UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

CARLOS ÁTILA RODRIGUES DE SENA

SEQUÊNCIA DE FIBONACCI: PROPRIEDADES, APLICAÇÕES E CURIOSIDADES.

FORTALEZA – CEARÁ
2013

CARLOS ÁTILA RODRIGUES DE SENA

SEQUÊNCIA DE FIBONACCI: PROPRIEDADES, APLICAÇÕES E CURIOSIDADES.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do centro de ciências e tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Profº. Drº. João Montenegro de Miranda.

FORTALEZA – CEARÁ
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Biblioteca Central Prof. Antônio Martins Filho
Bibliotecário (a) Leila Cavalcante Sátiro – CRB-3 / 544

S474s Sena, Carlos Átila Rodrigues de.
Sequência de Fibonacci: propriedades, aplicações e curiosidades/Carlos Átila Rodrigues de Sena. — 2013.
CD-ROM 55f. : il. (algumas color.) ; 4 ¾ pol.

"CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico, acondicionado em caixa de DVD Slin (19 x 14 cm x 7 mm)".
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional, Fortaleza, 2013.
Área de Concentração: Matemática.
Orientação: Prof. Dr. João Montenegro de Miranda.

1. Sequência de Fibonacci. 2. Sequência numérica. 3. Número de ouro I. Título.

CDD: 510

CARLOS ÁTILA RODRIGUES DE SENA

SEQUÊNCIA DE FIBONACCI: PROPRIEDADES, APLICAÇÕES E CURIOSIDADES.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do centro de ciências e tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 29 / 8 / 2013.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João Montenegro de Miranda (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes
Universidade Federal do Ceará - UFC

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará - UFC

Dedico a realização desse trabalho aos meus pais, João de Sena e Maria Auxiliadora, também a minha esposa Jady Ellen.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Jeová Deus, por ter me amparado em todos os momentos da minha vida, me ajudando e me orientando para os melhores caminhos.

Aos meus amados pais João de Sena e Maria Auxiliadora, que tantas vezes me apoiaram para seguir em frente, que tanto contribuíram com a minha formação, se fazendo presentes em todos os momentos e vibrando pelo meu sucesso. Obrigado por tudo. Amo vocês!

A minha amada esposa Jady Ellen, pelo carinho, apoio e compreensão, dados em todos os momentos e pela grande contribuição para a concretização dessa trajetória.Obrigado por tudo. Eu te amo!

Ao meu orientador, professor Drº. João Montenegro de Miranda, pela paciência, atenção e dedicação oferecidas durante a construção deste trabalho. Muito obrigado, pelo amparo em todos os momentos!

Aos meus professores do curso, pelos esforços para que tudo fosse realmente de grande valor e proveito. Muito obrigado, pelo incentivo em todos os momentos!

Aos colegas de curso, pela sincera amizade nos momentos mais difíceis e grande contribuição para a concretização deste trabalho. Vocês são muito especiais!

Aos meus grandes amigos, familiares e a todas as pessoas que contribuíram para a concretização desta vitória. Muito obrigado!

À CAPES pela bolsa de estudo, que teve uma fundamental importância.

“O ser humano vivencia a si mesmo, seus pensamentos como algo separado do resto do universo - numa espécie de ilusão de ótica de sua consciência. E essa ilusão é uma espécie de prisão que nos restringe a nossos desejos pessoais, conceitos e ao afeto por pessoas mais próximas. Nossa principal tarefa é a de nos livrarmos dessa prisão, ampliando o nosso círculo de compaixão, para que ele abranja todos os seres vivos e toda a natureza em sua beleza. Ninguém conseguirá alcançar completamente esse objetivo, mas lutar pela sua realização já é por si só parte de nossa liberação e o alicerce de nossa segurança interior.”

Albert Einstein

RESUMO

Neste trabalho sobre a importante sequência de Fibonacci temos diversas propriedades com suas demonstrações e exemplos.
Apresentamos aplicações da sequência de Fibonacci em várias áreas, além de essas aplicações ajudarem a despertar o interesse dos alunos, também influencia no modo como eles veem o assunto estudado.
Porém, antes de considerar os tópicos principais do trabalho, temos uma breve abordagem sobre sequências numéricas que facilitará a compreensão das demais ideias.
O último capítulo abrange algumas sugestões de como trabalhar com a sequência de Fibonacci no ensino básico e também inclui a resolução de algumas questões de olimpíada de Matemática que envolvem a sequência de Fibonacci.
Esse trabalho tem como um dos objetivos ajudar aos alunos a explorarem a sequência de Fibonacci de uma forma que seja interessante.
Também são apresentadas novas propriedades e curiosidades sobre os elementos da sequência de Fibonacci, mencionam-se aplicações interessantes dessa sequência que ainda são pouco conhecidas.

Palavras-chave: Sequência de Fibonacci. Sequência numérica. Número de ouro.

ABSTRACT

In this work on the Fibonacci sequence we have several important properties with their demonstrations and examples.
We present applications of the Fibonacci sequence in several areas, and these applications help arouse the interest of students and also influence the way they view the studied subject.
However, before considering the main themes of the work, we have a brief discussion of numerical sequences that will facilitate understanding of other ideias. The last chapter has some suggestions on how to work with the Fibonacci sequence in primary and also includes the resolution some issues Mathematical Olympiad. This work has as an objective to help students explore the Fibonacci sequence in a gradual manner and at the same time be of interest.
It also presents new properties and curiosities about the elements of the Fibonacci sequence, is mentioned interesting applications of this sequence, which are still poorly known.

Keywords: Fibonacci sequence. Numerical sequence. Golden number

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

Sumário

INTRODUÇÃO

É possível observar sequências numéricas em diversas situações do nosso cotidiano, como no simples ato de contar e também em áreas específicas. Entre as sequências numéricas, existem algumas especiais, com várias propriedades e aplicações, como as progressões aritméticas (P.A.), progressões geométricas (P.G.) e especificamente podemos citar a importante sequência de Fibonacci; essa última será objeto de estudo desse trabalho.

Dentre os tipos de sequências numéricas existentes, a sequência de Fibonacci merece um destaque especial por conta de sua aplicabilidade, propriedades e de suas curiosidades. Veremos mais a frente informações sobre essa sequência; antes vejamos um relato histórico sobre Fibonacci.

Leonardo Pisano Bogollo, Leonardo de Pisa, Leonardo Pisano, Leonardo Bonacci, Leonardo Fibonacci ou simplesmente Fibonacci foi um matemático italiano da cidade de Pisa, ele é considerado o primeiro grande matemático europeu depois da decadência helênica e o mais talentoso matemático ocidental da idade média. Ficou conhecido como Fibonacci, devido ao fato de Fibonacci ser um diminutivo de fillius Bonacci, que provavelmente significava filho de Bonacci.

Figura: 1 (Localização da cidade de Pisa – Itália)

Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm41/quemefib.htm

Fibonacci nasceu aproximadamente no ano de 1170 e faleceu provavelmente no ano de 1250. Fibonacci foi enterrado em um cemitério em Pisa, perto da Catedral. No fundo desse cemitério, encontra-se uma estátua de Fibonacci.

Figura: 2 (Estátua de Fibonacci no cemitério de Pisa)

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Leonardo_da_Pisa.jpg

O pai de Fibonacci, Bonacci, era um comerciante que fazia várias viagens e Fibonacci o acompanhava para lhe ajudar e por isso ele teve contato com diversos tipos de culturas e lhe chamava a atenção os diferentes métodos utilizados para se fazer cálculos; ele conseguiu perceber as grandes vantagens de se trabalhar com o sistema indo - arábico, que é o sistema decimal usado por nós hoje em dia.

Porém, a utilização do novo sistema de numeração não teve uma rápida aceitação na Europa que durante séculos só usava os algarismos romanos para seus registros e cálculos, também por desconfianças e por falta de conhecimento sobre o sistema de numeração indo-arábico; com o tempo o mundo europeu teve que se render a indiscutível praticidade e as vantagens de se usar o sistema de numeração divulgado por Fibonacci.

Figura: 3 (Fibonacci)

Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm41/quemefib.htm

Fibonacci contribuiu para essa difusão do sistema de numeração indo-arábico por meio do livro "Liber Abaci", livro de Ábaco ou livro de Cálculo. Esse livro foi publicado no ano de 1202 (quando Fibonacci tinha 32 anos), além de iniciar na Europa o entendimento dos algarismos indo – arábicos o livro traz problemas envolvendo álgebra, geometria e importantes problemas sobre juros.

Fibonacci sugeriu um problema que ficou conhecido como o problema dos coelhos; o problema menciona um casal de coelhos dentro de um cercado; pergunta - se quantos pares de coelhos serão gerados em um ano, sendo que esses coelhos geram um novo casal a cada mês, leva-se em conta também que os novos casais se tornam férteis a partir do segundo mês de vida. O resultado desse problema analisado mês a mês resulta justamente na sequência numérica que recebeu o nome de sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610,...; essa sequência foi denominada de sequência de Fibonacci pelo matemático Francês Edouard Lucas no século XIX.

A fama de Fibonacci e de sua sequência não é à toa, com séculos de estudos temos hoje várias propriedades e relações entre os termos dessa sequência; muito importante também são as várias aplicações que encontramos e as comprovações da existência dessa sequência numérica na natureza.

No primeiro capítulo temos uma definição de sequências numéricas e alguns exemplos; no segundo capítulo veremos como a sequência de Fibonacci pode ser definida, também algumas propriedades e relações. No terceiro capítulo observaremos algumas aplicações e curiosidades e no último capítulo veremos algumas sugestões de como se trabalhar com a sequência de Fibonacci no ensino básico.

1 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Existem várias situações em que precisamos trabalhar com sequências de números. Vejamos um exemplo: um estacionamento cobra o valor de R$ 5,00 na primeira hora, e da segunda hora em diante o valor cobrado é de R$ 3,00 a cada hora que o veículo permanecer no estacionamento. Nesse exemplo é fácil notar a sequência numérica que resulta quando calculamos o total a ser pago de acordo com a quantidade de horas, teremos: {5, 8, 11, 14, 17,...}, nesse caso o uso de reticências indica que a sequência pode continuar.

Esse exemplo traz um tipo especial de sequência numérica que é denominada de progressão aritmética (P.A.), nesse tipo de sequência numérica um termo somado a um determinado valor fixo, chamado de razão da (P.A.), nos indicará o valor do termo seguinte da sequência. No exemplo mencionado vemos que os valores vão aumentando sempre de três em três unidades, ou seja, a razão dessa (P.A.) é 3. Temos uma infinidade de situações em que aparecem sequências numéricas que são progressões aritméticas. Vejamos outros exemplos de progressões aritméticas:

a) {-20, -10, 0, 10, 20,...}   b) {40, 37, 34, 31, 28,...}

No exemplo a) temos uma (P.A.) de razão 10, e no exemplo b) temos uma (P.A.) de razão (- 3); podemos perceber que na (P.A.) de razão positiva os valores da sequência numérica vão aumentando; esse é um exemplo de uma sequência numérica crescente, e no exemplo b) temos uma (P.A.) de razão negativa onde os valores da sequência numérica estão diminuindo; esse é um exemplo de uma sequência numérica decrescente.

