



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ – UECE  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA – PRPGPq  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT**

**CLEDINARDO BERNARDO LAURENTINO**

**NÚMEROS IRRACIONAIS: UMA VISÃO MAIS AMPLA  
PARA O PROFESSOR DA EDUCAÇÃO BÁSICA**

**FORTALEZA- CEARÁ**

**2013**



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ – UECE  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA – PRPGPq  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT**

CLEDINARDO BERNARDO LAURENTINO

**NÚMEROS IRRACIONAIS: UMA VISÃO MAIS AMPLA PARA O PROFESSOR DA  
EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional - PROFMAT da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. Orientador: Professor Doutor João Montenegro de Miranda

Fortaleza –Ceará

2013

L383n Laurentino, Cledinaldo Bernardo.

Números irracionais: uma visão mais ampla para o professor da educação básica/Cledinaldo Bernardo Laurentino. — 2013.

CD-ROM 65f. : il. (algumas color.) ; 4 ¾ pol.

“CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico, acondicionado em caixa de DVD Slin (19 x 14 cm x 7 mm)”.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2013.

Área de Concentração: Matemática.

Orientação: Prof. Dr. João Montenegro de Miranda.

1. Números irracionais. 2. Números racionais. 3. Enumerabilidade. 4. Número de Euler. I. Título.

CDD: 510

---

CLEDINARDO BERNARDO LAURENTINO

**NUMEROS IRRACIONAIS: UMA VISÃO MAIS AMPLA PARA O  
PROFESSOR DA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em matemática.

Aprovada em: 29 / 08 / 2013.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. João Montenegro de Miranda (Orientador)

Universidade Estadual do Ceará – UECE



Prof. Dr. João Marques Pereira

Universidade Estadual do Ceará – UECE



Prof. Dr. José Robério Rogério

Universidade Federal do Ceará – UFC

Infinidades e indivisibilidades transcendem nossa compreensão finita, as primeiras devido a sua magnitude, as últimas devido à sua pequenez; imagine como elas são quando se combinam.

Galileu Galilei

## **AGRADECIMENTOS**

Ao grande Deus pela oportunidade de realizar este feito.

À minha mãe que sempre acreditou em mim não medindo esforços para que eu alcançasse meus objetivos.

À minha família Débora (esposa), Renata e Davi (filhos) pela paciência e compreensão e auxílio durante meus momentos de ausência para dedicação aos estudos.

Aos meus irmãos: Cleilson, Cleonardo, Rute e Claudio pelo apoio sempre que necessário.

Aos meus amigos do Profmat - UECE em especial ao Natanael que foi meu parceiro de estudos durante todo este mestrado.

Ao meu orientador o Professor Dr. Montenegro, pelas horas de dedicação a leitura deste trabalho e pelas intervenções necessárias.

Aos professores que fizeram o Profmat - UECE: Guilherme Ellery, João Marques, Othon, Cleiton, Montenegro.

## RESUMO

Neste trabalho serão estudados os números reais com destaque para os números irracionais. O surgimento dos números irracionais é apresentado como uma forma de suprir a deficiência do conjunto dos números racionais no que diz respeito a medida de segmentos. Estudamos enumerabilidade dos conjuntos dos números racionais e a não enumerabilidade dos irracionais; o conceito de números algébricos e números transcendentos. Finalizando apresentamos dois números irracionais de relevância considerável no conteúdo da educação básica: o número  $\pi$  e o número "e" explorando um pouco da história do surgimento destes e provando sua irracionalidade de modo que essa pesquisa sirva como ferramenta adicional aos professores da educação básica a respeito do assunto.

**Palavras-chave:** números racionais, números irracionais, enumerabilidade,  $\pi$ , número de Euler.

## **ABSTRACT**

In this work we will study the real numbers highlighting the irrational numbers. The appearance of irrational numbers is presented as a way to overcome the deficiency of the set of rational numbers with respect to measure segments. Enumerability study of sets of rational numbers and the irrational enumerability not, the concept of algebraic numbers and transcendental numbers. Finally we present two irrational numbers of considerable relevance in the content of basic education: the number and IP number "and" exploring some of the history of the emergence of these and proving irrationality so that this research will serve as a supplement to basic education teachers about the subject. Keywords: rational numbers, irrational numbers, enumerability, PI, Euler number.

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	11
<b>LISTA DE TABELAS</b> .....	12
<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	13
<b>2. HISTÓRIA DOS IRRACIONAIS</b> .....	14
2.1. A crise com o surgimento dos irracionais: .....	14
2.2. A solução para a crise dada por Eudoxo. ....	15
2.3. Alguns números irracionais. ....	16
<b>3. NÚMEROS RACIONAIS E REAIS</b> .....	19
3.1. Relação de equivalência.....	19
3.2. O corpo $\mathbb{Q}$ dos números Racionais.....	20
3.3. O corpo $\mathbb{Q}$ é Ordenado. ....	23
3.4. O Corpo $\mathbb{Q}$ é Arquimediano. ....	24
3.5. O corpo $\mathbb{Q}$ não é completo. ....	25
3.6. Os cortes de Dedekind. ....	27
<b>4. CONJUNTOS ENUMERÁVEIS E NÃO ENUMERÁVEIS</b> .....	29
4.1. Definição. ....	29
4.2. Teoremas sobre enumerabilidade de conjuntos. ....	29
4.3. Enumerabilidade do conjunto dos números racionais.....	31
4.4. Os irracionais são não enumeráveis.....	32
4.5. O hotel de Hilbert .....	34
4.6. Números algébricos e transcendentess.....	36
<b>5. O NÚMERO <math>\pi</math></b> .....	40
5.1. Breve estudo sobre a Cronologia de $\pi$ .....	40
5.2. O método de Arquimedes para o cálculo do comprimento da circunferência.....	43
5.3. A irracionalidade do $\pi$ .....	48

<b>6. O NÚMERO “e”</b> .....	54
6.1. John Napier e a invenção dos logaritmos. ....	54
6.2. O limite do número e. ....	56
6.3. A irracionalidade do número e. ....	60
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	62
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	63
<b>APÊNDICE A</b> .....	65
<b>APÊNDICE B</b> .....	66

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 01:</b> Quadrado ABCD .....	14
<b>Figura 02:</b> Retângulo áureo.....	17
<b>Figura 03:</b> Círculo circunscrito num polígono.....	44
<b>Figura 04 :</b> Círculo inscrito em um polígono .....	45

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 01:</b> Cronologia de $\pi$ .....	41
<b>Tabela 02:</b> Razão entre os perímetros dos polígonos regulares inscritos e circunscritos em um círculo e os perímetros dos círculos.....	47
<b>Tabela 03:</b> Valores aproximados para o limite do número $e$ .....	57

## 1. INTRODUÇÃO

Os números irracionais, devido a grande frequência com que aparecem em problemas de matemática, são de grande importância para os alunos da Educação Básica. Em geral a apresentação destes números ao aluno da Educação Básica é feita de maneira muito precária e confusa. Este é um dos fatos que me motivou a redigir este trabalho.

Ao longo do capítulo dois, veremos o surgimento das grandezas incomensuráveis, que não foi logo aceita pela comunidade pitagórica, dado que eles não acreditavam na existência de alguma grandeza que não pudesse ser representada como a razão entre dois números inteiros. Veremos também que Eudoxo tentou fugir dessa discussão usando proporções e por último veremos resultados a respeito de alguns números irracionais conhecidos.

No capítulo três tratamos da construção do conjunto dos números racionais usando relações de equivalência, mostramos que os racionais formam um corpo ordenado, arquimediano que não é completo. Abordamos também a construção dos números reais usando a noção de Corte de Dedekind.

No quarto capítulo estudamos a enumerabilidade do conjunto dos números racionais. É mostrado também neste capítulo que o conjunto dos números irracionais não é enumerável e vemos a ilustração do hotel de Hilbert que ajuda a esclarecer de maneira elegante a ideia de enumerabilidade. Finalmente, neste capítulo, apresentamos os conceitos de número algébrico e número transcendente.

Nos dois últimos capítulos estudaremos acerca de dois números irracionais bastante conhecidos pelos professores da Educação Básica, os números  $\pi$  e "e", desde a cronologia dos mesmos até a prova da irracionalidade deles.

Esperamos que, munido deste trabalho, um professor da Educação Básica tenha uma nova e mais ampla visão acerca dos números irracionais de modo que, quando necessário, tenha mais facilidade e mais segurança ao apresentar o assunto a seus alunos.

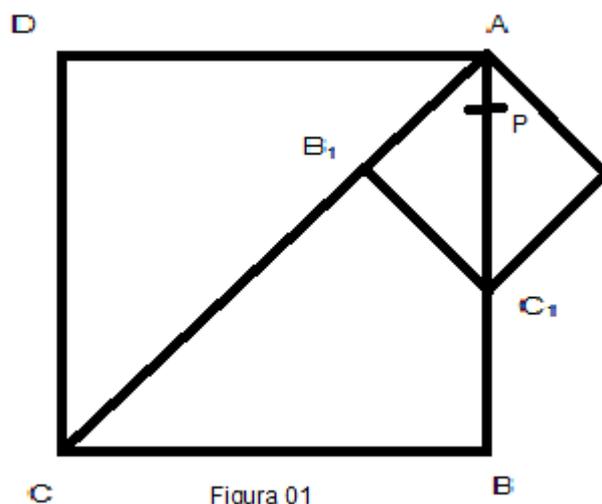
## 2. HISTÓRIA DOS IRRACIONAIS

### 2.1. A crise com o surgimento dos irracionais

Vivemos em um mundo que constantemente nos propõe alguma situação que envolva medida. Mas o que vem a ser medida? Bem sabemos que medir é comparar duas grandezas de uma mesma espécie. Os matemáticos da Grécia antiga tratavam das medidas usando o conceito de grandezas comensuráveis. (O leitor interessado pode consultar Lima, Elon Lages, 2006, p. 52-54).

Ocorrem casos em que dois segmentos não são comensuráveis, ou seja, dados dois segmentos  $AB$  e  $CD$ , não podemos compará-los. Um exemplo bem conhecido é o caso da diagonal do quadrado de lado 1, que ao aplicarmos o teorema de Pitágoras encontramos a medida desta igual a  $\sqrt{2}$  unidades, mas este número não pode ser escrito como razão entre dois inteiros dados.

Podemos ver de uma maneira geométrica que o lado e a diagonal de um quadrado são incomensuráveis.



Vamos inicialmente supor que o lado e a diagonal de um quadrado sejam comensuráveis. Então existe um segmento  $AP$ , tal que  $AB$  e  $AC$  são múltiplos inteiros de  $AP$ . Seja o ponto  $B_1$  em  $AC$  tal que  $CB_1$  e  $AB$  tenha a mesma medida e seja ainda o segmento de reta  $B_1C_1$ , onde  $C_1$  é um ponto sobre  $AB$  e os segmentos  $B_1C_1$  e  $AC$  sejam

perpendiculares. Observe que os triângulos  $ABC$  e  $AB_1C_1$  são semelhantes, pois têm os três ângulos congruentes. Daí,  $\frac{AB}{BC} = \frac{AB_1}{B_1C_1} = 1$ , logo  $AB_1 = B_1C_1$ . Observando ainda os triângulos

$CBC_1$  e  $CB_1C_1$  são congruentes pelo caso especial de congruência entre triângulos retângulos, já que a diagonal  $CC_1$  é comum aos dois e os catetos  $CB_1$  e  $CB$  tem mesma medida, então  $B_1C_1 = BC_1$ . Portanto,  $AB_1 = B_1C_1 = BC_1$ . Isto implica que  $AC_1 = AB - C_1B = AB - AB_1$ . Note que  $AC_1$  e  $AB_1$  são a diagonal e o lado de um quadrado com dimensões menores que a metade do quadrado inicial e são comensuráveis com  $AP$ . Repetindo o processo várias vezes quanto necessário iremos obter um quadrado com diagonal  $AC_n$  e lado  $AB_n$  que são comensuráveis com  $AP$  e  $AC_n < AP$ . Mas isto é um absurdo que foi obtido através da nossa hipótese de que o lado e a diagonal de um quadrado sejam comensuráveis.

O Surgimento das grandezas incomensuráveis não foi aceito de bom grado na escola dos pitagóricos.

Segundo Eves (2004, p.106),

A descoberta da existência de números irracionais foi surpreendente e perturbadora para os pitagóricos. Em primeiro lugar porque parecia desferir um golpe mortal na filosofia pitagórica segundo a qual tudo dependia de números inteiros. Além disso, parecia contrária ao senso comum, pois intuitivamente havia o sentimento de que toda grandeza poderia ser expressa por algum número racional.

Estava instalada a chamada crise dos incomensuráveis.

## 2.2. A solução para a crise dada por Eudoxo.

Por um bom tempo  $\sqrt{2}$  era o único irracional conhecido pelos pitagóricos, que esconderam a descoberta dessa grandeza incomensurável por muito tempo. Por volta de 425 a.C. Teodoro de Cirene provou que  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{6}$ ,  $\sqrt{7}$ ,  $\sqrt{8}$ ,  $\sqrt{10}$ ,  $\sqrt{11}$ ,  $\sqrt{12}$ ,  $\sqrt{13}$ ,  $\sqrt{14}$ ,  $\sqrt{15}$  e  $\sqrt{17}$  são irracionais. Eudoxo, por volta de 370 a.C., forneceu uma solução para a chamada “crise dos incomensuráveis” usando uma nova definição de proporções.

Para fugir da discussão acerca da natureza dos números irracionais, Eudoxo definiu a igualdade entre duas razões da seguinte maneira.

Diz-se que quatro grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta se, quando equimúltiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que, os últimos equimúltiplos considerados em ordem correspondentes.

