



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

ANDERSON LEITE MEIRA GOMES

**PROPOSTA DE ENSINO DE ASTRONOMIA NO ENSINO MÉDIO: RELATO DE
EXPERIÊNCIA NO 2º ANO DE ADMINISTRAÇÃO DO IFPI - CAMPUS CORRENTE**

MOSSORÓ/RN

2024

ANDERSON LEITE MEIRA GOMES

PROPOSTA DE ENSINO DE ASTRONOMIA NO ENSINO MÉDIO: RELATO DE
EXPERIÊNCIA NO 2º ANO DE ADMINISTRAÇÃO DO IFPI - CAMPUS CORRENTE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Rural do Semi-Árido, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dra. Antônia Jocivânia Pinheiro (UFERSA).

Coorientadora: Prof^a. Dra. Maria Joseane Felipe Guedes Macedo (UFERSA).

MOSSORÓ/RN

2024

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

GG633 Gomes, Anderson Leite Meira.
p Proposta de Ensino de Astronomia no Ensino
Médio: Relato de Experiência no 2º ano de
Administração do IFPI - Campus Corrente / Anderson
Leite Meira Gomes. - 2024.
103 f. : il.

Orientadora: Antônia Jocivania Pinheiro.
Coorientadora: Maria Joseane Felipe Guedes
Macedo.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em
Matemática, 2024.

1. astronomia. 2. semelhança de triângulos. 3.
Aristarco. I. Pinheiro, Antônia Jocivania ,
orient. II. Macedo, Maria Joseane Felipe Guedes,
co-orient. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade
com AACR2 e os dados fornecidos pelo autor(a).
Biblioteca Campus Mossoró / Setor de Informação e Referência
Bibliotecária: Keina Cristina Santos Sousa e Silva
CRB: 15/120

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

ANDERSON LEITE MEIRA GOMES

PROPOSTA DE ENSINO DE ASTRONOMIA NO ENSINO MÉDIO: RELATO DE
EXPERIÊNCIA NO 2º ANO DE ADMINISTRAÇÃO DO IFPI - CAMPUS CORRENTE

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Matemática da Universidade
Rural do Semi-Árido, como requisito para a
obtenção do título de Mestre em Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino de Matemática.

Defendida em: 27/03/2024.

BANCA EXAMINADORA



Documento assinado digitalmente

ANTONIA JOCIVANIA PINHEIRO

Data: 17/06/2024 06:53:12-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^ª. Dra. Antônia Jocivania Pinheiro
(UFERSA)

Presidente e Orientadora

Documento assinado digitalmente



MARIA JOSEANE FELIPE GUEDES MACEDO

Data: 01/04/2024 16:55:23-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^ª. Dra. Maria Joseane Felipe Guedes
Macedo (UFERSA)
Coorientadora

Documento assinado digitalmente



SUENE CAMPOS DUARTE

Data: 02/04/2024 11:58:35-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^ª. Dra. Suene Campos Duarte (UFERSA)
Membro Examinador (Interno)

Documento assinado digitalmente



LEOMAQUES FRANCISCO SILVA BERNARDO

Data: 01/04/2024 13:43:17-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Leomaques Francisco Silva Bernardo
(UFCG)
Membro Examinador (Externo)

À minha esposa, por acreditar em mim e por seu cuidado diário, sem isso, este trabalho não seria possível. Aos meus filhos, por serem pacientes e minha inspiração constante, vocês me dão esperança para seguir. Aos meus pais e minhas irmãs, vocês foram fundamentais ao longo da minha vida, me deram segurança e certeza de que não estou sozinho nessa caminhada.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Maria do Socorro e José de Anchieta, que me deram amor e incentivaram-me nos estudos.

Ao meu amor, Naiane de Sousa, que sacrificou um sonho por mim e me apoiou na conclusão deste curso.

À turma do 1º ano de administração do ano de 2022 da Escola José Ivanilton Nocrato, que me ajudaram a fortificar a ideia de que matemática aplicada encanta.

À turma do 2º ano de administração do ano de 2022 do IFPI-Corrente que participaram da experiência presente neste trabalho.

Aos professores da Ufersa que foram complacentes comigo, e ao colegiado de 2024.1 da Ufersa.

Aos Canais do YouTube ‘SpaceToday’, pelos papos sobre algo importante, interessante e relevante que acontece no nosso universo, e ‘somos míopes porque somos breves’, pela forma poética que apresenta a astronomia.

Ao caos, que de tão imenso, possibilitou a vida, e ao caos novamente, que de tão realmente grandioso, possibilitou a vida inteligente.

E, principalmente, às regras que possibilitam a existência do nosso universo como conhecemos, sem as quais nada do que está escrito acima seria possível.

“Em algum lugar, algo incrível está esperando
para ser descoberto.” (Carl Sagan)

RESUMO

Desde os primeiros séculos a astronomia gera curiosidade e seu estudo foi fundamental para o desenvolvimento humano ao longo do tempo. Embora tenha motivado muitos estudiosos no passado, o ensino da astronomia pouco é explorado pelos professores no ensino médio. Portanto, o presente trabalho busca incentivar os professores a utilizar o ensino da astronomia como ferramenta de aprendizagem no ensino da matemática, em especial no 2º ano do ensino médio. Partindo de conceitos básicos astronômicos e históricos para poder introduz conceitos matemáticos mais abstratos dentro do assunto, como por exemplo, semelhança de triângulos e logaritmos. No decorrer do trabalho, será apresentado uma sequência didática detalhada baseada nas ideias de Aristarco e Eratóstenes. No qual, foi aplicada em sala de aula na turma do 2º ano de Administração do IFPI-Campus Corrente/PI. Apesar da maioria dos professores reconhecer a importância do conteúdo de astronomia na formação do aluno, muitos não incluem essa temática seu no planejamento escolar.

Palavras-chave: astronomia; semelhança de triângulos e Aristarco.

ABSTRACT

Since the early centuries, astronomy has sparked curiosity, and its study has been fundamental for human development over time. Although it has motivated many scholars in the past, the teaching of astronomy is rarely explored by high school teachers. Therefore, this current work seeks to encourage teachers to incorporate the teaching of astronomy as a learning tool in the mathematics curriculum, especially in the 2nd year of high school. Beginning with basic astronomical and historical concepts, the aim is to gradually introduce more abstract mathematical concepts within the subject, such as triangle similarity and logarithms. Throughout the dissertation, a detailed didactic sequence based on the ideas of Aristarchus and Eratosthenes will be presented. This sequence was implemented in the classroom with the 2nd-year Administration class at IFPI-Campus Corrente/PI. Despite the majority of teachers recognizing the importance of astronomy content in student education, many do not include this theme in their school planning.

Keywords: astronomy; similarity of triangles and Aristarchus.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	<i>Base Nacional Comum Curricular</i>
CNMAC	<i>Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional</i>
IFPI	<i>Instituto Federal do Piauí</i>
NASA	<i>National Aeronautics and Space Administration</i>
PCN+	<i>Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais</i>
RPM	<i>Revista do Professor de Matemática</i>
SAR	<i>Sociedade Astronômica do Recife</i>
UA	<i>Unidades Astronômicas</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Ponto
\overline{AB}	Segmento de reta com extremidades nos pontos A e B
AB	Medida de \overline{AB}
\overleftrightarrow{AB}	Reta que passa pelos pontos A e B
\overrightarrow{AB}	Semirreta com origem em A e passando por B
\widehat{ABC}	Ângulo com vértice em B e lados \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC}
\hat{A}	Ângulo com vértice em A
$=$	É igual a
\equiv	É congruente a
\cong	é aproximadamente igual a
$//$	É paralelo a
$+$	Mais
$-$	Menos
\cdot	Veze
$:$	Dividido por
$\frac{a}{b}$	Fração com numerador a e denominador b
$^\circ$	Grau
sen	Seno do
cos	Cosseno do
tan	tangente do
a^b	a elevado a b
$\log a$	Logaritmo de a na base 10
$n!$	n Fatorial
\Rightarrow	Implica
\Leftrightarrow	Se, e somente se,
\widehat{AB}	Arco com extremidades nos pontos A e B

m	Metro
km	Kilômetro
cm	Centímetro
mm	Milímetro
\sim	É semelhante a(o)
ΔABC	Triângulo de vértices A , B e C
ABC	Triângulo de vértices A , B e C
$>$	é maior do que
$<$	é menor do que

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	A IMPORTÂNCIA DA ASTRONOMIA	14
2.1	INSERÇÃO DO ENSINO DA ASTRONOMIA NAS ESCOLAS	14
2.2	PRINCIPAIS ASTRÔNOMOS E SUAS CONTRIBUIÇÕES	16
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	21
3.1	ALGUNS CONCEITOS ASTRONÔMICOS	21
3.2	AS REVOLUÇÕES DOS ORBES CELESTES	33
3.3	A MATEMÁTICA NA ASTRONOMIA	35
4	RELATO DE ENSINO USANDO O MÉTODO DE ARISTARCO	48
4.1	SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS	48
4.2	RELATO DE EXPERIÊNCIA	51
5	SEQUÊNCIA DIDÁTICA: ENSINO DE SEMELHANÇA DE TRIÂN- GULOS NA ASTRONOMIA	63
5.1	ETAPAS BÁSICAS	65
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	75
	REFERÊNCIAS	76
	APÊNDICE A –EXERCÍCIOS	79

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, discute-se bastante sobre a importância de dar significado e aplicar a Matemática na sala de aula. Embora exista uma vasta literatura sobre o tema, sua implementação prática ainda é limitada. Brasil (2006) destaca a importância da interdisciplinaridade “como forma de aproximar o aluno da realidade e fazê-lo vivenciar situações próximas que lhe permitam reconhecer a diversidade que o cerca e reconhecer-se como indivíduo capaz de ler e atuar nesta realidade.”

Segundo Paula *et al.* (2022), a geometria desempenha um “papel decisivo na aprendizagem da Matemática, pois por meio daquela o homem identifica formas, aprende a manipulá-las, abstrai-as e converte isso para suprir suas necessidades.” Então, é necessário adotar novas práticas de ensino a fim de estimular a busca pelo conhecimento e saber relacionar a teoria com a prática, condição necessária para a formação do indivíduo.

A presente dissertação tem por objetivo incentivar a aplicação da Matemática, principalmente da semelhança de triângulos, no estudo de astronomia, mostrando como calcular medidas inacessíveis nessa ciência. A escolha da astronomia para se ensinar matemática se deu pela poético que a astronomia possui. Algumas seções deste trabalho podem parecer incomuns para aqueles que não compartilham dessas visões. Por exemplo, há quem defenda que a Lua é uma espécie de grande bateria. Segundo essa visão, a superfície brilhante da Lua não estaria sendo iluminada pelo Sol, mas sim emitiria uma descarga de luz após absorver a luminosidade solar. Essas ideias oferecem uma perspectiva alternativa sobre fenômenos astronômicos, desafiando as explicações tradicionais.

Em 2016, em uma Escola da Prefeitura Municipal de Maracanaú, um encontro com um professor de ensino primário, defensor de teorias alternativas sobre a forma da Terra, proporcionou um primeiro contato com essas ideias. Inicialmente, argumentou-se utilizando fotos da *National Aeronautics and Space Administration* (NASA) e da viagem do homem à Lua, porém tais evidências foram recebidas com descrença. A busca por outros argumentos que não envolvessem a NASA revelou-se frustrante, pois, por exemplo, havia-se esquecido que os navios parecem afundar quando ultrapassam a linha do horizonte.

A partir dessa experiência, iniciou-se um estudo aprofundado sobre essas teorias alternativas, levando à descoberta de um artigo na *Revista do Professor de Matemática* (RPM) - Ávila (1982). Neste artigo, Geraldo Ávila discorre sobre os trabalhos de Aristarco, Eratóstenes e Ptolomeu referentes às distâncias da Lua e do Sol à Terra e seus respectivos raios. Esses

estudos resultaram em uma monografia de Especialização em Ensino de Matemática no Ensino Médio intitulada ‘Medidas Astronômicas: do raio da Terra à distância da Terra ao Sol’ - Gomes (2020), e em um trabalho apresentado no LX *Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional* (CNMAC) - Gomes *et al.* (2022).

Com o conhecimento adquirido, foi possível aplicá-lo no ensino dos alunos do 2º ano do Ensino Médio Integrado em Administração do *Instituto Federal do Piauí* (IFPI) - Campus Corrente. Essa abordagem permitiu a integração de conceitos astronômicos históricos e contemporâneos no currículo escolar, enriquecendo a formação dos estudantes e estimulando o pensamento crítico e científico.

Para atrair alunos menos interessados, a primeira metade do Capítulo 2 foi elaborada com o objetivo de motivar esses discentes para o estudo. A outra metade aborda a história dos astrônomos e suas contribuições, oferecendo um contexto enriquecedor e inspirador.

O Capítulo 3 aborda conceitos de astronomia essenciais para o desenvolvimento do conteúdo, visando uma integração harmoniosa com os conceitos de semelhança de triângulos e relações trigonométricas. Além disso, são realizadas algumas contas e desenvolvidos outros conceitos úteis para o ensino da ciência dentro da Matemática. No final do capítulo, é apresentado um resumo do TCC de Barbosa (2023), orientado no segundo semestre de 2023, que discute a magnitude das estrelas.

No Capítulo 4, é detalhada a metodologia utilizada para ensinar os raciocínios de Aristarco e Eratóstenes, incluindo comentários dos alunos. A maior parte da turma acompanhou as ideias até a parte dos eclipses lunares, que envolve frações e cálculos complexos, onde alguns alunos encontraram dificuldades para compreender o conteúdo.

Compreender como esses conceitos foram construídos torna o ensino da Matemática e da astronomia altamente significativo, demonstrando aos alunos que a Matemática vai além da simples realização de contas, envolvendo o desenvolvimento de conceitos e raciocínios inovadores. Com base na experiência em sala de aula, o Capítulo 5 propõe uma sequência didática detalhada, utilizando as ideias de Aristarco e Eratóstenes para enriquecer o processo de ensino-aprendizagem.

2 A IMPORTÂNCIA DA ASTRONOMIA

Durante minha experiência no magistério tive a oportunidade de trabalhar num projeto integrador, cujo tema era astronomia, numa turma de primeiro ano de uma escola profissionalizante do Ceará. O envolvimento da turma foi motivador para a escrita da primeira seção deste capítulo. Outro ponto que posso destacar para justificar tal seção é: quem disse que o aluno tem interesse em astronomia? De modo geral: quem disse que o aluno tem interesse em alguma área de aplicação da matemática? Os professores tem o dever de motivar os alunos ao estudo e o encantamento é etapa essencial para isso. Na seção seguinte, apresento os principais astrônomos presentes nesta dissertação e falo um pouco sobre a obra de cada um deles.

2.1 INSERÇÃO DO ENSINO DA ASTRONOMIA NAS ESCOLAS

Durante boa parte dos meus 8 anos de experiência no magistério, tive a preocupação de sempre melhorar minha prática de ensino ao tentar explicar melhor e de forma contextualizada, sem deixar o aspecto matemático de lado. Portanto, nesta seção, irei falar sobre o porquê de ensinar Matemática utilizando Astronomia através do ensaio de Gama e Henrique (2010) como texto norteador. Iniciarei discutindo três conceitos importantes para tal discussão: Axiologia, Ontologia e Epistemologia.

A Axiologia é o estudo filosófico dos valores das coisas. Por exemplo, que valor atribuímos aos policiais, médicos ou professores em nossa sociedade? Ou, mais especificamente, que valor os alunos e professores atribuem aos conteúdos abordados em sala de aula? Essa questão é muito importante, tendo em vista que a partir da valorização do conteúdo, dada pelos alunos, a motivação para o aprendizado se torna evidente.

Lotze introduziu o conceito de “valor” e Nietzsche, a palavra “valor”, até que em 1889, Bretano lança o livro “A origem do conhecimento moral”, no qual reconhece que o valor é um fenômeno *sui generis*, inaugurando o que hoje se conhece por Axiologia. (NOGUEIRA, 2007)

Segundo Gama e Henrique (2010) “a Ontologia é o estudo dos constituintes mais básicos do mundo (ou seja, “real”), bem como as relações entre eles”. De modo geral, responde a questões do tipo “qual a natureza das coisas?”, ou ainda, “o que é um ser?”.

Já a Epistemologia, de acordo com Grayling (2002), é o ramo da filosofia interessada na investigação da natureza, fontes e validade do conhecimento. Um problema clássico que envolve epistemologia é a prova da existência de Deus, que não tratarei aqui. Podemos nos

perguntar sobre “o universo é finito?”, “existem outros universos?”, “qual é a origem do universo?” ou ainda: “por que os cientistas acreditam na teoria da origem das espécies?”

Axiologicamente falando, de acordo com Gama e Henrique (2010), o estudo da astronomia não possui valor objetivo algum, porém, a contemplação dos astros provoca no ser humano sentimentos de admiração ao presenciar um eclipse solar ou lunar, ou presenciar a glória do Sol ou os detalhes da Lua. A passagem de um cometa, a queda de um meteorito ou meteoro, o vislumbre de um céu escuro com destaques em pequenas e vibrantes estrelas, ou a grande mancha de leite que compõe nossa galáxia também geram admiração nas pessoas. Todos esses astros fazem parte da astronomia. Mas assim como geram admiração, geram também terror.

Mitologias foram criadas na observação dos astros. Hermes, deus grego, foi criado ao observar o astro mais rápido do céu, o planeta Mercúrio. Daí, a qualidade divina do deus Hermes que mais se destaca: velocidade. Ou o deus romano da guerra, Marte, inspirado na coloração avermelhada do planeta Marte, clara referência ao sangue. O terror causado pelos eclipses solares geravam rituais de sacrifícios entre os Maias, que acreditavam que animais malignos tentavam comer o Sol, por isso ele se escurecia temporariamente. (GAMA; HENRIQUE, 2010)

Epistemologicamente falando, os problemas propostos são situações-problemas para o questionamento dos métodos utilizados por Aristarco e Eratóstenes. Quando estivermos falando sobre as considerações de Eratóstenes para o cálculo do raio da terra, discutiremos que a Terra é curva e que o Sol está tão longe da Terra que seus raios solares incidem de forma paralela sobre sua superfície. A construção desses conhecimentos poderá ser discutida, e deverá ser discutida, já que devemos fazer ciência em sala de aula, para melhor compreensão por parte dos alunos e para o enriquecimento intelectual dos mesmos.

Um outro questionamento interessante, ainda no âmbito desta dissertação, que pode ser feito em sala é: Como que Aristarco soube que o diâmetro da Lua é $\frac{3}{8}$ do diâmetro do cone de sombra gerado pela Terra? Negligenciar tais abordagens deixa brechas no conhecimento dos alunos, que pode, às vezes, serem atraídos por pseudociências, como o caso recente do Terraplanismo¹.

Para Bachelard (1977), todo o conhecimento é resposta de uma questão. Assim, ensinar sem fazer questionamentos não é fazer conhecimento. Freire (1970) aborda esse assunto, explorando o conceito de problematização, ele propõe o conhecimento como uma entidade dinâmica: não se trata de uma aquisição que foi, mas de uma conquista que está sendo. Conhecer

¹ **Terraplanismo:** É uma teoria baseada em algumas passagens da Bíblia, em dados sem comprovação da ciência e na imaginação de seus adeptos. Afirmam que a Terra é plana.

remete a questionar, repensar e atuar, dada a existência atuante transformadora do homem.

Na pedagogia de Paulo Freire, o tema gerador é justamente o objeto de interesse que, uma vez explorado, promover-se-á como fonte dos diálogos entre educadores e educandos [...]. Sendo o caso de alfabetizar uma turma de trabalhadores de uma olaria, a palavra tijolo, bastante presente em sua fala, pode ser decodificada, desmontada, questionada, e mostrar-se-á composta pelas sílabas ti-jo-lo, e daí o questionamento incidente sobre a formação sonora desses pedaços passará pela descoberta das letras t-i-j-o-l-o. (GAMA; HENRIQUE, 2010)

Ao investigar um objeto, questionando-o e problematizando-o, promove-se um diálogo entre o educando e educador sobre o ente em investigação. A Astronomia é uma ciência de fácil tema de motivação por causa de suas características cativantes. É difícil de se manter alheio ao ser exposto a imagens de nebulosas, colisões galácticas, supernovas, galáxias elípticas, espirais ou espirais barradas. Vídeos de comparações entre objetos astronômicos são de fácil acesso na internet, filmes de ficção científica e documentários podem e devem ser inseridos em sala de aula para motivar o estudo da astronomia.

Um tema bastante interessante para se debater em sala de aula, nas aulas de História, por exemplo, seria a transição do modelo Geocêntrico para o Heliocêntrico, a chamada Revolução Copernicana. Ora, seria fácil inculcar nos discentes a questão: se o Sol nasce no leste e se põe no oeste, por que então é a Terra que se move ao redor do Sol e não o Sol ao redor da Terra? ou ainda: mesmo que a Terra gire em torno de um eixo, dando a impressão de que o Sol gira em torno da Terra, porque dizemos que a Terra é quem gira em torno do Sol?

Estudar os objetos de forma detalhada propicia melhor compreensão do objeto em questão e por isso decidi escrever a seção seguinte mostrando alguns detalhes que as vezes passam despercebidos por nós professores, e é claro, outros assuntos podem ser discutidos em sala de aula para enriquecer o método de ensino da Astronomia.

2.2 PRINCIPAIS ASTRÔNOMOS E SUAS CONTRIBUIÇÕES

Nesta seção veremos um pouco sobre vida e obra de alguns personagens de relevância neste trabalho, com destaque para Copérnico, Roemer e Pogson, que por serem mais recentes, há literatura abundante sobre eles. A ordem da apresentação desses personagens foi escolhida cronologicamente, ou seja, na ordem em que estimasse o nascimento de cada um deles.

Hiparco

De acordo com Couper e Henbest (2013), Hiparco (190-125 a.C.) nasceu na Turquia e morreu na ilha de Rodas. Ele calculou a duração do ano com erro menor que 7 minutos.

A precisão foi tamanha que gerou-lhe certo constrangimento ao notar que o ano solar era 20 minutos maior que o ano que se mede de um equinócio de verão para o seguinte. Essa diferença foi chamada de precessão dos equinócios.

Note que 365,25 dias são 26.296 vezes 20 minutos. Assim, as estrelas realizavam uma volta completa no firmamento a cada 26.296 anos, valor quase igual ao atual que é de 25770 anos. O movimento é realizado pela rotação do eixo da Terra em torno do plano de sua eclíptica. Acredita-se que o movimento de precessão² influencia nas eras glaciais (LEITE, 2015).

Hiparco catalogou as 850 estrelas mais brilhantes do céu e classificou como sendo de primeira magnitude as mais brilhantes, aquelas que aparecem ainda no pôr do Sol, e as mais tênues de sexta magnitude, aquelas quase imperceptíveis ao olho nú. Hoje estrelas e alguns planetas são classificadas com magnitudes negativas, a estrela Vega como magnitude 0 e as estrelas no limite de detecção dos aparelhos astrofotográficos com magnitude aproximadamente 30 (ALMEIDA, 2011).

Aristarco

Pouco sabemos sobre Aristarco e o único trabalho que chegou até nós foi a relação entre as distâncias da Lua e do Sol à Terra e os raios da Lua, Terra e Sol. Aristarco foi pioneiro em sua época ao perceber que o Sol era maior que a Terra e ao pensar que a Terra deveria girar ao redor do Sol, já que o Sol era maior que a Terra.

Portanto, não era lógico, para Aristarco, a Terra ocupar o centro do universo conhecido; o corpo maior deveria ocupar o centro do universo e a Terra se movimentar em torno do Sol e girar em torno de um eixo inclinado em relação aos signos do zodíaco, para explicar as estações do ano. (LOPES; LOPES, 2014)

Aristarco também notou que o Sol e a Lua aparentam ter o mesmo tamanho (COOPER; HENBEST, 2013), portanto, a relação entre os seus raios deve ser a mesma que a razão entre suas distâncias. Grande observador de eclipses lunares, relacionou também o diâmetro da Lua com o diâmetro da sombra da Terra na altura que a Lua passa por ela, o que permitiu relacionar também os raios dos três astros com as distâncias entre si.

² **Precessão:** É o movimento circular do eixo de rotação da Terra em relação a eclíptica.

Eratóstenes

Eratóstenes, Líbio, foi indicado como o terceiro bibliotecário da grande biblioteca de Alexandria em 240 a.C., a maior da antiguidade (COUPER; HENBEST, 2013). Dentre os inúmeros registros da biblioteca, teve a sorte de ler um que dizia que na cidade de Siene, no solstício de verão, o Sol passava diretamente no alto. Como na cidade de Alexandria no solstício de verão havia sombra, Eratóstenes calculou o diâmetro da Terra com grande precisão, melhor até mesmo que Cristóvão Colombo, 1700 anos depois.

Copérnico

Nikolaj Kopernik, autointitulado Nicolaus Copernicus, também conhecido como Nicolau Copérnico, nasceu em 1473, em Torun, Polônia, filho de mercador de artigos de cobre, ficou órfão de pai aos 10 anos e o tio solteiro assumiu ele e seus três irmãos(ãs) (COUPER; HENBEST, 2013). Foi encorajado pelo tio a estudar na universidade de Cracóvia, e lá, tomou gosto pela ciência astronômica. Foi para Itália, estudar direito canônico em Bolonha, mas seu fascínio pela astronomia o fez dar um jeito de morar com o professor de Astronomia.

Já na Polônia, ao analisar o modelo de Ptolomeu sob a ótica de Regiomontanus, que já questionava o modelo ptolomaico, percebeu que na verdade Marte, Júpiter e Saturno giravam ao redor do Sol. Porém, como na época acreditava-se que todos os astros giravam ao redor da Terra, Copérnico levou mais tempo para perceber que Mercúrio e Vênus também giravam ao redor do Sol.

Como os astrônomos, em sua época, já conheciam as relações entre os epiciclos de cada planeta com suas órbitas, a órbita de Júpiter, por exemplo, cinco vezes maior que o seu epiciclo, Copérnico se permitiu assumir que o raio do epiciclo fosse a distância da Terra ao Sol. Com isso, concluiu que Júpiter se encontrava 5 vezes mais distante do Sol que a Terra, e Saturno 10 vezes mais distante. Seguindo em direção e sentido ao Sol, Mercúrio se encontraria a apenas um terço de distância da Terra, Vênus a quase dois terços. De acordo com Couper e Henbest (2013) Copérnico então trocou de lugar a Terra com o Sol, obtendo uma disposição mais harmoniosa e que agradava sua sensibilidade artística. Dessa maneira, o ano Terrestre caberia perfeitamente entre os 7 meses de Vênus e os 23 meses de Marte. Para Copernico (1984) “Só desse modo encontramos uma conexão harmoniosa coerente entre o tamanho da órbita e o período de revolução do planeta”.

Copérnico chegou a fazer um fôlho de seis páginas para circular apenas entre poucos amigos. Nesse fôlho, afirmava que o Sol que era o centro do universo, que os movimentos

retrógrados dos planetas era meramente um resultado do movimento da Terra ao redor do Sol, e que o movimento das estrelas ocorre devido a rotação da Terra em períodos de 24h.

Em 1539, com aproximadamente 65 anos, Copérnico conhece um jovem de 25 anos chamado Georg Joachim Rheticus, que foi sentenciado por 101 anos de exílio por um caso homossexual. Tal jovem convenceu Copérnico a publicar os seus seis livros. No dia que Copérnico recebeu as últimas cópias para verificação dos erros de impressão acabou falecendo, em 24 de maio de 1543.

Roemer

Roemer (1644-1710), enquanto jovem e já astrônomo, foi recrutado por Picard³ para ajudá-lo a realizar uma observação de um eclipse na Dinamarca enquanto Cassini⁴ fazia a mesma observação em Paris (SILVA, 2002). Chega a Paris em 1672 para realizar observações das luas de Júpiter juntamente com Picard e Cassini. Tais observações eram importantes em sua época, pois existiam problemas na determinação da hora durante as navegações. Como as luas de Júpiter funcionam como excelentes relógios, devido a possuírem períodos relativamente constantes, estudar seus períodos ajudariam a resolver o problema da determinação das horas. Durante essas observações, Cassini verificou que o período dos satélites de Júpiter comporta muitas desigualdades.

Percebendo que, enquanto a Terra se afasta de Júpiter, o satélite Io de Júpiter, atrasava a eclipsar, e enquanto a Terra se aproximava de Júpiter, o mesmo satélite adiantava em eclipsar, concluiu que a Luz possuía velocidade finita. Em 1676, anunciou à Academia que o eclipse de Io de 9 de novembro de 1676 ocorreria com exatamente 10 minutos de atraso, e tal fato foi verificado por Picard às 5h 37min 49s horário de Paris. Em 21 de novembro do mesmo ano, Roemer anuncia que a luz tinha velocidade finita para explicar o sucedido, e ainda que a luz leva 22 minutos para percorrer o diâmetro da órbita da Terra. Em 28 de novembro, Roemer discute os resultados na Academia e é confrontado por Cassini. Uma semana depois, Cassini apresenta à Academia que os mesmos padrões nos tempos do satélite Io não é verificado nos outros três satélites.

Em 1677, Roemer confirma sua teoria com novas observações feitas durante o mesmo ano com o artigo intitulado *Confirmatio doctrinae de mora Luminis ex novis observationibus*

³ **Picard:** Picard foi assistente do primeiro director do Observatório de Paris.

⁴ **Cassini:** Astrônomo italiano, ganhou fama por ter calculado a órbita de um cometa, organizado tábuas para os eclipses das luas de Júpiter e ter calculado a duração da rotação de Marte. Também calculou com Picard e Jean Richer a distância da Terra ao Sol ao medir a paralaxe de Marte em oposição quando alinhado com a Terra e o Sol.

anni 1677 (SILVA, 2002) e apresenta seu artigo em 26 de março de 1678 à Academia.

Pogson

Norman Robert Pogson (1829-1891) nasceu em Nottingham. Era filho de Georg Owen Pogson, fabricante de roupas. Aos 10 anos teve que se mudar para Manchester, onde passou a ter aulas de trigonometria. Aos 16 já decidira ser professor de matemática. Jhon Hind, filho do astrônomo John Russel Hind, ficou impressionado com os talentos de Pogson e sugeriu aos pais de Pogson que o enviassem para Londres, para o George Bishop's South Villa Observatory, onde seu pai trabalhava. Pogson chega a Londres em 1846 para começar sua vida como astrônomo (ALMEIDA, 2011).

Com 18 anos, já havia calculado a órbita de dois cometas, e aos 22 anos foi auxiliar do South Villa Observatory, onde descobriu que as estrelas R Cygni, R Ursae Majoris, R Ophiuchi e R Cassiopeiae variavam em seu brilho. Em 1851, iniciou sua carreira como astrônomo profissional no mesmo observatório.

No ano seguinte, aceitou um convite para ser assistente em Oxford no Radcliffe Observatory, onde descobriu seus três primeiros asteróides: Ísis, Ariadne e Hestia. Realizando alguns trabalhos sobre fotometria, percebeu que a relação entre duas estrelas de magnitudes de diferença 1 era 2,4. Outros astrônomos também calculavam tal relação com resultados muito divergentes. Com isso, Pogson decidiu atribuir qualquer escala de magnitude, e adotou 2,512 como razão entre duas magnitudes de diferença 1.

Em 1856 Pogson desenvolve sua relação matemática para magnitudes estelares: a magnitude aparente, que é percepção do brilho ao olho humano de uma estrela, ou astro luminoso, visto daqui da Terra. Existe também a magnitude absoluta, que é a magnitude que o objeto aparenta ter a uma distância de 10 parsecs⁵. Conhecendo-se essas duas magnitudes de um objeto no espaço, é possível calcular a distância do objeto até nós.

