UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO – UEMA
PRO-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PPG
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

**THADEU ALVES DA SILVA JÚNIOR**

# O ESTUDO DA PROPORCIONALIDADE

# E A RELAÇÃO COM O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

SÃO LUÍS – MA

2024

**THADEU ALVES DA SILVA JÚNIOR**

# O ESTUDO DA PROPORCIONALIDADE

# E A RELAÇÃO COM O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

Dissertação apresentada à Universidade Estadual do Maranhão, no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, sob orientação da Professora Dra. Celina Amélia da Silva, como requisito para obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

SÃO LUÍS – MA

2024

Silva Júnior, Thadeu Alves da

O estudo da proporcionalidade e a relação com o desenvolvimento do raciocínio proporcional. / Thadeu Alves da Silva Júnior. – São Luis, MA, 2024.

65 f

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Estadual do Maranhão, 2024.

Orientador: Profa. Dra. Celina Amélia da Silva

1.Proporcionalidade na história. 2.O Papiro de Rhind. 3.Proporção Áurea. 4.Proporcionalidade no cotidiano. 5.Pensamento proporcional. I.Título

CDU: 51-021.263

**Elaborado por Cássia Diniz- CRB 13/910**

**O ESTUDO DA PROPORCIONALIDADE**

**E A RELAÇÃO COM O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL**

Dissertação apresentada à Universidade Estadual do Maranhão, no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, sob orientação da Professora Dra. Celina Amélia da Silva, como requisito para obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 31 de maio de 2024.

Celina Amélia da Silva

Profª. Dra. Celina Amélia da Silva (orientadora)

Universidade Estatual do Maranhão – UEMA

João Coelho

Profº. Dr. João Coelho Silva Filho (1º examinador)

Universidade Estadual do Maranhão – UEMA

Valeska Martins de Souza

Profª. Dra. Valeska Martins de Souza (2º examinador)

Universidade Federal do Maranhão – UFMA

SÃO LUÍS – MA

2024

*A elegância de um teorema matemático é diretamente proporcional ao número de ideias independentes que podem ver-se no teorema, e inversamente proporcional ao esforço que é preciso para vê-las.*

*George Pólya*

Dedico esse trabalho a meus filhos.

(Murilo Moraes Alves Silva e Maria Fernanda Rodrigues Alves Silva).

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por ter me dado sanidade, perseverança e abençoado toda essa caminhada, além de ter colocado no meu caminho todas as pessoas que diretamente ou indiretamente contribuíram para a conclusão dessa jornada.

**Lista de Figuras**

## RESUMO

Este trabalho ressalta a proporcionalidade em alguns pontos da história como o Papiro de Rhind e a Proporção Áurea, sua definição com o Teorema Fundamental da Proporcionalidade e diferentes maneiras de aplicação do raciocínio proporcional na resolução de situações problemas, como regra de três, redução à unidade e aplicação do Teorema fundamental da Proporcionalidade. Não buscamos aqui definir a melhor aplicação, ou mais objetiva, mais sim o desenvolvimento do pensamento proporcional, além de buscar uma reflexão em como vem sendo trabalhado a proporcionalidade e como seu entendimento pode contribuir para o desenvolvimento de um raciocínio proporcional concreto, o que se faz útil em tantos outros temas e áreas do conhecimento.

**Palavras-chave:** Proporcionalidade na história. O Papiro de Rhind. Proporção Áurea. Proporcionalidade no cotidiano. Pensamento proporcional.

**ABSTRACT**

This paper highlights proportionality in some points of history, such as the Rhind Papyrus and the Golden Ratio, its definition with the Fundamental Theorem of Proportionality, and different ways of applying proportional reasoning to solve problem situations, such as the rule of three, reduction to unity, and application of the Fundamental Theorem of Proportionality. We do not seek to define the best or most objective application here, but rather the development of proportional thinking, in addition to seeking a reflection on how proportionality has been worked on and how its understanding can contribute to the development of concrete proportional reasoning, which is useful in so many other topics and areas of knowledge.

Keywords: Proportionality in history. The Rhind Papyrus. Golden Ratio. Proportionality in everyday life. Proportional thinking.

## SUMÁRIO

# INTRUDUÇÃO

O estudo de matemática proporciona o desenvolvimento do intelecto, do raciocínio lógico, da criatividade, de busca nas resoluções de problemas, o que sem dúvida ajuda um indivíduo a se entender capaz de inserir-se num mundo cada vez mais competitivo.

No mundo atual, cada vez mais exigente, o desenvolvimento de competências básicas, que propiciem a progressão do saber, atitudes e habilidades, se faz necessário aos alunos para suas inserções como indivíduos socialmente e economicamente produtivos no decorrer de suas vidas. Tais habilidades cabe em parte à família, mas uma parte significativa é atribuída à docência, que tem a importante missão de estabelecer o elo entre o conhecimento e os discentes.

A matemática é muitas vezes vista como disciplina que exige dos alunos um aprendizado que nem aos menos venha a ser utilizado, proporcionando assim um estudo forçado e sem aproveitamento, causando um obstáculo na transmissão dos saberes nessa área do conhecimento. Diante dessa problemática, focando no tema que é considerado eixo integrador de diversos outros e seu conceito está presente também em outras áreas, que é a proporcionalidade matemática, investigamos como seu estudo pode propiciar o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Analisamos o que nos informa os documentos norteadores da educação segundo a legislação educacional, bem como a opinião de docentes de diferentes cidades dos estados do Piauí e do Maranhão sobre o tema, além de aplicar um questionário a alunos de 8º Ano do Ensino Fundamental. A proporcionalidade matemática é percebida desde o Ensino Fundamental, está presente nas atividades humanas e se mostra relevante no decorrer da história da humanidade.

O tema proporcionalidade em seu conceito estabelece relação com vários outros conteúdos e também com outras ciências, se mostrando assim de grande importância não só no âmbito escolar como na vida dos seres humanos. Com essa observação, temos uma ferramenta, que é a associação de um conteúdo a situações do cotidiano, o que pode ser de grande valia para a compreensão dos alunos.

De maneira teórica, fundamentou-se apoio em autores como Maranhão e Machado(2011), Costa e Avellato(2015), Costa Júnior(2013), Garcez(2017) dentre outros que entendem que o conceito de proporcionalidade pode ser útil no estudo de vários outros temas.

Tais conceitos e qualidades que podem serem adquiridos com o estudo da proporcionalidade matemática, contribuem no desenvolvimento intelectual e são pontos importantes para que os alunos associem representações do mundo real a representações matemáticas fazendo uso de induções e conjecturas, fatos respaldados pela legislação educacional em vigor.

Fazendo a utilização dessas perspectivas, esse estudo objetiva de forma geral, pesquisar a relação da proporcionalidade com o desenvolvimento do raciocínio proporcional e levar os questionamentos sobre o tema proporcionalidade a professores de matemática refletirem em quão importante é o tema e como o seu entendimento pode ser útil na compreensão em outros, bem como refletir como está sendo repassado esse conteúdo em sala de aula, além de atender aos objetivos específicos de Interpretar situações que envolvem a proporcionalidade; pesquisar a relação da proporcionalidade com outros tópicos matemáticos; analisar se os professores desenvolvem atividades envolvendo proporcionalidade em situações cotidianas; investigar se a proporcionalidade é estudada relacionada com a resolução de situações problemas na perspectiva interdisciplinar.

Romão (2011) menciona que ao desenvolver o raciocínio proporcional, o aluno estará preparado para elaborar muitos outros conceitos matemáticos importantes, e a resolver situações-problemas envolvendo medidas, usar regra de três com segurança, entre outras possibilidades. Diante disso, a pesquisa possibilita a análise sobre a importância da proporcionalidade matemática no ensino e aprendizagem, além de possibilitar a docentes um repensar nos métodos e a buscar um aprimoramento no ensino.

Dessa forma, de acordo com a pesquisa apresentada, as observações sobre o ensino e aprendizagem de proporcionalidade matemática aqui levantadas, com base legal e referenciais teóricos, bem como opiniões de docentes analisadas por meio de questionário, remetem à importância no que diz respeito ao desenvolvimento de um raciocínio proporcional nos educandos, além de ser no mínimo questionável como está sendo feito esse ensino ao observarmos o desempenho dos alunos a respeito de proporcionalidade em provas externas como por exemplo o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - PISA (Programme for International Student Assessment).

Baseado nessa perspectiva, tem-se uma pesquisa voltada para a análise do desenvolvimento do raciocínio proporcional, diante de indagações de acordo com experiência docente alinhada a busca literária e questionamentos como: A associação de fatos do contexto histórico para a abordagem na introdução de conteúdos matemáticos pode contribuir para a melhoria do processo de ensino aprendizagem? Os alunos da educação básica desenvolvem de forma adequada o conceito de proporcionalidade? Seria útil o desenvolvimento de um pensamento proporcional mesmo que implicitamente na formação de um indivíduo? Tais indagações, nos remete ao questionamento da pesquisa que a presente investigação nos trás: A relação da proporcionalidade como o desenvolvimento do raciocínio proporcional de fato acontece no estudo da proporcionalidade?

Procurando respostas para tais questionamento e com possibilidades do surgimento no decorrer das análises de outras indagações, este trabalho teve como objetivo geral pesquisar a relação da proporcionalidade como desenvolvimento do raciocínio proporcional.

A pesquisa desenvolveu-se com base bibliográfica para fundamentação teórica em fontes diversificadas, análise de documentos sendo complementada através de pesquisa de campa com o uso de questões semiestruturadas onde os participantes assinaram o termo de livre consentimento para uso do resultado dos dados coletados para a conclusão do trabalho com participação de docentes de diferentes municípios dos estados do Piauí e Maranhão, todos licenciados ou bacharelados, que exercem a docência no ensino fundamental ou no ensino médio ou em ambos em que a maioria conta com experiência de mais de 5 anos.

Observa-se que a proporcionalidade pode ser percebida desde o estudo sobre frações, adição de parcelas iguais, multiplicação, por exemplo, ainda no início do Ensino Fundamental, mas é somente no 7º Ano, já nos anos finais do Ensino Fundamental que os temas Razão, Proporção traz Unidade Temática dedicada ao estudo de grandezas. Visando uma concretização da aprendizagem, o fato de a proporcionalidade ser tema associado à diversas atividades do ser humano, viabiliza a contextualização do conceito na busca de um raciocínio proporcional observado em diversos conteúdos matemáticos e em outras áreas do conhecimento.

A proporcionalidade desperta interesse ao longo da história da humanidade e para observarmos essa importância no contexto histórico, citamos o famoso Papiro de

Rhind, documento encontrado no Egito por volta de 1850. Ainda com intuito de destacarmos a importância histórica da proporcionalidade, mencionamos a Razão Áurea, que foi descoberta na Grécia antiga. Veremos a definição matemática de proporcionalidade através da demonstração do Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

De acordo com pesquisa junto a legislação educacional, direcionou-se a pesquisa fundamentada no pensamento de Maranhão e Machado (2011) que propõem uma análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional; Costa e Avellato (2015) que entendem que a proporcionalidade é eixo de conexão entre conteúdos matemáticos; Costa Júnior (2013) que atribui o significado do conceito de proporcionalidade e sua contribuição da história da matemática; Garcez (2016) que indaga: Todos estudam proporções: o que aprendem? Beiral (2017) que ressalta a proporcionalidade no cotidiano como proposta para o ensino fundamental.

A pesquisa aqui apresentada divide-se em seis seções. Na primeira, são apresentadas as motivações, bem como a questão a ser pesquisada, embasada nos objetivos estabelecidos. Na segunda seção apresenta-se o que a legislação educacional define para o estudo da proporcionalidade. Na terceira mostram-se as fundamentações teóricas que são as referências desenvolvidas na investigação. A quarta seção contempla importantes generalizações e diferentes abordagens na resolução de situações envolvendo pensamento proporcional.

A quinta seção refere-se ao caminho transcorrido na metodologia investigativa, as abordagens aplicadas na pesquisa. Na seção seis, constam as análises e discussão sobre o tratamento dos dados obtidos com a pesquisa. Finalizando com a sétima seção, onde estão apresentadas as ideias conclusivas, visando um alinhamento junto à análise dos dados, com o intuito de apresentar argumentações na busca de uma reflexão para um olhar diferente sobre o ensino e aprendizagem na construção de um raciocínio proporcional.

# 1 ASSIMILANDO A INVESTIGAÇÃO

A relação entre grandezas é algo presente no cotidiano e se mostra importante para o estudo e progresso da matemática. A busca do saber, da compreensão, torna o indivíduo capaz de definir seus propósitos e assim se mostrar útil ao meio social em que está inserido.

## 1.1 APRENDIZAGEM DA PROPORCIONALIDADE

O ensino e aprendizagem da proporcionalidade muitas das vezes é resumida em razão e regra de três deixando de lado a associação deste tema a outros conteúdos o que pode objetivar uma assimilação de uma forma mais proveitosa e a efetiva compreensão dos mesmos, fato necessário para uma boa aprendizagem em qualquer conteúdo a ser estudado.

Estudar proporções é uma abertura para busca de uma proposta interdisciplinar de ensino. Desta forma, muitos livros didáticos trazem propostas para trabalhos nos quais o conceito de proporção é explorado em diversas ciências, no entanto Garcez (2016) afirma

> É fato afirmar também que há, dentro deste universo, as falsas contextualizações, isto é, onde o autor visando apropriar-se desta proposta interdisciplinar, faz referências a outras áreas do conhecimento sem apresentar de forma explícita e prática para o aluno uma ligação entre elas (GARCEZ, 2016, p. 20).

Com isso existe sim margem para questionarmos como anda o ensino e aprendizagem da proporcionalidade. Nesse momento citamos como exemplo o baixo rendimento do Brasil na última edição do PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes). Entendendo que a concepção de proporcionalidade está presente nas diferentes ciências, áreas e temas dentro da própria matemática, assim, é fática a importância de seu ensino e aprendizagem no currículo escolar do ensino fundamental. Levando em consideração a importância do tema, o resultado do último PISA, realizado em 2022, que foi divulgado em 2023, mostra um baixo desempenho com relação ao aprendizado sobre proporcionalidade, como divulga o g1, portal digital de notícias da Globo em 05/12/2023:

**Figura 1** – Desempenho de alunos brasileiros PISA 2022/item relacionado à proporcionalidade

g1 EDUCAÇÃO

Brasil ocupa últimas posições em ranking do Pisa 2022

Entre os alunos brasileiros de 15 anos (ou seja, que acabaram de cursar o ensino fundamental II), **73% ficaram abaixo do nível 2 em conhecimentos matemáticos** no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes 2022 (Pisa, em inglês), cujos resultados foram divulgados nesta terça-feira (5).