Ou seja, se considerarmos os segmentos AD, DB, AE e EC (mesmo que estes sejam incomensuráveis), temos que se  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$  então, existem m e n inteiros positivos tais que:

Se  $m \cdot DB < n \cdot AD$ , então  $m \cdot EC < n \cdot AE$

Se  $m \cdot DB > n \cdot AD$ , então  $m \cdot EC > n \cdot AE$

Se  $m \cdot DB = n \cdot AD$ , então  $m \cdot EC = n \cdot AE$

Por volta do ano de 1858, o matemático Dedekind viria a desenvolver uma teoria sobre a continuidade dos números reais inspirado na teoria das proporções de Eudoxo, da qual falaremos posteriormente.

### 2.3. Alguns números irracionais.

Dedicaremos este tópico a outros números irracionais conhecidos e que o professor de matemática usa frequentemente em suas aulas.

#### 2.3.1. Raízes quadradas irracionais

Inicialmente apresentamos uma generalização do resultado obtido por Teodoro de Cirene (já citado no tópico anterior): dado um número natural, se este número não for um quadrado perfeito então a sua raiz quadrada será um número irracional.

Teorema 2.3.1. Seja  $a \in \mathbb{N}$ . Se a não é quadrado perfeito, então  $\sqrt{a}$  é irracional.

Prova: Usaremos o Princípio da Boa ordem que afirma: todo subconjunto não vazio de  $\mathbb{N}$  possui um menor elemento.

Se  $\sqrt{a}$  é racional, o conjunto  $B = \{b \in \mathbb{N} / b\sqrt{a} \in \mathbb{N}\}$  é não vazio. O Princípio da Boa Ordem nos garante que B possui um menor elemento. Seja  $b_0$  este elemento e seja

$p = b_0\sqrt{a} - b_0[\sqrt{a}]$ , onde  $[\sqrt{a}]$  é o maior inteiro menor que  $\sqrt{a}$ . Como  $a$  não é quadrado perfeito então sua raiz não é exata, e:

$$p = b_0\sqrt{a} - b_0[\sqrt{a}] = b_0(\sqrt{a} - [\sqrt{a}]) < b_0$$

Por outro lado  $p\sqrt{a} = b_0a - b_0\sqrt{a}[\sqrt{a}]$  com  $b_0a \in \mathbb{N}$  e  $b_0\sqrt{a}[\sqrt{a}] \in \mathbb{N}$ . Assim  $p\sqrt{a} \in \mathbb{N}$ . Isto é um absurdo dado que  $b_0$  é o menor elemento de  $B$  e  $p\sqrt{a} < b_0$ .

Portanto,  $\sqrt{a}$  é irracional.

### 2.3.2. O número de ouro.

Outro número irracional que merece nossa atenção é o chamado número de ouro. Este é cercado de mistério e enigmas a tal ponto de ser considerado como uma oferta de Deus para a humanidade. Uma das figuras geométricas em que o número de ouro (razão áurea) aparece é o chamado retângulo áureo. Este é um retângulo tal que se dele supirmos um quadrado cujo lado tem a mesma medida do menor dos lados do retângulo, então a figura restante será outro retângulo semelhante ao inicial.

Vejamos a construção do mesmo.

- i) Seja um quadrado com vértices ABCD e lado  $a$ .
- ii) Se  $M$  é o ponto médio do segmento  $AD$ , trace com um compasso centrado em  $M$  e com abertura igual a  $CM$ , o arco de circunferência até que este encontre o prolongamento de  $AD$  no ponto  $E$ .
- iii) O retângulo  $ABEF$  é um retângulo de ouro, assim como também será o retângulo  $CDEF$  e este processo pode ser repetido infinitas vezes gerando assim mais retângulos semelhantes ao primeiro e cuja razão de semelhança é a chamada razão áurea.

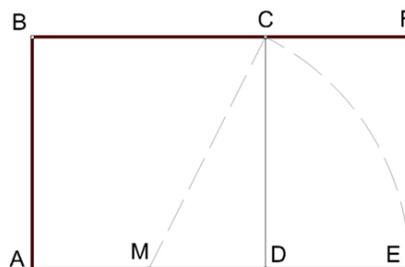


FIGURA 02

De fato seja  $a$  o lado do quadrado ABCD, temos que  $CM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ . É fácil ver que

os retângulos ABEF e CDEF são semelhantes pois,  $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{DE}$  e a razão de semelhança é

dada por:

$$\frac{\frac{a + a\sqrt{5}}{2}}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi.$$

### 2.3.3. Os números $\pi$ e $e$ .

Outros números irracionais que chamam atenção são os números “ $e$ ” e  $\pi$ . Este aparece em várias partes da matemática e é conhecido a aproximadamente 4000 anos. Podemos determinar o número  $\pi$  por variados métodos: razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro; razão entre a área de um círculo e o quadrado do seu raio; razão entre a área da esfera e o quadrado do seu diâmetro, entre outras.

O número “ $e$ ” é apresentado aos alunos da educação básica no ensino médio, quando com o estudo dos logaritmos. O aparecimento (ou descoberta) dos logaritmos surgiu provavelmente em um tablete de argila da Mesopotâmia que datava de 1700 a.C que lançava um problema: “quanto tempo levará para uma soma de dinheiro dobrar se for investida a uma taxa de juros de 20 por cento, compostos anualmente?” e com o surgimento dos logaritmos começaram a aparecer situações matemáticas onde o número “ $e$ ” seria necessário pois este viria a ser chamado de base dos logaritmos naturais.

O grande matemático Leonhard Euler (1707 – 1783) também teve sua parcela de contribuição nos estudos envolvendo as constantes  $e$  e  $\pi$ .

Maor, 2008 (p. 199) afirma que:

Euler quase não deixou nenhuma área da matemática intocada, colocando sua marca em campos tão diversos quanto análise, teoria dos números, mecânica, hidrodinâmica, cartografia, topologia e teoria do movimento lunar... Além disso, devemos a Euler muitos símbolos matemáticos que usamos hoje em dia, entre eles  $i$ ,  $e$ ,  $\pi$  e a notação  $f(x)$  para representar a imagem de um ponto  $x$  por uma função  $f$ .

### 3. NÚMEROS RACIONAIS E REAIS.

Neste capítulo estudaremos os dois conjuntos (Racionais e Reais), primeiramente faremos a construção do conjunto dos números racionais. Para tais construções iremos aceitar a existência dos conjuntos dos números naturais  $\mathbb{N}$  e dos números inteiros  $\mathbb{Z}$ . Para a construção dos Racionais vamos usar o conceito de Relação de Equivalência que será o tema do primeiro parágrafo deste capítulo.

#### 3.1. Relação de equivalência.

Seja  $A$  um conjunto não vazio, definimos uma relação binária  $R$  como sendo um subconjunto do produto cartesiano de  $A \times A = \{(a, b) / a, b \in A\}$ . Se esta relação goza de algumas propriedades como: reflexividade, simetria, e transitividade, dizemos que “ $R$ ” é uma relação de equivalência sobre o conjunto  $A$ . Usaremos a notação  $xRy$  para significar que  $(x,y) \in R$ . Portanto,  $R$  é uma relação sobre  $A$  se:

- i)  $x R x, \forall x \in A$  (reflexividade).
- ii) Se  $x, y \in A$  e  $x R y$ , então  $y R x$  (simetria).
- iii) Se  $x, y$  e  $z \in A$ , são tais que  $x R y$  e  $y R z$ , então  $x R z$  (transitividade).

Usamos as relações de equivalência para classificar os elementos de um conjunto de acordo com propriedades partilhadas entre eles. Se  $R$  é uma relação de equivalência sobre  $A$ , então dado um elemento  $a \in A$ , definimos classe de equivalência determinada por  $a$  módulo  $R$ , como o conjunto  $\bar{a} = \{x \in A / xRa\}$

O conjunto das classes de equivalência módulo  $R$  será representado por  $A/R$  que chamaremos de conjunto quociente de  $A$  por  $R$ .

Para a construção de  $\mathbb{Q}$ , vamos considerar  $\mathbb{Q}' = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ , onde  $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  e definir em  $\mathbb{Q}'$  a relação  $(a,b) R (c,d)$  se, e somente se  $a.d = b.c$ .

Mostraremos que  $R$  é uma relação de equivalência.

De fato, para todo  $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{Q}'$ , temos:

- i)  $(a, b) R (a, b)$ , pois  $ab = ba$ .

ii) Se  $(a, b) R (c, d)$  então  $ad = bc = cb = da$  Portanto,  $(c, d) R (a, b)$

iii) Se  $(a, b) R (c, d)$ , então  $ad = bc$

Se  $(c, d) R (e, f)$ , então  $cf = de$ .

Multiplicando as duas igualdades acima, obtemos,

$$adcf = bcde$$

assim, temos que:  $adcf - bcde = 0$

então,  $cd(af - be) = 0$ , como  $cd \neq 0$ , então  $af - be = 0$ , donde concluímos que

$$af = be$$

Logo  $(a, b) R (e, f)$ .

A classe de equivalência determinada por  $(a, b) \in \mathbb{Q}'$ ,

$\overline{(a, b)} = \{(c, d) \in \mathbb{Q}' / (c, d) R (a, b)\}$  será representada por  $\frac{a}{b}$ .

Definimos o conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais como o conjunto formado por todas as classes de equivalência do conjunto  $\mathbb{Q}'$  com respeito à relação  $R$ , isto é  $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}'/R$

ou  $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$ .

### 3.2. O corpo $\mathbb{Q}$ dos números Racionais.

Seja  $\mathbb{k}$  um conjunto munido de duas operações binárias, chamadas adição e multiplicação da seguinte maneira: a cada par  $x, y \in \mathbb{k}$  a adição e a multiplicação fazem corresponder, respectivamente, a sua soma  $x + y \in \mathbb{k}$  e o seu produto  $x \cdot y \in \mathbb{k}$ . Dizemos que o terno  $(\mathbb{k}, +, \cdot)$  é um corpo se valem as seguintes propriedades:

$$A1: x + y = y + x \quad (\forall x, y \in \mathbb{k}) \quad \text{Comutatividade}$$

$$A2: (x + y) + z = x + (y + z) \quad (\forall x, y, z \in \mathbb{k}) \quad \text{Associatividade}$$

$$A3: \text{Existe um elemento } 0 \in \mathbb{k} \text{ tal que } 0 + x = x \quad (\forall x \in \mathbb{k}) \quad \text{Elemento neutro}$$

A4:  $\forall x \in \mathbb{K}$ , existe um  $(-x) \in \mathbb{K}$  tal que  $x + (-x) = 0$  ( $\forall x \in \mathbb{K}$ )

Denotaremos  $-x$  o elemento oposto de  $x$ , com relação a adição.

M1:  $x \cdot y = y \cdot x$  ( $\forall x, y \in \mathbb{K}$ ) comutatividade

M2:  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$  ( $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$ ) Associatividade

M3: Existe um elemento  $1 \in \mathbb{K}$ , tal que  $1 \cdot x = x$  ( $\forall x \in \mathbb{K}$ ) elemento neutro

M4: Para cada  $x \in \mathbb{K}^*$ , existe um  $x^{-1} \in \mathbb{K}^*$ , tal que  $x \cdot x^{-1} = 1$  Inverso multiplicativo.

AM:  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$  ( $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$ ) Distributividade

Vamos agora definir em  $\mathbb{Q}$  a adição e a multiplicação como segue:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \forall a, c \in \mathbb{Z}, b, d \in \mathbb{Z}^*$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \forall a, c \in \mathbb{Z}, b, d \in \mathbb{Z}^*$$

Não é difícil a verificação de que as operações acima estão bem definidas.

Observe que  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ .

Para mostrar que  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  é um corpo, verificaremos que ele satisfaz às propriedades A1, A2, A3, A4, M1, M2, M3, M4 e AM citadas.

$$A1: \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}. \quad \left( \forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} \right)$$

De fato,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} = \frac{cb + da}{db} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

$$A2: \left[ \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right] + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left[ \frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right]. \quad \left( \forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q} \right)$$

De fato, temos:

$$\left[ \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right] + \frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{bd} + \frac{e}{f} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf} = \frac{a}{b} + \frac{cf + de}{df} = \frac{a}{b} + \left[ \frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right].$$

A3: Para todo  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \exists \frac{0}{k} = 0 \in \mathbb{Q}$ , tal que  $0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ .

De fato, note que usando a adição neste conjunto temos que:

$$0 + \frac{a}{b} = \frac{0}{k} + \frac{a}{b} = \frac{ak + b0}{bk} = \frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}$$

A4: para cada  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  existe  $\frac{-a}{b} \in \mathbb{Q}$ , tal que  $\frac{a}{b} + \left(\frac{-a}{b}\right) = 0$ .

De fato, temos:

$$\frac{a}{b} + \left(\frac{-a}{b}\right) = \frac{ab + (-ba)}{b^2} = \frac{0}{b^2} = 0$$

M1:  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} \quad \forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$

De fato,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$$

M2:  $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) \quad \forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$

De fato, temos:

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf} = \frac{a}{b} \cdot \frac{ce}{df} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$$

M3: Existe  $\frac{k}{k} = 1 \in \mathbb{Q}$ , tal que  $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$ , para todo  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  De fato, note que:

$$\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{k}{k} = \frac{a.k}{b.k} = \frac{a}{b}$$

M4: para todo  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ , existe um  $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ , tal que  $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ .

De fato,  $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1$

AM:  $\frac{a}{b} \left( \frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} \quad \forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$

De fato, temos:

$$\frac{a}{b} \left( \frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right) = \frac{a}{b} \cdot \left( \frac{cf + de}{df} \right) = \frac{acf + ade}{bdf}$$

Por outro lado temos que,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{acbf + bdae}{bdbf} = \frac{acf + ade}{bdf}$$

Daí, concluímos que  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  é um corpo.