⁵ **Parsec:** É uma unidade de comprimento usada para medir as grandes distâncias de objetos astronômicos fora do Sistema Solar, aproximadamente igual a 3,26 anos-luz.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo iremos apresentar alguns conceitos astronômicos que visam o desenvolvimento cognitivo e científico do aluno. Veremos uma seção destinada a cálculos de grandes distâncias como a distância da Terra ao Sol, do Sol a algumas estrelas próximas e de magnitude de estrelas. Também veremos algumas teorias do livro “As Revoluções dos Orbes Celestes” de Nicolau Copérnico.

3.1 ALGUNS CONCEITOS ASTRONÔMICOS

Esta seção está dividida em nove subseções. Estudaremos conceitos como: retilinearidade da luz; os tamanhos angulares da Lua e do Sol; explicações do porque o Sol está mais longe da Terra do que a Lua; que o Sol é que ilumina a Lua em vez da Lua ter luz própria e porque não ocorrem 12 eclipses por ano. Será apresentada as fases da Lua e o travamento da mesma, bem como a medida do ângulo formado entre as órbitas da Lua e da Terra.

A retilinearidade da luz

A retilinearidade da luz pode ser constatada de modo direto ao observar vários fenômenos como: a projeção de um objeto por uma fonte de luz, ou por um laser, ou ao se pôr um objeto entre o observador e a fonte luminosa. Nesses experimentos é possível observar que a luz se move de forma retilínea. Porém, sabemos que a gravidade curva o trajeto da luz, mas nos experimentos citados anteriormente, isso não é perceptível ao olho humano, e que ao mudar o meio de propagação a luz sofre refração, mas isso não será tratado aqui.

Na teoria dos raios visuais, a visão era explicada como algum tipo de contato, era inaceitável uma ação à distância, já que com os outros sentidos era necessário um contato direto para seu funcionamento. Com os olhos fechados você toca nos objetos e tem uma ideia de forma, temperatura e tamanho. Com o olfato, você tem um contato com o vapor com o nariz tendo o conhecimento do cheiro da substância. Para saber o gosto de um alimento é preciso que este chegue até sua língua. Para ouvir é necessário que o som chegue até seus ouvidos. Logo a visão precisaria de um contato com o meio externo para coletar informações. (COSTA, 2015)

Na teoria dos raios visuais, os olhos emitiriam raios que se deslocariam pelo meio atingindo os objetos e retornando aos olhos produzindo uma imagem do objeto, dando ideia de tamanho aparente, distância, altura, desvio para a direita ou esquerda, forma, cor, etc. Tais raios visuais não poderiam se propagar pelo vácuo, e para o caso dos objetos não serem visíveis no

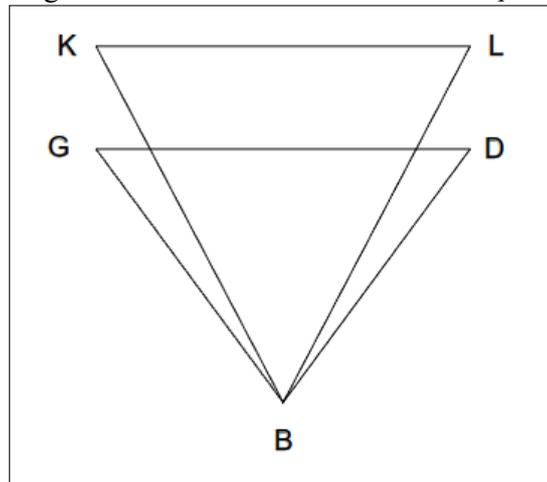
escuro, Aristóteles dizia que a luz tornava o meio translúcido, o que permitiria a propagação dos raios visuais.

De acordo com Costa (2015), Aristóteles dizia que as fontes de luz tinham o papel de alterar o estado de transparência do meio, o que permitiria a visualização dos objetos.

Euclides no século III a.C. elaborou o trabalho intitulado “Óptica” que descrevia os raios visuais, no qual tentava explicar o funcionamento desses raios. Em seu trabalho, a primeira suposição feita por Euclides, foi que os raios visuais saem dos olhos em trajetos retilíneos. Em sua segunda suposição, é dito que a figura contida pelos raios visuais é um cone com vértice no olho e extremidade no objeto, formando assim, a imagem do objeto. O que os raios visuais alcançam, formam imagem no olho, e o que os raios visuais não alcançam, não formam imagem no olho, sendo a terceira. Ao todo, são nove suposições acerca dos raios visuais e, a partir delas, é feito um estudo dedutivo sobre o funcionamento dos raios visuais que pode ser visto em sua obra.

Segundo Euclides “Das magnitudes iguais, as situadas mais próximas ao olho são vistas mais distintamente do que as mais remotas.” Como visto anteriormente, Euclides demonstra porque um objeto mais próximo é visto mais detalhadamente.

Figura 1 – \overline{GD} é visto mais distintamente que \overline{KL}



Fonte: Euclides (2013)

Com base na Figura 1, seja B um observador, e sejam \overline{GD} e \overline{KL} observados possuindo mesmas medidas e paralelas entre si, em que \overline{GD} esteja mais próximo do observador e incidam os raios visuais BG , BD , BK , e BL . É claro que os raios visuais que incidam sobre \overline{KL} a partir do observador B não passam pelos pontos G e D. Não se pode dizer que na figura $BDLKG$ o segmento \overline{KL} seria de maior medida que \overline{GD} , o que contraria a hipótese de \overline{GD} e \overline{KL} terem

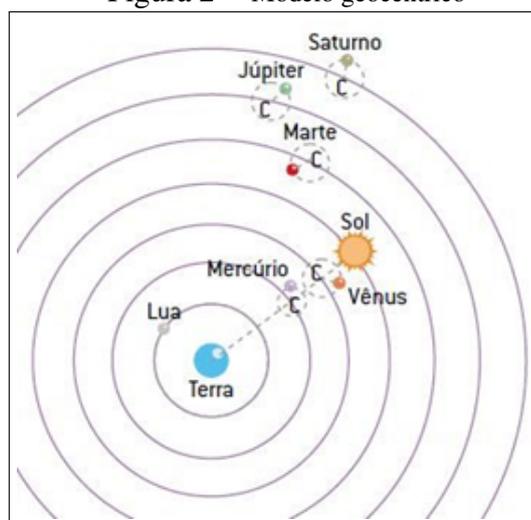
mesma medida. Assim, em \overline{GD} incide um maior número de raios visuais do que em \overline{KL} . Portanto, \overline{GD} aparecerá mais distintamente do que \overline{KL} , pois, a partir de um maior número de raios de visão incidindo sobre aquilo que é visto, mais distintamente aparecerá.

Euclides demonstra 58 afirmações, em sua obra, a respeito do funcionamento dos raios visuais, do qual aconselho a leitura. Note que apesar da suposição de que os raios visuais existam não ser verdadeira, as conclusões e os raciocínios empregados por Euclides estão corretos, se admitindo os raios visuais como verdade. Hoje, sabemos que os raios de luz refletivos ou originados dos objetos são captados pelos olhos e a imagem é formada a partir desses raios, captados pelo fenômeno de câmara escura¹.

As fases da Lua

No decorrer de 24 horas podemos ver que tanto a Lua quanto o Sol se movem em relação a nós, na Terra. Isso nos dá a ideia de que ambos os astros se movem ao redor da Terra. Além do mais, quando olhamos para o céu noturno, temos a sensação de que existe uma abóboda², como uma semi-esfera onde sempre estamos no ponto de projeção do polo dessa semi-esfera não importa em qual ponto da Terra estejamos. Não por acaso, passamos séculos pensando que a Terra era o centro do universo. Chamaremos o trajeto que o Sol e a Lua descrevem de órbitas, e usaremos o modelo geocêntrico para explicar os fenômenos neste trabalho, como mostra a Figura 2:

Figura 2 – Modelo geocêntrico



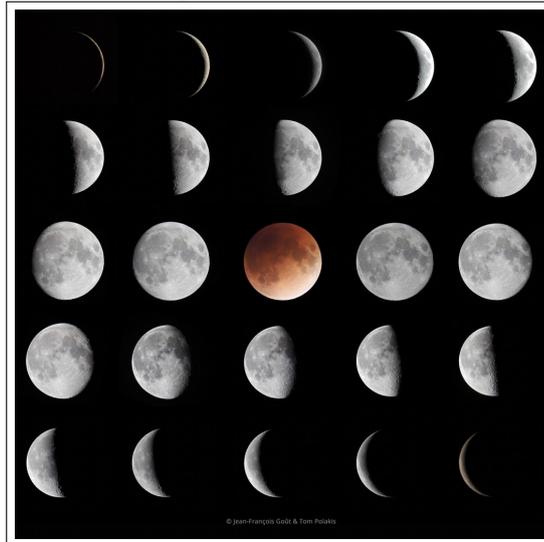
Fonte: Rioga (2021)

¹ **Fenômeno de Câmara Escura:** Consiste em uma caixa(ou olho) com uma abertura em um dos lados que permite a passagem da luz de uma fonte externa para o espaço escuro, projetando uma imagem invertida da cena externa no lado oposto.

² **Abóboda:** No terraplanismo, o termo é usado para referir-se ao lugar em que as estrelas estão fixadas.

Porém, Ronan (1994) afirma que Aristarco de Samos já propunha, mesmo séculos antes de Cristo, que a Terra girava em torno do Sol, pois não imaginava como que um astro maior poderia girar em torno de um astro menor. Sim, Aristarco já sabia que o Sol era maior do que a Terra e a Lua. Veremos como verificar isso nas próximas seções.

Figura 3 – Fases da Lua



Fonte: Gout e Polakis (2018)

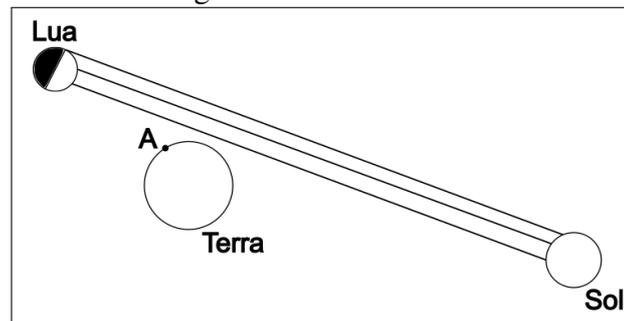
Sabemos que são quatro as fases da Lua, como mostra a Figura 3 de (GOUT; POLAKIS, 2018), são elas: Cheia, Minguante, Nova, e Crescente. Quando a Lua está passando de Cheia para Nova, há um momento em que exatamente metade da Lua, voltada para um observador na Terra, estará iluminada enquanto a outra metade não; a esse momento, dizemos que a Lua está em quarto-minguante. Quando a Lua está passando de Nova para Cheia, há um momento em que exatamente metade da Lua, voltada para um observador na Terra, estará iluminada enquanto a outra não; a esse momento, dizemos que a Lua está em quarto-crescente.

No texto de Ávila (1982), podemos perceber que Aristarco determinou o tempo que a Lua leva para dar uma volta em torno da Terra observando quanto tempo a Lua leva para sair de uma fase e retornar à mesma. Ao realizar a observação, constatou que a Lua leva 29,5 dias para dar uma volta em torno da Terra. À esse movimento da Lua, chamamos de revolução.

Ao observar as fases da Lua, notamos que ela não possui luz própria, como mostra a Figura 3. Note que quando a Lua está Cheia, toda sua superfície voltada para nós está iluminada, mas quando está em Minguante, parte da superfície que antes estava iluminada passa a não estar iluminada. Isso nos sugere que algo ilumina a Lua.

Analisando a posição do Sol a partir da Figura 4, mesmo durante a noite, podemos verificar que a parte iluminada da Lua, que pode ser vista da Terra a partir do ponto A, está relacionada com a posição do Sol. Podemos concluir que o Sol é que ilumina a Lua. Outro detalhe a ser destacado é que a Lua, quando cheia, possui tamanhos angulares diferentes em diferentes meses. Ou seja, a medida do ângulo no qual um observador olha a Lua é diferente para diferentes Luas cheias.

Figura 4 – Sol ilumina a Lua



Fonte: Elaborada pelo autor

Concluimos daqui que a Lua se aproxima da Terra em sua órbita, ou seja, a órbita da Lua não é circular. Chamamos a medida do ângulo ao qual se observa um objeto de tamanho angular, ou diâmetro angular. Quando a Lua estiver em seu tamanho angular máximo, diremos que nesse ponto, a Lua atinge o perigeo³ e quando estiver em seu tamanho angular mínimo, diremos que a Lua atinge o apogeo⁴.

Os diâmetros angulares da Lua e do Sol

Aristarco, em seu trabalho, estima os diâmetros aparentes da Lua e o do Sol como sendo 2° . Porém, Almeida (2012) cita que o tamanho aparente da Lua varia em torno de $0,5^\circ$, e do Sol em torno de $0,53^\circ$ de acordo com Costa e Maroja (2017). Tais medidas podem ser obtidas a partir da dioptria de Hiparco⁵.

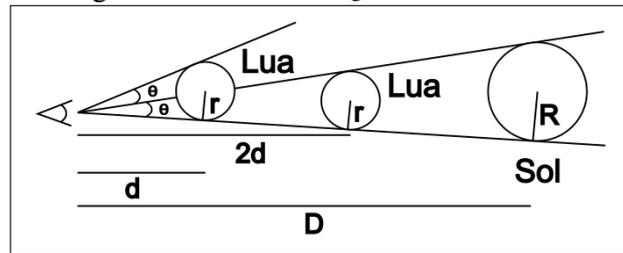
Aristarco usa sua estimativa para relacionar os raios da Lua e do Sol com suas distâncias à Terra, ao notar que a proporção entre os raios é igual a proporção entre suas distâncias pois seus tamanhos angulares são iguais. Entretanto, gostaria de abrir um parênteses aqui e discutir: Se Aristarco não tivesse tido a sorte dos tamanhos angulares da Lua e do Sol serem iguais, ele poderia ter obtido alguma relação semelhante? A resposta é sim. Mas como ele poderia relacionar as duas proporções?

³ **Perigeo:** ponto mais próximo da Lua em relação a Terra

⁴ **Apogeo:** ponto mais distante da Lua em relação a Terra

⁵ **Dioptria de Hiparco:** Técnica usada para medir ângulos.

Figura 5 – Tamanhos angulares do Sol e da Lua



Fonte: Elaborado pelo autor

Note que, para ângulos muito pequenos, se uma esfera, a uma distância d , aparenta ter raio r , então, se aproximarmos a esfera a uma distância $\frac{d}{2}$, seu raio aparentará ter medida $2r$. Portanto, se a Lua aparentasse, por exemplo, ter duas vezes o tamanho angular do Sol, então poderíamos supor que para aparentar ter o mesmo tamanho do Sol, precisaria estar a uma distância duas vezes maior, e assim aplicar a ideia de Aristarco para o caso dos astros possuírem o mesmo tamanho angular, podemos analisar esse fato na Figura 5.

Tal proporção só é válida para esferas com tamanhos angulares muito pequenos. Podemos perceber isso fazendo o seguinte exercício: olhe para o chão a uma distância de $1m$ e depois olhe para o mesmo chão a $0,5m$. Em ambos os casos o tamanho angular do planeta Terra será 180° , e não 360° para o primeiro caso e 720° para o segundo. Para ângulos muito pequenos, pode-se verificar a validade do argumento do parágrafo anterior analisando a expansão do seno:

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots + \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} \dots$$

Portanto, podemos escrever a aproximação $\text{sen}(qx) \cong qx$ para qx muito pequeno.

Assim, suponha que a Lua tenha q vezes o tamanho angular do Sol, portanto, para que os dois astros aparentem possuir os mesmos tamanhos angulares, precisaríamos multiplicar a distância da Lua por q . Obtendo a seguinte relação:

$$\frac{r}{qd} = \frac{R}{D} \Leftrightarrow \frac{r}{R} = \frac{qd}{D} \Leftrightarrow \frac{D}{qd} = \frac{R}{r}.$$

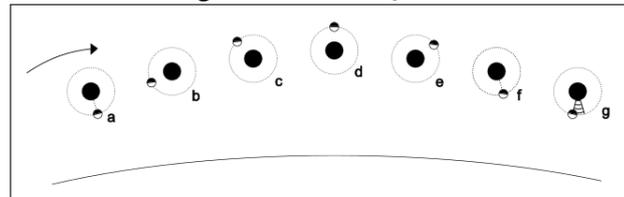
Uma vez que Aristarco sabia como calcular $\frac{D}{d}$, fica fácil obter $\frac{R}{r}$.

O período lunar

Na seção anterior, vimos que Aristarco considerou que a Lua levava 29,5 dias para completar uma revolução. Porém, hoje sabemos que a Lua leva 27,3 dias para completar uma

revolução (ZARPELON *et al.*, 2023). O período de 29,5 dias é considerado o mês sinódico⁶ da Lua, enquanto que os 27,3 dias é considerado o mês sideral⁷ da Lua. Assim, dizemos que o tempo que a Lua leva para dar uma volta em torno da Terra se chama período Lunar. Aristarco ao determinar o período Lunar em 29,5 dias errou ao não perceber que a Terra, ao girar em torno do Sol, gira também o ângulo de observação da Lua, como mostra a Figura 6.

Figura 6 – Revolução Lunar



Fonte: Elaborada pelo autor

Ao observar a Terra, disco preto em cada ponto, e a Lua, em preto e branco (branco representando a metade iluminada, e preto a não-iluminada), se deslocando em sua órbita do ponto 'a' até o ponto 'g', notamos que, para um observador na Terra, a Lua está Nova em 'a', e volta a Nova no ponto 'g'. Entretanto, a região ondulada corresponde a área varrida pela Lua mesmo após completar uma revolução em 'f'. Com isso, o período lunar deve ser menor que os 29,5 dias descrito por Aristarco.

Sabendo que a Terra leva 365,25 dias para completar uma revolução em torno do Sol, que o quociente $\frac{365,25}{29,5} \cong 12,38$ (número de fases da Lua num ano) e ao observarmos Figura 6, notando que a Lua realiza uma revolução a mais que o número de fases num ano, podemos concluir que o período lunar é $\frac{365,25}{13,38} \cong 27,3$ dias.

O lado oculto da Lua

Para aqueles que observam a Lua, é perceptível que a Lua sempre está com a mesma face voltada para a Terra. De acordo com Giovannini *et al.* (2014), a Terra dá uma volta em torno de seu eixo de rotação a cada 24h, que convencionamos ser um dia, e com isso, que leva 365,25 dias para dar uma volta em torno do Sol. Já sabemos que o mês sinódico da Lua é 29,5 dias, mas como determinar o tempo que ela leva para dar uma volta em torno de seu próprio eixo de rotação? Aliás, ela possui eixo de rotação?

Pelo fato da Lua sempre estar com a mesma face voltada para a Terra, podemos concluir que ela possui eixo de rotação, pois se não tivesse eixo de rotação, poderíamos ver toda

⁶ **Mês Sinódico:** Em relação ao Sol

⁷ **Mês Sideral:** Em relação às estrelas

sua superfície ao longo de uma revolução lunar. Também podemos concluir que a Lua dá uma volta em torno de seu próprio eixo em aproximadamente 29,5 dias, ou seja, o tempo de rotação do eixo de rotação da Lua é o mesmo que o mês sinódico. Por isso dizemos que a Lua está travada em relação a Terra.

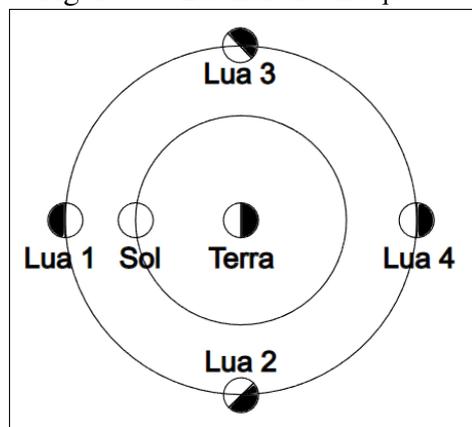
O lado da Lua que nunca se volta para a Terra é chamado de lado oculto da Lua e ele também é iluminado pelo Sol, visto que todo objeto esférico do sistema solar é iluminado, pelo menos, em um hemisfério. Portanto, quando a Lua está Nova, ou seja, o hemisfério visível da Lua estiver não-iluminado, seu lado oculto estará iluminado.

O Sol está muito mais longe da Terra do que a Lua

Nesta seção, estamos interessados em determinar que o Sol está muito mais longe da Terra do que a Lua. Para isso, Ávila (1982) verifica primeiramente que o Sol está mais longe que a Lua. Após essa verificação, Silveira (2020) verifica que o Sol está relativamente muito longe de nós em relação a Lua.

Suponhamos que a Lua está mais longe que o Sol, como mostra a Figura 7. As Luas 1 e 4 são cheias, pois estão com sua metade iluminada pelo Sol voltada para a Terra; enquanto a Lua 1 se desloca em sua órbita até a Lua 4, sua parte superior se escuresse, o que poderíamos dizer que a Lua estaria em sua fase minguante, porém, em algum momento, ela passaria a clarear, voltando a ficar cheia na Lua 4; o mesmo ocorrendo da Lua 4 para a Lua 1. Com isso, note que de qualquer ponto da Terra em que a Lua esteja visível, uma parte da Lua estaria iluminada, o que contraria o fato de existir Lua nova. Portanto, a Lua não pode estar mais longe da Terra que o Sol, mas o contrário sim.

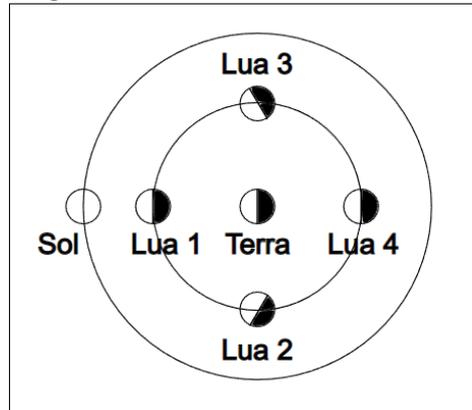
Figura 7 – Lua mais distante que o Sol



Fonte: Elaborada pelo autor

Além do mais, nesse modelo existiriam duas Luas cheias num mês. Também seria impossível os eclipses lunares. O que contraria a observação. A Figura 8 mostra que o Sol está mais longe da Terra que a Lua, as quatro fases da Lua ficam muito bem definidas, e é de se destacar que o ângulo formado pela Lua quarto minguante-Terra-Lua quarto crescente, é obtuso.

Figura 8 – Sol mais distante do que a Lua

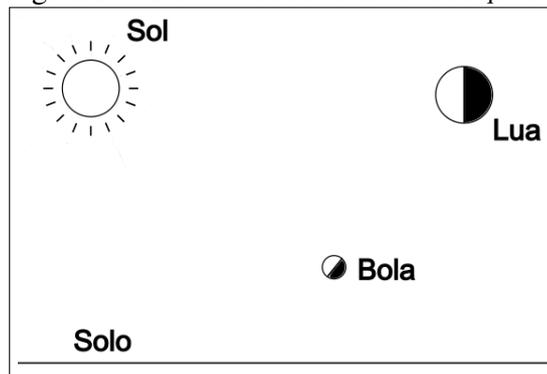


Fonte: Elaborada pelo autor

A Lua na mesma distância que o Sol não é possível, pois impossibilitaria os eclipses solares que é facilmente comprovado observacionalmente, bastando observar que a Lua, quando nova, ao se aproximar do Sol, o encobre. Todos os terraplanistas descartam esse fato para não descreditar sua teoria, mas a observação não falha.

Resta agora saber se o Sol está muito mais longe ou pouco mais longe do que a Lua. Tal questão parece um pouco imprecisa quanto às expressões ‘pouco mais longe’ e ‘muito mais longe’, entretanto é importante e de fácil entendimento, após o raciocínio que apresentarei a seguir, tendo visto pela primeira vez em pesquisas na internet.

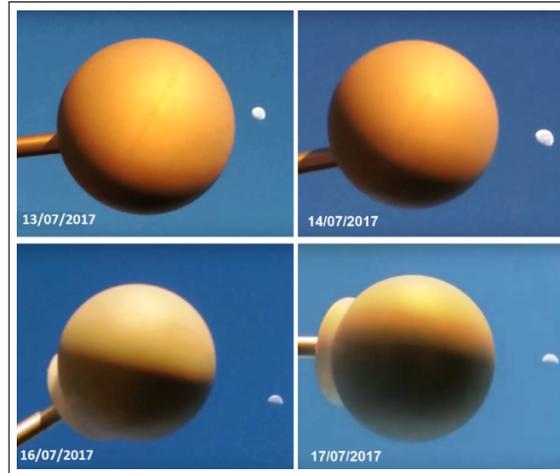
Figura 9 – O Sol mais distante da Terra do que a Lua



Fonte: Elaborada pelo autor

De acordo com a Figura 9, se o Sol estivesse apenas um pouco mais longe da Terra do que a Lua, os raios de luz com origem no Sol incidiriam sobre a Lua com um ângulo aparentemente de medida diferente do que numa esfera nas proximidades do solo terrestre. Entretanto, isso não ocorre, sendo observado que os ângulos de incidência na Lua e numa esfera próxima ao solo terrestre, é aparentemente de mesma medida. Como mostra a Figura 10.

Figura 10 – Os ângulos de incidência dos raios de luz



Fonte: Silveira (2020)

Note que a direção de visão da esfera deve ser a mesma que a direção de visão da Lua, caso contrário, a constatação não seria possível. Não se trata de um artifício para que o experimento nos dê a resposta que queremos, mas sim de compatibilidade de visão com a Lua. Se deslocarmos um pouco a direção com o qual vemos a esfera, não deslocaríamos significativamente o ângulo de visão com a Lua. Portanto, ao observarmos a direção de incidência dos raios de luz na Lua e na esfera, devemos nos atentar a direção de visão dos dois objetos.

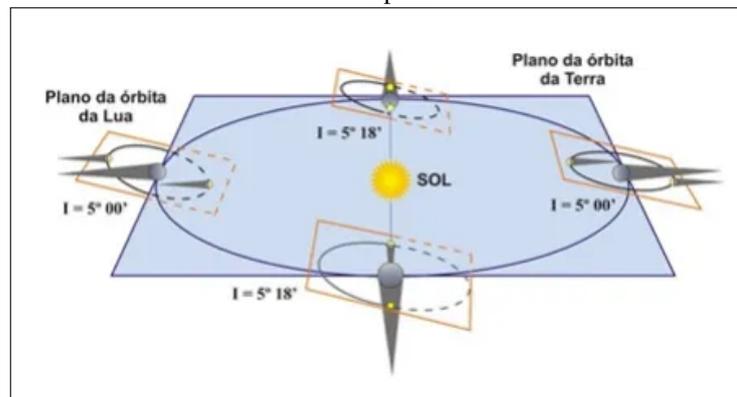
Assim, o Sol está tão longe da Terra e da Lua, que os raios de luz vindos dele incidem, aparentemente, de forma paralela tanto na superfície da Lua, quanto na superfície da esfera próxima ao solo da Terra. E fica claro em que sentido o Sol está muito mais longe da Terra do que da Lua.

A órbita da Lua

Como bem sabemos, algumas vezes por ano a Lua fica alinhada com a Terra e o Sol, gerando dois tipos de fenômenos muito admirados por pessoas do mundo inteiro: os eclipses solar e lunar. Sendo assim, e sabendo que o mês sinódico da Lua é 29,5 dias, deveriam ocorrer 12 eclipses lunares por ano, assim como os eclipses solares. Mas tais fenômenos não são tão frequentes. Veremos o porquê.

Aparentemente o Sol se move ao redor da Terra dentro de um plano. Ros e García (2019) chamou em seu trabalho esse plano de eclíptica. O mesmo ocorre com a Lua, e o chamaremos de plano orbital lunar. Se os dois planos fossem coincidentes, ou seja, se um estivesse dentro do outro, ocorreriam 12 eclipses solares e 12 eclipses lunares todo ano. Mas já sabemos que isso não ocorre. Logo a eclíptica e o plano orbital lunar não coincidem, e existe um ângulo não nulo formado pelos planos orbitais dos dois astros.

Figura 11 – Inclinação do plano da órbita da Lua em relação a eclíptica



Fonte: SAR (2024)

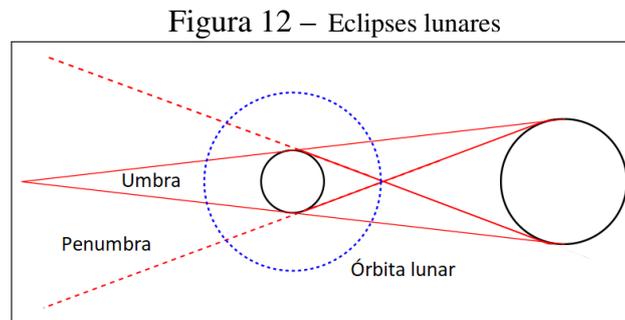
A determinação da medida do ângulo formado entre a eclíptica e o plano da órbita lunar requer conhecimentos sobre triângulos esféricos e outros conceitos astronômicos que não cabem à essa dissertação, mas podem ser encontrados no artigo de Souza *et al.* (2022). Diremos apenas que a medida desse ângulo é de aproximadamente 5° , veja Figura 11 da *Sociedade Astronômica do Recife* (SAR).

Caso a Lua estivesse muito próxima da Terra em relação aos seus tamanhos, haveriam 12 eclipses, parcial ou total, de cada tipo todo ano, mesmo os planos orbitais não sendo coincidentes. Portanto, a Lua deve estar muito distante da Terra em relação aos seus tamanhos. Agora sabendo a medida do ângulo de inclinação do plano orbital lunar em relação a eclíptica e que a distância da Lua em relação a Terra é muito grande, fica evidente porque não ocorrem 12 eclipses de cada astro por ano.

Eclipses lunares

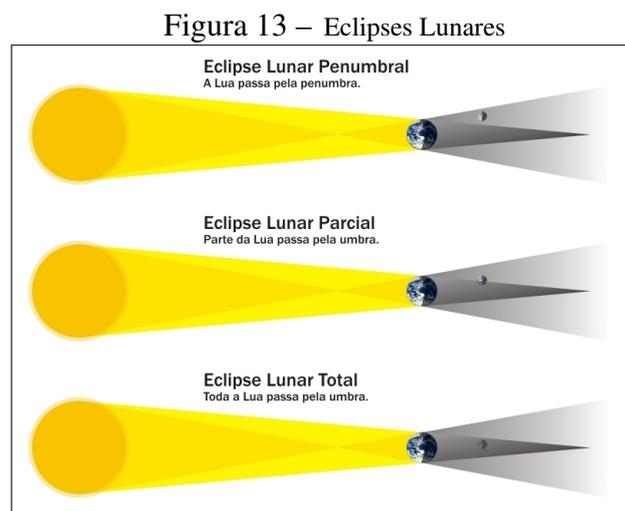
Como o Sol ilumina tanto a Terra quanto a Lua, é natural que existam sombras da Terra e da Lua no espaço. A retilinearidade da luz permite a construção da Figura 12, onde as linhas contínuas e tracejadas vermelhas representam raios de luz, o círculo menor e o círculo

maior representam a Terra e o Sol, respectivamente, e o círculo pontilhado em azul a órbita da Lua. A umbra é uma região de total escuridão e a penumbra é uma região que recebe parcialmente raios de luz do Sol, e quanto mais próximo da linha contínua, mais escuro será, e quanto mais próximo da linha tracejada, mais iluminado será.