Outra sequência numérica importante é a progressão geométrica (P.G.), vejamos um exemplo desse tipo de sequência numérica: um jovem deposita R$ 20.000,00 em uma conta poupança que lhe rende 1% ao mês de juros, sabendo que não foi feita nenhuma retirada durante cinco meses, qual será o valor na conta desse jovem no dia do depósito e nos cinco meses seguintes? O valor inicial é de R$ 20.000,00, para informar o valor total a cada mês basta multiplicar o capital por (1+i), sendo i a taxa informada, ou seja, basta multiplicar o capital de um mês por 1,01, pois, nesse exemplo a taxa é de 1% = 0,01; então teremos: {20.000; 20.200; 20.402; 20.606,02; 20.812,08; 21.020,20}, nas progressões geométricas um termo multiplicado por um valor fixo chamado de razão da (P.G.), nos dará o termo seguinte, no exemplo citado a razão tem valor 1,01. Vemos que nesse exemplo existe uma quantidade limitada de termos, essa sequência numérica é chamada de sequência numérica finita, os exemplos anteriores são sequências numéricas com uma quantidade ilimitada de termos, chamadas de sequências numéricas infinitas. Vejamos outros exemplos de progressões geométricas:

a) {80; 40; 20; 10; 5; 2,5;...}   b) {8, -8, 8, -8, 8,...}

No exemplo a) temos uma (P.G.) de razão $\frac{1}{2}$, e uma sequência numérica decrescente, no exemplo b) temos uma (P.G.) de razão -1; vemos que nesse caso os valores estão alternando entre positivos e negativos, sendo assim a sequência não é crescente e nem decrescente, essa sequência é chamada de alternada. Vejamos uma definição formal de sequências numéricas:

Lima [19] denomina sequência como uma função, sendo o domínio o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$. Na maioria dos casos temos sequências de números reais, ou seja, funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$.

Ainda segundo Lima [19], a notação usual para uma sequência é $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$, outras representações que podem ser usadas são: $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ou $\{x_n\}$, ou seja, a sequência de números (reais) é uma função que faz corresponder a cada número natural n o número (real) x_n, que é chamado de n - ésimo termo da sequência.

Agora vejamos mais alguns exemplos de sequências numéricas:

$$a)\{(-2)^n\}_{n\geq 1} = \{-2, 4, -8, 16, ...\}$$

$$b)\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n\geq 1} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...\right\}$$

$$c)\left\{\frac{n^2}{2^n}\right\}_{n\geq 1} = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, ...\right\}$$

Vemos nesses exemplos sequências numéricas representadas por um termo geral e as mesmas sequências representadas também pela citação dos primeiros elementos.

Também podemos representar uma sequência numérica por meio de recorrência, isso se dá quando o elemento seguinte de uma sequência é determinado de acordo com o elemento anterior ou através de alguns dos elementos anteriores utilizando também uma lei de recorrência.

Observe alguns exemplos:

a) $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $\forall n > 2$

b) $a_1 = 2$, $a_n = 3.a_{n-1} + 4$, $\forall n > 1$

c) $a_1 = 5$, $a_n = a_{n-1} - 3$, $\forall n > 1$

As sequências dos exemplos anteriores podem ser escritas do seguinte modo:

$$a)\{1,1,2,3,5,8,13,...\} \quad b)\{2,10,34,106,322,970,...\} \quad c)\{5,2,-1,-4,-7,-10,...\}$$

Existem muitos outros pontos relevantes que podem ser comentados sobre os vários tipos de sequências numéricas, mas esse trabalho tem como foco principal trabalhar especificamente com a sequência de Fibonacci. No capítulo seguinte vamos analisar algumas das várias propriedades e relações existentes entre os elementos da sequência de Fibonacci, suas respectivas demonstrações e exemplos.

2 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI: DEFINIÇÃO, RELAÇÕES E PROPRIEDADES.

Para começarmos a analisar as propriedades da sequência de Fibonacci vejamos inicialmente a sua definição:

$$a_1 = a_2 = 1\,,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\,,\ \forall n > 2$$

Ou seja, os dois primeiros termos da sequência são iguais a 1 e os demais termos são calculados a partir da soma dos dois termos anteriores, desse modo os primeiros termos da sequência de Fibonacci são: (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...). Dizemos que essa sequência é determinada por uma lei de recorrência.

Alguns autores trabalham com a sequência de Fibonacci começando com o zero, teríamos: (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...). Com relação à nomenclatura, os elementos da sequência de Fibonacci são chamados de números de Fibonacci.

Antes de observarmos as propriedades, vamos comentar brevemente sobre o número de ouro, chamado também de razão áurea. Esse número tem uma relação direta com a sequência de Fibonacci e aparecerá em algumas propriedades ou aplicações que veremos posteriormente.

Ao dividirmos cada número da sequência de Fibonacci, exceto o primeiro, pelo seu anterior, vamos perceber que acontecerá algo curioso, os resultados dessas divisões se tornarão cada vez mais próximos de um valor: 1,6180339887..., esse número irracional foi denominado de número de ouro, frequentemente representado pela letra grega φ (phi).

A tabela seguinte mostra esse procedimento sendo feito para os onze primeiros números da sequência de Fibonacci, mesmo sendo poucas divisões, já é possível perceber a tendência que essas razões tem para se aproximarem do número φ.

Tabela 1: (Divisões de um número da sequência de Fibonacci por seu antecessor)

Divisão	Resultado	Divisão	Resultado
$\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{1}$	1	$\frac{a_7}{a_6}=\frac{13}{8}$	1,625
$\frac{a_3}{a_2}=\frac{2}{1}$	2	$\frac{a_8}{a_7}=\frac{21}{13}$	1,615384...
$\frac{a_4}{a_3}=\frac{3}{2}$	1,5	$\frac{a_9}{a_8}=\frac{34}{21}$	1,619047...
$\frac{a_5}{a_4}=\frac{5}{3}$	1,666666...	$\frac{a_{10}}{a_9}=\frac{55}{34}$	1,617647...
$\frac{a_6}{a_5}=\frac{8}{5}$	1,6	$\frac{a_{11}}{a_{10}}=\frac{89}{55}$	1,618181...

Esse procedimento relaciona o número de ouro com a sequência de Fibonacci. Vamos observar como chegar a esse valor em um contexto de geometria: Euclides usando a razão extrema e média encontrou esse mesmo número, isso em 300 a.C.

Dado um segmento de reta com os pontos A e B nos extremos e o ponto C entre os extremos de modo que:

, $AB > AC > CB$

A razão extrema e média será: $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{CB}$, consideremos que: $AC = x$ e $CB = 1$, desse modo temos: $\frac{x+1}{x}=\frac{x}{1}$, ou seja, $x^2 - x - 1 = 0$, ao calcularmos as raízes dessa equação polinomial do segundo grau, teremos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.1.(-1) = 1 + 4 = 5 \text{, e:}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2.1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como o contexto é sobre medidas, não faz sentido trabalharmos com valores negativos, sendo assim temos: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,618033987...$.

Vejamos agora algumas propriedades da sequência de Fibonacci:

2.1. Relação entre três números de Fibonacci consecutivos.

Temos a seguinte propriedade: $(a_{n+1})^2 = a_n.a_{n+2} + (-1)^n$, para n > 0.

Para demonstrar essa propriedade vamos usar indução finita sobre n.

i) Vamos verificar que a afirmação é verdadeira para n = 1,

$$(a_{1+1})^2 = a_1.a_{1+2} + (-1)^1,$$

$$1 = 1^2 = (a_2)^2 = a_1.a_3 - 1 = 1.2 - 1 = 1$$

ii) Vamos considerar como hipótese de indução que:

$$(a_{k+1})^2 = a_k.a_{k+2} + (-1)^k \text{, para k > 0.}$$

iii) Vamos mostrar que a propriedade será válida para: n = k + 1.

$$(a_{k+2})^2 = a_{k+2}.a_{k+2} = a_{k+2}.(a_{k+1} + a_k) =$$

$$a_{k+1}.a_{k+2} + a_k.a_{k+2} = a_{k+1}.a_{k+2} + (a_{k+1})^2 - (-1)^k =$$

$$a_{k+1}.(a_{k+2} + a_{k+1}) + (-1).(-1)^k = a_{k+1}.a_{k+3} + (-1)^{(k+1)}.$$

Desse modo vemos que a propriedade é verdadeira.

2.2. Relação entre dois pares de termos consecutivos na sequência de Fibonacci.

Se tivermos $n > 1$ e $m > 0$, sendo m e n números naturais, teremos:

$$a_{m+n} = a_{n-1}.a_m + a_n.a_{m+1}.$$

Vamos demonstrar essa propriedade por meio de indução finita sobre m:

i) Vamos verificar a validade da propriedade para m = 1, teremos:

$$a_{1+n} = a_{n-1}.a_1 + a_n.a_{1+1} = a_{n-1}.1 + a_n.1 = a_{1+n}.$$

ii) Vamos admitir como hipótese de indução: $a_{q+n} = a_{n-1}.a_q + a_n.a_{q+1}$, sendo $q > 0$ e $n > 1$.

iii) Devemos mostrar que a relação é válida para m = q + 1. Tendo: $a_{q+n} = a_{n-1}.a_q + a_n.a_{q+1}$, válido para $q > 0$ e $n > 1$. Pela definição da sequência de Fibonacci podemos escrever:

$$a_{q+1+n} = a_{q+n} + a_{q-1+n}$$

$$a_{q+1+n} = (a_{n-1}.a_q + a_n.a_{q+1}) + (a_{n-1}.a_{q-1} + a_n.a_q)$$

$$a_{q+1+n} = a_{n-1}.(a_q + a_{q-1}) + a_n.(a_{q+1} + a_q)$$

$$a_{q+1+n} = a_{n-1}.a_{q+1} + a_n.a_{q+2}\,,$$

Desse modo vemos que a propriedade é verdadeira.

2.3. Determinantes de ordem dois, com elementos da sequência de Fibonacci:

Vamos compor uma matriz quadrada de ordem dois de modo que o primeiro elemento da matriz, ou seja, o elemento que se encontra na primeira linha com a primeira coluna, a_{11}, seja qualquer um dos elementos da sequência de Fibonacci, o elemento seguinte da sequência de Fibonacci será o elemento a_{12} da matriz, o próximo número de Fibonacci será o elemento a_{21} e o termo seguinte será o elemento a_{22} da matriz. Por exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}_{2x2},\quad B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 13 & 21 \end{pmatrix}_{2x2},$$

$$C = \begin{pmatrix} 21 & 34 \\ 55 & 89 \end{pmatrix}_{2x2} \text{ e } D = \begin{pmatrix} 55 & 89 \\ 144 & 233 \end{pmatrix}_{2x2}.$$

Agora que já convencionamos o modo de escrever essas matrizes quadradas de ordem dois usando a sequência de Fibonacci, vamos mencionar a relação encontrada:

Ao calcularmos os determinantes dessas matrizes teremos apenas dois resultados possíveis, que são o 1 e o (– 1). Vamos calcular os determinantes das matrizes A, B, C e D, que foram citadas:

$$D_A = 3.1 - 2.1 = 3 - 2 = 1,$$

$$D_B = 21.5 - 13.8 = 105 - 104 = 1$$

$$D_C = 89.21 - 55.34 = 1869 - 1870 = -1$$

$$D_D = 233.55 - 144.89 = 12815 - 12816 = -1$$

Usamos o método para calcular o determinante de uma matriz de ordem dois, temos o produto dos elementos da diagonal principal subtraído do produto dos elementos da diagonal secundária, usando isso podemos perceber um padrão interessante na própria sequência de Fibonacci.