Isso significa que esses adolescentes **não conseguem** fazer operações simples, como:

- **converter moedas:** dizer, por exemplo, quantos reais equivalem a 2 dólares, sabendo que 1 dólar = R$ 4,93;

Fonte: https://g1.globo.com/educacao/noticia/2023/12/05/7-de-cada-10-alunos-brasileiros-de-15-anos-nao-sabem-resolver-problemas-matematicos-simples-mostra-pisa.ghtml

A proporcionalidade está presente não só nos ambientes acadêmicos, escolares, mas está explícita ou não no pensamento do pedreiro com relação à quantidade de dias estimado para concluir um trabalho, levando em consideração à quantidade de pessoas que irão executar o serviço ou no pensamento de uma cozinheira sobre a quantidade da comida a ser feita e o número de pessoas que irão comer. Assim o raciocínio proporcional se mostra útil nas atividades do nosso cotidiano e que seu estudo é de fundamental importância na construção de um pensamento matemático. Esta pesquisa investiga entre outros pontos, dados no decorrer da história e definições sobre proporcionalidade, mostrando diferentes abordagens na resolução de problemas, bem como sua associação a outros temas.

Com relação à importância do desenvolvimento do raciocínio proporcional para um indivíduo, Santos (2016), afirma que:

> Exercer cidadania, é estar preparado para o mundo do trabalho, trata-se de ser capaz de tomar decisões diante da complexidade da sociedade. Nessa perspectiva, a matemática tem papel fundamental visto que a organização social, se tornou tão complexa que a matemática se faz necessária em todos os seus setores; desde os mais complexos e sofisticados, onde são movimentadas altas quantias financeiras e utilizadas as tecnologias mais elaboradas, até setores que para leigos, não possuem influência direta da Matemática, (aparentemente), como postos de saúde, recursos humanos e etc. (SANTOS, 2018, p. 16).

O presente trabalho tem o intuito de pesquisar a proporcionalidade na intenção de responder o seguinte questionamento: Qual a relação da proporcionalidade com o desenvolvimento do raciocínio proporcional? Com essa indagação, analisamos com esta pesquisa, a importância da proporcionalidade no contexto histórico, sua relação a temas da matemática, e diferentes maneiras de abordagens na resolução de situações problemas, assim como sua contextualização em atividades cotidianas, afim de desenvolver o conceito de um pensamento proporcional.

Esse questionamento nos remete a outras questões que direcionam a investigação: 1) O que interfere no desenvolvimento do conceito de proporcionalidade?; 2) É útil o desenvolvimento do pensamento proporcional mesmo que implicitamente na formação de um indivíduo?; 3) É trabalhado o conceito de proporcionalidade em outros tópicos matemáticos?; Entre outras questões.

Para analisarmos como o tema é visto por parte da docência, aplicamos a um grupo de professores um questionário que nos ajudou na elaboração deste trabalho e assim entender como o tema é abordado em sala de aula. O objetivo com esta pesquisa não é sanar todas as demandas na aprendizagem sobre o tema, mas sim debater a proporcionalidade e a obtenção de um raciocínio proporcional.

A proporcionalidade é um tema indubitavelmente importante em Matemática e outras ciências no âmbito escolar, e em diversas situações da atividade humana. Por isso o pensamento proporcional tem sido objeto de estudo em Educação Matemática e em uma de suas especialidades, a Psicologia da Educação Matemática há várias décadas. (Maranhão, Machado, 2011, p. 142)

Esse estudo serve de contribuição para uma reflexão de graduandos e professores de matemática sobre o quanto se faz necessária na formação educacional dos alunos a devida manutenção no planejamento do tema proporcionalidade e conteúdos em que podem serem aplicados o raciocínio proporcional, tendo em vista ser um tema de contextualização com atividades cotidianas e pode servir de interação na construção de um pensamento intuitivo, algébrico, aritmético o que contribui para o desenvolvimento mental dos alunos.

A memorização é sem dúvida uma habilidade importante, mas apenas decorar não contribui substancialmente na aprendizagem, assim, Faria e Maltempi (2020) afirmam que, não queremos dizer que memorizar é algo ruim. Seria terrível se, todos os dias, esquecêssemos tudo que memorizamos no dia anterior. Ter capacidade de armazenar informações é uma qualidade indiscutível. O que defendemos é que as atividades de memorização estejam relacionadas ao raciocínio, ao cálculo mental e à identificação de padrões que levem à formulação de esquemas capazes de resultar em algo que seja válido em diversas situações, com a sistematização do que foi aprendido.

Explicar o caminho encontrado e compartilhar com a turma o procedimento para chegar a um resultado é uma forma dos alunos desenvolverem a autonomia, a criatividade e a capacidade de tomar decisões. Ao raciocinar, conectamos argumentos, fazemos deduções e estabelecemos relações que nos conduzem a reflexões, análises e sínteses. Com o intuito de refletir sobre as questões levantadas com a investigação definiu-se o objetivo geral e objetivos específicos, os quais destacamos adiante.

# 2 PROPORCIONALIDADE MATEMÁTICA NO ENSINO

O estudo de proporcionalidade matemática se mostra relevante na história da humanidade, e sem dúvida no contexto escolar, sendo um dos conteúdos mais associados a outros e ao cotidiano com isso é um tema necessário ao ensino fundamental e demais níveis educacionais. Considerando a legislação educacional, os conceitos de proporcionalidade matemática está presente em diversos conteúdos e se faz presente na construção de noções fundamentais da matemática, bem como nas ações do cotidiano.

## 2.1 PROPORCIONALIDADE NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Homologada em 2017, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC, é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica.

Segundo a BNCC, a matemática está relacionada a diversos fenômenos do cotidiano e sistemáticos de conteúdos estudados na educação básica.

> A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetivos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos (BRASIL, 2017, p. 265).

Nessa linha, de relacionar conteúdos e temas na matemática e outras ciências, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, elaborados pelo MEC, define como umas de suas propostas essa correlação de temas.

Propõe novo enfoque para o tratamento da álgebra, apresentando-a incorporada aos demais blocos dos conteúdos, privilegiando o desenvolvimento do pensamento algébrico e não o exercício mecânico do cálculo (BRASIL, 1998, p. 60).

Sendo a proporcionalidade matemática talvez um dos conteúdos que mais se relacionam a outros temas e também a situações do cotidiano humano, se fazendo de fundamental importância na assimilação de assuntos estudados e fortalecendo organização do pensamento e concretização da interpretação dos estudantes, a BNCC afirma que:

> A proporcionalidade, por exemplo, deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc. (BRASIL, 2017, p. 268).

Nesse sentido, defende-se que a proporcionalidade é de grande importância na compreensão e desenvolvimento do conhecimento, é citada pela BNCC como necessária e fundamental a assimilação e apropriação de tal saber matemático. Com referência ao Ensino Fundamental, anos finais, a BNCC, sugere que o estudo da matemática seja dividido em cinco unidades temáticas, são elas: Número, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística. Sobre a temática Álgebra a BNCC afirma que: As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade (BRASIL, 2017, p. 270).

> As orientações oficiais também fornecem elementos para que o trabalho docente e a aprendizagem considerem o aspecto integrado e integrador dos conteúdos. Partindo de uma determinada situação ou de um determinado assunto, deve-se procurar evidenciar as conexões entre os conteúdos. (Costa e Allevato, 2015, p. 06)

Além da BNCC e dos PCN mencionarem a importância do desenvolvimento do raciocínio proporcional, podemos citar diversos conteúdos no ensino fundamental e médio que utilizam o conceito de proporcionalidade.

No Ensino Fundamental, temos na matemática a Matemática Comercial, Função do 1º grau, Geometria Plana; Em Geografia, a Escala, Densidade demográfica; Ciências, Química, a Lei das proporções definidas, Lei de Proust, na Física, o Princípio da conservação de energia, Leis de Newton, Gravitação Universal.

No Ensino Médio, é visto na matemática, a Função afim, Progressão aritmética, Matemática comercial, Geometria Plana; Em Geografia, Escala, Densidade demográfica; Física, as Leis de Newton, Princípio da conservação de energia, Lei geral dos gases, Termodinâmica, Ondulatória; Em Química, a Lei das Proporções Constantes, Cálculo Estequiométrico.

Nesse sentido, entendendo-se que o conceito de proporcionalidade que se mostra tão necessário na matemática e em outras disciplinas e acreditando que esse conceito deve ser estabelecido principalmente no ensino fundamental, buscaremos mais adiante, neste trabalho relacionar alguns conteúdos do ensino fundamental ao raciocínio proporcional, desenvolvendo questões não só por regra de três, mas pelo método da falsa posição, pelo teorema fundamental da proporcionalidade e também pelo método da redução à unidade.

Assim, se tratando de um tema relevante, qual a visão de professores sobre o ensino e aprendizagem da proporcionalidade matemática? Para entender isso, aplicamos um questionário há um grupo de professores graduados em matemática, especialistas ou cursando mestrado de redes públicas e privadas de algumas cidades do estado do Piauí e do Maranhão.

## 3 PROPORCIONALIDADE: FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Muitos estudos foram analisados com relação à proporcionalidade matemática. Muitos destes enfatizam a importância deste tema na construção de um pensamento matemático. Considerar que a proporcionalidade está presente nas mais variadas situações não é difícil por parte do docente, os livros atuais também trazem a contextualização do tema proporcionalidade, além dos documentos educacionais apontarem a importância do ensino e aprendizagem deste tema, o que mostra de forma geral a concepção que o entendimento dessa temática é de fato útil e possível no ensino e aprendizagem da matemática.

### 3.1 RELEVÂNCIA DO CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE

Ao parar para pensar em como a matemática está relacionada com todas as atividades do dia a dia, não fica difícil conseguir perceber que a proporcionalidade está nas mais diversas situações desenvolvidas pelo ser humano, e mesmo para quem não consegue ver de forma explicita, certamente utiliza o pensamento proporcional em muitos momentos do seu dia. Essa concepção está registrada em muitos momentos da história de povos da antiguidade ao longo dos tempos, segundo BEIRAL (2017).

> Quando se volta a atenção para a história da matemática vê-se que os conceitos de razão e proporção tiveram dois papeis distintos e fundamentais no desenvolvimento da própria matemática, seja nos seus aspectos mais teóricos ou nos mais práticos. Além disso, tiveram uma importância na estruturação da compreensão de outras áreas de conhecimentos pela matemática. (BEIRAL, 2017, p. 02)

Lima, Andrade e Alcântara (2018) apontam que, ainda na antiguidade, em 1650 a. C. foi escrito o principal texto matemático, o Papiro de Rhind, com regras para realizar cálculos de adições, subtrações, frações, equações simples, problemas de aritmética e medições de superfícies e volumes, inclusive problemas que envolviam ideia de proporcionalidade, no qual grande parte dos problemas eram resolvidos pelo método da falsa posição. Método este que mencionamos com mais detalhes no decorrer desta pesquisa.

Com essa observação, os autores destacam que o interesse pela proporcionalidade acontece no decorrer da história da humanidade, quando menciona que "*podemos notar que desde os primórdios da história, a proporcionalidade já era utilizada*" (LIMA, ANDRADE, ALCÂNTARA, 2018, p. 01), evidenciando que em suas visões, a proporcionalidade se faz relevante no estudo ao longo dos tempos.

A matrizes de referências de matemática para o SAEB trazem para a o 5º e 9º Ano, além de para a 3ª Série do ensino médio em seus descritores o tema proporcionalidade. 5º Ano – o descritor D20, resolver problemas com números naturais, envolvendo diferentes significados da multiplicação ou divisão: multiplicação comparativa, ideia de proporcionalidade, configuração retangular e combinatória; 9º Ano – o descritor D29, resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas; 3ª Série – o descritor D15, resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas. Além de tantos outros temas cobrados no SAEB que já foi mencionado que fazem uso do pensamento proporcional.

Proporcionalidade está entro os conteúdos que mais caem no ENEM, fazendo parte da Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias – H16 resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

## 3.2 PROPORCIONALIDADE, CONTEXTO HISTÓRICO

A palavra proporção vem do latim "proportio" e quer dizer relação comparativa, analogia. A proporcionalidade tem participação na história de povos na antiguidade, assim, observamos registros de aplicação do pensamento proporcional no antigo Egito, através do Papiro Rhind. De acordo com D'Ambrosio, (1999, p. 05) "Não se pode entender o desenvolvimento da matemática [...] sem uma análise do processo de conquista e colonização e de suas consequências".

Ao longo história da matemática, os conceitos de razão e proporção se mostram fundamentais tanto na teoria como na prática para o progresso matemático. Aspectos que se fazem importantes para o desenvolvimento de outras áreas do conhecimento.

Esta seção tem como objetivo apresentar como eram feitos cálculos pelos antigos egípcios em um importante momento da história da matemática, trazendo informações do Papiro de Rhind e sobre o método da falsa posição.

Um importante documento encontrado por volta de 1850, em Luxor, no Egito, pelo advogado e antiquário escocês Alexander Henry Rhind, e que hoje está exposto no Museu Britânico em Londres, o Papiro de Rhind, datado de cerca de 1650 a. C. e que tem aproximadamente 5,5m de comprimento e 0,32m de largura, é composto com 85 problemas sobre aritmética, frações, cálculos de áreas, volumes, progressões, repartições proporcionais, regra de três simples, equações lineares e trigonometria básica.

O estudo sobre o conceito de proporcionalidade está fundamentado, basicamente, na História da Matemática, que investiga a Matemática enquanto ciência em construção, levando em consideração os aspectos sociais e culturais os quais exercem forte influência na construção deste conhecimento (COSTA JÚNIOR, 2013).

Assim, o conceito de proporcionalidade está presente no método da falsa posição, que consiste em um procedimento de tentativas e erros para encontrar um valor desconhecido chamado de aha (RAMOS DE LIMA, J. V., 2018).