Observe que  $\mathbb{Z}$  pode ser identificado como um subconjunto de  $\mathbb{Q}$ , dado por

$$\left\{ \frac{n}{1} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

### 3.3. O corpo $\mathbb{Q}$ é Ordenado.

Dizemos que uma relação  $\leq$  em um corpo  $\mathbb{k}$  é uma relação de ordem, se dados  $x, y$  e  $z \in \mathbb{k}$ , sejam válidas as seguintes propriedades:

- i) Se  $x \leq y$  e  $y \leq z$ , então  $x \leq z$  (Transitividade)
- ii) Se  $x \leq y$  e  $y \leq x$ , então  $x = y$  (Antissimétrica)
- iii) Temos que  $x \leq y$  ou  $y \leq x$  (A ordem é total)
- iv) Se  $x \leq y$  então,  $x + z \leq y + z$ , (Monotonicidade da adição)
- v) Se  $x \leq y$ , então  $x \cdot z \leq y \cdot z$  caso  $z \geq 0$  (Monotonicidade da multiplicação)

Se um corpo satisfaz as condições acima, dizemos que  $(\mathbb{k}, +, \cdot, \leq)$ , é um corpo ordenado.

A relação definida em  $\mathbb{Q}$  por  $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \leq bc$  é uma relação de ordem sobre  $\mathbb{Q}$ . Devido à simplicidade das demonstrações das propriedades de ordem, provaremos apenas as monotonicidades.

Monotonicidade da adição:

Dados  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ . Temos que:

$$\text{se } \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}, \text{ então } \frac{a}{b} + \frac{e}{f} = \frac{af + be}{bf} \leq \frac{cf + de}{df} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$$

Monotonicidade da multiplicação:

$$\text{se } \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \text{ e } (e.f) > 0, \text{ então:}$$

$$\text{i) } aedf \leq cebf \Leftrightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} \leq \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

Assim, concluímos que  $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$  é um corpo ordenado.

### 3.4. O Corpo $\mathbb{Q}$ é Arquimediano.

Dizemos que um corpo ordenado  $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$  é arquimediano se este possui um subconjunto  $A$ , ilimitado superiormente, ou seja, para todo  $x \in \mathbb{K}$ , existe  $m \in A$  tal que  $x < m$ .

É fácil ver que  $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$  é um corpo Arquimediano, pois se  $x$  é um número racional positivo, então existem  $m \in \mathbb{Z}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , tais que  $x = m/n$ . como  $x$  é positivo, então  $m \in \mathbb{N}$ . Daí,  $x = m/n \leq m < m+1 \in \mathbb{N}$ .

### 3.5. O corpo $\mathbb{Q}$ não é completo.

A partir daqui, já sabemos que o conjunto  $\mathbb{Q}$  é um corpo ordenado. Porém querendo aprofundar mais precisamos saber se  $\mathbb{Q}$  é completo, ou seja, se para cada ponto da reta real podemos associar um único número racional. A resposta para isso é negativa, como veremos agora, para tanto vejamos algumas definições.

**Definição 3.5.1. (Cota Superior)** – Sejam  $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$  um corpo ordenado e  $A \subset \mathbb{K}$ . Se existe um elemento  $b \in \mathbb{K}$  tal que  $x \leq b$ , para todo  $x \in A$ , então dizemos que  $b$  é uma cota superior de  $A$ . Neste caso, dizemos que  $A$  é limitado superiormente.

**Definição 3.5.2. (Cota Inferior)** – Sejam  $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$  um corpo ordenado e  $A \subset \mathbb{K}$ . Se existe um elemento  $a \in \mathbb{K}$  tal que  $x \geq a$ , para todo  $x \in A$ , então dizemos que  $a$  é uma cota inferior de  $A$ . Neste caso, dizemos que  $A$  é limitado inferiormente.

**Definição 3.5.4. (Supremo)** – Sejam  $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$  um corpo ordenado e  $A \subset \mathbb{K}$ . Se  $s$  é uma cota superior de  $A$  e não existe nenhuma cota superior menor que  $s$ , então  $s$  é definido como supremo do conjunto  $A$ , denotamos por  $s = \sup(A)$ .

**Definição 3.5.5. (Ínfimo)** – Sejam  $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$  um corpo ordenado e  $A \subset \mathbb{K}$ . Se  $r$  é uma cota inferior de  $A$  e não existe nenhuma cota inferior maior que  $r$ , então  $r$  é definido como ínfimo do conjunto  $A$ , denotamos por  $r = \inf(A)$ .

**(Axioma do Supremo)** – Dizemos que um corpo ordenado  $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ , é completo se todo subconjunto de  $\mathbb{K}$  não vazio limitado superiormente tem supremo (finito).

**Teorema:** seja  $\mathbb{K}$  um corpo ordenado.  $\mathbb{K}$  é completo se, e somente se, todo conjunto limitado inferiormente e não vazio  $A \subset \mathbb{K}$  tem ínfimo.

Prova:

Seja um conjunto  $A$  não vazio,  $A \subset \mathbb{K}$ , limitado inferiormente. Considere o conjunto  $-A = \{-a \mid a \in A\} \subset \mathbb{K}$ . Como  $A$  é limitado inferiormente, então existe um  $k \in \mathbb{K}$ , tal que  $k \leq a$ ,  $\forall a \in A$ . Assim, temos que  $-k \geq -a$ ,  $\forall -a \in -A$ . logo  $-A$  é limitado superiormente em  $\mathbb{K}$ . Assim, pelo Axioma do Supremo  $\mathbb{K}$  é completo. Analogamente podemos ver que se  $A$  é limitado superiormente, então  $-A$  é limitado inferiormente.

**Afirmação:** O corpo  $\mathbb{Q}$ , dos números racionais não é completo.

De fato, para provar tal afirmação devemos encontrar pelo menos um subconjunto de  $\mathbb{Q}$ , que seja limitado, mas não possua supremo (ou ínfimo). Seja o corpo  $\mathbb{Q}$  e os conjuntos  $A = \{a \in \mathbb{Q} / a \geq 0 \text{ e } a^2 < 2\}$  e  $B = \{b \in \mathbb{Q} / b \geq 0 \text{ e } b^2 > 2\}$ . Veja que:

i) Os conjuntos A e B são limitados de modo que o supremo de A e o ínfimo de B são iguais a  $\sqrt{2}$ , mas pelo teorema 2.3.1. este número não é racional.

ii) Prova de que o conjunto A não possui elemento máximo.

De fato, seja  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $r < 1$  tal que  $0 < r < \frac{2-a^2}{2a+1}$ ,  $a \in A$ . Se  $0 \leq a$  e  $a^2 \leq 2$ , então

temos que  $2 - a^2 > 0$  e  $2a + 1 \geq 1$ , logo  $\frac{2-a^2}{2a+1} > 0$ .

$$r < 1 \Rightarrow r^2 < r$$

$$r < \frac{2-a^2}{2a+1} \Rightarrow r(2a+1) < 2-a^2$$

temos também que:

$$(a+r)^2 = a^2 + 2ar + r^2 < a^2 + 2ar + r < a^2 + 2 - a^2$$

$$\Rightarrow (a+r)^2 < 2 \Rightarrow a+r \in A.$$

iii) Prova de que o conjunto B não possui elemento mínimo.

Se  $b^2 > 2$  e  $b > 0$ ,  $b \in B$ , então  $b^2 - 2 > 0$  e  $2b > 0$ , isto é,  $\frac{b^2-2}{2b} > 0$ , assim

existe um racional  $r$  tal que  $0 < r < \frac{b^2-2}{2b}$ , daí temos que  $2br < b^2 - 2$  e ainda podemos

observar que:

$$(b-r)^2 = b^2 - 2br + r^2 > b^2 - (b^2 - 2) + r^2 = r^2 + 2 > 2. \text{ Temos também que:}$$

$$\frac{b^2-2}{2b} = \frac{b}{2} - \frac{1}{b}, \text{ portanto } b-r > b - \frac{b}{2} + \frac{1}{b} = \frac{b}{2} + \frac{1}{b} > 0. \text{ Logo, } (b-r) > 0 \text{ e } (b$$

$-r)^2 > 0$ , ou seja,  $b-r \in B$ .

iv) Se  $a \in A$  e  $b \in B$ , então  $a < b$ .

Pela definição de A e B temos que  $a^2 < 2 < b^2$ , então  $a < b$ .

v) O conjunto A não possui um supremo em  $\mathbb{Q}$ .

Suponha que existe um l tal que  $l = \sup(A) \in \mathbb{Q}$ . Como  $l > 0$ , não podemos ter que  $l^2 < 2$ , pois nesse caso  $\sup(A) \in A$ , ou seja,  $\sup(A)$  é o elemento máximo de A, mas A não possui elemento máximo (contradição).

Suponha agora que  $l^2 > 2$ . Desta forma,  $l \in B$ , mas sabemos que B não possui elemento mínimo, logo existe  $m \in B$ , tal que para qualquer  $a \in A$ , teríamos  $a < m < l$ , isto é, teríamos uma cota superior para A menor que  $l = \sup(A)$ . (Contradição)

Assim, podemos afirmar que  $l^2 = 2$ . O que não pode ocorrer já que não existe número racional l tal que  $l^2 = 2$ . Portanto não existe  $\sup(A)$  em  $\mathbb{Q}$ .

Isto prova, de acordo com o Axioma do Supremo, que  $\mathbb{Q}$  não é completo.

### 3.6. Os cortes de Dedekind.

Como vimos no parágrafo anterior, o conjunto dos racionais não é completo de forma que se associarmos cada número racional a um ponto da reta esta ficará com “buracos”. Isto nos leva a buscar um conjunto numérico de tal modo que obtenhamos uma continuidade para a reta.

Segundo Caraça (1951, p. 57),

O problema da continuidade é dos mais importantes da ciência e dos que mais tem sido estudados e debatidos em todos os tempos. Todos nós temos uma noção intuitiva da continuidade como a de uma variação que se faz por gradações insensíveis. Mas, na continuidade, há mais alguma coisa que isso: naquilo que para nós é a imagem ideal da continuidade - A linha reta - há mais do que simples variação por gradações insensíveis. A reta ultrapassa em riqueza interior de estrutura, esse simples variar gradualmente, sem saltos, sem, como habitualmente se diz, soluções de continuidade.

Entre os matemáticos que se preocuparam em resolver esse problema temos J. W. R. Dedekind, nascido em Braunschweig, Alemanha, no ano de 1831, nunca se casou e viveu até os oitenta anos. Iniciou-se cedo na matemática entrando em Göttingen aos dezenove anos e obteve seu doutorado três anos depois com uma tese sobre o Cálculo, tese esta que foi elogiada por Gauss.

Em 1872, Dedekind publicou uma obra que levava o título “Continuidade e números irracionais”, que procurava dar um tratamento rigoroso a conceito de continuidade. Dedekind começa com o seguinte questionamento: *“Nós atribuímos á reta a qualidade de ser completa, sem lacunas, ou seja, contínua. Mas esta continuidade em que consiste?”*.

Dedekind verificou que todo ponto da reta determina uma decomposição da mesma em duas partes, de tal natureza que todo o ponto de uma delas esteja a esquerda de todo o ponto da outra.

Dedekind caracteriza a continuidade da reta pela afirmação conhecida como axioma de Dedekind-Cantor<sup>1</sup>.

O axioma diz que todo corte da reta é produzido por um ponto dela, assim qualquer que seja o corte (A,B) existe sempre um ponto da reta que separa as duas classes (A) e (B).

Definição 3.6.1. Um corte nos números racionais é um conjunto não vazio de racionais  $\Omega \subset \mathbb{Q}$ , satisfazendo as seguintes condições:

- i) Se  $p \in \Omega$ ,  $q \in \mathbb{Q}$  e  $q < p$ . Então  $q \in \Omega$ .
- ii) Se  $p \in \Omega$  então existe  $q \in \Omega$  tal que  $q > p$ .
- iii)  $\Omega \neq \mathbb{Q}$

Assim, um corte pode ser determinado por um número racional como, por exemplo,  $\Omega = \{p \in \mathbb{Q} / p < 2\}$  é determinado pelo número racional 2. Porém existem cortes que não são determinados por números racionais como, por exemplo,  $\Omega = \{p \in \mathbb{Q} / p^2 < 2\}$  que, como já foi mostrado, a classe A não possui um elemento máximo nem B possui um elemento mínimo.

Assim, Dedekind deu a seguinte definição: *“chamo número real ao elemento de separação das duas classes dum corte qualquer no conjunto dos números racionais; se existir um número racional a separar as duas classes, o número real coincidirá com esse número racional; se não existe tal número, o número real dir-se-a irracional”*

---

<sup>1</sup> Pouco tempo depois G. Cantor formulou a caracterização da continuidade de maneira semelhante, o que levou o enunciado a ser conhecido como Axioma da Continuidade de Dedekind-Cantor.

Usando cortes pode-se mostrar que os mesmos formam corpo ordenado e completo que é isomorfo ao conjunto dos números reais. Para tal recomendo Cássio Neri & Marco Cabral no livro Curso de Análise Real (p. 36 – 45).

## 4. CONJUNTOS ENUMERÁVEIS E NÃO ENUMERÁVEIS.

### 4.1. Definições.

Definição 4.1.1. Um conjunto  $A$  é enumerável se ele é vazio ou se existe uma função injetiva  $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ . Caso contrário dizemos que  $A$  é não enumerável.”