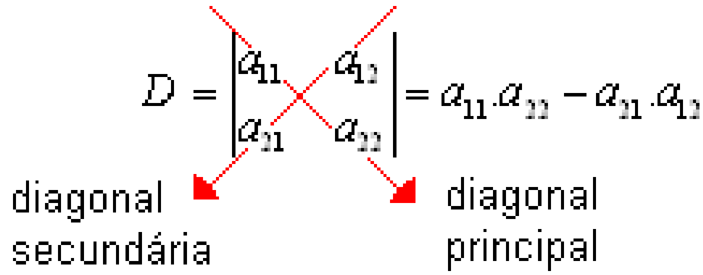


Figura: 4 (Cálculo do determinante de uma matriz de ordem dois)

Com relação aos termos da sequência de Fibonacci podemos escrever: $D = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12} = a_n.a_{n+3} - a_{n+1}.a_{n+2}$. Se olharmos na sequência de Fibonacci isso significa trabalhar com quatro termos consecutivos, o produto dos extremos menos o produto dos meios:

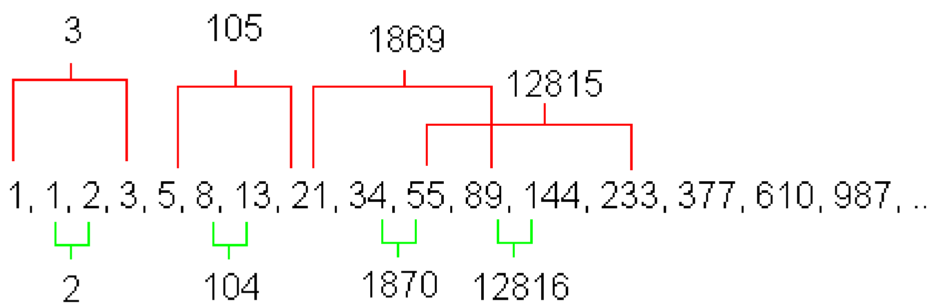


Figura 5 (multiplicações entre alguns elementos da sequência de Fibonacci)

A diferença entre os produtos será sempre de uma unidade, mas e o que dizer do fato do determinante, seguindo esse padrão, alternar entre os valores de 1 e (– 1)?

Esse fato também obedece a um determinado padrão, quando o primeiro termo da sequência que for usado para compor a matriz for um termo de índice ímpar na sequência de Fibonacci o determinante será igual a 1, caso contrário, se o primeiro termo da sequência que for usado para compor a matriz tiver um índice par na sequência de Fibonacci, o determinante será igual a (– 1).

Note que o determinante ainda pode ser escrito do seguinte modo:

$$D = a_n.a_{n+3} - a_{n+1}.a_{n+2} = a_n.(a_{n+1} + a_{n+2}) - a_{n+1}.(a_n + a_{n+1})$$

$$D = a_n.a_{n+1} + a_n.a_{n+2} - a_{n+1}.a_n - (a_{n+1})^2$$

$$D = a_n . a_{n+2} - (a_{n+1})^2$$

$$D = a_n .(a_n + a_{n+1}) - (a_{n+1})^2$$

$$D = (a_n)^2 + a_n . a_{n+1} - (a_{n+1})^2$$

Vamos mostrar que esse determinante só poderá ser igual a 1 ou (– 1).

Para isso vamos usar a propriedade 2.1, que nos diz o seguinte:

$(a_{n+1})^2 = a_n . a_{n+2} + (-1)^n$, sendo que n > 0.

Obviamente considerando a validade dessa propriedade, não existe problema se a escrevermos do seguinte modo:

$(a_{n+2})^2 = a_{n+1} . a_{n+3} + (-1)^{n+1}$, Teremos:

$$a_{n+2} . a_{n+2} = a_{n+1} .(a_{n+2} + a_{n+1}) + (-1)^{n+1}$$

$$(a_n + a_{n+1}). a_{n+2} = a_{n+1} . a_{n+2} + (a_{n+1})^2 + (-1)^{n+1}$$

$$a_n . a_{n+2} + a_{n+1} . a_{n+2} = a_{n+1} . a_{n+2} + (a_{n+1})^2 + (-1)^{n+1}$$

$$a_n . a_{n+2} = (a_{n+1})^2 + (-1)^{n+1}$$

$$a_n .(a_n + a_{n+1}) = (a_{n+1})^2 + (-1)^{n+1}$$

$$(a_n)^2 + a_n . a_{n+1} = (a_{n+1})^2 + (-1)^{n+1}$$

$$(a_n)^2 + a_n . a_{n+1} - (a_{n+1})^2 = (-1)^{n+1}$$

Vemos que a expressão do primeiro membro dessa equação é justamente a expressão do cálculo do determinante de ordem dois com os elementos sendo números de Fibonacci, de acordo com o que foi descrito.

Assim, além de comprovarmos a propriedade, também podemos escrever a seguinte relação entre os elementos da sequência de Fibonacci:

$(a_n)^2 + a_n . a_{n+1} - (a_{n+1})^2 = (-1)^{n+1}$. Para n > 0.

2.4. Determinantes de ordem maior ou igual a três com elementos da sequência de Fibonacci:

Podemos perceber outra relação curiosa entre os elementos da sequência de Fibonacci também no cálculo de determinantes de matrizes de ordem 3 em diante.

Se dispusermos os elementos da sequência de Fibonacci como elementos de uma matriz quadrada de ordem maior ou igual a três de acordo com o que foi feito no subtópico anterior, ou seja, os números de Fibonacci, devem obedecer a sequência, por linhas de cima para baixo, e em cada linha seguir no sentido da esquerda para a direita, sendo que o primeiro elemento da matriz pode ser qualquer dos números de Fibonacci. Por exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 13 & 21 & 34 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 13 \\ 21 & 34 & 55 \\ 89 & 144 & 233 \end{pmatrix}.$$

O Determinante será sempre igual a zero para as matrizes formadas desse modo. Mas por que isso sempre acontece? Uma propriedade muito comentada quando se estuda matrizes e determinantes é a de que se uma linha for uma combinação linear de outras linhas ou uma coluna for uma combinação linear de outras colunas, então o determinante dessa matriz será sempre igual à zero.

No caso da sequência de Fibonacci sendo disposta da forma já citada anteriormente, percebemos que essa combinação linear existe com relação às colunas dessas matrizes, na realidade esse fato se relaciona com a própria definição da sequência de Fibonacci, pois como já vimos, a soma de dois termos consecutivos da sequência resulta no termo seguinte, no caso das matrizes citadas, vemos que a soma do primeiro com o segundo elemento de cada linha resultará no terceiro, ou seja, a primeira coluna somada com a segunda resultará na terceira coluna.

Chama a atenção o fato de que essa combinação linear citada anteriormente embora seja imediata e mais facilmente percebida ela não é a única, por exemplo: nos dois exemplos apresentados, vemos que cada elemento da terceira linha menos o elemento da primeira linha que se encontra na mesma coluna resultará no elemento situado na segunda linha multiplicado por quatro.

Com relação a essa propriedade podemos notar que se a ordem da matriz for maior que três, seguindo a distribuição mencionada anteriormente, o determinante também será igual a zero, por exemplo:

a) $\begin{pmatrix} 13 & 21 & 34 & 55 \\ 89 & 144 & 233 & 377 \\ 610 & 987 & 1597 & 2584 \\ 4181 & 6765 & 10946 & 17711 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 & 13 & 21 \\ 34 & 55 & 89 & 144 & 233 \\ 377 & 610 & 987 & 1597 & 2584 \\ 4181 & 6765 & 10946 & 17711 & 28657 \\ 46368 & 75025 & 121393 & 196418 & 317811 \end{pmatrix}$

Da mesma forma que as matrizes de ordem três, temos que a soma de duas colunas consecutivas resultará na coluna seguinte, até por que aumentando a ordem da matriz apenas teremos mais colunas que podem ser combinadas, ou seja, sempre teremos o determinante resultando em zero quando tivermos matrizes de ordem maior ou igual a três com os elementos da sequência de Fibonacci compondo as matrizes do modo como foi convencionado.

2.5. Relação entre um elemento da sequência de Fibonacci que com relação aos índices é equidistante a outros dois elementos da sequência de Fibonacci:

Para poder perceber melhor essa relação, vamos escrever alguns termos da sequência de Fiboncci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584,...

Com relação aos elementos que tem índices equidistantes ao índice de um certo elemento e que distam um termo, podemos escrever a seguinte relação: $1.a_{k+1} = a_{k+2} - a_k$

Esse padrão vem da própria definição da sequência de Fibonacci, vamos escrevê-la do seguinte modo: $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$. Por exemplo, sendo k = 5 teremos: $1.a_{5+1} = a_{5+2} - a_5$, $a_6 = a_7 - a_5$, $8 = 13 - 5 = 8$.

Com relação aos elementos que tem índices equidistantes ao índice de um certo elemento e que distam dois termos, podemos escrever a seguinte relação: $3.a_{k+2} = a_{k+4} + a_k$. Por exemplo, sendo k = 6 teremos: $3.a_{6+2} = a_{6+4} + a_6$, $3.a_8 = a_{10} + a_6$, $63 = 3.21 = 55 + 8 = 63$.

Com relação aos elementos que tem índices equidistantes ao índice de um certo elemento e que distam três termos, podemos escrever a seguinte relação:

$4.a_{k+3} = a_{k+6} - a_k$. Por exemplo, com k = 3 teremos: $4.a_{3+3} = a_{3+6} - a_3$, $4.a_6 = a_9 - a_3$, $32 = 4.8 = 34 - 2 = 32$.

Com relação aos elementos que tem índices equidistantes ao índice de um certo elemento e que distam quatro termos, podemos escrever a seguinte relação: $7.a_{k+4} = a_{k+8} + a_k$. Por exemplo, sendo k = 4 teremos: $7.a_{4+4} = a_{4+8} + a_4$, $7.a_8 = a_{12} + a_4$, $147 = 7.21 = 144 + 3 = 147$.

Com relação aos elementos que tem índices equidistantes ao índice de um certo elemento e que distam cinco termos, podemos escrever a seguinte relação: $11.a_{k+5} = a_{k+10} - a_k$. Por exemplo, sendo k = 6 teremos: $11.a_{6+5} = a_{6+10} - a_6$, $11.a_{11} = a_{16} - a_6$, $979 = 11.89 = 987 - 8 = 979$.