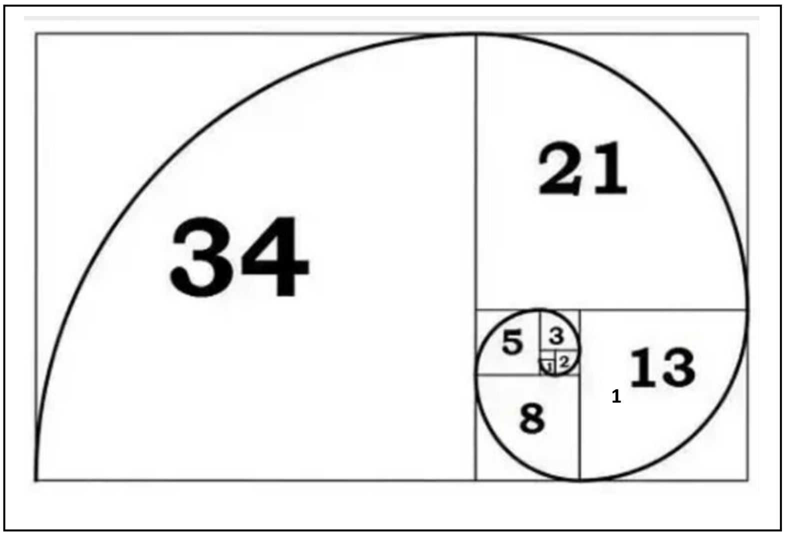
## 3.3 PROPORCIONALIDADE, PERCEPÇÃO VISUAL

Ao observarmos construções feitas pelo homem e a natureza, é possível perceber alguns padrões relacionados à medidas que nos proporcionam uma visão harmoniosa, agradável. Com essa percepção, pode-se encontrar a famosa proporção áurea ou número de ouro que tem o valor aproximado 1,61803398875 e que a representação é dada pela letra grega $\varphi$ (fi), nas mais variadas situações.

Tal proporção foi descoberta já na Grécia antiga, mas foi só em 1202 que o matemático Leonardo Fibonacci (1170 – 1250) apresentou em um livro a famosa Sequência de Fibonacci, que funciona da seguinte maneira: para todo n da sequência, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ sendo n natural. Até aqui temos uma sequência de números interessantes, todavia percebeu-se que o quociente entre dois números da sequência $a_{n+1}$ e $a_n$, resultava em um número próximo da proporção áurea, onde à medida em que se aumentava os valores dos números presentes no quociente, mais próximo ficava do número de ouro! (SOUSA, D.; FESTA, M.; BASSINI, A).

A partir da sequência de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, .... ao serem construídos quadrados com lados com as medidas de seus elementos, pode ser construído um retângulo, conhecido como Retângulo de Ouro. A partir desse retângulo é possível estabelecer a construção da Espiral de Fibonacci como podemos observar a seguir. Ao desenharmos um arco dentro desse retângulo, obtemos a Espiral de Fibonacci:

**Figura 2:** Espiral de Fibonacci




Fonte: https://www.vivadecora.com.br/pro/proporcao-aurea/

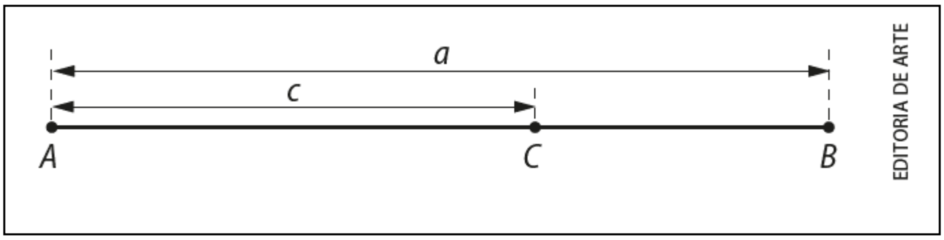
A proporção áurea pode ser calculada de diferentes maneiras, mas uma das formas mais comuns é pela divisão de uma linha em dois segmentos, em que a razão entre o comprimento total da linha e o comprimento do maior segmento seja igual à razão entre o comprimento de maior segmento e o comprimento de menor seguimento. (Oliveira, R. R., s.d.)

A forma citada no parágrafo anterior como uma das maneiras de calcularmos a razão áurea é mencionada também por Bonjorno, Giovanni e Câmara:

> A razão áurea é um caso particular da proporcionalidade entre segmentos. Para determiná-la, dividimos um segmento em média e extrema razões. Para isso, dado um segmento *AB* de medida *a*, precisamos determinar o ponto *C* tal que $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$. (Bonjorno, Giovanni Jr. e Sousa, 2020, p. 12)

A seguir temos um segmento destacado na citação anterior:

**Figura 3:** Segmento de reta dividido de forma proporcional




Fonte: Bonjorno, Giovanni Jr. e Sousa, Prisma, FTD, 2020

**Figura 4**: Proporção Áurea através da fórmula de Bháskara

Fazendo os cálculos, obtemos $\frac{a}{c} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}62.$

Fonte: Bonjorno, Giovanni Jr. e Sousa, Prisma, FTD, 2020

Demonstração:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{a-c}$$

$\Rightarrow a^2 - ac = c^2$ (dividindo a equação por $ac$)

$$\Rightarrow \frac{a^2}{ac} - \frac{ac}{ac} = \frac{c^2}{ac}$$

$\Rightarrow \frac{a}{c} - 1 = \frac{c}{a}$ (como $\frac{a}{c} = \varphi$, que é a razão áurea), temos:

$$\Rightarrow \varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$$

$$\Rightarrow \ \varphi^2 - \ \varphi = 1$$

$$\Rightarrow \ \varphi^2 - \ \varphi - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \ \Delta = (-1)^2 - 4\,.\,1\,.\,(-1)$$

$$\Rightarrow \ \Delta = 5$$

Concluindo assim que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sim 1{,}62$

É indiscutível que a proporcionalidade ao longo da história se faz presente e indispensável tanto em situações do cotidiano quanto na matemática escolar.

O conceito de proporcionalidade é fundamental não só no contexto escolar, mas também no cotidiano das pessoas. Ele é importante para lidar com várias situações do mundo, para estudar e compreender outras áreas do conhecimento, além de contribuir para o desenvolvimento cognitivo dos indivíduos. (Beiral, p. 1; 2017).

## 3. 4 PROPORCIONALIDADE: IDENTIFICAÇÃO

Ao analisarmos duas ou mais grandezas, devemos entender se são proporcionais ou não, pois o fato de uma aumentar e a outra também aumentar, ou ainda, uma diminuir e a outra também diminuir, não é garantia de termos grandezas proporcionais. Vejamos se acontece proporcionalidade nos casos abaixo retirados de uma vídeo aula do canal do IMPA, apresentada pelo Professor Doutor Paulo Cezar Pinto Carvalho exibida no Youtube.

Exemplo I:

Uma quantia de R$ 10.000,00 aplicada na poupança por um certo período rendeu R$ 820,00. Qual seria o rendimento se a quantia aplicada fosse de R$ 15.000,00?

Observemos que ao aplicar R$ 20.000,00, é como se aplicássemos R$ 10.000,00 em contas diferentes, e como cada uma renderia R$ 820,00, o rendimento das duas contas seria de R$ 1.640,00 o que equivale a duas vezes R$ 820,00. Se a aplicação fosse de R$ 30.000,00, seria como se aplicássemos R$ 10.000,00 em três contas diferentes e assim o rendimento seria de R$ 820 em cada uma das três, ou seja, três vezes R$ 820,00. Logo a situação nos remete grandezas proporcionais.

Exemplo II:

Uma quantia aplicada na poupança por 3 meses rendeu R$ 150,00. Qual será o rendimento se ela ficasse aplicada 5 meses?

Nesse caso, mesmo considerando a taxa de juros igual em todo o período, após três meses o rendimento foi de R$ 150,00, e no período dos dois meses seguintes o rendimento já não seria mais em cima do valor original. Logo não temos grandezas proporcionais, mesmo um aumentando e a outra também.

## 4 DIFERENTES ABORDAGENS, GENERALIZAÇÕES

Como já mencionado, o conceito de proporcionalidade está em diversas situações, no Ensino fundamental, há vários outros temas que é aplicado o pensamento proporcional e que muitas vezes não é explicitado para os alunos tal relação. Outro ponto a ser observado é o fato de questões sobre grandezas, serem desenvolvidas apenas por regra de três. Com isso, Luiz Júnior (2016) entende que:

> É oportuno refletir se apenas este método de resolução capacita os educandos de forma a desenvolver integralmente a habilidade de solucionar problemas contextualizados e reais envolvendo os conceitos de proporcionalidade. Desenvolver diferentes métodos de resolução é possibilitar diferentes visualizações e interpretações de uma mesma situação, aumentando assim o nível cognitivo do estudante sobre o conceito abordado. (Luiz Júnior; 2016; p. 5).

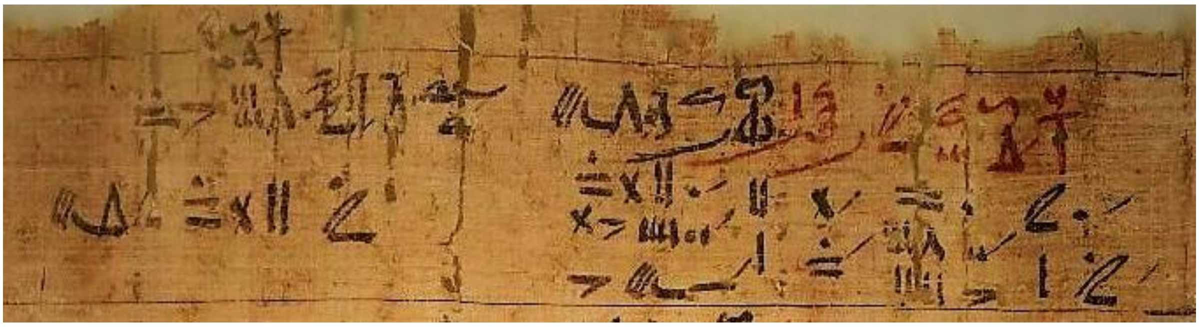
Nesse contexto, a seguir, mencionamos diferentes maneiras de desenvolver questões envolvendo grandezas, além de aplicação do pensamento proporcional a outros tópicos, bem como generalizações e demonstrações de importantes teoremas, mostrando que a proporcionalidade é eixo integrador a vários temas matemáticos.

## 4.1 MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO

O método da falsa posição pode fornecer uma maneira de resolver equações aritmeticamente, ou seja, sem procedimentos algébricos, e foi usado em diversos momentos da história. Foi dada a solução, por falsa-posição, para uma equação em simbolismo atual por $ax = b$. Escolhido um valor arbitrário $x_0$ para $x$ e calculou-se o valor de $ax_0$, que foi chamado de $b_0$. Na prática, procurou-se escolher esse valor inicial de um modo que facilite as contas. Em seguida, investigamos por que número deveríamos multiplicar $b_0$ para obter $b$ e chegamos a $a\,.\,\frac{b}{b_0}$. Para manter inalterada a igualdade $ax_0 = b$, deve-se multiplicar esse mesmo número por $x_0$. Obtendo, assim, que $a\,.\left(x_0\,.\,\frac{b}{b_0}\right) = b_0\,.\frac{b}{b_0} = b$. Logo, a solução de $ax = b$ deve ser $\left(x_0\,.\,\frac{b}{b_0}\right)$. (Roque, 2012, p. 64). A seguir apresenta-se um fragmento do problema 24 do Papiro de Rhind.

**Figura 5:** Fragmento do Papiro de Rhind

**Problema 24 – *B. M. Facs.* Plate IX** © Trustees of the British Museum



Fonte: Revista Brasileira de História da Matemática. Vol. 18, nº 26, p. 11-29, 2018.

Veja a seguir, o desenvolvimento do problema 24 encontrado no Papiro de Rhind.

Problema 24: Uma quantidade e seu 1/7 somados fazem 19. Qual é a quantidade?

Traduzindo para o simbolismo atual tem-se: $x + \frac{1}{7}x = 19$, para facilitar, faz-se $x_0 = 7 = x$, obtendo 8, mas $8 \neq 19$.

$a\,.\left(x_0\,.\frac{b}{b_0}\right)$, como $a\,.x_0 = b_0$, $a\,.\left(x_0\,.\frac{b}{b_0}\right) = b_0\,.\frac{b}{b_0} = b$, assim, $\frac{8}{7}\,.\left(7\,.\frac{19}{8}\right) = 19$, ou seja, a solução é $7\,.\frac{19}{8} = \frac{133}{8}$, pois:

$$7\,.\ \frac{19}{8} + \frac{1}{7}\,.7\,.\frac{19}{8} = \frac{133}{8} + \frac{19}{8} = \frac{152}{8} = 19$$

Portanto, a solução para $x + \frac{1}{7}\,x = 19$ é $\frac{133}{8}$ .

## 4.2 TEOREMA FUNDAMENTAL DA PROPORCIONALIDADE

A seguir apresenta-se a ferramenta matemática que nos auxilia na estruturação e definição da proporcionalidade matemática, e observa-se que alguns dos conceitos analisados são pré-requisitos e podem inclusive serem mostrados no ensino médio.

**1- Definição:** Suponhamos que duas grandezas $x$ e $y$ estão relacionadas por uma função que a cada valor de $x$ se associe de forma bem determinado um único valor $y$. Assim, obtemos que $y$ é função de x e portanto temos que $y = f(x)$.

**2- Definição:** Dada uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$, com $X \subset \mathbb{R}$, nomeamos essa função como:

I – Crescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

II – Decrescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;

III – Monótona não-decrescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;

IV – Monótona não-crescente quando $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$;

**3- Definição:** (Grandezas diretamente proporcionais) Suponha duas grandezas $x$ e $y$, de forma que $y = f(x)$. Diz-se que $y$ é diretamente proporcional à $x$ quando são satisfeitas as seguintes condições:

I – $y$ é uma função crescente de $x$;

II – Se $y = f(x)$, então $c\,.\,f(x) = f(c\,.\,x)$ para todo $c \in \mathbb{R}_+$.

**4- Definição:** (Grandezas inversamente proporcionais) Suponha duas grandezas $x$ e $y$, de forma que $y = f(x)$. Diz-se que $y$ é inversamente proporcional à $x$ quando são satisfeitas as seguintes condições:

I – $y$ é uma função decrescente de $x$;

II – Se $y = f(x)$, então $\frac{f(x)}{c} = f(c\,.\,x)$ para todo $c \in \mathbb{R}_+^*$, sendo $\mathbb{R}_+^*$ o conjunto dos números reais positivos.

**5- Definição:** Uma proporcionalidade é uma função $f: X \to \mathbb{R}$, com $X \subset \mathbb{R}$, tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ tem-se $f(c\,.\,x) = c.f(x)$ proporcionalidade direta ou temos $f(c\,.\,x) = \frac{f(x)}{c}$, se $c \neq 0$ proporcionalidade inversa.

**6 - Teorema:** Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.

(2) Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(Logo $f(cx) = cf(x)$ para quaisquer $c, x \in \mathbb{R}$.

(3) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

A demonstração consiste em (1) ⇒ (2), (2) ⇒ (3) e (3) ⇒ (1).