Fonte: Elaborada pelo autor

De acordo com Canalle (1999), o Eclipse Lunar ocorre quando a Terra fica entre o Sol e a Lua, gerando uma sombra ou uma penumbra na superfície Lunar. São três os tipos de eclipses lunares: Penumbral, Parcial e Total. Observe a Figura 13. Ao contrário dos eclipses totais e parciais, os penumbrais são quase imperceptíveis ao olho humano sendo detectados apenas com ajuda de aparelhos específicos.



Fonte: Helerbrock (2023)

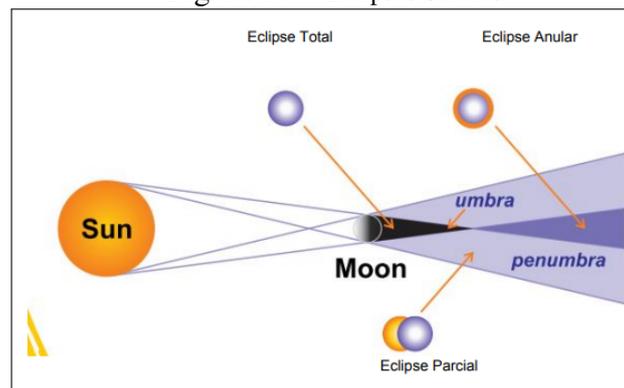
A região chamada umbra é um cone reto de base com diâmetro pouco menor que o diâmetro da Terra onde ninguém consegue ver uma parte do Sol, e a penumbra é uma região em que qualquer pessoa poderia ver parte do Sol, mas não um disco completo do Sol. Fora dessas duas regiões, qualquer pessoa poderia ver um disco completo do Sol.

Quando a Lua passa apenas na penumbra, a passagem mais comum, o eclipse é imperceptível a olho nú, e chamado de eclipse penumbral. Quando passa pela penumbra e pela umbra, ocorre duas situações: o eclipse lunar parcial ou total. No parcial a Lua não passa inteiramente pela umbra, enquanto no total a Lua passa inteiramente pela umbra.

Eclipses solares

De acordo com Helerbrock (2023), os eclipses solares ocorrem quando a Lua fica entre a Terra e o Sol, bloqueando a passagem dos raios de luz sobre a superfície terrestre. São três os tipos de eclipses solares: Total, Parcial e Anular. Para ocorrer o eclipse total, é necessário que a umbra da Lua toque a superfície terrestre; nas regiões que a umbra toca a superfície terrestre, será observado um eclipse parcial; para ocorrer o eclipse anular, a umbra não pode tocar a superfície terrestre.

Figura 14 – Eclipses Solares



Fonte: Ros e García (2019)

No eclipse total o Sol, como mostra a Figura 14, é totalmente encoberto pela Lua, no parcial apenas uma parte do Sol é encoberta, assim como no anular, porém, no anular podemos ver um círculo de fogo ao redor da Lua.

3.2 AS REVOLUÇÕES DOS ORBES CELESTES

Nesta seção traremos dois pontos importantes do livro “As Revoluções Dos Orbes Celestes” de Nicolau Copérnico - (COPERNICO, 1984), por entender que tais discussões, apesar de não serem matemáticas, são devidas para o estudo da Astronomia, e, de modo geral, da ciência. Também seria interessante a discussão do Capítulo XVIII do Livro IV, para melhor entendimento da relação entre o diâmetro da Lua e do cone de sombra na altura que a Lua passa por ele.

A esfericidade da Terra

Segundo Copernico (1984), a Terra é esférica por várias razões, mas consideremos algumas: Para quem está próximo ao polo norte, algumas estrelas são visíveis enquanto outras, no hemisfério sul, não são visíveis; “Também as próprias inclinações dos pólos têm em toda a parte a mesma razão aos espaços da Terra percorridos” e tal fato só pode ocorrer em esferas, portanto a Terra é esférica; Os eclipses vespertinos do Sol não são visíveis para os habitantes do oriente nem os matutinos para os habitantes do ocidente; Quando um navio se distancia do litoral, da proa ou da popa não se enxerga o continente, mas do topo do mastro é possível enxergar.

Note que os dois primeiros argumentos provam que a Terra é curva nas direções Norte-Sul, o terceiro na direção Leste-Oeste, enquanto que o último prova que a Terra é curva em qualquer direção. Portanto, fica fácil assumir que a Terra é esférica.

A ordem das esferas celestes

Logo na primeira linha do Capítulo X de seu primeiro livro, Copernico (1984) põe a esfera das estrelas fixas, que é composta por todas as estrelas que não o Sol, como a mais alta dentre todas: “Vejo que ninguém duvida que o Céu das estrelas fixas é o que há de mais alto em tudo o que é visível.”

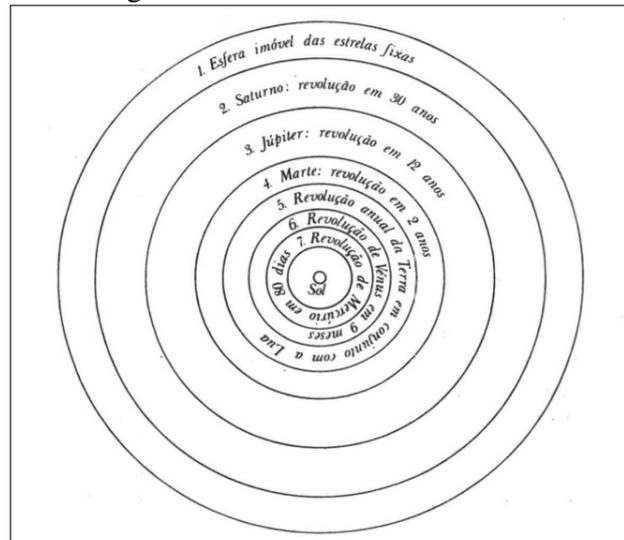
Para ordenar as esferas de Saturno, Júpiter e Marte, ou seja, suas órbitas, Copernico (1984) admite que os antigos filósofos acertaram ao partirem “do princípio de que, para igual velocidade, os corpos mais distantes parecem mover-se mais lentamente”. Portanto, fica fácil concluir, por meio de observações, que logo abaixo da esfera das estrelas fixas estão Saturno, Júpiter e Marte, nessa ordem.

Acerca de Vênus e Mercúrio, Copernico (1984) alega ter várias opiniões a respeito da ordem desses planetas, pois “não ocupam posições afastadas do Sol”, Capítulo X, Livro I. Acredito que ele esteja se referindo ao fato de não vermos Vênus e Mercúrio nas proximidades da meia noite, ou a horas afastadas, pela noite, do nascer e do pôr do Sol.

Ainda no Capítulo X, Copernico (1984) diz que o movimento do epiciclo de Vênus o leva a formar um ângulo de “45° graus mais ou menos para os dois lados do Sol”. Também cita um autor latino, Marciano Capela, entre outros latinos, que “pensam que Vênus e Mercúrio fazem sua revolução à volta do Sol, situado no meio deles, e julgam que por isso não se afastam dele mais do que sua curvatura das esferas o permite”, ou seja, a curvatura da esfera de Vênus não o permite se afastar mais de 45° do Sol. A esfera de Mercúrio estaria mais interior ao Sol por se saber que tem metade do tamanho da esfera de Vênus.

Já para a esfera da Terra, Copernico (1984) diz que tendo todas as esferas um único centro, o espaço entre as esferas de Vênus e Marte deve ser grande o suficiente para caber a esfera da Terra juntamente com a Lua girando ao seu redor, ainda dizendo “ser a extensão do tempo a medida do tamanho das esferas”, fazendo referência ao período de revolução de cada um dos astros. Podemos, agora, ordenar as esferas celestes como na Figura 15.

Figura 15 – A ordem das esferas celestes



Fonte: Copernico (1984)

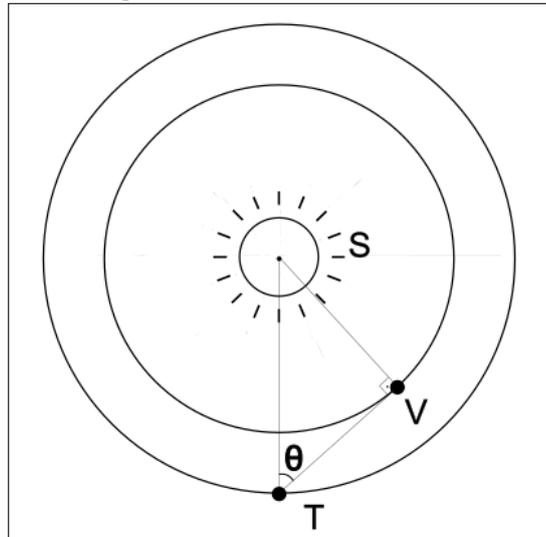
As informações contidas no último parágrafo são excelentes aproximações do que realmente sabemos hoje. Sabemos que Mercúrio, Vênus e Terra estão a aproximadamente 58, 108, e 149 milhões de quilômetros de distância do Sol, respectivamente. Note que $108 \cong 1,86.58$, e na Figura 16 vemos que, considerando as órbitas da Terra e de Vênus ao redor do Sol como círculos, o ângulo θ do qual Vênus se afasta do Sol é dado pela relação:

$$\text{sen}\theta = \frac{108}{149} \cong 0,72 \Rightarrow \text{sen}\theta \cong 0,72 \Rightarrow \theta \cong 46^\circ.$$

3.3 A MATEMÁTICA NA ASTRONOMIA

Começaremos neste capítulo a introduzir algumas técnicas de medições na astronomia. Veremos como calcular a distância do Sol a algumas estrelas próximas; a distância da Terra ao Sol; a velocidade da luz; a luminosidade; fluxo luminoso e a magnitude de estrelas. Nestes cálculos poderemos ver a aplicação de geometria, trigonometria e velocidade média, que pode ser ensinada por meio de função afim, notação científica e logaritmos.

Figura 16 – Afastamento de Vênus

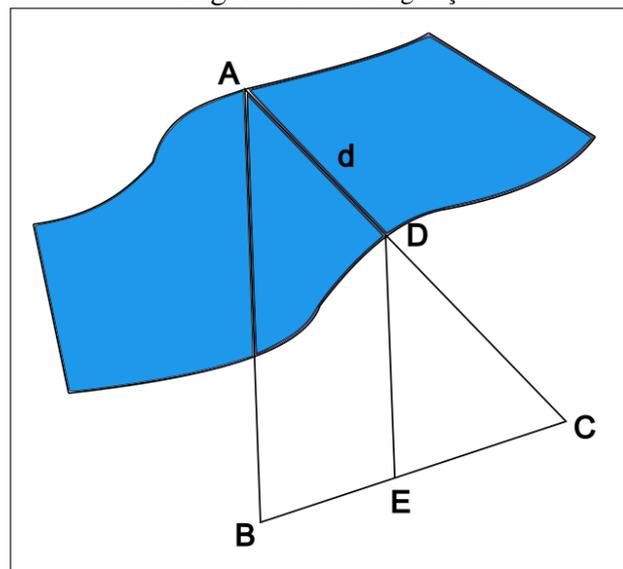


Fonte: Elaborada pelo autor

Paralaxe trigonométrica

De acordo com Filho e Saraiva (2018), triangulação foi uma técnica usada por Tales de Mileto. É uma técnica bastante simples, porém, muito eficaz. Vejamos, por exemplo, como calcular a largura de um rio: conhecendo-se um dos lados de um triângulo e as medidas de seus ângulos, é possível calcular as medidas dos outros dois lados usando semelhança de triângulos da seguinte forma, conforme mostra a Figura 17:

Figura 17 – Triangulação



Fonte: Elaborada pelo autor

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EC} \quad \text{e} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{DC}{EC},$$

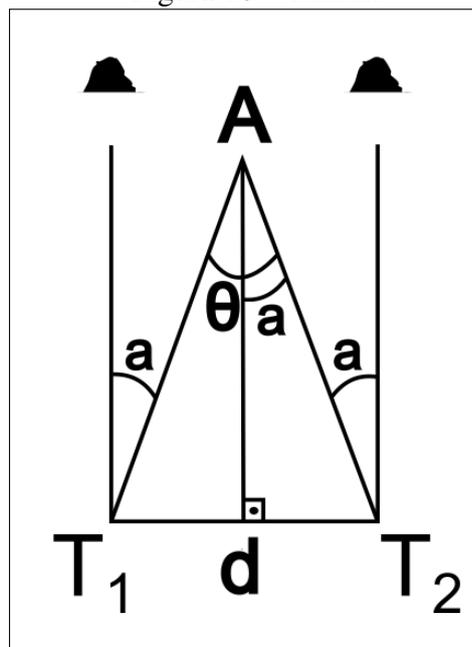
onde ED , EC , DC , e BC , são medidas de fácil obtenção. Ao segmento de reta \overline{BC} chamamos de linha de base.

Note que as direções nas quais se vê o ponto A dos pontos B e C são diferentes. Essa diferença se dá pelo fato de que os pontos A , B e C não são colineares, e à essa diferença de direção chamamos de paralaxe, do grego, *paralaxis*, que significa mudança.

É por causa dessa mudança na direção da vista de um objeto, que somos capazes de ter noção de profundidade. A grande maioria das pessoas possui um certo grau de estrabismo, ou seja, ambos os olhos enxergam em direções diferentes. Pessoas que não possuem estrabismo, ou pouquíssimo estrabismo, tem dificuldades de enxergar o mundo em profundidade.

Uma técnica muito importante na astronomia é a paralaxe, mas aqui nos deteremos apenas na paralaxe trigonométrica. Tal técnica pode ser exemplificada da seguinte maneira: suponha que se queira medir a distância de um teodolito, inicialmente no ponto T_1 , a uma agulha, no ponto A , e que haja uma montanha muito distante em relação ao teodolito, formando com o teodolito e a agulha um ângulo com medida a (Figura 18). Desloque o teodolito uma certa distância d , de modo que a medida do ângulo entre a agulha, a nova posição do teodolito, no ponto T_2 , e a montanha continue sendo a . Assim, obteremos as medidas, a e a de dois ângulos, o que nos permite calcular a medida θ do ângulo $T_1\hat{A}T_2$, veja novamente a Figura 18.⁸

Figura 18 – Paralaxe



Fonte: Elaborada pelo autor

⁸ Como a montanha está muito distante, ela não aparentará se deslocar no plano de fundo do observador, porém as linhas de visão do teodolito (T_1 à montanha e T_2 à montanha) serão praticamente paralelas.

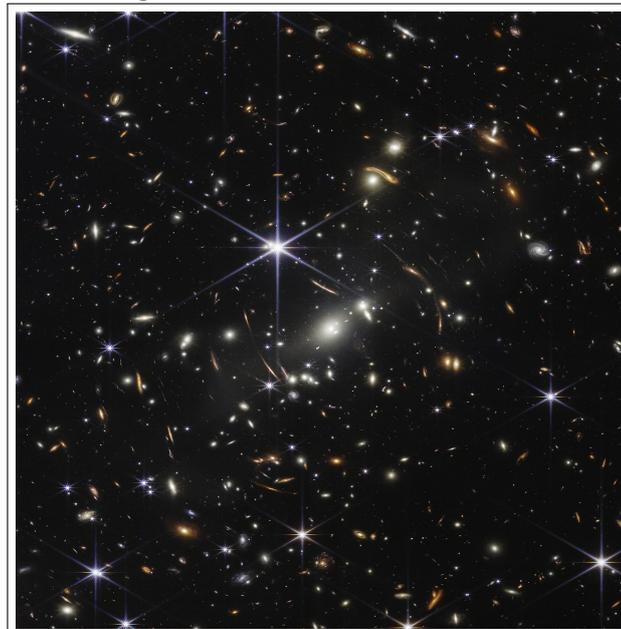
De acordo com a Figura 18 , observamos que a distância D da linha de deslocamento do teodolito à agulha é dada por:

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{d}{D} \Rightarrow D = \frac{d}{\tan \frac{\theta}{2}} \Rightarrow D = \frac{d}{\tan a},$$

Como se pode ver, essa atividade pode ser desenvolvida em campo, na própria instituição de ensino, desde que se tenha o mínimo de espaço para o experimento. Agora, como usar essa ideia para calcular a distância do Sol à estrelas próximas? Note que no problema da agulha acima, ao deslocar o teodolito ao longo da linha de base, a agulha se “desloca” em relação ao plano de fundo de visão, mas a montanha não. Assim, só poderemos calcular a distância de estrelas em que observa-se deslocamento em relação as outras estrelas que se mantém aparentemente imóveis em relação ao translado da Terra.

Sabemos que no universo existem mais estrelas que grãos de areia em todas as praias da Terra (Figura 19)⁹. Não é de se admirar que, em qualquer posição em que a estrela que se deseja calcular a distância, exista uma outra estrela distante (ou até uma galáxia), ed_1 , atrás, Figura 20, ou seja, uma outra estrela (ou galáxia) colinear com a primeira estrela e com o observador.

Figura 19 – Campo profundo de Webb



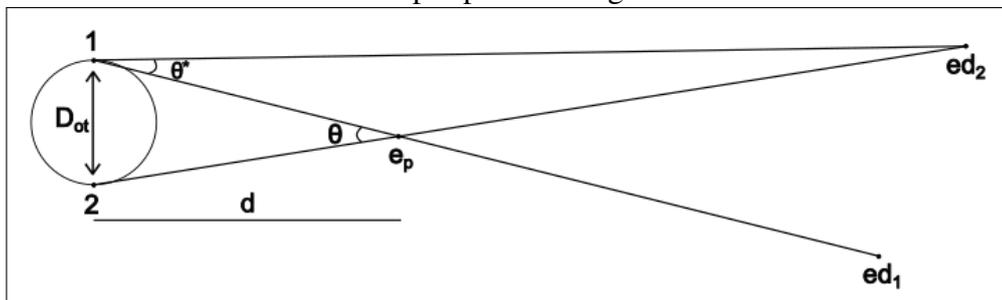
Fonte: NASA, ESA, CSA, and STScI

⁹ A Figura 19 corresponde a uma região do espaço do tamanho de uma bola de tênis vista a 100 metros. Nota-se galáxias e algumas estrelas presentes na Via Láctea.

Para usar a paralaxe trigonométrica, registraríamos a data da observação e seis meses depois, veja Figura 20 novamente, tempo a qual a Terra se deslocaria duas *Unidades Astronômicas* (UA), observaríamos a estrela próxima, e_p , e a estrela por trás dela, ed_2 , veja novamente a Figura 20. Calcular a medida θ do ângulo $1e_p2$ é praticamente o mesmo que determinar a medida do arco $\widehat{ed_1ed_2} = \theta^*$ já que $\overleftrightarrow{1ed_2}$ é praticamente paralelo a $\overleftrightarrow{2ed_2}$ (CATELLI *et al.*, 2017). Tal fato se dá pela distância que ed_2 se encontra em relação a D_{ot} (diâmetro da órbita terrestre).

Podemos fazer aqui um parêntese para tornar mais claro porque $\overleftrightarrow{1ed_2}$ é praticamente paralelo a $\overleftrightarrow{2ed_2}$. D_{ot} mede $3.10^8 km$ enquanto um ano-luz mede aproximadamente $10^{13} km$. Se supormos que uma estrela distante está a 30 anos-luz, estaríamos comparando $3.10^8 km$ com $3.10^{14} km$ que é 1 milhão de vezes maior. Para se ter uma ideia dessa comparação, é como se construíssemos um triângulo isósceles com lados medindo $1 km$ e base medindo $1 mm$, com isso, os ângulos da base são praticamente retos, e, portanto, os lados praticamente paralelos. Assim, na Figura 20, podemos considerar a reta $\overleftrightarrow{1ed_1}$ sendo transversal as retas paralelas $\overleftrightarrow{1ed_2}$ e $\overleftrightarrow{2ed_2}$, e conseqüentemente, o ângulo de medida θ é alterno interno ao ângulo de medida θ^* , ou seja, $\theta = \theta^*$. O nosso céu noturno é composto por várias estrelas. Apesar da nossa galáxia conter centenas de bilhões de estrelas, as estrelas visíveis no nosso céu noturno estão a no máximo 100 anos-luz de distância. Isso corresponde a apenas um milésimo do diâmetro da Via Láctea. Coinsiderar uma estrela a 30 anos-luz não é nenhum absurdo, portanto.

Figura 20 –
Distâncias por paralaxe trigonométrica



Fonte: Catelli *et al.* (2017)

Note também que $\widehat{ed_1ed_2} = \theta^*$ porque como ed_2 e ed_1 são estrelas fixas, podemos supor que possuem mesma distância. Assim, θ^* é a medida do ângulo central da circunferência que passa pelos pontos ed_2 e ed_1 , e centrada em 1. Logo, o arco $\widehat{ed_1ed_2}$ mede $\theta^* = \theta$, por $\overleftrightarrow{2ed_2}$ e $\overleftrightarrow{1ed_2}$ serem praticamente paralelas.

A medida do arco $\widehat{ed_1ed_2}$ deve ser medida em radiano, pois para ângulos de medida θ menores do que 4° , temos que $\tan \theta \cong \theta$, e teremos que usar essa relação a seguir. Portanto a distância d do Sol à estrela próxima se dá pela relação:

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\frac{D_{ot}}{2}}{d} = \frac{\frac{2UA}{2}}{d} = \frac{1UA}{d} \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} \cong \frac{1UA}{d}.$$

Fazendo $\frac{\theta}{2} = \beta$, temos:

$$d \cong \frac{1UA}{\beta}.$$

Como já mencionado no primeiro exemplo, a direção de D_{ot} deve ser obtida ao se deslocar perpendicularmente a direção da estrela próxima. Podemos perceber esse deslocamento ao analisar o maior ângulo de paralaxe registrado durante o ano inteiro, ou seja, ao diâmetro de deslocamento da estrela ao longo do ano.

Abaixo segue lista com as 10 estrelas mais próximas da Terra depois do Sol com suas respectivas distâncias em anos luz.

- 1) Próxima Centauri, 4,2 anos-luz.
- 2) Estrela de Bernard, 4,4 anos-luz.
- 3) Luhman 16, 6,5 anos-luz.
- 4) WISE 0855-0714, 7,2 anos-luz.
- 5) Wolf 359, 7,8 anos-luz.
- 6) Lalande 21185, 8,3 anos-luz.
- 7) Sirius, 8,6 anos-luz.
- 8) Luyten 726-8, 8,7 anos-luz.
- 9) Ross 154, 9,7 anos-luz.
- 10) Ross 248, 10,3 anos-luz.

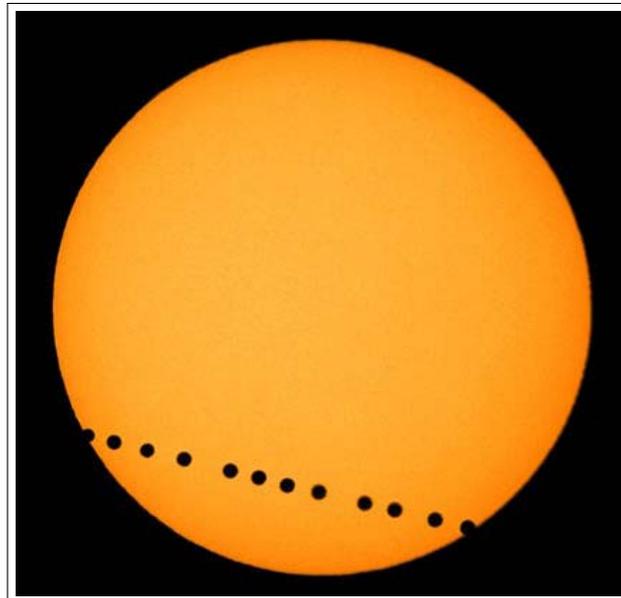
Usando o método descrito é possível determinar a distância do Sol a qualquer uma dessas estrelas. Porém, medir o ângulo de paralaxe não é tarefa simples e requer instrumentos de medição adequados.

O trânsito de Vênus

Um trânsito planetário é a passagem de um planeta entre um observador e a estrela que hospeda o planeta. No caso de Vênus, é a passagem entre um observador e o Sol (AUGUSTO; SOBRINHO, 2007).

Os trânsitos ocorrem quando acontecem o alinhamento estrela hospedeira, planeta e observador. A linha que passa por esses três é chamada linha dos nodos. Tal linha é determinada na intersecção entre os planos orbitais do planeta e do observador (considerando este último num objeto que orbite a estrela hospedeira). Cada nodo é determinado pela intersecção da linha dos nodos com o plano orbital do objeto. Assim, para cada linha, podem existir dois trânsitos.

Figura 21 – Vênus transitando o Sol



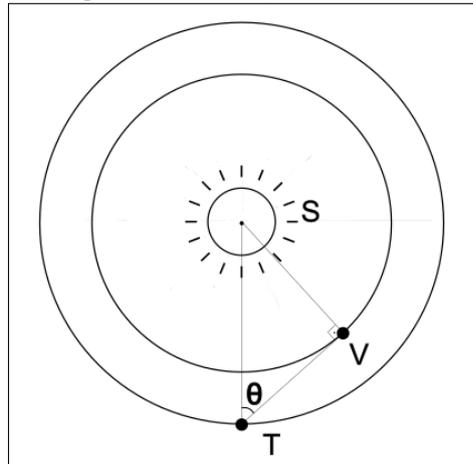
Fonte: Catelli *et al.* (2017)

O trânsito de Vênus é um evento raro, que geralmente ocorre em pares separados por 8 anos, e cada par separado por 121,5 ou 105,5 anos, alternadamente. O último par ocorreu nos anos 2004 e 2012, o trânsito anterior ocorreu em 1882 e o próximo trânsito ocorrerá próximo ao ano 2117.

Utilizando a técnica do trânsito de Vênus, podemos calcular a distância da Terra ao Sol com excelente precisão, e conseguiremos, como um bônus, a distância de Vênus ao Sol, Figura 21. Note que na medida que Vênus transita o Sol, a trajetória de Vênus aparenta ser retilínea. Chamamos esse trajeto de linha de trânsito.

Para tal, começemos relacionando as distância da Terra ao Sol, TS , com a distância de Vênus ao Sol, VS . Vênus se distancia do Sol não mais que 46° sendo esse o valor de maior distância. Assim, temos:

Figura 22 – Relação entre TS e VS



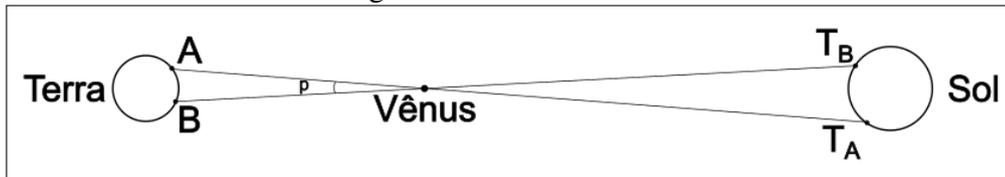
Fonte: Elaborada pelo autor

$$\text{sen}46^\circ = \frac{VS}{TS} \Leftrightarrow 0,72 \cong \frac{VS}{TS} \Leftrightarrow VS \cong 0,72TS. \quad (3.1)$$

Portanto, a distância da Terra a Vênus, TV , é aproximadamente $0,28TS$.

Considere, na Terra, dois observadores, A e B , do trânsito de Vênus, V , na mesma longitude e em latitudes diferentes, conforme a Figura 23.

Figura 23 – Trânsito de Vênus



Fonte: Elaborada pelo autor

Os triângulos AVB e $VTATB$ são aproximadamente semelhantes. Portanto:

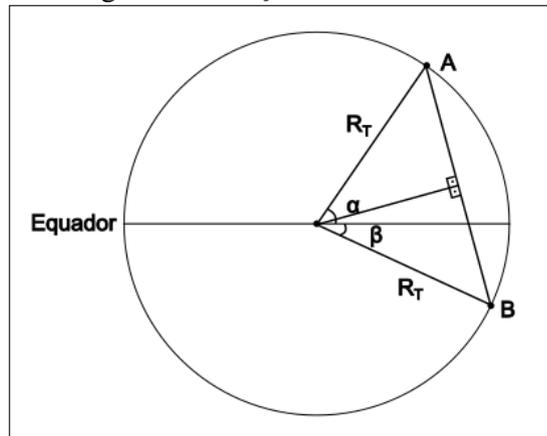
$$\frac{TV}{AB} = \frac{VS}{TATB}. \quad (3.2)$$

Substituindo na equação (3.1), obtemos:

$$\frac{0,28TS}{AB} = \frac{0,72TS}{TATB} \Leftrightarrow TATB \cong 2,57AB. \quad (3.3)$$

Agora precisamos calcular as medidas AB e $TATB$. Seja α e β as latitudes de A e B , respectivamente, e R_T o raio da Terra. Na Figura 24 o triângulo maior é isósceles, portanto sua altura é bissetriz e mediana, e nos dá a ideia para calcular AB :

Figura 24 – Seção meridional da Terra

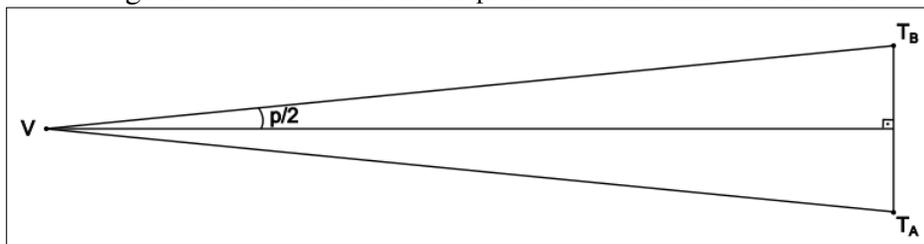


Fonte: Elaborada pelo autor

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{\frac{AB}{2}}{R_T} = \frac{AB}{2R_T} \Leftrightarrow AB = 2R_T \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right). \quad (3.4)$$

Substituindo na equação (3.3):

$$T_A T_B = 5,14 R_T \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right). \quad (3.5)$$

Figura 25 – Podemos relacionar $p/2$ com a distância de Vênus ao Sol

Fonte: Elaborada pelo autor

Para finalizarmos, veja o triângulo $VT_A T_B$ da Figura 25, e note que a aproximação:

$$\tan\left(\frac{p}{2}\right) \cong \frac{\frac{T_A T_B}{2}}{0,72 TS} = \frac{T_A T_B}{1,44 TS}, \quad (3.6)$$

é válida. Isolando o termo TS da equação (3.6), e usando a equação (3.5), obtemos:

$$TS = \frac{T_A T_B}{1,44 \tan\left(\frac{p}{2}\right)} = \frac{5,14 R_T \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{1,44 \tan\left(\frac{p}{2}\right)} = \frac{3,57 R_T \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{p}{2}\right)} \Leftrightarrow TS = \frac{3,57 R_T \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{p}{2}\right)},$$

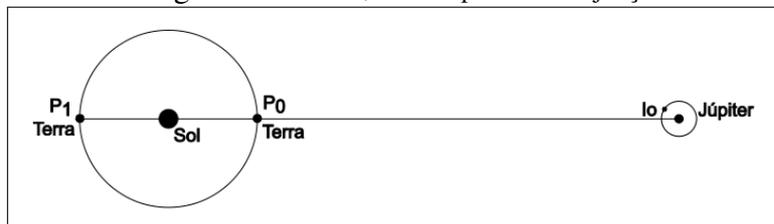
onde a medida da paralaxe, p , pode ser obtida a partir da estimativa de quantas vezes a distância entre as linhas de trânsito é menor que o diâmetro do Sol. Como o diâmetro aparente do Sol é em torno de $0,53^\circ$, fica fácil calcular p .