Podemos observar que as próprias relações seguem também um determinado padrão, os coeficientes que aparecem nos primeiros membros das relações podem ser achados por meio de recorrência, e a lei de recorrência nesse caso é a mesma lei de recorrência da sequência de Fibonacci, ou seja, um termo é dado pela soma de dois termos anteriores, vemos que os coeficientes são: (1, 3, 4, 7, 11,...). Assim como na sequência de Fibonacci, basta somar dois elementos consecutivos para se descobrir o próximo elemento da sequência, a diferença é que na sequência dos coeficientes dessa relação os primeiros elementos são 1 e 3, na sequência de Fibonacci os primeiros elementos são 1 e 1, por isso, mesmo tendo uma mesma lei de recorrência o resultado são duas sequências distintas.

Outra observação é que a distância entre o índice do termo e os índices dos termos equidistantes a ele, determina o coeficiente de a_k, quando essa distância for um valor ímpar o coeficiente será igual a (–1) e quando for um valor par o coeficiente será 1.

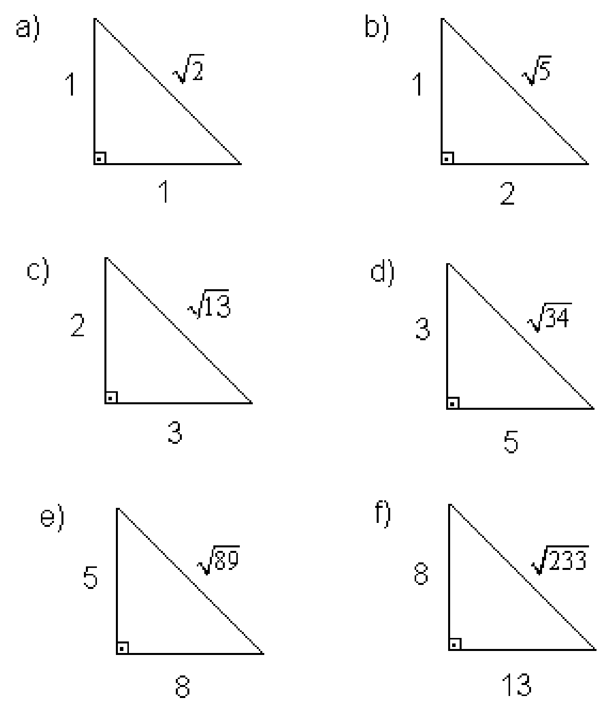
Podemos, a partir daí escrever quantas relações quisermos; podemos notar que essas relações não são válidas somente para a sequência de Fibonacci, por exemplo, também são válidas para a própria sequência numérica formada pelos coeficientes das relações: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199,...

Podemos suspeitar que essas expressões são válidas para qualquer sequência numérica obtida por recorrência, sendo que dois termos consecutivos somados resultem no termo seguinte, isso independentemente dos dois primeiros termos da sequência.

Embora a validade dessas expressões pareça bem evidente, precisamos de demonstrações formais para comprovar a sua validade, essas demonstrações podem ser feitas posteriormente em um estudo mais amplo sobre sequências numéricas definidas por recorrência.

2.6. Elementos da sequência de Fibonacci no triângulo retângulo:

Podemos encontrar algumas generalizações envolvendo a sequência de Fibonacci com o teorema de Pitágoras, porém, vejamos uma situação: Tomemos dois elementos consecutivos da sequência de Fibonacci representando o valor da medida dos catetos de um triângulo retângulo e utilizemos o teorema de Pitágoras, o valor da hipotenusa desse triângulo será a raiz quadrada de um dos elementos da sequência de Fibonacci, vamos observar alguns exemplos:



Vamos comprovar os valores da hipotenusa pelo teorema de Pitágoras:

a) $h^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$, $h = \sqrt{2}$

b) $h^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$, $h = \sqrt{5}$

c) $h^2 = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$, $h = \sqrt{13}$

d) $h^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$, $h = \sqrt{34}$

e) $h^2 = 8^2 + 5^2 = 64 + 25 = 89$, $h = \sqrt{89}$

f) $h^2 = 8^2 + 13^2 = 64 + 169 = 233$, $h = \sqrt{233}$

Na tabela seguinte podemos perceber a relação entre a posição dos elementos e os seus valores na sequência de Fibonacci:

Tabela 2: (Triângulo retângulo com catetos sendo elementos consecutivos da sequência de Fibonacci e o valor da hipotenusa)

Catetos	Hipotenusa
$a_1 = 1$ e $a_2 = 1$	$\sqrt{a_3} = \sqrt{2}$
$a_2 = 1$ e $a_3 = 2$	$\sqrt{a_5} = \sqrt{5}$
$a_3 = 2$ e $a_4 = 3$	$\sqrt{a_7} = \sqrt{13}$
$a_4 = 3$ e $a_5 = 5$	$\sqrt{a_9} = \sqrt{34}$
$a_5 = 5$ e $a_6 = 8$	$\sqrt{a_{11}} = \sqrt{89}$
$a_6 = 8$ e $a_7 = 13$	$\sqrt{a_{13}} = \sqrt{233}$

O índice do elemento da sequência de Fibonacci que na raiz quadrada resulta na hipotenusa do triângulo retângulo é igual à soma dos índices dos elementos consecutivos da sequência de Fibonacci que são os catetos, ou seja, sendo os catetos a_n e a_{n+1}, a soma dos índices será $n + (n+1) = 2n + 1$, então a hipotenusa será $\sqrt{a_{2n+1}}$, usando o teorema de Pitágoras e com base no que foi observado podemos escrever que: $(a_n)^2 + (a_{n+1})^2 = a_{2.n+1}$

Vamos demonstrar que essa relação realmente é válida:

Para demonstrar essa relação faremos uso da propriedade 2.1 que nos diz: $(a_{n+1})^2 = a_n.a_{n+2} + (-1)^n$, sendo n > 0, e também usaremos a propriedade 2.2: $a_{m+n} = a_{n-1}.a_m + a_n.a_{m+1}$, para $n > 1$ e $m > 0$.

Vamos escrever a soma dos quadrados dos catetos de um triângulo retângulo onde os catetos são elementos consecutivos da sequência de Fibonacci:

$(a_n)^2 + (a_{n+1})^2$, usando a propriedade 2.1 em cada uma das parcelas teremos que: $(a_n)^2 = (a_{n-1}).(a_{n+1}) + (-1)^{n-1}$ e $(a_{n+1})^2 = a_n.a_{n+2} + (-1)^n$, temos:

$$(a_n)^2 + (a_{n+1})^2 = (a_{n-1}).(a_{n+1}) + (-1)^{n-1} + (a_n).(a_{n+2}) + (-1)^n$$

Podemos observar que se n for par: $(-1)^{n-1} = -1$ e $(-1)^n = 1$, se tivermos n ímpar: $(-1)^{n-1} = 1$ e $(-1)^n = -1$, ou seja, de qualquer modo essas duas parcelas se cancelam, assim podemos escrever:

$(a_n)^2 + (a_{n+1})^2 = (a_{n-1}).(a_{n+1}) + (a_n).(a_{n+2})$, e pela propriedade 2.2 podemos escrever que: $(a_n)^2 + (a_{n+1})^2 = a_{2.n+1}$.

E assim demonstramos que essa relação entre os elementos da sequência de Fibonacci e o triângulo retângulo realmente é válida.

2.7. Fórmula de Binet

A princípio pode ser difícil acreditar que exista uma fórmula que relacione um número na sequência de Fibonacci com a sua posição na sequência, afinal os números de Fibonacci aumentam muito mesmo quando a diferença de um índice para o outro não é tão grande mas, essa fórmula existe, ela foi demonstrada por Leonhard Euler em 1765, porém ganhou mais destaque quando foi redescoberta por Jacques Binet em 1843, e ficou conhecida como formula de Binet, trata – se da seguinte fórmula:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Ao observar essa fórmula podemos perceber que para se descobrir um valor da sequência de Fibonacci dado um valor de n teremos muito trabalho, talvez alguém ache melhor descobrir o valor desse número por meio da sua definição de recorrência; devemos notar que se a posição do elemento for muito próxima do início da sequência, realmente não valerá a pena usar a fórmula, mas se tivermos que calcular o valor do número para n > 50, por exemplo, e se tivermos uma calculadora científica a disposição, será muito mais rápido e prático utilizar a fórmula de Binet.

Vejamos um exemplo de aplicação da fórmula de Binet: Vamos calcular o valor do número na sequência de Fibonacci para n = 64.

Para isso vamos fazer uso de uma calculadora científica e trabalhar com um valor aproximado para o número irracional que aparece na fórmula, substituindo o valor de n dado teremos: $a_{64}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{64}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{64}$, sendo que $\sqrt{5}\cong 2,236067$, daí teremos: $a_{64}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3,236067}{2}\right)^{64}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-1,236067}{2}\right)^{64}$,

$$a_{64}=\frac{1}{2,236067}(1,618033)^{64}-\frac{1}{2,236067}(-0,618033)^{64}$$

$$a_{64}=\frac{1}{2,236067}.2,372469.10^{13}-\frac{1}{2,236067}.4,214504.10^{-14}$$

$a_{64}=1,061.10^{13}-1,884784.10^{-14}$**,** levando em conta que estamos trabalhando com valores aproximados e que o valor da segunda parcela é muito pequeno em comparação com o valor da primeira parcela dessa soma, podemos considerar que: $a_{64}=1,061021.10^{13}$. Existem diferentes modos de demonstrarmos essa propriedade, mas uma demonstração bem simples é feita por Martinez [20]:

Vamos demonstrar que: $a_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$. Sendo $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ as raízes de $x^2=x+1$.

Temos que $a_1=\frac{\alpha^1-\beta^1}{\alpha-\beta}=1$ e $a_2=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}=\frac{(\alpha+\beta).(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}=\alpha+\beta$,

$a_2=\alpha+\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ (base de indução).

Seja $n\geq 1$ suponhamos que $a_k=\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}$ para todo k com $1\leq k\leq n$ (hipótese de indução). Assim, $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$, $a_{n+1}=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}$,

$a_{n+1}=\frac{(\alpha^n+\alpha^{n-1})-(\beta^n+\beta^{n-1})}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$, pois $\alpha^2=\alpha+1\Rightarrow\alpha^{n+1}=\alpha^n+\alpha^{n-1}$ e analogamente $\beta^2 = \beta + 1 \Rightarrow \beta^{n+1} = \beta^n + \beta^{n-1}$. Desse modo vemos que a propriedade é verdadeira.

2.8. Soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci:

A soma S_n, para $n \geq 1$ dos n primeiros números da sequência de Fibonacci é dada pela seguinte relação: $S_n = a_{n+2} - 1$. Vamos demonstrar algebricamente essa relação. Usando a definição da sequência de Fibonacci podemos escrever as igualdades:

$$a_1 = a_3 - a_2$$

$$a_2 = a_4 - a_3$$

$$a_3 = a_5 - a_4$$

•

•

•

$$a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$$

$$a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$$

Somando essas equações membro a membro, percebemos que vários termos serão cancelados, o segundo termo do segundo membro se cancelará com o primeiro termo do segundo membro da equação anterior, então teremos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + a_n = a_{n+2} - a_2 = a_{n+2} - 1$$

Vamos demonstrar essa propriedade pelo método da indução sobre n:

Sendo: $S_n = a_{n+2} - 1$, para $n \geq 1$, teremos:

i) Para n = 1, temos: $s_1 = a_{1+2} - 1 = a_3 - 1 = 2 - 1 = 1$.

ii) Vamos admitir como hipótese de indução: $S_q = a_{q+2} - 1$, $q \geq 1$.

iii) Temos: $S_q = a_{q+2} - 1$, daí, $s_q + a_{q+1} = a_{q+1} + a_{q+2} - 1$, pela definição da sequência de Fibonacci: $s_{q+1} = a_{q+3} - 1$, ou seja:

$$s_{q+1} = a_{(q+2)+1} - 1$$

Sendo assim a propriedade é verdadeira. Exemplo: Qual a soma dos 20 primeiros termos da sequência de Fibonacci, sendo que $a_{22} = 17711$?