I – (1) ⇒ (2). Seja $r \in \mathbb{Q}$, $r = \frac{p}{q} \Rightarrow p = rq$, com $p, q \in \mathbb{Z}$

$$f(nx) = nf(x) \Rightarrow f(rq) = qf(r)$$

$$qf(r) = f(rq) = f(p) = f(p.1) = p.a$$

$$qf(r) = p.a \Rightarrow f(r) = \frac{p}{q}.a \Rightarrow f(r) = ar$$

Logo (1) ⇒ (2) $\forall\, r \in \mathbb{Q}$

Mostra-se agora que se $f(x) = ax\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, então (1) ⇒ (2) $\forall\, x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$

Suponha por absurdo que $f(x) \neq ax$.

Então, $f(x) < ax$ ou $f(x) > ax$.

Para $f(x) < ax$, temos:

Dividindo ambos os membros da desigualdade por $a$.

$$\frac{f(x)}{a} < \frac{ax}{a} \Rightarrow \frac{f(x)}{a} < x \Rightarrow \frac{f(x)}{a} < r < x$$

Multiplicando ambos os membros das desigualdades por $a$.

$$\frac{f(x)}{a}.a < a.r < a.x \Rightarrow \frac{f(x)}{a} < ar < ax \text{ (absurdo)}$$

Pois $f(x) > f(r)$ por ser uma função crescente e por $r < x$.

Para $\frac{f(x)}{a} > ax$, temos:

$$\frac{f(x)}{a} > \frac{ax}{a} \Rightarrow \frac{f(x)}{a} > x \Rightarrow \frac{f(x)}{a} > r > x$$

$$\frac{f(x)}{a}.a > a.r > a.x \Rightarrow f(x) > ar > ax \text{ (absurdo)}$$

Pois, $f(r) > f(x)$

Então, $f(x) = ax$, para todo $x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$.

Assim, $f(x) = ax \; \forall \; x \; \in \; \mathbb{R}$. Portanto (1) ⇒ (2) $\forall \; x \; \mathbb{R}$.

II – (2) ⇒ (3). Supondo $f(x) = ax$ verdade, então,

$f(x+y) = f(x) + f(y), \; \forall \; x, y \; \in \; \mathbb{R}$.

Substituindo $x$ por $x + y$, temos

$$f(x) = ax \; \Rightarrow f(x+y) = a(x+y) = ax + ay \; \Rightarrow$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad \forall \; x, y \; \in \; \mathbb{R}.$$

Logo, (2) ⇒ (3).

III – (3) ⇒ (1).

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \; \Rightarrow f(x) = f(x+y) - f(y) \Rightarrow$$

$$n.f(x) = n[f(x+y) - f(y)]$$

$$f(n.x) = n.f(x) + n.f(y) - n.f(y)$$

$$f(n.x)n.f(x), \qquad \forall \; n \; \in \; \mathbb{Z} \; e \; x \; \in \; \mathbb{R}.$$

Logo, (3) ⇒ (1).

**7 – Corolário:** Se $f(c\,.x) = c.f(x)$, para quaisquer $c, x \; \in \; \mathbb{R}$, então $f(x) = ax$, e $a = f(1)$.

Demonstração: Pelo TFP temos que $f(x) = a.(cx)$, logo podemos afirmar que $f(cx) = a.(cx) = c.(ax) = c.f(x)$,bastando tomar $a = f(1)$.

Assim, para atestar que $f$ é uma proporcionalidade, basta verificar 1 e 2 do TFP.

**8- Teorema:** As afirmações seguintes sobre $y = f(x)$ são equivalentes:

I – $y$ é diretamente proporcional a $x$;

II – Existe um número $k$, chamado de constante de proporcionalidade entre $x$ e $y$, tal que $f(x) = k.x$ para todo $x$.

Demonstração:

$I \implies II$: Como $y$ é diretamente proporcional a $x$, temos que $f(cx) = c.f(x)$, logo, pelo TFP, temos que dado $a = f(1)$, $f(x) = f(x.1) = x.f(1) = ax$.

Portanto, basta que $k = f(1)$.

$II \implies I$: Pelo TFP, temos que $k = f(1) > f(0) = f(0.0) = 0.f(0) = 0$. Assim $x < x' \implies kx < kx'$, logo $f(x) < f(x')$, o que nos garante que $f$é crescente.

Ainda pelo fato de $f(cx) = kcx = c.f(x)$ nos garante que $y = f(x)$ é diretamente proporcional a $x$. Para $k < 0$, $k = f(1)$, $x < x' \implies kx > kx'$, logo $f(x) > f(x')$.

**9 - Teorema:** As afirmações seguintes sobre $y = f(x)$ são equivalentes:

$I$ – $y$ é inversamente proporcional a $x$;

$II$ – Existe um número $k$, chamado de constante de proporcionalidade entre $x$ e $y$, tal que $f(x) = \frac{k}{x}$ para todo $x$.

Demonstração: Basta afirmar que se $y$ é inversamente proporcional a $x$, então $y$ é diretamente proporcional a $\frac{1}{x}$ com $x \neq 0$ e seguir procedimento análogo a demonstração do teorema anterior.

**10 – Teorema:** Definição: Se w é uma função das variáveis $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$; com $n \in \mathbb{N}$ [$w = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$], diremos que:

a. $w$ é diretamente proporcional a $x_1$ quando:

$I$ – Para quaisquer valores fixados de $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, a grandeza $w$ é uma função crescente de $x_1$. [$x_1' < x_2'' \rightarrow f(x_1', x_2, x_3, \dots, x_n) < f(x_1'', x_2, x_3, \dots, x_n)$];

$II$ – Para quaisquer $x_1', x_2, x_3, \dots, x_n$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se $f(n.x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = n.f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

b. $w$ é diretamente proporcional a $x_1$ quando:

$I$ – Para quaisquer valores fixados de $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, a grandeza $w$ é uma função decrescente de $x_1$. $[x_1' < x_2'' \rightarrow f(x_1', x_2, x_3, \dots, x_n) > f(x_1'', x_2, x_3, \dots, x_n)]$;

$II$ – Para quaisquer $x_1', x_2, x_3, \dots, x_n$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se $f(n. x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{n}$.

**11 – Teorema:** Seja $w = f(x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n)$ com $n, p \in \mathbb{N}$. As seguintes afirmações são equivalentes:

$I$ – $w$ é diretamente proporcional a $x_1, x_2, \dots, x_n$ e inversamente proporcional a $x_{p+1}, \dots, x_n$;

$II$ – Existe uma constante de proporcionalidade $k$ tal que $w = k. \frac{x_1, x_2, \dots, x_p}{x_{p+1}, \dots, x_n}$.

Demonstração:

$(I \Longrightarrow II)$ Por $w = f(x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n)$ e pelo TFP temos a equivalência $w = \frac{x_1, x_2, \dots, x_p}{x_{p+1}, \dots, x_n} . f(1, 1, 1, \dots, 1)$. Basta tomar $k = f(1, 1, 1, \dots, 1)$.

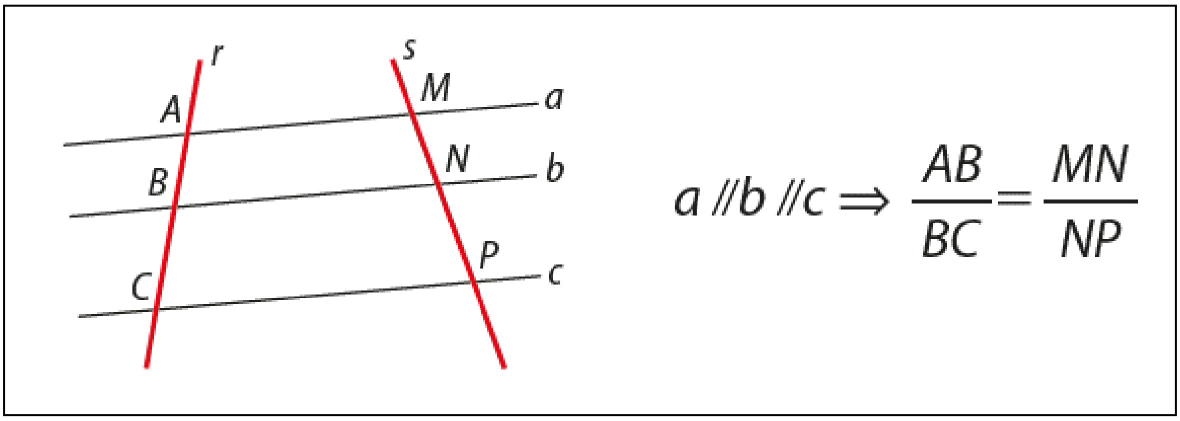
$(II \Longrightarrow I)$ Este passo segue de imediata demonstração a partir da aplicação de 8 e 9.

## 4.3 TEOREMA DE TALES

Uma utilização do raciocínio proporcional em Geometria é o Teorema de Tales, onde segundo Bonjorno, Giovanni Jr. e Sousa (2020, p. 14) “ se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então dois segmentos quaisquer de uma das retas transversais são proporcionais aos segmentos correspondentes da outra”.

Vejamos a seguir:

**Figura 6**: Retas r e s transversais a um feixe de retas paralelas a, b e c




Fonte: Bonjorno, Giovanni Jr. e Sousa (2020).

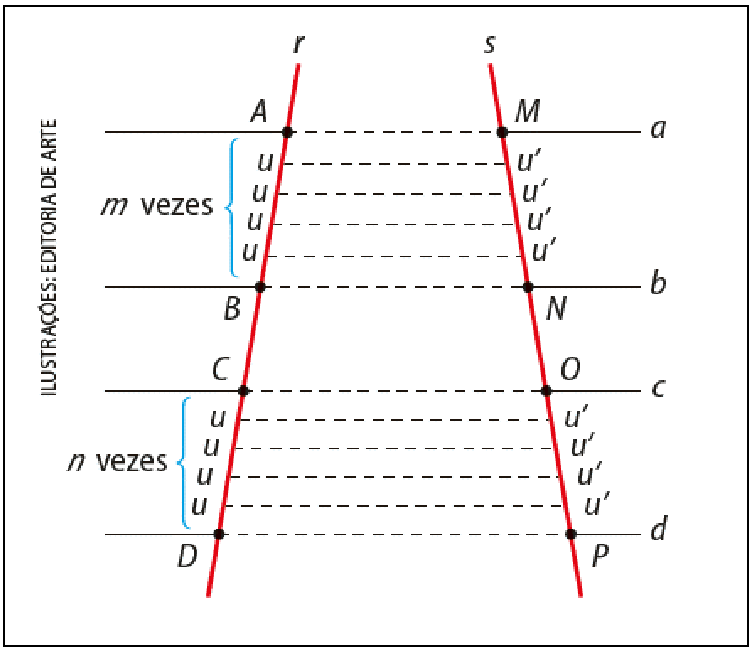
Demonstração:

No mesmo livro da Figura 6, Bonjorno, Giovanni Jr. e Sousa mostra que esse teorema para o caso em que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis, ou seja, existe um segmento $u$ que é um submúltiplo comum desses segmentos, e no caso em que os segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{OP}$, também são comensuráveis, ou seja, existe um segmento $u'$ que é submúltiplo comum desses segmentos. No entanto, o teorema de Tales também é válido no caso em que os pares de segmentos são incomensuráveis, isto é, para segmentos que não têm esse submúltiplo comum. Assim:

Se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas e um segmento de uma delas é dividido pelo feixe em $p$ partes congruentes entre si, então o segmento correspondente da outra transversal também é dividido em p partes congruentes entre si.

Considerando duas retas $r$ e $s$, transversais a um feixe de retas paralelas, como mostra a figura.

**Figura 7:** Retas transversais a um feixe de retas paralelas




Fonte: Bonjorno, Giovanni Jr. e Sousa (2020).

Vamos supor que exista um segmento de medida $u$ e dois números inteiros $m$ e $n$ tais que: $AB = m\,.\,u$ e $CD = n\,.\,u$

Estabelecendo a razão $\dfrac{AB}{CD}$, temos: $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{m\,.\,u}{n\,.\,u} = \dfrac{m}{n}\ (I)$

Traçando pelas retas paralelas ao feixe, pelos pontos que dividem $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, pela propriedade enunciada anteriormente, $\overline{MN}$ e $\overline{OP}$ ficam divididos, respectivamente, em $m$ e $n$ partes iguais a $u'$. Assim, temos: $\dfrac{MN}{OP} = \dfrac{m\,.u\prime}{n\,.u\prime} = \dfrac{m}{n}\ (II)$

Comparando $(I)$ e $(II)$, obtemos: $\dfrac{AB}{OP} = \dfrac{MN}{OP}$.

## 4.4 REGRA DE TRÊS

I – Dada uma proporcionalidade direta $a = kb$ com $a' \Rightarrow b'$ e $a'' \Rightarrow\ b''$, logo,

$$\frac{a'}{a''} = \frac{b'}{b''}$$

II – Dada uma proporcionalidade inversa $a = \frac{k}{b}$ com $a' \Rightarrow b'$ e $a'' \Rightarrow b''$, logo,

$$\frac{a'}{a''} = \frac{b''}{b'}$$

III - Dada uma proporcionalidade mista $a = k.\frac{b1\ ,b2,\dots bn}{bp+1,\dots bp+n}$ com

$$b'_1, b'_2, \dots, b'_p, b'_{p+1}, \dots, b'_n \ \rightarrow b' \text{ e } b''_1, b''_2, \dots, b''_p, b''_{p+1}, \dots, b''_n \ \rightarrow \ b'', \text{ logo,}$$

$$\frac{a'}{a''} = \frac{b'_1}{b''_1} \cdot \frac{b'_2}{b''_2} \cdot \dots \cdot \frac{b'_p}{b''_p} \cdot \frac{b'_{p+1}}{b''_{p+a}} \cdot \dots \cdot \frac{b'_n}{b''_n}$$

Demonstração:

I – Por hipótese $a' = k\,.\,b'$ e $a'' = k\,.\,b''$, logo, $k = \frac{a'}{b'}$ e $k = \frac{a''}{b''}$. Portando $\frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$ .

II - Por hipótese $a' = k\,.\,b'$ e $a'' = k\,.\,b''$, logo, $k = a'.b'$ e $k = a''.b''$. Portando $\frac{a'}{a''} = \frac{b''}{b'}$
.