Definição 4.1.2. Seja  $A$  um conjunto não vazio. Se existe  $n \in \mathbb{N}$  e uma função injetiva  $g : A \rightarrow \{1, \dots, n\}$ , diremos que  $A$  é finito, caso contrário,  $A$  é infinito. O menor número que verifica esta propriedade é dito número de elementos de  $A$ . representaremos por  $\# A = n$ .

Definição 4.1.3. Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos não vazios. Dizemos que  $A$  e  $B$  tem mesma cardinalidade, ou seja  $\# A = \# B$ , se existe uma bijeção  $f : A \rightarrow B$ . Caso contrário, diremos que eles tem cardinalidades diferentes e escreveremos  $\# A \neq \# B$ .

Definição 4.1.4. Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos não vazios, Se existe uma função injetiva  $f : A \rightarrow B$ , então dizemos que a cardinalidade de  $A$  é menor do que, ou igual à de  $B$  e escrevemos  $\# A \leq \# B$ . Se existe uma função sobrejetiva  $g : A \rightarrow B$ , então diremos que a cardinalidade de  $A$  é maior do que, ou igual a de  $B$  e escrevemos  $\# A \geq \# B$ . Se a  $\# A \leq \# B$  e  $\# A \neq \# B$ , dizemos que a cardinalidade de  $A$  é menor que a de  $B$ . Se a  $\# A \geq \# B$  e  $\# A \neq \# B$ , dizemos que a cardinalidade de  $A$  é maior que a de  $B$ .

Portanto, temos que dado  $A \neq \emptyset$ ,  $A$  é enumerável se, e somente se  $\# A \leq \# \mathbb{N}$ .

### 4.2. Teoremas sobre enumerabilidade de conjuntos.

Teorema 4.2.1 – A união de um conjunto finito com um conjunto enumerável é enumerável.

Prova: Seja  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  e seja  $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ . Basta fazer uma correspondência biunívoca entre  $A \cup B$  e  $\mathbb{N}$  do modo a seguir:

$$\begin{aligned}
 a_1 &\leftrightarrow 1 \\
 a_2 &\leftrightarrow 2 \\
 &\vdots \\
 a_n &\leftrightarrow n \\
 b_1 &\leftrightarrow n+1 \\
 b_2 &\leftrightarrow n+2 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Concluindo o resultado.

**Teorema 4.2.2** – A união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.

Prova: Sejam os conjuntos  $A = \{a_1, a_2, \dots\}$  e  $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ , então podemos estabelecer uma relação biunívoca entre  $A \cup B$  e  $\mathbb{N}$  do modo a seguir:

$$f(a_n) = 2n-1 \text{ e } f(b_n) = 2n.$$

**Teorema 4.2.3** – A união de um número finito de conjunto enumeráveis é enumerável.

Prova: sejam os conjuntos  $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \dots\}$ ,  $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \dots\}, \dots, A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \dots\}$ , podemos criar uma relação biunívoca de  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  e  $\mathbb{N}$  do seguinte modo:

Colocaremos os elementos dos conjuntos em uma tabela do seguinte modo: os elementos do conjunto  $A_i$  serão dispostos na linha  $i$ , seguindo a ordem crescente e teremos o resultado desejado.

**Teorema 4.2.4** – A união de um conjunto enumerável de conjuntos finitos é enumerável.

Prova: Sejam os conjuntos  $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}\}$ ,  $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m}\}$ , ..., podemos criar uma relação biunívoca de  $A_1 \cup A_2 \cup \dots$  e  $\mathbb{N}$  do seguinte modo:

Colocamos os elementos de cada conjunto, escrevendo um após o outro e associando cada elemento de cada conjunto aos elementos de  $\mathbb{N}$ , seguindo a ordem dos conjuntos generalizando o teorema 4.2.2.

**Teorema 4.2.5** – A união de um conjunto enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

Prova: Sejam os conjuntos  $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \dots\}$ ,  $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \dots\}$ , ..., podemos criar uma relação biunívoca de  $A_1 \cup A_2 \cup \dots$  e  $\mathbb{N}$  do seguinte modo:

Escrevemos os elementos dos conjuntos em uma tabela do seguinte modo:

$$\begin{array}{cccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & 
 \end{array}$$

Colocamos os elementos  $a_{ij}$ , na seguinte ordem:

Primeiro escolhemos os elementos de modo que a soma  $i+j$  siga a ordem crescente dos números naturais, mas assim vão ocorrer casos em que mais de um elemento terá os valores do  $i+j$  iguais, então nesse caso ordenaremos de acordo com a ordem crescente de  $i$ .

O que nos daria uma função com os valores abaixo:

$$f(a_{11}) = 1; f(a_{12})=2; f(a_{21}) = 3; f(a_{13}) = 4; f(a_{22}) =5; f(a_{31}) = 6$$

Continuando, seguimos com o resultado desejado.

Observação 1 - Se  $A$  é um conjunto enumerável e  $B \subset A$  é um conjunto infinito, então  $B$  é também enumerável. Isto é uma consequência imediata dos teoremas anteriores. Assim, a união de um conjunto enumerável com um conjunto não enumerável não pode ser enumerável.

### 4.3. Enumerabilidade do conjunto dos números racionais.

Mostraremos agora o seguinte teorema.

Teorema 4.3.1. O conjunto dos números racionais é enumerável.

Prova:

Devemos encontrar uma função injetiva  $f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{N}$ . Assim, inicialmente escrevemos todos os elementos de  $\mathbb{Q}^+$  em uma tabela com linhas e colunas, de modo que cada fração  $\frac{i}{j}$ , esteja localizada na linha  $i$  e na coluna  $j$ , conforme distribuição abaixo:

$$\begin{array}{cccc}
 \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \dots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} \dots \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

A nossa função será semelhante à usada no teorema 4.2.5, ou seja, vamos colocar as frações da forma  $\frac{i}{j}$  usando a ordem crescente da soma  $i+j$ . Assim como anteriormente, haverá casos em que teremos mais de uma fração com valores iguais para a soma do numerador e denominador, neste caso seguiremos de acordo com a ordem crescente do numerador.

. Note, porém que nos preocupamos apenas com os racionais positivos. Do mesmo modo mostramos que os números racionais negativos são enumeráveis. Assim seja  $\mathbb{Q}^+$  o conjunto dos números racionais positivos,  $\mathbb{Q}^-$  o conjunto dos números racionais negativos.

Como,  $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$  podemos usar os resultados dos teoremas 4.2.2 e 4.2.3 para concluirmos que o conjunto dos números racionais é enumerável.

#### 4.4. Os irracionais são não enumeráveis.

Cada um dos números irracionais positivos pode ser representado por meio de uma única dízima não periódica. Veremos agora que os irracionais não podem ser enumerados, isto significa que existem muito mais números irracionais do que racionais.

Sabemos que as representações dos racionais podem ser de dois tipos: ou eles têm uma representação decimal com quantidade finita de casas, ou são representados por uma dízima periódica. Assim, se quisermos achar uma representação decimal para os irracionais, esta deverá ser representada por uma dízima não periódica.

Antes de começarmos a falar sobre a não enumerabilidade dos números irracionais mostraremos que cada representação decimal dos números irracionais é única.

De fato, suponha que um número irracional entre 0 e 1 tenha duas representações diferentes, neste caso, seja  $x$  este número. Temos que:

$$x = 0,a_1a_2a_3\dots \quad (1)$$

e

$$x = 0,b_1b_2b_3\dots \quad (2)$$

Se estas duas representações são distintas, então é claro que existe um  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $a_k = b_k$ , para  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , e  $a_n \neq b_n$ .

Podemos admitir que  $a_n \geq b_n + 1$  e por (1) e (2),

$$x \geq 0,a_1a_2\dots a_n \quad (3)$$

$$x \leq 0,b_1b_2\dots b_n999\dots = 0, b_1b_2\dots(b_n+1) = 0, a_1a_2\dots a_n \quad (4)$$

Visto que  $a_k = b_k$ , para  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  e  $b_k \leq 9$  para todo  $k$ . Note que (3) e (4) implicam que  $a_n = b_n + 1$  e  $x = 0,a_1a_2\dots a_n$ . Portanto chegamos à contradição de que  $x$  é racional. Obteríamos a mesma conclusão se tivéssemos assumido que  $b_k > a_k$ , bastando para isso trocar os papéis de  $a_k$  e  $b_k$ .

A prova do resultado acima foi feita baseada na demonstração feita por Hermano Frid (revista Eureka, edição especial, 2007, p. 38).

Para concluir esta seção vamos mostrar que os números reais não são enumeráveis. Para tanto, mostraremos como fez Figueirredo, Djairo Guedes (2011, p. 15).

Deteremo-nos aos números reais  $x$  que estão localizados entre 0 e 1, ou seja  $0 \leq x < 1$ . tais números tem uma representação decimal da forma

$$0,a_1a_2a_3\dots, \quad (5)$$

de modo que  $a_j$  é um dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. Alguns números racionais tem duas representações decimais, como por exemplo  $\frac{1}{2}$  pode ser representado por 0,5000... ou por 0,4999..... . No caso destes números, caso isto ocorra iremos eliminar a representação decimal que a partir de certa ordem tem todos os algarismos iguais a 9.

Vamos supor que todos os números reais representados em (5), formem um conjunto enumerável. Neste caso podemos fazer uma lista desses números da seguinte forma:

$$\begin{array}{l}
 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots \\
 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots \\
 0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots \\
 \vdots
 \end{array} \tag{6}$$

Agora forme a decimal  $0, b_1 b_2 b_3 \dots$ , de modo que todos os  $b_i$ s são diferentes de 0 ou de 9 e  $b_1 \neq a_{11}$ ,  $b_2 \neq a_{22}$ , .... Deste modo encontramos um número  $0, b_1 b_2 b_3 \dots \neq 0, a_{n1} a_{n2} a_{n3} \dots$ , para todo  $n$ , já que  $b_n \neq a_{nn}$ . Concluimos, portanto que  $0, b_1 b_2 b_3 \dots$ , não está na tabela (6), o que é um absurdo .

Sabemos que  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$ , sendo  $\mathbb{Q}$  um conjunto enumerável, então usando o fato de que  $\mathbb{R}$  não é enumerável, concluimos que  $\mathbb{Q}^c$  é um conjunto não enumerável, onde  $\mathbb{Q}^c$  é o conjunto dos números irracionais.

#### 4.5. O hotel de Hilbert

David Hilbert foi um matemático alemão que nasceu em 1862 na região de Königsberg. Lá, iniciou seus estudos sendo nomeado em 1895 para Göttingen, onde ele ensinou até se aposentar, em 1930. Hilbert é frequentemente considerado como um dos maiores matemáticos do século XX, no mesmo nível de Henri Poincaré.

De acordo com Boyer (1974, p.443),

No congresso de Paris de 1900, Hilbert, renomado professor de Göttingen, apresentou uma exposição em que tentou, com base nas tendências da pesquisa matemática no fim do glorioso século dezanove, prever a direção de progressos futuros. Isso ele fez propondo vinte e três problemas que ele acreditava que estariam ou deveriam estar entre os que ocupariam a atenção dos matemáticos no século vinte.

David Hilbert era um grande entusiasta das descobertas de Cantor. Para ilustrar o conceito de infinitude e enumerabilidade, Hilbert imaginou um hotel com infinitos quartos. Vejamos a ideia de Hilbert através de uma fantasia matemática.

O hotel de Hilbert tinha uma infinidade de quartos, numerados consecutivamente, um para cada número natural. Todos eram igualmente confortáveis.

Como é alta temporada, o hotel está lotado. Porém o painel localizado na sua entrada informa que há vagas disponíveis. Ao chegar um hóspede, este pede um quarto a Hilbert, que responde:

- Mesmo com o hotel completamente lotado, posso providenciar um quarto para o senhor. Então, Hilbert pede pelo alto-falante aos hóspedes, que todos os hóspedes do quarto  $n$  se mudem para o quarto  $n+1$ , assim o quarto de número  $n$  fica desocupado para acomodar o novo hóspede.

Como a época é de muita procura, logo chega um ônibus com uma quantidade enumerável de cadeiras, todas ocupadas, sendo que nenhum passageiro pode viajar em pé. O agente de viagens procura o Sr. Hilbert e o mesmo afirma novamente, que apesar de o hotel estar completamente lotado é possível desocupar quartos o suficiente para acomodar todos os passageiros do ônibus.

Novamente, Hilbert se dirige ao alto-falante e solicita aos hóspedes que estão no quarto de número  $n$ , que passem a ocupar os quartos de número  $2n$ . Hilbert avisa ao agente de viagens que acomode seus passageiros que estão na cadeira de número  $m$  nos quartos de número  $2m+1$ .

Imediatamente após acomodar os hóspedes do ônibus anterior, chegam ao hotel infinitos ônibus todos numerados, um para cada número natural e cada um desses infinitos ônibus está completamente ocupado, de modo que cada ônibus tem infinitos assentos numerados de acordo com os números naturais. Então o agente de viagens procura o Sr. Hilbert que prontamente desocupa quartos em quantidade suficientes para acomodar os hóspedes. O Sr. Hilbert vai ao alto-falante do hotel e pede para que os hóspedes que estão no quarto  $n$  passem a ocupar o quarto  $2^n$ . Então o gerente associa a cada ônibus um número primo diferente de dois. Então ele acomoda os passageiros segundo a seguinte regra: o passageiro que está na cadeira  $n$  do ônibus  $p$  ocupará o quarto  $p^n$ .

Finalizada a alta temporada, o hotel se esvazia totalmente, quando chega um ônibus com uma infinidade de cadeiras numeradas uma para cada número irracional maior que zero e menor que um, e o ônibus está completamente ocupado. Dessa vez, o Sr. Hilbert avisa que infelizmente não será capaz de acomodar todos os hóspedes, pois não há quartos suficientes para todos.