Sabendo que: $S_n = a_{n+2} - 1$, e sendo n = 20, substituindo o valor de n teremos: $S_{20} = a_{22} - 1$, como $a_{22} = 17711$, então: $S_{20} = 17711 - 1 = 17710$.

2.9. Soma dos termos de índice ímpar na sequência de Fibonacci.

A soma, $S_{2.n-1}$, sendo $n \geq 1$, dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci com índices ímpares é dada por: $S_{2.n-1} = a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_{2.n-1} = a_{2.n}$

Vamos demonstrar algebricamente essa propriedade. Usando a definição da sequência de Fibonacci podemos escrever as igualdades:

$$a_2 + a_3 = a_4$$

$$a_4 + a_5 = a_6$$

$$a_6 + a_7 = a_8$$

$$\bullet$$

$$\bullet$$

$$\bullet$$

$$a_{2.n-4} + a_{2.n-3} = a_{2.n-2}$$

$$a_{2.n-2} + a_{2.n-1} = a_{2.n}$$

Somando essas equações membro a membro, percebemos que vários termos serão cancelados; o primeiro termo do primeiro membro se cancelará com o único termo do segundo membro da equação anterior; então teremos:

$S_{2.n-1} = a_2 + a_3 + a_5 + ... + a_{2.n-1} = a_{2.n}$, mas sabemos que: $a_1 = a_2 = 1$, sendo assim temos: $S_{2.n-1} = a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_{2.n-1} = a_{2.n}$

Vamos demonstrar essa propriedade usando indução sobre n:

i) Para n = 1, teremos: $S_{2.1-1} = a_1 = a_{2.1} = 1$ e $S_1 = a_1 = a_2 = 1$.

ii) Vamos admitir como hipótese de indução:

$$S_{2.q-1} = a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_{2.q-1} = a_{2.q}, \text{ para } q \geq 1.$$

iii) vamos mostrar que é verdadeiro para n = q + 1, tendo:

$$S_{2.q-1} = a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_{2.q-1} = a_{2.q}, \text{ teremos:}$$

$$a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_{2.(q+1)-1} = (a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_{2.q-1}) + a_{2.q+2-1}$$

$$a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_{2.q+1} = (a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_{2.q-1}) + a_{2.q+1}$$

$$S_{2.(q+1)-1} = (a_{2.q}) + a_{2.q+1} = a_{2.q+2} = a_{2.(q+1)}.$$

Desse modo vemos que a propriedade é verdadeira. Exemplo: Calcule a soma dos 10 primeiros números da sequência de Fibonacci que tem índices ímpares, sabendo que $a_{20} = 6765$. Teremos: $S_{2.10-1} = a_{2.10}$, e assim temos $S_{19} = a_{20} = 6765$.

2.10. Soma dos termos de índice par na sequência de Fibonacci.

A soma, $S_{2.n}$, sendo $n \geq 1$, dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci com índices pares é dada por:

$$S_{2.n} = a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{2.n} = a_{2.n+1} - 1$$

Vamos demonstrar algebricamente essa propriedade. Usando a definição da sequência de Fibonacci poderemos escrever as seguintes igualdades:

$$a_1 + a_2 = a_3$$

$$a_3 + a_4 = a_5$$

$$a_5 + a_6 = a_7$$

•

•

•

$$a_{2.n-3} + a_{2.n-2} = a_{2.n-1}$$

$$a_{2.n-1} + a_{2.n} = a_{2.n+1}$$

Somando essas equações membro a membro, percebemos que vários termos serão cancelados, o primeiro termo do primeiro membro se cancelará com o único termo do segundo membro da equação anterior, então teremos:

$$a_1 + a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{2.n} = a_{2.n+1}$$

Sabemos que na sequência de Fibonacci $a_1 = 1$, desse modo podemos escrever: $1 + a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{2.n} = a_{2.n+1}$, e assim:

$$S_{2.n} = a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{2.n} = a_{2.n+1} - 1$$

Vamos demonstrar a propriedade utilizando o método de indução sobre n.

Teremos: $S_{2.n} = a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{2.n} = a_{2.n+1} - 1$, para $n \geq 1$.

i) Para n = 1 teremos: $S_{2.1} = a_2 = a_{2.1+1} - 1 = a_3 - 1 = 2 - 1 = 1$.

ii) Vamos admitir como hipótese de indução:

$$S_{2.q} = a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{2.q} = a_{2.q+1} - 1 \text{, para } q \geq 1.$$

iii) Vamos mostrar que é verdadeiro para n = q + 1, temos:

$$S_{2.q} = a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{2.q} = a_{2.q+1} - 1,$$

podemos escrever:

$$a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{2.(q+1)} = (a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{2.q}) + a_{2.q+2}$$

$$S_{2.(q+1)} = (a_{2.q+1} - 1) + a_{2.q+2} = a_{2.q+1} + a_{2.q+2} - 1$$

$$S_{2.(q+1)} = a_{2.q+3} - 1 = a_{2.(q+1)+1} - 1.$$

Desse modo vemos que a propriedade é verdadeira. Exemplo: calcule a soma dos 13 primeiros números da sequência de Fibonacci com índices pares, sabendo que $a_{27} = 196418$. Teremos: $S_{2.13} = a_{2.13+1} - 1$, e assim temos $S_{26} = a_{27} - 1 = 196418 - 1 = 196417$.

2.11. Soma dos quadrados dos n primeiros números de Fibonacci.

A soma dos quadrados dos n primeiros números da sequência de Fibonacci é dada pela relação: $S_{n^2} = a_n.a_{n+1}$, para $n \geq 1$.

Vamos demonstrar essa relação usando indução sobre n.

i) Para n = 1 teremos: $(a_1)^2 = a_1.a_2$, pois $a_1 = a_2 = 1$.

ii) Vamos admitir como hipótese de indução: $S_{q^2} = a_q.a_{q+1}$, para $q \geq 1$

iii) Sendo: $S_{q^2} = a_q.a_{q+1}$, poderemos escrever o seguinte:

$$(a_{q+1})^2 + S_{q^2} = a_q.a_{q+1} + (a_{q+1})^2 \text{, daí teremos:}$$

$$S_{(q+1)^2} = a_{q+1}.(a_q + a_{q+1}) \text{, e: } S_{(q+1)^2} = (a_{q+1}).(a_{q+2}).$$

Vamos demonstrar essa propriedade também pelo método algébrico:

Para n = 1 teremos: $(a_1)^2 = a_1.a_2$, pois $a_1 = a_2 = 1$.

Também podemos escrever: $(a_p)^2 = a_p.(a_{p+1} - a_{p-1}) = a_p.a_{p+1} - a_{p-1}.a_p$, pois: $a_p = a_{p+1} - a_{p-1}$. Substituindo p = 2, p = 3, p = 4..., p = n, teremos:

$$(a_1)^2 = a_1.a_2$$

$$(a_2)^2 = a_2.a_3 - a_1.a_2$$

$$(a_3)^2 = a_3.a_4 - a_2.a_3$$

•

•

•

$$(a_{n-1})^2 = a_{n-1}.a_n - a_{n-2}.a_{n-1}$$

$$(a_n)^2 = a_n.a_{n+1} - a_{n-1}.a_n$$

Ao somarmos essas equações membro a membro, vários termos irão se cancelar, o único termo que restará no segundo membro é o primeiro termo da última equação, sendo assim podemos escrever:

$$S_{n^2} = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 + ... + (a_n) = a_{n.}a_{n+1}$$

Vamos observar um exemplo: calcule a soma dos quadrados dos dez primeiros termos da sequência de Fibonacci. Aplicando na fórmula temos: $S = a_{10}.a_{11} = 55.89 = 4895$.

2.12. Relação entre o antecessor e o sucessor de um número na sequência de Fibonacci que ocupa a posição n com o número que ocupa a posição 2n

Sendo n > 1, temos: $a_{2n} = (a_{n+1})^2 - (a_{n-1})^2$.

Para demonstrar essa relação vamos utilizar a propriedade 2.2: $a_{m+n} = a_{n-1}.a_m + a_n.a_{m+1}$. Para $n > 1$ e $m > 0$, consideremos n = m; teremos: $a_{n+n} = a_{n-1}.a_n + a_n.a_{n+1}$ e $a_{2n} = a_n.(a_{n-1} + a_{n+1})$, pela definição da sequência de Fibonacci: $a_n = a_{n+1} - a_{n-1}$, substituindo na equação anterior teremos: $a_{2n} = (a_{n+1} - a_{n-1}).(a_{n+1} + a_{n-1})$, sendo assim temos: $a_{2n} = (a_{n+1})^2 - (a_{n-1})^2$. Desse modo vemos que a propriedade é verdadeira.

2.13. Números consecutivos na sequência de Fibonacci são primos entre si.

Na sequência de Fibonacci temos que a_n e a_{n+1} são números primos entre si. Vamos demonstrar essa propriedade:

Devemos mostrar que: $(a_{n,}a_{n+1}) = 1$, considerando que (x, y), representa o máximo divisor comum (M.D.C.) entre x e y, para isso vamos usar o método da indução sobre n:

i) Tomemos n = 1, vemos que: $(a_{1,}a_2) = (1,1) = 1$.

ii) Vamos admitir como hipótese de indução: $(a_{q,}a_{q+1}) = 1$, sendo q > 1.

iii) Devemos mostrar que: $(a_{q+1,}a_{q+2}) = 1$. Pelo lema de Euclides

$(x, y) = (y - x.n, x)$ teremos: $(a_{q+1,}a_{q+2}) = (a_{q+2} - a_{q+1}, a_{q+1}) = (a_q, a_{q+1}) = 1$.

Nessa demonstração utilizamos o Lema de Euclides sendo: $x = a_{q+1}$, $y = a_{q+2}$ e n = 1. Também usamos o fato de que: $a_q = a_{q+2} - a_{q+1}$.

2.14. Divisibilidade entre os índices e os valores dos elementos da sequência de Fibonacci.

Na sequência de Fibonacci temos que: Se $n \mid m$, então, $a_n \mid a_m$, isso se $n, m \in \mathrm{N}^*$. Vamos demonstrar essa propriedade: Consideremos $m = n.q$; com $q \in \mathrm{N}^*$. Usemos indução sobre q:

i) Para q = 1, será verdadeiro, pois teremos $m = n$ e todo número é divisível por ele mesmo.

ii) Consideremos como nossa hipótese de indução que: se $n \mid n.k$ então $a_n \mid a_{n.k}$ para $q = k \geq 2$.

iii) É claro que $n \mid n.k$ e $n \mid n.(k+1)$. Da propriedade 2.2 temos:

$a_{n.(k+1)} = a_{(n.k-1)}.a_n + a_{n.k}.a_{(n+1)}$.