III – Por hipótese $a' = k\,.\frac{b'_1,\, b'_2,\dots,b'_p}{b''_{p+1},\dots,b'_n}$ e $a'' = k\,.\frac{b''_1,\, b''_2,\dots,b''_n}{b''_{p+1},\dots,b''_n,}$ , logo,

$$k = a'.\frac{b''_{p+1},\dots,b'_n}{b'_1,\, b'_2,\dots,b'_p} \text{ e } \ k = a''.\frac{b''_{p+1},\dots,b'_n}{b'_1,\, b'_2,\dots,b'_p}$$

Portanto, $\frac{a'}{a''} = \frac{b'_1}{b''_1} \cdot \frac{b'_1}{b''_1} \cdot \frac{b'_2}{b''_2} \cdot \dots \cdot \frac{b'_p}{b''_p} \cdot \frac{b'_{p+1}}{b''_{p+1}} \cdot \dots \cdot \frac{b'_n}{b''_n}$

## 4.5 REDUÇÃO À UNIDADE

Uma forma de buscar diversificar estudos é mostrando raciocínios diferentes dos comumente utilizados. A proporcionalidade é muitas vezes reduzida à regra de três, inclusive tradicionalmente nos livros didáticos. Uma maneira diferente de trabalhar o raciocínio proporcional é através de um método pouco utilizado que é a redução à unidade. Nele, reduzimos uma das grandezas à unidade e depois comparamos com o que buscamos.

Dadas as grandezas $a, b, c, d$ sendo elas diretamente proporcionais de tal forma que $a$ está para $b$, assim como $c$ está para $d$, temos então que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Aplicando a redução à unidade:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $a$ | $c$ | |
| $\div\, a$ | | | $\div\, a$ |
| | $1$ | $\frac{c}{a}$ | |
| $\times\, b$ | | | $\times\, b$ |
| | $b$ | $d$ | |

Assim, observamos que $d = \frac{c}{a} \,.\, b$

Dadas as grandezas $a, b, c, d$ sendo elas inversamente proporcionais de tal forma que $a$ está para $b$, assim como $c$ está para $d$, temos então que:

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$$

Aplicando a redução à unidade:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $a$ | $c$ | |
| $\div a$ | | | $\times a$ |
| | $1$ | $c \,.\, a$ | |
| $\times b$ | | | $\div b$ |
| | $b$ | $d$ | |

Portando, $b = \frac{a\,.\,c}{d}$

## 4.6 PROPORCIONALIDADE E PROBABILIDADE

O estudo da probabilidade é a análise de experimentos aleatórios. Espaço amostral é o conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Se todos os resultados têm a mesma chance de ocorrer, o espaço amostral é chamado de equiprovável. A probabilidade de um evento A ocorrer é a razão entre o número de elementos do conjunto A e o número de elementos do espaço amostral: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$. (RIZZO, s.d.)

Quando calculamos probabilidade, estamos associando um grau de confiança à ocorrência de resultados possíveis de experimentos, cujos resultados não podem ser determinados antecipadamente. Assim, a probabilidade é a medida da chance de algo acontecer. O cálculo da probabilidade associa a ocorrência de um resultado a um valor que varia de 0 a 1 e, quanto mais próximo de 1 estiver o resultado, maior é a certeza de sua ocorrência. (ASTH, s.d.).

### 4.6.1 TIPOS DE PROBABILIDADES:

A probabilidade é uma ferramenta muito utilizada em vários setores da sociedade, inclusive para a distribuição de políticas públicas e é um tópico matemático que também se relaciona à proporcionalidade. Além da probabilidade clássica, há também a probabilidade empírica e a probabilidade subjetiva.

> A probabilidade clássica supõe um espaço amostral equiprovável para o cálculo de probabilidades. A probabilidade empírica ( ou frequentista ) considera que o cálculo de probabilidade deve ser realizado a partir de repetições do experimento e análise dos resultados. A probabilidade subjetiva se baseia em ideias, crenças e julgamentos pessoais. Consequentemente, o cálculo de probabilidade em determinado contexto pode variar de uma pessoa para outra. (RIZZO, s.d.)

Observando a relação entre a probabilidade do evento A, o número de possibilidades desse evento ocorrer e o conjunto de todas as possibilidades que podem ocorre que:

Sendo, $0 \leq$ P(A) $\leq 1$; $P(A) = \frac{a}{b}$, com $b \neq 0$, $a < b$, como $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$, temos:

$n(\mathrm{A})$ está para $n(\Omega)$ assim como $a$ para $b$.

Exemplo:

Um sorteio será feito entre um número desconhecido de mulheres, 22 homens e 4 crianças. Sabe-se que a probabilidade de um homem ser sorteado é $\frac{2}{3}$. Juntando homens, mulheres e crianças, qual o número de pessoas participantes do sorteio?

$n(\Omega) = ?$ $\quad P(A) = \frac{2}{3}$ $\quad n(A) = 22$, logo

$$\frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{a}{b}\text{, logo, } \frac{22}{n(\Omega)} = \frac{2}{3} \therefore n(\Omega) = 33$$

Olhando com um raciocínio proporcional, temos que o número de homens $(22)$ está para o número de pessoas do espaço amostral $n(\Omega)$, assim como $2$ está para $3$.

Utilizando o método da redução à unidade:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $22$ | $2$ | |
| $\div 2$ | | | $\div 2$ |
| | $11$ | $1$ | |
| $\times 3$ | | | $\times 3$ |
| | $x = ?$ | $3$ | |

Conclui-se assim que $x = \frac{22}{2} . 3 = 33$

## 4.7 PROPORCIONALIDADE E EQUAÇÃO DO 1º GRAU

Mais uma vez, se faz necessário citar o Papiro de Rhind, mostrando de fato a sua importante contribuição para a matemática.

O primeiro indício do uso de equações está relacionado, aproximadamente, ao ano de 1650 a. C., no documento denominado Papiro de Rhind, adquirido por Alexander Henri Rhind, na cidade Luxor – Egito, em 1858. O Papiro de Rhind também recebe o nome de Ahmes, em homenagem ao escriba que relata no Papiro a solução de problemas relacionado à Matemática. Os gregos deram grande importância ao desenvolvimento da Geometria, realizando e relatando inúmeras descobertas importantes para a Matemática, mas na parte que abrangia a álgebra, foi Diofanto de Alexandria, que contribuiu de forma satisfatória na elaboração de conceitos teóricos e práticos para a solução de equações. (SILVA, s.d.). A seguir, veja a tradução e desenvolvimento de um problema que consta no famoso Papiro de Rhind.

**Figura 8**: Resolução de um problema por meio do método da falsa posição

*Uma quantidade, sua metade, seus dois terços, todos juntos são 26. Diga-me: qual é essa quantidade?*

EDITORIA DE ARTE

Como os egípcios não usavam a linguagem algébrica das equações, para resolver esse tipo de problema, eles atribuíam à quantidade procurada um valor arbitrário, que fosse divisível, ao mesmo tempo, pelos denominadores das frações que apareciam no problema; nesse caso específico, um valor que fosse divisível por 2 (sua metade) e por 3 (seus dois terços) ao mesmo tempo. Esse valor pode ser 6, 12, 18, 24 ou qualquer múltiplo de 6, pois qualquer um desses números é divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo.

Usando o valor 6, por exemplo, e de acordo com o problema, temos:

$$6 + \frac{1}{2} \cdot (6) + \frac{2}{3} \cdot (6) = 6 + 3 + 4 = 13$$

Como 13 não é a soma dada no problema, vamos fazer como os egípcios e usar a ideia de **proporção**. Com os valores 6, 13 e 26 montamos a proporção:

- Ao valor arbitrário 6 corresponde a soma 13.
- A qual valor vai corresponder à soma 26?

Como 26 representa o dobro de 13, que foi o valor encontrado, então, pela proporção, a quantidade procurada representará o dobro do valor arbitrário 6. Assim, a quantidade procurada será $2 \cdot 6$, ou seja, 12.

Comprovando, temos:

$$12 + \frac{1}{2} \cdot (12) + \frac{2}{3} \cdot (12) = 12 + 6 + 8 = 26$$

Fonte: Giovanni Júnior; Castrucci. **A conquista da matemática**. 4ª edição. FTD. São Paulo, 2018.

Exemplo:

Desenvolvendo certa velocidade média, um motorista percorreu, de carro, a distância entre as cidades baianas de Salvador e Mangue Seco em 4 horas. Se o motorista tivesse aumentado em 20 km/h sua velocidade média, teria percorrido a mesma distância em 1 hora a menos, ou seja, em 3 horas. Como calcular a distância percorrida?

Como a velocidade média é a razão entre espaço percorrido e o tempo, assim:

Usando o método da falsa posição, temos,

$\frac{x}{4} + 20 = \frac{x}{3}$, subtraindo $\frac{x}{3}$ e 20 de ambos membros da equação, $\frac{x}{4} - \frac{x}{3} = -20$, o que equivale a

$$\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 20$$

Considerando x = 12, já que é divisível por 3 e 4, $\frac{12}{3} - \frac{12}{4} = 4 - 3 = 1 \neq 20$, mas $20 = 1x20$, logo, x da equação $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 20$ é 12 x 20, ou seja, 240.

Outra forma de resolver usando raciocínio proporcional é,

$\frac{x}{3} = \frac{4x}{12}$ e $\frac{x}{4} = \frac{3x}{12}$, logo, $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = \frac{x}{12} = 20$

$\frac{20}{1} = \frac{x}{12}$, assim, multiplicando o denominador 1 por 12, resulta em 12, deve-se multiplicar 20 também por 12 para encontrar o valor de x.

Utilizando esse simples raciocínio, mostrando a resolução tradicional e em seguida a resolução usando proporcionalidade de frações equivalentes já foi motivo de surpresa dos alunos pois viram uma maneira um tanto quanto mais objetiva de resolução.

## 4.8 PROPORCIONALIDADE E JUROS SIMPLES

Os juros, é outro tema de grande importância no ensino fundamental, e que também é abordado repetidas vezes ao longo do ensino fundamental e é outro conteúdo que está relacionado também à proporcionalidade.

O conceito de juro é muito antigo, tendo sua existência observada desde as primeiras civilizações. Seu primeiro registro se dá na Babilônia em 2000 a. C. Naquela época, o pagamento de juros era realizado através de uma moeda muito comum, as sementes. Porém, na ausência destas, o pagamento se dava através de outros bens. Deste costume, nasceram muitas das práticas relativas à matemática financeira vigorantes nos dias atuais. (Sá, s.d.)

A prática de emprestar afim de receber juros, é bem antiga. A história também revela que a ideia se tinha tornado tão bem estabelecida que já existia uma firma de banqueiros internacionais em 575 a. C., com os escritórios centrais na Babilônia. Sua renda era proveniente das altas taxas de juros cobradas pelo uso de seu dinheiro para o financiamento do comércio internacional. (Piton-Gonçalves, s.d.)

Questão:

Uma aplicação feita durante 2 anos, a uma taxa de 12% ao ano, rendeu 1800 reais de juros simples. Qual foi a quantia aplicada?

Tradicionalmente:

$$1800 = x \,.\, 0{,}12 \,.\, 2$$

$$x = \frac{1800}{0{,}24}$$

$$x = 7500$$

Usando **regra de três**, observamos que a razão dos juros pelo capital é equivalente ao produto da taxa pelo tempo de aplicação do capital, então:

$$\frac{1800}{x} = \frac{12}{100} \,.\, 2$$

Aplicando as equivalências, concluímos que,

$$24x = 180000$$

$$x = 7500$$

Pelo método da **redução à unidade:**

$$\frac{1800}{x} = \frac{24}{100}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $1800$ | $24$ | |
| $\div\, 24$ | | | $\div\, 24$ |
| | $75$ | $1$ | |
| $\times\, 100$ | | | $\times\, 100$ |
| | $x = ?$ | $100$ | |

## 4.9 QUESTÕES COM DIFERENTES ABORDAGENS

Em uma construção, 4 pedreiros levam 18 dias para realizar a construção de um muro de 2 metros de altura. Caso houvesse 2 pedreiros a mais e a altura do muro fosse de 4 metros, quanto tempo esses pedreiros levariam?

Como trata-se da relação entre ser humano e esforço físico, cabe a reflexão sobre a existência da proporcionalidade. Não podemos afirmar que o rendimento dos pedreiros seja o mesmo, mas podemos supor que em média os pedreiros tenham rendimentos diários semelhantes e constantes e assim calcular o tempo em dias admitindo uma proporcionalidade.

Por regra de três:

Observamos que número de pedreiro (p) é inversamente proporcional à grandeza tempo (t) e diretamente proporcional à grandeza altura do muro (a).

| Nº pedreiro | Tempo(dias) | Altura(em metros) |
|---|---|---|
| ↑ 4 | ↓ 18 | ↓ 2 |
| 6 | x | 4 |

$$\frac{18}{x} = \frac{6}{4} \cdot \frac{2}{4} \therefore x = \frac{18 \,.\, 4 \,.\, 4}{6 \,.\, 2} \therefore x = 24$$

Portanto, diante das condições consideradas, os seis pedreiros para construir um muro de quatro metros de altura levariam 24 dias.

Pelo TFP:

Depois de analisarmos a relação entre as grandezas, observamos que:

$$t = k \cdot \frac{1}{p} \cdot a$$

Assim, temos:

$$18 = k \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \;\therefore k = \frac{18 \cdot 4}{2} \;\therefore k = 36$$

Então:

$$t = 36 \cdot \frac{1}{p} \cdot a$$

A constante k, representa a quantidade de dias que um trabalhador levaria para construir um muro com um metro de altura. Assim, a quantidade de dias para seis pedreiros construírem um muro com quatro metros de altura é:

$$t = 36 \cdot \frac{1}{6} \cdot 4 \;\therefore t = 24$$

A mesma quantidade de dias encontrados pelo método da regra de três.

Por redução à unidade:

Depois de já observarmos as condições dos dados da questão, sabemos que:

$$\frac{18}{x} = \frac{6}{4} \cdot \frac{2}{4} \;\therefore\; \frac{18}{x} = \frac{12}{16}$$

Então:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $18$ | $12$ | |
| $\div 12$ | | | $\div 12$ |
| | $\frac{3}{2}$ | $1$ | |
| $\times 16$ | | | $\times 16$ |
| | $x = 24$ | $16$ | |

Obtendo assim o mesmo resultado encontrado por regra de três e pelo teorema fundamental da proporcionalidade.

# 5 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa investigou a importância do estudo e aprendizagem do conceito de proporcionalidade no que se refere à relação da proporcionalidade com o pensamento proporcional, onde além de pesquisa documental (legislação e estudos publicados), envolveu-se professores graduados, licenciados e bacharelados e alunos do 8º Ano do Ensino Fundamental. Diante dos objetivos propostos e áreas envolvidas, aplicou-se uma pesquisa de base qualitativa por assim entender que suas características possibilitam a condução da pesquisa de forma coerente para coleta, análise e discussão dos dados obtidos.

Para o desenvolvimento da proposta da pesquisa, foi realizado estudos bibliográficos, buscando a relação do pensamento proporcional com a proporcionalidade evidenciando opiniões expostas em estudos, e mostrando formas de aplicações desse pensamento em alguns importantes pontos da história da humanidade, por exemplo como os antigos egípcios aplicavam o raciocínio proporcional na resolução de problemas em um antigo e famoso documento, o Papiro de Rhind.