A justificativa matemática para os dois primeiros casos é imediata e fácil de ver. No terceiro caso, quando o Sr. Hilbert pede que todos os hóspedes passem a ocupar os

quartos de número  $2^n$ , então como podemos provar que na nova ordenação não vai haver quartos com mais de um hóspede?

Digamos que o passageiro que está sentado na cadeira  $a$  do ônibus  $p$  e o passageiro que está sentado na cadeira  $b$  do ônibus  $q$ , sendo  $p$  e  $q$  números primos da ordem estabelecida pelo Sr. Hilbert, então temos que:

$p^a = q^b$ , note que  $p^a$  é divisível por  $p$ , logo  $q^b$  também será divisível por  $p$ , o que implica que  $q$  é divisível por  $p$ , o que é um absurdo, dados que  $p$  e  $q$  são primos distintos.

A justificativa para que o Sr. Hilbert não tenha quartos suficientes para acomodar os passageiros do ultimo ônibus é devida ao fato demonstrado neste capítulo da não enumerabilidade dos irracionais.

## 4.6. Números algébricos e transcendentos.

### 4.6.1. Os inteiros algébricos

Um número é chamado de inteiro algébrico, se ele for solução de uma equação polinomial da forma,

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 = 0 \quad (1)$$

Onde, os coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  são números inteiros.

Note que dado um número inteiro  $\alpha$  qualquer, este é solução da equação,

$$x + \alpha = 0 \quad (2)$$

e, portanto,  $\alpha$  é um inteiro algébrico.

Temos ainda que todos os irracionais da forma  $-\sqrt{p}$  e  $\sqrt{p}$  são soluções da equação abaixo,

$$x^2 + p = 0 \quad (3)$$

Sendo, também inteiros algébricos.

Outro exemplo interessante de inteiro algébrico é o número  $x = \sqrt{5 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ , vejamos:

De fato, se  $x = \sqrt{5 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ , elevamos ambos os membros ao quadrado e obtemos que,  $x^2 - 5 = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ . Mais uma vez elevamos ambos os membros ao quadrado e obtemos  $(x^2 - 5)^2 - 2 = \sqrt{3}$ . Elevando ao quadrado novamente e desenvolvendo os produtos notáveis, obtemos a equação:

$$x^8 - 20x^6 + 146x^4 - 460x^2 + 526 = 0 \quad (4)$$

Como a equação (4) é da forma da equação (1) e  $x = \sqrt{5 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$  é solução da equação (4), então  $x = \sqrt{5 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$  é um inteiro algébrico.

Como ultimo exemplo, não podemos deixar de citar (mesmo que os números complexos não façam parte deste trabalho) que os números  $i = \sqrt{-1}$  e  $-i$ , são inteiros algébricos, dados que são raízes da equação.

$$x^2 + 1 = 0 \quad (5)$$

Teorema 4.6.1.1. Um inteiro algébrico (real), não pode ser um racional (não inteiro).

Prova: Usaremos como argumento para provar este teorema o fato de que: se  $r$  é um número primo e  $r \mid ab$ , com  $a$  e  $b$  inteiros, então  $r$  divide  $a$  ou  $r$  divide  $b$ .

Seja o número  $\alpha = \frac{p}{q}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , tais que  $q > 1$  e M.D.C  $(p, q) = 1$ . Se  $\alpha$  é uma

raiz da equação (1), então:

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_{n-2}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} + \dots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^n &= -a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} - a_{n-2}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} - \dots - a_1\left(\frac{p}{q}\right) - a_0 \\ \Rightarrow p^n &= -a_{n-1}p^{n-1}q - a_{n-2}p^{n-2}q^2 - \dots - a_1p q^{n-1} - a_0q^n \\ \Rightarrow p^n &= q(-a_{n-1}p^{n-1} - a_{n-2}p^{n-2}q^1 - \dots - a_1p q^{n-2} - a_0q^{n-1}) \end{aligned}$$

Donde se conclui que  $q$  divide  $p^n$ . Portanto, se  $r$  é um fator primo de  $q$ , temos que  $r$  divide  $p^n$ , e de acordo com a observação feita acima,  $r$  divide  $p$ , o que é um absurdo, pois,  $M.D.C.(p, q) = 1$ . Portanto  $q = 1$  e  $r \in \mathbb{Z}$ .

#### 4.6.2. OS Números Algébricos e Transcendentes.

Toda e qualquer solução de uma equação polinomial da forma,

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (1)$$

Onde os coeficientes  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$  e  $a_0$  são inteiros, é chamado de número algébrico. Disto concluímos que certo número  $k$  será dito algébrico se pudermos achar uma equação da forma (1), tal que  $k$  seja raiz dessa equação.

É fácil ver que todo número racional  $\frac{p}{q}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$  é número algébrico, já que

ele é raiz da equação,

$$qx - p = 0 \quad (2)$$

Um número que não seja algébrico será denominado de número transcendente. Mostraremos mais adiante que existem números transcendentos e, mais ainda, iremos provar que os números transcendentos formam um conjunto não enumerável.

A partir de agora vamos aprofundar um pouco mais nosso estudo sobre números algébricos.

#### 4.6.3. Enumerabilidade dos números algébricos.

Teorema 4.6.3.1. O conjunto dos números algébricos é enumerável.

Prova: A demonstração tem como referência Nivem (1984, p. 199) e Figueiredo (2011, p. 16).

Como sabemos um número algébrico é todo número que é raiz de uma equação do tipo (1).

Dado um polinômio  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ .

Vamos definir a altura desse polinômio como sendo o número natural

$$|P| = |a_n| + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_1| + |a_0| + n.$$

Veja que se considerarmos  $a_n > 0$ , então :

- i) Não existe polinômio com altura igual a 1.
- ii) Temos um único polinômio com altura igual a 2 :  $x = 0$ .
- iii) Os polinômios com altura igual a 3 são:  $2x = 0$ ;  $x + 1 = 0$ ;  $x - 1 = 0$  e  $x^2 = 0$ .
- iv) Os polinômios com altura igual a 4 são:  $3x = 0$ ;  $2x + 1 = 0$ ;  $2x - 1 = 0$ ;  $x + 2 = 0$ ;  $x - 2 = 0$ ;  $2x^2 = 0$ ;  $x^2 + 1 = 0$ ;  $x^2 - 1 = 0$ ;  $x^2 + x = 0$ ;  $x^2 - x = 0$  e  $x^3 = 0$ .

Note que para cada número real fixado, os polinômios com essa altura são em número finito. É claro que à medida que a altura vai aumentando, também aumentam as quantidades de polinômios com essa altura dada. E como sabemos, e usaremos este resultado sem demonstração, o teorema fundamental da álgebra nos garante que: “todo polinômio de grau  $n$ , possui exatamente  $n$  raízes complexas”. Daí podemos concluir que as raízes de cada polinômio com determinada altura formam um conjunto finito. E o conjunto de todas as raízes de todos os polinômios de todas as alturas forma um conjunto enumerável, pois é a união de um conjunto finito de conjuntos enumeráveis.

Cantor provou a existência de números transcendentos sem ao menos citar um exemplo, e, além disso, provou que existem mais números transcendentos que números algébricos. Veremos isso no próximo teorema:

**Teorema 4.6.3.2.** Existem números transcendentos e esses números formam um conjunto não enumerável:

**Prova:** Do teorema anterior temos que o conjunto dos números algébricos reais é enumerável. Como o conjunto  $\mathbb{R}$  é não enumerável, então o conjunto dos números transcendentos também é não enumerável, pois caso contrário, teríamos que  $\mathbb{R}$  seria enumerável, pois seria a união de dois conjuntos enumeráveis.

## 5. O NÚMERO $\pi$ .

### 5.1. Breve estudo sobre a Cronologia de $\pi$

Três problemas clássicos da antiguidade fascinaram os matemáticos da época, esses problemas são conhecidos como o problema da duplicação do cubo, o problema da trissecção do ângulo e o problema da quadratura do círculo.

- O problema da duplicação do cubo consistia na tarefa de construir o lado de um cubo cujo volume seja o dobro do volume de um cubo dado.
- O problema da trissecção do ângulo consiste em dividir um ângulo arbitrário em três partes iguais.
- O problema da quadratura do círculo consiste em construir um quadrado com área igual a área de um círculo dado.

Estes três problemas clássicos da antiguidade tiravam o sono dos grandes matemáticos da época, pois os mesmos buscavam suas soluções apenas com o uso das construções com régua e compasso.

As construções com régua e compasso eram uma espécie de jogo matemático que obedecia a certas regras tais como: com a régua permite-se traçar uma reta de comprimento indefinido passando por dois pontos dados, e com o compasso permite-se traçar uma circunferência com centro num ponto dado passando por um segundo ponto qualquer dado. Vale salientar que a régua não tem escala, pois caso tivesse escala seria possível trissecionar um ângulo.

Segundo EVES (2011, p.134) - *o traçado de construções com régua e compasso, visto como um jogo em que se obedece a essas duas regras, mostrou-se ser um dos jogos mais fascinantes e absorventes jamais inventados.*

Mesmo que esses dois instrumentos sirvam para a resolução de muitos problemas, não é possível resolver os três problemas citados acima usando os instrumentos euclidianos, podemos obter aproximações para a solução dos problemas, no século XIX, já passados mais de 2000 anos da criação destes problemas é que foi provada a impossibilidade de tais construções usando régua e compasso.

Dos três problemas o que nos chama atenção é o problema da quadratura do círculo, pois o mesmo está relacionado com o cálculo de  $\pi$ , que é conhecido como a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro.

Até mesmo na bíblia podemos encontrar uma aproximação para o valor de  $\pi$ , no livro de I Reis 7:23 que trata da construção do templo de Salomão encontramos o seguinte trecho: fez mais o mar de fundição: de dez côvados numa borda até a outra borda, redondo ao redor, e de cinco côvados de alto, e um cordão de trinta côvados o cingia em redor”.

Note que neste trecho temos que a razão entre a circunferência e o diâmetro do círculo é igual a 3, ou seja, foi tomado um valor aproximado de  $\pi = 3$ .

A tabela 1 abaixo fornece um breve resumo sobre a cronologia de  $\pi$ . Baseado em Eves, 2011.

**Tabela 1: cronologia de  $\pi$ .**

Ano	Descoberta
Sem registro exato	No papiro Rhind, o valor de $\pi$ foi adotado como $\left(\frac{4}{3}\right)^4 = 3,1604\dots$ , para a quadratura do círculo dada.
240 a.C.	Arquimedes desenvolveu um método de aproximação para o cálculo do comprimento da circunferência. O método consistia na construção de polígonos regulares inscritos e circunscritos à circunferência dada, assim conhecendo os perímetros desses polígonos, ele aproximou o comprimento da circunferência entre os valores dos perímetros dos polígonos regulares inscritos e circunscritos. À medida que ia aumentando o número de lados desses polígonos, ia obtendo uma aproximação melhor para o valor do comprimento da circunferência. Com os polígonos de 96 lados obteve-se que $\pi$ está entre $\frac{223}{71}$ e $\frac{22}{7}$ , o que nos dá uma aproximação de duas casas decimais para $\pi = 3,14$
150 d.C.	Cláudio Ptolomeu em sua famosa obra Sintaxis Mathematica obteve um valor para $\pi$ usando uma tábua de cordas que há no tratado. A tábua fornece os comprimentos de cordas correspondentes aos ângulos centrais de $1^\circ$ a $180^\circ$ , com incrementos do meio grau. O valor de $\pi$ foi encontrado foi de $\frac{377}{120}$ que é 3,1416.

480	O mecânico chinês Tsu Ch'ung-chih deu uma aproximação para $\pi = 355/113 = 3,1415929$ (correta até a sexta casa decimal).
1579	François Viète encontrou $\pi$ corretamente até a nona casa decimal pelo método clássico usando polígonos de 393216 lados, além de descobrir o produto infinito: $\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2} \cdot \frac{\sqrt{\{2+\sqrt{(2+\sqrt{2})}\}}}{2} \dots$
1610	O holandês Ludolph Van Ceulen calculou $\pi$ até a trigésima quinta casa decimal pelo método clássico, usando polígonos de $2^{62}$ lados. Devido ao feito até hoje o número $\pi$ é chamado de “número ludolphiano”.
1650	O matemático John Wallis obteve a expressão: $\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \dots}$
1677	O matemático escocês James Gregory obteve a série infinita: $\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots (-1 \leq x \leq 1).$
1706	O escritor inglês William Jones adotou o $\pi$ como a razão entre a circunferência e o diâmetro, numa publicação. Porém o símbolo só teve aceitação geral depois de Euler em 1737.
1719	O francês De Lagny obteve corretamente 112 casas decimais de $\pi$ usando a série de Gregory adotando $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$
1767	Johann Heinrich Lambert provou que $\pi$ é irracional.
1794	Adrien-Marie Legendre mostrou que $\pi^2$ é irracional.
1882	F. Lindemann provou a transcendência de $\pi$ . Assim, ficou provado que o problema da quadratura não podia ser resolvido com os instrumentos euclidianos.

Vale ressaltar que com o advento dos computadores, muitos avanços foram feitos para o cálculo de  $\pi$ , porém não detalharemos neste trabalho por fugir do foco desta dissertação, sugiro ao leitor interessado ler Eves, 2011 (p. 141 a 148).