A velocidade da luz

Um outro cálculo de medida que pode gerar curiosidade nos alunos é: como calcular a velocidade da luz? Roemer, físico do século XVII, observando a Lua Io, satélite de Júpiter, notou que a mesma sofria atrasos no seu eclipse quando a Terra estava mais distante de Júpiter e adiantamento quando a Terra estava mais próxima de Júpiter. Tal fato se dava, segundo Roemer, devido a velocidade da luz ser finita, fato este ainda em discussão em sua época (FILHO; SARAIVA, 2018).

Para chegar a essa conclusão, primeiro precisamos lembrar que o período de revolução de Io, na época de Roemer, era estimada em 42h30min, que é facilmente determinado verificando-se o intervalo de tempo que Io leva para, após eclipsada, eclipsar novamente. O valor exato, 42h28min16s pode ser obtido pela terceira Lei de Kepler (FILHO; SARAIVA, 2018).

Figura 26 – Terra, Sol e Júpiter em conjunção



Fonte: Elaborada pelo autor

Seja, então, T_{0P_0} a hora em Io eclipsa para a Terra na posição P_0 , ao qual Júpiter estaria em oposição à Terra, Figura 26. Como a luz leva certo tempo para chegar a Terra, seja T'_{0P_0} a hora em que o eclipse seria visto da Terra. Temos então a relação:

$$c = \frac{d_{(T_{P_0}-J)}}{T'_{0P_0} - T_{0P_0}},$$

onde c é a velocidade da luz e $d_{(T_{P_0}-J)}$ é a distância de Júpiter a Terra na posição P_0 . Ou seja, o eclipse só será visto na hora

$$T'_{0P_0} = T_{0P_0} + \frac{d_{(T_{P_0}-J)}}{c}.$$

Seja P_1 a posição da Terra em que ocorreria o alinhamento Terra, Júpiter e Sol, e T_{1P_1} a hora prevista para o eclipse. Pela equação anterior, o eclipse só seria visto no horário T'_{1P_1} dado por:

$$T'_{1P_1} = T_{1P_1} + \frac{d_{(T_{P_1}-J)}}{c}.$$

O intervalo de tempo $T'_{1P_1} - T'_{0P_0}$ de observação entre os eclipses é maior que o intervalo de tempo real, $T_{1P_1} - T_{0P_0}$, entre os eclipses, e sua diferença será dada por

$$(T'_{1P_1} - T'_{0P_0}) - (T_{1P_1} - T_{0P_0}) = \frac{d_{(T_{P_1}-J)} - d_{(T_{P_0}-J)}}{c}.$$

A interpretação da expressão $(T'_{1P_1} - T'_{0P_0}) - (T_{1P_1} - T_{0P_0})$ é o atraso que a lua Io leva para eclipsar quando a Terra, Sol e Júpiter estiverem quase em conjunção (Sol entre Terra e Júpiter). Já a interpretação da expressão $d_{(T_{P_1}-J)} - d_{(T_{P_0}-J)}$ é exatamente duas unidades astronômicas. Portanto a velocidade da luz poderá ser calculada da seguinte maneira:

$$c = \frac{d_{(T_{P_1}-J)} - d_{(T_{P_0}-J)}}{(T'_{1P_1} - T'_{0P_0}) - (T_{1P_1} - T_{0P_0})}.$$

Notemos que o cálculo da velocidade da luz não exige conta complexa, porém, o raciocínio empregado é suficientemente engenhoso para alunos do ensino médio. Não precisamos, claro, mostrar essas contas para nossos alunos, mas sim, explicar o raciocínio empregado para se calcular a velocidade da luz pela primeira vez.

Potência luminosa

Segundo Maciel (1999), a luminosidade, L , de uma estrela é definida como a energia emitida por unidade de tempo em todas as frequências e direções, e pode ser calculada por:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4,$$

onde R é o raio da estrela, T é a temperatura em Kelvin, e σ é a constante de Stefan-Boltzmann que equivale a $5,6704 \cdot 10^{-8} \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$. Note que a Luminosidade é diretamente proporcional a área da estrela e a quarta potência de sua temperatura.

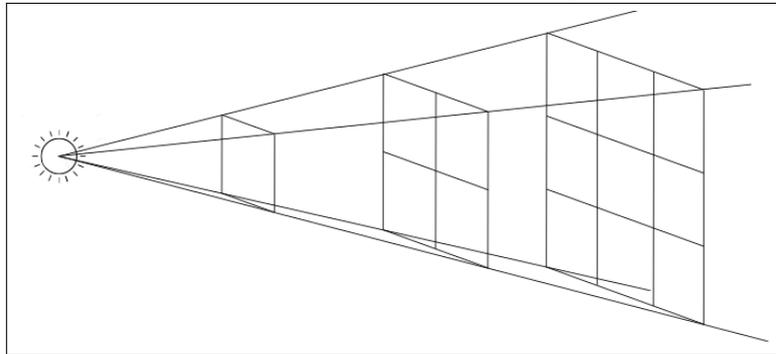
Fluxo luminoso

Para Ferreira (2018), o fluxo luminoso, f , de uma estrela é definido como sendo a potência luminosa, por unidade de área, que incide ou cruza uma determinada área perpendicular à direção de propagação da luz. Numa equação, temos:

$$f = \frac{L}{4\pi R^2} = \sigma T^4,$$

onde L é a luminosidade da estrela, R o seu raio e T sua temperatura em Kelvin. Perceba que o fluxo luminoso depende apenas da temperatura da estrela.

Figura 27 – Fluxo luminoso aparente cai com o quadrado da distância



Fonte: Elaborada pelo autor

É importante destacar que o fluxo luminoso aparente de uma estrela ou astro muito distante cai com o quadrado da distância, ou seja, é proporcional a $\frac{1}{d^2}$, veja Figura 27. Portanto, o fluxo aparente de uma estrela a uma distância d seria dado por $\frac{L}{4\pi d^2}$, onde L é a luminosidade da estrela. O fluxo aparente é de suma importância para entendermos a álgebra das magnitudes dos astros celestes, como veremos adiante.

Magnitude aparente

Quando contemplamos o céu noturno límpido vislumbramos vários pontos luminosos, que vão de planetas a estrelas, podendo até passar por meteoros, meteoritos, cometas e asteróides. Cada um deles com um certo brilho, alguns mais intensos, e muitos nem tanto. Esse brilho que percebemos é o fluxo luminoso aparente que o astro celeste emite até nós. Hiparco chamou esse brilho aparente de magnitude e classificou as estrelas mais brilhantes como de magnitude 1 até as menos brilhantes, quase imperceptíveis, de magnitude 6. Norman Pogson, estudando essas magnitudes, notou que eram necessárias 2,5 estrelas de magnitude 2 para dar a mesma sensação de estrelas de magnitude 1, o mesmo para estrelas de magnitudes 3 para 2, e assim por diante

(VERTCHENKO; SILVEIRA, 2010). Como $2,5^5 \cong 100$, ele concluiu que estrelas de magnitude 1 eram 100 vezes mais brilhantes que estrelas de magnitude 6. Hoje usamos 2,512 como razão de Pogson. Portanto, tomamos como magnitude aparente, m , a seguinte fórmula:

$$m = -2,5 \log \left(\frac{f_v}{f_0} \right),$$

onde f_v é o fluxo aparente da estrela e f_0 é o fluxo aparente da estrela Vega que por definição tem magnitude aparente igual a 0. O sinal de menos na fórmula é justificado pelo fato do quociente $\frac{f_v}{f_0}$ ser menor que 1 para estrelas menos brilhantes que a estrela Vega, e como o logaritmo de um número menor que 1, na base 10, é negativo, a magnitude aparente de uma estrela menos brilhante que a estrela Vega fica positiva.

Magnitude absoluta

A magnitude absoluta, M , de uma estrela é definida como a magnitude aparente da estrela a uma distância de 10 parsecs (FERREIRA, 2018). O módulo de distância, definido como sendo a diferença entre a magnitude aparente pela absoluta, pode ser obtido da seguinte maneira:

$$m - M = -2,5 \log \left(\frac{f_v}{f_0} \right) - 2,5 \log \left(\frac{f_{10}}{f_0} \right) = -2,5 \log \left(\frac{f_v}{f_{10}} \right),$$

$$m - M = -2,5 \log \left(\frac{\frac{L}{4\pi d^2}}{\frac{L}{4\pi 10^2}} \right) = -2,5 \log \left(\frac{10}{d} \right)^2 = 5 \log \left(\frac{d}{10} \right),$$

ou seja,

$$m - M = 5 \log \left(\frac{d}{10} \right).$$

A distância d acima, medida em parsec, é a distância na qual se calcula a magnitude aparente da estrela. Assim, podemos calcular a distância a uma estrela conhecendo-se suas magnitudes aparente e absoluta da seguinte maneira:

$$d = 10^{\frac{m-M}{5}+1}.$$

Quem tiver interesse de entender melhor como funciona a álgebra das magnitudes, pode ler o Apêndice desta dissertação.

4 RELATO DE ENSINO USANDO O MÉTODO DE ARISTARCO

Este Capítulo está dividido em duas seções: a primeira está a Teoria de semelhança de triângulos, e a segunda está um relato de experiência que tive no ano de 2022 numa turma do segundo ano de administração do IFPI Campus Corrente.

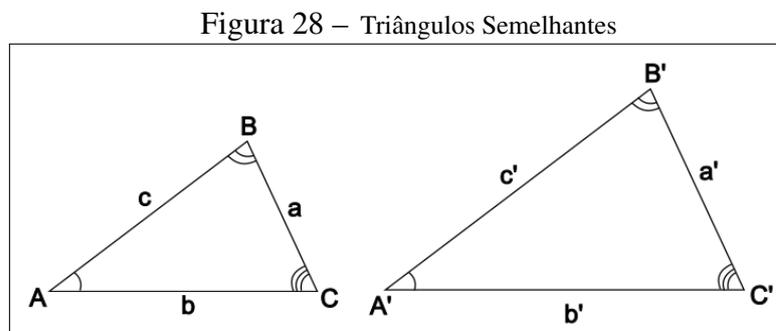
4.1 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Nesta seção, falarei um pouco de triângulos congruentes, Teorema de Tales e do rigor matemático empregado para o estudo de figuras semelhantes, mais precisamente, de triângulos semelhantes. O texto a seguir se baseia no livro “Fundamentos de Matemática Elementar” do Iezzi (1993).

Definição 1. *Dois triângulos ABC e $A'B'C'$ (Figura 28) são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos internos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.*

Em símbolos:

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \hat{A} \equiv \hat{A}', \hat{B} \equiv \hat{B}', \hat{C} \equiv \hat{C}', \text{ e } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$



Fonte: Iezzi (1993)

Durante as demonstrações do teorema fundamental da semelhança e dos casos de semelhanças, usarei os casos de congruência de triângulos e o Teorema de Tales que enunciarei abaixo:

1º Caso (LAL): Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes.

2º Caso (ALA): Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes.

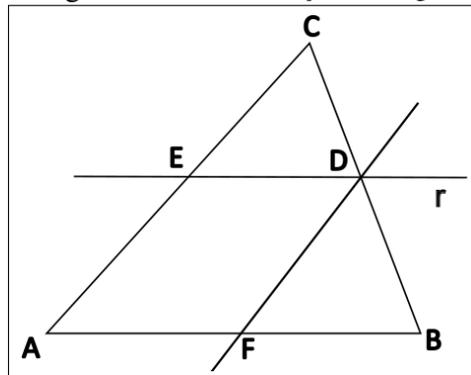
3º Caso (LLL): Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes.

Teorema de Tales: Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.

Teorema 1. (*Teorema Fundamental da Semelhança*): Se uma reta é paralela a um dos lados do triângulo e intersecta os outros dois em dois pontos distintos, então o triângulo que ele determina é semelhante ao primeiro.

Demonstração. Seja um triângulo ABC e uma reta r paralela ao lado \overline{AB} que intersecta os lados \overline{AC} e \overline{BC} nos pontos E e D , respectivamente. Note que \hat{B} e \hat{CDE} , e \hat{A} e \hat{CED} são correspondentes, e \hat{C} é comum aos triângulos CAB e CED . Portanto temos que os ângulos são ordenadamente congruentes, ou seja, $\hat{C} \equiv \hat{C}$, $\hat{A} \equiv \hat{CED}$ e $\hat{B} \equiv \hat{CDE}$.

Figura 29 – Semelhança de triângulos



Fonte: Iezzi (1993)

Temos, pelo Teorema de Tales que $\frac{EC}{AC} = \frac{CD}{BC}$. Agora, construamos uma paralela a \overline{AC} passando por D e suponhamos que essa paralela intersecte \overline{AB} no ponto F . Novamente, pelo Teorema de Tales, temos que $\frac{CD}{BC} = \frac{AF}{AB}$ e como $AEDF$ é um paralelogramo, temos que $AF = DE$, assim, $\frac{CD}{BC} = \frac{DE}{AB}$, ou seja, $\frac{EC}{AC} = \frac{CD}{BC} = \frac{DE}{AB}$, assim, os lados homólogos são proporcionais. Concluimos que os triângulos ABC e EDC são semelhantes (Figura 29).

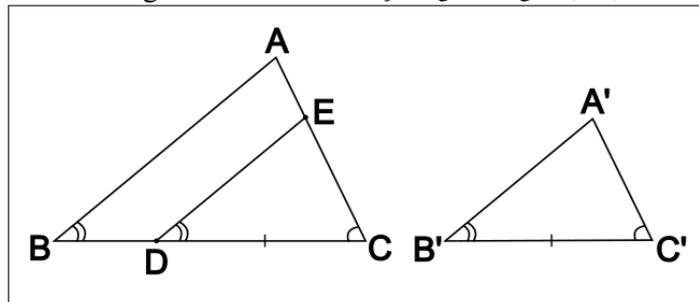
□

Note que verificar as três congruências de ângulos e as três proporções entre os lados homólogos é bastante trabalhoso, e apesar da definição exigir assim, há casos em que pode-se ter menos trabalho para se verificar uma semelhança, ou seja, há conjuntos de propriedades,

menores que a definição, que tornam os triângulos semelhantes. Chamamos esses conjuntos menores de casos de semelhança.

1º Caso (Semelhança ângulo-ângulo(AA)): Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes. Figura 30.

Figura 30 – Semelhança ângulo-ângulo(AA)

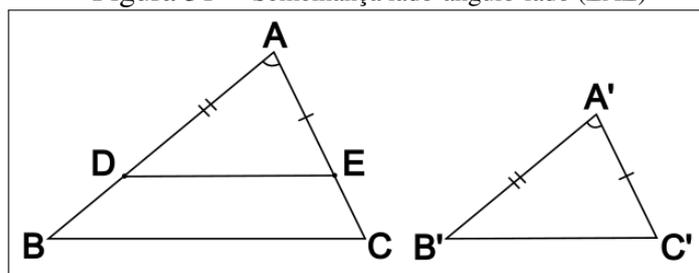


Fonte: Iezzi (1993)

Demonstração. Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ tais que $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ e $\hat{C} \equiv \hat{C}'$ e suponhamos que $BC > B'C'$. Seja D um ponto no lado \overline{BC} tal que $DC = B'C'$ e tracemos uma paralela a \overline{AB} passando por D que intersecta o lado \overline{AC} no ponto E . Os ângulos \hat{B} e \hat{CDE} são congruentes por serem correspondentes, e como $DC = B'C'$ e $\hat{C} \equiv \hat{C}'$, os triângulos EDC e $A'B'C'$ são congruentes pelo caso ângulo-lado-ângulo(ALA). Como \overline{DE} é paralelo a \overline{AB} , pelo Teorema Fundamental da Semelhança temos que $\Delta ABC \sim \Delta EDC$ e como $\Delta EDC \equiv \Delta A'B'C'$, segue que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Caso $BC = B'C'$, então é imediato que os triângulos são congruentes, e portanto, semelhantes com razão de semelhança igual a 1. E caso $BC < B'C'$, a demonstração é análoga ao caso em que $BC > B'C'$ ao tomarmos um ponto D' em $B'C'$ tal que $D'C' = BC$. \square

2º caso (Semelhança lado-ângulo-lado (LAL)): Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos de um outro triângulo e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes. Figura 31.

Figura 31 – Semelhança lado-ângulo-lado (LAL)

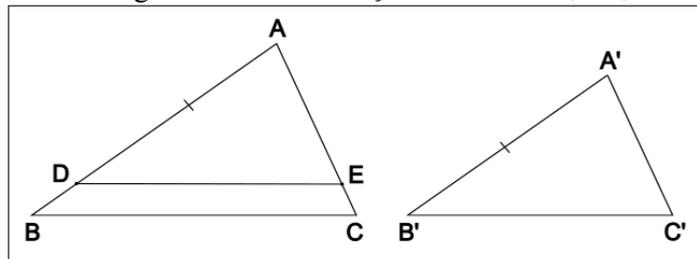


Fonte: Iezzi (1993)

Demonstração. Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ tais que $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ e $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ e suponhamos que $AC > A'C'$. Seja D um ponto no lado \overline{AB} tal que $AD = A'B'$ e tracemos uma paralela a \overline{BC} passando por D que intersecta o lado \overline{AC} no ponto E . Como $AD = A'B'$ por construção, da hipótese $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ concluímos que $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{A'C'}$ e pelo Teorema Fundamental da Semelhança, temos que $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, ou seja, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$, e assim $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AC}{AE}$, donde $AE = A'C'$. Os triângulos ADE e $A'B'C'$ são congruentes por lado-ângulo-lado(LAL), logo $B'C' = DE$, $\hat{B}' \equiv \hat{A}DE$ e $\hat{C}' \equiv \hat{A}ED$. Pelo Teorema Fundamental da Semelhança, temos que $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ e como $\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$, segue que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. \square

3º Caso (Semelhança lado-lado-lado (LLL)): Se dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais então eles são semelhantes. (Figura 32).

Figura 32 – Semelhança lado-lado-lado (LLL)



Fonte: Iezzi (1993)

Demonstração. Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ tais que $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ e suponhamos que $AB > A'B'$. Seja D um ponto no lado \overline{AB} tal que $AD = A'B'$ e tracemos uma paralela a \overline{BC} passando por D que intersecta o lado \overline{AC} no ponto E . Pelo Teorema Fundamental da Semelhança $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$, por hipótese temos $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ e como $AD = A'B'$ temos que $\frac{AC}{AE} = \frac{AC}{A'C'}$, donde $AE = A'C'$. Analogamente, $DE = B'C'$. Portanto os triângulos ADE e $A'B'C'$ são congruentes pelo caso lado-lado-lado(LLL). Como $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ e $\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$, temos que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. \square

4.2 RELATO DE EXPERIÊNCIA

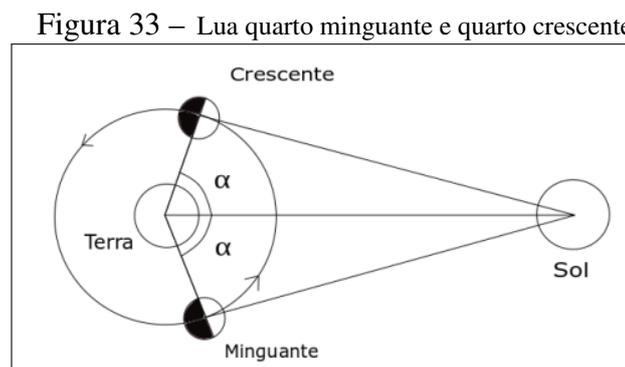
Na presente seção, apresentarei uma experiência de ensino utilizando o artigo do Ávila (1982), em que ensina como Aristarco e Eratóstenes resolveram alguns problemas envolvendo medições astronômicas. No texto, podemos notar que Aristarco levou em consideração que a Lua levava 29,5 dias para dar uma volta em torno da Terra, porém, hoje sabemos que a Lua leva na verdade 27,3 dias. Portanto, para não ficarmos chamando a atenção do leitor para

essa correção, pedimos que lembre-se desse detalhe. As experiências a seguir foram realizadas no terceiro bimestre do ano de 2022 no turma do segundo ano de administração do IFPI-Campus Corrente.

Na primeira aula, de uma hora, foi apresentado o eixo de rotação da Terra, com esta dividida em hemisférios norte e sul pela linha do equador, explicado o motivo da existência dos Trópicos de Câncer e Capricórnio, que o eixo de rotação da Terra possui inclinação de $23,5^\circ$ em relação aos polos, e que o mesmo gira em torno do plano de sua eclíptica num período de 25770 anos.

Em seguida, foi apresentada as fases da Lua: Cheia, Crescente, Nova e Minguante, nessa ordem; e como determinar o período lunar que, segundo Aristarco, é de 29,5 dias ao constatar que a Lua leva esse intervalo de tempo para sair de uma fase e voltar à mesma fase. Também foi acrescentado que exatamente no meio do período da fase crescente a face da Lua voltada para um observador na Terra fica metade iluminada e a outra metade não iluminada e que nesse momento chamamos de quarto crescente, o mesmo ocorrendo para a fase minguante sendo chamada de quarto minguante.

Após esses primeiros momentos, foi dado o primeiro problema: Sabendo que o Sol está mais distante da Terra que a Lua, como relacionar as distâncias da Lua à Terra e da Terra ao Sol? A Figura 33 ajuda a resolver o problema:



Fonte: Ávila (1982)

Um aluno não entendeu que a linha circular representa o trajeto de translação da Lua em torno da Terra mesmo sendo dito que representava. Por isso, aconselho a ter-se cuidado minucioso ao representar as observações astronômicas por meio de figuras para que sejam minimizados possíveis mal-entendidos por parte dos discentes. Um outro aluno também não entendeu como que a Lua poderia ficar com apenas metade de sua face, voltada para um observador na Terra, iluminada, enquanto a outra metade não. Expliquei que em algum

momento enquanto a Lua estava saindo de Nova, completamente escura, e passando para Cheia, completamente iluminada, necessariamente metade dela teria que ficar iluminada e outra metade não iluminada. Esclarecidas essas dúvidas, foi dito que, nesse momento, o ângulo formado entre a linha de visão do observador à Lua com os raios de luz do Sol que incidem na Lua, é um ângulo reto na Lua, e que Aristarco verificou que a Lua levava 14,25 dias para sair de quarto-minguante para quarto-crescente, o que nos permite fazer uma regra de três e determinar a medida do ângulo α , Figura 15, da seguinte maneira: a lua leva 29,5 dias para dar uma volta em torno da Terra, o que representaria uma revolução, ou seja, uma volta de 360° . Portanto, para saber quantos graus mediria o ângulo 2α , basta fazer a relação:

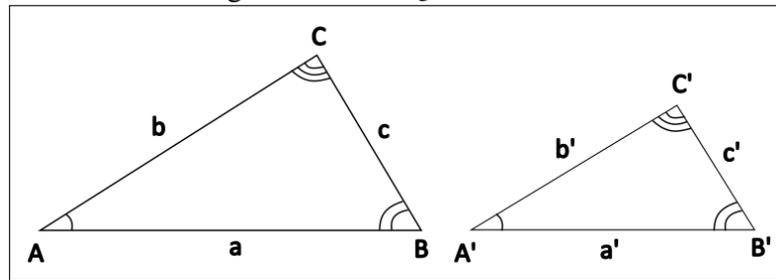
$$\frac{2\alpha}{360^\circ} = \frac{14,25}{29,5} \Rightarrow 2.29,5\alpha = 360^\circ .14,25 \Rightarrow 59\alpha = 5130^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{5130^\circ}{59} \Rightarrow \alpha \cong 86,949^\circ \cong 87^\circ.$$

Para quem já entende o suficiente de matemática, é fácil perceber que uma semelhança de triângulos (Caso AA) resolve o problema inicial, mas e para alunos inexperientes? Como usar esses dois ângulos, reto e de medida 87° , obtidos por meio de observações, para relacionar as distâncias pretendidas? Esse problema foi deixado para os alunos tentarem resolver por si mesmos, para que sintam a dificuldade que é resolver o problema, e assim, na aula seguinte, apresentar a teoria que resolveria o problema.

Na segunda aula, de duas horas, foi apresentado o conceito de semelhança de triângulos. O conceito foi apresentado tal qual está no livro Matemática Elementar Volume 9 Iezzi (1993), destacando que a razão de semelhança pode ser duas, e principalmente, o conceito de lados homólogos, da seguinte maneira, veja na Figura 34: o lado \overline{AB} está entre os ângulos de uma e duas linhas, e o lado $\overline{A'B'}$ está entre os mesmos ângulos, no sentido de mesma medida, congruentes, ou seja, entre os ângulos de uma e duas linhas. Portanto, no ‘mesmo lugar’, homólogos. É aconselhável explicar que homólogo vem do grego ‘homo’, mesmo, e ‘logos’, lugar, antes de explicar a definição de semelhança.

Na razão de semelhança, foi dito que significa quantas vezes se quer aumentar ou diminuir a figura. Por exemplo, se os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes de razão de semelhança k , então os triângulos $A'B'C'$ e ABC são semelhantes com razão de semelhança $\frac{1}{k}$, fazendo ainda uma analogia com o zoom de uma imagem. Portanto, para cada par de triângulos semelhantes, existe duas razões de semelhança, como mostra a Figura 34.

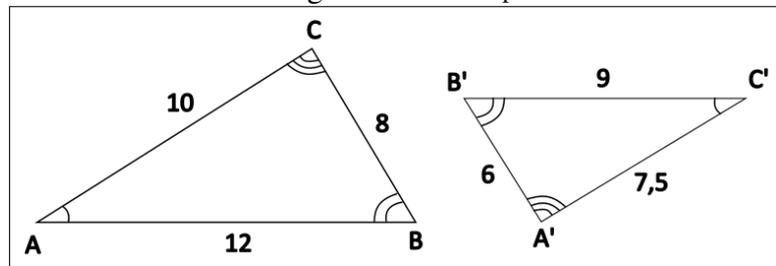
Figura 34 – Triângulos Semelhantes



Fonte: Elaborada pelo autor

Em seguida foi dado um exemplo de como se pode verificar se dois triângulos são semelhantes ou não, como mostra o exemplo da Figura 35.

Figura 35 – Exemplo



Fonte: Elaborada pelo autor

Exemplo: Dados os triângulos ABC e $A'B'C'$ como na Figura 35, verifique, usando a definição de semelhança de triângulos, que os triângulos ABC e $A'B'C'$, são semelhantes.

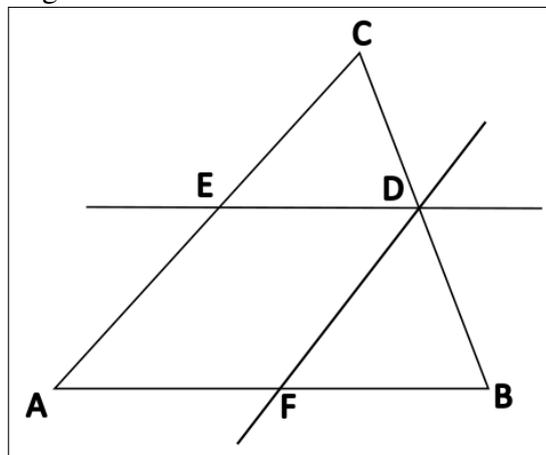
Temos as congruências $\hat{A} \equiv \hat{C}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ e $\hat{C} \equiv \hat{A}'$, que satisfaz a primeira parte da definição. Os lados homólogos nos dão $\frac{12}{9} = \frac{10}{7,5} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$. Note que as razões de semelhanças são $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{4}$ bastando notar que $\frac{9}{12} = \frac{7,5}{10} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

Segui a aula com o Teorema Fundamental da Semelhança: Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intersecta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ele determina é semelhante ao primeiro. Apresentei o teorema, e fiz uma demonstração verbal, anotando apenas os resultados obtidos até chegar na conclusão desejada. A demonstração verbal se deu de forma parecida com a que segue, acompanhe pela Figura 36: como \overline{ED} é paralelo a \overline{AB} temos que \hat{CED} é congruente a \hat{A} e \hat{CDE} é congruente a \hat{B} , por serem correspondentes, e como \hat{C} é ângulo comum, temos que os três ângulos são ordenadamente congruentes, satisfazendo a primeira parte da definição de semelhança. Também por \overline{ED} ser paralelo a \overline{AB} temos, pelo Teorema de Tales, que $\frac{EC}{AC} = \frac{CD}{BC}$ (1) e também $\frac{AF}{AB} = \frac{CD}{BC}$ (2), ou seja, $\frac{EC}{AC} = \frac{CD}{CB} = \frac{AF}{AB}$. Se provarmos que $AF = ED$ provaremos que os lados homólogos são proporcionais, concluindo que os triângulos são semelhantes. Para tal, considere o quadrilátero $AEDF$, como \overline{DF} é paralelo a

\overline{AC} por construção e \overline{ED} é paralelo a \overline{AB} por hipótese, temos que $AEDF$ é um paralelogramo, portanto, $AF = ED$. Assim, $\frac{EC}{AC} = \frac{CD}{CB} = \frac{ED}{AB}$.

Durante a demonstração, lembrei o conceito de ângulos formados por um feixe de retas paralelas e uma transversal, paralelogramo e o Teorema de Tales, necessários para a demonstração do teorema. Durante a explicação do Teorema de Tales, tentei fazer uma analogia com o Teorema Fundamental da Semelhança ao dizer que as relações (1) e (2) poderiam ser obtidas do Teorema de Tales pela translação de uma das retas transversais até que ela se torne um dos lados do triângulo. A Figura 36 é um esboço da demonstração do Teorema Fundamental da Semelhança. Terminei a aula com exercícios que estão disponíveis no Anexo D.

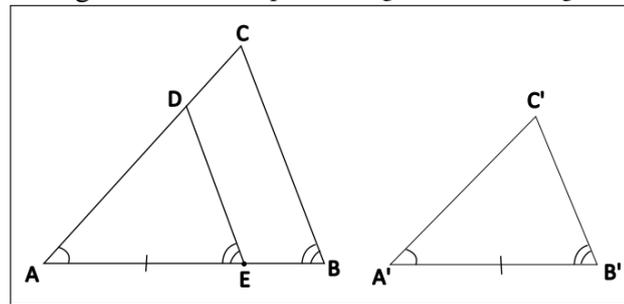
Figura 36 – Teorema fundamental da semelhança



Fonte: Iezzi (1993)

Na terceira aula, de duas horas, apresentei o 1º e 2º casos de semelhança de triângulos: os casos AA e LAL. Fiz uma demonstração verbal do primeiro para fugir um pouco do rigor matemático, mas sem deixar uma explicação matemática para a veracidade do caso de semelhança, da seguinte maneira, veja Figura 37: sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ tais que os ângulos \hat{A} e \hat{B} sejam congruentes aos ângulos \hat{A}' e \hat{B}' , respectivamente. Suponha que $AB > A'B'$. Tome um ponto E no lado \overline{AB} tal que $AE = A'B'$ e trace uma reta paralela a \overline{BC} passando por E. Seja D (nome do ponto sugerido por um aluno) o ponto de intersecção dessa paralela com o lado \overline{AC} . Assim, temos que \hat{A} e \hat{A}' são congruentes, $AE = A'B'$ e \hat{AED} e \hat{B}' também são congruentes. Pelo caso de congruência ALA, os triângulos AED e $A'B'C'$ são congruentes, logo $ED = B'C'$, $AD = A'C'$, e $\hat{ADE} = \hat{C}'$. O teorema fundamental garante que os triângulos ABC e AED são semelhantes e como os triângulos AED e $A'B'C'$ são congruentes, segue que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes.

Figura 37 – Exemplo de congruência de triângulos

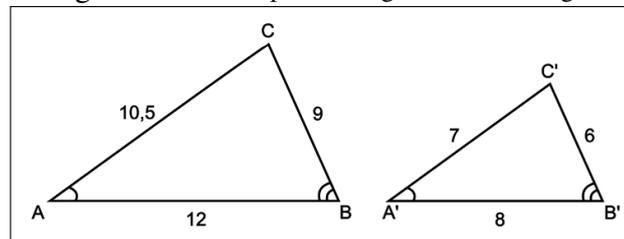


Fonte: Iezzi (1993)

Se $AB = A'B'$, então teríamos um caso de congruência LAL, e a semelhança segue com razão de semelhança $k = 1$.