De acordo com Lüdke e André (2018), em pesquisas qualitativas, tanto quanto a entrevista, quanto a observação ocupa lugar privilegiado nas novas abordagens de pesquisas educacional. Usada como principal método de investigação ou associada a outras técnicas de coleta, a observação possibilita um contato pessoal e estreito do pesquisador com o fenômeno pesquisado, o que apresente uma série de vantagens.

Assim, conforme o estudo das autoras, aplicou-se um questionário a um grupo de professores graduados, licenciados ou bacharelados atuantes em diversas cidades do estado do Piauí e do Maranhão. Buscando a visão desses docentes sobre a importância do ensino e aprendizagem no desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Um questionário de forma semiestrutrada foi aplicado com intenção de obter as opiniões dos docentes levando em consideração suas vivências em sala de aula e nos orientou no direcionamento desse estudo. Além deste questionário de pesquisa aplicado a docentes com considerável experiência, foi trabalhado o conteúdo proporcionalidade no 8º Ano do Ensino fundamental da rede municipal da cidade Luzilândia, estado do Piauí, onde inicialmente foi aplicado uma atividade com questões como: O que é razão entre duas grandezas de mesma espécie? e O que é proporcionalidade matemática?

O motivo de ser aplicada a atividade em uma turma do 8º Ano foi observar que o tema grandezas é visto no 7º Ano, assim, no 8º Ano, seria para os alunos terem noções básicas uma vez que foi visto no ano anterior. Isso nos remete a no mínimo nos questionarmos sobre a importância desse tema já que se faz tão importante.

# 6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Como já mencionado, esta pesquisa tem o objetivo analisar a importância do estudo da proporcionalidade matemática, seu ensino e aprendizagem, discutir diferentes abordagens de resolução de problemas, sua relação a outros temas, bem como ao desenvolvimento de um raciocínio proporcional.

Buscou-se com o desenvolvimento metodológico, aplicando estudo qualitativo, analisando e organizando os dados coletados ao longo da investigação de forma a interpretá-los para identificar as questões de inquietude da pesquisa a fim de propor discussão sobre a importância da proporcionalidade no ensino e aprendizagem de matemática.

Além de inúmeros trabalhos voltados para o tema, observando os resultados de uma avaliação externa, o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes – PISA, aplicada a cada três anos, a países que pertente à OECD, sigla em inglês para Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico que é uma organização internacional e intergovernamental com sede em Paris - França.

Segundo a OECD, “No Brasil, 27% dos alunos atingiram pelo menos o nível 2 de proficiência em matemática, significativamente menos do que a média dos países da OECD (média da OECD: 69%). No mínimo, estes alunos conseguem interpretar e reconhecer, sem instruções diretas, como uma situação simples pode ser representada matematicamente (por exemplo, comparando a distância entre duas rotas alternativas, ou convertendo preços numa moeda diferente)”. (OECD, 2023).

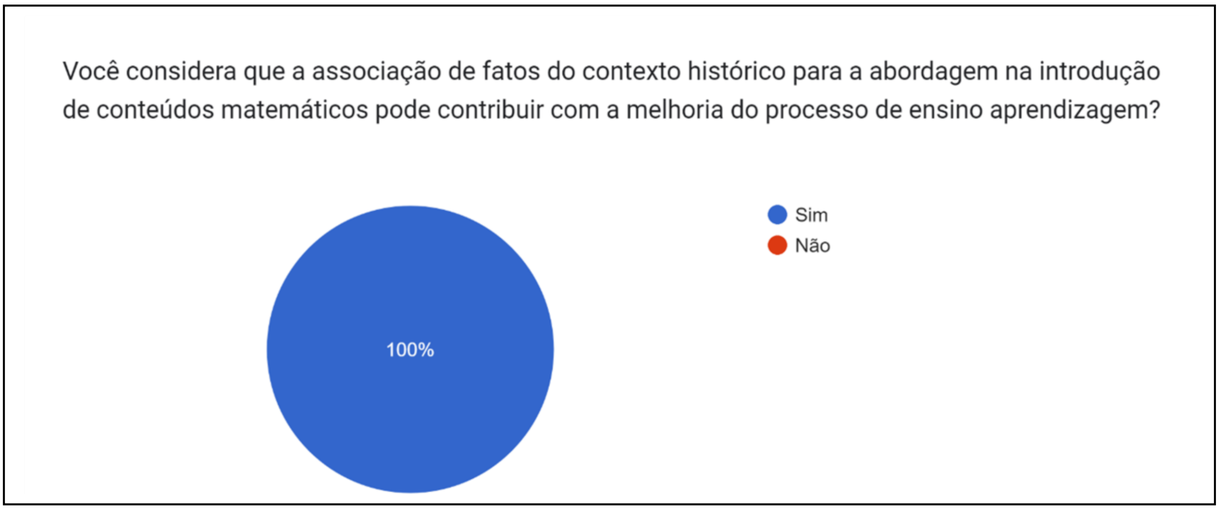
O fato de mais de 70% dos alunos brasileiros não conseguirem resolver questões como: quantos reais equivalem 2 dólares, sabendo que 1 dólar = R$ 4,93?, questão que exige um raciocínio proporcional, contribui significativamente para a posição que o Brasil ocupa (64ª posição), entre 81 países que participaram da avaliação em matemática na edição de 2022 na avaliação do PISA, como divulgou o MEC: Matemática – Em 2022, o desempenho médio brasileiro foi de 379 pontos em matemática. A pontuação é inferior à média do Chile (412), Uruguai (409) e Peru (391), ao passo que não há diferença estatisticamente significativa entre a média do Brasil, da Colômbia (383) e da Argentina (379). (Assessoria de Comunicação Social do MEC, com informações do Inep).

Isso mostra que, deve-se ter um olhar mais adequado para o planejamento, ensino e aprendizagem dos conceitos de proporcionalidade matemática, já que esse raciocínio está presente em muitos conteúdos básicos, e que uma vez adequadamente assimilado, pode contribuir positivamente para um bom desempenho nos estudos e preparação intelectual indivíduo.

Além de analisarmos dados do desempenho do Brasil na última edição do PISA, buscamos a opinião de docentes atuantes em escolas públicas e privadas de diferentes municípios dos estados do Piauí e Maranhão, através de questionário aplicado. A seguir temos apresentação de questões e análise das respostas obtidas.

Ao serem indagados sobre a importância da associação de fatos históricos na introdução de temas a serem trabalhados, a resposta entre os professores que responderam ao questionário foi unânime, todos consideram importante:

**Figura 9**: Questão do questionário de pesquisa

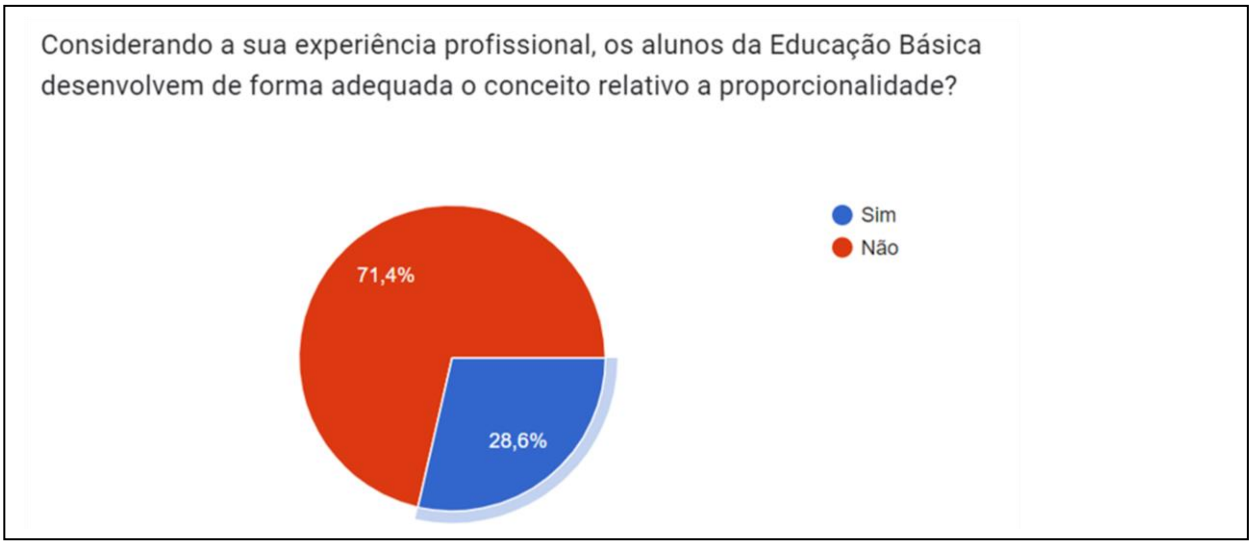



Fonte: A pesquisa

Essa resposta vai de acordo com o que afirmam Gomes e Araman (2016) a História da Matemática traz muitas contribuições para o ensino da Matemática, sendo esta uma mola propulsora de reflexões que podem conduzir os alunos compreender ideias, por meio do entendimento dos fatos que possibilitaram os conceitos matemáticos serem descobertos, além de aproximar a Matemática às áreas social e humana, ao mostrar que ela se desenvolve a partir das atitudes e necessidades dos homens.

Quando perguntados sobre o conceito de proporcionalidade desenvolvidos pelos alunos na Educação Básica, menos de 30% entende que esse conceito é desenvolvido de forma adequada, ou seja, a grande maioria acredita que esse desenvolvimento não é satisfatório.

**Figura 10**: Questão do questionário de pesquisa




Fonte: A pesquisa

Se a grande maioria dos profissionais que responderam essa pergunta acreditam que os alunos não conseguem a devida assimilação do conceito proporcional, o que pensarmos, sabendo que é de fundamental importância tal conceito? Conforme Cyrino (2009) a proporcionalidade também é um conceito fundamental no contexto matemático, uma vez que está presente em problemas aritméticos, geométricos e algébricos. As noções de razão, proporção, regra de três, porcentagem, semelhanças de figuras, escalas, função do primeiro grau, probabilidades, entre outras são estabelecidas a partir desse conceito.

Considerando a pergunta anterior, para os professores e professoras que entendem que os alunos da Educação Básica não desenvolvem adequadamente o conceito de proporcionalidade, foi perguntado também o que acreditam que interfere nesse desenvolvimento.

Caso a resposta anterior seja não, o que interfere no desenvolvimento do conceito de proporcionalidade? As respostas foram:

Falta de perícia na interpretação dos enunciados; Fazer as relações lógicas e interpretar corretamente o problema; Há uma grande dificuldade pelos discentes em relacionar grandezas e inferir medidas; Falta de domínio da matemática básica; Falta de uma base adequada; A interpretação equivocada dos problemas e a falta de base nas quatro operações; Nos casos de alunos como dificuldade, entendo que o ensino não foi adequado; Tem-se que revisar novamente proporcionalidade, pois todos os assuntos de matemática tem proporcionalidade; Muitas das vezes não é explicado de maneira correta ou não é mostrado onde é aplicado. Nesse sentido afirma Costa e Avellato (2015).

> Apesar de terem contato quase que diariamente com situações de proporcionalidade, os alunos tendem a apresentar algumas dificuldades em compreender o conceito; ajudá-los a desenvolver o raciocínio proporcional tem sido um grande desafio no período escolar, sendo essencial ao aprendizado de diversas disciplinas do Ensino Fundamental, Médio e Superior. (COSTA E AVELLATO, 2015, p. 03)

Assim, as dificuldades com relação à interpretação são vistas como ponto que interferem diretamente no baixo desenvolvimento do conceito sobre proporcionalidade e em consonância à maioria das respostas dos profissionais que responderam ao questionário sobre tudo nesse ponto a respeito da falto de traquejo na interpretação, Reis (2020) afirma que uma das grandes dificuldades dos docentes de matemática inicia-se em torno da interpretação dos problemas a serem resolvidos pelos estudantes. Em muitos casos, os docentes notam que a falha tem sua origem nos anos iniciais, por falta de estimulação na leitura e na interpretação do contexto básico do enunciado. A leitura é ponto primordial. A leitura e a interpretação são peças chave para toda vida escolar do aluno, levando-o a se desenvolver em todas as áreas do conhecimento propostas para a vida acadêmica. A matemática depende totalmente da interpretação que o aluno irá fazer de textos/enunciados para desenvolver o pensamento matemático.

Observamos que muitos responderam acreditarem que a falta de uma boa base na aprendizagem pode ser o motivo para os alunos não terem o domínio do conceito sobre proporcionalidade na Educação Básica. Essa base é de fundamental importância como constata Romão (2011), onde menciona que o pensamento proporcional está presente e é, ao mesmo tempo, base de inúmeros conceitos matemáticos de fundamental importância, desenvolvidos ao longo do ensino Fundamental. Sua potencial conexão com temas do cotidiano e com outras áreas de conhecimento não apenas facilita a prática do professor, como também torna o conteúdo mais próximo do aluno e, portanto, mais significativo para ele.