## 5.2. O método de Arquimedes para o cálculo do comprimento da circunferência.

Arquimedes foi um dos grandes matemáticos da antiguidade, senão o maior deles. Pouco se sabe da sua vida, o que temos é que ele nasceu em Siracusa, em 287 a.C., passou algum tempo em Alexandria voltando a Siracusa novamente. Karlson 1961 (p. 123) cita algo escrito a respeito de Arquimedes por Plutarco:

Portava-se sempre como se estivesse encantado por uma misteriosa sereia, de tal forma que se esquecia de comer e beber, dispensando mesmo poucos cuidados à higiene física. Muitas vezes era necessário empregar a força para levá-lo ao banho e à unção. Era comum surpreendê-lo a desenhar figuras geométricas nas cinzas de um fogão, e quando estava untado traçava linhas sobre o seu corpo, com o dedo – completamente dominado por sentimentos de suprema felicidade, e verdadeiramente possuído por sua musa matemática.

Seus trabalhos não se restringem à matemática, ele também criou inventos baseados nos princípios das máquinas simples, que para a época era coisa extraordinária, daí a frase atribuída a Arquimedes: *“Dai-me um ponto de apoio e levantarei o mundo”*. Além disso, ele também era astrônomo reconhecido, construiu um planetário que reproduzia os movimentos do sol e da lua, bem como suas fases de tal modo que determinava até os eclipses com muita precisão.

Arquimedes também usou de sua engenhosidade para construir máquinas de guerra tanto para defesa quanto para o ataque, a pedido do rei. Quando os romanos tentaram dominar a cidade de Siracusa, as invenções de Arquimedes dizimaram muitos romanos de tal modo que o rei Marcelo, que tentava dominar Siracusa, ficou assombrosamente maravilhado com a mente do brilhante matemático, tanto que o Rei Marcelo ordenou que quando os romanos dominassem Siracusa, poupassem a vida do grande Sábio. Conta-se que quando finalmente os romanos conseguiram invadir a cidade de Siracusa, um soldado ordenou a Arquimedes que se apresentasse a Marcelo, porém o grande sábio estava tão concentrado em resolver um determinado problema que não deu atenção ao soldado e este enfurecido matou o grande sábio. Marcelo ficou tão decepcionado com a perda que ordenou que dessem o tratamento dado a um criminoso para o soldado e ordenou que fizessem um enterro de honra para Arquimedes.

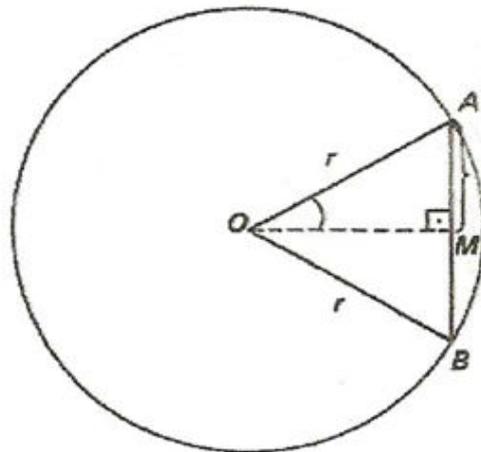
O método de Arquimedes para o cálculo do perímetro da circunferência era baseado no seguinte princípio: Arquimedes construiu uma circunferência e dois triângulos

equiláteros, um inscrito e outro circunscrito à circunferência. Então ele concluiu que o perímetro da circunferência era um número entre os perímetros dos triângulos inscrito e circunscrito. A partir dos triângulos, construiu dois polígonos regulares de 6 lados e seguiu com o procedimento sempre dobrando o número de lados do polígono anterior fazendo assim polígonos regulares de 12, 24, 48 e 96 lados. Desse modo Arquimedes obteve um valor para  $\pi$  igual a aproximadamente 3,14.

Vamos agora mostrar um pouco da ideia de Arquimedes para o feito:

Sejam uma circunferência de raio  $r$  e um polígono regular de  $n$  lados, inscrito nessa circunferência. Denotaremos por  $l_n$  o seu lado e por  $p_n$  o seu perímetro. Assim temos que:

**Figura 03**



Note que  $AB = l_n$ , assim o ângulo  $A\hat{O}B = \frac{360^\circ}{n}$ .

Sendo  $M$  o ponto médio de  $AB$ , temos que  $AM = \frac{l_n}{2}$  e ainda que  $A\hat{O}M =$

$$\frac{A\hat{O}B}{2} = \frac{\frac{360^\circ}{n}}{2} = \frac{180^\circ}{n}.$$

Observando o triângulo AOM, podemos concluir que:

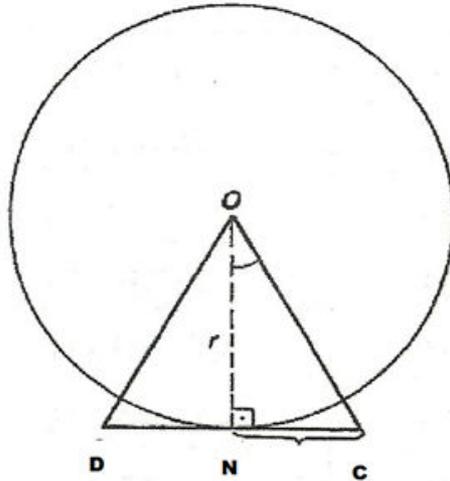
$$\operatorname{sen}\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{\frac{l_n}{2}}{r} = \frac{l_n}{2r} \Rightarrow l_n = 2r \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{180^\circ}{n}\right).$$

Como o polígono tem  $n$  lados, concluímos que o perímetro desse polígono é igual a  $p_n = 2r \cdot n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$ . Observe que o perímetro do polígono regular inscrito dado

é o produto do diâmetro da circunferência pelo número  $n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$  e que esta última expressão depende do número de lados do polígono.

Seja agora um polígono regular com  $n$  lados, circunscrito à mesma circunferência da **figura 3**, denotaremos por  $L_n$  o seu lado e por  $P_n$  o seu perímetro. Assim, temos que:

**Figura 04**



$$CD = L_n, \text{ assim, o ângulo } C\hat{O}D = \frac{360^\circ}{n}.$$

Como N é ponto médio de CD, então temos que  $CN = \frac{L_n}{2}$  e ainda que

$$C\hat{O}N = \frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n}.$$

Observando o triângulo CON podemos concluir que:

$$tg\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{\frac{L_n}{2}}{r} = \frac{L_n}{2r} \Rightarrow L_n = 2r \cdot tg\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

Como o polígono tem n lados, concluímos que o perímetro desse polígono é igual a  $P_n = 2r \cdot n \cdot tg\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$ . Observe que o perímetro do polígono regular inscrito dado é

o produto do diâmetro da circunferência pelo número  $n \cdot tg\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$  e que esta última expressão depende do número de lados do polígono.

Vamos colocar na tabela 2 abaixo, os valores de  $n \cdot sen\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{P_n}{2r}$  e

$n \cdot tg\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{P_n}{2r}$ , para os polígonos utilizados por Arquimedes, com uma aproximação de

6 casas decimais feitas com o auxílio de uma calculadora científica.

**Tabela 2: razão entre os perímetros dos polígonos regulares e o raio dos círculos inscrito e circunscrito ao mesmo.**

Nº DE LADOS	$\frac{p_n}{2r}$	$\frac{P_n}{2r}$	$\frac{P_n}{2r} - \frac{p_n}{2r}$
3	2,598076	5,196152	2,598076
6	3,000000	3,464101	0,464101
12	3,105828	3,215390	0,109562
24	3,132628	3,159659	0,027031
48	3,139350	3,146086	0,006736
96	3,141031	3,142714	0,001683

Assim, Arquimedes obteve uma aproximação para  $\pi$ , de tal modo que

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Estudemos agora o comportamento de duas sequencias, a saber:

- A sequencia  $p_n = 2.r.n.\text{sen}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$ ,  $n \geq 3$ , onde  $p_n$  é o perímetro do polígono regular, com  $n$  lados, inscrito na circunferência de raio  $r$ .
- A sequencia  $P_n = 2.r.n.\text{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$ ,  $n \geq 3$ , onde  $P_n$  é o perímetro do polígono regular, com  $n$  lados, circunscrito à circunferência de raio  $r$ .

Note que a sequencia  $(p_n)$  é crescente, assim à medida que  $n$  aumenta,  $(p_n)$  também aumenta. Porém ela é limitada pelo comprimento da circunferência. Do mesmo modo temos que a sequencia  $(P_n)$  é decrescente, assim à medida que  $n$  aumenta,  $(P_n)$  diminui. Porém  $(P_n)$  é também limitada pelo comprimento da circunferência.

Portanto concluímos que as sequências  $(p_n)$  e  $(P_n)$ , são convergentes<sup>2</sup> e convergem para o perímetro da circunferência.

Agora seja  $C$  o comprimento da circunferência, temos que:

$$p_n < C < P_n$$

logo,

$$\frac{p_n}{2r} < \frac{C}{2r} < \frac{P_n}{2r}, \forall n \geq 3.$$

Esta desigualdade nos mostra que ao tomarmos as duas sequencias  $\frac{p_n}{2r}$  e  $\frac{P_n}{2r}$ , as duas se aproximam do número  $\pi$ . Agora, seja  $A$ , a classe dos números que pertencem a sequencia  $\frac{p_n}{2r}$  e  $B$  a classe dos números que pertencem a sequencia  $\frac{P_n}{2r}$ . Podemos notar que os números da classe  $A$  estão localizados à esquerda dos números que pertencem à classe  $B$ . À medida que aumentamos o valor de  $n$ , a distância entre os elementos das classes  $A$  e  $B$  vai se aproximando de zero. O elemento de separação das classes  $A$  e  $B$  será denotado pelo corte  $(A, B)$ , é o número  $\pi$ . Provaremos a irracionalidade deste número na próxima seção.

### 5.3. A irracionalidade do $\pi$ .

Para a prova da irracionalidade de  $\pi$ , nos basearemos na demonstração feita por Ivan Niven, que publicou em um artigo no Bulletin of the American Mathematical Society, no ano de 1947. Nossa demonstração será feita usando a ideia de Niven, porém para a demonstração de Niven foi bem clara e objetiva de tal modo que ele usou apenas uma página, e como o objetivo desta dissertação é fornecer um auxílio aos professores da educação básica vamos ser mais detalhistas em algumas passagens. Não posso deixar de citar o auxílio que obtive pesquisando no site <http://manthanos.blogspot.com.br>. Para

<sup>2</sup> “Se a sequência  $\{a_n\}$  tiver um limite, dizemos que ela é **convergente**, e  $a_n$  converge para o limite. Se a sequência não for convergente ela será **divergente**”.

entender a demonstração precisamos de conhecimentos básicos sobre: Binômio de Newton, e alguns conceitos de Cálculo Diferencial e Integral.

Teorema 5.3.1. O número  $\pi$  é irracional.

Demonstração: A ideia da demonstração é supor que existem dois inteiros não nulos  $a$  e  $b$  tais que  $\pi = \frac{a}{b}$  e partindo desta hipótese chegaremos ao absurdo que existe um inteiro entre 0 e 1.

Seja a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que:

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}, n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Proposição 5.3.1.  $f(0) = f(\pi) = 0$

Prova: de fato note que  $f(0) = 0$  é trivial, pois anula o termo  $x^n$ , note também que:

$$f(\pi) = \frac{\pi^n(a-b\pi)^n}{n!} \Rightarrow f(\pi) = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n \left(a - b\frac{a}{b}\right)^n}{n!} \Rightarrow f(\pi) = 0.$$

Proposição 5.3.2. Se  $x \in (0, \pi)$ , então  $f(x) > 0$ .

Note que se  $x \in (0, \pi)$ , então  $x > 0$ , logo  $x^n > 0$ , e também temos que:

$$\pi = \frac{a}{b} > x > 0 \Rightarrow a > bx > 0 \Rightarrow a - bx > 0 \Rightarrow (a - bx)^n > 0$$

Como o produto de dois números positivos é também positivo, então:

$$x^n(a - bx)^n > 0 \Rightarrow \frac{x^n(a - bx)^n}{n!} > 0$$

Proposição 5.3.3. Para todo  $x \in (0, \pi)$ , temos que  $f(x) \cdot \text{sen}(x) < \frac{\pi^n a^n}{n!}$ .

De fato, temos que:

$$0 < x < \pi \Rightarrow 0 < x^n < \pi^n$$

E como  $b > 0$ , então temos que:

$$x \in (0, \pi) \Rightarrow 0 < bx \Rightarrow a < a + bx \Rightarrow a - bx < a \Rightarrow (a - bx)^n < a^n$$

Sabemos que  $a - bx > 0$  e como temos que  $0 < \text{sen}(x) < 1$  então:

$$f(x) \cdot \text{sen}(x) < \frac{x^n (a - bx)^n}{n!} \text{sen}(x) < \frac{\pi^n a^n \cdot 1}{n!} = \frac{\pi^n a^n}{n!}$$

Proposição 5.3.4. Para todo  $x \in (0, \pi)$ , temos que  $0 < f(x) \cdot \text{sen}(x) < \frac{\pi^n a^n}{n!}$ .

O lado direito da desigualdade foi demonstrado na proposição anterior. Para provar o lado esquerdo basta usar o fato de que  $0 < \text{sen}(x) < 1$  e chegamos ao resultado desejado.

Proposição 5.3.5. Para todo  $x$  vale a igualdade  $f(\pi - x) = f(x)$ .

$$\begin{aligned} f(\pi - x) &= \frac{(\pi - x)^n [a - b(\pi - x)]^n}{n!} \\ \Rightarrow f(\pi - x) &= \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n [a - b\left(\frac{a}{b} - x\right)]^n}{n!} = \frac{(a - bx)^n \cdot b^n x^n}{n!} = \frac{(a - bx)^n x^n}{n!} = \frac{x^n (a - bx)^n}{n!} = f(x) \end{aligned}$$

Proposição 5.3.6. Todas as derivadas de  $f$ , seja qual for a ordem da derivada, assumem apenas valores inteiros no ponto  $x = 0$ , ou seja,  $f^k(0)$  é sempre inteiro, onde  $f^k(0)$  representa a derivada de ordem  $k$  da função  $f$  no ponto  $x=0$ .