É óbvio que $a_n \mid a_{(n.k-1)}.a_n$, e com relação à outra parcela, a hipótese de indução nos garante que $a_n \mid a_{n.k}.a_{(n+1)}$, então: $a_n \mid a_{n.(k+1)}$.

Desse modo comprovamos que a propriedade é verdadeira.

Para citar um exemplo de aplicação dessa propriedade podemos notar que: $a_5 = 5$ e $a_{15} = 610$, realmente $5 | 610$ e $5 | 15$.

2.15. Soma dos termos com sinais alternados na sequência de Fibonacci (termos de índice ímpar com sinais positivos e termos de índice par com sinais negativos).

Na sequência de Fibonacci temos também a seguinte propriedade: $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n+1}.a_{n+2} = (-1)^{n+1}.a_{n+1} + 1$, essa é a soma dos termos da sequência de Fibonacci com sinais alternados.

Vamos demonstrar essa propriedade usando a propriedade 2.9 e a propriedade 2.10:

$$S_{2.n-1} = a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_{2.n-1} = a_{2.n} \text{ e } S_{2.n} = a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{2.n} = a_{2.n+1} - 1$$

Vamos subtrair essas duas últimas equações membro a membro, teremos:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2n-1} - a_{2n} = a_{2n} - a_{2n+1} + 1,$$

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2n-1} - a_{2n} = -a_{2n-1} + 1$, agora iremos somar o termo a_{2n+1} nos dois membros da equação:

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} = a_{2n+1} - a_{2n-1} + 1$, e assim teremos:

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} = a_{2n} + 1$.

Percebemos que nessa relação os números de índice par tem sinal negativo e os de índice ímpar estão com o sinal positivo, e a expressão resultará em um número de Fibonacci com mais uma unidade, porém, o sinal desse número de Fibonacci dependerá da última parcela da soma alternada quando ela tiver índice par, o número de Fibonacci será negativo e quando o índice da ultima parcela da soma alternada for ímpar, o número de Fibonacci terá o sinal positivo.

Podemos notar que o índice do número de Fibonacci que é o resultado da soma com mais uma unidade terá o índice sendo uma unidade a menos do que o índice da ultima parcela da soma alternada, sendo assim, podemos escrever mais genericamente: $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n+1}.a_{n+2} = (-1)^{n+1}.a_{n+1} + 1$.

No capítulo seguinte veremos algumas aplicações, resultados e curiosidades da sequência de Fibonacci.

3 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI: APLICAÇÕES, RESULTADOS E CURIOSIDADES.

3.1. Árvore de captação de energia solar.

O jovem americano Aidan Dwyer, quando tinha 13 anos de idade observou algumas árvores na praça perto de sua casa e ficou curioso com relação aos vários padrões que percebia nas folhas e nos galhos, então ele fez alguns cálculos usando como base os padrões que havia observado e o resultado foi justamente a sequência de Fibonacci.

Aidan Dwyer criou uma árvore usando PVC, as folhas eram painéis solares e tanto as folhas como os galhos foram feitos observando o padrão da sequência de Fibonacci.

Figura: 6 (Árvore criada por Aidan Dwyer)

Fonte: Rotina digital - http://rotinadigital.net/wordpress/garoto-de-13-anos-revoluciona-tecnologia-solar-a-partir-das-arvores/

Ele usou a mesma quantidade de células de captação de energia solar em dois modelos diferentes, o primeiro que já foi citado, imita o modelo das árvores, ou seja, seguindo a sequência de Fibonacci (Figura: 6), o segundo modelo é o modo usado tradicionalmente, com as placas em um mesmo plano, na horizontal, na vertical ou levemente inclinadas.

O projeto de Aidan Dwyer teve um aproveitamento médio 20% maior do que o modelo tradicional, em dezembro os resultados chamaram mais atenção porque nessa época do ano o Sol estava em um ponto mais baixo no céu e o aproveitamento energético foi em média 50% maior no modelo criado por Aidan.

Figura: 7 (Aidan Dwyer)

Fonte: Rotina digital - http://rotinadigital.net/wordpress/garoto-de-13-anos-revoluciona-tecnologia-solar-a-partir-das-arvores/

Essa interessante descoberta feita em agosto de 2011 rendeu ao jovem Aidan o prêmio de jovem naturalista do Museu Americano de História Natural. O governo dos Estados Unidos e várias empresas estão interessados no invento de Aidan Dwyer.

3.2. Conversão de milhas para quilômetros.

Outra aplicação que podemos ter da sequência de Fibonacci é na conversão aproximada de milhas para quilômetros. O fator de conversão entre milhas e quilômetros é de 1,609; muito próximo do número de ouro, que é aproximadamente: 1,618.

Por exemplo, para saber aproximadamente a quantos quilômetros 8 milhas correspondem, basta observar o número seguinte na sequência de Fibonacci, no caso, 8 milhas correspondem aproximadamente a 13 km, pois $\frac{13}{8}=1,625$; ou seja, $8.1,625=13$.

3.3. Sequência de Fibonacci e o triângulo de Pascal.

O triângulo de Pascal é composto por números binomiais seguindo um determinado padrão - Figura: 8 (Triângulo de Pascal); calculando esses números binomiais podemos notar que a soma dos termos das diagonais resultam nos números da sequência de Fibonacci, vejamos essa característica:

$$
\begin{array}{lllllll}
\binom{0}{0} & & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & \cdots & \binom{n}{n}
\end{array}
$$

Figura: 8 (Triângulo de Pascal)

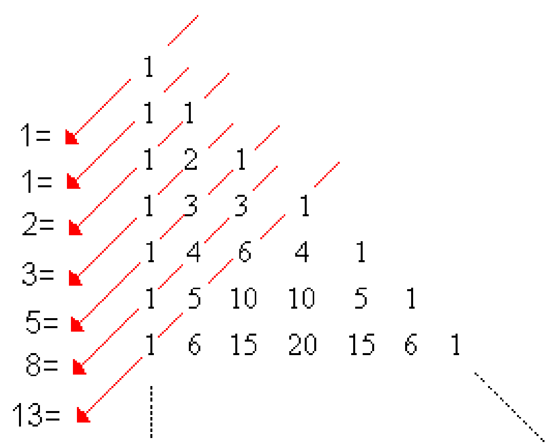


Figura: 9 (Números de Fibonacci nas diagonais do triângulo de Pascal)

3.4. Sequência de Fibonacci na concha do nautilus e na folha de uma bromélia.

Existem várias situações na natureza em que aparece a sequência de Fibonacci; um exemplo bem conhecido é o caso da concha do nautilus. Na espiral dessa concha percebemos um padrão que nos leva a sequência de Fibonacci.

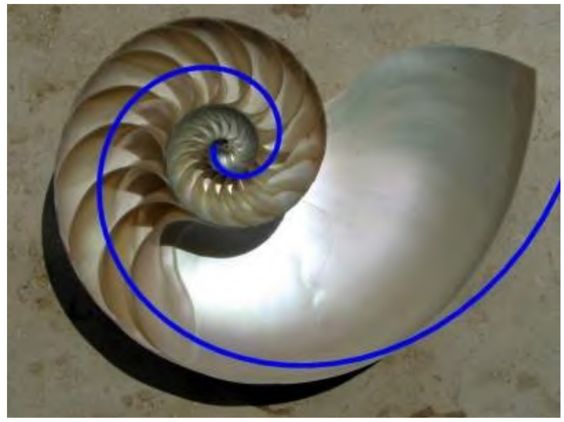


Figura: 10 (Espiral da concha do nautilus)
Fonte: Wikipédia - http://pt.wikipedia.org/wiki/Número_de_Fibonacci

Se observarmos a progressão da concha do nautilus como uma montagem de quadrados veremos que os lados desses quadrados seguem os termos da sequência de Fibonacci, ou seja, a soma dos lados de dois quadrados seguidos resulta no lado do próximo quadrado. Essa montagem está indicada na figura seguinte:

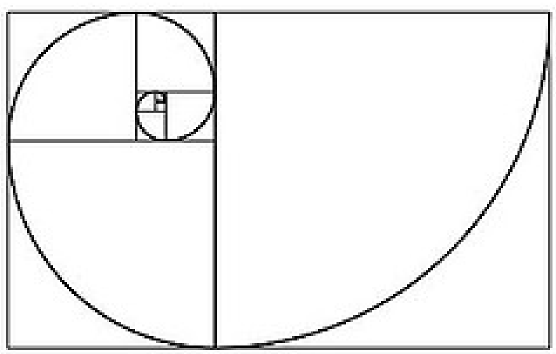


Figura: 11 (Concha do nautilus e a sequência de Fibonacci)
Fonte: Matemática essencial -
http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib2.htm

Essa não é a única espiral na natureza que tem como padrão os elementos da sequência de Fibonacci, por exemplo, a espiral que pode ser visualizada na folha de uma bromélia também segue esse padrão.

Figura: 12 (Folha de uma bromélia)
Fonte: Wikipédia - http://pt.wikipedia.org/wiki/Número_de_Fibonacci

Com a composição de quadrados na folha da bromélia temos a seguinte figura:

Figura: 13 (Folha de bromélia e a sequência de Fibonacci)
Fonte: Wikipédia - http://pt.wikipedia.org/wiki/Número_de_Fibonacci

3.5. Sequência de Fibonacci no arranjo de galhos das árvores e filotaxia.

A disposição dos galhos e folhas de algumas árvores faz com que a absorção de luz solar seja a maior possível. Em muitas árvores a quantidade de galhos que aparecem nas ramificações são elementos da sequência de Fibonacci:

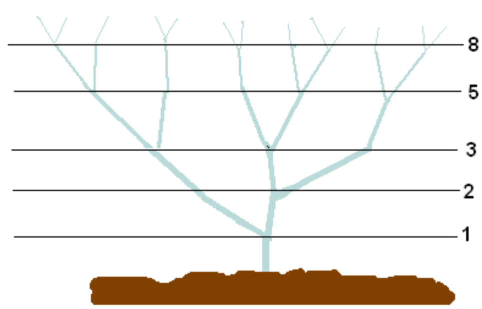


Figura: 14 (Ramificação de uma árvore e a sequência de Fibonacci)
Fonte: Matemática essencial -
http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib2.htm

O padrão das folhas nos caules é chamado de filotaxia. Nesse caso o padrão se observa de um modo muito interessante. É formado um movimento de trajetória helicoidal com as folhas em torno do caule. Para que possamos explicar melhor o modo como o padrão aparece devemos observar a figura seguinte:

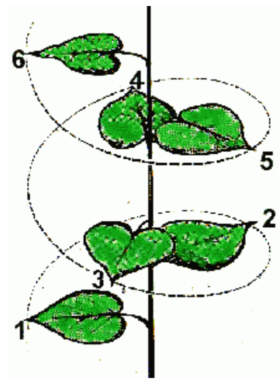


Figura: 15 (Movimento Helicoidal das folhas com relação ao caule)
Fonte: Matemática essencial -
http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib2.htm

Três folhas que nascem em sequência acabam tendo os mesmo ângulos entre si, se tomarmos duas folhas consecutivas, elas mantém certa distância com relação ao caule. O mesmo padrão ocorre para as outras folhas. A figura seguinte indica a visualização aérea dessa trajetória:

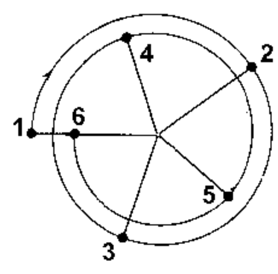


Figura: 16 (Planificação da trajetória das folhas de uma bromélia)
Fonte: Matemática essencial -
http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib2.htm

No exemplo da figura temos cinco folhas e duas voltas. Cada volta tem 360°, se considerarmos uma visão aérea dessa trajetória, como se estivéssemos planificando essa trajetória, teremos cada ângulo entre as folhas consecutivas sendo de 144°, pois são duas voltas, ou seja, 720°, como são cinco folhas temos cinco ângulos iguais, então $\frac{720}{5} = 144$.