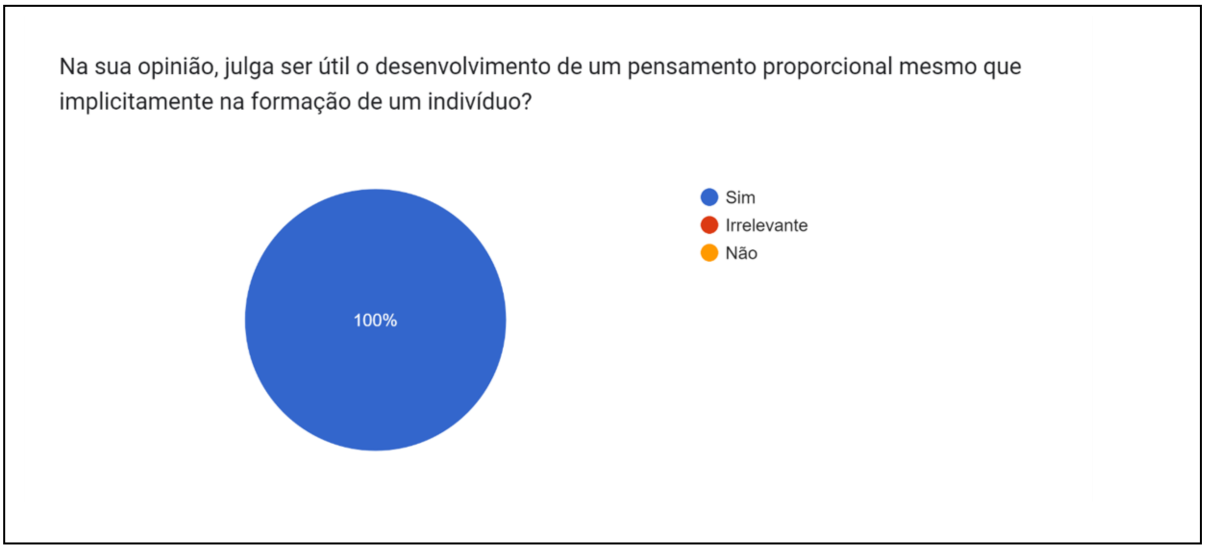
Outro ponto considerado relevante no desenvolvimento inadequado do conceito de proporcionalidade na Educação Básica pelos profissionais que responderam ao questionário de pesquisa, foi a inadequada abordagem da proporcionalidade em sala de aula, diante dessa consideração, Garcez (2016) destaca:

> O conceito de proporcionalidade, mostra-se de grande importância dentro do universo, não apenas matemático, sendo envolvido em diversas ciências e principalmente em nosso cotidiano. É um fato triste verificarmos que tão importante assunto é abordado, muitas vezes, de forma mecânica, restringindo-se à regra de três, sendo apenas isto o que os nossos alunos lembram ao falarmos do tema. (GARCEZ, 2016, p. 51)

Na busca da visão proporcional na vida cotidiana para uma melhor assimilação por parte do aluno, Santos (2018) menciona que o fato de associar a proporcionalidade a fatos sociais e consequentemente dos alunos, consegue-se mostrar claramente significativo quando, por exemplo, é apresentada a receita de uma fornalha de biscoitos a qual se deseja produzir apenas meia fornalha.

Outra questão que teve resposta unânime foi com relação ao quanto é útil do desenvolvimento proporcional na formação de uma pessoa. Mesmo que implícito o raciocínio proporcional está presente no cotidiano.

**Figura 11**: Questão do questionário de pesquisa



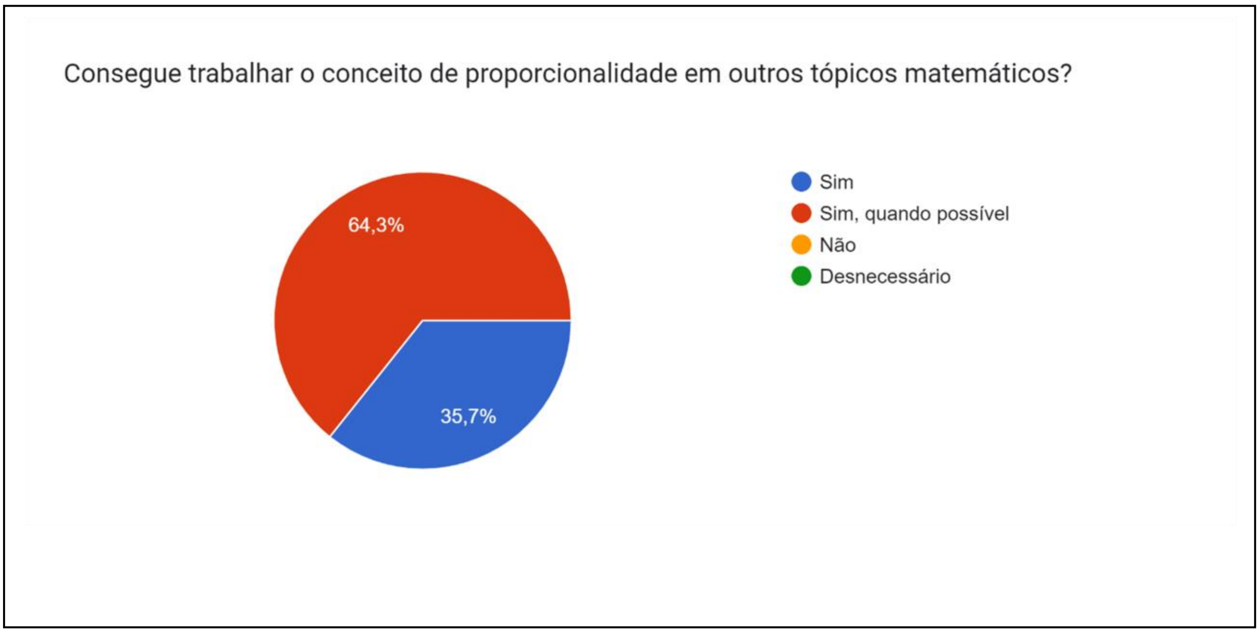

Fonte: A pesquisa

Assim, constatou-se que 100% dos entrevistados acreditam ser importante o pensamento proporcional mesmo de forma implícita na formação de um indivíduo, assim como ressalta também Miranda (2009) quando diz que o pensamento proporcional é um tipo de pensamento matemático essencial para interpretar o comportamento de diversas grandezas do mundo físico, apoiando o estudo de outras áreas, além da Matemática. Por exemplo questões de Ciências Naturais sobre densidade, velocidade, energia elétrica e da Geografia sobre coordenadas geográficas, densidade demográfica, escalas de mapas são estudadas com a utilização deste tipo de pensamento. No contexto da Matemática, é fundamental na aprendizagem da Álgebra, Geometria e Trigonometria, na resolução de problemas multiplicativos, de porcentagens, de semelhança de figuras geométricas, análise de tabelas e gráficos de funções, dentre outros.

Esse pensamento ratifica o raciocínio proporcional como uma ferramenta que devidamente entendido e praticado, pode se tornar essencial e de grande contribuição na aprendizagem de uma gama de conteúdos que se fazem fundamentais na educação básica.

Outro dado a considerar, é que menos de 36% afirmam trabalhar o conceito de proporcionalidade associando a outros tópicos matemáticos. Como o raciocínio proporcional se faz necessário em outros temas matemáticos, o devido entendimento sobre o conceito de proporcionalidade pode ser uma ferramenta na assimilação de outros tópicos matemáticos.

**Figura 12**: Gráfico de questão do questionário de pesquisa

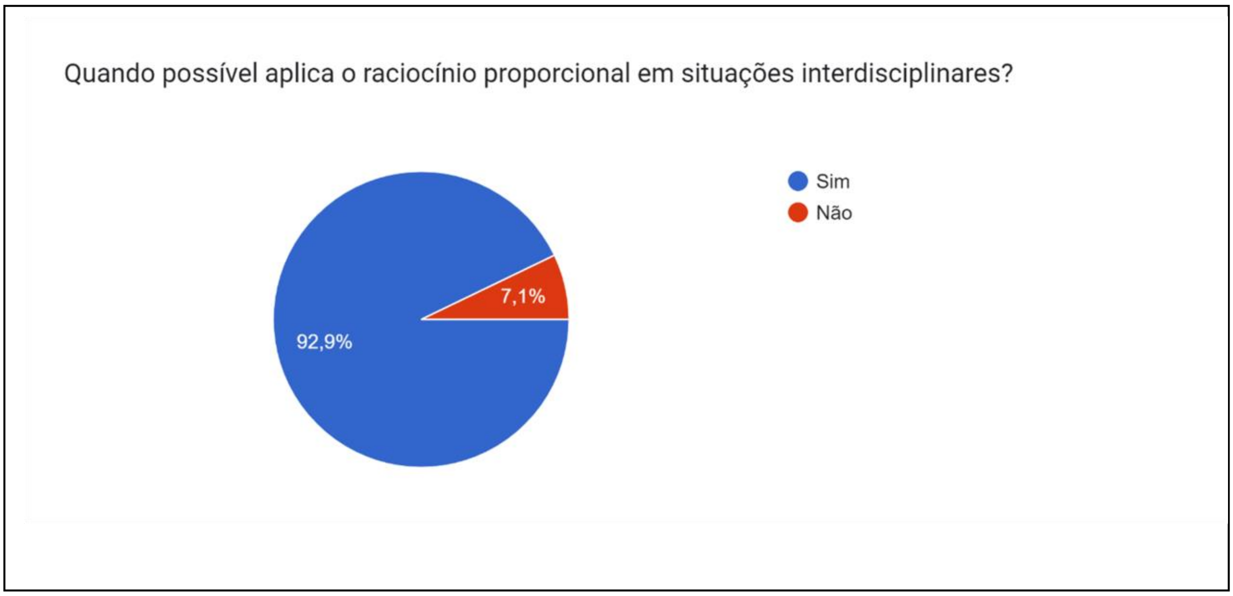



Fonte: A pesquisa

Nesse aspecto, Castro (2015) entende que o conceito de Proporcionalidade é pré-requisito para o estudo de vários conteúdos. Este conceito é apresentado muitas vezes de forma mecânica, sem contextualização e sem sua referência em outros conteúdos matemáticos e em outras disciplinas. O aluno aprende o algoritmo, mas não compreende o conceito.

Mais de 92% afirmaram que sempre que possível, aplicam o raciocínio proporcional em situações interdisciplinares. Apesar de terem contato quase que diariamente com situações de proporcionalidade, os alunos tendem a apresentar algumas dificuldades em compreender o conceito; ajuda-los a desenvolver o raciocínio proporcional tem sido um grande desafio no período escolar, sendo essencial ao aprendizado em diversas disciplinas no Ensino Fundamental, Médio e Superior. (Costa e Allevato, p. 3, 2015).

**Figura 13**: Gráfico de questão do questionário de pesquisa




Fonte: A pesquisa

Como já foi mencionado, foi aplicado uma atividade em uma turma do 8º Ano do Ensino Fundamental de uma escola pública municipal da cidade Luzilândia, estado do Piauí, seguindo o plano anual referente ao conteúdo sobre Estudo de grandezas, com a intenção de observar o nível de conhecimento sobre proporcionalidade, tendo em vista ser conteúdo já visto na série anterior. A seguir analisamos as questões e o desempenho obtido.

As questões apresentam abordagens significativamente básicas, a intenção é observar se os educandos desenvolvem o mínimo de nação sobre conceito de proporcionalidade uma vez que na séria anterior, razão, proporção, regra de três foram objeto de estudo. A turma do 8º Ano que foi aplicado o questionário, havia 26 alunos matriculados e frequentando, mas apenas 19 alunos se fizeram presente no dia da aplicação da atividade.

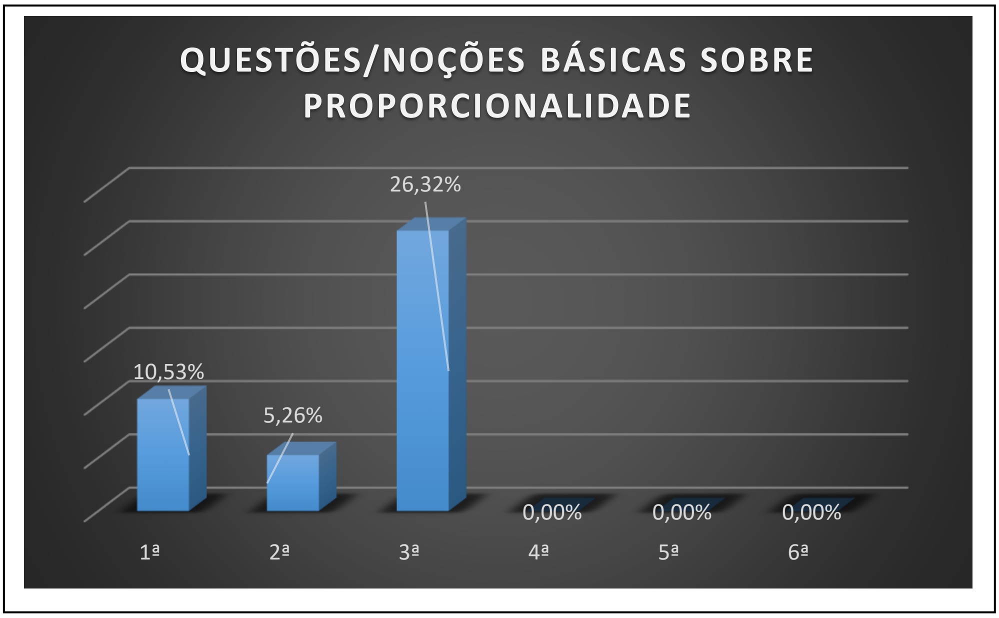
Perguntou-se na primeira questão: O que é razão entre duas grandezas de mesma espécie? Apenas dois alunos mencionam que trata-se de uma divisão, alguns respondem totalmente fora do contexto e a maioria nem responderam. Na segunda questão, perguntou-se: O que é proporção matemática? Apenas um aluno respondeu que é uma igualdade entre razões, mas esse mesmo aluno não respondeu a primeira questão, o que nos leva a acreditar que não associa a palavra razão à uma operação de divisão.

Na terceira questão, quando são indagados: Qual ou quais conteúdos já estudados por você nesse ano e/ou no ano anterior que pode ou podem serem relacionados à proporcionalidade? Dentre as alternativas disponibilizadas, proporcionalidade, equação do 1º grau, juros simples, todos, nenhuma das alternativas, 5 deles afirmam que todos estes conteúdos têm associação à proporcionalidade.

Com as três primeiras questões, observa-se que não há uma boa fundamentação do pensamento proporcional estabelecida por parte dos educandos, e que embora os conteúdos de probabilidade, equação do 1º grau e juros simples fazerem parte da grade curricular e já haverem sido vistos na séria atual 8º Ano e inclusive na série anterior 7º Ano não há uma associação por parte dos educandos entre proporcionalidade e estes outros conteúdos mencionados.

Na quarta questão, temos uma relação com probabilidade, na quinta questão com equação do 1º grau e na sexta questão é relacionada com juros simples, nenhum dos alunos conseguiram solucionar de forma coerente, o que mostra também dificuldade com interpretação pois tais questões foram empregadas com contextualização. A seguir observamos gráfico com o desempenho dos alunos nesse questionário.

**Figura 14**: Gráfico desempenho atividade sobre proporcionalidade aplicada a turma de 8º Ano




Fonte: A pesquisa

Nessa perspectiva, o raciocínio proporcional se mostra como requisito que uma vez compreendido, pode ser útil para compreensão e entendimento, além de fundamental no desenvolvimento de um pensamento matemático o que é sem dúvida um elemento importante para o progresso no estudo de todo indivíduo. A pesquisa se mostra perspicaz no ponto de vista teórico no que diz respeito à importância do tema proporcionalidade.

Não só teoricamente, mas documentalmente o tema proporcionalidade é objeto de inúmeros estudos como passar do tempo. Não podemos nos deixar acomodar diante das dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem. O desafio de ensinar é vencido a cada dia, a busca de aprimoramento, de novos métodos, das discussões deve ser sempre valorizada, o conhecimento não é algo estabelecido como perfeito, concluído, o conhecimento é algo que sempre estar a se construir.