Após a demonstração verbal foi colocado um exemplo em que dois triângulos apresentavam dois ângulos congruentes e foram escolhidas medidas de lados de tal modo que os triângulos fossem semelhantes. O objetivo do exemplo foi exercitar a verificação da definição de semelhança para o caso AA. O exemplo foi semelhante ao exemplo da Figura 38.

Figura 38 – Exemplo de congruência de triângulos

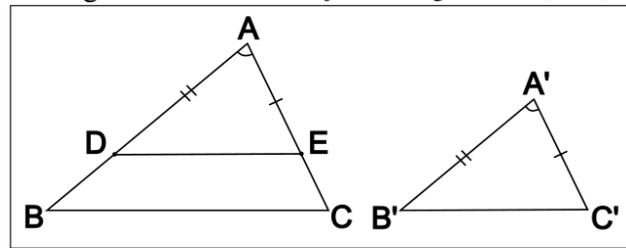


Fonte: Elaborada pelo Autor

Em seguida foi demonstrado verbalmente o 2º caso de semelhança, LAL, da seguinte maneira:

Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ com \hat{A} e \hat{A}' congruentes e $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, Figura 39. Suponha que $AB > A'B'$. Tome um ponto D no lado \overline{AB} tal que $AD = A'B'$ e trace uma reta paralela a \overline{BC} passando por D sendo E o ponto de intersecção dessa paralela com o lado \overline{AC} . Temos $AD = A'B'$ por construção e $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ por hipótese, assim, temos que $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{A'C'}$, mas pelo Teorema Fundamental da Semelhança, temos que $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ o que permite concluirmos que $AD = A'C'$. Assim, os triângulos AED e $A'B'C'$ são congruentes pelo caso LAL, e como os triângulos ABC e AED são semelhantes pelo Teorema Fundamental da Semelhança, segue que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes.

Figura 39 – Semelhança lado-ângulo-lado (LAL)



Fonte: Iezzi (1993)

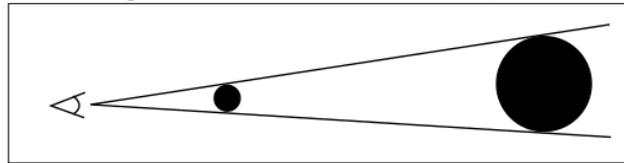
A aula terminou com os exercícios 1 a 5 da primeira página do **Anexo A**.

Na quarta aula, de uma hora, voltei para a astronomia, e retomei o problema deixado para os alunos pensarem: como relacionar as distâncias da Terra à Lua e da Terra ao Sol utilizando os dois ângulos descobertos?

Um dos alunos propôs utilizar o $\cos 87^\circ$, que pode realmente ser usado, mas o intuito da aula aqui sendo proposta é ensinar semelhança de triângulos utilizando a astronomia. Assim, foi dito que deveríamos utilizar semelhança de triângulos, caso AA, e foi perguntado como que poderíamos usar. Um aluno respondeu: “fazendo um triângulo menor”. Após a resposta, fica fácil dar a ideia de construir um triângulo com ângulos internos medindo 90° e 87° e usar semelhança de triângulos. Foi tentado em sala de aula construir um triângulo com tais medidas. Como o ângulo de medida 3° é muito pequeno, e existiam ondulações no piso além de um defeito no ângulo reto do quadrado do piso (o piso da sala era industrial), a hipotenusa pareceu ter medida 100cm assim como o lado do quadrado, o que inviabilizou o experimento, assim, foi apenas dito que Aristarco pode ter construído um triângulo ABC do mesmo modo que foi tentado em sala, porém, com mais cuidado. Após a construção do triângulo, qualquer pessoa pode verificar, usando uma régua, por exemplo, e perceber que a medida da hipotenusa (AB) é 18,8 vezes a medida do menor cateto (CD), ou seja, $\frac{AB}{CD} = 18,8$, logo $\frac{TS}{TL} = 18,8$.

Feita a primeira relação importante para este estudo da astronomia, foi explicado um conceito muito importante chamado tamanho angular: objetos de tamanhos reais diferentes que aparentam ter o mesmo tamanho ao olho, possuem mesmo tamanho angular. Isso se dá pelo fato de que quanto mais longe um objeto está de um observador, menor ele aparenta ser. Assim, se dois objetos possuem mesmo tamanho angular e possuem tamanhos reais diferentes, quer dizer que o maior está mais longe do observador que o menor objeto, como mostra a Figura 40.

Figura 40 – Mesmos tamanhos angulares



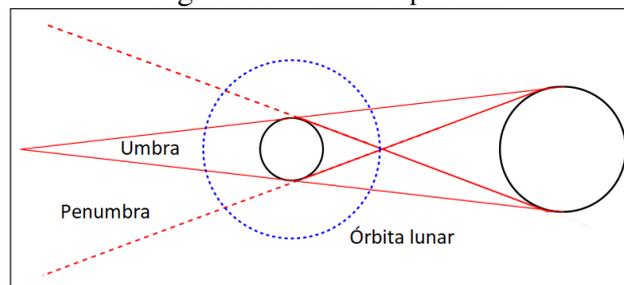
Fonte: Elaborada pelo autor

Explicado isso aos alunos, foi dito que Aristarco observou que a Lua e o Sol possuíam mesmos tamanhos angulares. Por consequência, suas distâncias estão na mesma razão que seus raios, ou seja, $\frac{R_S}{R_L} = 18,8$, onde R_S e R_L são, respectivamente, o raio do Sol e o raio da Lua.

A relação entre os raios acima não foi posta aos alunos de imediato. O professor tentou fazer com que os próprios alunos chegassem na relação acima induzindo a dedução de maneira parecida com a que segue: ora, se quanto mais distante um objeto fica, aparentemente menor ele fica, e se tanto a Lua quanto o Sol aparentam ter o mesmo tamanho, e ainda sabendo que suas distâncias estão na razão de 18,8, qual seria a razão entre seus raios? Após repetir duas vezes a fala acima, um aluno percebeu que a razão seria de 18,8. A aula seguiu com os exercícios 1 a 4 da segunda página do anexo D, e terminou com o pedido do professor para que os alunos vissem algum vídeo ou estudassem como ocorre o eclipse lunar, pois a próxima aula seria sobre o tema.

Na quinta aula, de duas horas, já desenvolvemos teoria suficiente para relacionar-mos o raio da Terra com o da Lua e do Sol, e também com suas distâncias. Foi explicado como ocorre o eclipse lunar conforme a Figura 41.

Figura 41 – Umbra e penumbra



Fonte: Elaborada pelo autor

Onde o círculo maior representa o Sol e o menor a Terra. As linhas vermelhas representam raios de luz com origem no Sol, produzindo sombra quando encontram a Terra. A região entre as linhas tracejada e contínua é chamada de penumbra e o pequeno cone de sombra entre a Terra e a penumbra é chamada de umbra. Os eclipses lunares ocorrem quando a Lua passa pela penumbra. Note que a umbra forma um cone de sombra gerado pela Terra.

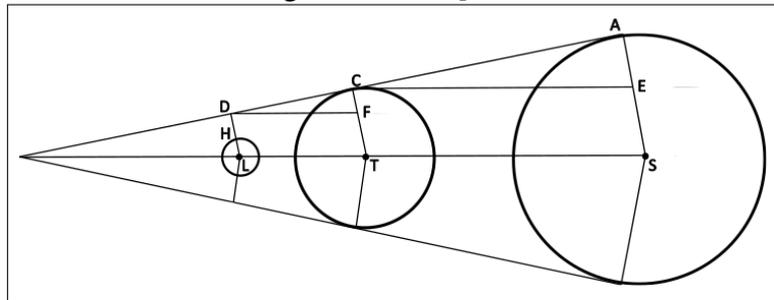
Foi dito também que Aristarco estimou que o diâmetro da Lua era igual a $\frac{3}{8}$ do comprimento do diâmetro da base do cone de sombra, sendo essa base a região em que a Lua passava pelo cone de sombra. Mas é de se perguntar: como que Aristarco conseguiu fazer essa estimativa? (*) Responderei mais adiante..

Com isso, foi feito um pequeno cálculo para chegar a conclusão de que $\frac{8}{3}R_L$ era metade do comprimento do diâmetro da base do cone de sombra. Segue o cálculo:

$$\frac{2R_L}{d} = \frac{3}{8} \Rightarrow 8.2R_L = 3d \Rightarrow \frac{8R_L}{3} = \frac{d}{2},$$

sendo o comprimento do diâmetro da base do cone de sombra d .

Figura 42 – Eclipse lunar



Fonte: Ávila (1982)

Na Figura 42 estamos supondo os centros da Lua, L, Terra, T, e Sol, S, colineares. Sejam C e A pontos tais que a reta que os contém seja tangente as circunferências de centros T e S. Por L, trace uma paralela a \overline{CT} passando por L intersectando a tangente no ponto D. Por C e D trace paralelas a \overline{TS} que intersectarão \overline{CT} e \overline{AS} nos pontos F e E, respectivamente. Note que os ângulos \widehat{DCF} e \widehat{CAE} são retos, e \widehat{CFD} e \widehat{AEC} são congruentes, portanto os triângulos DFC e CEA são semelhantes por AA.

Portanto, podemos escrever:

$$\frac{TL}{TS} = \frac{CF}{AE} = \frac{R_T - \frac{8}{3}R_L}{R_S - R_L} \Rightarrow \frac{TL}{18,8TL} = \frac{R_T - \frac{8}{3}R_L}{18,8R_L - R_L} \Rightarrow \frac{1}{18,8} = \frac{R_T - \frac{8}{3}R_L}{18,8R_L - R_T}$$

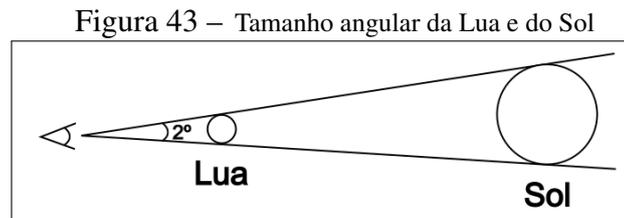
$$1(18,8R_L - R_T) = 18,8(R_T - \frac{8}{3}R_L) \Rightarrow 18,8R_L - R_T = 18,8R_T - \frac{150,4}{3}R_L$$

$$-18,8R_T - R_T = -\frac{150,4}{3}R_L - 18,8R_L \Rightarrow -19,8R_T = \frac{-150,4R_L - 56,4R_L}{3}$$

$$-19,8R_T = \frac{-206,8R_L}{3} \Rightarrow R_T = \frac{206,8R_L}{19,8} \Rightarrow R_T \cong 3,481R_L$$

Logo em seguida, foi feita a relação entre os raios da Terra e do Sol com um cálculo análogo, porém, poderíamos ter feito da seguinte maneira: $R_T \cong 3,481R_L$ e $R_S = 18,8R_L \Rightarrow R_L = \frac{R_S}{18,8}$, logo $R_T \cong 0,185R_S$.

Na sexta aula, de uma hora, foi retomado o conceito de tamanho angular, mas agora, dando a medida do tamanho angular da Lua e do Sol, obtida por Aristarco, que foi de cerca de 2° , veja a Figura 43.



Fonte: Elaborada pelo autor

Com isso, podemos relacionar a distância da Terra ao Sol ou à Lua com seus respectivos raios, pela relação $\text{sen}1^\circ = \frac{R_S}{TS}$ ou $\text{sen}1^\circ = \frac{R_L}{TL}$. Aqui estou fazendo uma correção no artigo de Ávila (1982) pois o mesmo usa tangente do ângulo de medida 1° para relacionar as duas medidas, que apesar do erro da aproximação ser, na prática, nulo, é um erro conceitual.

Como $\text{sen}1^\circ = 0,0175$, obtemos as seguintes relações:

$$R_L = 0,0175TL \quad \text{e} \quad R_S = 0,0175TS,$$

daí, tiramos que

$$R_T \cong 3,481 \cdot 0,0175TL \cong 0,061TL \quad \text{e} \quad R_T \cong 0,185 \cdot 0,0175TS \cong 0,00323TS,$$

conseguindo assim todas as relações entre o raio da Terra e os raios da Lua e do Sol, bem como com suas distâncias da Terra.

Na sétima aula, de uma hora, foi explicado como que Aristarco pode ter descoberto que o diâmetro da base do cone de sombra media $\frac{8}{3}$ do diâmetro da Lua. A aula foi curta pois no dia houve evento no campus, e por isso tive que liberar os alunos para o evento. Segue a explicação dada:

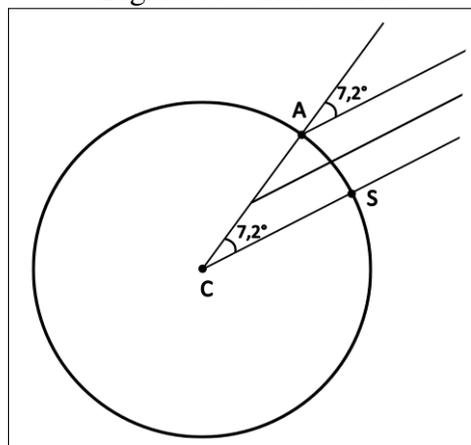
Enquanto escrevia minha monografia de especialização, fiz essa mesma pergunta(*). Fiz algumas pesquisas rápidas e não encontrei a resposta. Acabei terminando a monografia sem saber a resposta, mas a semente da curiosidade havia sido plantada. Alguns meses depois estava sentado na frente da minha casa enquanto o Sol estava se pondo e a Lua nascia a leste. Num

determinado momento a Lua começou a tangenciar um fio de energia e após alguns instantes percebi que a Lua estava passando pelo fio. Exatamente nesse momento fui iluminado. Aristarco pode ter tido a ideia de medir o tempo gasto para a Lua percorrer um diâmetro dela mesma ao observar o tempo que ela leva para atravessar um fio perpendicular ao movimento dela. Para saber o tempo, bastava ter uma ampulheta. Assim, durante um eclipse lunar, ele poderia calcular quantas medidas de areia da ampulheta a Lua precisava para, após ter entrado no cone de sombra, sair completamente, bastando para isso, observar os momentos em que a Lua tangenciava os raios de luz que compunham a umbra do eclipse.

Que infelicidade a minha, ao descobrir que a invenção da ampulheta e Aristarco estão separados por quase 1000 anos. Entretanto, descobri que Copernico (1984) descreve, em seu Livro IV, Capítulo XVIII, como obter tal relação. Ainda descobri que existiam outros métodos de medição de tempo que não a ampulheta no tempo em que Aristarco viveu.

Por fim, na oitava aula, de duas horas, foi apresentado como que Eratóstenes calculou o raio da Terra. Porém, primeiro foi apresentado um pouco da história do célebre grego. Eratóstenes foi poeta, matemático, astrônomo, atleta, etc e conhecido como beta por ser o segundo melhor em cada área. Também foi bibliotecário da biblioteca de Alexandria, uma das maiores da antiguidade que infelizmente foi destruída por uma revolta popular. Durante seu período como bibliotecário, encontrou um papiro que dizia que na cidade de Siena, o fundo de um poço era completamente iluminado apenas no solstício de verão(o dia mais longo do ano) quando o Sol estava a pino. Porém, no mesmo dia, na cidade de Alexandria, um poste perfeitamente na vertical fazia uma sombra com ângulo medindo aproximadamente $7,2^\circ$, veja a Figura 44.

Figura 44 – Raio da Terra



Fonte: Elaborada pelo autor

Como as cidades de Siena e Alexandria ficavam na mesma longitude, bastava descobrir a distância entre as cidades para que Eratóstenes conseguisse calcular o raio da Terra. Para tal, Eratóstenes pediu para um Bematista, pessoa que trabalhava calculando distâncias, que medisse a distância de Alexandria até Siena, que foi dito ser cerca de $800km$. Com a Figura 24, fica fácil calcular o comprimento da circunferência da Terra, e após realizar a divisão dessa medida por $2\pi \cong 6,28$ concluiu-se que $R_T \cong 6369,42km$.

Ao final das apresentações foi perguntado aos alunos o que eles haviam achado da apresentação do conteúdo com uso da astronomia. Disseram que acharam interessante e entenderam alguns conceitos sobre astronomia assim como os de semelhança de triângulos. Um desses alunos se manifestou dizendo que achava mais interessante fazer um curso para ensinar esses conteúdos, e quando disse que ensinei para eles desse jeito para contextualizar a matemática, um outro aluno concordou comigo.

5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA: ENSINO DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS NA ASTRONOMIA

Uma sequência didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos” (ZABALA, 2015).

Para iniciar uma sequência didática o docente deve realizar uma avaliação diagnóstica para ter noção dos conhecimentos prévios dos discentes (PERETTI; COSTA, 2013), e, assim, planejar as atividades de modo a facilitar a compreensão por parte desses. Tais atividades podem ser lúdicas, práticas, gameficadas e com análise e reflexão, aumentando a complexidade e dificuldade das atividades de modo que o conhecimento seja construído.

Portanto, neste capítulo, será apresentado uma sequência didática para o ensino de semelhança de triângulos. Para tal, será abordado conceitos astronômicos como instrumento interdisciplinar para que o conteúdo seja transmitido de forma interessante e que gere curiosidade nos discentes sobre o mundo que o cerca.

A autonomia também deve ser explorada durante o processo pedagógico, onde discente constrói seu conhecimento, desperta a curiosidade pelo meio que o cerca e o professor assume o papel de mediador/facilitador, não de transmissor do conhecimento. Competências desse tipo são importantes para o desenvolvimento cognitivo do aluno, consciente do seu próprio saber e que poderá intervir de forma positiva na sociedade quando adulto.

Partindo desta ideia, ao fazer uso da metodologia ativa chamada “sala de aula invertida”, o professor estimulará a autonomia do aluno, tornando a aprendizagem mais significativa, dinâmica e eficiente.

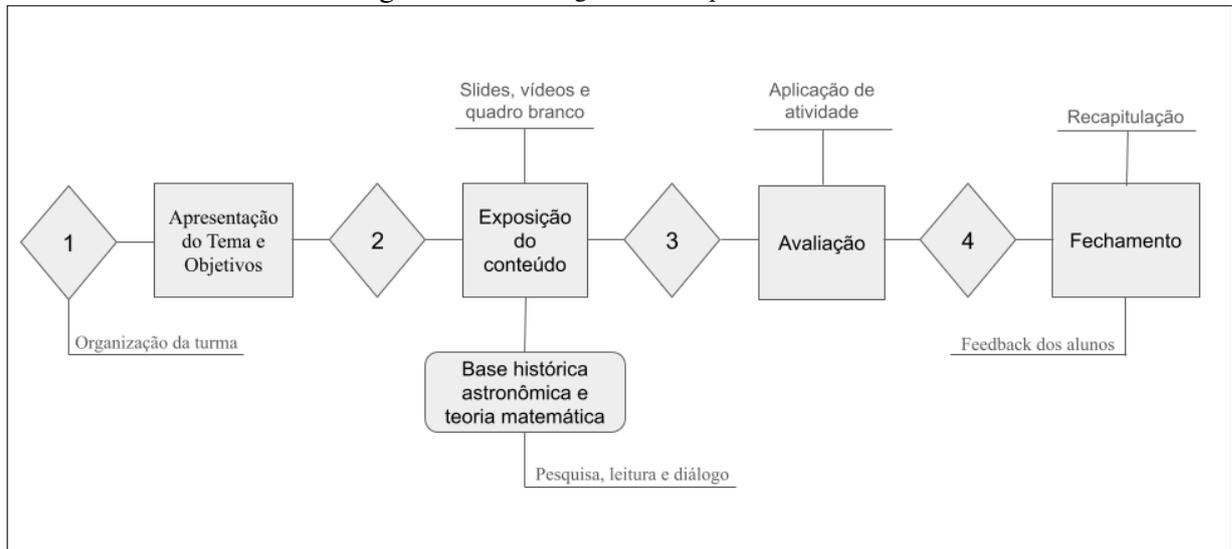
A sala de aula invertida (ou flipped classroom) se constitui em uma abordagem que tem suas raízes no Ensino híbrido (ou Blended Learning), que no contexto educacional se caracteriza de maneira inovadora ao combinar ensino online com sala de aula tradicional, buscando extrair o melhor desses dois segmentos. (MEDEIROS *et al.*, 2020)

A sequência didática apresentada neste trabalho está distribuída em sete aulas com duração de 60 min e 120 min alternadamente, cada aula está representada por uma etapa que veremos na seção seguinte. Já em relação ao tempo pedagógico, fica a cargo do professor fazer uma adaptação caso a instituição de ensino não disponha dessa carga horária.

No processo de ensino/aprendizagem é importante que o professor estabeleça um cronograma capaz de estimular o interesse dos alunos dentro do tempo previsto. A Figura 45

servirá como base para implementação das aulas.

Figura 45 – Fluxograma da sequência didática



Como mostra a Figura 45, inicialmente o professor estabelecerá um diálogo com os discentes, organizará a turma, podendo ser em equipes, duplas ou individualmente. A partir daí, apresentará o tema a ser estudado e o objetivo geral da aula. Nesse momento, também será realizado um trabalho de investigação acerca do conhecimento prévio dos alunos sobre o assunto, aproveitando para recapitular temas relacionados já trabalhados. Em um segundo momento, será apresentado o conteúdo de forma expositiva, podendo fazer uso de slides, vídeos ou mesmo anotações no quadro branco. É fundamental que o professor estimule os alunos a fazerem pesquisas sobre os conceitos astronômicos, tal como os pesquisadores relacionados. Após essa troca de saberes, o professor poderá avaliar a turma fazendo uso de exercícios. Fechando a aula com uma recapitulação do conteúdo trabalhado e um feedback com os alunos.

A base teórica e as atividades propostas aqui são baseadas nas habilidades e descritores da *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)* e nas *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+)*. O **Anexo B** disponibiliza uma sugestão de plano de aula para o conteúdo de semelhança de triângulos, no qual servirá como modelo para os demais.

A tabela a seguir mostra como fica a organização da sequência didática de acordo com cada etapa. Na primeira etapa a avaliação se dará por um questionário que se encontra no **Anexo C** e por uma pesquisa que deverá ser feita em casa. Na segunda etapa, o conteúdo será debatido através de diálogo e será apresentado o **Anexo D**. Já a partir da terceira etapa

tomaremos como base avaliativa os exercícios propostos nos **Anexos E, F, G e H**, que deverão ser entregues nas etapas 3^a, 4^a, 5^a, e 6^a, respectivamente.

Etapa	Assunto	Tempo
1 ^a	Orientações e avaliação diagnóstica	1h aula
2 ^a	Apresentação da astronomia	2h aula
3 ^a	Conceituar e definir semelhança de triângulos	1h aula
4 ^a	Cálculo da relação entre as distâncias da Terra ao Sol e da Terra à Lua	2h aula
5 ^a	Conceituar tamanho angular	1h aula
6 ^a	Relação entre o raio da Terra e os raios do Sol e da Lua e suas distâncias	2h aula
7 ^a	Cálculo do raio da Terra	1h aula

5.1 ETAPAS BÁSICAS

Nesta seção apresentaremos como proceder para a execução da sequência didática que será dividida em sete etapas. Na primeira etapa apresentaremos a sequência didática aos alunos, aplicaremos uma avaliação diagnóstica e daremos orientações para atividades extra classe; na segunda, daremos foco aos elementos astronômicos para motivar o estudo dessa disciplina fantástica, alguns elementos podem ser explicados nas outras etapas, caso o professor considere pouco tempo para trabalhar; na terceira desenvolveremos a teoria matemática necessária para resolução dos problemas da sequência; nas quarta, quinta e sexta etapas, veremos como podemos apresentar as relações obtidas por Aristarco; e na sétima e última etapa finalizaremos com o cálculo do raio da Terra devido por Eratóstenes.

1^a Etapa: Orientações e avaliação diagnóstica

Materiais utilizados	Avaliação diagnóstica
Método avaliativo	Questionário

Objetivos da Etapa:

1. Apresentar a sequência didática que será aplicada;
2. Verificar os conhecimentos já adquiridos pelos discentes até o momento por meio de um questionário.

Nessa primeira etapa, o professor apresentará a sequência didática, definindo o que é sequência didática e mostrando quais são os objetivos a serem alcançados, o conteúdo abordado, as etapas, o procedimento a ser realizado em cada etapa, o tempo de duração da sequência didática, e aplicará o questionário do **Anexo C**.

O objetivo do questionário (avaliação diagnóstica) é ter noção dos conhecimentos prévios dos discentes para que a adequação da sequência didática seja mais efetiva para a turma. Para tal, é necessário que o docente deixe claro que a avaliação não gerará nota e que serve apenas para avaliar o quanto a turma já conhece o conteúdo que será empregado na sequência didática, sendo muito importante seriedade e honestidade nas respostas da avaliação, pois a mesma acarretará nos planos de aula das aulas seguintes.

2ª Etapa: Apresentação da Astronomia

Materiais utilizados	Notebook, projetor, pincel, apagador e quadro branco.
Método avaliativo	Diálogo e exercício para casa

Objetivos da Etapa:

1. Despertar a admiração dos alunos pela Astronomia;
2. Apresentar os fenômenos que serão estudados nas etapas seguintes.

Primeiramente o professor deverá falar sobre a retilinearidade da luz, em seguida apresentar um vídeo de comparação entre objetos do universo, que se encontra aos montes e facilmente pela internet, mas também pode ser encontrado acessando um dos links a seguir: www.youtube.com/watch?v=i93Z7zljQ7I&t=1s ou www.youtube.com/watch?v=TXfOzhZGtNw, destacando quão grandiosos são os corpos celestes, e apresentar as imagens do Anexo D para mostrar a beleza contida no nosso universo. É importante discutirmos axiologia nesta etapa com os alunos durante a apresentação do vídeo e das imagens para tanto motivá-los quanto para deixá-los admirados e fascinados com a astronomia.

Segundo o dicionário Aurélio, a astronomia é a ciência que estuda o universo, espaço sideral, e os corpos celestes, buscando analisar e explicar sua origem, seu movimento, sua constituição, seu tamanho, etc. Nos estudos que iniciaremos aqui, estamos mais interessados em estudar os corpos celestes Terra, Lua e Sol, seus movimentos, seus tamanhos e suas distâncias.

Pode-se prosseguir falando sobre as fases da Lua. Vejo importância em falar que a Lua aparece tanto pelo dia quanto pela noite no céu, visto que já tive aluno em 2022 que pensava que a Lua não aparecia no céu durante o dia. Também considero importante destacar que a Lua

não emite luz própria, ao mostrar observacionalmente, que o lado iluminado da Lua está sempre voltado para o Sol. Isso é importante para que os discentes percebam que é o Sol que ilumina a Lua.

Em sequência, seria importante deduzir que o Sol está mais longe da Terra do que a Lua a partir do conhecimento gerado ao observar as fases da Lua para a construção do conhecimento. Neste momento podemos começar a discutir os principais fenômenos presentes do trabalho de Aristarco: os eclipses lunares e solares, falando que os planos que contém as órbitas aparentes do Sol e da Lua se intersectam em dois pontos, e como não ocorrem 12 eclipses de cada tipo por ano, deve haver um ângulo não nulo entre os planos orbitais do Sol e da Lua (Talvez seja interessante apresentar o conceito de ângulo formado entre planos).

Mostrar imagens dos tipos de eclipses é essencial para que os discentes compreendam melhor tais fenômenos. Caso o docente tenha a oportunidade de presenciar um eclipse lunar durante o período em que a sequência didática estiver sendo executada, a motivação dos alunos participantes, sem dúvida alguma, aumentaria significativamente, além de propiciar aulas de campo, o que enriquece a experiência. Após a exposição desses temas o **Anexo D** deverá ser apresentado.

Caso o professor tenha em sua sala de aula algum aluno que faça perguntas sobre o tema, perceberá que não haverá tempo hábil para falar de tudo o que está nesta etapa e ainda responder o aluno. Portanto, caso o professor achar necessário, poderá explicar os fenômenos astronômicos nas etapas seguintes de modo que não haja prejuízo no desenvolvimento dos conteúdos.

3ª Etapa: Conceituar e definir semelhança de triângulos

Materiais utilizados	Notebook, projetor, pincel, apagador e quadro branco.
Método avaliativo	Lista de exercícios

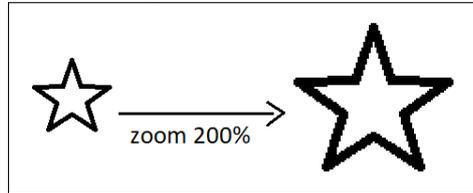
Objetivo da Etapa: Conceituar e definir semelhança de triângulos;

Nesta seção veremos como trabalhar o conceito de semelhança de triângulos de uma maneira mais formal e detalhada assim como resolver o exercício do final da etapa anterior.

Começemos por uma analogia a ideia de semelhança: a ampliação de figuras, conhecida com “dar um zoom”. À esquerda da Figura 46 vemos uma estrela, sendo que à direita, vemos a mesma estrela, porém ampliada em 2 vezes. Podemos dizer que o zoom dado foi de 200%. Que chamamos de ampliação. Porém, se fizermos o contrário, diminuindo o tamanho da

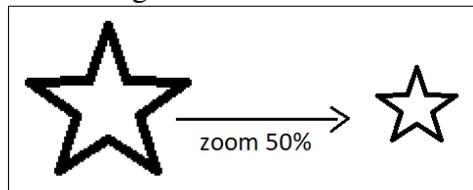
figura ao meio, ampliação de 0,5 vez, estaríamos dando um zoom de 50%. Que chamamos de redução.

Figura 46 – Zoom mais



Fonte: Elaborada pelo autor

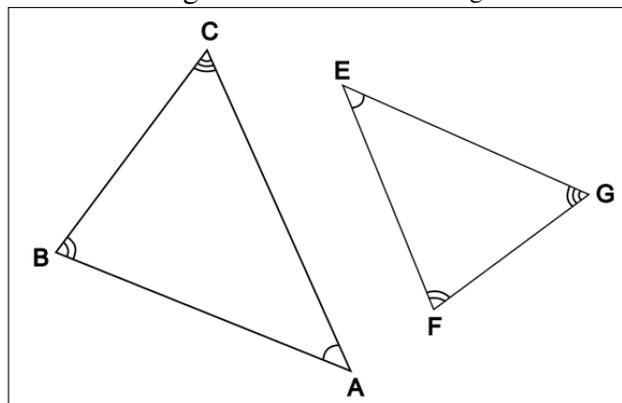
Figura 47 – Zoom menos



Fonte: Elaborada pelo autor

Tal discussão é importante para que o aluno entenda o conceito de semelhança. Outro ponto que merece destaque é o termo ‘homólogos’, do grego *homo*, que significa mesmo, e *logus*, que significa lugar, portanto homólogos, mesmos lugares. Uma forma de deixar esse conceito claro para os alunos é pôr os lugares como sendo os vértices dos ângulos internos dos triângulos. Pôr os ângulos congruentes com os mesmos símbolos ajuda no entendimento. Acompanhe um exemplo pela Figura 48.