Prova: Faremos a demonstração utilizando a fórmula de Leibnitz para o cálculo da derivada do produto de duas funções  $g$  e  $h$ :  $D^k(g \cdot h) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} D^j g \cdot D^{k-j} h$ . Onde  $D^k f$  representa a derivada de ordem  $k$  da função  $f$ . (A prova desta fórmula é feita por indução sobre  $k$  e encontra-se no Apêndice B deste trabalho).

Quando aplicamos a Fórmula de Leibnitz à função  $f$ , temos que:

$$D^k f = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} D^j x^n \cdot D^{k-j} (1-x)^n \quad (1)$$

$$\text{Note que, } D^j x^n \Big|_{x=0} = \begin{cases} 0, \text{ se } j < n \\ n!, \text{ se } j = n \\ 0, \text{ se } j > n \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Portanto, concluímos de (1) e de (2) que: } D^k f(0) = 0, \text{ se } k < n \quad (3)$$

$$D^k f(0) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} n! \cdot D^{k-j} (1-x)^n \Big|_{x=0}, \text{ se } k \geq n \quad (4)$$

Os coeficientes binomiais sempre representam números inteiros, logo a expressão (4) é um inteiro. Portanto (3) e (4) provam o resultado.

Proposição 5.3.7. Para todo  $k \in \mathbb{N}$  vale a igualdade  $f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(\pi - x)$ .

Provaremos por indução sobre  $k$ . Usaremos também a proposição 5.3.5.

Temos que:  $f(\pi - x) = f(x)$

$$\bullet \text{ Para } i = 1 \text{ temos: } \begin{cases} \frac{d}{dx} [f(\pi - x)] = \frac{d}{dx} [f(x)] \\ f^{(1)}(\pi - x) \cdot \frac{d}{dx} [f(\pi - x)] = \frac{d}{dx} [f(x)] \\ (-1)f^{(1)}(\pi - x) = f^{(1)}(x) \end{cases}$$

• (Hipótese de indução):  $f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(\pi - x)$  para algum  $k \in \mathbb{N}$

• (Tese):  $f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1} f^{(k+1)}(\pi - x)$

Prova:

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= [f^{(k)}(x)]' \\ f^{(k+1)}(x) &= [(-1)^k f^{(k)}(\pi - x)]' \\ f^{(k+1)}(x) &= (-1)^k f^{(k+1)}(\pi - x) \cdot (-x)' \\ f^{(k+1)}(x) &= (-1)^k f^{(k+1)}(\pi - x) \cdot (-1) \\ f^{(k+1)}(x) &= (-1)^{k+1} f^{(k+1)}(\pi - x) \end{aligned}$$

c.q.d.

Proposição 5.3.8.  $f^{(k)}(\pi)$  É sempre um inteiro.

Pela Proposição 5.3.7. Para todo  $k \in \mathbb{N}$  vale a igualdade  
 $f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(\pi - x)$

Assim, temos que:  $f^{(k)}(\pi) = (-1)^k f^{(k)}(\pi - \pi) = (-1)^k f^{(k)}(0)$ . Como pela Proposição 5.3.6.,  $f^{(k)}(0)$  é sempre inteiro, concluímos o resultado procurado.

Feito isto, vamos definir uma nova função  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que:

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$$

Proposição 5.3.9. Na função F, vale a igualdade  $F''(x) + F(x) = f(x)$ .

De fato:

$$F''(x) + F(x) = [f^{(2)}(x) - f^{(4)}(x) + f^{(6)}(x) + \dots] + [f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - f^{(6)}(x) + \dots]$$

Fazendo os cancelamentos devidos temos:  $F''(x) + F(x) = f(x)$

Proposição 5.3.10. A função  $F'(x)\text{sen}(x) - F(x)\text{cos}(x)$  é uma primitiva de  $f(x)\text{sen}(x)$ .

De fato, temos que:

$$\frac{d}{dx}[F'(x)\text{sen}(x) - F(x)\text{cos}(x)] = F''(x)\text{cos}(x) + F'(x)\text{sen}(x) - [F(x)(-\text{sen}(x)) + F'(x)\text{cos}(x)]$$

$$\frac{d}{dx}[F'(x)\text{sen}(x) - F(x)\text{cos}(x)] = F''(x)\text{sen}x + F(x)\text{sen}x$$

$$\frac{d}{dx}[F'(x)\text{sen}(x) - F(x)\text{cos}(x)] = \text{sen}(x)[F''(x) + F(x)]$$

Como pela proposição anterior temos que  $F''(x) + F(x) = f(x)$ , então:

$$\text{sen}(x)[F''(x) + F(x)] = f(x)\text{sen}(x)$$

Proposição 5.3.11. A função F é tal que  $F(0) + F(\pi)$  é um inteiro.

Como,  $F(0) = f(0) - f^{(2)}(0) + f^{(4)}(0) - \dots + (-1)^n f^{(2n)}(0)$  e pela Proposição

5.3.6.  $f^{(l)}(0)$  é sempre inteiro. Analogamente

$F(\pi) = f(\pi) - f^{(2)}(\pi) + f^{(4)}(\pi) - \dots + (-1)^{(n)} f^{(2n)}(\pi)$  é inteiro, pois, pela Proposição 5.3.8.

$f^{(i)}(\pi)$  é sempre inteiro e como a soma de dois inteiros é outro inteiro, concluímos o resultado desejado.

Proposição 5.3.12. A integral  $\int_0^\pi f(x)\text{sen}(x)dx$  é um número inteiro.

Usando o teorema Fundamental do Cálculo e a Proposição 5.3.10, temos que:

$$\int_0^\pi f(x)\text{sen}(x)dx = [F'(x)\text{sen}(x) - F(x)\cos(x)]_0^\pi$$

$$\int_0^\pi f(x)\text{sen}(x)dx = F'(\pi)\text{sen}(\pi) - F(\pi)\cos(\pi) - [F'(0)\text{sen}(0) - F(0)\cos(0)]$$

$$\int_0^\pi f(x)\text{sen}(x)dx = F(\pi) + F(0)$$

Da última igualdade e da Proposição 5.3.11, concluímos que  $\int_0^\pi f(x)\text{sen}(x)dx$  é um número inteiro.

Proposição 5.3.13. Se  $x \in (0, \pi)$  então,  $0 < \int_0^\pi f(x)\text{sen}(x)dx < \frac{\pi^{n+1}a^n}{n!}$ .

Sabemos que  $0 < f(x)\text{sen}(x) < \frac{\pi^n a^n}{n!}$ , integrando os dois lados temos:

$$0 < \int_0^\pi f(x)\text{sen}(x)dx < \frac{\pi^{n+1}a^n}{n!} \quad (3)$$

Agora se tomarmos um  $n$  suficientemente grande, teremos que o denominador da expressão  $\frac{\pi^{n+1}a^n}{n!}$ , se torna muito maior que o numerador, daí  $\frac{\pi^{n+1}a^n}{n!} < 1$ . Mas isto

implica que  $0 < \int_0^\pi f(x)\text{sen}(x)dx < \frac{\pi^{n+1}a^n}{n!} < 1$  e como  $\int_0^\pi f(x)\text{sen}(x)dx$  é um inteiro, então

chegamos ao absurdo de que existe um inteiro entre 0 e 1. E como a nossa única hipótese

foi de que  $\pi = \frac{a}{b}$ , ou seja,  $\pi$  é racional, concluímos a Demonstração de que  $\pi$  é irracional.

## 6. O NÚMERO “e”

### 6.1. John Napier e a invenção dos logaritmos.

O século XVII é importante para a história da matemática devido ao grande número de descobertas importantes. Entre estas se destacam: Harriot e Oughtred com sua contribuição de notação para a codificação da álgebra, a criação da ciência da dinâmica por Galileu, as leis do movimento planetário de Kepler, A geometria analítica moderna por Descartes, a teoria dos números moderna por Fermat, A teoria das probabilidades por Huygens e a invenção dos logaritmos por Napier, entre outras.

Com a necessidade de que o cálculo numérico evoluísse mais rápido no auxílio da navegação, astronomia, comércio e engenharia, se destacaram algumas importantes descobertas, entre elas podemos destacar: A notação indo-arábica, as frações decimais, os logaritmos e a computação.

John Napier (1550 – 1617), nascido na escócia, não era um matemático profissional, trabalhava administrando grandes propriedades e escrevia sobre diversos assuntos, era envolvido em muitas polêmicas religiosas, sendo um grande opositor à religião católica, tanto que chegou a escrever um folheto, que foi bastante lido, no qual ele afirmava que o Papa seria o anticristo e ainda afirmava que o apocalipse aconteceria entre os anos de 1688 e 1700. Porém ele também gostava de estudar sobre assuntos de matemática bem como escrever sobre estes, e o que mais nos interessa da história de Napier foi, certamente, a descoberta dos logaritmos.

O surgimento dos logaritmos introduzidos por Napier foi bastante aceito por transformar produtos em somas, tornando assim mais rápida a solução de diversos problemas que necessitavam destes produtos de números “grandes” e tomavam muito tempo dos matemáticos.

Provavelmente Napier tenha se inspirado nas fórmulas já conhecidas da trigonometria como, por exemplo:

$$2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B) \quad (1)$$

Não se pode afirmar, mas muito provavelmente, baseando-se nestes artifícios da trigonometria que transformavam multiplicações em somas, Napier associou os termos de uma PG :  $b, b^2, b^3, \dots, b^n$  aos termos de uma PA  $1, 2, 3, \dots, n$ . Assim, o produto  $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$ , foi

pensado de modo que se quisesse calcular o produto das potências  $b^m$  e  $b^n$ , então o resultado está associado a soma  $m+n$  da PA.

Mas seguindo o raciocínio acima deixaria grandes espaços entre as potências que precisariam ser preenchidos, então Napier tinha duas opções: poderia usar expoentes fracionários ou usar uma base pequena o bastante de modo que suas potências cresçam de modo muito lento. No caso da primeira opção para a época ainda não era totalmente conhecidos, então ele adotou a segunda opção.

Após algum tempo Napier optou por usar o número  $1 - 10^{-7}$  como base e querendo evitar o uso de decimais, multiplicou cada expoente por  $10^7$ , esta escolha do número  $10^7$  deve-se ao fato que as tábuas de seno mais avançadas da época tinha tinham até 7 casas decimais, ficando assim estabelecido que se  $N = 10^7 (1 - 10^{-7})^L$  então L era chamado de logaritmo do número N.

Depois de 20 anos efetuando trabalhosos cálculos, Napier batizou seu trabalho como logaritmo, sendo que esta palavra significava número proporcional.

Segundo Maor (2008, p.22),

Na notação moderna, se  $N = 10^7 (1 - 10^{-7})^L$ , então o expoente L é o logaritmo (neperiano) de N. A definição de logaritmos feita por Napier difere em vários aspectos da definição moderna (introduzida em 1728, por Leonard Euler): se  $N = b^L$  onde b é um número positivo fixo, diferente de 1, então L é o logaritmo de b na base N. Assim, pelo sistema de Napier,  $L=0$  corresponde a  $N=10^7$ , (ou seja  $\log_{Nap} 10^7 = 0$ ), enquanto no sistema moderno  $L=0$  corresponde a  $N=1$  (isto é,  $\log_b 1 = 0$ ). Ainda mais importante, as regras básicas das operações com logaritmos – por exemplo, que o logaritmo de um produto é igual a soma dos logaritmos individuais – não se mantêm para as definições de Napier. E, finalmente como  $1 - 10^{-7}$  é menor que 1, os logaritmos de Napier diminuem com o aumento dos números enquanto nossos logaritmos comuns de base 10 aumentam.

No ano de 1614 Napier publicou sua descoberta num tratado intitulado (descrição do maravilhoso cânone dos logaritmos). Após a publicação sua ideia ficou reconhecida mundialmente e foi recebida com muito entusiasmo pela comunidade científica. Outro matemático Henry Briggs encontrou-se com Napier e sugeriu algumas melhorias no trabalho, ajudando assim, com os cálculos sugeridos por ele mesmo, visto que Napier já estava com idade avançada. Napier fez também outras contribuições para a matemática e deu uma série de regras, que ficaram conhecidas como “analogias de Napier” para serem usadas na trigonometria esférica. Além de defender o uso da vírgula para separar a parte

inteira da parte fracionária de um número. Porém a mais importante das contribuições de Napier foi a invenção dos logaritmos. Napier morreu no dia 3 de abril de 1617 aos 67 anos.

## 6.2. O limite do número e.

Um bom modo de apresentar o número e ao aluno do ensino médio é usando a matemática financeira. Suponha que um agiota empreste uma quantia a juros compostos de 100% ao ano, e querendo ganhar mais dinheiro com os juros ele faz o seguinte: se a quantia emprestada  $C$ , for capitalizada anualmente então após um ano o montante será igual a  $C$  multiplicado pelo fator  $(1 + 1)^1 = 2$ . Daí o Agiota começa a preparar uma tabela para analisar os possíveis fatores que irão multiplicar o capital, e nota que se capitalizar semestralmente,

então o juro recebido Será igual a  $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$ , pois a taxa foi dividida por 2 e o tempo

agora é dois semestres. Deste modo o agiota terá um retorno maior, pois agora o fator multiplicativo é maior que o primeiro. Então movido pela ganância ele começa a conjecturar que se fizer a capitalização em períodos de tempo cada vez menores terá um retorno ainda

maior. Então ele elabora uma tabela baseada na seguinte fórmula:  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , onde  $n$  é o

representa o tempo de capitalização. E ficamos assim com a tabela a seguir:

Tabela 3: Valores da expressão para o número “e”

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
10	2,59374
$10^2$	2,70481
$10^3$	2,71692
$10^4$	2,718146
$10^5$	2,718268
$10^6$	2,71828
$10^7$	2,71828

Assim temos de certo modo uma definição para o número e, que não é dado pelo problema em si, o mesmo foi apenas um modo que podemos introduzir o conceito do número e aos estudantes da educação básica. Portanto temos a partir de agora que:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Se nos basearmos na tabela, veremos que à medida que aumentamos o valor de n, o valor da expressão  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  parece se aproximar do número 2,7182 e nos leva a crer que se trata de um número racional.