A experiência compartilhada tanto pelos estudos pesquisados como pelos documentos educacionais, além dos docentes que se propuseram a responder ao questionário de pesquisa, nos conduz a certezas que devemos nos aprimorar sempre no ensino e estudo não só do tema proposto por esta pesquisa, mas no que diz respeito à nossas práticas como profissionais e até pessoais, tendo em vista que somos seres capazes de aprimoramento, o mundo nos faz assim e assim acontece a evolução, não diferentemente dessa linha de raciocínio, a educação é a principal evolução na vida de qualquer ser humano.

# 7 CONCLUSÃO

Com este estudo que agora foi concluído, buscou enfatizar a importância do pensamento proporcional para o estudo e aplicação da proporcionalidade, entendendo a relevância observada no decorrer da história bem como desde a antiguidade a proporcionalidade desperta interesse por suas aplicações em situações do cotidiano, visou analisar como está sendo tratado este tema e como podemos melhorar o entendimento dos alunos, além de utilizar o conceito de proporcionalidade para compreensão em outros tópicos matemáticos. Nesse contexto o estudo buscou uma reflexão sobre a proporcionalidade matemática entendendo que pode despertar para o leitor um novo olhar para um melhor planejamento e desenvolvimento deste conteúdo.

Diante do trabalho realizado, argumentou-se sua integração com a matemática, procuramos analisar a relação da proporcionalidade com o raciocínio proporcional, pois o estudo evidenciou a relevância do tema, o que se confirma por meio das respostas dos docentes através do questionário investigativo sobre a importância da compreensão deste conteúdo.

Em torno das informações analisadas, dados históricos, estudos recentes e opinião de docentes compõem esta pesquisa. Muitas reflexões foram abordadas no decorrer dos meses de estudos e espera-se que outras possam surgirem em torno do tema. No passar do tempo de pesquisa certezas foram constatadas e outros questionamentos foram levantados, no entanto tem-se o entendimento que os objetivos propostos foram alcançados.

Debruçando sobre o que a BNCC e os PCN estabelecem sobre o ensino e estudo de proporcionalidade matemática e da opinião dos docentes que aceitaram participar da pesquisa sobre o tema, entende-se que a importância do desenvolvimento do raciocínio proporcional é fundamental, porém, os resultados em avaliações externas por exemplo não mostram um bom desempenho pelos alunos, o que no mínimo é questionável em como vem sendo trabalhado a assimilação desse pensamento proporcional.

Nesse sentido, observou-se pontos que emergiram das respostas levantadas através dessa pesquisa que se mostram relevantes, os quais elencamos alguns a seguir:

Compreender como surgiram os primeiros registros sobre o estudo da proporcionalidade em seus aspectos históricos pode provocar interesse tanto ao docente em seus planejamentos sobre o tema quanto aos alunos ao iniciar seus estudos; A investigação das generalizações, pode contribuir significativamente para o docente na construção da conjectura do pensamento proporcional a ser transmitida para os alunos; Buscar uma efetiva contextualização da proporcionalidade ao cotidiano objetivando associar o raciocínio proporcional a outros tópicos matemáticos; Diversificar a forma de abordagem e de resoluções de situações problemas que estão relacionados ao pensamento proporcional; Obter reflexões sobre a autoanálise em relação às práticas de ensino sobre proporcionalidade com o intuito de aperfeiçoar o entendimento e formação de um concreto pensamento matemático no indivíduo; Sugere-se que o raciocínio proporcional seja mencionado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental já que desde essa etapa pode-se observar temas que estão relacionados à proporcionalidade matemática.

Entende-se que as reflexões que surgiram a partir dessa pesquisa, ao mesmo tempo que se mostram-se adequadas e necessárias para a busca do pensamento proporcional, também vem à tona o fato de muitos docentes não conseguirem a concreta transmissão do pensamento proporcional atribuindo uma base composta inadequadamente, além de déficit do desenvolvimento do senso de interpretação por parte dos alunos.

Assim, como já mencionado, essa pesquisa gerou certezas, mas também com as reflexões obtidas encontra-se dúvidas. Como por exemplo será que o tempo da carga horária referente à matemática está contemplando o necessário para o bom desenvolvimento do estudo dos conteúdos? Entende-se que uma reflexão sobre os planejamentos ou até mesmo sobre o plano de curso se faz necessária desde o início do Ensino Fundamental para melhor adequar o estudo sobre o pensamento proporcional.

Por outro lado, sabe-se que muito há para ser investigado, desde como melhorar a base educacional para que os alunos estejam nivelados com o ano de estudo em que se encontram, até buscar o desenvolvimento interpretativo necessário para a compreensão no estudo de quaisquer que sejam os tópicos estudados, pois com os resultados deste trabalho de pesquisa, constatou-se a importância do tema proporcionalidade no contexto escolar e na formação de um indivíduo pensante que busca seu desenvolvimento intelectual.

Para uma associação ao tema proporcionalidade não só escrita, pesquisamos sobre a Proporção Áurea e o que pode nos proporcionar visualmente segmentos observados em obras de artes e na arquitetura por exemplo. A harmonia visual em segmentos onde consta a Proporção Áurea nos dá uma dimensão do quão é notória a aplicação da proporcionalidade nas mais variadas atividades do homem.

Entendendo essa ligação da proporcionalidade ao cotidiano buscamos nesse estudo utilizar dessa relação para integrar esse tema a outros dentro da matemática utilizando de suas definições e conceitos com diferentes maneiras de resolução, além de uso da regra de três, trazemos também a utilização de redução à unidade e aplicação do teorema fundamental da proporcionalidade.

Nesse aspecto, observando o que foi mencionado no parágrafo anterior, percebe-se que o estudo e aprendizagem sobre proporcionalidade deve ir além da mera aplicação de regras pré-estabelecidas, nesse sentido a aprendizagem da proporcionalidade deve ser concretizada com o efetivo desenvolvimento do raciocínio proporcional, buscando preparar o estudante não só na matemática escolar mas também na busca de formar um cidadão capaz de aprender a aprender nos mais variados contextos, e assim entender que o desenvolvimento do pensamento exercita a mente para contribuir de forma significativa na sua inserção na sociedade e num mundo cada vez mais globalizado e em um mercado de trabalho que a cada momento incrementa atualizações e insere novas tecnologias.

# REFERÊNCIAS

MARANHÃO, Cristina.; MACHADO, Sílvia. Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional. **Educar em Revista**, Curitiba, n. Especial 1/2011, p. 141-156, 2011. Disponível em: https://www.scielo.br/j/er/a/73nxLZwgFJC9SLDkBnsv87n/?format=pdf&lang=pt

SANTOS, MAYRA THAÍS ALBUQUERQUE. **OS DESDOBRAMENTOS TEÓRICOS DA PRORPORCIONALIDADE NA ESCOLA DE EDUCAÇÃO BÁSICA**. 2018. Disponível em: https://www.repositorio.ufal.br/jspui/handle/riufal/3433

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**. Secretaria de Educação Fundamental. Ciências Naturais/Secretarias de Educação Fundamental. Brasília. MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **MATRIZ DE REFERÊNCIA ENEM**. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Disponível em: https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf

BRAZIL. **MATRIZ DE REFERÊNCIA DE MATEMÁTICA**. SAEB. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Anísio Teixeira (Inep). 2001. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/matriz-de-referencia-de-matematica_2001.pdf

COSTA, MANOEL DOS SANTOS; ALLEVATO, NORMA SUELY GOMES. **PROPORCIONALIDADE: eixo de conexão entre conteúdos matemáticos**. Disponível em: https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2263.

D'Ambrosio, U. **A história da matemática: questões historiográficas políticas e reflexos na educação matemática**. São Paulo, 1999.

COSTA JÚNIOR, J. R. **Atribuição do significado do conceito de proporcionalidade:** contribuições da história da matemática. Disponível em: http://revistas.undesc.br/index.php/boem/article/view/3961/2830 2013. Acesso em 04/10/2023.

LIMA, JOSÉ VITOR RAMOS DE.; ANDRADE, DAIANNE MARIA DE; ALBUQUERQUE, ISLANITA CECÍLIA ALCÂNTARA DE. **UMA ALTERNATIVA HISTÓRICA PARA O ENSINO DE PROPORCIONALIDADE**. Disponível em:

http://editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2018/TRABALHO_EV117_MD1_SA1_ID81_25082018183947.pdf. 2018. Acesso em 04/10/2023.

ROQUE, T. **História da matemática. Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Editora Zahar, Rio de Janeiro, 2012.

BERTATO, F. L. A FALSA (SU-)POSIÇÃO? TRADUÇÃO DOS PROBLEMAS 24, 25, 26 E 27 DO PAPIRO DE RHIND. **Revista Brasileira de História da Matemática**; VOL. 18, Nº 36, P. 11-29, 2020. DOI: 10.47976/RBHM2018v18n3611-29. Disponível em: https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/18. Acesso em: 4 nov. 2023.

SOUSA, D.; FESTA, M.; BASSINI, A. (2020). **Proporção áurea**. Disponível em: https://www.parquecientec.usp.br/passeio-virtual/matematica/proporcao-aurea

OLIVEIRA, R. R. **PROPORÇÃO ÁUREA**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/proporcao-aurea.htm

RIZZO, Maria Luiza Alves. “Proporção áurea”; **Brasil Escola**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/proporcao-aurea.htm.

Garcez, W. R.; **TODOS ESTUDAM PROPORÇÕES**: O QUE APRENDEM?, Rio de Janeiro. Clube de Autor, 2016.

BEIRAL, LÍVIA NARCISIO. **A PROPORCIONALIDADE NO COTIDIANO:** UMA PROPOSTA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL. 2017. Disponível em: https://www.locus.ufv.br/handle/123456789/11647

RIZZO, MARIA LUIZA ALVES. "Probabilidade"; ***Brasil Escola***. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/probabilidade.htm.

ASTH, Rafael. Probabilidade. **Toda Matéria**, *[s.d.]*. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/probabilidade/.

SILVA, MARCOS NOÉ PEDRO. **História das Equações**, *[s.d.]* Mundo Educação. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/historia-das-equacoes.htm

Giovanni Júnior, José Ruy; Castrucci, Benedicto. **A conquista da matemática**: 8º ano, ensino fundamental anos finais. 4ª edição. FTD. São Paulo, 2018.

SÁ, ROBISON. **Juros Simples**, [s.d.]. Disponível em: https://www.infoescola.com/matematica/juros-simples/.

PITON-GONÇALVES, JEAN, **A História da Matemática Comercial e Financeira**, [s.d.]. Disponível em: https://www.somatematica.com.br/historia/matfinanceira.php.

LUIZ JÚNIOR, HÉRCULES, **As diferentes abordagens do ensino de proporcionalidade**, 2016. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=2692&id2=80377

EQUIPE VIVA DECORA. **O Que é Proporção Áurea? Entenda Como Ela Mudou a História da Arquitetura**. 18 de janeiro de 2022. Disponível em: https://www.vivadecora.com.br/pro/proporcao-aurea/

IMPA. PAPMEM - Julho de 2013 – **Proporcionalidade**. Disponível em: https://youtu.be/gyNqMhFkB04?si=suctcE1maTqF7Z9J

OECD. **Resultados do PISA 2022**. 05 de Dezembro de 2023. Disponível em: https://www.oecd.org/publication/pisa-2022-results/country-notes/brazil-61690648/#chapter-d1e11

BRASIL, MEC. PISA. **Divulgados resultados do Brasil no PISA 2022**. 05 de dezembro de 2023. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/noticias/2023/dezembro/divulgados-os-resultados-do-pisa-2022

GOMES, LUCAS FERREIRA; ARAMAN, ELAINE MARIA DE OLIVEIRA. História da matemática no ensino de matemática: um mapeamento dos artigos publicados em alguns periódicos nacionais na última década. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016. Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM. **Sociedade Brasileira de Educação Matemática**. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/4584_2312_ID.pdf

SILVA, MARCIA CRISTINA NAGY; CYRINO, MÁRCIA CRISTINA DA COSTA TRINDADE. Educação matemática crítica e o conceito de proporcionalidade em sala de aula. **SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. Janeiro de 2009. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/272488109_EDUCACAO_MATEMATICA_CRITICA_E_O_CONCEITO_DE_PROPORCIONALIDADE_EM_SALA_DE_AULA

REIS, NAIÂNE DE CARVALHO. A IMPORTÂNCIA DA LEITURA PARA A INTERPRETAÇÃO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMATICOS NA EJA.

**CONEDU, VII CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO**. 15, 16, 17 DE OUTRUDO DE 2020. Disponível em: https://editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2020/TRABALHO_EV140_MD1_SA8_ID2943_13052020184940.pdf

MIRANDA, MARCIA REGIANE. **PENSAMENTO PROPORCIONAL: uma metanálise qualitativa de dissertações**. 2009. Disponível em: https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11406/1/Marcia%20Regiane%20Miranda.pdf

CASTRO, FABRÍCIO ALMEIDA DE. **A RELACÃO DA PROPORCIONALIDADE COM OUTROS TEMAS MATEMÁTICOS**. 2015. Disponível em: https://www.locus.ufv.br/bitstream/123456789/8416/1/texto%20completo.pdf

MELARA, JOSÉ FRANSICSO TOLEDO; GARCIA, ANGÉLICA DA FONTOURA. **Pensamento Proporcional e a Formação de professores: um Estudo Sobre Teses Produzidas de 2000 a 2019**. Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática - JIEEM. 15 de dezembro de 2021. Disponível em: https://doi.org/10.17921/2176-5634.2021v14n3p320-328

FARIA, REJANE WAIANDT SCHUWARTZ DE CARVALHO; MALTEMPI, MARCUS VINICIUS. (2020). Raciocínio proporcional na matemática escolar. **Revista Educação Em Questão, 58(57)**. Disponível em: https://doi.org/10.21680/1981-1802.2020v58n57ID20024

ABREU, ANA PAULA MAGALHÃES DE; BEUST ADILÇÃO CABRINI. **A PROPORCIONALIDADE E ALGUMAS APLICAÇÕES**. 2008. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/disciplinarumNT/article/download/1237/1173/3769

LÜDKE, MENGA; ANDRÉ, MARLI ELIZA DALZAMO AFONSO DE. **PERQUISA EM EDUCAÇÃO: ABORDAGENS QUALITATIVAS**. 2ª Ed. [Reimpr]. Rio de Janeiro. E. P. U. 2018.

BONJORNO, JOSÉ ROBERTO; GIOVANNI JR, JOSÉ RUY; SOUSA, PAULO ROBERTO CÂMARA DE. **PRISMA** – 1ª Ed – São Paulo. Editora FTD, 2020.