Figura 48 – Lados homólogos



Fonte: Elaborada pelo autor

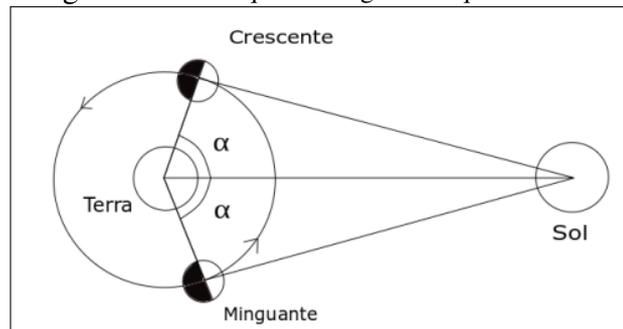
O lado \overline{AB} do triângulo ABC está entre os ângulos de duas linhas (\hat{B}) e de uma linha (\hat{A}). Encontrar o lado homólogo à esse no triângulo EFG é o mesmo que encontrar o lado

de EFG que está entre os ângulos de duas linhas (\hat{F}) e de uma linha (\hat{E}) no triângulo EFG . Como esses ângulos são \hat{E} e \hat{F} , o lado homólogo ao lado \overline{AB} é \overline{EF} .

Assim, ao procurarmos o lado homólogo ao lado \overline{AB} do triângulo ABC no triângulo $A'B'C'$, precisaríamos primeiro ver entre quais ângulos o lado \overline{AB} estaria. Se estiver entre os ângulos de uma linha e duas linhas, por exemplo, então o lado homólogo ao lado \overline{AB} no triângulo $A'B'C'$ também estará entre os ângulos de uma linha e duas linhas. Nem todos os problemas poderão ser resolvidos dessa maneira, mas a ideia ajuda a desenvolver a localização dos lados homólogos pelos alunos.

Após as explicações, é muito importante que o professor passe vários exercícios apenas de localização dos lados homólogos entre dois triângulos disponíveis na primeira lista de exercícios do **Anexo E**. Para os alunos perceberem por si só que qualquer medida do lado do segundo triângulo é obtido a partir do homólogo do primeiro triângulo multiplicado pela razão de semelhança. Isso também ajudará a desenvolver o conceito de semelhança.

Figura 49 – Lua quarto minguante e quarto crescente



Fonte: Ávila (1982)

Agora podemos finalizar a aula com o mesmo problema que terminei a primeira aula do capítulo anterior: como relacionar as distâncias da Terra ao Sol e da Terra à Lua? Aqui devemos falar que Aristarco observou que a Lua levava 14,25 dias para sair de quarto-ninguante para quarto-crescente, e como o mês sinódico da Lua é de 29,5 dias, deve ser possível relacionar a distância da Terra à Lua com a distância da Terra ao Sol, veja (Figura 49). Tal relação deve ser deixada como exercício para os discentes, inclusive para perceberem como é difícil de se ter a ideia que resolve o problema.

4ª Etapa: Cálculo da relação entre as distâncias da Terra ao Sol e da Terra à Lua

Materiais utilizados	Pincel, apagador e quadro branco.
Método avaliativo	Resolução do problema proposto na 3ª etapa

Objetivos da Etapa:

1. Apresentar os casos de semelhança de triângulos.
2. Resolver o problema proposto na 3ª etapa.

Nesta aula desenvolveremos mais teoria para a resolução do problema proposto no final da terceira etapa. Fazer uma breve revisão da definição de semelhança de triângulos, lembrando dos lados homólogos e como encontrá-los, é importante para a fixação do conhecimento. É importante dizer que para que dois triângulos sejam semelhantes, eles devem satisfazer todas as congruência entre ângulos e todas as proporções entre os lados homólogos, ou seja, $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'$ e $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$. Porém, existem conjuntos de condições com uma quantidade mínima de elementos que garantem a semelhança de triângulos. Esses conjuntos de condições são os casos de semelhança.

A discussão do parágrafo acima deve ser feita em sala de aula para que os alunos entendam o porquê da existência dos casos de semelhança. Feita essa discussão, podemos apresentar e demonstrar o Teorema Fundamental da Semelhança e o 1º caso de semelhança presentes na primeira Seção 4.1. Aconselho fazer demonstrações verbais, apenas falando, enquanto desenha-se as figuras. Após apresentar cada demonstração, o professor deverá resolver alguns exercícios que podemos encontrar no **Anexo F**.

Como a Lua leva 29,5 dias para dar uma volta em torno da Terra e 14,25 dias para sair de quarto-minguante para quarto-crescente, o ângulo formado pelo Sol-Terra-Lua quarto-crescente, tem medida aproximadamente 87° , e como o ângulo formado pelo Sol-Lua quarto-crescente-Terra é reto, temos as medidas de dois ângulos em um triângulo. Podemos repetir aqui a pergunta “como usar essas medidas para calcular a relação entre as distâncias da Terra ao Sol e da Terra à Lua?”

A resposta mais simples que posso encontrar para essa pergunta é construir um triângulo com ângulos medindo 90° , 87° e 3° , onde a Lua(L) está no vértice do ângulo reto, a Terra(T) no vértice do ângulo de medida 87° e o Sol(S) no de 3° , e facilmente encontrar $\frac{TS}{TL} = 18,8$ com o auxílio de uma régua graduada. Perguntar aos discentes qual é a interpretação dessa relação é interessante. A resposta é que o Sol é 18,8 vezes mais distante da Terra que a Lua, e tal resposta deve ser aguardada, ou estimulada pelo docente.

A aula pode seguir com o professor enunciando os outros dois casos de semelhança e com exercícios do **Anexo F**. É importante que o professor interaja com os discentes na resolução da lista de exercícios. A etapa pode ser finalizada com o seguinte problema: como já sabemos

que o Sol é 18,8 vezes mais distante da Terra que a Lua, quantas vezes o raio do Sol é maior que a Lua? Essa pergunta é tema da próxima etapa.

5ª Etapa: Conceituar tamanho angular

Materiais utilizados	Duas esferas de tamanhos diferentes, uma cadeira giratória, pincel, apagador e quadro.
Método avaliativo	Resolver problematização proposta na etapa anterior

Objetivos da Etapa:

1. Conceituar tamanho angular.
2. Responder o último problema da etapa anterior.

Durante minhas pesquisas em 2016/2017, tive dificuldades em entender o conceito de tamanho angular e só consegui entender o conceito após muito tempo. Portanto, considero importante a experiência que descreverei a seguir. Assim, uma discussão sobre os tamanhos angulares da Lua e do Sol deve ser feita.

Façamos a seguinte experiência em sala de aula: ponhamos um aluno sentado numa cadeira giratória e um globo terrestre na mesa (birô). Ele perceberá o globo terrestre com certo tamanho angular. Agora entregue na mão dele uma esfera menor que o globo terrestre e peça para ele pôr essa esfera entre um dos olhos dele, enquanto o outro deve estar fechado, e o globo de modo que a esfera sobreponha exatamente o globo. Nesse momento a esfera e o globo terão o mesmo tamanho angular. Agora gire a cadeira levemente. O aluno poderá perceber que tanto a esfera em sua mão quanto o globo na mesa (birô) aparentam ter o mesmo tamanho, mesmo que os dois objetos tenham tamanhos reais diferentes.

É possível medir a distância da esfera e do globo ao olho do discente e comparar com seus raios. Ao fazer isso os discentes deverão ser estimulados a perceberem que os raios das esferas e das distâncias obtidas são proporcionais. Os raios de cada uma das esferas podem ser obtidos a partir da medida de um equador (circunferência de maior medida na esfera) da esfera pela divisão por 2π .

Após a experiência, o professor deverá lembrar aos alunos que o Sol está 18,8 vezes, segundo Aristarco, mais longe da Terra do que a Lua, e que o mesmo observou que ambos os astros aparentam ter o mesmo tamanho angular, portanto, uma pergunta natural a se fazer é: quantas vezes o raio do Sol é maior que o raio da Lua? O aluno que entendeu a experiência terá

condições de concluir que a resposta é que o raio do Sol é 18,8 vezes o raio da Lua. Conseguindo, assim, relacionar os raios dos dois astros.

O professor pode estimular mais ainda o senso investigativo dos alunos ao perguntar: mas e se o Aristarco não tivesse tido a sorte de que os tamanhos angulares da Lua e do Sol fossem iguais, poderia ele conseguir relacionar os raios dos mesmos? A resposta para essa pergunta se encontra no capítulo 3: os tamanhos angulares da Lua e do Sol. A lista do **Anexo G** deve ser atividade extraclasse.

6ª Etapa: Relação entre o raio da Terra e os raios do Sol e da Lua e suas distâncias

Materiais utilizados	Notebook, projetor, pincel, apagador e quadro.
Método avaliativo	Exercícios

Objetivos da Etapa:

1. Relacionar o raio da Terra com os raios da Lua e do Sol, e com as distâncias da Terra à Lua e da Terra ao Sol;
2. Explicar alguns detalhes sobre o eclipse lunar.

É muito importante que o professor passe algum vídeo sobre eclipse lunar para apresentar tal fenômeno. Após o vídeo, o professor deverá discutir sobre a medida do cone de sombra, na altura em que a Lua passa, em relação ao diâmetro da Lua. Ter ideias sobre como determinar o diâmetro do cone de sombra gerado pela Terra sem usar ferramentas modernas se mostra bastante desafiador, porém, tentar fazer com que os alunos tentem ter a ideia é importante para que os mesmos percebam como é difícil ter uma ideia. Destacarei aqui a ideia que eu tive e que já relatei no Capítulo 4.

Aristarco pode ter tido a ideia de medir o tempo gasto para a Lua percorrer um diâmetro dela mesma ao observar o tempo que ela leva para atravessar um fio perpendicular ao movimento dela. Para saber o tempo, bastava ter uma clepsidra. Assim, durante um eclipse lunar, ele poderia calcular quantas medidas de água da clepsidra a Lua precisava para, após ter entrado no cone de sombra, sair completamente, bastando para isso, observar os momentos em que a Lua tangenciava os raios de luz que compunham a umbra do eclipse.

Como já sabemos, o diâmetro da Lua é $\frac{3}{8}$ do diâmetro do cone de sombra. Para obtermos uma relação com o raio da Lua, basta fazer

$$\frac{2R_L}{d} = \frac{3}{8} \Rightarrow 8 \cdot 2R_L = 3d \Rightarrow \frac{8R_L}{3} = \frac{d}{2}$$

e podemos usar essa última relação nos resultados que seguem. Para obtermos uma relação entre os raios da Terra e do Sol usaríamos na Figura 46 uma semelhança de triângulos caso AA, obtendo

$$\frac{TL}{TS} = \frac{R_T - \frac{8}{3}R_L}{R_S - R_L}$$

e utilizaríamos $\frac{TS}{TL} = 18,8$ e $\frac{R_S}{R_L} = 18,8$. Com algumas manipulações algébricas, obteríamos $R_T \cong 3,48R_L$, e como $R_L \cong \frac{R_S}{18,8}$, teríamos $R_T \cong 0,18R_S$.

Para relacionarmos R_T com as medidas TL e TS já mencionadas, teríamos que usar o $\text{sen}1^\circ$, que é a medida do *seno* da metade do tamanho angular do Sol e da Lua, com $\frac{R_L}{TS}$ e depois com $\frac{R_S}{TS}$ da seguinte maneira:

$$\text{sen}1^\circ = \frac{R_L}{TS}, \text{ e } \text{sen}1^\circ = \frac{R_S}{TS},$$

tais relações podem ser percebidas na Figura 43.

Como $\text{sen}1^\circ \cong 0,017$, obteríamos $R_L \cong 0,017TL$ e $R_S = 0,017TS$, observe que $R_T \cong 3,48R_L$ e $R_T \cong 0,18R_S$, a partir daí temos:

$$R_T \cong 3,48 \cdot 0,017TL \cong 0,06TL \text{ e } R_T \cong 0,18 \cdot 0,017TS \cong 0,003TS.$$

Todos esses resultados não devem ser lançados aos alunos sem qualquer estímulo. É importante tentar fazer com que os alunos cheguem a esses resultados com pequenas orientações por parte do professor. Caso os alunos não consigam obter tais relações, ou até mesmo se apenas alguns conseguirem, que é o esperado, o professor deve realizar as devidas efetuações. Os exercícios do **Anexo H** devem ser passados após esses cálculos.

7ª Etapa: Cálculo do raio da Terra

Materiais utilizados	Notebook, projetor, pincel, apagador e quadro.
Método avaliativo	Exercícios

Objetivos da etapa:

1. Calcular o raio da Terra;
2. Enrerrar a sequência didática obtendo todas as medidas pretendidas.

Para começar a aula, aconselho o professor ter em mãos o famoso corte do documentário ‘Cosmos’ de Carl Sagan em que o mesmo explica como que Eratóstenes obteve a medida de uma circunferência (equador) terrestre. O vídeo pode ser encontrado no site da Secretaria de Educação do Paraná, (FUNDEPAR, 2024). Caso o link ainda seja válido, pode encontrá-lo em (<http://www.fisica.seed.pr.gov.br/modules/video/showVideo.php?video=10460>).

Após a apresentação do vídeo, caso o professor ache necessário, ensinar porque o comprimento da circunferência é $2\pi r$ possa ser de grande valor.

Como sabemos, quando tomamos o comprimento da circunferência e dividimos pela medida de seu diâmetro, obtemos, curiosamente, o mesmo número: aproximadamente 3,14, que os gregos chamaram de π . Portanto, sendo C o comprimento de uma circunferência, e d a medida de seu diâmetro, teríamos $\frac{C}{d} = \pi \Rightarrow C = d\pi = 2r\pi = 2\pi r \Rightarrow C = 2\pi r$.

Após essa discussão, podemos resolver o problema que Sagan explicou em seu vídeo. Ora, se a distância de Alexandria a Siena era de 800km (medida já convertida para km) e a sombra de um poste, ou obelisco, em Alexandria fazia um ângulo de $7,2^\circ$ com a vertical enquanto que em Siena não havia sombra, então olhando para a figura 23, teríamos a relação $\frac{C}{800} = \frac{360^\circ}{7,2^\circ} = 50 \Rightarrow C = 800.50 = 40000$, ou seja, o comprimento da circunferência terrestre seria de $40000km$. Com essa medida e com as relações obtidas nas etapas anteriores, fica fácil obter as medidas dos raios da Lua e do Sol, bem como suas distâncias.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados obtidos na experiência proposta neste trabalho mostraram que o ensino da Astronomia contribui positivamente com o processo de ensino/aprendizagem dos alunos. Além da matemática, outras disciplinas podem ser beneficiadas com esse tema, como por exemplo, a Física, a Química, a Biologia, dentre outras.

No decorrer das aulas, alunos que antes não se interessavam muito pelo ensino da matemática, estavam atentos e tirando dúvidas. Foi fascinante ver, como a turma entendeu bem os assuntos propostos. Um dos alunos sugeriu que fosse realizado um cursinho de Astronomia, então expliquei melhor a proposta do tema e ele achou interessante a inserção de outros assuntos dentro da matemática.

Notou-se que a interdisciplinaridade foi fundamental para uma melhor interação professor/aluno e pela participação ativa de um maior número de alunos nas atividades propostas em sala. Então, cabe a nós professores buscar temas que atraiam nossos alunos e façam a diferença no ensino e na vida deles.

Portanto, a Astronomia desempenha um papel crucial no ensino da matemática ao oferecer contextos visuais e práticos que facilitam a compreensão de conceitos mais abstratos. Explorar o funcionamento do universo não só ajuda o aluno a compreender melhor as maravilhas que o cercam, mas também desenvolvem habilidades de pensamento crítico e investigativo. Assim, integrar o estudo da astronomia no currículo escolar não apenas enriquece o aprendizado matemático, mas também inspira uma apreciação mais profunda pelo cosmos e suas aplicações na vida cotidiana."

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, G. de. Norman robert pogson e a escala de magnitudes estelares. 2011.
- ALMEIDA, G. de. Sobre o tamanho aparente da lua no horizonte e a maiores alturas. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), v. 29, n. 2, p. 325–335, 2012.
- AUGUSTO, P.; SOBRINHO, J. L. O trânsito de vénus e a unidade astronómica. **Grupo de Astronomia. Universidade da Madeira: nov**, 2007.
- ÁVILA, G. A geometria e as distâncias astronômicas na grécia antiga. **Revista do professor de matemática**, v. 1, p. 9–13, 1982.
- BACHELARD, G. **O Racionalismo Aplicado**. [S. l.]: Zahar: Rio de Janeiro, 1977.
- BARBOSA, B. R. L. **Aplicação dos logaritmo na medição de distâncias astronômicas**. [S. l.]: Instituto Federal do Piauí, 2023.
- BRASIL, M. Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais (pcn+). **Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC**, 2006.
- CANALLE, J. B. G. Explicando astronomia básica com uma bola de isopor. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), v. 16, n. 3, p. 314–331, 1999.
- CATELLI, F.; GIOVANNINI, O.; HOFFMANN, P. Um problema didático: como determinar ângulos de paralaxe trigonométrica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 40, 2017.
- COPERNICO, N. As revoluções das orbes celestes, tradução de a. **Dias Gomes e Gabriel Domingues, Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian**, 1984.
- COSTA, I. F. d.; MAROJA, A. d. M. Astronomia diurna: medida da abertura angular do sol e da latitude local. **Revista brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 40, 2017.
- COSTA, R. R. O desenvolvimento da óptica: da antiguidade à idade contemporânea. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2015.
- COUPER, H.; HENBEST, N. **A HISTORIA DA ASTRONOMIA**. [S. l.: s. n.], 2013.
- EUCLIDES, F. Óptica. **Scientiae Studia**, Tradução: Guilherme Rodrigues Neto, v. 11, n. 4, p. 893–936, 2013.
- FERREIRA, C. A. Medidas de distância em astronomia: Uma proposta de unidade de ensino potencialmente significativa para o ensino médio. 2018.
- FILHO, K.; SARAIVA, M. **Determinação de Distâncias Astronômicas**. 2018. <http://astro.if.ufrgs.br/dist/dist.htm>. Acesso: 2023-02-11.
- FREIRE, P. Pedagogia do oprimido. 1970.
- FUNDEPAR. **Cosmos - Oceano Cósmico - Parte 4**. 2024. <http://www.fisica.seed.pr.gov.br/modules/video/showVideo.php?video=10460>. Acesso: 2024-06-16.

GAMA, L. D.; HENRIQUE, A. B. Astronomia na sala de aula: por quê? **Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia**, n. 9, 2010.

GIOVANNINI, O.; PELLEZZI, D.; CATELLI, F. O lado escuro da lua nunca apanha sol? **Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia**, n. 17, 2014.

GOMES, A. L.; SOUSA, C. A. de; BARROS, J. S.; PINHEIRO, J. Cálculo do raio da terra e de outras medidas astronômicas como problemas motivadores para aprendizagem de geometria. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 9, n. 1, 2022.

GOMES, A. L. M. **Medidas Astronômicas: do raio da Terra à distância da Terra ao Sol**. 2020. <https://siduece.uece.br/siduece/trabalhoAcademicoPublico.jsf?id=96739>. Acesso: 2023-05-11.

GOUT, J.-F.; POLAKIS, T. **Astronomy picture of the day**. 2018. <https://apod.nasa.gov/apod/ap180310.html>. Acesso: 2023-07-03.

GRAYLING, A. C. Epistemologia. **Compêndio de filosofia**, Edições Loyola São Paulo, SP, p. 39–63, 2002.

HELERBROCK, R. **Eclipse solar e lunar**. 2023. <https://brasilecola.uol.com.br/fisica/eclipse.htm>. Acesso: 2023-09-03.

IEZZI, G. Fundamentos da matemática elementar: Geometria plana e espacial. **São Paulo: Atual**, 1993.

LEITE, J. C. Do mistério das eras do gelo às mudanças climáticas abruptas. **Scientiae studia**, SciELO Brasil, v. 13, p. 811–839, 2015.

LOPES, M. H. O.; LOPES, W. Aplicações da astronomia e da geometria na grécia antiga. 2014.

MACIEL, W. J. **Introdução à Estrutura e Evolução Estelar Vol. 24**. [S. l.]: Edusp, 1999.

MEDEIROS, Á. d. L. F. *et al.* **A sala de aula invertida integrada às tecnologias digitais na formação continuada de professores que atuam no ensino médio integral**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2020.

NOGUEIRA, V. F. P. Axiologia: apontamentos sobre o valor. 2007.

PAULA, E. A. d. M. de; MOTA, G. M. B.; VIDAL, A. V. d. S. M. Experimento geométrico: usando a interdisciplinaridade para calcular alturas inacessíveis. 2022.

PERETTI, L.; COSTA, G. M. T. D. Sequência didática na matemática. **Revista de Educação do IDEAU**, v. 8, n. 17, p. 1–14, 2013.

RIOGA, L. **Geocentrismo e Heliocentrismo**. 2021. <https://www.ufmg.br/espacodoconhecimento/geocentrismo-e-heliocentrismo/>. Acesso: 2024-02-13.

ROEMER, O. **Astronomical society of the pacific**. Traduzido por Julie M. Vinter Hansen em 1944. 1676. https://articles.adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-iarticle_query?bibcode=1944ASPL...4..298V&db_key=AST&page_ind=0&data_type=GIF&type=SCREEN_VIEW&classic=YES. Acesso: 2023-06-15.

- RONAN, C. A. **História ilustrada da ciência da Universidade de Cambridge**. [S. l.]: Jorge Zahar Editor Ltda, 1994.
- ROS, R. M.; GARCÍA, B. Sol e eclipses—atividades e modelos que explicam eclipses. 2019.
- SAR. **Eclipse Lunar**. 2024. <https://www.sociedadeastronomica.com.br/eclipse-lunar/>. Acesso: 2024-01-15.
- SILVA, R. M. M. d. Experiências históricas para a determinação da velocidade da luz. Universidade do Porto. Reitoria, 2002.
- SILVEIRA, F. L. d. **Evidências de que o Sol está muito mais distante do que a Lua!** 2020. <https://cref.if.ufrgs.br/?contact-pergunta=evidencias-de-que-o-sol-esta-muito-mais-distante-do-que-a-lua>. Acesso: 2023-09-04.
- SOUZA, C. J. d. M.; MONTEIRO, M. A. A.; MACIEL, I. J. A teoria lunar de ptolomeu e a determinação da posição da lua e sua distância à terra. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 44, p. e20220092, 2022.
- VERTCHENKO, L.; SILVEIRA, T. d. A. Exercícios envolvendo a magnitude limite no ensino de astronomia. **Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências (Belo Horizonte)**, SciELO Brasil, v. 12, 2010.
- ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. [S. l.]: Penso Editora, 2015.
- ZARPELON, P. A. B.; ALVARENGA, L. L.; EVANGELISTA, F. L. Utilização de goniômetro caseiro para medição da revolução lunar. **Anais da Mostra de Iniciação Científica do Instituto Federal Catarinense Campus Concórdia-ISSN 2317-8671**, v. 13, n. 1, p. 40–40, 2023.

APÊNDICE A – EXERCÍCIOS

Este Apêndice foi feito pensando em tornar mais claro a álgebra das magnitudes de estrelas. Por isso decidi resolver três exercícios, o primeiro do artigo de Ferreira (2018), o segundo formulado por mim mesmo, e o terceiro que decidi pôr após descobrirem o objeto mais brilhante do universo, que brilha 500 trilhões de vezes mais que o Sol.

1) Um sistema triplo tem magnitude aparente 0. Se uma dessas estrelas tem magnitude aparente igual a 2 e uma outra 1, determine a magnitude aparente da terceira estrela.

Solução: Seja f_0 o fluxo aparente da estrela Vega, f_1 e f_2 os fluxos aparentes das de magnitudes 2 e 1, respectivamente, e f_3 o fluxo da estrela que desejamos calcular a magnitude. O fluxo aparente de duas fontes luminosas quando muito próximas uma da outra, é exatamente a soma dos fluxos de cada uma das fontes luminosas. Assim, o fluxo aparente f_v do sistema será dado por:

$$f_v = f_1 + f_2 + f_3,$$

e como a magnitude aparente do sistema é 0, de

$$m = -2,5 \log \left(\frac{f_v}{f_0} \right)$$

obtemos:

$$0 = -2,5 \log \left(\frac{f_1 + f_2 + f_3}{f_0} \right) \Leftrightarrow \frac{f_1 + f_2 + f_3}{f_0} = \frac{f_1}{f_0} + \frac{f_2}{f_0} + \frac{f_3}{f_0} = 1,$$

como

$$2 = -2,5 \log \left(\frac{f_1}{f_0} \right) \Leftrightarrow -0,8 = \log \left(\frac{f_1}{f_0} \right) \Leftrightarrow 10^{-0,8} = \frac{f_1}{f_0}$$

e

$$1 = -2,5 \log \left(\frac{f_2}{f_0} \right) \Leftrightarrow -0,4 = \log \left(\frac{f_2}{f_0} \right) \Leftrightarrow 10^{-0,4} = \frac{f_2}{f_0},$$

ao substituirmos, concluimos que

$$10^{-0,8} + 10^{-0,4} + \frac{f_3}{f_0} = 1 \Leftrightarrow \frac{f_3}{f_0} = 1 - 10^{-0,8} - 10^{-0,4} \Leftrightarrow \frac{f_3}{f_0} \cong 1 - 0,1585 - 0,3981 \cong 0,4434$$

$$\Leftrightarrow \log\left(\frac{f_3}{f_0}\right) \cong \log 0,4434 \Leftrightarrow -2,5 \log\left(\frac{f_3}{f_0}\right) \cong -2,5(-0,3532) = 0,883.$$

portanto, a magnitude aparente da terceira estrela é, aproximadamente, 0,883.

Note que $0,883 + 2 + 1$ nessa álgebra das magnitudes é aproximadamente 0. Ou seja, o inverso aditivo de um número positivo é também um número positivo. Além do mais, um número negativo não possui inverso aditivo.

2) Qual a relação entre as distâncias de duas estrelas idênticas mas que diferem em 1 nas suas magnitudes?

Solução: Seja L a luminosidade das duas estrelas. Suponha que a magnitude da primeira estrela, a uma distância d seja m , e a segunda estrela a uma distância D seja $m + 1$. Queremos saber quanto vale $\frac{D}{d}$. A diferença entre as magnitudes nos dá:

$$m + 1 - m = -2,5 \log\left(\frac{\frac{L}{4\pi D^2}}{f_0}\right) + 2,5 \log\left(\frac{\frac{L}{4\pi d^2}}{f_0}\right) \Leftrightarrow$$

$$1 = 2,5 \log\left(\frac{D^2}{d^2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{D^2}{d^2} \cong 2,5 \Leftrightarrow \frac{D}{d} \cong 1,58 \Leftrightarrow D \cong 1,58d,$$

portanto, $\frac{D}{d} \cong 1,58$.

3) Sabendo que o Sol tem magnitude aparente igual a -26,8 e que o objeto mais brilhante do universo é $5 \cdot 10^{14}$ vezes mais brilhante que o Sol, determine a magnitude absoluta desse objeto.

Solução: Seja f_1 o fluxo luminoso do Sol. Como sua magnitude aparente é $-26,8$, temos:

$$-26,8 = -2,5 \log\left(\frac{f_1}{f_0}\right) \Leftrightarrow 10,72 = \log\left(\frac{f_1}{f_0}\right) \Leftrightarrow \frac{f_1}{f_0} = 10^{10,72} \Leftrightarrow 5 \cdot 10^{14} \frac{f_1}{f_0} = 5 \cdot 10^{14} \cdot 10^{10,72},$$

$$\log\left(\frac{5 \cdot 10^{14} f_1}{f_0}\right) = \log 5 \cdot 10^{24,72} \Leftrightarrow -2,5 \log\left(\frac{5 \cdot 10^{14} f_1}{f_0}\right) = -2,5(\log 5 + 24,72 \log 10)$$

$$-2,5 \log \left(\frac{5 \cdot 10^{14} f_1}{f_0} \right) \cong -2,5(0,7 + 24,72) = -63,55.$$

Portanto, a magnitude aparente do objeto, na posição em que o Sol está e se fosse possível compactá-lo ao tamanho do Sol, seria aproximadamente $-63,55$.

Como 1 parsec é aproximadamente $206000UA$, temos que $\frac{1}{206000} \cong 4,84 \cdot 10^{-6} parsec$ que é a distância do Sol à Terra em parsec. Substituindo os valores obtidos na equação da magnitude absoluta, obtemos:

$$-63,55 - M = 5 \log \left(\frac{4,84 \cdot 10^{-6}}{10} \right) = 5 \log (4,84 \cdot 10^{-7}) \cong 5(0,68 - 7) = -31,6,$$

portanto,

$$-M \cong -31,6 + 63,55 = 31,95 \Leftrightarrow M \cong -31,95.$$

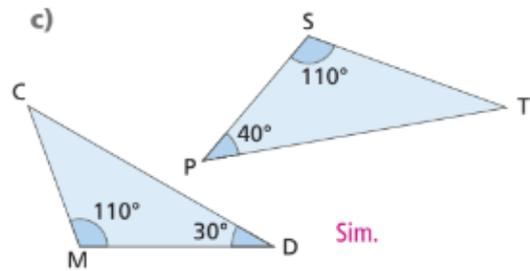
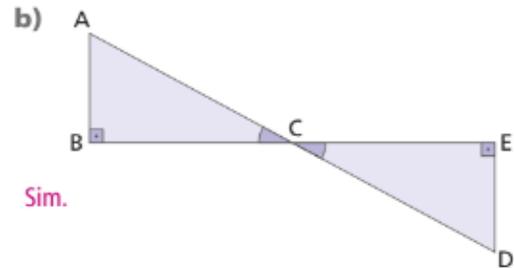
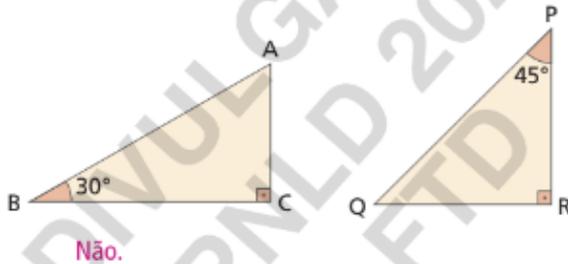
Concluimos que esse objeto seria aproximadamente 100 vezes mais brilhante do que o Sol a uma distância 206000 vezes a distância do Sol.

Anexo A

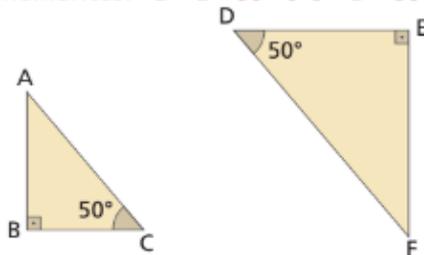
Responda às questões no caderno.

1. Em cada item, você encontra um par de triângulos. Responda, de acordo com as indicações feitas, se os pares de triângulos são ou não semelhantes.