Devemos notar dois valores importantes que são o número de voltas dadas na trajetória das folhas até que uma folha se sobreponha a outra, pode ser chamado de período, e a quantidade de folhas que surgem em quanto uma folha se sobrepõem a outra.

Tanto esse período como a quantidade de folhas citadas são, em muitos casos os valores da sequência de Fibonacci. Foi observado em várias experiências que existem exceções a essa regra, mas foi também notável o grande número de vezes em que esse padrão foi comprovado.

4 ATIVIDADES ENVOLVENDO A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI.

4.1. O trabalho com a sequência de Fibonacci no ensino básico.

Deve-se levar em conta quando que a sequência de Fibonacci vai ser trabalhada, por conta da idade e do nível de maturidade dos alunos. Deve-se notar também os pré-requisitos necessários para que eles possam compreender determinadas ideias, porém, nada impede que a sequência de Fibonacci seja trabalhada em todos os anos do ensino fundamental II e do ensino médio.

4.2. Sugestão de como se trabalhar com a sequência de Fibonacci no ensino básico – ensino fundamental II.

Nos 6° e 7° anos do ensino básico podemos começar o trabalho com a sequência de Fibonacci mencionando a parte histórica, sobre a vida de Fibonacci, citar a própria sequência de Fibonacci e como surgiu essa sequência numérica.

Depois, tendo escrito a sequência de Fibonacci pode se perguntar para os alunos qual será o próximo elemento da sequência, pode-se perguntar qual é o procedimento para acharmos os próximos elementos da sequência de Fibonacci.

Podemos pedir que os alunos façam divisões entre elementos consecutivos da sequência de Fibonacci e que anotem os elementos que foram divididos e do lado o resultado encontrado. Peça que a divisão seja feita entre um número da sequência pelo seu antecessor imediato. Peça que eles façam esse procedimento com os primeiros elementos da sequência até uma boa quantidade de divisões para que possam perceber com facilidade o valor do número de ouro. E depois perguntar aos alunos se estão percebendo algo interessante com os valores resultantes das divisões que fizeram.

Logo após seria interessante que o professor com uma calculadora fizesse a mesma quantidade de divisões colocando os valores no quadro, pois alguns alunos podem se enganar ou apresentar algum tipo de dificuldade ao fazer as contas. Nessa ocasião podemos citar algumas aplicações, em especial falar sobre a razão áurea (número de ouro), com base nas divisões efetuadas pelos alunos. Nesses anos do ensino fundamental II os alunos já devem ter visto como fazer divisão com números inteiros.

No caso dos alunos do 8° e 9°anos podemos relembrar o que foi mencionado nas séries anteriores, parte histórica, cálculo dos termos seguintes e o número de ouro. Porém, esses alunos podem ter uma percepção maior das propriedades e relações da sequência de Fibonacci.

Após escrever a sequência de Fibonacci no quadro e relembrar como achar os elementos seguintes podemos pedir para que os alunos escrevam uma grande quantidade de elementos da sequência de Fibonacci e que posteriormente tentem perceber alguma relação entre os elementos da sequência, alguma característica interessante, ou seja, uma propriedade da sequência. Depois de um tempo viável para essa atividade peça que citem as características percebidas e que escrevam no quadro para que os colegas possam perceber bem essa propriedade. O professor também pode citar mais algumas propriedades e aplicações fora as que já foram citadas em séries anteriores.

4.3. Sugestão de como se trabalhar com a sequência de Fibonacci no ensino básico – ensino médio.

No caso do ensino médio, depois de se trabalhar com a progressão aritmética (P.A.) e com a progressão geométrica (P.G.), podemos novamente relembrar alguns pontos sobre a sequência de Fibonacci que foram citados em séries anteriores.

Depois de escrever a sequência de Fibonacci no quadro e relembrar o procedimento para achar os elementos seguintes peça para que os alunos tentem representar algebricamente a lei de formação da sequência de Fibonacci.

Posteriormente podemos pedir para que os alunos tentem perceber algumas propriedades da sequência e que também representem algebricamente.

Daí então o professor pode citar mais aplicações da sequência de Fibonacci e pedir para que os alunos façam pesquisas e trabalhos sobre a sequência de Fibonacci, abordando a parte histórica, as propriedades e relações entre os elementos da sequência como também aplicações da sequência no nosso cotidiano.

Será de muito proveito para despertar o interesse dos alunos para a sequência de Fibonacci e para assuntos matemáticos de um modo geral, trabalhar com vídeos, livros, filmes e questões que envolvem a sequência de Fibonacci.

Vejamos agora algumas questões de Olimpíada de Matemática que envolvem a sequência de Fibonacci e podem servir de modelo para o tipo de questões que podem ser trabalhadas com os alunos do ensino médio, e em seguida veremos as suas respectivas soluções:

4.4. Questões envolvendo a sequência de Fibonacci para se trabalhar no ensino médio.

As questões seguintes são oriundas do material da Olimpíada de Matemática do estado de Goiás. O material e um link de acesso estão citados nas referências em [18]:

1) Prove as seguintes propriedades dos números de Fibonacci:

a) $(a_1).(a_2)+(a_2).(a_3)+...+(a_{2.n-1}).(a_{2.n})=(a_{2.n})^2$, $\forall n \in \mathrm{N}^*$.

Solução: Iremos demonstrar essa propriedade usando indução finita sobre n.

Para facilitar podemos escrever a expressão do seguinte modo:

$$S_{(a_{2.n-1}).(a_{2.n})}=(a_1).(a_2)+(a_2).(a_3)+...+(a_{2.n-1}).(a_{2.n})=(a_{2.n})^2$$

i) Vamos verificar a validade da propriedade para n = 1:

$S_{(a_{2.1-1}).(a_{2.1})}=(a_{2.1})^2$, teremos: $S_{(a_{1.}).(a_{2.})}=a_1.a_2=1.1=(a_2)^2=1^2=1$.

ii) Vamos considerar como nossa hipótese de indução:

$$S_{(a_{2.q-1}).(a_{2.q})}=(a_1).(a_2)+(a_2).(a_3)+...+(a_{2.q-1}).(a_{2.q})=(a_{2.q})^2 ,$$

$\forall q \in \mathrm{N}^*$.

iii) Teremos: $S_{(a_{2.q-1}).(a_{2.q})}=(a_{2.q})^2$, agora devemos mostrar que a propriedade também é válida para n = q +1, somemos em cada membro o que seria a parcela seguinte da soma que aparece na propriedade, podemos escrever:

$$(a_{2.q}).(a_{2.q+1})+S_{(a_{2.q-1}).(a_{2.q})}=(a_{2.q}).(a_{2.q+1})+(a_{2.q})^2 ,$$

$$(a_{2.q}).(a_{2.q+1})+S_{(a_{2.q-1}).(a_{2.q})}=(a_{2.q}).(a_{2.q+1}+a_{2.q})=(a_{2.q}).(a_{2.q+2}),$$

Mais uma vez, iremos somar em cada um dos membros o que seria a próxima parcela da soma, teremos:

$$(a_{2.q+1}).(a_{2.q+2})+(a_{2.q}).(a_{2.q+1})+S_{(a_{2.q-1}).(a_{2.q})}=(a_{2.q}).(a_{2.q+2})+(a_{2.q+1}).(a_{2.q+2}),$$

$$S_{(a_{2.q+1}).(a_{2.q+2})}=(a_{2.q+2}).(a_{2.q}+a_{2.q+1})=(a_{2.q+2}).(a_{2.q+2})=(a_{2.q+2})^2$$

Sendo assim vemos que a propriedade é verdadeira.

b) $(a_1).(a_2)+(a_2).(a_3)+...+(a_{2.n}).(a_{2.n+1})=(a_{2.n+1})^2-1$, $\forall n\in \mathrm{N}^*$.

Solução: Podemos demonstrar essa propriedade usando indução finita sobre n, para facilitar vamos escrever o seguinte:

$$S_{(a_{2.n}).(a_{2.n+1})}=(a_1).(a_2)+(a_2).(a_3)+...+(a_{2.n}).(a_{2.n+1})=(a_{2.n+1})^2-1$$

i) Vamos verificar a validade da propriedade para n = 1:

$$S_{(a_{2.1}).(a_{2.1+1})}=(a_{2.1+1})^2-1=(a_3)^2-1=2^2-1=4-1=3.$$

Realmente: $S_{(a_2).(a_3)}=(a_1).(a_2)+(a_2).(a_3)=1.1+1.2=1+2=3$

ii) Consideremos como nossa hipótese de indução:

$$S_{(a_{2.q}).(a_{2.q+1})}=(a_1).(a_2)+(a_2).(a_3)+...+(a_{2.q}).(a_{2.q+1})=(a_{2.q+1})^2-1$$

$\forall q\in \mathrm{N}^*$.

iii) Teremos: $S_{(a_{2.q}).(a_{2.q+1})}=(a_{2.q+1})^2-1$, agora devemos mostrar que a propriedade também é válida para n = q +1, somemos em cada membro o que seria a parcela seguinte da soma que aparece na propriedade, podemos escrever:

$$(a_{2.q+1}).(a_{2.q+2})+S_{(a_{2.q}).(a_{2.q+1})}=(a_{2.q+1}).(a_{2.q+2})+(a_{2.q+1})^2-1,$$

$$(a_{2.q+1}).(a_{2.q+2})+S_{(a_{2.q}).(a_{2.q+1})}=(a_{2.q+1}).(a_{2.q+2}+a_{2.q+1})-1,$$

$$(a_{2.q+1}).(a_{2.q+2})+S_{(a_{2.q}).(a_{2.q+1})}=(a_{2.q+1}).(a_{2.q+3})-1,$$

Mais uma vez, iremos somar em cada um dos membros o que seria a próxima parcela da soma, teremos:

$$(a_{2.q+2}).(a_{2.q+3})+(a_{2.q+1}).(a_{2.q+2})+S_{(a_{2.q}).(a_{2.q+1})}=$$

$$=(a_{2.q+1}).(a_{2.q+3})+(a_{2.q+2}).(a_{2.q+3})-1,$$

$$S_{(a_{2.q+2}).(a_{2.q+3})}=(a_{2.q+3}).(a_{2.q+1}+a_{2.q+2})-1,$$

$$S_{(a_{2.q+2}).(a_{2.q+3})}=(a_{2.q+3}).(a_{2.q+3})-1,$$

$$S_{(a_{2.q+2}).(a_{2.q+3})}=(a_{2.q+3})^2-1.$$

Sendo assim vemos que a propriedade é verdadeira.

c) $n.a_1+(n-1).a_2+(n-2).a_3+...+2.a_{(n-1)}+a_n=a_{n+4}-(n+3)$, para $\forall n\in \mathrm{N}^*$.

