profunda das variáveis envolvidas, permitindo a formulação de estratégias mais robustas e adaptáveis no futuro.

Diante dos desafios enfrentados, esta pesquisa não apenas adiciona uma perspectiva singular ao campo acadêmico, mas também abre portas para investigações subsequentes que, sem dúvida, enriquecerão a compreensão sobre a integração de tecnologias educacionais no ambiente escolar. Esperamos que este material possa servir como uma valiosa ferramenta para os professores de matemática da educação básica, permitindo-lhes abordar esses temas de maneira contextualizada e enriquecedora para seus alunos.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. [S.l.]: Bookman, 2012.

BORBA, M. d. C.; LACERDA, H. D. d. G. Políticas públicas e tecnologias digitais: um celular por aluno. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 17, n. 3, p. 490–507, 2015.

CARVALHO, S. M. d. Matrizes, determinantes e polinômios: aplicações em códigos em corretores de erros, como estratégias motivacional para o ensino de matemática. 2014.

DANTAS, M. P. et al. Códigos corretores de erros no ensino médio: um estudo sobre o código de hamming. Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2018.

DUARTE, C. **Realidade aumentada no ensino e aprendizagem dos sólidos geométricos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pelotas, 2021.

DUVAL, R.; THADEU, M. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática**, Universidade do Extremo Sul Catarinense, v. 7, n. 2, p. 266–297, 2012.

GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB**. [S.l.]: Bookman Editora, 2009.

HAMMING, R. W. Error detecting and error correcting codes. **The Bell system technical journal**, Nokia Bell Labs, v. 29, n. 2, p. 147–160, 1950.

HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. **Códigos corretores de erros**. [S.l.]: Instituto de Matematica Pura e Aplicada, 2008, p. 29.

LABURÚ, C. E.; SILVA, O. H. M. da. Multimodos e múltiplas representações: fundamentos e perspectivas semióticas para a aprendizagem de conceitos científicos. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 16, n. 1, p. 7–33, 2011.

LEON, S. J. **Álgebra Linear com Aplicações .** [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2000.

MELO, J. E. de. **Educação Matemática: um estudo das concepções dos docentes sobre os registros de representação semiótica no ensino de álgebra na educação básica**. [S.l.]: Editora Dialética, 2020.

MILIES, C. P. Breve introdução à teoria dos códigos corretores de erros. **Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste, SBM**, p. 22, 2009.

NOBREGA, C. **A tecnologia que muda o mundo**. [S.l.]: Lugre, 2018.

PEREIRA, L. R. et al. O uso da tecnologia na educação, priorizando a tecnologia móvel. **Acesso em**, v. 16, 2012.

SÁ, T. D. A. et al. Uso das tecnologias digitais de informação e comunicação (tdic) nas práticas pedagógicas da educação infantil. **Caderno Pedagógico**, v. 20, n. 5, p. 1179–1200, 2023.

SILVA, J. B. D.; BILESSIMO, S. M. S.; MACHADO, L. R. Integração de tecnologia na educação: proposta de modelo para capacitação docente inspirada no tpack. **Educação em Revista**, SciELO Brasil, v. 37, 2021.

SIQUEIRA, A. C.; FREIRE, C. de O. A influência da tecnologia no desenvolvimento infantil. **Revista Farol**, v. 8, n. 8, p. 22–39, 2019.

SOARES, C. R. P. O uso de tecnologia no ensino de matemática: Algumas reflexões. **Contribuições reflexivas (de) e para acadêmicos: em temática multidisciplinar**, p. 10, 2023.

STRANG, G. **Álgebra linear e suas aplicações**. [S.l.]: Cengage Learning, 2010.

VALENTE, J. A. et al. Informática na educação no brasil: análise e contextualização histórica. **O computador na sociedade do conhecimento. Campinas: UNICAMP/NIED**, p. 1–13, 1999.

AUTORIZAÇÃO

Autorizo a reprodução e/ou divulgação total ou parcial do presente trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, desde que citada a fonte.

Teófilo Otoni, ____ / ____ / ________.

____

André Luiz Neto

Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

Campus do Mucuri - Rua do Cruzeiro, n. 01 - Jardim São Paulo - CEP 39803-371.

UFVJM