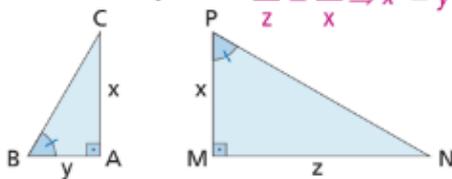
a)



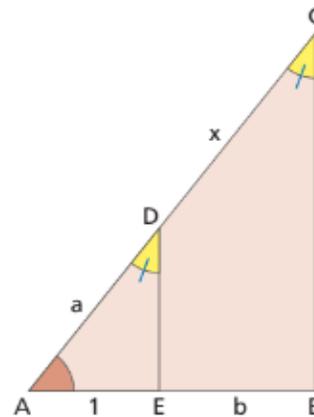
2. Quais as condições que lhe permitem afirmar que os triângulos abaixo são semelhantes? $\hat{B} \cong \hat{E} = 90^\circ$ e $\hat{C} \cong \hat{D} = 50^\circ$



3. As indicações feitas nos triângulos abaixo nos permitem afirmar que $\triangle ABC$ é semelhante ao $\triangle MNP$. Qual é a relação de igualdade que podemos escrever entre as medidas x , y e z ? $\frac{x}{z} = \frac{y}{x} \Rightarrow x^2 = y \cdot z$



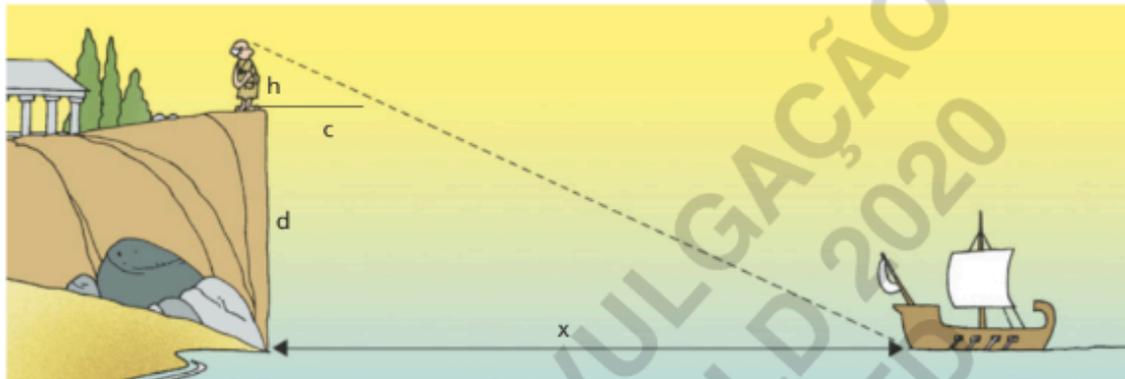
4. Observando a figura, notamos que $\triangle ABC$ é semelhante a $\triangle AED$ (\hat{A} é comum e $\hat{C} \cong \hat{D}$). Qual é o valor de x em função de a e b ? $x = ab$



5. Calcule a altura h de um prédio que lança uma sombra de 19,2 m no mesmo instante em que uma árvore de 8,4 m lança uma sombra de 5,6 m. 28,8 m

6. (FGV) Há muitas histórias escritas sobre o mais antigo matemático grego que conhecemos, Tales de Mileto. Não sabemos se elas são verdadeiras, porque foram escritas centenas de anos após sua morte. Uma delas fala do método usado por ele para medir a distância de um navio no mar em relação a um ponto na praia. Uma das versões diz que Tales colocou uma vara na posição horizontal sobre a ponta de um pequeno penhasco, de forma que sua extremidade coincidissem com a imagem do barco.

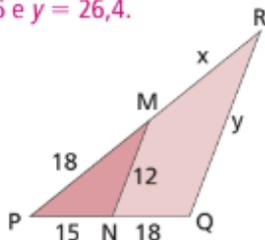
Conhecendo sua altura (h), o comprimento da vara (c) e a altura do penhasco (d), ele calculou a distância x em relação ao barco.



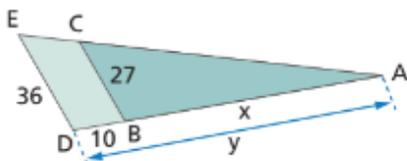
Descreva com suas palavras um método para calcular a distância x . Em seguida, determine a distância do navio à praia com estes dados: $h = 1,80$ m; $c = 0,75$ m; $d = 298,20$ m.
125 m

Responda às questões no caderno.

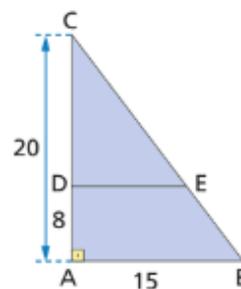
1. Sabendo que $\overline{MN} \parallel \overline{RQ}$, determine as medidas x e y indicadas na figura.
 $x = 21,6$ e $y = 26,4$.



2. Na figura, temos $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Nessas condições, determine as medidas x (\overline{AB}) e y (\overline{AD}). $x = 30$ e $y = 40$.



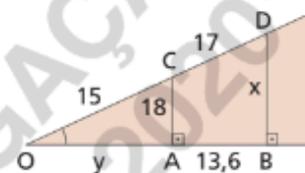
3. Observe o triângulo retângulo ABC. Sabendo que \overline{DE} é paralelo a \overline{AB} , calcule a área do trapézio ABED. 96



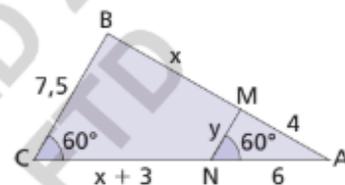
SAIBA QUE

A área do trapézio é dada por $S = \frac{AD \cdot (AB + DE)}{2}$

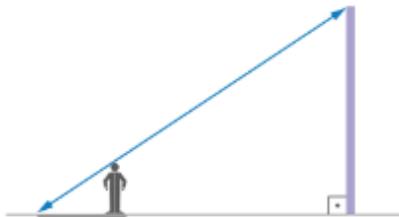
4. Observe a figura a seguir. Sabendo que \overline{AC} e \overline{BD} são perpendiculares a \overline{OB} , qual é o valor da razão $\frac{x}{y}$? Dê a resposta na forma de número decimal. 3,2



5. Sabendo que $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$, qual é o valor de $x + y$? 9

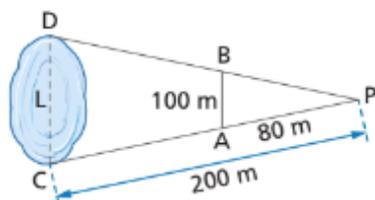


6. Uma pessoa está a 6,30 m da base de um poste, conforme nos mostra a figura.

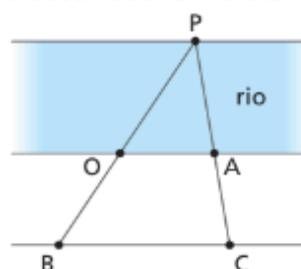


Sabendo que essa pessoa tem 1,80 m de altura e projeta uma sombra de 2,70 m de comprimento no solo, qual é a altura do poste?

- a) 4,80 m d) 6,4 m
 b) 6 m e) 8 m
 c) 4,50 m **Alternativa b.**
7. Para determinar a largura L de um lago, Paulo desenhou o esquema abaixo, em que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Que medida ele encontrou para a largura L do lago? **250 m**



8. Um observador, situado em um ponto O da margem de um rio, precisava determinar, sem atravessar o rio, sua distância até o ponto P , localizado na outra margem. Para isso, marcou com estacas outros pontos do lado da margem em que se encontrava, de tal forma que P , O e B ficaram alinhados entre si e P , A e C também. Sabendo que \overline{OA} é paralelo a \overline{BC} , $OA = 25$ m, $BC = 40$ m e $OB = 30$ m, qual é a distância, em metro, do observador em O até o ponto P ? **50 m**



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

9. (Mack-SP) No triângulo ABC da figura, o lado BC mede 4,5 e o lado do quadrado $DEFG$ mede 3.



A altura do triângulo ABC , em relação ao lado BC , mede:

- a) 7,5. c) 8,5.
 b) 8,0. d) 9,0.
 e) 9,5.

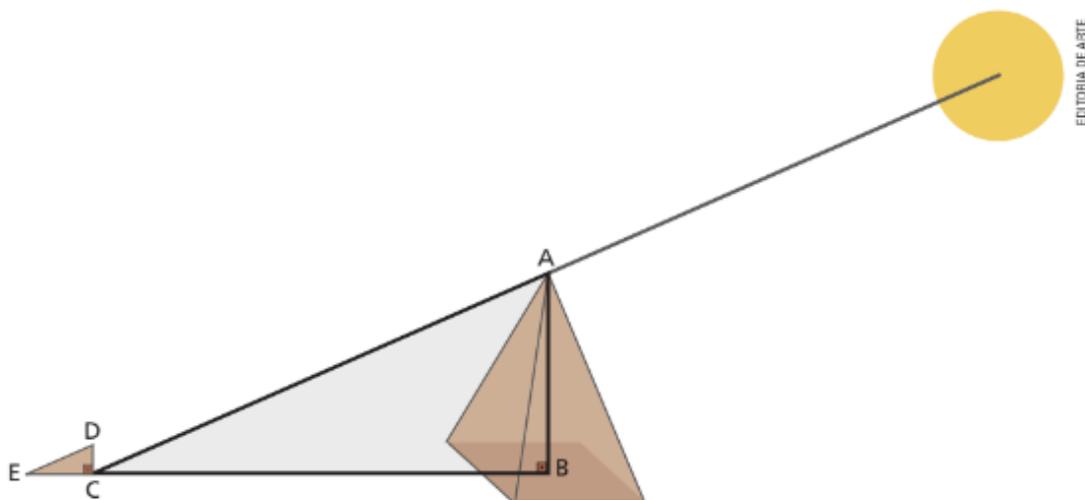
Alternativa d.

O Cálculo para as alturas das pirâmides

Vimos no início da unidade sobre o fato de Tales ter sido desafiado a medir a altura da pirâmide de Quéops e que o teria feito com o auxílio de um bastão. Mas como será que ele o fez?

Há duas versões conhecidas para essa história. De acordo com Hicrônimos, um discípulo de Aristóteles, Tales aproveitou o momento do dia em que a medida do comprimento da nossa sombra é igual à medida da nossa altura para medir o comprimento da sombra da pirâmide e, assim, determinar sua altura.

A segunda versão, de Plutarco, diz que Tales fincou uma vara vertical no extremo da sombra projetada pela pirâmide, formando no solo dois triângulos semelhantes, conforme podemos ver na imagem.



Por meio desse método ele pôde determinar a altura da pirâmide ao saber que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{CE}}, \text{ logo } \overline{AB} = \frac{\overline{DC} \cdot \overline{BC}}{\overline{CE}}.$$

Depois, basta medir o comprimento das duas sombras e da altura da vara para se determinar a altura da pirâmide.

Responda à questão no caderno.

1. A pirâmide de Quéops (também conhecida como a grande pirâmide) é a mais alta das pirâmides do Egito. Logo após a sua construção, ela tinha a altura equivalente a um prédio de 50 andares. Por isso, conhecer a altura da pirâmide não era uma tarefa fácil.

Vimos no texto que, de acordo com a segunda versão da história, Tales utilizou conceitos geométricos para descobrir a altura da pirâmide de Quéops.

Suponha que, em determinado momento do dia, a sombra de uma pessoa, com 1,80 m, era de 5,40 m e, neste mesmo momento, a sombra da pirâmide de Quéops era de 438 m. Com esses dados, calcule a altura da pirâmide. **146 m.**

Responda às questões no caderno.

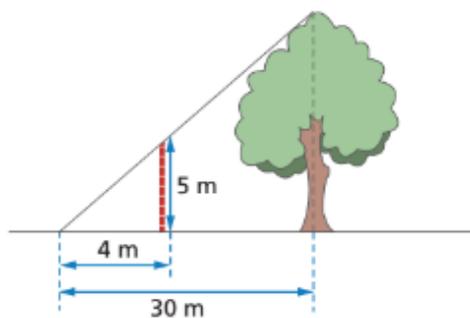
1. (Saresp) Um prédio projeta uma sombra de 40 m ao mesmo tempo em que um poste de 2 m projeta uma sombra de 5 m. Então, a altura do prédio é de:

a) 10 m. c) 14 m.
b) 12 m. d) 16 m.

2. Caio tem um carrinho de brinquedo que é uma miniatura do carro de seu pai. A razão entre o comprimento do carro do pai e o comprimento do carro de Caio é $\frac{14}{3}$. Se o carro de Caio tem 0,9 m de comprimento, qual é o comprimento do carro do pai de Caio? **Alternativa d.**

a) 4 m c) 4,5 m e) 3,6 m
b) 4,2 m d) 4,8 m

3. Para determinar a altura de uma árvore, utilizou-se o esquema a seguir.



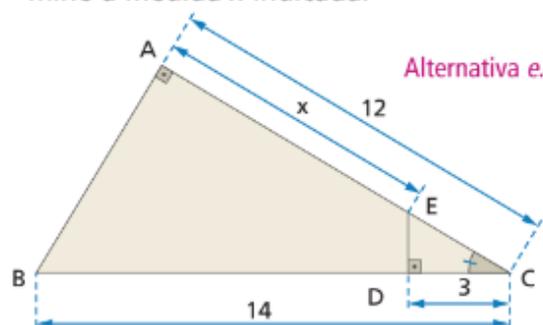
Nessas condições, qual é a altura da árvore? **Alternativa c.**

a) 35 m c) 37,5 m e) 40 m
b) 36 m d) 38,5 m

4. A porta de entrada e a fachada de uma casa são figuras retangulares semelhantes, e a razão de semelhança da altura da casa para a altura da porta é $\frac{5}{2}$. Se a altura da casa é 6,0 m, qual é a altura da porta? **Alternativa a.**

a) 2,4 m c) 3,2 m e) 1,8 m
b) 2,8 m d) 3,6 m

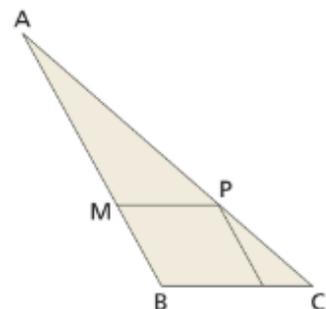
5. Considerando a figura abaixo, determine a medida x indicada.



a) 9,5 b) 10 c) 8,8 d) 8,6 e) 8,5

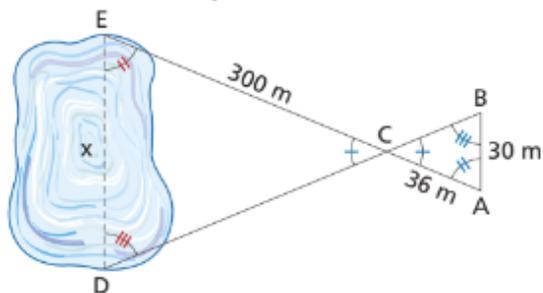
6. Vamos considerar que, na figura a seguir, a medida do lado AB seja 20 cm, a medida do lado BC seja 5 cm, e o quadrilátero BCMP represente um losango, cujo lado mede x cm.

Nessas condições, qual é o perímetro do losango, em centímetro?



a) 12 c) 20 e) 24
b) 16 d) 18 **Alternativa b.**

7. Para medir a largura x de um lago, foi utilizado o esquema abaixo.



Nessas condições, obteve-se $\triangle ABC \sim \triangle EDC$. Determine a largura x do lago.

a) 250 m c) 260 m e) 450 m
b) 400 m d) 360 m **Alternativa a.**

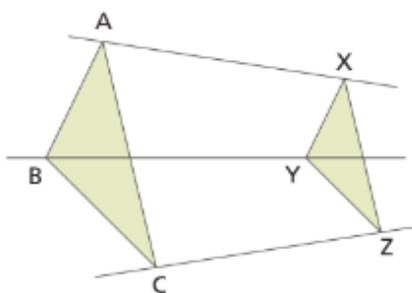
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

8. Que altura tem uma árvore que projeta uma sombra de 10 m no mesmo instante em que uma pessoa de 1,60 m de altura projeta uma sombra de 2,50 m?

- a) 6 m
b) 6,2 m
c) 6,4 m
d) 6,5 m
e) 7,2 m

Alternativa c.

9. Os triângulos ABC e XYZ, representados a seguir, são semelhantes. No triângulo ABC, temos $AB = 15$ cm, $BC = 18$ cm e $AC = 27$ cm.

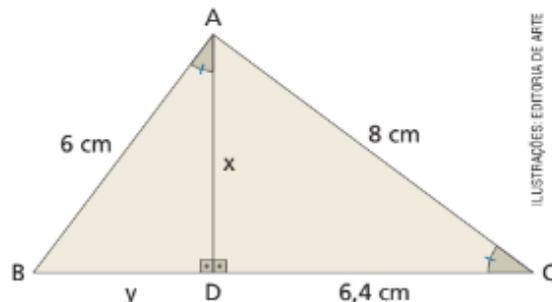


Se o perímetro do triângulo XYZ é 20 cm, qual é a medida do lado \overline{XZ} ?

- a) 5 cm d) 8 cm
b) 6 cm e) 9 cm
c) 7 cm

Alternativa e.

10. Na figura, a altura \overline{AD} divide o $\triangle ABC$ em dois outros triângulos semelhantes: $\triangle ABD$ e $\triangle CAD$.



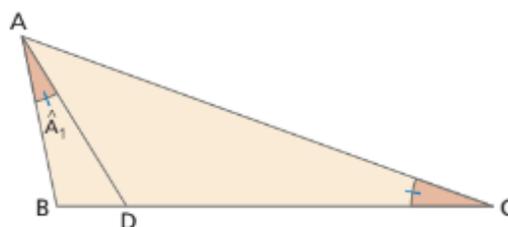
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Qual é o valor de $x + y$, em centímetro?

- a) 9,1 c) 8,4 e) 8,2
b) 8,8 d) 9,6

Alternativa c.

11. Na figura abaixo, vamos considerar que $AB = 4$ cm e $BC = 10$ cm.



Nessas condições, a medida do lado BD é:

- a) 0,9 cm c) 1,4 cm e) 1,8 cm
b) 1,2 cm d) 1,6 cm

Alternativa d.

Anexo B

PLANO DE AULA

COMPONENTE CURRICULAR: MATEMÁTICA

CONTEÚDO: Semelhança de Triângulos

DESCRIPTOR: EF09MA10; EF09MA12; EM13MAT308.

HABILIDADE(S) ASSOCIADA(S): Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal; Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes; Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

UNIDADE TEMÁTICA: Geometria

OBJETO DE CONHECIMENTO : Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal e semelhança de triângulos.

OBJETIVO DA AULA: Incentivar o ensino da astronomia e conceituar/compreender semelhança de triângulos.

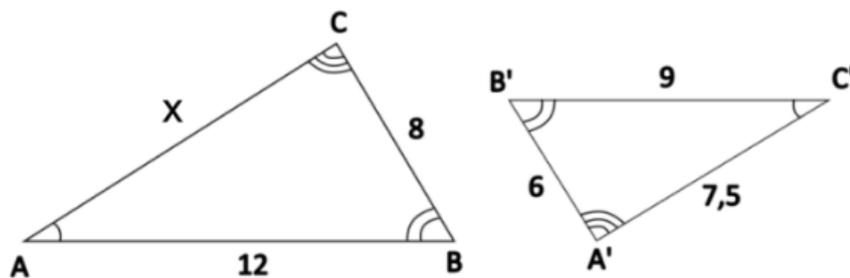
RETOMADA DO CONTEÚDO	TEMPOS PEDAGÓGICOS
<input type="checkbox"/> Revisão do conteúdo em estudo	<input type="checkbox"/> Acolhida <input type="checkbox"/> Organização da sala <input type="checkbox"/> Apresentar o objetivo da aula <input type="checkbox"/> Resolução comentada de questões <input type="checkbox"/> Exposição em slide
METODOLOGIA	
ABERTURA	<input type="checkbox"/> Acolhida: Diálogo. <input type="checkbox"/> Organização dos alunos em sala. <input type="checkbox"/> Apresentação do tema e objetivos.
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES	<input type="checkbox"/> Vivência com material concreto. <input type="checkbox"/> Desafios matemáticos. <input type="checkbox"/> Base histórica astronômica. <input type="checkbox"/> Conceituar semelhança de triângulos. <input type="checkbox"/> Exemplificação no quadro branco. <input type="checkbox"/> Atividade de classe. <input type="checkbox"/> Correção.
FECHAMENTO	<input type="checkbox"/> Realizar atendimentos individualizados aos alunos que não conseguiram realizar a atividade. <input type="checkbox"/> Recapitulação do conteúdo. <input type="checkbox"/> Feedback.
MATERIAL/RECURSOS/FERRAMENTA	
<input type="checkbox"/> Quadro branco, pincel e apagador. <input type="checkbox"/> Projetor e notebook. <input type="checkbox"/> Esferas (tamanhos diferentes). <input type="checkbox"/> Globo terrestre. <input type="checkbox"/> Atividade direcionada. <input type="checkbox"/> Atividade extra.	<input type="checkbox"/> Formulários online. <input type="checkbox"/> Vídeoconferência. <input type="checkbox"/> Vídeos. <input type="checkbox"/> Livro didático <input type="checkbox"/> Educador e educandos. <input type="checkbox"/> Outro

Visto do Professor (a)

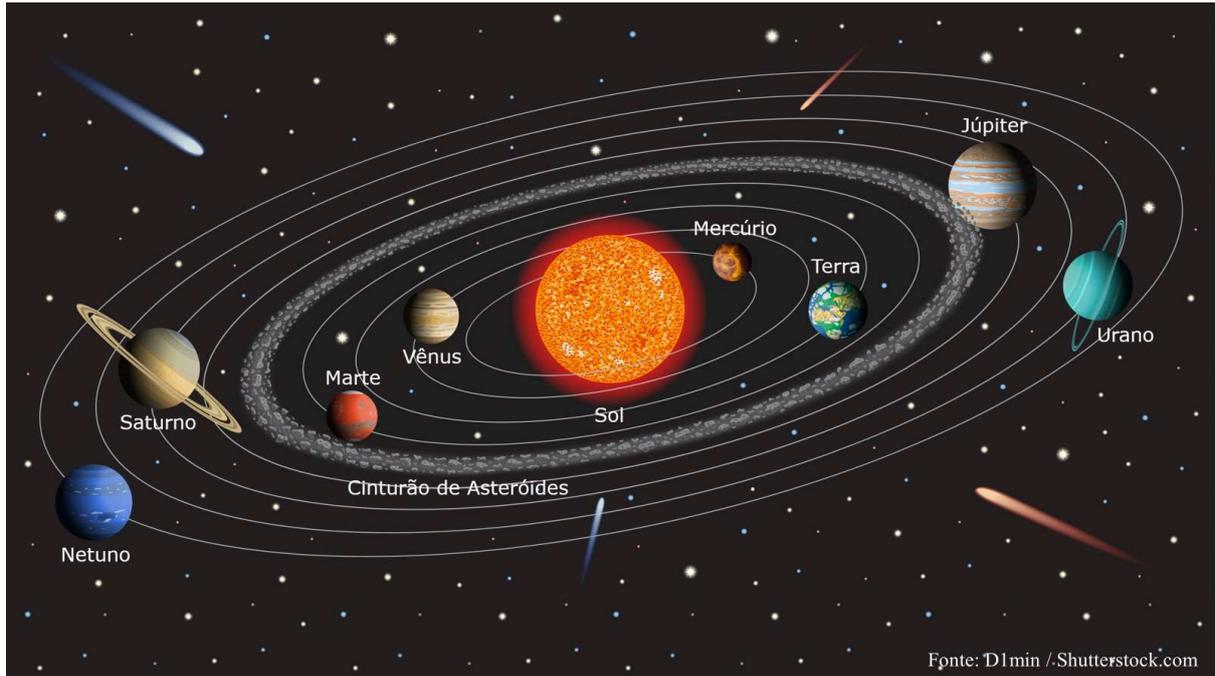
Visto do Coordenador(a)

Anexo C

- 1) O que é astronomia?
- 2) Quantos e quais são os movimentos da Terra?
- 3) Quantos dias a Lua leva para dar uma volta em torno da Terra?
- 4) Quais são os tipos de eclipses, e quantas vezes cada tipo ocorre durante o ano?
- 5) Quais são as fases da Lua?
- 6) Desconsiderando instrumentos modernos como lasers, GPS, Google, Chat Gpt, entre outros, seria possível calcular a largura de um rio sem atravessá-lo? Explique o porquê.
- 7) Ainda na situação da questão anterior, seria possível calcular a distância da Terra à Lua?
- 8) Podemos provar que a Terra tem formato semelhante a uma esfera sem tirar uma foto do espaço? Explique.
- 9) Como sabemos que a Terra gira em torno do Sol?
- 10) Você sabe quando dois triângulos são semelhantes?
- 11) Determine o valor de x sabendo que o par de triângulos são semelhantes.



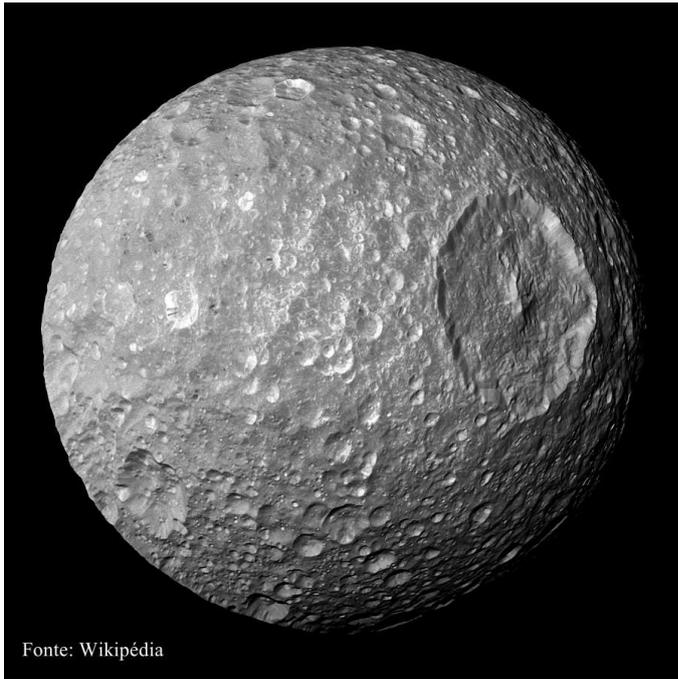
Anexo D



A grande mancha de leite (via láctea) pode ser vista a olho nu quando distante dos centros urbanos. Na imagem ao lado a captura por câmera fotográfica realça o brilho da grande mancha. Estima-se que a nossa galáxia possua de 200 a 400 bilhões de estrelas formando um disco com 100 mil anos-luz de diâmetro e 12 mil de espessura. O Sol se localiza a cerca de 26 mil anos-luz do centro da galáxia.

Fonte: Wikipédia

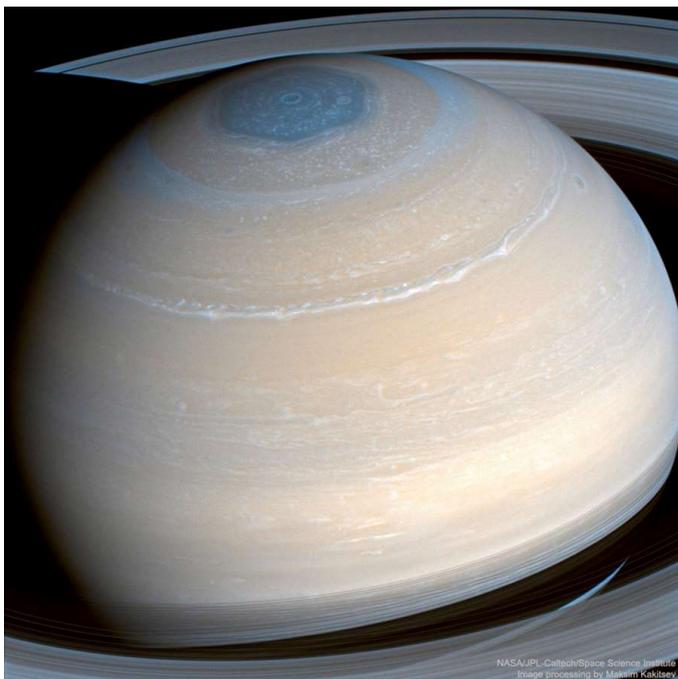




Fonte: Wikipédia

Mimas, também designado Saturno I, é um satélite natural de Saturno, que possui uma das maiores crateras das luas do Sistema Solar, chamada Herschel. A cratera Herschel mede 139 quilômetros de largura, cerca de um terço do diâmetro médio de Mimas (396,4 km) e acredita-se que tenha se formado em um evento de impacto com liberação de energia extrema. O nome da cratera deriva do descobridor de Mimas, William Herschel, em 1789.

Fonte: Wikipédia



NASA/JPL-Caltech/Space Science Institute
Image processing by Maxim Kikisey

Saturno é conhecido pelos seus anéis, mas o hexágono é um padrão de nuvens persistente em formato hexagonal em torno do polo norte de Saturno, localizado perto da latitude de 78°N. Os lados do hexágono têm cerca de 13 800 km de comprimento, o que é maior que o diâmetro da Terra (cerca de 12 700 km). Ele gira com um período de 10h 39m 24s, o mesmo período das emissões de rádio de Saturno a partir de seu interior. Ninguém sabe explicar o que causa o formato hexagonal da tempestade. “Universo simplesmente decidiu pôr um hexágono no polo norte de Saturno”.

Fonte: Wikipédia

Imagem do telescópio Chandra da Nebulosa Olho de Gato (NGC 6543). Dista 3000 anos-luz da Terra e possui mais de 0,5 ano-luz de diâmetro. Como vemos, a nebulosa está em volta onze bolhas de poeira cósmica que acredita-se que foram ejetadas da estrela em intervalos de 1500 anos. Em seu centro, encontra-se uma estrela anã branca que apesar de ser muito quente, não realiza fusão nuclear, ou seja, é uma estrela morta.

Fonte: Wikipédia



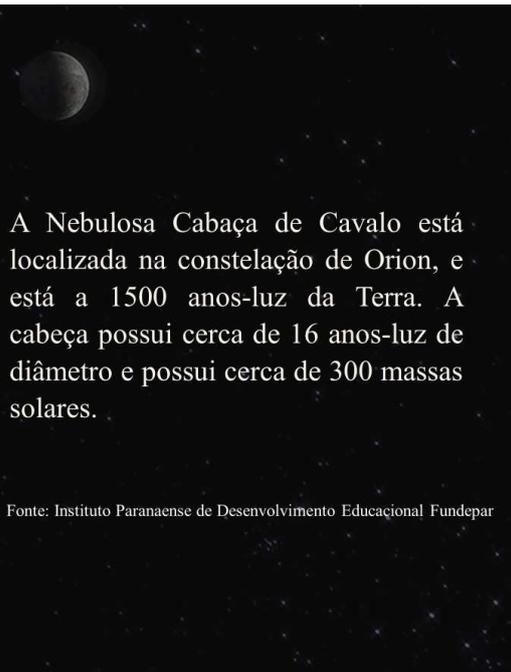
Fonte: Nasa

A Nebulosa do Anel (M57), fica a 2.300 anos-luz da Terra, na constelação de Lira. Está entre os mais notáveis exemplos de nebulosa planetária. Foi descoberta por Antoine Darquier de Pellepoix em 1779. Esse nome é porque seus gases parecem um anel ou as pétalas de uma rosa cósmica. É um toro de material brilhante expelido pela sua estrela central. A massa do material que compõe a nebulosa é de aproximadamente 0,2 massas solares, com uma densidade aproximada de 10 000 íons por cm^3 . A sua taxa de expansão aparente de 1 segundo de grau corresponde a uma velocidade de expansão entre 20 a 30 km/s. A nebulosa como um todo está se aproximando radialmente da Terra a uma velocidade de 21 km/s.