A respeito disso, Maor (2008, p.59) explica:

A base dos logaritmos naturais (também conhecidos como logaritmos neperianos, embora sem justificção histórica) e o limite de  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  quando  $n \rightarrow \infty$ . O bloco repetido de dígitos 1828 é enganador, pois “e” é um número irracional e representado por uma sequência infidável de decimais que não se repete. A irracionalidade de e foi provada em 1737 por Euler.

Antes de mostrar a irracionalidade do e, vamos inicialmente localizá-lo na reta real.

Sabemos que  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , e para estudar esta localização, inicialmente

vamos observar  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Para isto iremos utilizar o Binômio de Newton. Desenvolvendo a

soma  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , temos:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{n}\right)^{n-k}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{n!}{0!(n-0)!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^0 + \frac{n!}{1!(n-1)!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \frac{n!}{n!(n-n)!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{n!}{n!} \cdot 1 + \frac{n(n-1)!}{1!(n-1)!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n!(n-n)!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{(n-1)}{n} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{n(n-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n^n}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n}\right)$$

Notemos que como  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , então quando fizermos  $n \rightarrow \infty$ , cada

parcela da forma  $\frac{p}{n} \rightarrow 0, p \in \mathbb{N}, p \geq 1$  e, conseqüentemente todas as parcelas nos

parênteses da forma  $1 - \frac{p}{n}, p \in \mathbb{N}, p \geq 1$  tem valor igual a 1. Portanto, podemos escrever o

número e do seguinte modo:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

Como primeira observação a respeito do limite do número  $e$ , vemos que sua parte inteira é igual a 2, daí este número é limitado inferiormente pelo número 2. Já temos um limite inferior para o número  $e$ , e iremos agora procurar um limite superior para o mesmo.

Vamos estudar a soma  $S_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Temos que  $S_n$  é crescente, pois quando aumentamos o valor de  $n$ , iremos acrescentar à soma anterior uma nova parcela positiva.

Lema 6.1. Para todo  $n \geq 3$  tal que  $n \in \mathbb{N}$  temos que  $n! > 2^{n-1}$ .

A prova deste lema está no apêndice A deste trabalho.

Então, pelo Lema 6.1,  $n! > 2^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$  para todo  $n \geq 3$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Então:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

Voltemos nossa atenção apenas para o lado direito da desigualdade acima.

$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 2 + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \right)$  e a soma nos parênteses trata-se da soma dos

termos de uma PG cujo primeiro termo e a razão são iguais  $\frac{1}{2}$  a daí temos que :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 1$$

Portanto,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 3$$

Concluimos assim que o número  $e$  está limitado entre 2 e 3, ou seja,  $2 < e < 3$ . Calculando e numa planilha eletrônica vemos que, de fato, uma boa aproximação para o número  $e$  fica próxima de 2,71825...

### 6.3. A irracionalidade do número $e$ .

Mostraremos a irracionalidade do  $e$  por redução ao absurdo, para isso, inicialmente, vamos admitir que existem inteiros  $p$  e  $q$  tais que  $e = \frac{p}{q}$ , onde a fração  $\frac{p}{q}$  é irredutível. Então:

$$\frac{p}{q} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(q-1)!} + \frac{1}{q!} + \frac{1}{(q+1)!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \text{ tal que } q < n.$$

Podemos multiplicar a igualdade acima por  $q!$ , obtendo assim:

$$\frac{p}{q} q! = q! + q! + \frac{1}{2!} \cdot q! + \dots + \frac{1}{(q-1)!} \cdot q! + \frac{1}{q!} \cdot q! + \frac{1}{(q+1)!} \cdot q! + \dots + \frac{1}{n!} \cdot q! + \dots$$

$$\frac{p}{q} q! = q! + q! + \frac{1}{2!} 1 \cdot 2 \dots q + \dots + \frac{1}{(q-1)!} 1 \cdot 2 \dots q + \frac{1}{q!} \cdot q! + \frac{1}{(q+1)!} \cdot q! + \dots + \frac{1}{n \cdot (n-1) \dots (q+1) q!} \cdot q! + \dots$$

$$\frac{p}{q} q! = q! + q! + 3 \cdot 4 \dots q + \dots + q + 1 + \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+2)(q+1)} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n-1) \dots (q+1)} + \dots$$

$$p(q-1)! - [q! + q! + 3 \cdot 4 \dots q + \dots + q + 1] = \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+2)(q+1)} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n-1) \dots (q+1)} + \dots$$

A partir da última igualdade acima, faremos algumas considerações:

i) O lado esquerdo da igualdade é um número inteiro, pois é uma soma de parcelas de números inteiros.

ii) O lado direito da igualdade é um número positivo, dado que é uma soma infinita com todas as parcelas positivas.

iii) Vamos chamar o lado direito da igualdade de  $S$ , logo teremos

$$S = \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+2)(q+1)} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n-1) \dots (q+1)} + \dots$$

Sabemos que, se  $q \geq 2 \Rightarrow q+1 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{q+1} \leq \frac{1}{3}$ .

Disto temos as seguintes sentenças válidas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(q+2)(q+1)} < \frac{1}{(q+1)^2} < \frac{1}{3^2} \\ \frac{1}{(q+3)(q+2)(q+1)} < \frac{1}{(q+1)^3} < \frac{1}{3^3} \\ \vdots \\ \frac{1}{n \dots (q+3)(q+2)(q+1)} \dots \frac{1}{(q+3)(q+2)(q+1)} < \frac{1}{(q+1)^{n-(q+1)}} < \frac{1}{3^{n-(q+1)}} \end{array} \right.$$

Das sentenças acima, podemos concluir que S é tal que:

$$S = \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+2)(q+1)} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n-1) \dots (q+1)} + \dots < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-(q+1)}} + \dots$$

$S < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-(q+1)}} + \dots$ , e como este lado direito desta desigualdade representa a

soma de uma PG infinita cujo primeiro termo e a razão são iguais a  $\frac{1}{3}$ , podemos usar a

fórmula para a soma dos termos de uma PG infinita e concluir que:

$$S < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-(q+1)}} + \dots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

Portanto, chegamos à conclusão de que:

$$0 < p(q-1)! - [q! + q! + 3 \cdot 4 \dots q + \dots + q + 1] = S < \frac{1}{2}$$

Ou seja, encontramos um número inteiro entre 0 e 1, e o absurdo vem da única hipótese criada onde e seria um número racional. Logo e é irracional.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao fim deste trabalho, espero ter contribuído com o professor da Educação Básica, no sentido de que o mesmo tenha a noção da amplitude dos números reais, ampliando assim seu conhecimento sobre os tais números.

Vimos que por trás dos números irracionais existe muito mais do que simplesmente a sua definição de que número irracional é um número que não é racional. Vimos que os números irracionais podem ser divididos em duas categorias como: números algébricos e números transcendententes.

Também aprendemos que enquanto os números racionais são enumeráveis, os irracionais não o são, surgindo aí o primeiro resultado interessante de que podemos comparar conjuntos infinitos e obter “infinitos maiores que outros infinitos”.

Foi também elaborado um estudo um pouco mais aprofundado sobre dois números irracionais muito importantes e bastante usados na Educação Básica: o número  $\pi$  e o número  $e$ , suas histórias desde o provável surgimento, suas aproximações e a prova formal das irracionalidades dos mesmos.

Ao término dessa pesquisa bibliográfica, fica a sensação de dever cumprido por saber que esta dissertação poderá auxiliar muitos professores de matemática que possam se interessar pelo assunto estudado.

## REFERÊNCIAS

- BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**: tradução : Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, ed da Universidade de São Paulo, 1974.
- CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa : [s.n.], 1951.
- DOMINGUES, Hygino Hugueros. **Álgebra moderna**. São Paulo: Atual, 1979.
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**: tradução Hygino H. Domingues. E.d. 5. São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.
- FIGUEIREDO, Djairo Guedes. **Números irracionais e transcendentos**. 3. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.
- FRID, Hermano. Os números irracionais. **Eureka**, Rio de Janeiro, edição especial, 2007, dez. 2007.
- KARLSON, Paul. **A magia dos números**: tradução Henrique Carlos. Rio de Janeiro: Editora globo, 1961.
- LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. 3.e.d. São Paulo: Harbra, 1994.
- LIMA, Elon Lages. **A matemática do ensino médio – volume 1**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- MAOR, Eli. **e**: A história de um número. 4. e.d. Rio de Janeiro: Record, 2008.
- NERI, Cassio. **Curso de análise real**. Rio de Janeiro : [s.n.], 2006
- NIVEN, Ivan Morton. **Números**: Racionais e irracionais. Rio de Janeiro: SBM, 1984.
- POMMER, Wagner Marcelo. **A construção de significados dos números irracionais no ensino básico**: Uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos números reais. São Paulo, 2012. 235p. Tese (Doutorado – programa de pós-graduação em educação). Faculdade de Educação da cidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

VENDEMIATTI, Aloísio Daniel. **A quadratura do Círculo e a gênese do número  $\pi$** . São Paulo, 2009. 152p. Dissertação ( Mestrado Profissional em ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de são Paulo, São Paulo, 2009.

## APÊNDICE A

**Lema 6.1.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq 3$ , temos que  $n! > 2^{n-1}$ .

Prova:

A prova deste lema será feita pelo Método da Indução Finita.

i) Se  $n = 3$ , temos que:  $n! = 3! = 6 > 2^2 = 2^{n-1}$ .

ii) (hipótese de indução).

Suponha que  $n! > 2^{n-1}$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq 3$ .

iii) (tese)

$$(n+1)! > 2^{(n+1)-1}.$$

De fato,

$$(n+1)! = (n+1).n! = n.n! + n! \tag{1}$$

Usamos a hipótese de indução e o fato que  $n \geq 3$ , em (1). Temos:

$$n.n! + n! > 2.2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n + 2^{n-1} > 2^{(n+1)-1}.$$

c.q.d.

## APÊNDICE B

Fórmula de Leibnitz para o cálculo de derivadas.

Sejam  $g$  e  $h$  duas funções, temos que a derivada de ordem  $k$  da função produto  $g.h$  é dada por:

$$D^k(g.h) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} D^j g . D^{k-j} h .$$

A prova será feita por indução sobre  $k$ .

Se  $k=0$ , temos:

$$D^0(g.h) = g.h = \binom{0}{0} D^0 g . D^0 h$$

(Hipótese de indução)

Suponha que para algum  $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$ , a fórmula é verdadeira, ou seja:

$$D^k(g.h) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} D^j g . D^{k-j} h$$

(Tese) : devemos mostrar que:  $D^{k+1}(g.h) = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} D^j g . D^{(k+1)-j} h .$

De fato,  $D^{k+1}(g.h) = D[D^k(g.h)]$ . Podemos usar a hipótese de indução, daí:

$$D^{k+1}(g.h) = D[D^k(g.h) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} D^j g . D^{k-j} h]$$

$$D[D^k(g.h) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} D^j g . D^{k-j} h]$$

$$= D\left[\binom{K}{0} D^0 g D^k h + \binom{K}{1} D^1 g D^{k-1} h + \dots + \binom{K}{k-1} D^{k-1} g D^1 h + \binom{K}{k} D^k g D^0 h\right]$$

Derivando a soma acima usando a derivada do produto, encontramos:

$$\begin{aligned}
&= \binom{K}{0} DgD^k h + \binom{K}{0} gD^{k+1} h + \binom{K}{1} D^2 gD^{k-1} h + \binom{K}{1} DgD^k D^0 h + \dots \\
&\dots + \binom{K}{k-1} D^k gDh + \binom{K}{k-1} D^{k-1} gD^2 h + \binom{K}{k} D^{k+1} g.D^0 h + \binom{K}{k} D^k gD^1 h]
\end{aligned}$$

Colocando os termos semelhantes em evidência:

$$\begin{aligned}
&= \binom{K}{0} DgD^k h + \left[ \binom{K}{0} + \binom{K}{1} \right] DgD^k h + \left[ \binom{K}{1} + \binom{K}{2} \right] D^2 gD^{k-1} h + \dots \\
&\dots + \left[ \binom{K}{k-2} + \binom{K}{k-1} \right] D^{k-1} gD^2 h + \left[ \binom{K}{k-1} + \binom{K}{k} \right] D^k gDh + \binom{K}{k} D^{k+1} gD^0 h
\end{aligned}$$

Usando a Relação de Stiffel e o fato de que  $\binom{K}{0} = \binom{K+1}{0}$  e  $\binom{K}{k} = \binom{K+1}{k+1}$ ,

podemos reescrever a soma acima do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
&= \binom{K+1}{0} DgD^k h + \binom{K+1}{1} DgD^k h + \binom{K+1}{2} D^2 gD^{k-1} h + \dots \\
&\dots + \binom{K+1}{k-1} D^{k-1} gD^2 h + \binom{K+1}{k} D^k gDh + \binom{K+1}{k+1} D^{k+1} gD^0 h \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} D^j g.D^{(k+1)-j} h .
\end{aligned}$$

c.q.d.