Solução: Mais uma vez vamos utilizar indução finita sobre n:

i) Inicialmente vamos comprovar a validade da propriedade para n = 1, teremos: $1.a_1=1=a_{1+4}-(1+3)=a_5-4=5-4=1$.

ii) Consideremos como nossa hipótese de indução:

$q.a_1+(q-1).a_2+(q-2).a_3+...+2.a_{(q-1)}+a_q=a_{q+4}-(q+3)$, para $\forall q\in \mathrm{N}^*$.

iii) Temos: $q.a_1+(q-1).a_2+(q-2).a_3+...+2.a_{(q-1)}+a_q=a_{q+4}-(q+3)$, da propriedade 2.8 sabemos que: $S_n=a_{n+2}-1$, para $n\geq 1$, onde S_n é a soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci, podemos escrever, $S_{q+1}=a_{q+3}-1$, sendo que: $S_{q+1}=a_1+a_2+a_3+...+a_q+a_{q+1}=a_{q+3}-1$, vamos somar essa última igualdade com a igualdade da hipótese de indução:

$$q.a_1+a_1+(q-1).a_2+a_2+...+2.a_{(q-1)}+a_{(q-1)}+a_q+a_q+a_{q+1}=a_{q+4}+a_{q+3}-(q+3)-1$$

$(q+1).a_1+(q).a_2+(q-1).a_3+...+3.a_{(q-1)}+2.a_q+a_{q+1}=a_{q+5}-(q+4)$. Sendo assim a propriedade é verdadeira.

d) $a_1+2.a_2+3.a_3+...+n.a_n=n.a_{n+2}-a_{n+3}+2$, para $\forall n\in \mathrm{N}^*$.

Solução: Para facilitar podemos escrever a expressão do seguinte modo:

$S_{n.a_n}=n.a_{n+2}-a_{n+3}+2$. Vamos utilizar o método da indução finita sobre n:

i) Vamos comprovar a validade para n = 1,

$S_{1.a_1} = 1.a_{1+2} - a_{1+3} + 2 = 1.a_3 - a_4 + 2 = 2 - 3 + 2 = 1$.

ii) Considerando como nossa hipótese de indução:

$S_{q.a_q} = q.a_{q+2} - a_{q+3} + 2$, para $\forall q \in \mathrm{N}^*$.

iii) Agora devemos mostrar a validade da propriedade para n = q +1, partindo de $S_{q.a_q} = q.a_{q+2} - a_{q+3} + 2$, podemos somar aos dois membros a parcela: $(q+1).a_{q+1}$, teremos:

$$(q+1).a_{q+1} + S_{q.a_q} = (q+1).a_{q+1} + q.a_{q+2} - a_{q+3} + 2,$$

$$S_{(q+1).a_{q+1}} = (q+1).a_{q+1} + q.a_{q+2} + a_{q+2} - a_{q+2} - a_{q+3} + 2,$$

$$S_{(q+1).a_{q+1}} = (q+1).a_{q+1} + (q+1).a_{q+2} - (a_{q+2} + a_{q+3}) + 2$$

$$S_{(q+1).a_{q+1}} = (q+1).(a_{q+1} + a_{q+2}) - (a_{q+2} + a_{q+3}) + 2$$

$S_{(q+1).a_{q+1}} = (q+1).(a_{q+3}) - (a_{q+4}) + 2$. Sendo assim a propriedade é verdadeira.

2) Determine todas as progressões aritméticas de três termos da sequência de Fibonacci.

Solução: Como já foi comentado na página 19 desse trabalho, alguns autores consideram a sequência e Fibonacci começando com o zero, (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...), mas nesse trabalho estamos considerando a sequência de Fibonacci iniciando do 1, e podemos notar que a sequência de Fibonacci é uma sequência crescente formada por números naturais, nesse tipo de sequência numérica em se tratando de média aritmética entre dois termos, o termo de maior valor entre as parcelas da média não pode ser o dobro da média, vamos considerar o termo que é o resultado da média como sendo a_n, teríamos: $a_n = \frac{2a_n + X}{2}$, $2a_n = 2a_n + X$, e assim: X = 0. Sendo que o zero não pertence a sequência, desse modo vemos que a parcela de maior valor na média aritmética entre dois termos dessa sequência deve ser menor que o dobro da média, vamos achar possíveis valores para o termo de maior valor da média. Sendo a_{n+2} temos: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n = a_n + a_{n-1} + a_n = 2a_n + a_{n-1}$.

Vemos que esse valor analisado será maior que o dobro da média aritmética considerada, e é claro que não podemos tomar nenhum termo maior que esse, pois a sequência de Fibonacci é crescente, então só nos resta analisar o caso em que a maior parcela dessa média será a_{n+1} . Temos: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Assim, vemos que a_{n+1} é o único termo maior que a_n e menor que $2a_n$. Vemos que a_{n+1} é o único termo que pode formar uma (P. A.) com a_n , para calcular o termo de menor valor basta trabalharmos com a média aritmética, teremos:

$$a_n = \frac{a_{n+1} + X}{2} ,$$

$$2a_n = a_{n+1} + X \ , \ a_n + a_n - a_{n+1} = X \ , \ a_n + a_{n-1} + a_{n-2} - (a_n + a_{n-1}) = X \ ,$$

e assim, temos: $a_{n-2} = X$.

Então, as progressões aritméticas de três termos que podemos formar sendo os elementos números de Fibonacci são: (a_{n-2}, a_n, a_{n+1}).

3) Mostre que não existem quatro termos da sequência de Fibonacci em progressão aritmética.

Solução: Para demonstrar esse fato vamos trabalhar com a informação obtida na questão anterior, de que as progressões aritméticas com três termos sendo esses termos elementos da sequência de Fibonacci seguem o padrão seguinte: (a_{n-2}, a_n, a_{n+1}), vamos supor que o termo a_q seja um quarto elemento da (P.A.). Trabalhando com as características de uma (P.A.) temos: $a_{n+1} + (a_n - a_{n-2}) = a_q$, pois $(a_n - a_{n-2})$ é a razão da (P.A.). Sabe – se que em uma (P.A.) um termo mais a razão da (P.A.) resulta no termo seguinte. Então podemos escrever:

$$a_{n+1} + a_n - a_{n-2} = a_{n+2} - a_{n-2} = a_q \text{, teremos:}$$

$$a_{n+2} = a_q + a_{n-2} ,$$

Como $a_q > a_{n+1}$ não podemos ter $a_{n+2} = a_q + a_{n-2}$ sendo a_q um número de Fibonacci. Sendo assim mostramos que não existe a_q de modo que essa sequência seja uma (P.A.), nessa questão usamos o método de demonstração por absurdo.

CONCLUSÃO

Nessa pesquisa conseguimos perceber a importância das sequências numéricas com uma ênfase na sequência de Fibonacci e pudemos comprovar que essa sequência realmente é um caso a parte quando se trata de sequências numéricas, isso por conta das inúmeras propriedades existentes, das relações que existem entre essa sequência e outros tópicos matemáticos, por exemplo, a curiosidade observada com os determinantes que tem elementos da sequência dispostos em certa ordem e a relação com o triângulo de Pascal.

Além disso, percebemos algumas das várias aplicações que podemos encontrar para a sequência de Fibonacci, por exemplo, uma melhor captação de energia solar, fora as aplicações mais conhecidas, mas que também são muito interessantes.

Uma sequência numérica tão especial não pode deixar de ser apresentada aos alunos do ensino básico, por isso, foi mencionada uma sugestão simples de como se trabalhar com essa sequência de acordo com os assuntos que já foram estudados pelos alunos e que são essenciais para a compreensão da sequência de Fibonacci com as suas características e aplicações.

Fora essa sugestão, apresentamos a resolução de algumas questões de Olimpíada de Matemática que envolvem a sequência de Fibonacci, isso para estimular o desenvolvimento dos alunos nessa parte que é de grande importância na matemática, que é a parte das demonstrações.

O trabalho com a sequência de Fibonacci sem dúvida será extremamente vantajoso para despertar o interesse dos alunos, estimular o raciocínio matemático e na percepção da aplicação dos assuntos matemáticos em situações do nosso cotidiano.

REFERÊNCIAS

[1] BIEMBENGUT, M. S. Número de Ouro e secção áurea: considerações e sugestões para sala de aula. Blumenau: FURB, 1996.

[2] BOYER, Carl. B. História da Matemática. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

[3] CÂMARA, M. A.; RODRIGUES, M. S. O Número Φ. – FAMAT em Revista, n°11, p. 81-184, 2008.

[4] Hefez, Abramo, Elementos de Aritmética,SBM, 2011.

[5] HUNTLEY, H. E. A Divina Proporção: um ensaio sobre a beleza na Matemática. Tradução: Luís Carlos Ascêncio Nunes. – Brasília: Editora da UnB, 1985.

[6] LIVIO, Mario. Razão Áurea: a história de fi, um número surpreendente. 6.ed. Rio de Janeiro: Record, 2011.

[7] ZAHN, Maurício. Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2011.

[8] Magalhães, Cícero T. B. Sequência de Fibonacci, Revista Eureka!, n° 21.

[9] *Elon Lages Lima.* O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO, Revista Eureka!, n° 3.

[10] <http://pt.wikipedia.org/wiki/Número_de_Fibonacci> Acesso em: março/2013

[11] <http://pt.wikipedia.org/wiki/Sequência_(matemática)> Acesso em: março/2013

[12] <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib1.htm> Acesso em: abril/2013

[13] <http://rotinadigital.net/wordpress/garoto-de-13-anos-revoluciona-tecnologia-solar-a-partir-das-arvores/> Acesso em: abril/2013

[14] <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib2.htm> Acesso em: maio/2013

[15] <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm41/> Acesso em: maio/2013

[16] <http://www.youtube.com/watch?v=QaWepnGWRs8> Acesso em: maio/2013

[17]<http://www.uff.br/sintoniamatematica/matematicaenatureza/matematicaenatureza-html/audio-flores-br.html> Acesso em: junho/2013

[18] Revista da olimpíada de matemática do estado de Goiás nº 4 – abril de 2003 <http://omeg.mat.ufg.br/uploads/36/original_r4.pdf#page=61> Acesso em: junho/2013

[19] Lima, Elon Lages. A matemática do ensino médio - volume 1/Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado - 9.ed. - Rio de Janeiro: SBM 2006

[20] Martinez, Fabio Brochero; et al. Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro / Fabio Brochero Martinez; et al. 2 ed. - Rio de Janeiro: IMPA, 2013