Fonte: Wikipédia



Fonte: Nasa



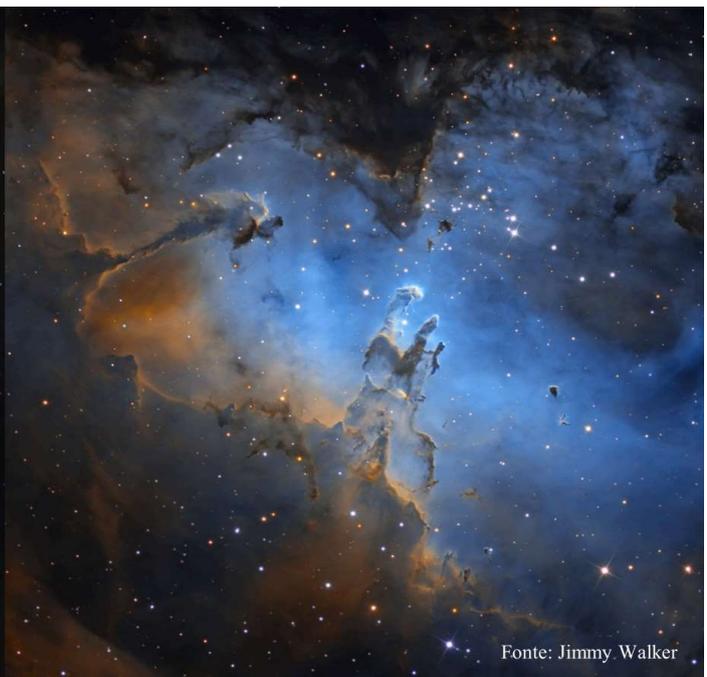
A Nebulosa Cabaça de Cavalo está localizada na constelação de Orion, e está a 1500 anos-luz da Terra. A cabeça possui cerca de 16 anos-luz de diâmetro e possui cerca de 300 massas solares.

Fonte: Instituto Paranaense de Desenvolvimento Educacional Fundepar



A Nebulosa da Águia (M16) é um aglomerado estelar jovem com apenas 2 milhões de anos de idade. Essa bela imagem magnificamente detalhada dessa região inclui as esculturas cósmicas que se tornaram famosas na icônica foto tomada pelo Hubble em 1995, capturando um close-up de parte do complexo de formação de estrelas. Descrita como “trompas de elefante” ou “pilares da criação”, essas densas colunas poeirentas que crescem próximas ao centro da imagem possuem comprimentos da ordem de anos-luz e estão se contraindo gravitacionalmente para formar estrelas.

Fonte: Amarante, ROC



Detalhe dos pilares da criação. Foto feita pelo satélite espacial Hubble na luz infravermelha, capaz de atravessar camadas de poeira. Tal vantagem desse espectro de luz é ser capaz de mostrar a formação de estrelas dentro de nuvens de gás e poeira.

Fonte: Wikipédia



Fonte: Nasa

Durante vários dias, o tempo estivera mormacento, inadvertidamente quente e nublado. Nessa noite, porém, o céu estava claro e brilhante. E quando Tycho olhou para o alto, foi tomado por uma surpresa ainda maior.

E “surpresa” é um eufemismo, sem dúvida. O que Tycho Brahe (1546-1601) avistou naquela noite, 11 de novembro de 1572, transformaria sua vida. Mais importante ainda, mudaria para sempre a nossa visão do firmamento e a compreensão da humanidade sobre o Universo.

Situada na constelação de Cassiopeia, o novo objeto brilhava com uma intensidade muito maior do que aquelas antigas estrelas. “Impressionado e como que estupefato e extasiado, fui conduzido a uma tal perplexidade pelo inacreditável da coisa, que comecei a duvidar da fé nos meus próprios olhos”, lembrou ele mais tarde.

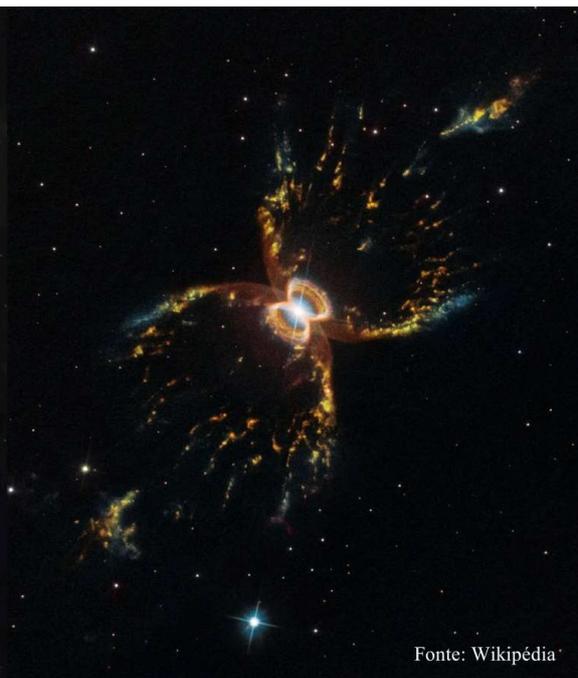
Fonte: Mafra, GS



Fonte: Nasa

A Nebulosa Caranguejo do Sul é uma nebulosa na constelação do Centaurus. A nebulosa está a vários milhares de anos-luz da Terra e sua estrela central é uma binária simbiótica constituída por uma variável Mira e uma anã branca. É assim denominada por sua semelhança com a nebulosa do Caranguejo, localizada no hemisfério celeste norte.

Fonte: Wikipédia



Fonte: Wikipédia

A galáxia Cartwheel é uma galáxia anular situada a cerca de 500 milhões de anos-luz da constelação do Escultor, no Hemisfério sul.

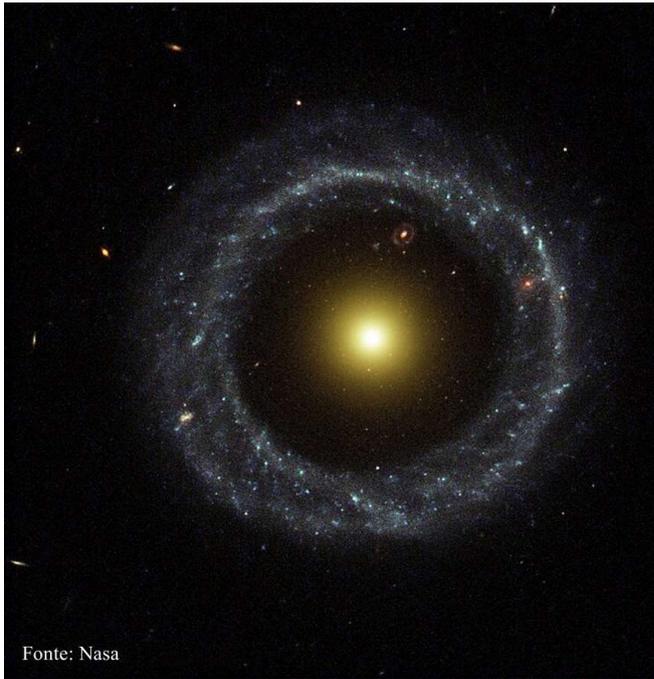
A sua forma de roda de carro é o resultado de uma violenta colisão galáctica que ocorreu há cerca de 200 milhões de anos na qual ela passou pelo coração de uma galáxia grande com forma de disco, e produziu uma gigantesca onda de choque, que propagou o gás circundante e a poeira da galáxia.

A galáxia Cartwheel está agora rodeada por um anel azul de 150 000 anos-luz de diâmetro, composto por estrelas jovens muito brilhantes.

Fonte: IVEPESP



Fonte: Nasa



Fonte: Nasa

Art Hoag julgou que a estrutura anelar deste objeto se assemelhava a uma nebulosa planetária, os restos brilhantes de uma estrela como o nosso Sol. Mas essa hipótese foi por ele descartada rapidamente, tendo sugerido que este objeto misterioso deveria de ser uma galáxia. Conhecida hoje por Objeto de Hoag, veio a confirmar-se, na década de 1970, que se tratava, de facto, de uma galáxia.

Situando-se a 600 milhões de anos-luz de distância na constelação da Serpente, esta galáxia tem cerca de 120 000 anos-luz de diâmetro, sendo ligeiramente maior que a Via Láctea. O anel azul é constituído por estrelas jovens de elevada massa, e contrasta com o núcleo central de estrelas velhas e vermelhas.

Fonte: Wikipédia



Fonte: Nasa

A galáxia do Sombreiro (Messier 104, NGC 4594), é uma galáxia espiral com núcleo brilhante rodeado por um disco achatado de material escuro, que fica a 28 milhões de anos-luz de distância.

Essa brilhante galáxia é conhecida como sombreiro devido a sua aparência característica que se assemelha a um chapéu, foi descoberta em 1781, pelo astrónomo Pierre Mechain.

A galáxia NGC 4594 possui uma magnitude aparente de +8,3, uma declinação de $-11^{\circ} 37' 23''$ e uma ascensão reta de 12 horas, 39 minutos e 59,4 segundos.

Fonte: Wikipédia



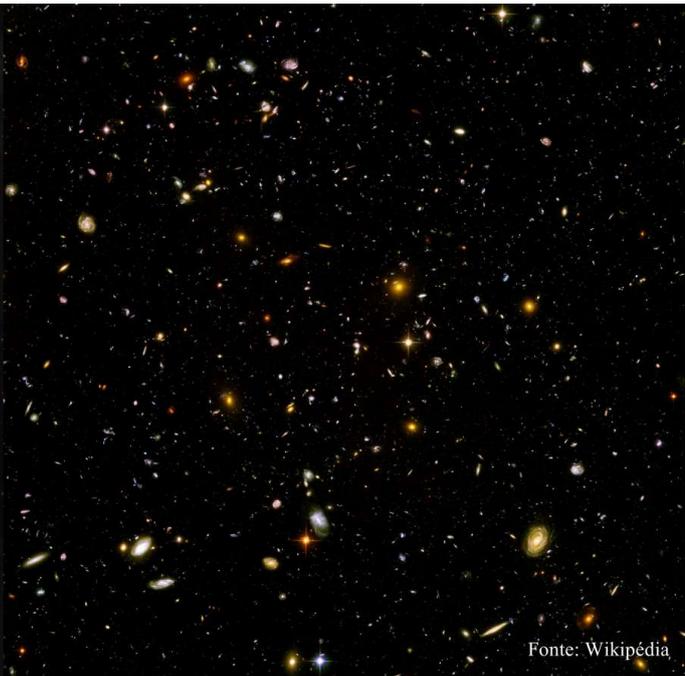
Fonte: Nasa

A aproximadamente 60 milhões de anos-luz de distância da Terra, na constelação de Corvus, duas grandes galáxias estão colidindo. As estrelas nas duas galáxias catalogadas como NGC 4038 e NGC 4039, raramente colidem, no decorrer dessa interação fenomenal que chega a durar centenas de milhões de anos. Mas as grandes nuvens de gás e poeira molecular das galáxias, se fundem constantemente, gerando grandes episódios de formação de estrelas perto do centro desse choque cósmico. Se espalhando por mais de 500 mil anos-luz, essa bela imagem revela também novos aglomerados de estrelas e matéria fluindo para longe da cena do acidente devido a forças de marés.

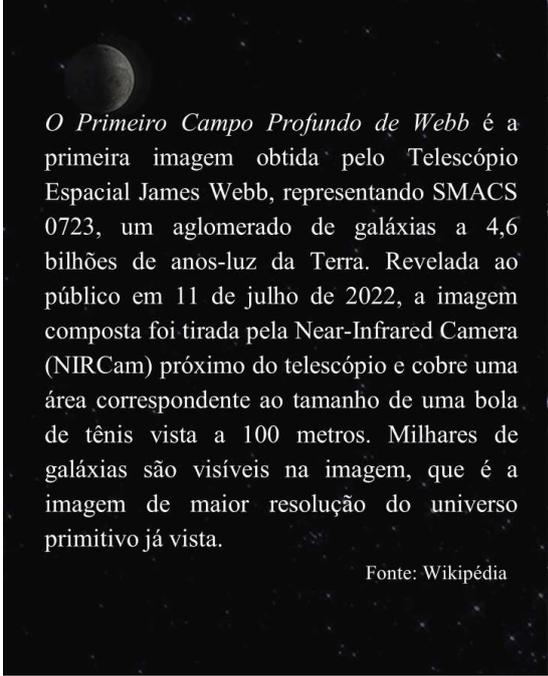
Fonte: IVEPESP

O *Hubble Ultra-Deep Field* ("Campo Ultra Profundo do Hubble"), ou HUDF, é uma imagem de uma pequena região do espaço, na constelação de Fornax, composta por dados do Telescópio Espacial Hubble no período de 3 de setembro de 2003 a 16 de janeiro de 2004. É a imagem mais profunda do universo tirada em luz visível, ilustrando o universo tal como ele era há 13 bilhões de anos atrás (cerca de 400-800 milhões de anos após o Big Bang). Na imagem do HUDF, estima-se que haja 10.000 objetos, dos quais a maioria são galáxias. A imagem cobre uma área de 11 arcominutos quadrados (200 x 200 arcosegundos). Isto é menor que um quadrado de papel de 1 mm² situado a um metro de distância, e igual a 0,000013 (treze milionésimos) da área total do céu.

Fonte: Wikipédia



Fonte: Wikipédia

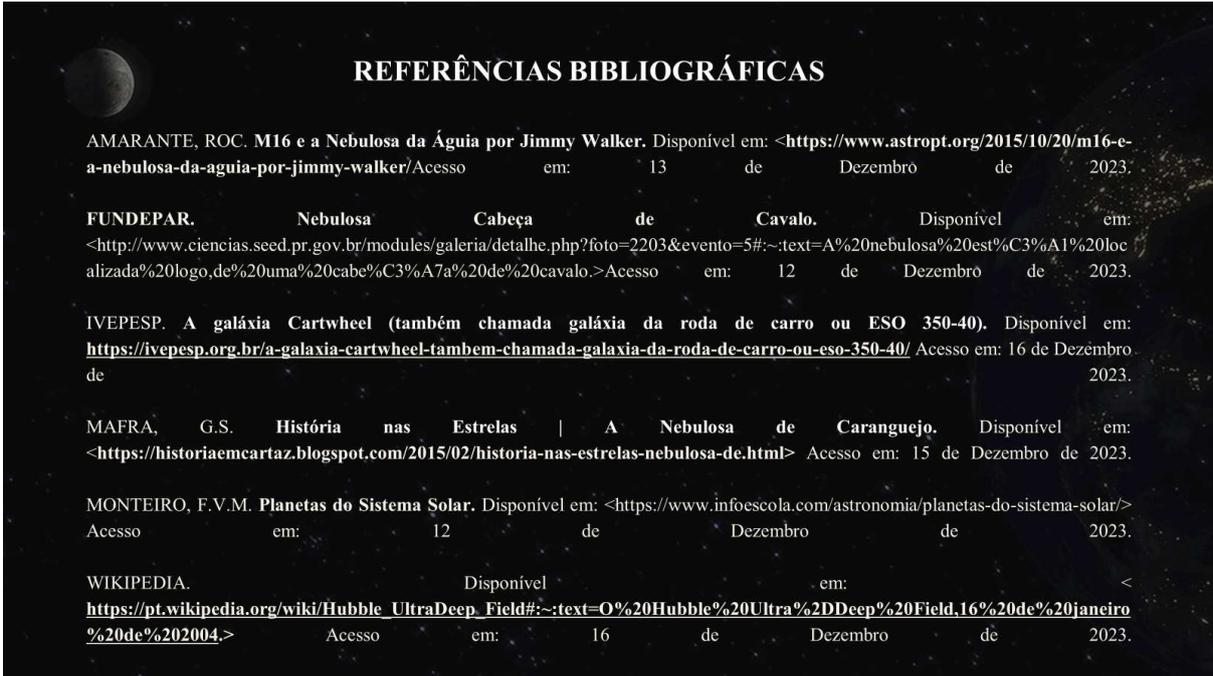


O Primeiro Campo Profundo de Webb é a primeira imagem obtida pelo Telescópio Espacial James Webb, representando SMACS 0723, um aglomerado de galáxias a 4,6 bilhões de anos-luz da Terra. Revelada ao público em 11 de julho de 2022, a imagem composta foi tirada pela Near-Infrared Camera (NIRCam) próximo do telescópio e cobre uma área correspondente ao tamanho de uma bola de tênis vista a 100 metros. Milhares de galáxias são visíveis na imagem, que é a imagem de maior resolução do universo primitivo já vista.

Fonte: Wikipédia



Fonte: Nasa



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMARANTE, ROC. **M16 e a Nebulosa da Águia por Jimmy Walker**. Disponível em: <<https://www.astropt.org/2015/10/20/m16-e-a-nebulosa-da-aguia-por-jimmy-walker/>> Acesso em: 13 de Dezembro de 2023.

FUNDEPAR. **Nebulosa Cabeça de Cavalo**. Disponível em: <<http://www.ciencias.seed.pr.gov.br/modules/galeria/detalhe.php?foto=2203&evento=5#:~:text=A%20nebulosa%20est%C3%A1%20localizada%20logo,de%20uma%20cabe%C3%A7a%20de%20cavalo.>> Acesso em: 12 de Dezembro de 2023.

IVEPESP. **A galáxia Cartwheel (também chamada galáxia da roda de carro ou ESO 350-40)**. Disponível em: <<https://ivepesp.org.br/a-galaxia-cartwheel-tambem-chamada-galaxia-da-roda-de-carro-ou-eso-350-40/>> Acesso em: 16 de Dezembro de 2023.

MAFRA, G.S. **História nas Estrelas | A Nebulosa de Caranguejo**. Disponível em: <<https://historiaemcartaz.blogspot.com/2015/02/historia-nas-estrelas-nebulosa-de.html>> Acesso em: 15 de Dezembro de 2023.

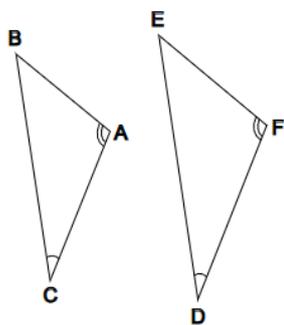
MONTEIRO, F.V.M. **Planetas do Sistema Solar**. Disponível em: <<https://www.infoescola.com/astronomia/planetas-do-sistema-solar/>> Acesso em: 12 de Dezembro de 2023.

WIKIPÉDIA. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Hubble_UltraDeep_Field#:~:text=O%20Hubble%20Ultra%2DDeep%20Field,16%20de%20janeiro%20de%202004.> Acesso em: 16 de Dezembro de 2023.

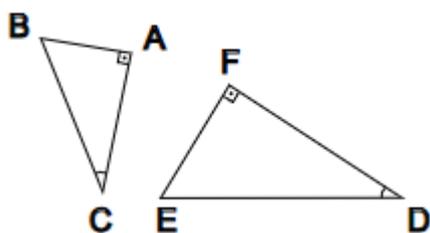
Anexo E - 1ª Lista de Exercícios: Semelhança de Triângulos

1) Em cada item, os pares de triângulos são semelhantes. Determine os lados homólogos em cada caso.

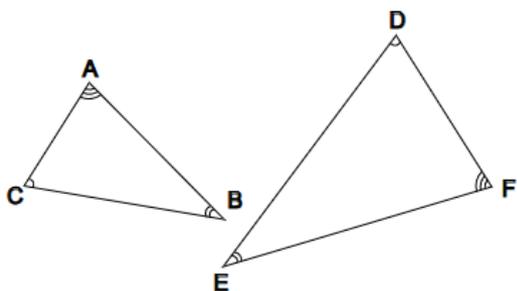
a)



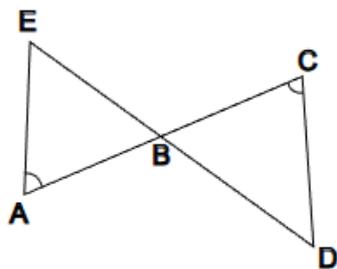
b)



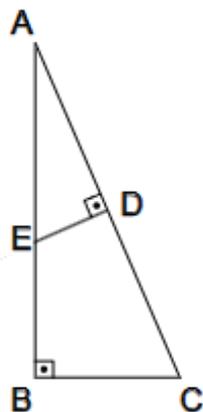
c)



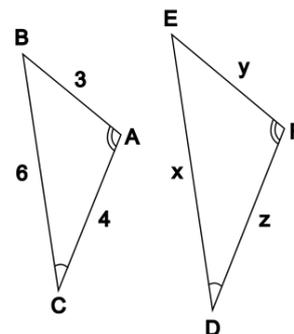
d)



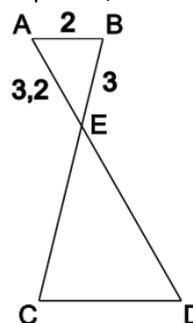
e)



2) Os triângulos abaixo são semelhantes. É possível determinar os valores x , y e z ? em caso positivo, determine-os.

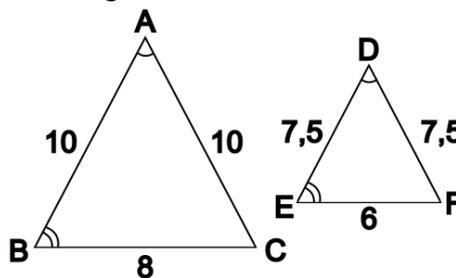


3) Sabendo que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, que A , E e D são colineares, bem como C , E e B , e que a razão de semelhança entre os triângulos ABE e CDE é 2,5, calcule as medidas que CE , CD e DE .

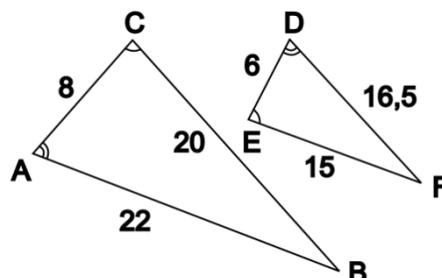


4) Determine a razão de semelhança em cada um dos pares de triângulos semelhantes.

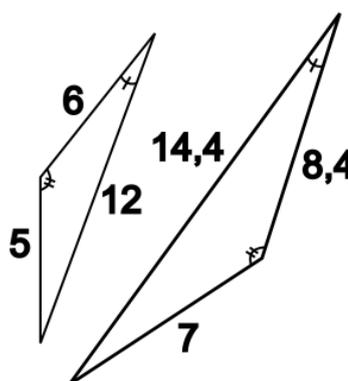
a)



b)

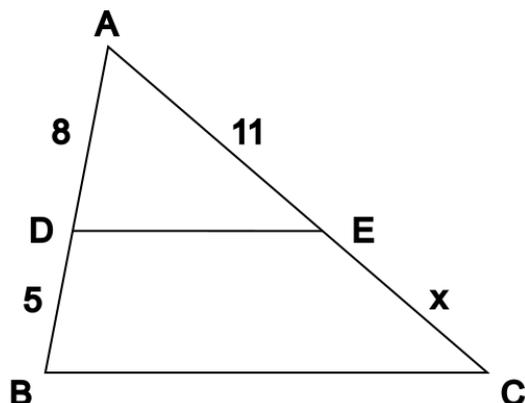


c)

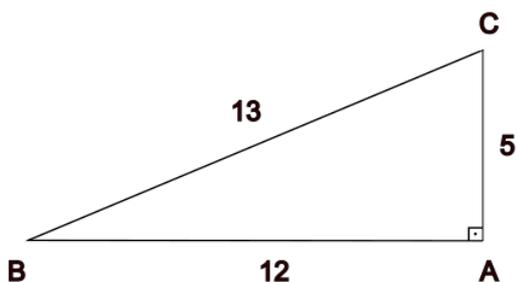


Anexo F - 2ª Lista de Exercícios: Semelhança de Triângulos

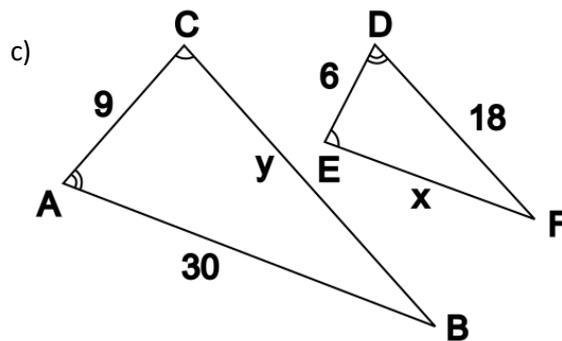
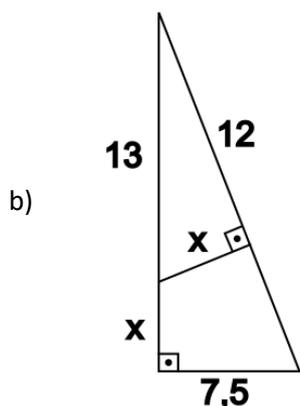
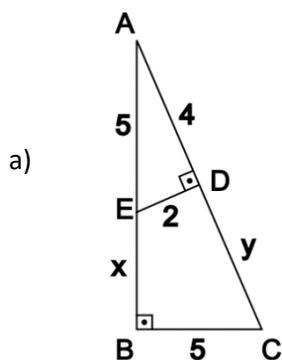
1) Sabendo que $DE \parallel BC$, determine x no triângulo ABC.



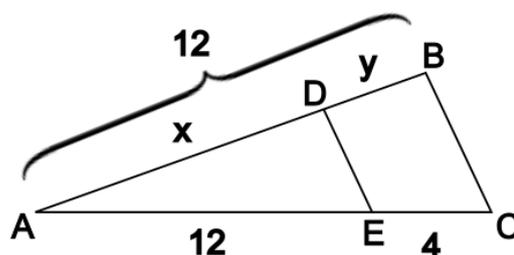
2) Com o auxílio de um transferidor, meça os ângulos internos do triângulo abaixo e use o caso de semelhança AA para construir um triângulo semelhante a este com razão de semelhança igual a 3.



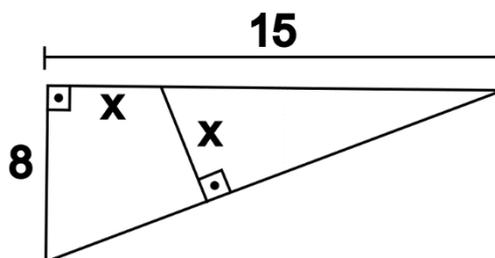
3) Determine o valor das incógnitas em cada um dos itens abaixo:



4) No triângulo ABC abaixo traça-se uma paralela \overline{DE} a \overline{BC} de modo que $EC = 4$. Determine os valores de x e y .

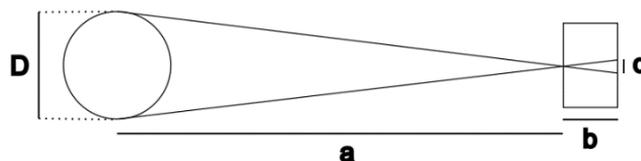


5) No triângulo retângulo abaixo, determine a medida x .



6) Abaixo podemos ver uma técnica empregada para o cálculo do diâmetro do Sol:

Mediante câmara escura de orifício (retângulo à direita), obtém-se uma imagem do Sol, conforme o esquema abaixo:



São dados:

distância do Sol à Terra – $a = 1,5 \cdot 10^{11}m$

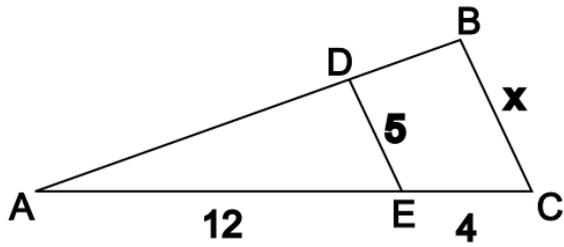
distância do orifício ao anteparo – $b = 1,0m$

diâmetro da imagem – $d = 9,0mm$

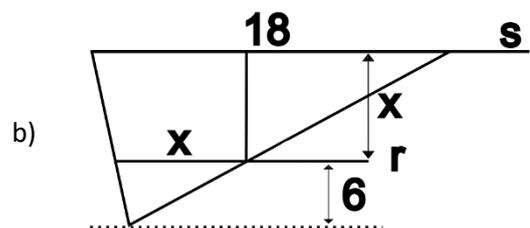
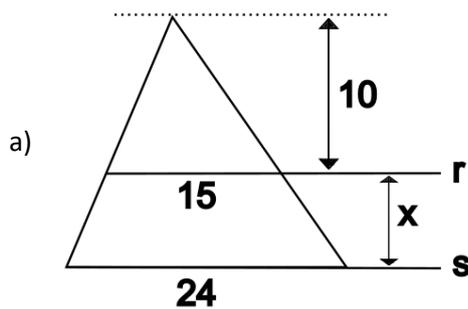
Determine o diâmetro D do Sol.

Anexo G - 3ª Lista de Exercícios: Semelhança de Triângulos

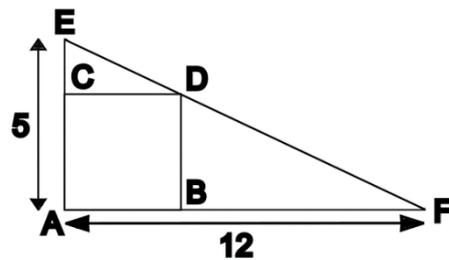
1) No triângulo ABC abaixo $\overline{DE} // \overline{BC}$.



2) Determine a medida x em cada item.

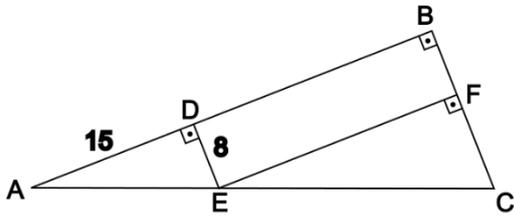


3) O triângulo AEF abaixo é retângulo e o quadrilátero ABCD é um quadrado. Determine a medida do lado do quadrado ABCD.

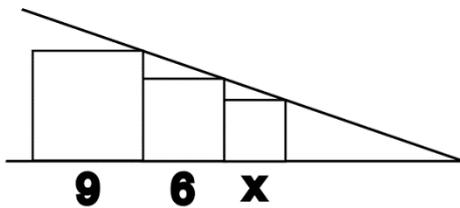


Anexo H - 4ª Lista de Exercícios: Semelhança de Triângulos

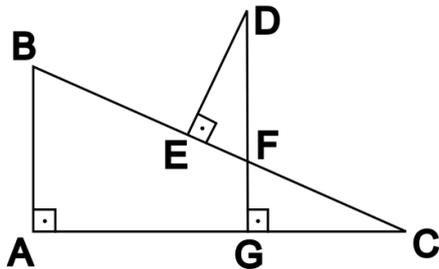
1) No triângulo ABC abaixo, \overline{BC} mede 20, e $BDEF$ é quadrilátero. Determine as medidas dos segmentos \overline{AE} , \overline{BD} , \overline{DE} , \overline{EF} , \overline{AC} , e \overline{FC} .



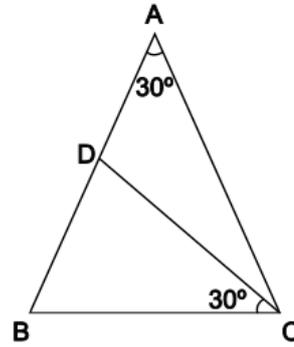
2) Na figura abaixo, considere os quadrados de lados medindo x , 6, e 9. Determine a medida x .



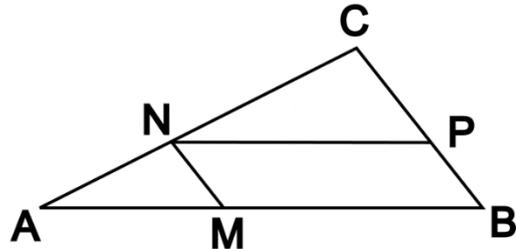
3) Na figura abaixo, as medidas dos lados \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{EF} são, respectivamente, 12, 9, 15 e 4. Determine a soma das medidas dos segmentos \overline{DE} e \overline{DF} .



4) No triângulo ABC a seguir, $AB = AC$ e $CD = 8m$. Determine a medida de \overline{BC} .



5) Na figura, $\overline{NP} \parallel \overline{AB}$ e $\overline{MN} \parallel \overline{CB}$. Se $MN = 2$, $NP = 6$ e $CB = 5$, determine a medida do segmento \overline{AM} .



6) Na figura abaixo, $CV = 2FV$, $FV = f$, $OV = p$ e $IV = p'$. Prove que $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$.

